

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

М. А. Засядько, О. О. Чупринін

ОПР МАТЕРІАЛІВ. БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для студентів 2 курсу денної форми навчання
спеціальності 191 – Архітектура та містобудування)*

Харків – ХНУМ ім. О. М. Бекетова – 2021

Засядько М. А. Опір матеріалів. Будівельна механіка : конспект лекцій для студентів 2 курсу денної форми навчання спеціальності 191 – Архітектура та містобудування / М. А. Засядько, О. О. Чупринін; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 115 с.

Автори: М. А. Засядько, О. О. Чупринін

Рецензент: А. О. Гарбуз, доцент кафедри теоретичної і будівельної механіки (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова).

*Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол № 8 від 19.05.2020.*

© М. А. Засядько, О. О. Чупринін, 2021
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021

ЗМІСТ

Вступ.....	6
1 Елементи статики. Геометричні характеристики перерізів.....	7
1.1 Елементи статики.....	7
1.1.1 Проекція сили на вісь.....	7
1.1.2 Алгебраїчний момент сили відносно точки.....	8
1.1.3 Пара сил.....	8
1.1.4 Розподілені сили.....	9
1.1.5 Умови рівноваги тіла.....	9
1.2 Геометричні характеристики перерізів.....	11
1.2.1 Загальні визначення.....	11
1.2.2 Статичні моменти перерізів. Центр ваги.....	12
1.2.3 Моменти інерції простих перерізів.....	13
1.2.4 Моменти інерції при паралельному переносі осей та при повороті осей. Моменти інерції складних перерізів.....	14
1.2.5 Головні осі та головні моменти інерції.....	16
Запитання для самоконтролю.....	17
2 Види деформацій стержнів. Розтяг-стиск	18
2.1 Види деформацій.....	18
2.2 Припущення.....	19
2.3 Розтяг-стиск.....	19
2.3.1 Внутрішні зусилля та напруження. Метод перерізів. Умова міцності	19
2.3.2 Епюри поздовжніх сил.....	21
2.3.3 Деформації при розтягу-стиску. Закон Гук.....	22
2.3.4 Урахування власної ваги стержня.....	23
2.3.5 Напруження на похилих площинках.....	24
2.3.6 Механічні характеристики матеріалів.....	25
Запитання для самоконтролю.....	27
3 Згин.....	28
3.1 Балки. Опори та опорні реакції.....	28
3.2 Внутрішні зусилля.....	30
3.3 Диференційні залежності при згині	32
3.4 Епюри внутрішніх зусиль у балках.....	33
3.5 Напруження при згині. Умова міцності.....	36
3.6 Визначення переміщень. Метод початкових параметрів.....	40
3.7 Поняття про складні деформації.....	43
Запитання для самоконтролю.....	44

4 Статично визначувані рами.....	46
4.1 Основні поняття.....	46
4.2 Розрахунок рами.....	47
Запитання для самоконтролю.....	51
5 Стійкість.....	52
5.1 Основні визначення.....	52
5.2 Ступені вільності.....	54
5.3 Методи розрахунку на стійкість. Статичний метод.....	54
5.4 Стійкість прямого стиснутого стержня.....	58
5.4.1 Стійкість прямого стиснутого стержня з шарнірним закріпленням кінців. Формула Ейлера.....	58
5.4.2 Критична сила для прямого стиснутого стержня при різних закріпленнях кінців.....	60
5.4.3 Критичні напруження. Стійкість за межею пружності.....	61
5.4.4 Розрахунок стержнів на стиск з урахуванням стійкості... Запитання для самоконтролю.....	62 63
6 Основні теореми для пружних систем. Визначення переміщень методом Мора.....	64
6.1 Принцип можливих переміщень для пружних систем.....	64
6.2 Робота зовнішніх сил. Узагальнені сили та узагальнені переміщення.....	64
6.3 Робота внутрішніх сил.....	66
6.4 Теореми про взаємність.....	68
6.5 Обчислення переміщень за методом Мора.....	69
Запитання для самоконтролю.....	71
7 Кінематичний аналіз споруд.....	72
7.1 Основні визначення.....	72
7.2 Кінематичний аналіз.....	72
7.3 Статичний метод перевірки геометричної незмінюваності.....	74
Запитання для самоконтролю.....	75
8 Статично визначувані ферми.....	76
8.1 Основні поняття. Класифікація ферм.....	76
8.2 Розрахунок ферм.....	79
8.2.1 Спосіб вирізання вузлів.....	79
8.2.2 Розподіл зусиль у стержнях балочної ферми. Спосіб моментної точки та спосіб проєкцій.....	80
Запитання для самоконтролю.....	84

9 Розпірні системи.....	85
9.1.Основні визначення.....	85
9.2 Розрахунок тришарнірної арки на вертикальне навантаження.....	87
Запитання для самоконтролю.....	92
10 Поняття про розрахунок статично невизначуваних систем.....	93
10.1 Основи методу сил.....	93
10.1.1 Основні визначення. Ступінь стичної невизначуваності.....	93
10.1.2 Розрахунок рам методом сил.....	95
10.2 Основи метода скінченних елементів.....	99
10.2.1 Види скінченних елементів. Ступені вільності.....	99
10.2.2 Кінематичні характеристики вузлів рами.....	100
10.2.3 Статичні характеристики вузлів рами. Рівняння рівноваги.....	102
10.2.4 Матриця жорсткості стержня рами в локальній системі координат.....	104
10.2.5 Матриця жорсткості стержня рами у загальній системі координат.....	106
10.2.6 Матриця жорсткості елемента ферми.....	108
10.2.7 Матриця жорсткості всієї системи.....	109
10.2.8 Визначення зусиль у стержнях рами.....	109
Запитання для самоконтролю.....	112
Список рекомендованої літератури.....	114

ВСТУП

Опір матеріалів і будівельну механіку у широкому вжитку слова називають будівельною механікою. Це розділ механіки, якій вивчає інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість споруд.

Розрахунки на міцність полягають у визначенні, чи буде конструкція протистояти зовнішнім впливам, чи зруйнується під дією цих навантажень.

Метою розрахунків на жорсткість є визначення таких розмірів елементів конструкцій, при яких зміна розмірів і форми не перевищує заданих величин, що визначаються з умов експлуатації.

Розрахунок на стійкість забезпечує зберігання початкової форми рівноваги конструкції та її елементів при діючих навантаженнях.

Для того щоб споруда цілком відповідала вимогам міцності, жорсткості та стійкості, а отже була надійна в експлуатації і одночасно економічно вигідною, необхідно надати її елементам найбільш раціональної форми і, знаючи властивості матеріалів, з яких вона виготовляється, визначити відповідні розміри залежно від параметрів навантаження. Під час проведення розрахунків необхідно сполучити наведені вище характеристики з дешевиною, що є наслідком економії матеріалу.

1 ЕЛЕМЕНТИ СТАТИКИ. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕРІЗІВ

1.1 Елементи статички

1.1.1 Проекція сили на вісь

Проекція сили на вісь – алгебраїчна величина, що являє собою відрізок осі між проекціями початку та кінця сили на цю вісь (рис. 1.1). Проекція має знак «+», якщо вектор сили нахилений у бік додатного напрямку осі, і знак «-», - якщо в бік від'ємного напрямку. Як видно з рисунку 1.1, проекція сили на вісь чисельно дорівнює добутку величини сили на косинус гострого кута між силою та віссю:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha; \quad F_y = F \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = F \cdot \sin \alpha. \quad (1.1)$$

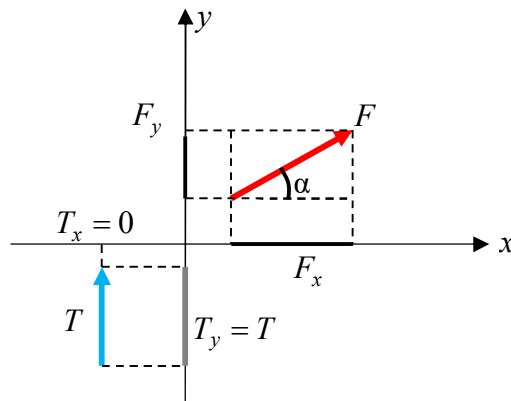


Рисунок 1.1

У частинному випадку, коли сила паралельна осі, її проекція на цю вісь чисельно дорівнює силі (на рис. 1.1 $T_y = T$). Якщо сила перпендикулярна до осі, її проекція на цю вісь дорівнює нулю (на рис. 1.1 $T_x = 0$).

Якщо сила знаходиться у просторі, її проекції можна визначити так (рис. 1.2):

$$F_x = 0a = F_{xy} \cdot \cos \beta = F \cos \alpha \cos \beta,$$
$$F_y = 0b = F_{xy} \cdot \sin \beta = F \cos \alpha \sin \beta,$$
$$F_z = 0c = F \sin \alpha.$$

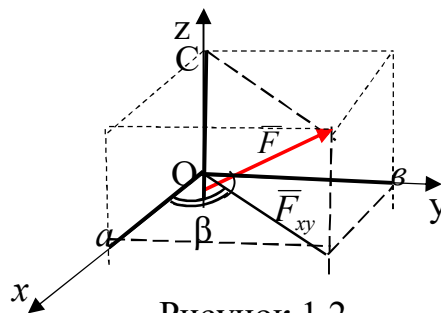


Рисунок 1.2

1.1.2 Алгебраїчний момент сили відносно точки

Під час розв'язання задач у площині S використовують поняття алгебраїчного моменту сили відносно точки.

Момент сили відносно точки чисельно дорівнює добутку величини сили на плече:

$$M_0(\vec{F}) = -F \cdot h. \quad (1.2)$$

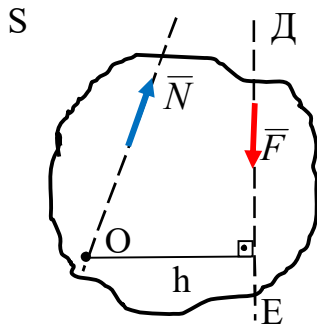


Рисунок 1.3

Точку O називають моментною (рис. 1.3). Плече сили h - довжина перпендикуляра, спущеного від моментної точки на лінію дії сили \vec{F} . Лінія дії сили - це пряма (ДЕ на рис. 1.3), на якій розташована сила.

Знак моменту «+», якщо сила прагне обертати плече сили відносно моментної точки проти руху годинникової стрілки, і знак «-», якщо за рухом стрілки годинника:

Алгебраїчний момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через цю точку (у цьому випадку плече $h = 0$):

$$M_0(\vec{N}) = 0.$$

1.1.3 Пара сил

Парою сил називається система двох сил у площині S , які рівні за величиною, протилежно спрямовані і не лежать на одній лінії дії.

Схематичне позначення моменту пари сил наведено на рисунку 1.4.

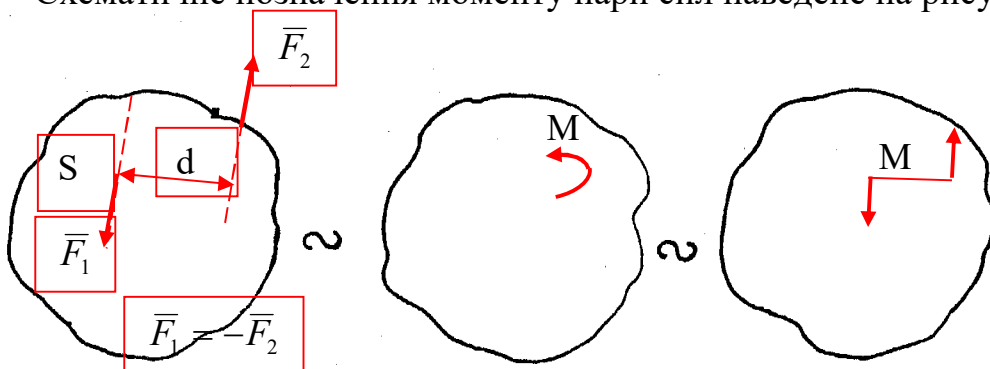


Рисунок 1.4

Плече пари d - найкоротша відстань між лініями дії сил, що складають пару.

Модуль моменту пари не залежить від вибору точки і дорівнює добутку сили на плече пари: $M = F_1 \cdot d = F_2 \cdot d$. Сума проєкцій сил пари на будь-яку вісь дорівнює нулю оскільки проєкції сил однакові за величиною і протилежні за знаком. Тому пару сил часто зображають стрілкою, спрямованою у бік обертання пари та величиною її моменту (рис. 1.4).

1.1.4 Розподілені сили

Розподілені сили (розподілене навантаження) - система паралельних сил, які діють на кожную точку об'єму, поверхні або лінії (рис. 1.5).

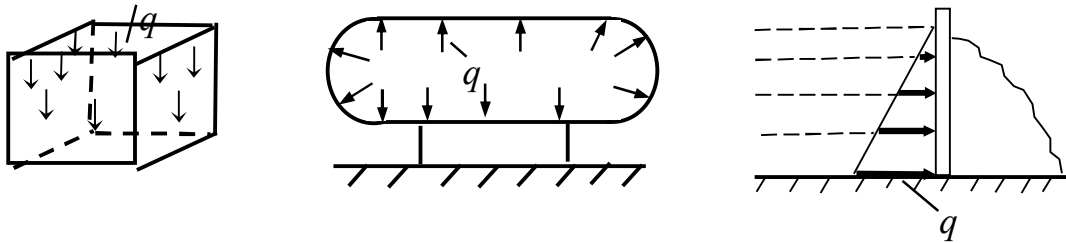


Рисунок 1.5

Навантаження, розподілене уздовж лінії характеризується його інтенсивністю q , тобто силою, яка припадає на одиницю довжини: $[q] = \frac{H}{м}$.

Для розв'язання задач рівноваги розподілені сили зазвичай замінюють *рівнодійною* \bar{Q} .

Рівномірно розподілені сили: $q = const$ (рис. 1.6).

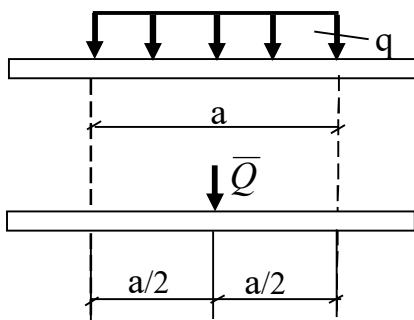


Рисунок 1.6

Рівнодійна такої системи сил \bar{Q} дорівнює за модулем $Q = q \cdot a$

і прикладена посередині відрізка, на який діють розподілені сили.

1.1.5 Умови рівноваги тіла

Складне переміщення тіла на площині (рис. 1.7) з положення 1 у інше положення 2 можна здійснити трьома простими рухами: поступальними переміщеннями уздовж двох напрямків (наприклад уздовж осей x та y) та поворотом φ відносно будь-якої точки, наприклад відносно т. А.

Можливість кожного такого простого руху називають *ступенем вільності*. Отже, *тіло на площині має три ступеня вільності*.

Для нерухомості тіла необхідно накласти на нього в'язі у напрямку кожного ступеня вільності, тобто три в'язі. Якщо замінити ці в'язі реакціями, умовами нерухомості будуть три умови рівноваги – умови відсутності переміщень у відповідних трьох напрямках:

$$\sum \vec{F}_{kx} = 0; \quad \sum \vec{F}_{ky} = 0; \quad \sum M_O(\vec{F}_k).$$

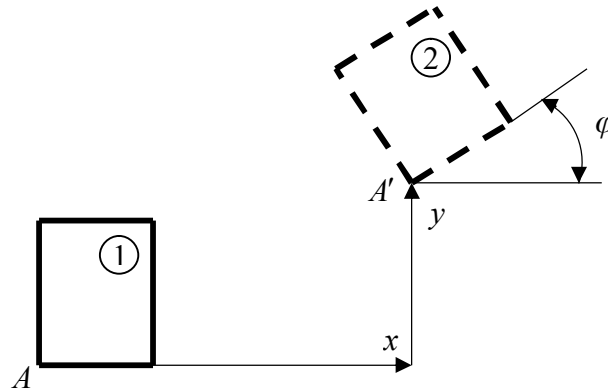


Рисунок 1.7

Отже, для довільної системи сил на площині маємо три необхідні рівняння рівноваги:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum M_A = 0. \quad (1.3)$$

Для окремих випадків розташування сил кількість необхідних рівнянь рівноваги скорочується:

- для системи паралельних сил лінійно незалежними залишаються два рівняння;
- для системи збіжних сил, тобто сил, лінії дії яких перетинаються у одній точці, – два рівняння;
- для системи сил, розташованих на одній прямій – одне рівняння.

Зауважимо, що рівняння (3) одержані виходячи з переміщення тіла у двох поступальних переміщеннях та одному повороті. Поступальні переміщення тіла можна замінити обертанням навколо інших, ніж А, точок. Отже, кожне рівняння нулю суми проекцій сил на осі можна замінити рівнянням рівності нулю моментів сил. Необхідно при цьому мати на увазі, що три моментні точки не повинні лежати на одній прямій. Зауважмо, що для просторової системи сил у загальному випадку необхідно задовольняти шести рівнянням рівноваги: трьом рівнянням проекцій і трьом рівнянням моментів.

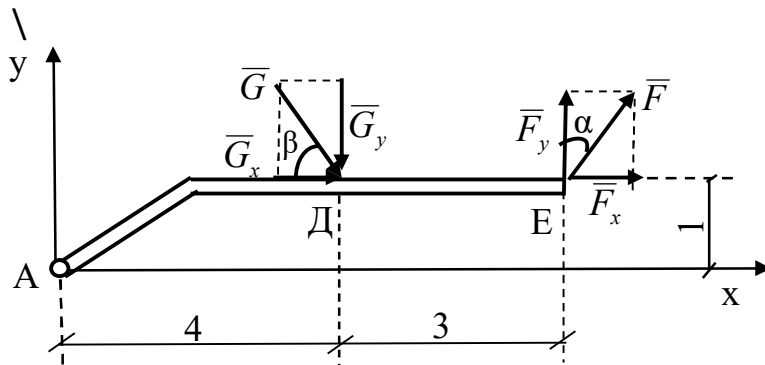
Теорема Варініона для плоскої системи сил: Якщо плоска система сил зводиться до рівнодійної, то її момент відносно будь-якої точки О площини дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил системи відносно тієї самої точки:

$$M_O(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n M_O(\vec{F}_i).$$

Цю теорему зручно використовувати для знаходження алгебраїчного моменту сили відносно точки, розкладаючи силу на складові, паралельні осям координат: Так для системи, наведеної на рисунку 1.8, маємо:

$$M_A(\bar{G}) = M_A(\bar{G}_x) + M_A(\bar{G}_y) = -G_x \cdot 1 - G_y \cdot 4;$$

$$M_A(\bar{F}) = M_A(\bar{F}_x) + M_A(\bar{F}_y) = -F_x \cdot 1 + F_y \cdot 7,$$



де величини складових $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{G}_x, \bar{G}_y$:

$$F_x = F \cdot \sin \alpha,$$

$$F_y = F \cdot \cos \alpha,$$

$$G_x = G \cdot \cos \beta,$$

$$G_y = G \cdot \sin \beta.$$

Рисунок 1.8

1.2 Геометричні характеристики перерізів

1.2.1. Загальні визначення

При розрахунках на згин у розрахунковій схемі стержень зображається, як правило, своєю віссю – лінією, на якій лежать центри ваги його перерізів. Усі дані про перерізи наводяться інтегрально – у вигляді геометричних характеристик: площ, моментів інерції та інших.

Розглянемо переріз довільної форми (рис. 1.9) з загальною площею A .

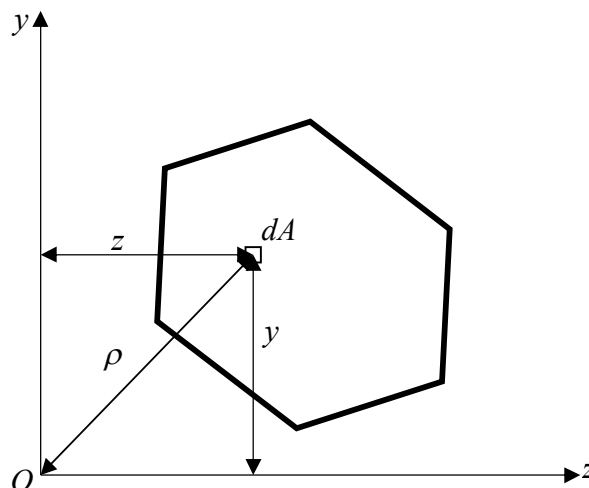


Рисунок 1.9

Виділимо на ній елементарну площинку dA з координатами z, y . Введемо такі геометричні характеристики перерізу:

– статичний момент перерізу відносно осі z

$$S_z = \int_{(A)} y dA; \quad (1.4)$$

– *статичний момент* перерізу відносно осі y

$$S_y = \int_{(A)} z dA; \quad (1.5)$$

– *момент інерції* перерізу відносно осі z

$$I_z = \int_{(A)} y^2 dA; \quad (1.6)$$

– *момент інерції* перерізу відносно осі y

$$I_y = \int_{(A)} z^2 dA; \quad (1.7)$$

– *відцентровий момент інерції* перерізу

$$I_{zy} = \int_{(A)} yz dA; \quad (1.8)$$

– *полярний момент інерції* перерізу

$$I_\rho = \int_{(A)} \rho^2 dA. \quad (1.9)$$

Оскільки $\rho^2 = y^2 + z^2$, маємо:

$$I_\rho = \int_{(A)} (y^2 + z^2) dA = \int_{(A)} y^2 dA + \int_{(A)} z^2 dA = I_z + I_y. \quad (1.10)$$

1.2.2 Статичні моменти перерізів. Центр ваги

У загальному випадку перерізу статичні моменти обчислюють безпосередньо за (1.4, а), (1.4, б). Якщо відомі площа A та координати z_0, y_0 центру ваги перерізу, статичні моменти можна визначити так:

$$S_z = A \cdot y_0; \quad S_y = A \cdot z_0. \quad (1.11)$$

Звідси можна зробити такі висновки:

1) *статичний момент перерізу відносно осі, яка проходить через центр ваги (центральної осі) дорівнює нулю;*

2) координати центру ваги у деяких обраних осях y, z можна визначити, якщо відомі статичні моменти перерізу відносно цих осей:

$$y_0 = \frac{S_z}{A}; \quad z_0 = \frac{S_y}{A}. \quad (1.12)$$

Якщо складний переріз можна розбити на прості частини, його статичний момент можна визначити як суму статичних моментів цих частин:

$$S_z = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 + \dots; \quad S_y = A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2 + A_3 \cdot z_3 + \dots, \quad (1.13)$$

де A_1, A_2, A_3, \dots - площі простих частин, а $y_1, y_2, y_3, \dots, z_1, z_2, z_3, \dots$ - координати центрів ваги цих частин.

Визначення положення центру ваги покажемо на прикладі різнобічного кутового профілю $125 \times 80 \times 10$. Зобразимо профіль нехтуючи закругленнями (рис. 1.10). Розміри на рисунку наведені в см.

Оберемо осі y, z що проходять через зовнішні сторони перерізу. Розіб'ємо фігуру на два простих прямокутника: перший - вертикальний має площу $A_1 = 8 \times 1 = 8 \text{ см}^2$ і такі координати центру ваги $z_1 = 0,5 \text{ см}$, $y_1 = 4 \text{ см}$, другий - горизонтальний має площу $A_2 = 11,5 \times 1 = 11,5 \text{ см}^2$ і координати центру ваги $z_2 = 6,75 \text{ см}$, $y_2 = 0,5 \text{ см}$.

Загальна площа перерізу:

$$A = A_1 + A_2 = 8 + 11,5 = 19,5 \text{ см}^2.$$

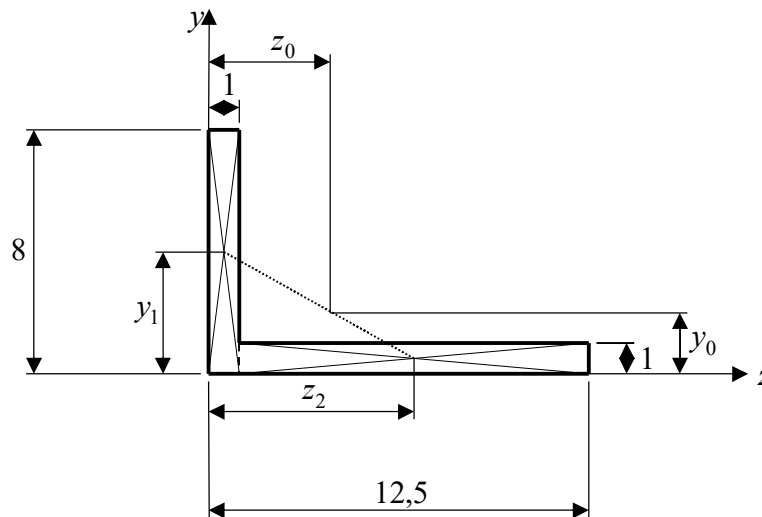


Рисунок 1.10

Далі обчислюємо статичні моменти перерізу відносно осей y та z :

$$S_y = A_1 \cdot z_1 + A_2 \cdot z_2 = 8 \times 0,5 + 11,5 \times 6,75 = 81,625 \text{ см}^3;$$

$$S_z = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 = 8 \times 4 + 11,5 \times 0,5 = 37,75 \text{ см}^3.$$

Тепер за (25) маємо координати центру ваги перерізу:

$$y_0 = \frac{S_z}{A} = \frac{81,625}{19,5} = 4,18 \text{ см}; \quad z_0 = \frac{S_y}{A} = \frac{37,75}{19,5} = 1,94 \text{ см}.$$

Зауважимо, що центр ваги перерізу повинен знаходитись на прямій, яка з'єднує центри ваги двох частин перерізу.

1.2.3 Моменти інерції простих перерізів

Визначення моментів інерції покажемо на прикладі прямокутного перерізу (рис. 1.11, а).

Проведемо осі y, z , що проходять через центр ваги перерізу. Такі осі називають центральними осями перерізу. На відстані y від осі z виділимо елементарну полосу висотою dy . Площа полоси становить $dA = b \cdot dy$. За (1.4, а) запишемо момент інерції відносно осі z :

$$I_z = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{b}{3} (h^3/8 + h^3/8) = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогічно момент інерції перерізу відносно осі y становить:

$$I_y = \frac{hb^3}{12}.$$

Запишемо відцентровий момент інерції перерізу:

$$I_{yz} = \int_{(A)} yz dA = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} yz dy dz = \int_{-h/2}^{h/2} y \frac{z^2}{2} dy \Big|_{-b/2}^{b/2} = \int_{-h/2}^{h/2} y \cdot 0 dy = 0. \quad (1.14)$$

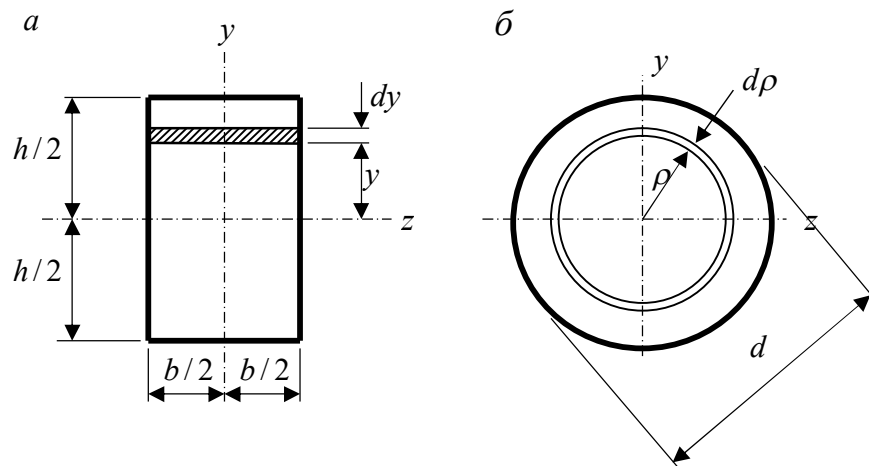


Рисунок 1.11

Очевидно, що подібна рівність буде виконуватися для осей симетрії будь-якого перерізу.

Далі розглянемо переріз у формі кола (рис. 1.11, б).

Виділимо на відстані ρ кільце товщиною $d\rho$. Площа цього кільця становить $dA = 2\pi \rho d\rho$. За (1.7) одержимо полярний момент інерції перерізу:

$$I_\rho = \int_0^{d/2} \rho^2 2\pi \rho d\rho = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi d^4}{32}.$$

У відповідності до (1.5) $I_\rho = I_y + I_z = \frac{\pi d^4}{32}$.

Оскільки для круглого перерізу момент інерції відносно будь-якої центральної осі – величина постійна, тобто $I_y = I_z$, маємо:

$$I_z = I_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

1.2.4 Моменти інерції при паралельному переносі осей та при повороті осей. Моменти інерції складних перерізів

Моменти інерції відносно центральних осей називають центральними моментами інерції.

Розглянемо довільний переріз (рис. 1.12). Осі z, y є центральні осі інерції, а осі z_1, y_1 паралельні їм на відстанях відповідно a та b , отже, $z_1 = z + a, y_1 = y + b$.

Запишемо момент інерції перерізу відносно осі z_1 :

$$I_{z_1} = \int_{(A)} y_1^2 dA = \int_{(A)} (y + a)^2 dA = \int_{(A)} y^2 dA + 2a \int_{(A)} y dA + a^2 \int_{(A)} dA.$$

Перший інтеграл у одержаному виразі являє собою центральний момент інерції відносно осі z , інтеграл у другому доданку – статичний момент перерізу відносно центральної осі – дорівнює нулю згідно (1.9), а останній інтеграл дає площу перерізу A .

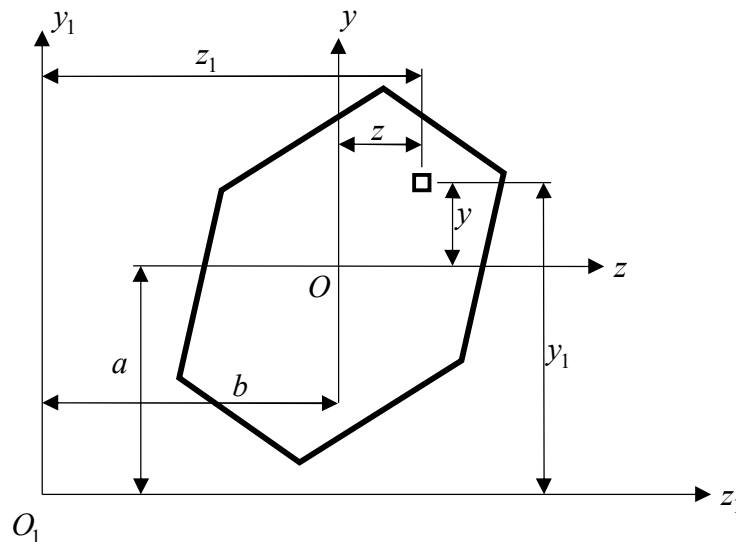


Рисунок 1.12

Отже, маємо:

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A. \quad (1.15)$$

Аналогічно

$$I_{y_1} = I_y + b^2 A. \quad (1.16)$$

Отже момент інерції відносно будь-якої осі дорівнює моменту інерції відносно паралельної їй центральної осі плюс добуток площі перерізу на квадрат відстані між осями.

Далі запишемо відцентровий момент інерції перерізу:

$$I_{y_1 z_1} = \int_{(A)} y_1 z_1 dA = \int_{(A)} (y + a)(z + b) dA = \int_{(A)} yz dA + a \int_{(A)} z dA + b \int_{(A)} y dA + ab \int_{(A)} dA.$$

Аналізуючи інтеграли у одержаному виразі, можемо записати:

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} + ab A. \quad (1.17)$$

Зауважимо, що у (1.14) величини a та b повинні братися з урахуванням знаків, тобто як координати центру ваги перерізу у нових осях.

Аналізуючи (1.13, а, б) та (1.14) можна зробити такі висновки: осьові моменти інерції є завжди додатні;

центральный момент инерции ϵ наименьшим з моментів інерції відносно будь-якої осі, паралельної центральній.

При визначенні моментів інерції перерізів складної форми їх можна розбити на прості складові і потім з використанням (1.13, в, б), та (1.14) обчислити ці моменти інерції як суми моментів інерції складових.

Далі розглянемо випадок, коли необхідно визначити момент інерції перерізу відносно повернутих осей.

На рисунку 1.13 осі $y_1 z_1$ повернуті відносно вихідних осей yz проти годинникової стрілки на кут α .

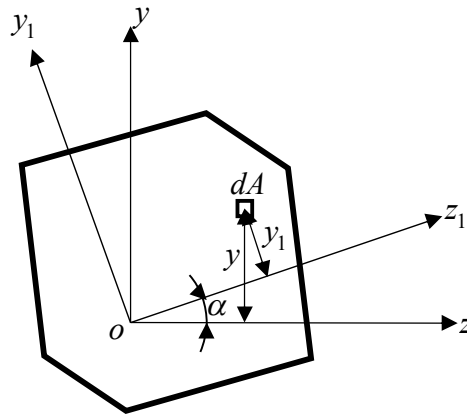


Рисунок 1.13

Неважко записати: $y_1 = y \cos \alpha - z \sin \alpha$; $z_1 = y \sin \alpha + z \cos \alpha$. Наведемо без перетворень остаточний вигляд для моментів інерції відносно повернутих осей:

$$I_{z_1} = I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha ; \quad (1.18)$$

$$I_{y_1} = I_y \cos^2 \alpha + I_z \sin^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha ; \quad (1.19)$$

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha ; \quad (1.20)$$

Шляхом простих перетворень неважко показати, що сума осьових моментів інерції не змінюється при повороті осей:

$$I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + I_z \quad (1.21)$$

1.2.5 Головні осі та головні моменти інерції

Як свідчать залежності (1.18), (1.19), (1.21), моменти інерції змінюються при повороті осей. Якщо осьові моменти інерції завжди додатні, то відцентровий момент інерції може бути як додатним, так і від'ємним, а отже, і нульовим. Осі, відносно яких відцентровий момент інерції обертається на нуль, називають головними осями інерції. Моменти інерції відносно головних осей називають головними моментами інерції.

Звичайно практичне значення мають головні центральні осі та відповідно головні центральні моменти інерції. Тому далі під головними осями та головними моментами інерції будемо вважати саме головні центральні осі та головні центральні моменти інерції перерізу.

Прирівнюючи нулю вираз для відцентрового моменту інерції (1.20), одержимо:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}. \quad (1.22)$$

Звідси можна визначити кут, під яким головні осі повернуті відносно вихідних осей. Оскільки функція тангенса має періодичність π , два суміжних рішення (1.22) дають кути α , що відрізняються на 90° . Отже, головні осі будуть перпендикулярні одна одній

Відзначимо такі властивості головних осей:

- вісь симетрії завжди є однією з головних осей перерізу;
- якщо переріз має більше, ніж дві осі симетрії, будь-які центральні осі є головними осями.

Головні осі мають властивості екстремальності: момент інерції відносно однієї з них є найбільшим, а відносно другої – найменшим з моментів інерції відносно будь-яких повернутих осей.

Запитання для самоконтролю

1. Що являє собою проекція сили на вісь?
2. Чому дорівнює проекція сили на вісь?
3. Наведіть особливі випадки проекції сили.
4. Як обчислити момент сили відносно точки?
5. Що являє собою пара сил? Які її властивості?
6. Наведіть види розподіленого навантаження.
7. Чим характеризується розподілене навантаження?
8. Як враховується проекція та момент розподіленого навантаження?
9. Що таке пара сил? Які її властивості?
10. Що виражають рівняння рівноваги?
11. Які є види рівнянь рівноваги?
12. Яка кількість рівнянь рівноваги для окремих випадків розташування сил?
13. Які є геометричні характеристики перерізів?
14. Як визначають центр ваги перерізу?
15. Що таке момент інерції перерізу?
16. Наведіть вираз для моменту інерції прямокутного перерізу відносно центральної осі?
17. Те саме для колового перерізу?
18. Що таке головні осі та головні моменти інерції?
19. Які властивості центральних та головних центральних моментів інерції?

2 ВИДИ ДЕФОРМАЦІЙ СТЕРЖНІВ. РОЗТЯГ-СТИСК

2.1 Види деформацій

Під дією навантаження пружне тіло, зокрема стержень, змінює свої розміри та форму – деформується, а його точки зазнають переміщень. Залежно від того, як при дії навантаження змінюються розміри та форма стержня, розрізняють прості та складні види його деформацій. До простих деформацій відносять: *розтяг* (рис. 2.1), коли сили діють вздовж осі (лінії, яка проходить через центри ваги перерізів) від стержня, *стиск* (рис. 2.2), коли сили діють вздовж осі до стержня; *згин* (рис. 2.3) під дією пар сил (моментів), які лежать у одній площині з поздовжньою віссю стержня; *зсув* (рис. 2.4), що відбувається під дією сил, перпендикулярних до осі стержня; *кручення* (рис. 2.5) відбувається під дією пар сил, розташованих у площині поперечного перерізу стержня.



Рисунок 2.1



Рисунок 2.2

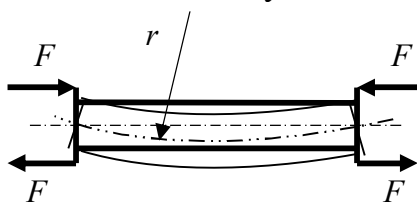


Рисунок 2.3

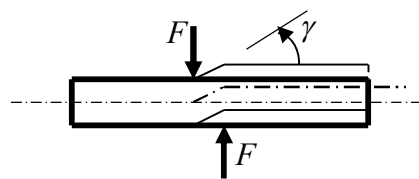


Рисунок 2.4

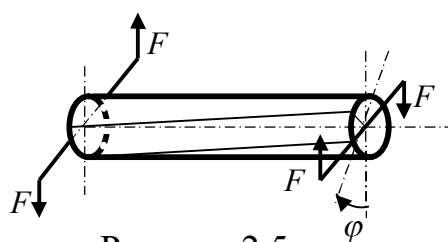


Рисунок 2.5

Перші дві деформації відбуваються під дією сил, протилежних за напрямком. Оскільки зміна напрямку сили пов'язана зі зміною її знаку, ці дві деформації об'єднують в одну – деформацію розтягу-стиску.

На рисунках 2.1–2.2 Δl позначено відповідно *подовження* та *скорочення* довжини стержня при розтягу та стиску; на рисунку 2.3 r - *радіус викривлення осі стержня* при його згині; на рисунку 2.4 літерою γ позначено *кут зсуву* перерізу стержня і на рисунку 2.5 φ - *кут закручення* стержня при крученні.

Якщо дія навантаження викликає деформації кількох простих видів, маємо складну деформацію. Зокрема, при дії сил, паралельних осі стержня, виникає стиск або розтяг зі згином. Таку деформацію називають *позацентричний стиск-розтяг*. При дії декількох сил, перпендикулярних до осі стержня виникають

деформації згину та зсуву – *поперечний згин*. Існують й інші поєднання простих деформацій.

2.2 Припущення

Розглядаючи розрахунок споруд або їх частин, виходять з таких припущень щодо матеріалів та роботи споруд.

Матеріал вважається *пружним, суцільним, однорідним, ізотропним*. Пружність означає здатність матеріалу поновлювати свою форму та розміри після зняття навантаження. На підставі цього припущення зазвичай вважається, що переміщення точок споруди пропорційні величині прикладеного навантаження. Суцільність передбачає відсутність порожнин, зокрема не враховується атомарна побудова матеріалу. Однорідність полягає у тому, що властивості матеріалу однакові для усіх точок незалежно від місця розташування. Для ізотропних матеріалів їх властивості однакові в усіх напрямках.

Припущення *малі деформації* полягає в тому, що передбачаються переміщення, малі порівняно з розмірами перерізів стержнів, а деформації (відносні переміщення) малі порівняно з одиницею. На підставі цього припущення розрахунок виконують за недеформованою схемою системи, тобто зміною геометрії системи в результаті її деформації при обчисленні зусиль нехтують.

Для пружних систем на підставі лінійної залежності між переміщеннями та деформаціями дійсний *принцип незалежності дії сил*, на підставі якого переміщення від декількох сил дорівнює сумі переміщень від кожної окремої з цих сил. У більш загальному випадку на тіло діють не лише навантаження, а й інші впливи (зміна температури, осідання опор), для яких також має місце принцип незалежності. Тому цей принцип також називають *принципом суперпозиції*.

У практичних розрахунках використовується *принцип локальності дії самоврівноваженого навантаження – принцип Сен-Венана*. Згідно з ним характер прикладання навантаження швидко затухає при віддаленні від місця його розташування. Зокрема використання цього принципу дозволяє замінити розподілене на малій порівняно з розмірами тіла поверхні навантаження зосередженою у точці силою.

2.3 Розтяг-стиск

2.3.1 Внутрішні зусилля та напруження. Метод перерізів.

Умова міцності

Розглянемо стержень, що зазнає розтягу (рис. 2.6, а). Стержень знаходиться у рівновазі: $\sum F_x = F - F = 0$. Проведемо переріз 1–1 і відкинемо праву частину (рис. 2.6, б). Оскільки стержень знаходиться у рівновазі, кожна

його частина теж знаходиться у рівновазі, отже у точках перерізу повинні діяти внутрішні сили, паралельні осі стержня.

Остання діє вздовж осі стержня і називається *поздовжньою силою*.

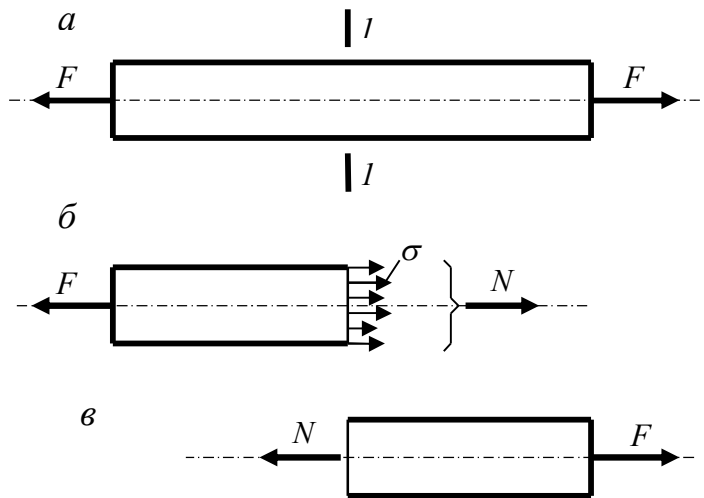


Рисунок 2.6

Величину поздовжньої сили можна визначити з умови рівноваги: $N = F$.

На підставі принципу Сен-Венана при віддаленні від місця прикладання сили F на відстань, співрозмірну з поперечними розмірами стержня, розподіл інтенсивності внутрішніх сил за перерізом можна вважати рівномірним.

Отже, $N = \sigma \cdot A$, звідки

$$\text{маємо: } \sigma = \frac{N}{A}. \quad (2.1)$$

Величину σ , тобто внутрішню силу, що приходить на одиницю площі перерізу, називають *напруженням*. У випадку розтягу напруження діє перпендикулярно до площі перерізу і його точніше називають *нормальним напруженням*.

Значимо, що якби замість правої ми відкинули ліву частину стержня (рис. 2.6, в), отримали би таку саму поздовжню силу $N = F$. При визначенні поздовжньої сили через зовнішнє навантаження був застосований метод, що називається *методом перерізів*.

У загальному випадку метод перерізів застосовується для визначення внутрішніх зусиль у такій послідовності:

- у необхідному місці система розрізується на дві частини;
- одна з цих частин відкидається, а її дія на залишену замінюється внутрішніми зусиллями;
- складаються рівняння рівноваги залишеної частини під дією зовнішніх та внутрішніх сил;
- розв'язуючи рівняння рівноваги, знаходяться шукані внутрішні зусилля.

Перевірку міцності розтягнутого стержня виконують за величиною напружень:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma], \quad (2.2)$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження для матеріалу, яке визначають за результатами випробувань.

Нерівність (2.2) можна використовувати для визначення необхідної площі перерізу стержня:

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]}, \quad (2.3)$$

та для визначення максимально допустимого для стержня навантаження:

$$N \leq [\sigma] \cdot A. \quad (2.4)$$

2.3.2 Епюри поздовжніх сил

Розглянемо стержень завантажений декількома силами вздовж його осі (рис. 2.7, а). Стержень на лівому кінці закріплений до основи, що забезпечує його нерухомість, отже, при відкиданні закріплення (рис. 2.7, б) у цьому місці повинна виникати сила, що врівноважує навантаження. Ця сила R називається *реактивною силою* або *реакцією*. Величину реакції можна визначити з умови рівноваги стержня:

$$\sum F_x = F_1 + F_2 - F_3 + F_4 - R = 0; \quad R = F_1 + F_2 - F_3 + F_4.$$

Надалі реакцію будемо показувати не відкидаючи закріплення, пам'ятаючи, що при наявності реакції стержень знаходиться у рівновазі, отже, це закріплення може бути відсутнє.

Для визначення зусилля у перерізі $A-A$ використаємо метод перерізів. Для цього, відкинувши ліву частину стержня, прикладемо внутрішнє зусилля N , вважаючи його розтягуючим (рис. 2.7, в). З умови рівноваги правої частини: $\sum F_x = F_1 + F_2 - F_3 - N = 0$, одержимо шукане зусилля:

$$N = F_1 + F_2 - F_3. \quad (2.5)$$

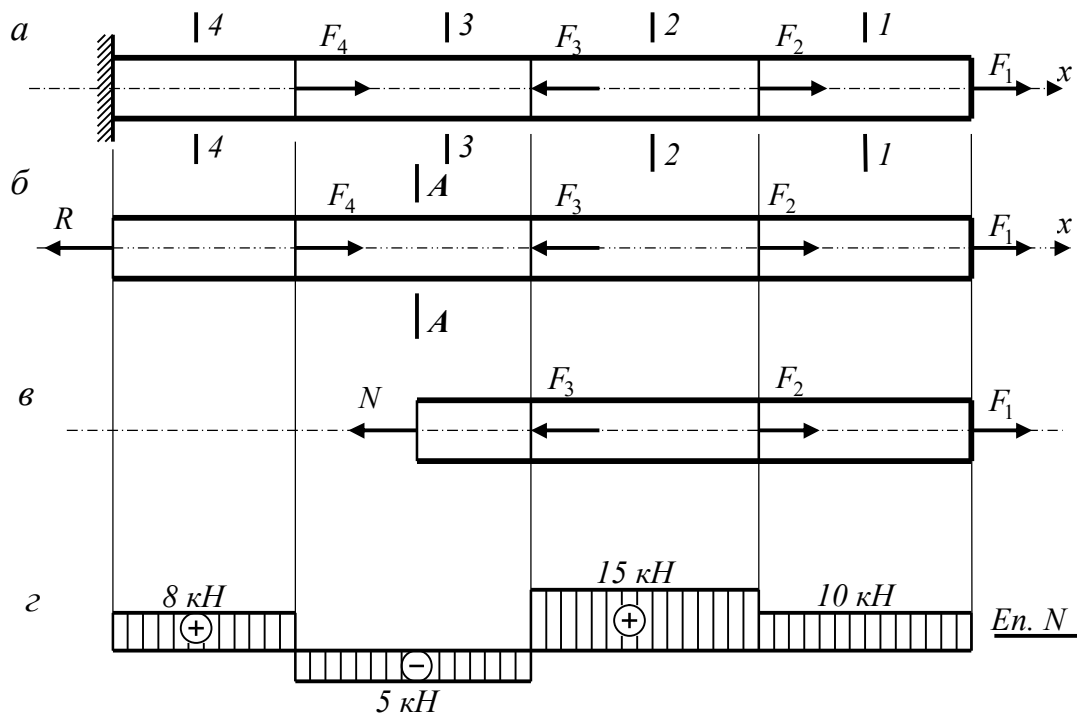


Рисунок 2.7

Аналізуючи (б), бачимо, що у нього входять тільки сили, розташовані праворуч від перерізу. При цьому сили F_1 та F_2 , що розтягують розглянуту частину стержня, увійшли додатними, а сила F_3 , що стискує – від'ємною.

На підставі цього аналізу робимо такий висновок: *поздовжня сила у перерізі стержня дорівнює алгебраїчній сумі сил, розташованих праворуч або ліворуч від перерізу. Розтягуючі сили беруть зі знаком «плюс», стискуючі – зі знаком «мінус»*

Застосовуючи це правило, одержимо поздовжню силу у перерізі $A-A$ через сили, розташовані ліворуч від перерізу:

$$N = R - F_4 = (F_1 + F_2 - F_3 + F_4) - F_4 = F_1 + F_2 - F_3.$$

Як бачимо, одержаний вираз співпадає з одержаним раніше (6).

Для подальших дій задамося числовими значеннями навантажень: $F_1 = 10\text{кН}$; $F_2 = 5\text{кН}$; $F_3 = 20\text{кН}$; $F_4 = 13\text{кН}$. Проведемо довільний переріз $1-1$ на ділянці стержня між місцями прикладання першої та другої сил і визначимо поздовжню силу: $N_1 = F_1 = 10\text{кН}$. Неважко побачити, що при переміщенні перерізу це значення зміниться лише тоді, коли переріз $1-1$ переміститься ліворуч від місця прикладання сили F_2 . Такому випадку відповідає переріз $2-2$, для якого маємо $N_2 = F_1 + F_2 = 10 + 5 = 15\text{кН}$. Аналогічно визначаємо поздовжні сили у перерізах $3-3$ та $4-4$: $N_3 = F_1 + F_2 - F_3 = 10 + 5 - 20 = -5\text{кН}$; $N_4 = F_1 + F_2 - F_3 + F_4 = 10 + 5 - 20 + 13 = 8\text{кН}$. Побудуємо графік залежності поздовжньої сили від положення перерізу. Для цього перпендикулярно прямій, що відповідає осі стержня, у обраному масштабі відкладаємо значення поздовжньої сили (рис. 15, з). Цей графік зміни поздовжньої сили вздовж осі стержня називають *епюрою поздовжніх сил*.

2.3.3 Деформації при розтягу-стиску. Закон Гука

Під час дії сил, що розтягують стержень, його довжина l збільшується до l_1 а поперечний розмір зменшується від b до b_1 (рис. 2.8).

Зміну довжини

$$\Delta l = l_1 - l \quad (2.6)$$

називають *подовженням* або *абсолютним подовженням*.

Подовження одиниці довжини стержня

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l} \quad (2.7)$$

називають *відносним подовженням* або *поздовжньою деформацією*.

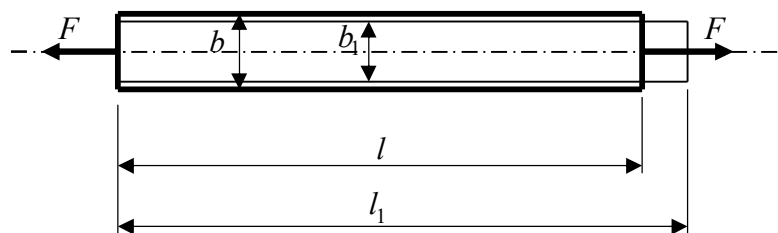


Рисунок 2.8

Аналогічно визначається *поперечна деформація*:

$$\varepsilon' = \frac{b_1 - b}{b}. \quad (2.8)$$

Між поздовжньою деформацією та нормальним напруженням існує залежність:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E, \quad (2.9)$$

що називається *законом Гука*. Отже, за законом Гука *нормальне напруження пропорційне відносному подовженню*.

Коефіцієнт пропорційності E у (2.9) характеризує пружні якості матеріалу і називається *модулем пружності* або *модулем Юнга*.

Підставляючи в (2.9) вирази для поздовжньої деформації (2.7) та напружень (2.1), одержимо подовження, виражене через поздовжню силу:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{EA}. \quad (2.10)$$

Отже, подовження обернено-пропорційне добутку модуля пружності на площу перерізу стержня. Цю величину називають *жорсткістю при розтягу-стиску*.

Взяте зі зворотним знаком відношення *поперечної та поздовжньої деформації називають коефіцієнтом поперечної деформації* або *коефіцієнтом Пуассона*:

$$\nu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \quad (2.11)$$

2.3.4 Урахування власної ваги стержня

Розглянемо стержень, закріплений у верхньому кінці під дією власної ваги (рис. 2.9).

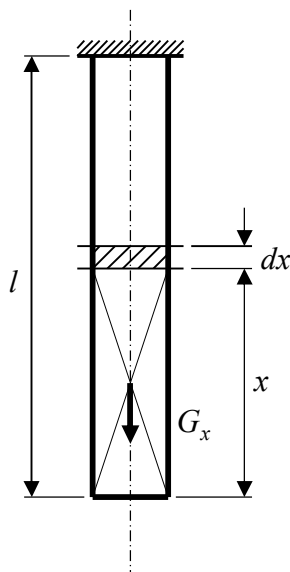


Рисунок 2.9

Напруження у довільному перерізі:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} = \rho \cdot x. \quad (12)$$

Подовження елемента dx стержня від власної ваги становить

$$\Delta(dx) = \frac{N_x \cdot dx}{EA} = \frac{\rho \cdot A \cdot x \cdot dx}{EA},$$

а для визначення подовження усього стержня інтегруємо цей вираз:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\rho \cdot A \cdot x \cdot dx}{EA} = \frac{\rho \cdot A \cdot l^2}{2EA} = \frac{G \cdot l}{2EA}. \quad (2.13)$$

Отже, подовження стержня від власної ваги удвічі менше від такої самої сили, прикладеної на кінці стержня.

Переріз на відстані x від вільного кінця стержня знаходиться під дією ваги нижньої

частини:

$$N_x = G_x = \rho \cdot V_x = \rho \cdot A \cdot x, \quad (2.14)$$

де ρ - щільність матеріалу;

A - площа перерізу стержня, яка у даному випадку вважається постійною за довжиною.

2.3.5 Напруження на похилих площинках

Усі перерізи, які розглядалися раніше були розташовані перпендикулярно поздовжній осі стержня. Далі розглянемо випадок, коли переріз розташований під кутом α до нормального перерізу (рис. 2.10, а).

Якщо відкинути одну частину стержня, то на другу будуть діяти повні напруження p_α , паралельні осі стержня (рис. 2.10, б). Розкладемо повне напруження на складові (рис. 2.10, в), одна з яких - σ_α спрямована вздовж нормалі, а інша - τ_α лежить у площині перерізу. Напруження σ_α було названо *нормальним напруженням*, а напруження τ_α , що лежить у площині перерізу називається *дотичним напруженням*.

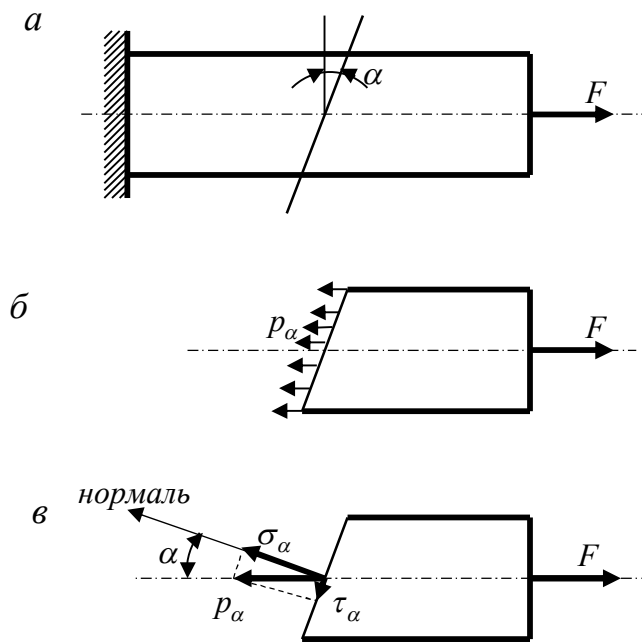


Рисунок 2.10

Площа похилого перерізу становить $A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}$, отже, величина повного

напруження становить $p_\alpha = \frac{F}{A / \cos \alpha}$.

Отже,

$$p_\alpha = \sigma \cos \alpha, \quad (2.15)$$

де $\sigma = F / A$ - напруження у нормальному перерізі стержня при $\alpha = 0$.

Нормальне та дотичне напруження тепер можна виразити через повне напруження і через напруження у нормальному перерізі:

$$\sigma_{\alpha} = p \cos \alpha = \sigma \cos \alpha \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha; \quad (2.16)$$

$$\tau_{\alpha} = p \sin \alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \quad (2.17)$$

Аналізуючи одержані залежності можна зробити висновок, що найбільші нормальні напруження виникають у нормальному перерізі при $\alpha = 0$ і дорівнюють σ . Найбільші дотичні напруження виникають при $\alpha = 45^{\circ}$ і становлять $\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$.

Відзначимо, що на площинках, паралельних осі стержня нормальні і дотичні напруження відсутні.

2.3.6 Механічні характеристики матеріалів

Для визначення механічних характеристик матеріалів проводять серії випробувань його зразків. Зокрема, при розтягу стандартного зразка на розтяг (рис. 2.11) фіксують подовження його розрахункової довжини l при зміні навантаження, доводячи його до руйнування.

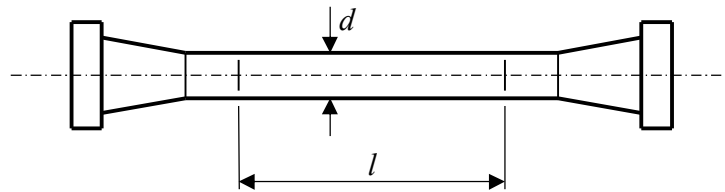


Рисунок 2.11

У результаті випробувань одержують графік залежності між навантаженням та подовженням. На рисунку 2.12, а наведено такий графік – діаграму розтягу для мало-вуглецевої сталі.

Поділивши навантаження F на первісну площу перерізу стержня A , а подовження розрахункової частини Δl на її довжину l , одержимо діаграму напружень (рис. 2.12, б). На цій діаграмі лінійна ділянка АВ відповідає дії закону Гука, а найбільше напруження $\sigma_{ну}$, до якого дійсний цей закон, називається *межею пропорційності*. Близьке до цього значення напруження на початку нелінійної ділянки у т. С $\sigma_{пр}$ називається *межею пружності*. За межею пружності на ділянці CD деформації зростають при постійному напруженні σ_m . Це явище *деформування при постійному напруженні називають текучістю*, а значення σ_m - *межею текучості*. Далі напруження зростають від т. D до т. E. Напруження σ_{\max} у т. E називають *межею міцності або тимчасовим напруженням*, оскільки після досягнення цієї величини у т. G зразок остаточно руйнується з наростанням деформацій.

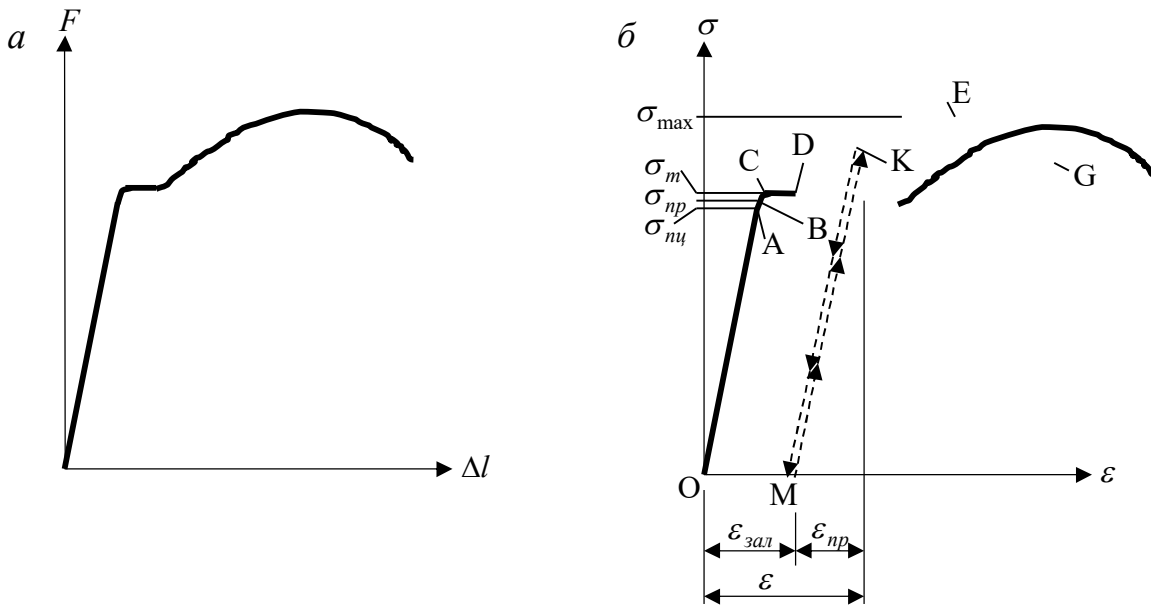


Рисунок 2.12

При доведенні напружень до значень, менших $\sigma_{пр}$, матеріал знаходиться пружній стадії і при розвантаженні повертається до початкового стану у т. О. Якщо навантаження доведене до більших значень, наприклад до т. К, розвантаження йде за прямою КМ, паралельною прямій ОА. Водночас відрізок ОМ являє собою залишкову деформацію $\epsilon_{зал}$. Відзначимо, що вторинне завантаження зразка відбувається вздовж тієї самої прямої МК, тобто матеріал поводить як пружний до напружень, більших ніж $\sigma_{пр}$. Це явище підвищення пружних властивостей матеріалу при вторинному завантаженні називається *наклепом* і використовується на практиці. Наявність залишкових деформацій при напруженнях, вищих за $\sigma_{пр}$ свідчить про пластичну стадію роботи матеріалу.

Відзначимо, що явище руйнування матеріалу при напруженнях, менших за межу міцності (т. G) пояснюється тим, що величина напружень при побудові цієї діаграми визначалась відносно первісної площі перерізу: $\sigma = \frac{F}{A}$. В дійсності після досягнення напружень, більших за межу текучості, деформації концентруються у досить малій за довжиною зоні зразка. У цій зоні відбувається звуження перерізу (рис. 2.13) – виникає так звана шийка, і напруження цьому перерізі зростають до самого руйнування.

Дещо інакше виглядає діаграма розтягу крихкого матеріалу. Наприклад, для чавуна (рис. 2.14) вона не має лінійної частини. Отже, для крихких матеріалів відсутня пропорційна залежність між напруженням та деформацією і її приймають умовно. Межа міцності на розтяг у більшості крихких матеріалів мала порівняно з їхньою межею міцності на стиск. Більшість крихких матеріалів на діаграмі не мають суттєво вираженої площини текучості.

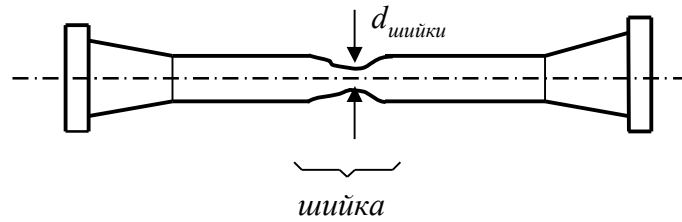


Рисунок 2.13

Для них приймають умовну межу текучості $\sigma_{0,2}$, яка відповідає напруженню, при якому відносна остаточна деформація становить 20 %.

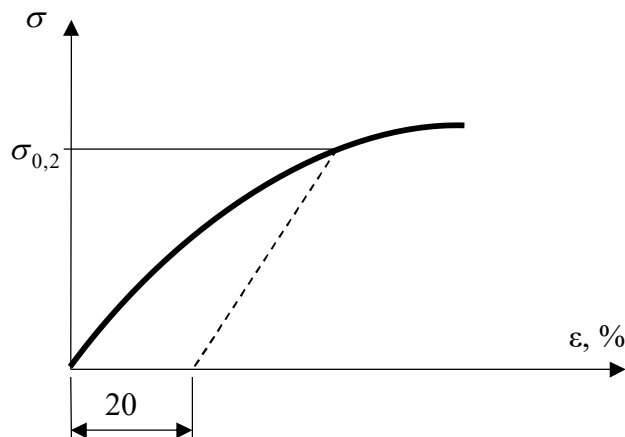


Рисунок 2.14

Запитання для самоконтролю

1. Назвіть прості види деформацій.
2. Чому деформація називається розтяг-стиск?
3. Що таке подовження стержня?
4. Що являє собою поздовжня сила?
5. Що таке напруження?
6. Як розподіляються нормальні напруження по перерізу?
7. Як застосовується метод перерізів?
8. Що таке епюра поздовжніх сил?
9. Наведіть умову міцності при розтягу.
10. Яке напруження називається допустимим?
11. Що являє собою дотичне напруження?
12. Як визначається абсолютне та відносне подовження?
13. Що таке коефіцієнт Пуасона?
14. Як врахувати власну вагу при визначенні подовження?
15. Наведіть закон Гука.
16. Що являє собою модуль Юнга?
17. Як визначають механічні характеристики матеріалу?
18. Що таке текучість? Наклер?

3 ЗГИН

3.1 Балки. Опори та опорні реакції

Балкою звичайно називають горизонтальний стержень на опорах, що сприймає переважно вертикальне навантаження.

Розрізняють статично визначні балки, до яких відносяться балки на двох опорах або прості (рис. 3.1, а) та консольні (рис. 3.1, б) і статично невизначні – нерозрізні балки (рис. 3.2).

Пристрої, що прикріплюють споруду (у нашому випадку балку) до землі або до іншої споруди називають опорами.

Найбільш поширеними є: шарнірно рухома опора (рис. 3.3, а); шарнірно нерухома опора (рис. 3.3, б) та затискуюча нерухома опора або затиснення (рис. 3.3, в).

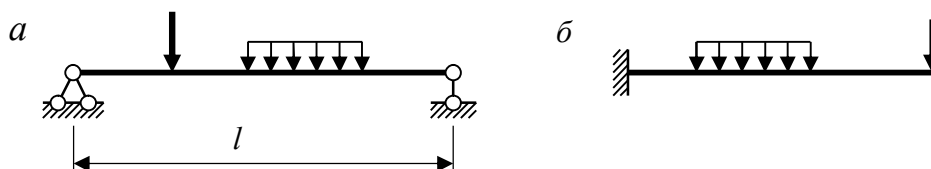


Рисунок 3.1

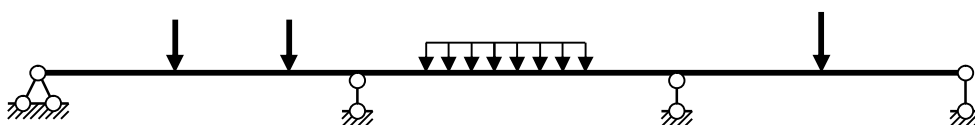


Рисунок 3.2

Шарнірно рухома опора усуває можливість переміщення перерізу вздовж опорного стержня, залишаючи необмеженими переміщення перпендикулярно до осі опорного стержня та поворот навколо центра шарніру. Відповідно у напрямку усунутого переміщення виникає реакція R (рис. 3.3, а).

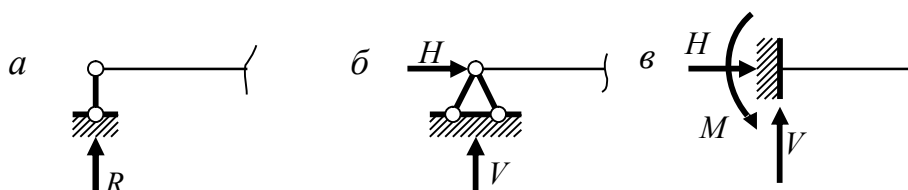


Рисунок 3.3

Шарнірно нерухома опора усуває будь-які лінійні переміщення перерізу, залишаючи лише можливість повороту його навколо центра шарніра. Зазвичай лінійне переміщення у довільному напрямку замінюють переміщеннями у двох взаємно перпендикулярних напрямках, частіше всього вздовж вертикалі та

горизонталі. Відповідно у цих напрямках виникають вертикальна – V та горизонтальна – H реакції (рис. 3.3, б).

Затиснення усуває як лінійні, так і кутові переміщення перерізу. У напрямку цих усунутих переміщень виникають реакції V , H та реактивний момент M .

Зазначимо, що на практиці у розрахункових схемах споруд можна зустріти зображення опор, які відрізняються від наведених на рисунку 3.2.

Визначення реакцій опор виконується з рівнянь рівноваги. Покажемо це на прикладі балки на двох опорах (рис. 3.4).

Для визначення вертикальних реакцій використаємо умови рівності нулю суми моментів сил відносно опорних точок:

$$\sum M_A = 0; \quad -F \cdot 2 - (q \cdot 6) \cdot 5 - M + R_B \cdot 6 = 0,$$

$$\text{звідки } R_B = \frac{F \cdot 2 + q \cdot 30 + M}{6} = \frac{10 \cdot 2 + 4 \cdot 30 + 12}{6} = 25,33 \text{ kH};$$

$$\sum M_B = 0; \quad F \cdot 4 + (q \cdot 6) \cdot 1 - M - R_A \cdot 6 = 0,$$

$$\text{звідки } R_A = \frac{F \cdot 4 + q \cdot 6 - M}{6} = \frac{10 \cdot 4 + 4 \cdot 6 - 12}{6} = 8,67 \text{ kH}.$$

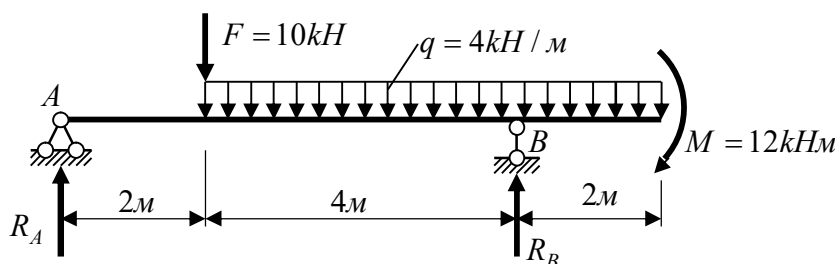


Рисунок 3.4

Для визначення горизонтальної реакції використаємо умову рівності нулю суми проекцій сил на горизонтальну вісь:

$$\sum F_x = 0; \quad H_A = 0.$$

Як бачимо горизонтальна реакція дорівнює нулю. Очевидно вона завжди при наявності лише вертикального навантаження буде нульовою.

Для перевірки правильності обчислення реакцій можна використати умову рівності нулю суми проекцій сил на вертикальну вісь:

$$\sum F_y = R_A + R_B - F - q \cdot 6 = 8,67 + 25,33 - 10 - 4 \cdot 6 = 24 - 24 = 0.$$

Отже, реакції визначені вірно.

Далі покажемо визначення реакцій у затисненні консольної балки (рис. 3.5).

Рівняння рівноваги використаємо у такій послідовності:

$$\sum F_y = 0; \quad V_A - F = 0, \text{ звідки } V_A = F = 18 \text{ kH};$$

$$\sum F_x = 0; \quad H = 0;$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M_A - M - F \cdot 4,5 = 0,$$

звідки $M_A = -M - F \cdot 4,5 = -6 - 18 \cdot 4,5 = -87 \text{ kNm}$.

Нагадаємо, що під дією навантаження та реакцій споруда знаходиться у рівновазі, отже опорні закріплення уявно вважаються відсутніми.

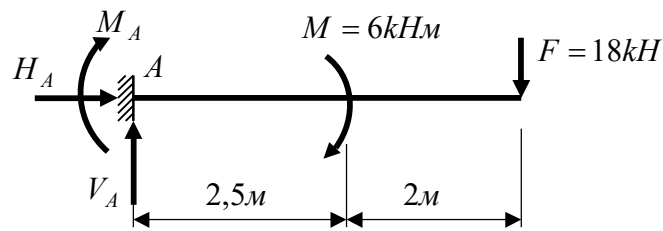


Рисунок 3.5

3.2 Внутрішні зусилля

Розглянемо стержень, який знаходиться у рівновазі під дією сил, перпендикулярних до його осі (рис. 3.6, а)

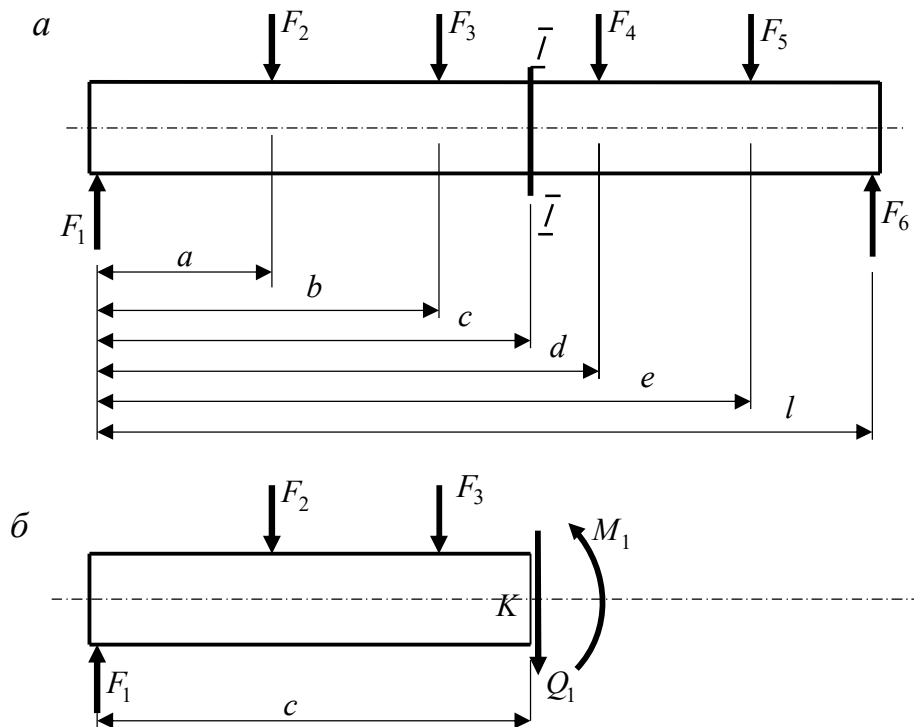


Рисунок 3.6

Напружений стан, у якому знаходиться стержень являє собою поперечний згин. Проведемо переріз I-I та відкинемо праву частину стержня. Залишена частина (рис. 3.6, б) повинна також знаходитися у рівновазі. Оскільки навантаження вертикальне, для цієї частини повинні виконуватися дві умови рівноваги: сума проєкцій на вертикальну вісь дорівнює нулю: $\sum F_y = 0$ та сума

моментів сил відносно довільної точки, наприклад відносно т. К. дорівнює нулю: $\sum M_K = 0$. Виходячи з цього напруження, що виникають у перерізі, повинні давати рівнодіючу вертикальну силу та момент. Ця сила Q_1 , перпендикулярна до осі стержня називається *поперечною або перерізуючою силою*, а момент M_1 - *згинаючим моментом*.

Поперечну силу та згинаючий момент можна виразити через зовнішні сили:

$$\sum F_y = 0; \quad F_1 - F_2 - F_3 - Q_1 = 0,$$

звідки
$$Q_1 = F_1 - F_2 - F_3; \quad (3.1)$$

$$\sum M_K = 0; \quad -F_1 \cdot c + F_2 \cdot (c - a) + F_3 \cdot (c - b) + M_1 = 0,$$

звідки
$$M_1 = F_1 \cdot c - F_2 \cdot (c - a) - F_3 \cdot (c - b). \quad (3.2)$$

Поперечна сила та згинаючий момент є внутрішніми силами і при поєднанні двох частин стержня будуть відсутні. З цього випливає, що на праву частину повинні діяти такі самі за величиною зусилля. Отже, можна визначити ці зусилля і через зовнішні сили, розташовані праворуч від перерізу.

Аналізуючи вирази (3.1), (3.2), з урахуванням наведених раніше міркувань можна дати такі правила визначення внутрішніх зусиль: *поперечна сила в перерізі дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій лівих або правих сил на вісь, перпендикулярну до осі стержня, згинаючий момент в перерізі дорівнює алгебраїчній сумі моментів правих або лівих сил відносно центру ваги перерізу.*

Правила знаків для поперечної сили та згинаючого моменту наведені на рисунку 3.7.

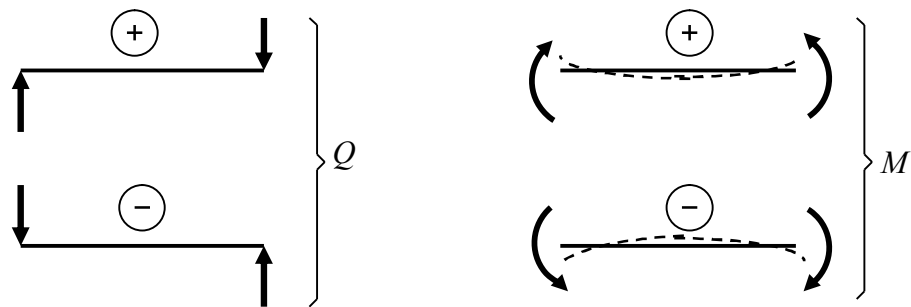


Рисунок 3.7

Для кращого запам'ятовування правила знаків для поперечних сил звернемо увагу на те, що додатні сили, розташовані праворуч та ліворуч від перерізу, утворюють пару сил з моментом, який обертає стержень за годинниковою стрілкою. Відповідні від'ємні сили обертають стержень проти годинникової стрілки.

На рисунку 34 для знаків згинаючих моментів штриховою лінією показано деформовану вісь стержня. Отже, якщо під дією моменту стержень вигинається опуклістю донизу, такий момент буде додатним, і навпаки.

3.3 Диференційні залежності при згині

Виріжемо елемент балки довжиною dx (рис. 3.8). На лівому кінці елемента діють поперечна сила Q та згинаючий момент M , на правому кінці зусилля змінюються і їх значення відповідно $Q + dQ$ та $M + dM$.

Розглянемо рівновагу виділеного елемента під дією внутрішніх зусиль та навантаження.

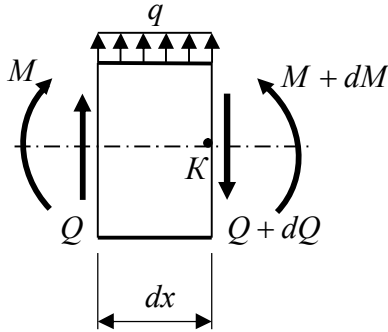


Рисунок 3.8

Проектуючи сили на вертикальну вісь, одержуємо: $Q + q \cdot dx - (Q + dQ) = 0$. Розкриваючи дужки та зводячи подібні, маємо: $dQ = q \cdot dx$. Це співвідношення запишемо інакше:

$$q = \frac{dQ}{dx}. \quad (3.3)$$

Отже, похідна поперечної сили за довжиною дає інтенсивність розподіленого навантаження.

Далі запишемо умову рівності нулю суми моментів відносно т K – центру ваги перерізу на правому кінці елемента:

$$M + Q \cdot dx + q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0.$$

Розкриваючи дужки і зводячи подібні, одержимо:

$$Q \cdot dx + q \cdot \frac{(dx)^2}{2} - dM = 0.$$

Другий доданок у цьому виразі містить множник $(dx)^2$, тобто є величиною другого порядку мализни порівняно з іншими доданками, і ним можна знехтувати: $Q \cdot dx - dM = 0$. Одержане співвідношення подамо у такому вигляді:

$$Q = \frac{dM}{dx}. \quad (3.4)$$

Отже, похідна згинаючого момента за довжиною є поперечною силою.

Одержані диференційні залежності використовуються як при визначенні максимальних значень згинаючого момента, так і для перевірки та побудови епюр внутрішніх зусиль.

3.4 Епюри внутрішніх зусиль у балках

Покажемо побудування епюр поперечних сил та згинаючих моментів для деяких простих випадків.

Для балки на двох опорах (рис. 3.9) під дією рівномірно розподіленого навантаження на підставі симетрії реакції опор будуть однаковими. Тому визначимо їх з умови рівності нулю суми проекцій на вертикальну вісь:

$$\sum F_y = 0; \quad R_A + R_B - ql = 0, \text{ тобто } R_A = R_B = ql/2.$$

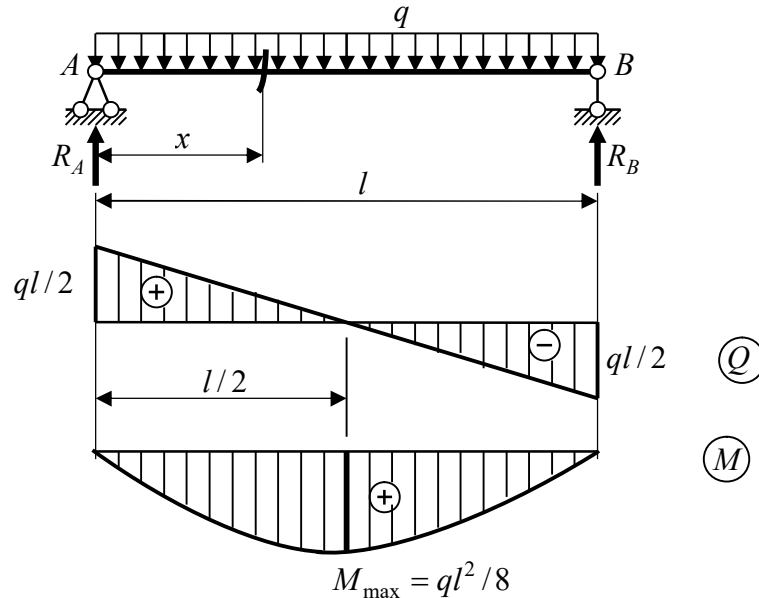


Рисунок 3.9

Оберемо довільний переріз балки, відстань до якого від опори A позначимо x . Розглядаючи частину балки, розташовану ліворуч від перерізу, запишемо вираз для поперечної сили:

$$Q = R_A - q \cdot x = ql/2 - qx.$$

Як бачимо, поперечна сила змінюється за лінійним законом, при $x=0$ $Q = ql/2$, а при $x=l$ $Q = ql/2 - ql = -ql/2$. Провівши горизонтальну вісь під балкою, відкладаємо відповідні значення поперечної сили на лівому кінці – при $x=0$ та на правому кінці при $x=l$ перпендикулярно цій осі. Додатні значення відкладаємо доверху, від'ємні – донизу. З'єднуючи одержані точки прямою лінією маємо шукану епюру Q (рис. 3.9).

Згинаючий момент у зазначеному довільному перерізі балки буде таким:

$$M = R_A \cdot x - (q \cdot x) \cdot \frac{x}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

З одержаного виразу випливає, що згинаючий момент змінюється за нелінійним законом і його графіком є квадратна парабола. При $x=0$ $M=0$, при $x=l$ маємо так само $M=0$. Враховуючи симетрію балки можна визначити, що найбільшого значення момент досягає у середині прольоту при $x=l/2$, де

$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$. Відкладаємо у відповідних точках одержані значення і з'єднуємо їх

кривою (рис. 3.9). Звертаємо увагу на те, що на епюрі моментів додатні значення відкладаються донизу, а від’ємні – доверху.

Зазначимо, що максимальне значення згинаючого моменту відповідає точці, у якій поперечна сила дорівнює нулю. Дійсно, максимум моменту досягається у точці, де його похідна, тобто поперечна сила, приймає нульове значення.

Далі розглянемо балку на двох опорах при дії зосередженої сили (рис. 3.10).

Для визначення вертикальних реакцій опор використовуємо умови рівності нулю сум моментів відносно опорних точок:

$$\sum M_A = 0; \quad -F \cdot a + R_B \cdot l = 0, \text{ звідки } R_B = F \frac{a}{l};$$

$$\sum M_B = 0; \quad F \cdot b - R_A \cdot l = 0, \text{ звідки } R_A = F \frac{b}{l}.$$

Неважко упевнитись, що сума проєкцій сил на вертикальну вісь дійсно дорівнює нулю.

Розглянемо довільний переріз на відстані x_1 від опори A . Поперечна сила та згинаючий момент у цьому перерізі становлять:

$$Q_1 = R_A = Fb/l; \quad M_1 = R_A \cdot x_1 = F \frac{b}{l} x_1.$$

Як бачимо, поперечна сила не залежить від розташування перерізу поки відстань до перерізу не буде більше a . Згинаючий момент залежить від x_1 лінійно, отже для побудови епюри потрібно визначити його значення у двох перерізах: при $x_1 = 0$ $M_1 = 0$; при $x_1 = a$ $M_1 = F \frac{ab}{l}$.

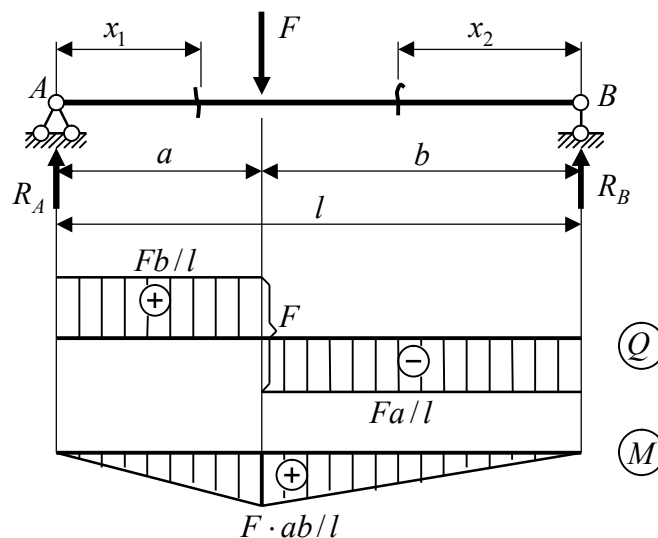


Рисунок 3.10

Для перерізу, розташованого праворуч від зосередженої сили, вирази внутрішніх зусиль зміняться, оскільки ліворуч будуть розташовані уже дві

сили: R_A та F . Зусилля у цьому перерізі зручно визначити через сили, розташовані праворуч від нього. Тоді відстань до цього перерізу зручно позначити x_2 і відраховувати її від правої опори.

Відповідно поперечна сила буде постійною: $Q_2 = -R_B = -F \frac{a}{l}$.

Згинаючий момент являє собою лінійну функцію:

$$M_2 = R_B \cdot x_2 = F \frac{a}{l} x_2; \text{ при } x_2 = 0 \quad M_2 = 0; \text{ при } x_2 = b \quad M_2 = F \frac{ab}{l}.$$

Епюри Q, M наведені на рисунку 3.10.

На епюрі Q під точкою прикладання зосередженої сили поперечна сила змінюється стрибкоподібно. Величина цієї зміни дорівнює величині сили і називається звичайно «стрибок».

Для балки на двох опорах під дією зосередженого моменту (рис. 3.11) побудування епюр покажемо без пояснень:

$$\sum M_A = 0; \quad -M + R_B \cdot l = 0; \quad R_B = M / l;$$

$$\sum M_B = 0; \quad -M - R_A \cdot l = 0; \quad R_A = -M / l;$$

$$Q_1 = R_A = -M / l; \quad M_1 = R_A \cdot x_1 = -\frac{M}{l} x_1; \quad \text{при } x_1 = 0 \quad M_1 = 0;$$

$$\text{при } x_1 = a \quad M_1 = -M \frac{a}{l}.$$

$$Q_2 = R_B = M / l; \quad M_2 = R_B \cdot x_2 = \frac{M}{l} x_2; \quad \text{при } x_2 = 0 \quad M_2 = 0;$$

$$\text{при } x_2 = b \quad M_2 = M \frac{b}{l}.$$

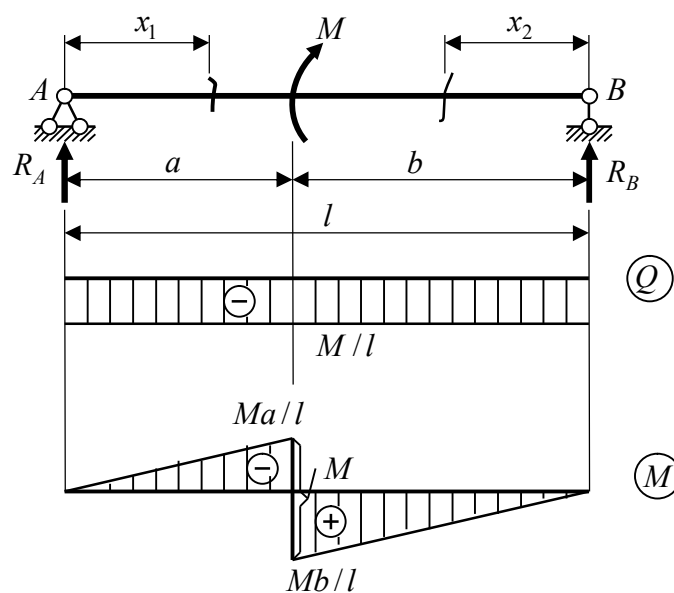


Рисунок 3.11

Зауважимо, що у точці прикладання зосередженого моменту на епюрі M має місце стрибок величиною, яка дорівнює величині моменту.

На підставі наведених прикладів можна зробити такі висновки:

- на ділянці, де відсутнє розподілене навантаження поперечна сила постійна, а згинаючі моменти змінюються за лінійним законом;
- на ділянці, де діє розподілене навантаження поперечна сила змінюється за лінійним законом, а епюра згинаючих моментів криволінійна і опуклістю спрямована у бік дії розподіленого навантаження;
- у точці прикладання зосередженої сили на епюрі поперечних сил має місце стрибок на величину цієї сили;
- у точці прикладання зосередженого моменту на епюрі згинаючих моментів має місце стрибок на величину цього моменту.

Порядок розрахунку балки можна запропонувати такий:

- визначити опорні реакції;
- розбити балку на ділянки так, щоб межами ділянок були точки прикладання зосереджених сил та зосереджених моментів, точки на кінцях розподіленого навантаження;
- почергово обираючи ділянки, на кожній з них обрати довільний переріз; обрати сторону, за якою будуть визначатися внутрішні зусилля і призначити відстань до перерізу від фіксованої точки з обраної сторони; записати вирази внутрішніх зусиль для обраного довільного перерізу; залежно від характеру одержаної залежності обчислити зусилля в характерних точках ділянки;
- відклавши перпендикулярно осі балки обчислені зусилля, з'єднати одержані точки прямою або кривою лініями залежно від характеру залежності зусилля.

3.5 Напруження при згині. Умова міцності

Нормальні напруження у перерізах балки визначаються з використанням гіпотези Я. Бернуллі: *перерізи, плоскі і нормальні до осі стержня до деформації, залишаються плоскими і нормальними до осі після деформації, при цьому їх форма та розміри залишаються незмінними.*

Розглянемо резиновий брусок, на боковій поверхні якого нанесемо вертикальні лінії, перпендикулярні до його поздовжньої осі $O-O_1$ (рис. 3.12, а). Завантажимо брусок на кінцях парами сил з моментом M , прикладеним у площині вертикальної осі симетрії перерізів (рис. 3.12, б).

В результаті можна побачити, що відповідно до гіпотези Я. Бернуллі вертикальні лінії, а отже відповідні перерізи залишились прямими і нормальними до осі бруска, відстань між кінцями ліній на опуклому боці бруска збільшилась, а на увігнутій зменшилась.

Таким чином волокна бруска з одного боку зазнають розтягу, а з іншого – стиску. Отже, існує деякий проміжний шар волокон, який не зазнає ані розтягу, ані стиску. Такий шар називається *нейтральним шаром*. Лінію перетину

нейтрального шару з площиною поперечного перерізу стержня називають *нейтральною віссю*.

Розглянемо елемент балки, що зазнає чистого згину (рис. 3.13, *a*). Чистим згином називають такий стан балки, коли у її перерізах діють лише згинаючі моменти. Під дією моменту вісь балки викривляється так, що радіус кривини становить ρ . Сторони елемента повертаються та їх взаємний кут повороту становить $d\theta$. Довжина нейтрального шару елемента mn при згині не змінюється і складає dx . З урахуванням мализни елемента можна записати:

$$dx = \rho \cdot d\theta.$$

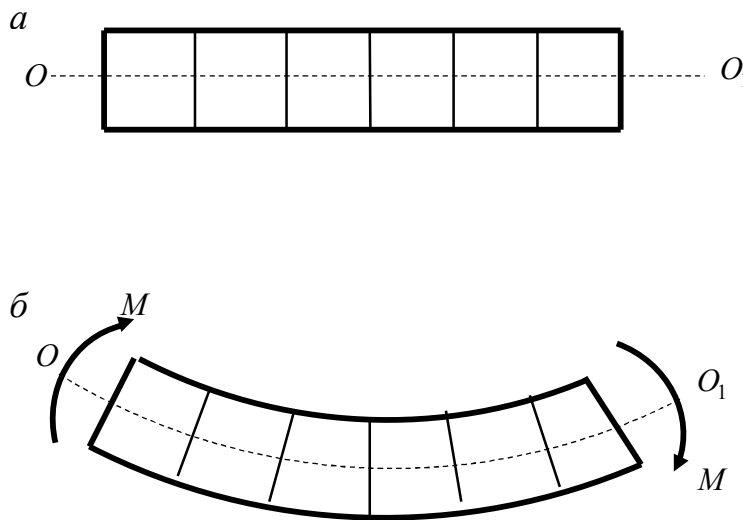


Рисунок 3.12

Довжина шару $m'n'$ на підставі гіпотези Я. Бернуллі пропорційна відстані y від нейтрального шару і становить

$$m'n' = (\rho + y) \cdot d\theta.$$

Враховуючи, що довжина усіх шарів до деформації становила dx , визначимо відносну деформацію шару на відстані y :

$$\varepsilon = \frac{m'n' - mn}{mn} = \frac{(\rho + y) \cdot d\theta - \rho \cdot d\theta}{\rho \cdot d\theta} = \frac{y}{\rho}.$$

Тепер на підставі закону Гука можна записати:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E y}{\rho}, \quad (3.5)$$

тобто нормальні напруження змінюються пропорційно відстані y від нейтральної осі балки. На підставі цього на рисунку 3.13, б наведено епюру розподілу нормальних напружень за висотою перерізу балки.

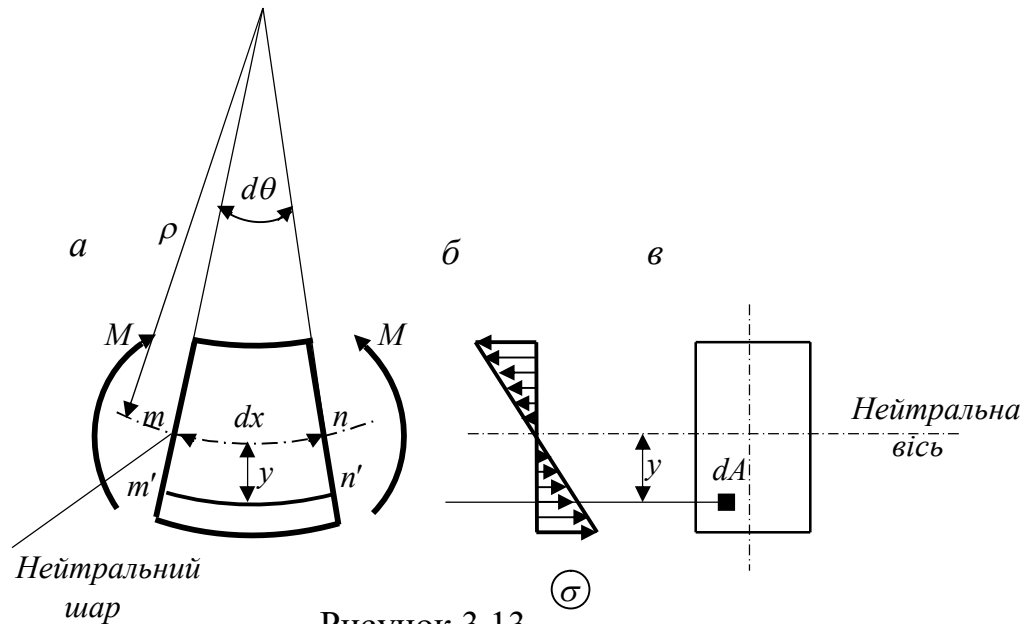


Рисунок 3.13

Як було вже зазначено, рівнодіюча напружень при згині повинна давати згинаючий момент. Для спрощення будемо вважати, що переріз балки прямокутний (рис. 3.13, в). На відстані y від нейтральної осі виділимо елементарну площинку величиною dA . На цій площинці діє елементарна сила

$$dF = \sigma \cdot dA = \frac{E y}{\rho} dA,$$

а її момент відносно нейтральної осі становить

$$dM = \sigma \cdot y \cdot dA = \frac{E}{\rho} y^2 dA. \quad (3.6)$$

Сума проекцій усіх елементарних сил перерізу на вісь балки

$$\int_{(A)} dF = \frac{E}{\rho} \int_{(A)} y \cdot dA = 0.$$

Звідси виходить, що $\int_{(A)} y dA = 0$. Цей інтеграл являє собою статичний момент перерізу відносно нейтральної осі. Рівність нулю статичного моменту свідчить про те, що *нейтральна вісь є центральною віссю перерізу*.

Інтегруючи вираз (3.6), одержимо:

$$M = \frac{E}{\rho} \int_{(A)} y^2 dA.$$

Інтеграл у цьому виразі є моментом інерції перерізу відносно нейтральної осі перерізу, отже

$$M = \frac{EI}{\rho},$$

звідки одержуємо кривину зігнутої осі балки:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}. \quad (3.7)$$

З одержаної рівності випливає, що кривина осі балки при згині, а отже величини її деформації тим менше, чим більше EI . Цей добуток модуля пружності на момент інерції перерізу відносно нейтральної осі називають *жорсткістю перерізу при згині*.

Підставивши (3.7) у (3.5) після незначних перетворень одержимо:

$$\sigma = \frac{M y}{I}. \quad (3.8)$$

Найбільші напруження виникають у точках перерізу найбільш віддалених від нейтральної осі:

$$\sigma_{\max} = \frac{M y_{\max}}{I}. \quad (3.9)$$

Величину $\frac{I}{y_{\max}}$ позначають W і називають *моментом опору перерізу*.

З урахуванням цього (3.9) набуває такого виду:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W}. \quad (3.10)$$

Найбільші напруження за умовою міцності не повинні перевищувати допустимих напружень:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq [\sigma]. \quad (3.11)$$

Момент опору є геометричною характеристикою перерізу. Покажемо визначення моментів опору для деяких перерізів, у яких нейтральна вісь є віссю симетрії:

- для прямокутного перерізу: $W = \frac{I}{h/2} = \frac{bh^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{bh^2}{6}$;
- для колового перерізу: $W = \frac{I}{d/2} = \frac{\pi d^4 \cdot 2}{64 \cdot d} = \frac{\pi d^3}{32}$.

Якщо у перерізу нейтральна вісь не є віссю симетрії, момент опору повинен обчислюватися двічі – для двох точок, найбільш віддалених від нейтральної осі. У цьому випадку для матеріалів, неоднаково працюючих на розтяг та стиск, необхідно перевіряти міцність для цих двох крайніх точок.

У загальному випадку поперечного згину у перерізах, крім згинаючого моменту, повинна виникати й поперечна сила. Поперечна сила є рівнодіючою дотичних напружень, які лежать у площині перерізу. Наведемо вираз для цих напружень без доказів:

$$\tau = \frac{QS}{bI}. \quad (3.12)$$

У цьому виразі Q - поперечна сила у перерізі, I - момент інерції перерізу відносно нейтральної осі. Інші позначення ілюструються рисунку 3.14:

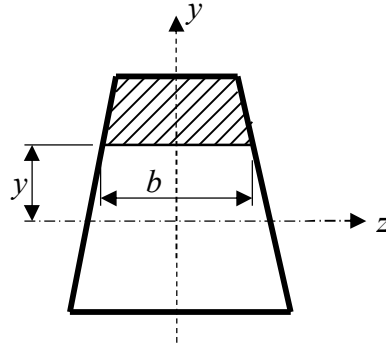


Рисунок 3.14

b - ширина перерізу на рівні визначення дотичних напружень;

S - статичний момент частини перерізу, що лежить вище або нижче рівня визначення дотичних напружень (на рис. 3.14 – це заштрихована або вільна від штрихів її частина), відносно нейтральної осі.

3.6 Визначення переміщень. Метод початкових параметрів

З математики відомо, що кривину $\frac{1}{\rho}$ кривої $y(x)$ можна наближено виразити через другу похідну:

$$\frac{1}{\rho} = \pm y''.$$

У цьому співвідношенні можна залишити тільки знак «плюс», якщо вісь y спрямувати доверху, а вісь x - праворуч. Тепер, зважаючи на (3.7), одержимо:

$$y'' = \frac{M}{EI}. \quad (3.13)$$

Тут y для балки є вертикальним переміщення перерізу, його називають *прогином*, а рівняння (3.13) називають *наближеним диференціальним рівнянням зігнутої осі балки*.

Рівняння (3.13) можна використати для визначення переміщень перерізів балки. Для цього необхідно двічі інтегрувати це рівняння.

При першому інтегруванні одержуємо першу похідну прогину, яка являє собою кут повороту перерізу θ :

$$EI y' = EI \theta = \int M dx + C. \quad (I)$$

Друге інтегрування приводить до рівняння прогинів:

$$EI y = \int dx \int M dx + Cx + D. \quad (I) \quad (I)$$

Під час інтегрування з'являються дві константи C, D , які належить визначити з граничних умов - умов закріплення балки. Якщо балка складається з декількох ділянок, на кожній з них будуть свої константи. При кількості ділянок n необхідно визначати $2n$ констант. Для того, щоб уникнути цього, можна скористатись *методом початкових параметрів*. Ідея методу полягає у

поданні згинаючих моментів так, що після цього результат інтегрування диференціального рівняння (3.13) можна записати у стандартній формі:

$$EI\theta = EI\theta_0 + \sum_{i=1}^m \frac{M_i(x-a_i)^1}{1!} + \sum_{j=1}^n \frac{F_j(x-b_j)^2}{2!} + \sum_{k=1}^p \frac{q_k(x-c_k)^3}{3!}, \quad (3.14)$$

$$EI y = EI y_0 + EI\theta_0 x + \sum_{i=1}^m \frac{M_i(x-a_i)^2}{2!} + \sum_{j=1}^n \frac{F_j(x-b_j)^3}{3!} + \sum_{k=1}^p \frac{q_k(x-c_k)^4}{4!}. \quad (3.15)$$

У цих виразах: y_0 та θ_0 - початкові параметри: відповідно прогин та кут повороту перерізу на початку координат; m - кількість зосереджених моментів балки; n - кількість зосереджених сил; p - кількість рівномірно розподілених навантажень; a_i - відстань від початку координат до точки прикладання моменту M_i ; b_j - відстань від початку координат до точки прикладання сили F_j ; c_k - відстань від початку координат до початку розподіленого навантаження.

При користуванні (3.14), (3.15) слід дотримуватись таких правил:

- початок координат розташовувати на лівому кінці балки;
- розподілене навантаження, яке не доходить до кінця балки, необхідно подовжити до кінця з введенням додаткового врівноважуючого навантаження;
- початкові параметри знаходять з граничних умов - умов закріплення балки.

Визначення переміщень методом початкових параметрів покажемо для балки на (рис. 3.15, а).

Знайдемо реакції опор:

$$\sum M_A = 0; -q \cdot 6 \cdot 1 - M - F \cdot 6 + R_B \cdot 8 = 0; \quad R_B = \frac{5 \cdot 6 + 20 + 12 \cdot 6}{8} = 15,25 \text{кН};$$

$$\sum M_B = 0; q \cdot 6 \cdot 7 - M + F \cdot 2 - R_A \cdot 8 = 0; \quad R_A = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 - 20 + 12 \cdot 2}{8} = 26,75 \text{кН}.$$

Оскільки розподілене навантаження не доходить до кінця балки, подовжуємо його (штрихове навантаження на рисунку 3.15, б) і додаємо таке саме за величиною і протилежне за напрямком навантаження $q_1 = q$ на ділянці подовження заданого навантаження.

За формулою (3.14), (3.15) складаємо рівняння методу початкових параметрів:

$$EI\theta = EI\theta_0 + M(x-4) + \frac{R_A(x-2)^2}{2} - \frac{F(x-8)^2}{2} - \frac{q(x-0)^3}{6} + \frac{q_1(x-6)^3}{6}; \quad (3.16)$$

$$EI y = EI y_0 + EI\theta_0 x + \frac{M(x-4)^2}{2} + \frac{R_A(x-2)^3}{6} - \frac{F(x-8)^3}{6} - \frac{q(x-0)^4}{24} + \frac{q_1(x-6)^4}{24}. \quad (3.17)$$

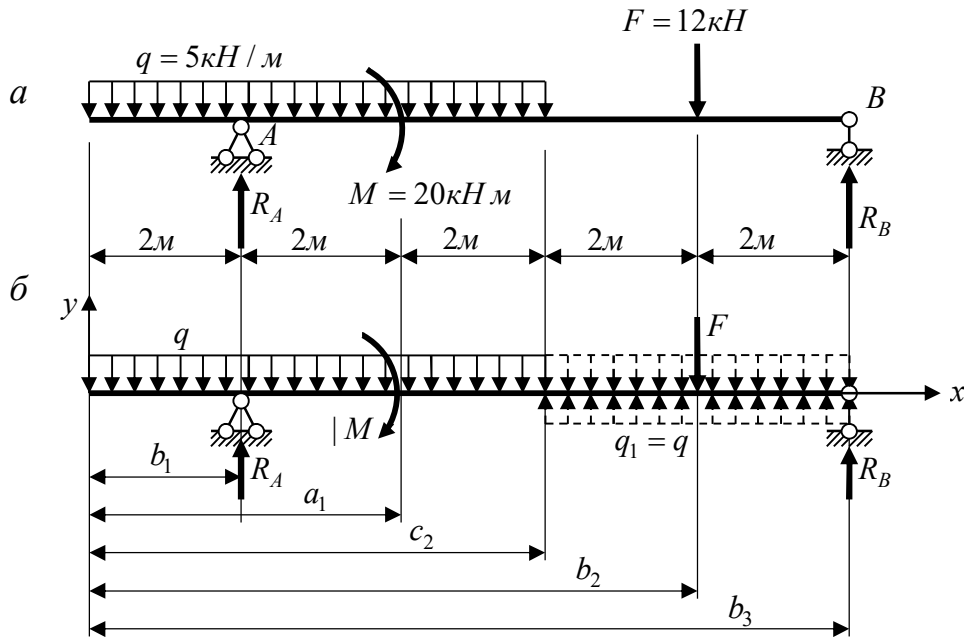


Рисунок 3.15

Звернемо увагу на те, що знаки перед складовими, в які входять зовнішні сили, відповідають знакам моментів від них для перерізу, розташованому на крайній правій ділянці балки.

З умов відсутності прогинів на опорах маємо:

- 1) при $x = 2 \quad y = 0; \quad EI y_0 + EI \theta_0 \cdot 2 - \frac{q(2-0)^4}{24} = 0;$
- 2) при $x = 10 \quad y = 0;$

$$EI y_0 + EI \theta_0 \cdot 10 + \frac{M(10-4)^2}{2} + \frac{R_A(10-2)^3}{6} - \frac{F(10-8)^3}{6} - \frac{q(10-0)^4}{24} + \frac{q_1(10-6)^4}{24} = 0.$$

Підставивши значення сил, приходимо до двох рівнянь відносно початкових параметрів:

$$EI y_0 + EI \theta_0 \cdot 2 - 3,33 = 0; \quad EI y_0 + EI \theta_0 \cdot 10 + 396,7 = 0.$$

Сумісне розв'язання цих рівнянь дає такі результати:

$$EI y_0 = 103,3; \quad EI \theta_0 = -50$$

тобто прогин та кут повороту перерізу на початку координат становлять:

$$y_0 = -\frac{103,3}{EI}; \quad \theta_0 = -\frac{50}{EI}.$$

Після підстановки сил та початкових параметрів (3.16), (3.17) набувають такого вигляду:

$$EI \theta = -50 - 20(x-4) + 13,375(x-2)^2 - 6(x-8)^2 - 0,833(x-0)^3 + 0,833(x-6)^3;$$

$$EI y = 103,3 - 50x - 10(x - 4)^2 + 4,458(x - 2)^3 - 2(x - 8)^3 - 0,208(x - 0)^4 + 0,208(x - 6)^4.$$

Нагадаємо, що при визначенні переміщення конкретного перерізу повинні враховуватись лише складові, що відповідають силам, розташованим ліворуч від нього. У зв'язку з цим у наведених рівняннях необхідно відкидати доданки, у яких при підстановці x в дужках одержують число, яке менше або дорівнює нулю. Наприклад, для перерізу розглянутої балки з координатою $x = 6$ м одержимо:

$$EI\theta = -50 - 20(6 - 4) + 13,375(6 - 2)^2 - 0,833(6 - 0)^3 = -55,9;$$

$$EI y = 103,3 - 50 \cdot 6 - 10(6 - 4)^2 + 4,458(6 - 2)^3 - 0,208(6 - 0)^4 = -170,7.$$

Задамо значення жорсткості перерізу $EI = 10000 \text{ кНм}^2$ та обчислимо переміщення заданого перерізу:

$$\theta = -\frac{55,9}{10000} = -0,0055 \text{ рад}; \quad y = -\frac{170,7}{10000} = -0,017 \text{ м} = -1,7 \text{ см}$$

3.7 Поняття про складні деформації

Слід зазначити, що при поперечному згині має місце як згин, так і зсув. Отже ця деформація є складною за визначенням, хоча в багатьох випадках деформаціями зсуву нехтують.

Розглянемо випадок, коли на консольний стержень у довільній точці крайнього перерізу діє довільно спрямована зосереджена сила (рис. 3.16, а).

Координати прикладання сили y_f та z_f , кут між лінією дії сили та осями x, y та z становить відповідно α, β та γ .

Розкладемо силу на складові $F_x = F \cos \alpha$; $F_y = F \cos \beta$; $F_z = F \cos \gamma$ вздовж осей x, y, z . У перерізі площиною A , що знаходиться на відстані x від кінця стержня проведемо осі y_A, z_A . Визначимо внутрішні зусилля у цьому перерізі:

- згинаючий момент відносно осі z_A $M_{z_A} = F_x \cdot y_f + F_y \cdot x$;
- згинаючий момент відносно осі y_A $M_{y_A} = F_x \cdot z_f + F_z \cdot x$;
- поперечні сили $Q_y = F_y$ та $Q_z = F_z$; -поздовжня сила $N = F_x$.

Зауважимо, що знаки згинаючих моментів прийняті так, щоб вони розтягували частину перерізу у додатній чверті.

Застосовуючи принцип незалежності дії сил можна записати нормальні напруження у точці перерізу з координатами y, z :

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z}. \quad (3.18)$$

Дотичні напруження у напрямку осей y та z можна визначити за формулою (3.12) через поперечні сили відповідно Q_y та Q_z .

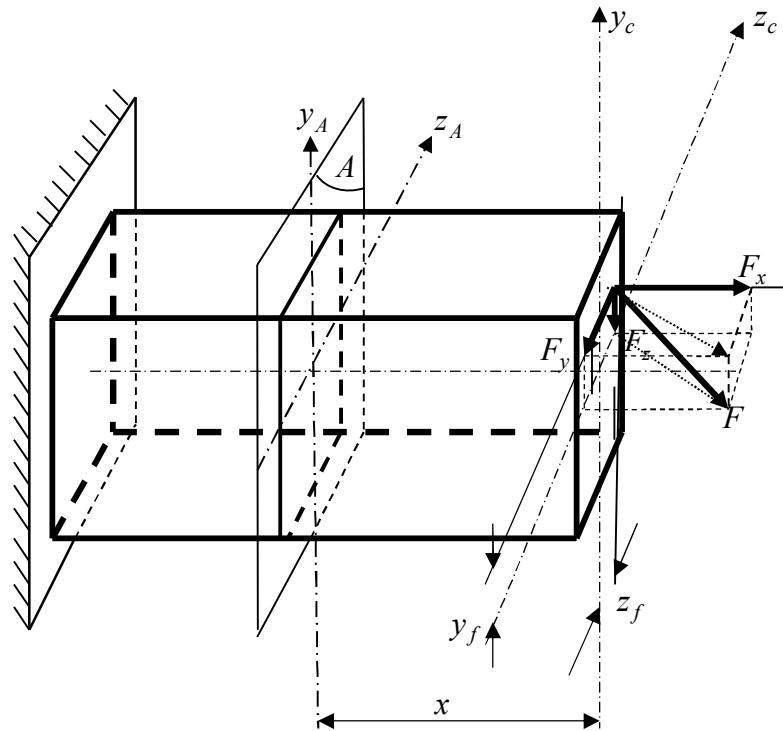


Рисунок 3.16

Вираз (3.18) може бути спрощений для деяких окремих випадків прикладання сили. Так, якщо сила паралельна осі x , маємо *позацентричний розтяг* або *стиск*. Якщо сила діє у площині, перпендикулярній площині нормального перерізу і спрямована через його центр ваги під кутом до головних осей, маємо *косий згин*.

Запитання для самоконтролю

1. Як виникає деформація згин?
2. Наведіть види опор.
3. Що таке балка?
4. Як визначити реакції опор?
5. Які внутрішні зусилля супроводжують деформацію згину?
6. Наведіть правило визначення згинаючого моменту.
7. Наведіть правило визначення поперечної сили?
8. Яка послідовність побудовання епюр поперечних сил та згинаючих моментів?
9. У чому суть гіпотези Бернуллі?
10. Які особливості мають епюри внутрішніх зусиль у місцях прикладання зосереджених сил та моментів?
11. Як визначають нормальні напруження при згині?
12. Як визначають дотичні напруження?
13. Наведіть умову міцності при згині.

14. Як визначити момент опору перерізу? Яке його значення для прямокутного перерізу?
15. Наведіть диференційне рівняння зігнутої осі стержня.
16. Як використати диференційне рівняння зігнутої осі для визначення прогину?
17. Як одержують рівняння початкових параметрів?
18. Що являють собою початкові параметри?
19. Як визначити початкові параметри?
20. Які особливості урахування розподіленого навантаження у формулах методу початкових параметрів?

4 СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНІ РАМИ

4.1 Основні поняття

Рамою називають стержневу систему, елементи (стержні) якої мають жорсткі з'єднання між собою або з основою.

Рами в будівництві застосовуються дуже широко, особливо в зв'язку з використанням залізобетонних конструкцій. Вони застосовуються в каркасах будівель, у фундаментах обладнання, можуть утворювати окремі елементи конструкції: рамні стояки, безроскосні ферми тощо.

Рами можуть бути одно- та багатопверховими, одно- та багатопрогонними. Найбільш складними є рами промислових споруд.

Рами, у яких усі реакції та внутрішні зусилля можна визначити за допомогою одних лише рівнянь рівноваги, називають *статично визначуваними*.

Основними елементами рам (рис. 4.1) є стояки і ригелі. *Стояком* називають вертикальний або близький до вертикального стержень, наприклад, стержень AC (рис. 4.1, $в$). *Ригелем* називають горизонтальний чи близький до нього за нахилом стержень, наприклад, стержень CD (рис. 4.1, $в$).

Ригелі можуть бути прямолінійними, ламаного або криволінійного обрису (рис. 4.1, $а...г$). Відстань l між центрами опор називається прольотом, відстань h від центру опор до найбільш високої точки осі рами - висотою рами.

Рама, зображена на рисунку 4.1, $б$, називається тришарнірною за кількістю опорних та проміжних шарнірів.

Система, яка являє собою стержень з ламаною віссю (рис. 4.2) теж розглядається як рама.

При дії навантаження в опорних закріпленнях рами виникають опорні реакції, а в кожному поперечному перерізі рами – внутрішні зусилля. У загальному випадку в перерізах стержнів рами діють: *згинаючий момент M , поперечна або перерізуюча сила Q та поздовжня сила N* .

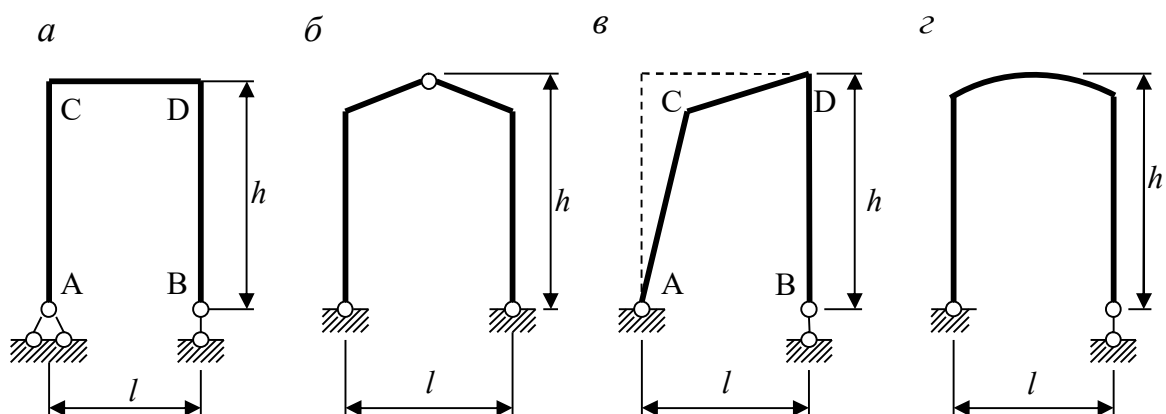


Рисунок 4.1

Правила визначення цих зусиль одержані раніше при розрахунку балок на підставі методу перерізів:

- згинаючий момент дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил, розташованих на одній із відсічених частин, відносно центру ваги перерізу.
- поперечна сила дорівнює алгебраїчній сумі проекцій сил, розташованих на одній із відсічених частин, на нормаль до осі стержня в перерізі.
- поздовжня сила дорівнює алгебраїчній сумі проекцій сил, розташованих на одній із відсічених частин, на дотичну до осі стержня в перерізі.

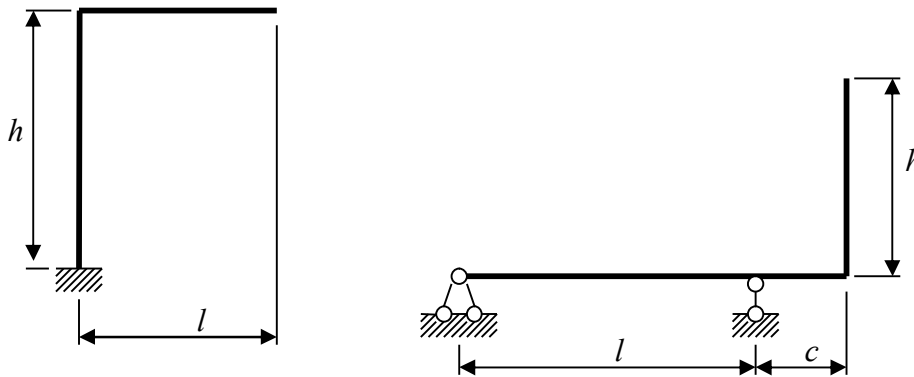


Рисунок 4.2

Правила знаків для визначення цих внутрішніх зусиль наведені на рисунку 4.3.

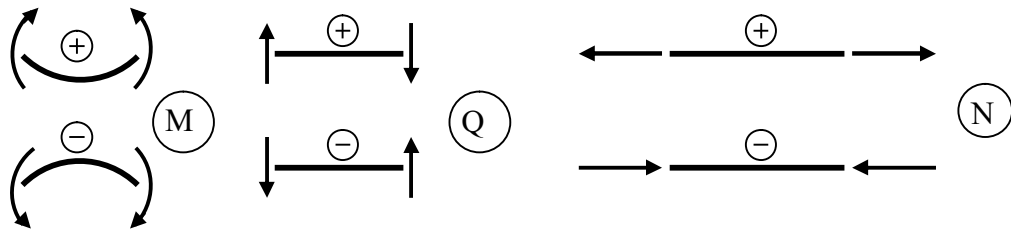


Рисунок 4.3

4.2 Розрахунок рами

Основною метою розрахунку рами є обчислення опорних реакцій і побудова епюр внутрішніх зусиль.

Розглянемо приклад розрахунку рами, що зображена на рисунку 4.4, а.

При визначенні опорних реакцій V_A , H_A , R_B бажано використовувати раціональні рівняння рівноваги, тобто такі, до кожного з яких входить лише одна із трьох реакцій.

Так, для визначення реакції R_B застосуємо рівняння моментів відносно точки перетину ліній дії реакцій H_A та V_A , тобто т. А:

$$\sum M_A = 0, R_B \cdot \frac{1}{3} - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0, R_B = \frac{3ql}{2}.$$

Для реакції H_A використаємо рівняння моментів відносно точки перетину ліній дії реакцій V_A та R_B , тобто т. B' :

$$\sum M_{B'} = 0, H_A \cdot \frac{l}{3} - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0, H_A = \frac{3ql}{2}.$$

Реакцію V_A зручно визначити з умови рівності нулю суми проєкцій сил на вертикальну вісь, оскільки інші дві реакції R_B та H_A паралельні одна одній:

$$\sum y = 0; V_A - q \cdot l = 0; V_A = q \cdot l.$$

Для перевірки візьмемо суму моментів сил відносно т. Д:

$$\sum M_D = 0; H_A \cdot h - V_A \cdot l + q \cdot l \cdot \frac{l}{2} - R_B \cdot \frac{l}{3} = \frac{3ql}{2} \cdot \frac{2l}{3} - q \cdot l \cdot l - \frac{ql^2}{2} - \frac{3ql}{2} \cdot \frac{l}{3} = 0.$$

Якщо реакція отримана із знаком «мінус», це означає що її дійсний напрямок протилежний прийнятому.

Перед побудовою епюр внутрішніх зусиль розіб'ємо раму на ділянки. Межами ділянок повинні бути: вузли рами, точки прикладання зосереджених сил та моментів, точки стрибкоподібної зміни інтенсивності розподіленого навантаження. У нашому прикладі таких ділянок три: AC, CD, DB .

Спочатку побудуємо епюру згинаючих моментів. Для цього, розглядаючи кожен ділянку, перш за все залежно від виду навантаження визначаємо обрис епюри: лінійний, якщо на ділянці відсутнє навантаження, і криволінійний при наявності на ділянці розподіленого навантаження (при рівномірному навантаженні епюра моментів окреслена за квадратною параболою). Залежно від обриса призначаємо кількість перерізів, за якими можна побудувати епюру: два для лінійної ділянки і три для криволінійної.

Для визначення знаків моментів на вертикальних стержнях раму слід повертати так, щоб вони розташувались горизонтально. З цією метою оберемо будь-яку точку на рисунку рами і позначимо її «зірочкою» (рис. 7.4, а). Ця точка обирається довільно, бажано – між стояками та нижче всіх ригелів. Поворот рами будемо здійснювати так, щоб «зірочка» була розташована під розглядуваним стержнем.

Почнемо, наприклад, з ділянки AC . Розподілене навантаження на ній відсутнє, і епюра моментів повинна бути лінійною. Тому достатньо взяти два перерізи на кінцях ділянки.

Обернувши раму навколо «зірочки» за годинниковою стрілкою на 90° , маємо т. А розташованою на лівому кінці стержня і т. С – на правому. Позначатимемо моменти у перерізах, розташованих нескінченно близько до лівого та правого кінців індексами відповідно «пoch» та «кін».

Для визначення згинаючого моменту у перерізі на початку стержня обираємо частину рами, розташовану ліворуч від перерізу як таку, на якій діє менше сил, ніж на правій. Відповідно до рисунку 4.3 моменти, що обертають ліву частину за годинниковою стрілкою будуть додатними, проти годинникової стрілки – від'ємними. Отже маємо:

$$M_{\text{пoch}} = \sum_{\text{лів}} M = V_A \cdot 0 - H_A \cdot 0 = 0.$$

Зазначимо, що при визначенні згинаючого моменту за правими силами за рисунком. 4.3 додатними будуть моменти, що обертають раму проти годинникової стрілки. У цьому випадку обчислення моменту більш складне:

$$M_{\text{поч}} = \sum_{\text{прав}} M = -q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + R_B \cdot \frac{h}{2} = -\frac{ql^2}{2} + \frac{3ql}{2} \cdot \frac{l}{3} = 0.$$

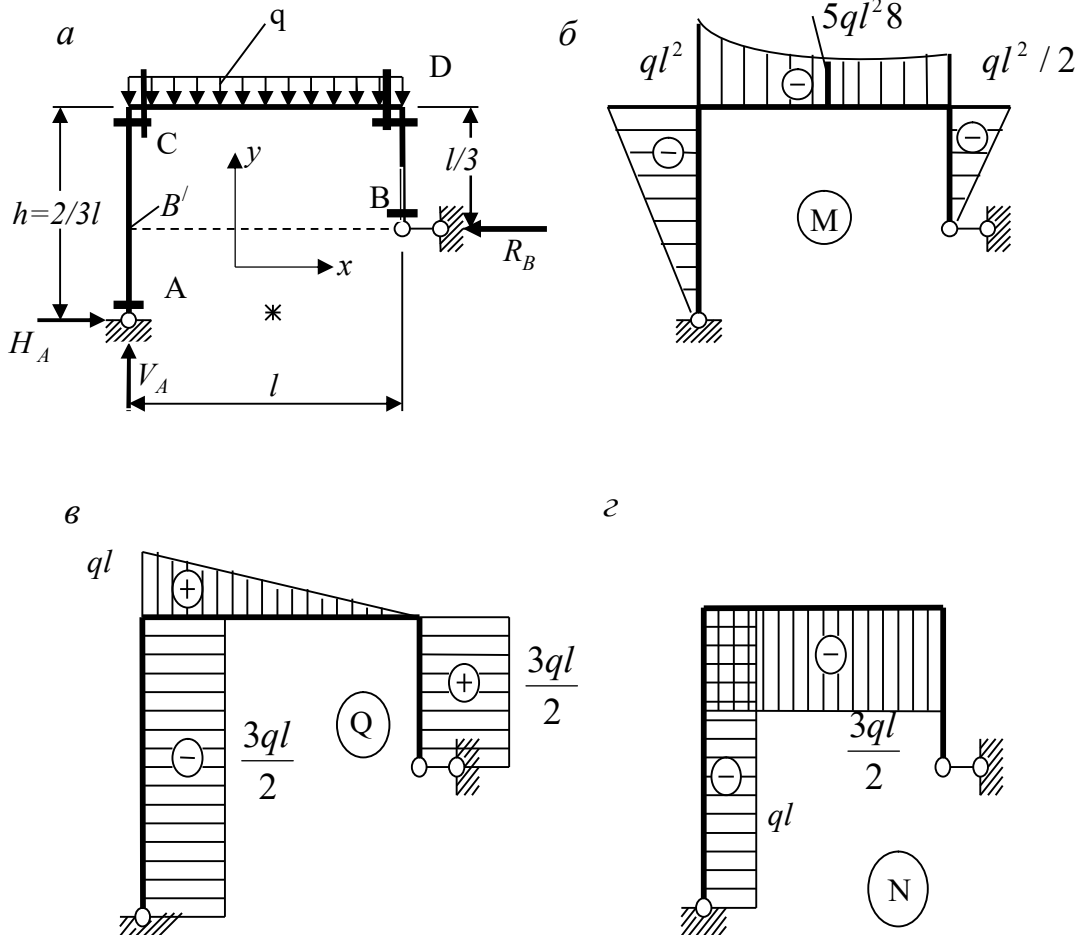


Рисунок 4.4

При обчисленні згинаючого моменту у перерізі на кінці стержня також зручно розглянути ліву частину рами:

$$M_{\text{кін}} = \sum_{\text{лів}} M = -H_A \cdot h = -\frac{3ql}{2} \cdot \frac{2l}{3} = -ql^2.$$

Так само визначаємо згинаючі моменти на кінцях ділянки DB . Для визначення знаків моментів обертаємо раму на 90° проти годинникової стрілки. Згинаючі моменти у перерізах нескінченно близьких до лівого та правого кінців ділянки, відповідно до точки D та B будуть такі:

$$M_{\text{кін}} = \sum_{\text{прав}} M = -R_B \cdot 0 = 0; \quad M_{\text{поч}} = \sum_{\text{прав}} M = -R_B \cdot \frac{l}{3} = -\frac{3ql}{2} \cdot \frac{l}{3} = -\frac{ql^2}{2}.$$

На ділянці CD маємо розподілене навантаження, тому епюра M на ній буде криволінійною. Для побудови епюри одержимо згинаючі моменти на кінцях

$$\text{ділянки: } M_{\text{поч}} = \sum_{\text{лів}} M = -H_A \cdot h = -ql^2, \quad M_{\text{кін}} = \sum_{\text{прав}} M = -R_B \cdot \frac{l}{3} = -\frac{ql^2}{2}.$$

Додатково необхідно обчислити момент у середині ділянки. Його можна обчислити за загальним правилом як суму моментів лівих або правих сил:

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = M_{cp} = \sum_{лів} M = V_A \cdot \frac{l}{2} - H_A \cdot h - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql}{2} \frac{l}{2} - ql \frac{2l}{3} - \frac{ql^2}{2} = \frac{5ql^2}{8}.$$

Більш просто можна обчислити момент у середині будь-якої ділянки, на якій діє рівномірно розподілене навантаження на підставі принципу незалежності дії сил:

$$M_{cp} = \frac{M_{поч} + M_{кін}}{2} + \frac{ql^2}{8}. \quad (4.1)$$

Зазначимо, що у (4.1) згинаючі моменти на кінцях ділянки беруть з урахуванням їхніх знаків, а знак «плюс» перед другим доданком відповідає навантаженню, спрямованому донизу.

Отже, для цієї ділянки одержимо:

$$M_{cp} = \frac{-ql^2 - \frac{ql^2}{2}}{2} + \frac{ql^2}{8} = -\frac{5ql^2}{8}.$$

За одержаними значеннями на рисунку 4.4, б побудовано епюру M . Нагадаємо, що додатні значення моментів відкладаються донизу. Отже за таких правил побудови епюра завжди повинна бути розташована з боку розтягнутих волокон.

Побудову епюри поперечних сил виконуємо аналогічно.

Ділянка AC – при відсутності навантаження поперечна сила незмінна, тому для довільно розташованого перерізу визначаємо:

$$Q = \sum_{лів} x = -H_A = -\frac{3ql}{2}.$$

Так само на ділянці DB :

$$Q = \sum_{прав} x = R_B = \frac{3ql}{2}.$$

На ділянці CD при наявності рівномірно розподіленого навантаження поперечна сила змінюється за лінійним законом. Отже маємо:

$$Q_{поч} = \sum_{лів} y = V_A = ql, \quad Q_{кін} = \sum_{прав} y = 0.$$

Відкладаючи на стержнях рами додатні значення Q доверху, а від'ємні – донизу, одержимо епюру поперечних сил (рис. 4.4, в).

Визначення поперечних сил, особливо для складних рам, можна виконати інакше – за епюрою згинаючих моментів, використовуючи диференціальну залежність між поперечною силою та згинаючим моментом та значення балочної поперечної сили:

$$Q_{\frac{поч}{кін}} = \frac{M_{кін} - M_{поч}}{l} \pm \frac{ql}{2} \quad (4.2)$$

Наприклад, на ділянці CD маємо:

$$Q_{\frac{поч}{кін}} = \frac{-\frac{ql^2}{2} + ql^2}{l} \pm \frac{ql}{2} = \frac{ql}{2} \pm \frac{ql}{2} = \begin{cases} ql, \\ 0. \end{cases}$$

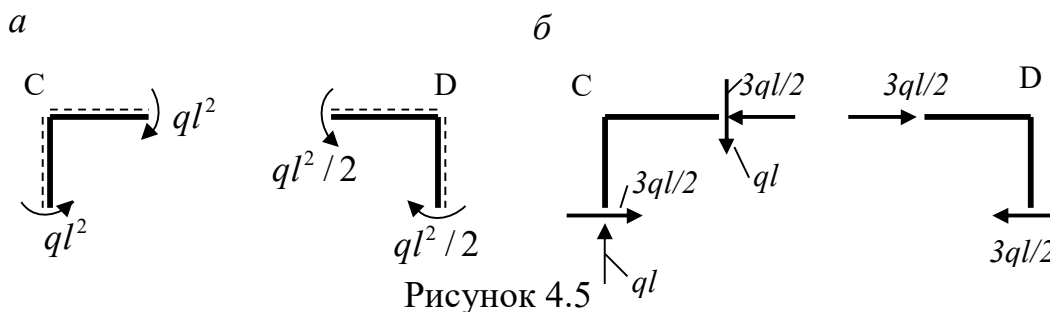
При визначенні *поздовжніх сил* слід зауважити, що поздовжня сила на ділянці (або й у межах усього стержня) не буде змінюватись, якщо навантаження діє перпендикулярно до осі стержня. Отже, у нашому прикладі:

$$N_{AC} = \sum_{\text{лів}} y = -V_A = -ql, \quad N_{DB} = \sum_{\text{прав}} y = 0, \quad N_{CD} = \sum_{\text{прав}} x = -R_B = -\frac{3ql}{2}.$$

Додатні поздовжні сили на епюрі N відкладаються на стержнях доверху, від'ємні - донизу (рис. 4.4, з).

Перевірка епюр на окремих стержнях виконується, як звичайно, за наявності екстремумів, стрибків, перегинів. Крім того, перевіряється рівновага вузлів - окремо під дією згинаючих моментів (рис. 7.5, а) і, окремо, під дією поперечних та поздовжніх сил (рис. 7.5, б). При цьому напрям дії згинаючих моментів визначається за розташуванням розтягнутих волокон - з боку розташування згинаючих моментів на епюрі M (штрихові лінії на рис. 7.5, а). Дія додатних за знаком поперечних сил відповідає повороту вузла за годинниковою стрілкою, від'ємних - проти годинникової стрілки. Додатні поздовжні сили діють у напрямку від вузла, що відповідає розтягненню стержнів.

За рисунком 4.5, а для вузла С маємо: $\sum M = ql^2 - ql^2 = 0$; для вузла D:



$$\sum M = \frac{ql^2}{2} - \frac{ql^2}{2} = 0.$$

За рисунком 4.5, б для вузла С $\sum x = \frac{3ql}{2} - \frac{3ql}{2} = 0$; $\sum y = ql - ql = 0$ і для вузла D $\sum x = \frac{3ql}{2} - \frac{3ql}{2} = 0$; $\sum y = 0$.

Отже вузли рами знаходяться у рівновазі, епюри побудовані вірно.

Зазначимо, що для складних, особливо статично невизначуваних рам, умови рівноваги вузлів під дією поздовжніх та поперечних сил можна використовувати для поздовжніх сил.

Заяпитання для самоконтролю.

1. Які системи називають рамами?
2. Назвіть елементи визначення рам.
3. Які зусилля діють у перерізах стержнів рам?
4. Наведіть правила визначення внутрішніх зусиль у стержнях рам.
5. Як визначити знак зусилля для вертикального стержня рами?

5 СТІЙКІСТЬ

5.1 Основні визначення

Стійкість – це здатність споруди та усіх її частин зберігати своє початкове положення та деформований стан при діючих навантаженнях.

Втрата стійкості пов'язана з переходом системи від стійкої до нестійкої рівноваги. Поняття стійкої та нестійкої рівноваги пояснимо на прикладі кульки, розташованої на криволінійній поверхні (рис. 5.1). Якщо відхилити кульку від положення 1 у нижній точці увігнутої частини поверхні, а потім відпустити, вона здійснить затухаючі коливання, і зрештою повернеться у початкове

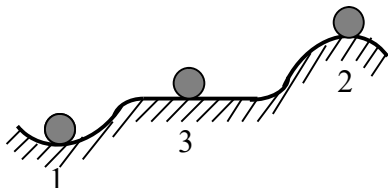


Рисунок 5.1

положення. Таке положення кульки ілюструє стан стійкої рівноваги. При відхиленні кульки від положення 2 у верхній точці опуклої частини поверхні вона скотиться донизу і не повернеться у початкове положення. Такий стан – це стан нестійкої рівноваги. І нарешті, положення 3 на горизонтальній частині поверхні відповідає стану байдужої рівноваги.

Спрощено визначення стійкої рівноваги можна сформулювати так: *стан рівноваги можна вважати стійким, якщо при достатньо малих збудженнях відхилення системи впродовж усього часу руху залишаються малими, причому зменшуючи збудження, можна зробити ці відхилення скільки завгодно малими.* Розрізняють *стійкість положення та стійкість форми рівноваги* у деформованому стані. Втрата стійкості *положення* пов'язана з порушенням умов рівноваги зовнішніх сил (перекидання баштового крану, перекидання або зсув підпірної стінки).

Втрата стійкості *форми рівноваги* у деформованому стані є наслідком порушення рівноваги між внутрішніми та зовнішніми силами. При цьому стається перерозподіл внутрішніх зусиль і рівновага оновлюється лише у новому деформованому стані. У цьому курсі будемо розглядати лише стійкість форми рівноваги.

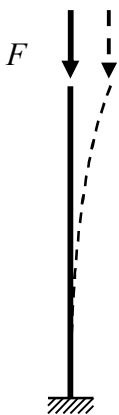


Рисунок 5.2

Розглянемо поведінку прямого стержня стиснутого осью силою F (рис. 5.2). При усіх значеннях цієї сили, менших деякого, стержень буде зберігати висхідну прямолінійну форму. Якщо при цьому його дещо відхилити від вертикального положення і відпустити, він, здійснивши обмежену кількість коливань навколо висхідного положення, повернеться до первісної прямолінійної форми. Отже, висхідна прямолінійна форма є стійкою.

Зі зростанням сили стержень випрямляється усе повільніше і, нарешті, при деякому її значенні, він не повернеться до висхідного стану, а

зупиниться у відхиленому положенні або буде відхилятися усе далі, отже висхідна прямолінійна форма стержня стає нестійкою.

Теоретично висхідна прямолінійна форма залишається можливою (вона не суперечить умовам рівноваги), але поряд з нею з'являється нова – викривлена дійсна форма рівноваги.

Найбільша сила (навантаження), до якої висхідна форма рівноваги є стійкою, називається критичною силою (навантаженням).

Це визначення зазвичай називають визначенням знизу. Крім нього існує інше визначення – визначення зверху: *критичною називається найменша сила (навантаження), до якої крім висхідної існує хоча би ще одна форма рівноваги, що відрізняється від висхідної.*

Визначення критичної сили є основною метою розрахунків на стійкість.

Перехід стержня у нове положення пов'язаний з виникненням нескінченно малих переміщень, тому нова форма рівноваги називається *суміжною*. Така втрата стійкості називається втратою стійкості «у малому». На відміну від цієї локальної втрати стійкості існує втрата стійкості «у великому», коли втрачає стійкість система в цілому. Така втрата стійкості, як правило, супроводжується достатньо великими переміщеннями. Наприклад, в системі на рисунку 5.3 при досягненні силою критичного значення втрата стійкості відбувається різким переходом системи (так зване «процокування») у нижнє положення.

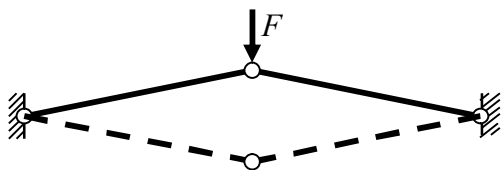


Рисунок 5.3

Відзначимо, що система стійка «у великому», стійка і «у малому». Зворотне твердження не завжди вірне.

У нашому курсі будемо розглядати лише стійкість «у малому».

Перехід стиснутого стержня при втраті стійкості у нове положення пов'язаний з появою деформацій згину.

Залежно від того, який новий вид деформації з'являється при втраті стійкості, розрізняють згинальну, крутильну, згинально-крутильну та інші форми втрати стійкості. Так у тонкій полосі (рис. 5.4, а), що зазнає плоского згину у вертикальній площині, при втраті стійкості з'являється кручення та згин у горизонтальній площині. Кільце, що завантажене радіальним розподіленим навантаженням (рис. 5.4, б) зазнає деформацій стиску. При втраті стійкості колова форма кільця порушується, отже додатково до стиску з'являється згин.

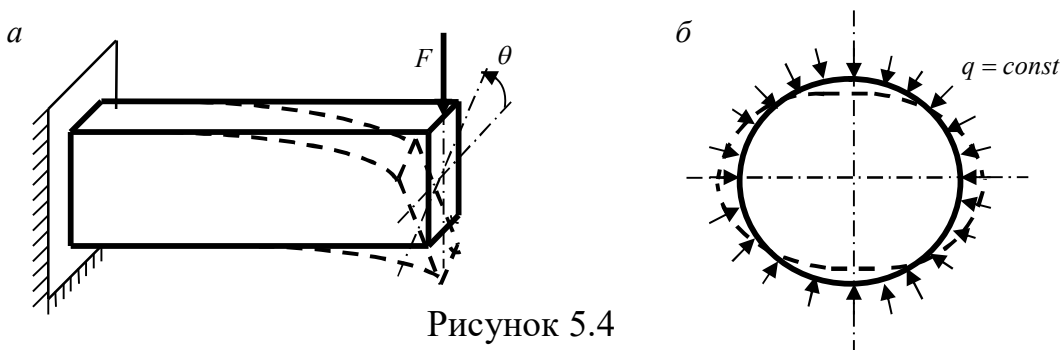


Рисунок 5.4

Теоретично перехід системи у нове положення можливий лише якщо примусово вивести його з висхідного стану. Насправді це відбувається довільно через так звані початкові недосконалості (неточність форми та розмірів тіла, неоднорідність властивостей матеріалу, відхилення у прикладанні навантаження). У нашому курсі ці початкові недосконалості вважаються малими, такими, що не позначаються на величині критичної сили.

5.2 Ступені вільності

Кількість ступенів вільності W у розрахунках на стійкість – це кількість незалежних параметрів, які визначають положення системи у суміжному стані.

Пружний стержень на рисунку 5.5, *а* при втраті стійкості згинається так, що точка його осі на відстані x одержує переміщення y . Кількість таких точок на осі стержня нескінченна, отже $W = \infty$. Наявність пружної опори (рис. 5.5, *б*) надає точкам додаткові переміщення за рахунок її осідання $y = y_{cm} + y_{on}$, і так само у цьому випадку $W = \infty$. Отже, якщо система має у своєму складі хоча би один пружний стержень, число її ступенів вільності дорівнює нескінченності.

Якщо переміщення від осідання опор суттєво більші, ніж переміщення від згину стержня, останніми можна знехтувати. У цьому випадку (рис. 5.5, *в*) переміщення усіх точок визначаються одним параметром (величиною осідання) і $W = 1$.

Система абсолютно жорстких стержнів з двома пружними опорами (рис. 5.5, *г*) має $W = 2$. Дійсно, суміжний стан визначається двома параметрами v_1, v_2 .

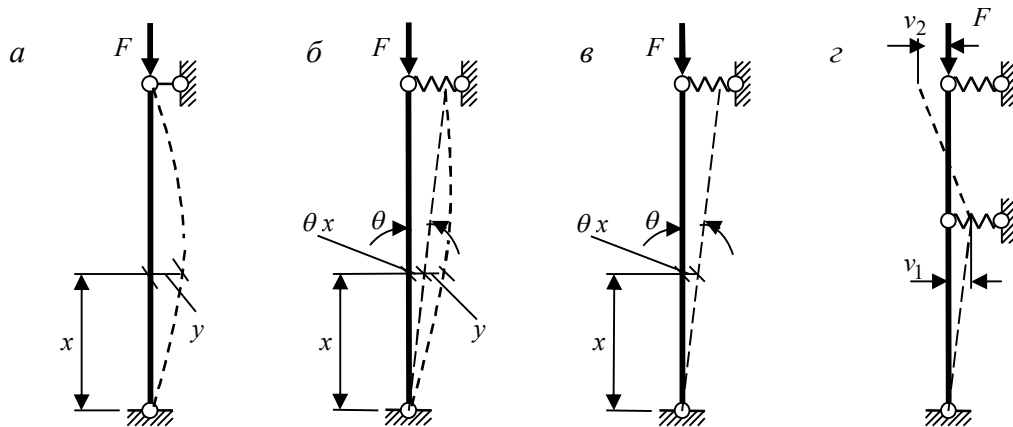


Рисунок 5.5

5.3 Методи розрахунку на стійкість. Статичний метод

Розрізняють три основні методи розрахунку на стійкість: динамічний, енергетичний та статичний. Крім них існують також ряд наближених методів визначення критичної сили.

Динамічний метод ґрунтується на вивченні коливань системи, виведеної з вихідного положення при подальшій відсутності збуджуючого фактору. У цьому випадку система здійснює вільні коливання. При навантаженні, меншому критичного, коливання будуть затухаючими і система повернеться згодом у висхідне положення. Навпаки, наявність зростання амплітуди вільних коливань системи свідчить про перехід системи через критичний стан. Навантаження, що відповідає такому переходу є критичним. Динамічний метод є найбільш загальним. Він може бути застосований для розрахунку як консервативних, так і неконсервативних систем. Але через складність розрахунків цей метод не має широкого застосування для вирішення практичних задач стійкості. Нагадаємо, що консервативні – це системи, у яких відсутнє розсіювання енергії. При розрахунках будівельних конструкцій зазвичай вважають їх консервативними. Прикладом неконсервативної системи може бути така, у якій необхідно враховувати тертя в шарнірах.

Енергетичний метод ґрунтується на використанні енергетичного критерію стійкості, що визначається теоремами Лагранжа– Дирихле і Ляпунова. Наведемо ці теореми у спрощеному формулюванні.

Теорема Лагранжа – Дирихле. *Якщо у стані рівноваги консервативної системи її потенціальна енергія мінімальна порівняно з потенціальною енергією суміжних станів, цей стан стійкий.*

Теорема Ляпунова. *Якщо потенціальна енергія консервативної системи у стані рівноваги не мінімальна порівняно з потенціальною енергією суміжних станів, цей стан нестійкий.*

Відповідно до теореми Лагранжа – Дирихле для пружної системи, що знаходиться у стані стійкої рівноваги, варіація повної потенціальної енергії повинна задовольняти умовам

$$\delta U_{\text{повн}} = 0: \quad \delta^2 U_{\text{повн}} > 0.$$

Ці умови можна спростити, якщо за початок відліку потенціальної енергії узяти її значення у висхідному стані. Тоді, вважаючи початкові недосконалість малими так, що $U_{0 \text{ повн}} = 0$, одержуємо приріст потенціальної енергії при переході у суміжний стан таким:

$$\Delta U_{\text{повн}} = U_{\text{повн}} - U_{0 \text{ повн}} = U_{\text{повн}}.$$

З урахуванням того, що повна потенціальна енергія виражається сумою робіт внутрішніх U та зовнішніх W сил при переході з суміжного у висхідний стан, одержуємо енергетичний критерій стійкості у вигляді принципу можливих переміщень:

$$U_{\text{повн}} = W + U = 0. \quad (5.1)$$

При втраті стійкості система переходить у новий – суміжний стан рівноваги. *Статичний метод або метод Ейлера полягає у застосуванні умов рівноваги до суміжного стану.*

Розглянемо систему двох абсолютно жорстких прямих стиснутих стержнів на пружних опорах (рис. 5.7, а).

Втрата стійкості стає можливою через осідання пружних опор (рис. 5.7, б). Положення усіх точок системи у суміжному стані повністю визначається двома параметрами, наприклад величинами v_1, v_2 переміщень опорних точок системи. Отже, ця система має два ступеня вільності.

При втраті стійкості пружні опори деформуються і в них виникають реакції пропорційні величинам осідання:

$$R_1 = c v_1; \quad R_2 = c v_2.$$

Коефіцієнтами пропорційності у цих виразах є жорсткість c пружних опор, тобто сила, яка викликає осідання опори на одиницю.

Запишемо рівняння рівноваги системи у суміжному стані:

$$\begin{aligned} \sum y = 0; \quad R_A - R_1 + R_2 &= 0; \\ \sum x = 0; \quad V_A - F &= 0; \\ \sum M_A = 0; \quad R_1 l - R_2 (l + l) + F v_2 &= 0. \end{aligned}$$

Одержані три рівняння рівноваги системи містять чотири невідомі реакції, тому додатково складаємо рівняння, що виражає умову відсутності згинаючого моменту у шарнірі 1 для суміжного стану:

$$\sum_{\text{верхн}} M_1 = 0; \quad -R_2 l + F(v_1 + v_2) = 0.$$

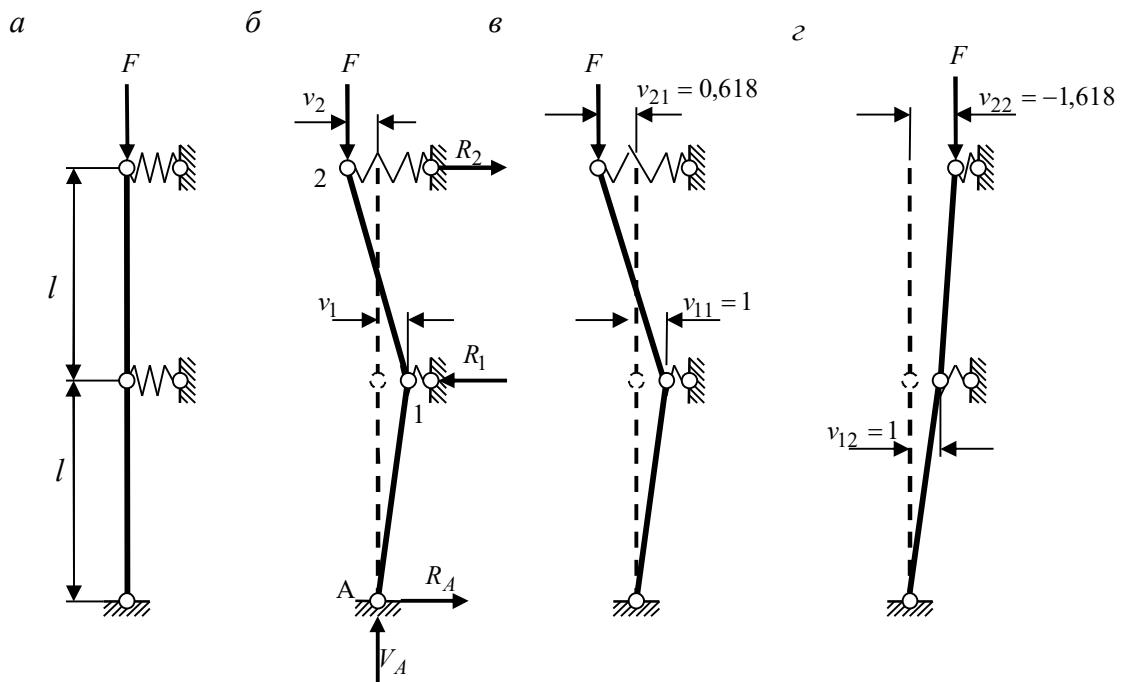


Рисунок 5.7

Розглядаємо окремо це рівняння разом з третім рівнянням рівноваги системи. Після підстановки в них реакцій, виражених через переміщення опорних точок, одержимо після елементарних перетворень таку систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} cl v_1 + (F - 2cl) v_2 &= 0; \\ F v_1 + (F - cl) v_2 &= 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Оскільки $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$, розв'язок системи одержуємо з умови рівності нулю її визначника:

$$\begin{vmatrix} cl & (F - 2cl) \\ F & (F - cl) \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, одержуємо рівняння стійкості розглянутої стержневої системи, яке являє собою квадратичне рівняння відносно навантаження:

або
$$F^2 - 3clF + c^2l^2 = 0.$$

Розв'язок рівняння дає два кореня – дві критичні сили:

$$F = \frac{3cl}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{3cl}{2}\right)^2 - c^2l^2} = \begin{cases} 0,382cl; \\ 2,618cl. \end{cases} \quad (5.4)$$

Як впливає з (5.3), абсолютні значення переміщень залишаються невизначеними і можна знайти лише їх співвідношення. Так, з першого рівняння (5.3) маємо:

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{cl}{F - 2cl}, \quad (5.5)$$

з другого:
$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{F}{F - cl}. \quad (5.6)$$

Проаналізуємо ці співвідношення при одержаних значеннях сили. Підставляючи перший корінь (5.4) у (5.5), одержимо:

$$\frac{v_{21}}{v_{11}} = -\frac{cl}{0,382cl - 2cl} = 0,618.$$

Отже, якщо прийняти $v_{11} = 1$, друга опорна точка системи переміститься на величину $v_{21} = 0,618$ і система набуває вигляду, показаного на рисунку 5.7, в. Ця форма системи, що відповідає першому кореню рівняння стійкості, називається *першою формою втрати стійкості*. Неважко упевнитись, що (5.6) дає таке саме значення співвідношення переміщень опорних точок.

Підставивши другий корінь (5.4) у (5.5) або (5.6), одержимо:

$$\frac{v_{22}}{v_{12}} = -\frac{cl}{2,618cl - 2cl} = -1,618.$$

Вид системи, що відповідає другому кореню рівняння стійкості, або *друга форма втрати стійкості* наведена на рисунку 5.7, г.

Залежність між навантаженням та переміщенням v_2 при додатних зміщеннях v_1 схематично наведена на рисунку 4.8.

Кореням рівняння стійкості $F_{1кр} = 0,618cl$; $F_{2кр} = 2,618cl$ відповідають точки розгалуження (біфуркації) форм рівноваги системи. Відповідні часто ці значення сил називають *біфуркаційними*.

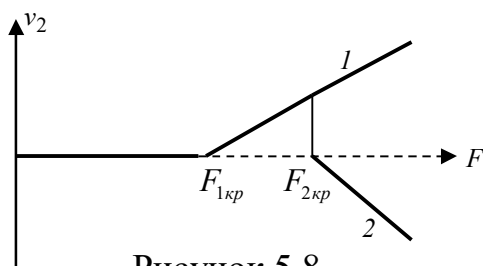


Рисунок 5.8

При $F < F_{1кр}$ стійкою формою рівноваги є висхідна прямолінійна форма. При $F > F_{1кр}$ з'являється суміжна форма при $v_2 > 0$ (лінія 1 на рис. 5.8), а при $F > F_{2кр}$ - друга суміжна форма рівноваги з $v_2 < 0$ (лінія 2 на рис. 5.8). Висхідна прямолінійна форма стає нестійкою і можлива лише теоретично або при додатковому закріпленні стержня від переміщень. Те саме можна сказати і про другу форму, оскільки вона не може здійснитися після втрати стійкості за першою формою. Теоретично можливими залишаються перша та висхідна форми рівноваги. Отже при $F > F_{2б}$ теоретично можливі дві форми втрати стійкості.

Відзначимо, що кількість форм втрати стійкості і, відповідно, кількість біфуркаційних сил дорівнює кількості ступенів вільності системи, зокрема при $W = \infty$ вона нескінченна.

Зважаючи на проведений аналіз можна зробити висновок, що критичною силою системи є найменша з біфуркаційних сил. У розглянутому прикладі маємо:

$$F_{кр} = \min(F_{1кр}; F_{2кр}) = F_{1кр} = 0,382cl.$$

5.4 Стійкість прямого стиснутого стержня

5.4.1 Стійкість прямого стиснутого стержня з шарнірним закріпленням кінців. Формула Ейлера

Розглянемо прямий стиснутий стержень постійної жорсткості (рис. 5.9, а). нагадаємо, що такий стержень має нескінченну кількість ступенів вільності.

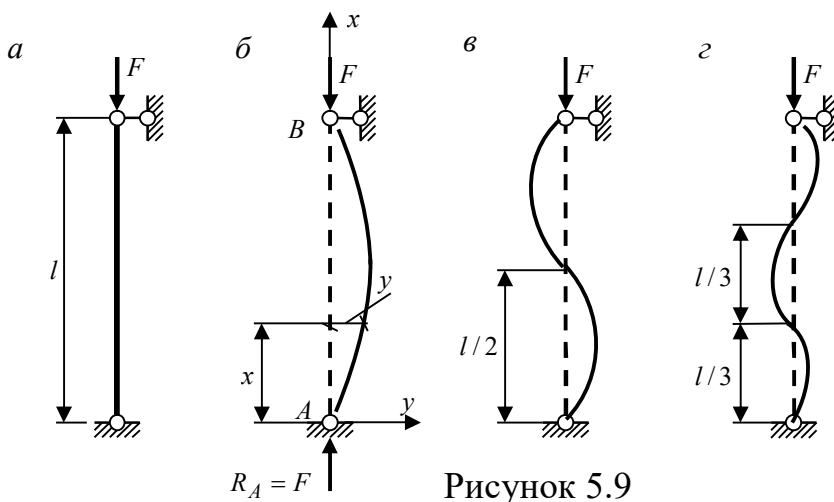


Рисунок 5.9

Застосовуючи статичний метод, визначаємо, що горизонтальні реакції відсутні, а вертикальна дорівнює стискаючій силі. Далі застосовуємо рівняння рівноваги нескінченно малого елемента стержня, відоме з опору матеріалів як наближене диференціальне рівняння зігнутої осі стержня:

$$EI y'' = M.$$

Згинаючий момент у перерізі стержня в суміжному стані $M = -F y$. Отже, диференціальне рівняння набуває такого вигляду:

$$EI y'' + F y = 0. \quad (5.7)$$

Поділивши члени рівняння на EI , введемо позначення

$$n^2 = \frac{F}{EI}. \quad (5.8)$$

Тепер рівняння (5.7) набуває стандартного вигляду однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку:

$$y'' + n^2 y = 0. \quad (5.9)$$

Розв'язок цього рівняння має такий вигляд:

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx. \quad (5.10)$$

Запишемо граничні умови:

1) при $x = 0$ $y = 0$; 2) при $x = l$ $y = 0$.

З першої умови одержимо $C_2 = 0$, отже стержень втрачає стійкість згинаючись за синусоїдою $y = C_1 \sin nx$.

З другої умови $C_1 \sin nl = 0$. Звідси, оскільки $C_1 \neq 0$, одержуємо рівняння стійкості

$$\sin nl = 0.$$

Розв'язок цього рівняння дає нескінченний ряд:

$$nl = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, k\pi; \quad k = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (5.11)$$

Нульове рішення відкидаємо як таке, що відповідає висхідному стану. Тоді

беремо перше ненульове рішення $n_1 l = \pi$. Тепер з (5.8) одержуємо $\sqrt{\frac{F_{1кр}}{EI}} \cdot l = \pi$

і, далі: $F_{1кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$.

Підставимо $n_1 = \frac{\pi}{l}$ у (5.10). З урахуванням $C_2 = 0$ одержимо функцію прогинів стержня при втраті стійкості за першою формою:

$$y_1 = C_1 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Отже першій формі втрати стійкості стержня відповідає згинання за однією половиною хвилі синусоїди (рис. 5.9, б).

Другому кореню (5.11) рівняння стійкості відповідають такі співвідношення:

$$n_2 = \frac{2\pi}{l}; \quad F_{2кр} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}; \quad y_2 = C_1 \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Останнє співвідношення окреслює другу форму втрати стійкості за двома півхвилями синусоїди (рис. 5.9, в).

Продовжимо аналіз для третього розв'язку (5.11):

$$n_3 = \frac{3\pi}{l}; \quad F_{3кр} = \frac{9\pi^2 EI}{l^2}; \quad y_3 = C_1 \sin \frac{3\pi x}{l}.$$

Відповідна форма втрати стійкості наведена на рисунку 5.9, г і містить три півхвилі синусоїди.

Отже для розрахунку системи з нескінченним числом ступенів вільності необхідно скласти диференціальні рівняння. Розв'язок задачі дає нескінченну кількість критичних (біфуркаційних) сил і відповідних форм втрати стійкості.

Як впливає з визначення критичною силою системи є найменша з біфуркаційних сил:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (5.12)$$

Ця формула носить ім'я *Ейлера*.

Зауважимо, що як і в прикладі, розглянутому в пункті 5.3, вищі форми втрати стійкості можливі лише в тому випадку, якщо на систему накласти додаткові в'язі. *Оскільки постановка додаткових в'язей приводить до збільшення жорсткості системи, це також приводить і до збільшення критичної сили.*

При визначенні критичної сили було використане наближене диференціальне рівняння зігнутої осі стержня. Це рівняння достатньо задовільно описує поведінку стержня до критичного навантаження. У випадках значної гнучкості стержня матеріал при втраті стійкості продовжує знаходитись в межах пружної стадії роботи. В такому разі у суміжному стані він знаходиться у рівновазі і може знадобитись вивчення закритичного стану. Це можна зробити лише застосовуючи точне рівняння зігнутої осі:

$$\frac{EI}{\rho} = M.$$

5.4.2 Критична сила для прямого стиснутого стержня при різних закріпленнях кінців

Формулу Ейлера (5.12) можна поширити на інші варіанти закріплення кінців стержня. Для цього звернемо увагу на те, що форми втрати стійкості шарнірно закріпленого стержня (рис. 5.9) різняться одна від одної кількістю півхвиль синусоїди, що укладаються при згині за довжиною стержня.

Кожна частина стержня l_c , на якій міститься одна півхвиля синусоїди поводить себе так само, як окремий шарнірно закріплений стержень довжиною l_c . Наприклад при другій формі втрати стійкості маємо:

$$l_c = 0,5l, \text{ отже } F_{2кр} = \frac{\pi^2 Ei}{(0,5l)^2} = \frac{4\pi^2 Ei}{l^2}.$$

Відповідно до цього можна записати формулу для критичної сили при різних закріпленнях його кінців. Позначивши через μ частку довжини стержня, на якій при втраті стійкості міститься одна півхвиля синусоїди застосуємо формулу Ейлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (5.13)$$

Коефіцієнт μ називають *коефіцієнтом зведення довжини*. Його значення для різних випадків закріплення стержня наведені на рисунку 5.10.

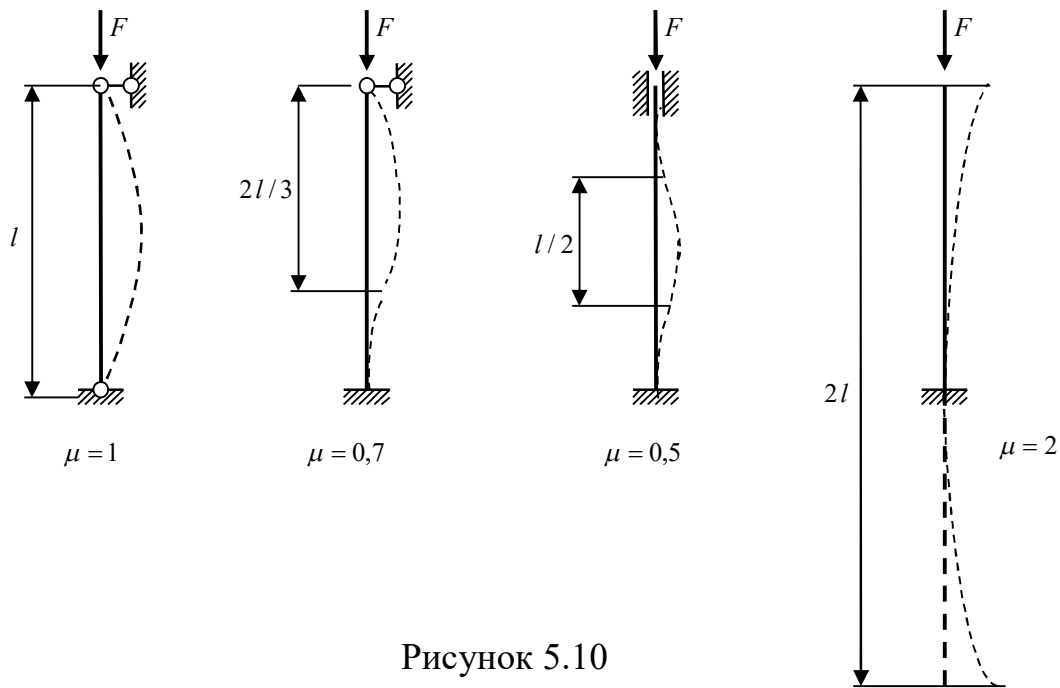


Рисунок 5.10

5.4.3 Критичні напруження. Стійкість за межею пружності

Критичне напруження відповідає критичному навантаженню. З урахуванням (5.13) маємо:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A}. \quad (5.14)$$

Нагадаємо, що вираз (5.13) був одержаний з припущенням пружної роботи матеріалу, тому напруження (5.14) не повинні перевищувати межі пропорційності:

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}. \quad (5.15)$$

Введемо позначення *гнучкості стержня*:

$$\lambda = \sqrt{\frac{(\mu l)^2 A}{I}} = \frac{\mu l}{i}, \quad (5.16)$$

де $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ - радіус інерції перерізу.

Після підстановки (5.14) в (5.15) з урахуванням (5.16) одержимо:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц},$$

звідки граничне значення гнучкості, до якого матеріал до втрати стійкості працює в пружній стадії буде таким:

$$\lambda_{cp} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{nc}}} \quad (5.17)$$

Зокрема для сталі марки Ст.3 $\sigma_{nc} = 300 \text{ МПа}$ і $\lambda_{cp} \approx 100$.

При $\lambda < \lambda_{cp}$ втрата стійкості супроводжується появою пластичних деформацій і формула Ейлера (5.13) не може бути застосована.

Зауважимо, що межа пропорційності матеріалу дуже близька до межі пружності, тому зазвичай їх вважають співпадаючими і кажуть про стійкість за межею пружності.

Задача стійкості за межею пружності ускладнюється тим, що у цьому випадку матеріал зазнає пластичних деформацій і система перестає бути консервативною.

Для спрощеного обчислення критичних напружень за межею пружності Ясинський запропонував емпіричну формулу:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda \quad (5.18)$$

Коефіцієнти a та b експериментально, наприклад, для сталі Ст.3 $a = 310$; $b = 1,14$.

Якщо критичні напруження, визначені за (5.18), перевищують межу текучості σ_m , стержень втратить міцність раніше, ніж стійкість.

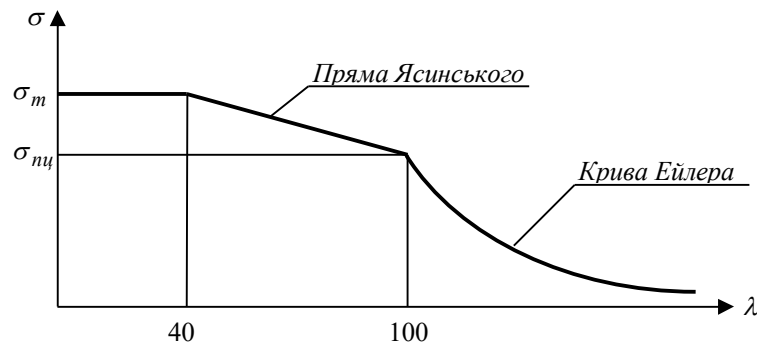


Рисунок 5.12

Для сталі Ст.3 залежність між критичною силою і гнучкістю відображається графіком, наведеним на рисунку 5.12.

5.4.4 Розрахунок стержнів на стиск з урахуванням стійкості

В інженерній практиці розрахунок стержнів на стиск поєднують з розрахунком на стійкість. Для цього значення допустимого напруження приймають зменшеним, вводячи коефіцієнт φ :

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi [\sigma] \quad (5.19)$$

Коефіцієнт φ називають *коефіцієнтом поздовжнього згину*. Він залежить від матеріалу та гнучкості стержня. Його значення для сталі Ст.3 такі:

λ	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
φ	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19

При застосуванні (5.19) для підбору перерізу стержня спочатку задаються деяким значенням φ_0 і знаходять потрібну площу перерізу $A = \frac{N}{\varphi[\sigma]}$.

Далі для прийнятого перерізу обчислюють гнучкість і знаходять нове значення коефіцієнту. Розрахунок продовжують до виконання умови (5.19) при черговому значенні φ .

Зазвичай за такою схемою в інженерній практиці підбирають перерізи стиснутих стержнів.

Для прикладу визначимо критичну силу для консольного стержня довжиною 3м, виконаного із двотавра № 20.

Виходячи з припущення, що стержень втрачає стійкість у пружній стадії роботи матеріалу, скористаємося формулою Ейлера:

$$F_{кр}^E = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 115 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 3)^2} = 63,0 \text{ кН},$$

де $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа}$ – модуль пружності сталі;
 $I_{\min} = 115 \text{ см}^4 = 115 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ – мінімальний момент інерції перерізу двотавра № 20;

$\mu = 2$ – коефіцієнт зведення довжини для консольного стержня (див. теоретичний матеріал, п. 5.3.3, (рис. 5.10).

Перевіряємо величину критичних напружень:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{63,0}{26,5} = 2,38 \text{ кН / см}^2 = 23,8 \text{ МПа},$$

де $A = 26,5 \text{ см}^2$ – площа перерізу двотавра № 20.

Оскільки критичні напруження не перевищують межу пропорційності сталі $\sigma_{ну} = 260 \text{ МПа}$, стержень дійсно втрачає стійкість у межах пружної стадії роботи і.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке стійкість?
2. Які бувають види рівноваги?
3. Які види втрати стійкості? Яка основна мета розрахунку на стійкість?
4. Які є методи розрахунку на стійкість?
5. У чому суть статичного м $F_{кр} = 63 \text{ кН}$ методу розрахунку на стійкість?
6. Що таке ступінь вільності у розрахунках на стійкість?
7. Наведіть формулу Ейлера.
8. Які межі застосування формули Ейлера?
9. Як формула Ейлера застосовується для стержнів з різними варіантами закріплення кінців?
10. Що таке гнучкість стержня?
11. Що таке коефіцієнт зведення довжини стержня? Наведіть його значення.
12. Як визначають критичні напруження за межею пропорційності?
13. Як в інженерній практиці виконується розрахунок стиснутих стержнів з урахуванням стійкості?
14. Від чого залежить коефіцієнт поздовжнього згину?

6 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ПРУЖНИХ СИСТЕМ. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ МЕТОДОМ МОРА

6.1 Принцип можливих переміщень для пружних систем

Розрахунок статично невизначених систем, а також усіх систем на жорсткість пов'язаний із необхідністю обчислення переміщень. Найбільш загальними методами визначення переміщень у пружних системах є енергетичні, засновані на дослідженні потенціальної енергії системи. Одним із методів, що застосовується для визначення переміщень у лінійно деформованих системах, є розглянутий у цьому розділі *метод Мора*.

Виведення формул для визначення переміщень за методом Мора можна зробити на основі принципу можливих переміщень. Цей принцип є універсальним законом механіки. Він, зокрема, використовується при доведенні основних енергетичних теорем для пружних систем.

Нагадаємо формулювання принципу можливих переміщень. *Якщо система знаходиться в рівновазі, то сума робіт усіх її зовнішніх і внутрішніх сил на будь-яких можливих переміщеннях дорівнює нулю.*

Якщо роботу зовнішніх сил позначити W , а роботу внутрішніх сил - U , то принцип можливих переміщень можна виразити формулою

$$W + U = 0. \quad (6.1)$$

Можливим переміщенням є довільне нескінченно мале переміщення, якому не заважають накладені на систему в'язі. Можливі переміщення відраховуються від стану рівноваги системи. При цьому через їх малість передбачається, що умови рівноваги системи не порушуються, тобто зусилля не змінюються.

Розглянемо спочатку визначення роботи зовнішніх і внутрішніх сил і деякі теореми для пружних систем.

6.2 Робота зовнішніх сил. Узагальнені сили та узагальнені переміщення

Як відомо, робота обчислюється як добуток постійного за величиною силового фактора на переміщення в напрямку цього фактора. Наприклад, робота сили F дорівнює добутку цієї сили на шлях, пройдений у напрямку сили, робота зосередженого моменту (пари сил) – добутку моменту на кут повороту в напрямку цього моменту та ін. Для загальності міркувань у будівельній механіці застосовують поняття узагальненої сили й узагальненого переміщення.

Узагальненою силою називають будь-яку силу або групу сил (пару сил, рівномірно розподілене навантаження, дві сили, що розтягують чи стискають стержень та інші комбінації навантаження).

Узагальненим переміщенням називають таке переміщення, на якому відповідна узагальнена сила виконує роботу, тобто це множник при узагальненій силі у виразі роботи.

Узагальнену силу позначають F із порядковим індексом, а узагальнене переміщення - Δ із двома індексами: перший з яких указує точку й напрямок переміщення (звичайно цей індекс відповідає індексу узагальненої сили, що діє в напрямку даного переміщення); другий індекс указує причину, що викликала це переміщення (індекс сили, температурний вплив, зміщення опор тощо).

При розв'язанні ряду задач замість дійсних навантажень вводять одиничні сили або моменти. Переміщення від цих навантажень позначають δ з тими самими індексами, що й переміщення від довільних за величиною навантажень.

Як і раніше, розглядатимемо тільки лінійно деформовані системи, тобто системи, для яких залежність між переміщеннями й навантаженнями має лінійний характер. Для таких систем справедливими є такі співвідношення:

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} \cdot F_k; \quad (6.2)$$

$$\Delta_{if} = \delta_{i1} \cdot F_1 + \delta_{i2} \cdot F_2 + \delta_{i3} \cdot F_3 + \dots \quad (6.3)$$

Роботу зовнішніх (внутрішніх) сил на можливих переміщеннях називають *можливою роботою* зовнішніх (внутрішніх) сил. Для лінійно деформованих систем при обчисленні робіт замість нескінченно малих можливих переміщень можуть розглядатися малі скінченні переміщення. Зокрема, через довільність можливих переміщень ними можуть бути переміщення, викликані будь-якою силою чи групою сил.

Розглянемо деяку пружну систему (рис. 6.1), завантажену статично прикладеною силою F_i . Статичний характер завантаження передбачає повільне зростання значення сили від нуля так, що прискорення точок системи малі й силами інерції можна знехтувати.

У процесі завантаження система деформується, і точка прикладання сили F_i переміщується в напрямку сили на величину Δ_{ii} . Залежність між силою й переміщенням при статичному завантаженні на графіку виражається прямою лінією (рис. 6.2).

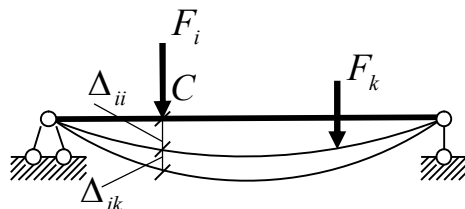


Рисунок 6.1

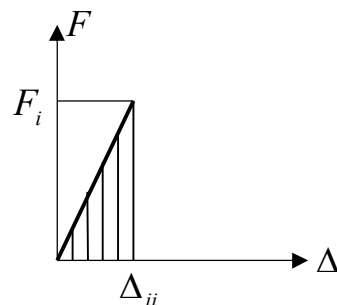


Рисунок 6.2

Робота, що виконується силою F_i , відповідає площі заштрихованої частини графіка

$$W_{ii} = \frac{1}{2} F_i \cdot \Delta_{ii} \quad (6.4)$$

і називається *дійсною роботою сили* F_i .

Якщо тепер до системи прикласти додаткову силу F_k , то точка прикладання сили F_i одержить додаткове переміщення Δ_{ik} . Сила F_i при цьому залишається постійною й виконує роботу

$$W_{ik} = F_i \cdot \Delta_{ik} \quad (6.5)$$

Переміщення Δ_{ik} може розглядатися як можливе переміщення точки S . Тоді робота W_{ik} буде називатися *можливою роботою сили* F_i .

Порівнявши вирази (6.4) та (6.5) бачимо, що дійсна робота сили відрізняється від можливої роботи коефіцієнтом $1/2$.

6.3 Робота внутрішніх сил

Для визначення робіт внутрішніх сил розглянемо балку, наведену на рисунку 6.1. У зв'язку з тим, що система передбачається лінійно деформованою, для визначення в ній зусиль і переміщень можна скористатися принципом незалежності дії сил. Для цього розглянемо два стани балки (рис. 6.3): у першому діє сила F_i , а в другому – сила F_k . Виділимо в балці на відстані x від лівої опори елемент довжиною dx . У першому стані на гранях елемента діють внутрішні зусилля M_i та Q_i (рис. 6.4, а), у другому – M_k та Q_k (рис. 6.4, б). Ці зусилля в межах елемента можна вважати постійними.

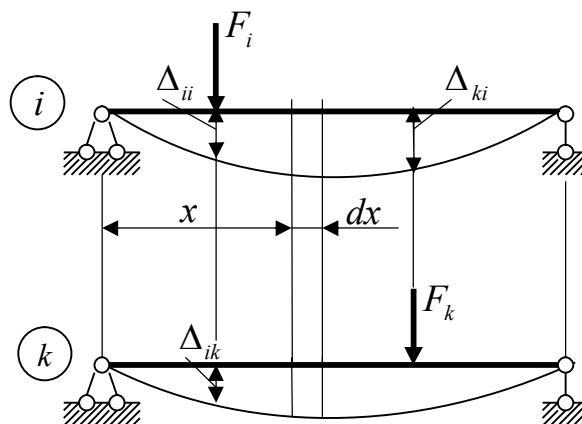


Рисунок 6.3

Дія зусиль M_k у другому стані викликає викривлення осі елемента так, що кривина осі дорівнює χ_k , а кут між його гранями становить $\chi_k dx$ (рис. 6.4, в). Поперечні сили Q_k викликають зсув (рис. 6.4, з) так, що величина взаємного зміщення граней становить $\gamma_k dx$.

Тепер неважко записати можливу роботу внутрішніх сил елемента в першому стані на переміщеннях другого стану:

$$dU_{ik} = -M_i \cdot \chi_k dx - Q_i \cdot \gamma_k dx. \quad (6.6)$$

Знак «мінус» пояснюється тим, що зусилля M_i та Q_i є зовнішніми по відношенню до елемента, а внутрішні зусилля спрямовані назустріч їм, тобто в бік, зворотний переміщенням $\chi_k dx$ та $\gamma_k dx$. Деформації χ_k й γ_k визначаються відомими з опору матеріалів формулами

$$\chi_k = \frac{1}{\rho} = \frac{M_k}{EI}, \quad \gamma_k = \mu \frac{Q_k}{GA}, \quad (6.7)$$

де $\mu = A \int_{(A)} \left(\frac{S_z}{I_z b} \right)^2 dA$ – коефіцієнт, що враховує нерівномірність розподілу дотичних напружень у перерізі й залежить від форми поперечного перерізу.

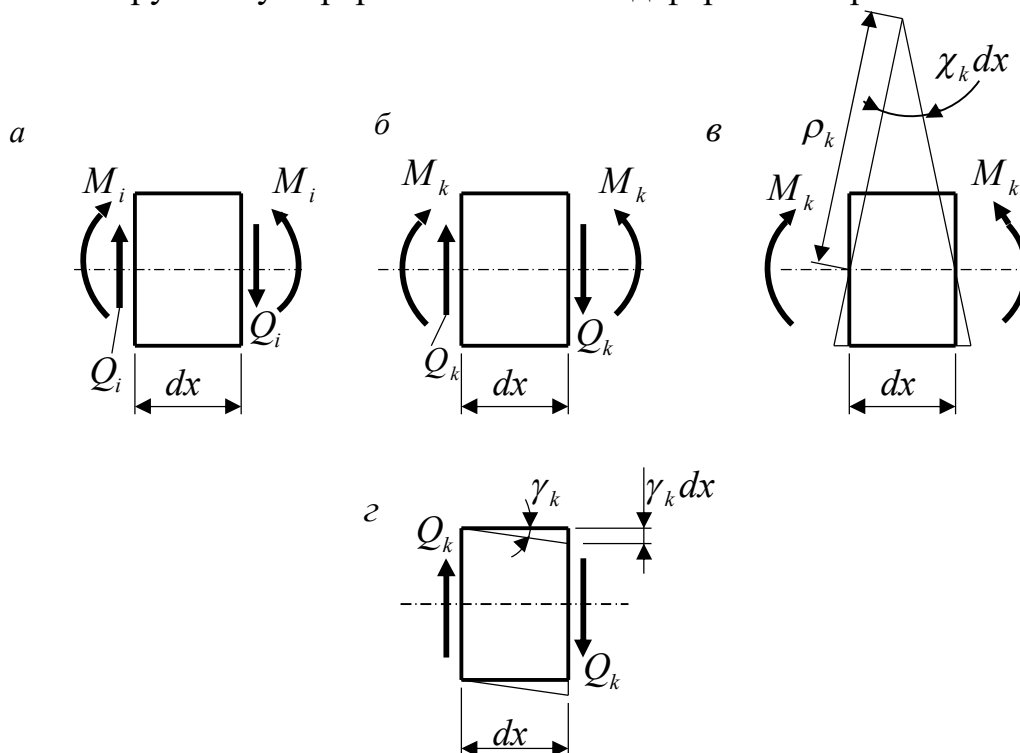


Рисунок 6.4

Підставляючи вирази для χ_k та γ_k в (6.6), інтегруємо обидві частини рівняння по всій довжині балки. Внаслідок одержимо можливу роботу U_{ik} :

$$U_{ik} = -\int_{(i)} \frac{M_i M_k}{EI} dx - \int_{(i)} \mu \frac{Q_i Q_k}{GA} dx. \quad (6.8)$$

У загальному випадку деформації плоскої системи у рівняння (6.8) додається робота поздовжніх сил N_i . При цьому слід урахувати, що осі системи можуть мати переломи й розгалуження, а функції внутрішніх зусиль – розриви. Тому, замінивши змінну x змінною s , що перебігає обрис осей системи, розіб'ємо інтеграл на суму інтегралів. Тоді остаточно можливу роботу внутрішніх сил запишемо так:

$$U_{ik} = -\sum_{(l)} \int \frac{M_i M_k}{EI} ds - \sum_{(l)} \int \mu \frac{Q_i Q_k}{GA} ds - \sum_{(l)} \int \frac{N_i N_k}{EA} ds. \quad (6.9)$$

За аналогією з (6.9) можна записати дійсну роботу внутрішніх сил першого стану U_{ii} , враховуючи, що деформації в цьому випадку визначаються зусиллями M_i , Q_i і N_i і лінійно зростають зі збільшенням навантаження:

$$U_{ii} = -\frac{1}{2} \sum_{(l)} \int \frac{M_i^2 ds}{EI} - \frac{1}{2} \sum_{(l)} \int \mu \frac{Q_i^2 ds}{GA} - \frac{1}{2} \sum_{(l)} \int \frac{N_i^2 ds}{EA}. \quad (6.10)$$

У подальшому знак (l) в інтегралів, що означає інтегрування вздовж кожного відрізка системи, іноді відкидатимемо.

6.4 Теорема про взаємність

Розглянемо два стани пружної системи (рис. 6.3). Переміщення другого стану є можливим переміщенням цієї системи. Тоді на основі принципу можливих переміщень з урахуванням у загальному випадку поздовжніх сил одержуємо:

$$\begin{aligned} W_{ik} &= F_i \cdot \Delta_{ik} = -U_{ik} = \\ &= \sum_{(l)} \int \frac{M_i M_k dx}{EI} + \sum_{(l)} \int \mu \frac{Q_i Q_k dx}{GA} + \sum_{(l)} \int \frac{N_i N_k dx}{EA}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

З іншого боку, переміщення першого стану також можуть розглядатися як можливі переміщення для сил другого стану. Тоді

$$\begin{aligned} W_{ki} &= F_k \cdot \Delta_{ki} = -U_{ki} = \\ &= \sum_{(l)} \int \frac{M_k M_i dx}{EI} + \sum_{(l)} \int \mu \frac{Q_k Q_i dx}{GA} + \sum_{(l)} \int \frac{N_k N_i dx}{EA} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Праві частини виразів (6.12) та (6.11) відрізняються тільки порядком запису співмножників – внутрішніх зусиль, отже,

$$U_{ik} = U_{ki}, \quad W_{ik} = W_{ki}. \quad (6.13)$$

Ці рівності відбивають **теорему про взаємність робіт (теорему Бетті)**, що може бути сформульована так: *робота зовнішніх (внутрішніх) сил i -го стану системи на переміщеннях (деформаціях) k -го стану дорівнює роботі зовнішніх (внутрішніх) сил k -го стану тієї самої системи на переміщеннях (деформаціях) i -го стану.*

З теореми про взаємність робіт випливає теорема про взаємність переміщень. Розглянемо випадок, коли пружна система завантажена одиничними силами - $F_i = 1$ та $F_k = 1$. Застосовуючи до цих двох станів

системи теорему про взаємність робіт і стандартні позначення переміщень, одержимо рівність $F_1 \cdot \delta_{ik} = F_k \cdot \delta_{ki}$, звідки

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (6.14)$$

Це рівняння виражає **теорему про взаємність переміщень (теорему Максвелла)**: *переміщення точки прикладання i -ї сили за її напрямком, викликане дією k -ї одиничної сили, дорівнює переміщенню точки прикладання k -ї сили за її напрямком, викликаному дією i -ї одиничної сили.*

6.5 Обчислення переміщень за методом Мора

Нехай треба визначити переміщення Δ_i деякої точки споруди від дії заданого навантаження (рис. 6.5, а). Розглянемо два стани цієї споруди: переший – дійсний стан при дії заданого навантаження (рис. 6.5, а), другий – допоміжний або одиничний стан, у якому за напрямком шуканого переміщення прикладена одинична узагальнена сила (рис. 6.5, б).

Робота одиничної сили на переміщеннях заданого стану $W_{fi} = 1 \cdot \Delta_i$ за теоремою Бетті дорівнює роботі W_{fi} заданих сил на переміщеннях одиничного стану. Беручи до уваги, що $W_{fi} = -U_{fi}$, одержуємо на підставі (6.12):

$$\Delta_i = \sum_{(l)} \int \frac{M \bar{M}_i ds}{EI} + \sum_{(l)} \int \mu \frac{Q \bar{Q}_i ds}{GA} + \sum_{(l)} \int \frac{N \bar{N}_i ds}{EA}, \quad (6.15)$$

де M, Q, N - зусилля від заданого навантаження; $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ - зусилля від одиничної сили у допоміжному стані.

Формулу (6.15) називають формулою Мора. За її допомогою можна визначити переміщення від навантаження в плоскій системі. Для цього:

- 1) визначають зусилля M, Q, N від заданого навантаження;
- 2) за напрямком шуканого переміщення прикладають одиничну узагальнену силу;

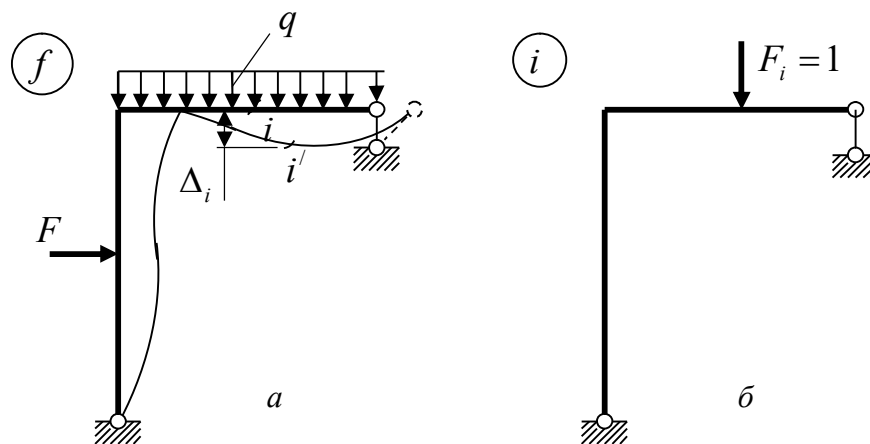


Рисунок 6.5

- 3) знаходять зусилля $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ від одиничної сили;

4) вирази зусиль підставляють у праву частину (6.15) та інтегруванням уздовж осей усіх елементів споруди визначають шукане переміщення.

Обчислення переміщень за допомогою формули (6.15) називають *методом Мора*.

В окремих випадках формула Мора набуває простішого вигляду. Так, *при розрахунку ферм*, у стержнях яких виникають лише поздовжні зусилля, перші два інтеграли дорівнюють нулю. Тоді, розбивши інтеграл, що залишився, на суму інтегралів для окремих стержнів, одержуємо:

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^n \int \left(\frac{N \bar{N}_i ds}{E A} \right)_k$$

або, беручи до уваги постійність зусиль і жорсткостей у межах кожного стержня,

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{N \bar{N}_i l}{E A} \right)_k. \quad (6.16)$$

Тут сума поширюється на всі ферми, n - число стержнів.

При *розрахунку систем із переважним згином – балок і рам* – вплив поперечних і поздовжніх деформацій на переміщення точок незначний. Тому для таких систем ураховують лише перший інтеграл виразу (6.15), тобто

$$\Delta_i = \sum_{(l)} \int \frac{M \bar{M}_i ds}{EI}. \quad (6.17)$$

Якщо розбити систему на відрізки постійної жорсткості, одержимо:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{EI} \int M \bar{M}_i ds \right)_j. \quad (6.18)$$

Інтеграл $\int_l M \bar{M}_i ds$ у (6.18) часто

називають інтегралом Мора. У деяких випадках обчислення цього інтегралу можна спростити.

У загальному випадку на ділянці прямого стержня постійної жорсткості раціонально скористатися формулою Сімпсона для чисельного інтегрування. Відповідно до цієї формули визначений інтеграл від функції $\varphi(s)$ на відріжку $0 \leq s \leq l$

можна наближено знайти так:

$$\int_0^l \varphi(s) ds \approx \frac{l}{6} \left[\varphi(0) + 4\varphi\left(\frac{l}{2}\right) + \varphi(l) \right].$$

Ця формула ґрунтується на заміні підінтегральної функції квадратною параболою, тому у випадку, якщо функція $\varphi(s)$ дійсно квадратна парабола, вираз дає точний

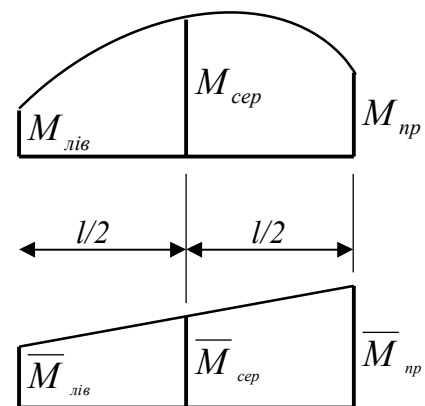


Рисунок 6.6

результат.

Застосовуючи формулу Сімпсона для перемноження двох епюр на відрізку прямого стержня постійної жорсткості (рис. 6.6), одержуємо

$$\int_0^l M \overline{M}_i ds = \frac{l}{6} \left(M_{\text{лів}} \overline{M}_{\text{лів}} + 4M_{\text{сер}} \overline{M}_{\text{сер}} + M_{\text{пр}} \overline{M}_{\text{пр}} \right) \quad (6.19)$$

Тут індекси *лів*, *сер* і *пр* означають лівий, правий кінці та середину відрізка довжиною l .

Як свідчить аналіз, формула (6.19) є точною й у випадку, коли підінтегральна функція $M \overline{M}_i$ на відрізку від 0 до l є кубічною параболою, тобто містить вантажні моменти, окреслені за квадратною параболою (при $q = const$) та лінійно змінні одиничні моменти. Отже, формула Сімпсона дає точний результат для переважної більшості епюр, що зустрічається в практичних розрахунках.

В інших випадках застосування формули Сімпсона потребує розбивання епюр на відрізки досить малої довжини.

Запитання для самоконтролю

1. Для яких цілей необхідно обчислювати переміщення?
2. Як формулюється принцип можливих переміщень для пружних систем?
3. Що таке можливе переміщення?
4. Що таке узагальнена сила?
5. Що таке узагальнене переміщення?
6. Як залежать переміщення від навантаження в лінійно деформованих системах?
7. Що розуміється під статичним прикладанням навантаження?
8. Як визначається дійсна робота зовнішніх сил?
9. У чому різниця між дійсною і можливою роботою?
10. Як визначається можлива робота внутрішніх сил?
11. Чим пояснюється наявність знаку "мінус" у виразі можливої роботи внутрішніх сил?
12. Як одержати дійсну роботу внутрішніх сил?
13. Як формулюється теорема Бетті про взаємність робіт?
14. Як формулюється теорема Максвела про взаємність переміщень?
15. Як записується формула Мора?
16. Які два стани системи необхідно розглядати при визначенні переміщень за методом Мора?
17. Наведіть послідовність обчислення переміщень за методом Мора.
18. Як обирається допоміжний стан при визначенні переміщень за методом Мора?
19. Якого вигляду набуває формула Мора для ферм і для систем з переважаючим згином?
20. Як при визначенні переміщень застосовується формула Симпсона?

7 КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ СПОРУД

7.1 Основні визначення

У будівельній механіці спорудою вважають окреме тіло або систему пов'язаних між собою тіл, призначених для сприйняття навантаження чи іншого силового впливу та передачі його на основу або на іншу споруду. Для розрахунку приймається розрахункова схема: спрощена ідеалізована схема реальної споруди, що враховує основні властивості споруди. Елементами розрахункової схеми є тіла, що складають споруду, з'єднання та опори. У нашому курсі розглядаються стержневі системи, тобто системи, які складаються із стержнів

Точки пружної системи під дією навантаження зміщуються. Якщо ці зміщення з'являються тільки за рахунок деформації елементів споруди, система є *геометрично незмінюваною*.

. Найпростішою незмінюваною стержневою системою є шарнірний трикутник (рис. 7.1, а). Дійсно, якщо стержні трикутника не деформуються, будь-які точки його не змінюють взаємного розташування. На відміну від цієї системи у шарнірному чотирикутнику (рис. 7.1, б) вже при нескінченно малому впливі, тобто без деформації, стержні змінюють своє розташування. Така система називається *геометрично змінюваною*.

З визначення споруди випливає, що споруда може бути тільки *геометрично незмінюваною*.

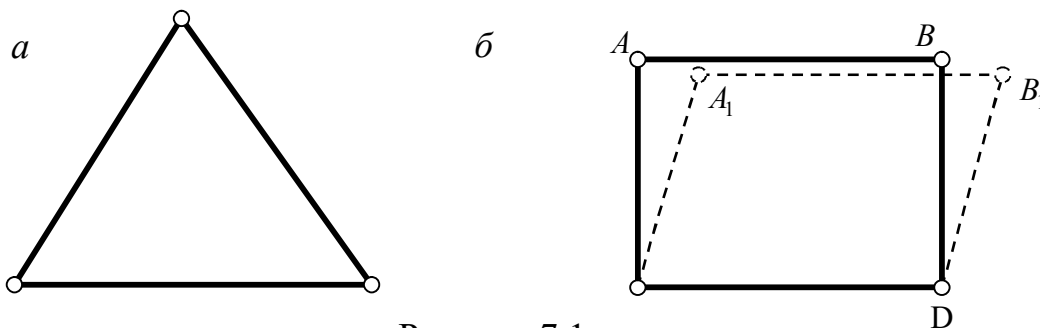


Рисунок 7.1

Зазначимо, що геометрично незмінювана система, усі зусилля в якій можна визначити за допомогою рівнянь рівноваги, називається *статично визначуваною*.

7.2 Кінематичний аналіз

З визначення геометричної незмінюваності виходить, що за умови нескінченно великої жорсткості елементів споруди точки її не мають можливості будь-яких переміщень. Для визначення можливості переміщень системи слугує поняття ступенів вільності. *Кількість ступенів вільності – це кількість незалежних переміщень, які можуть здійснювати точки системи.* Інакше її можна визначити як *мінімальну кількість геометричних параметрів, які необхідні для визначення положення системи.*

У споруді можна виділити окремі геометрично незмінювані частини, які будемо називати дисками. Найпростіший диск – це стержень, найпростіший диск як система стержнів – шарнірний трикутник (рис. 7.1, а). Кожен диск у площині має три ступеня вільності. Дійсно він може мати два поступальних переміщення та одне кутове. Отже, якщо позначити кількість дисків у споруді D , кількість ступенів вільності цих дисків буде дорівнювати $3D$.

Диски у споруді з'єднуються між собою жорстко або з допомогою шарнірів. Кожне таке з'єднання накладає в'язі й обмежує можливість взаємних переміщень дисків. Жорсткі з'єднання не будемо розглядати, оскільки жорстко з'єднані диски завжди можна вважати одним більш великим диском.

При шарнірному приєднанні другого диску до першого (на рис. 7.2, а для спрощення показані стержні) другий може тільки обертатися відносно першого, отже втрачає два ступеня вільності. Такий шарнір, що з'єднує два диски, називають простим шарніром. Він накладає на систему дві в'язі, тобто зменшує кількість ступенів вільності на дві.

Якщо шарнір з'єднує більш ніж два стержні (рис. 7.2, б), його називають складним або кратним тому, що таке з'єднання буде еквівалентне $C-1$ простим шарнірам (тут C - кількість стержнів у з'єднанні).

Позначивши загальну кількість простих шарнірів у системі III , зазначимо, що кількість в'язей, накладених ними буде дорівнювати $2III$.

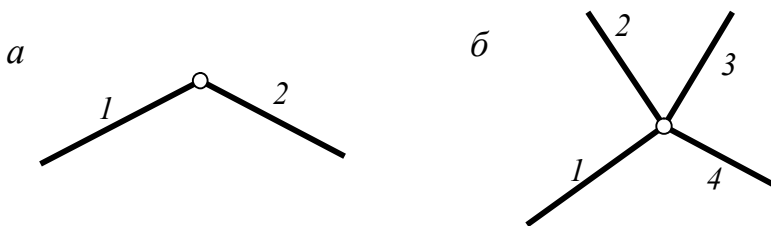


Рисунок 7.2

Вільне переміщення дисків обмежують також опори, що прикріплюють споруду. Основні опори наведені на рисунку 7.3. Кількість в'язей, що накладає шарнірно рухома опора (рис. 7.3, а) дорівнює 1, шарнірно нерухома (рис. 7.3, б, в) – 2, затиснення (рис. 7.3, г) – 3. На цих, а також на інших (рис. 7.3, д, е, ж) опорах наведені також реакції, які в них виникають. Загальну кількість опорних в'язей позначимо C_0 .

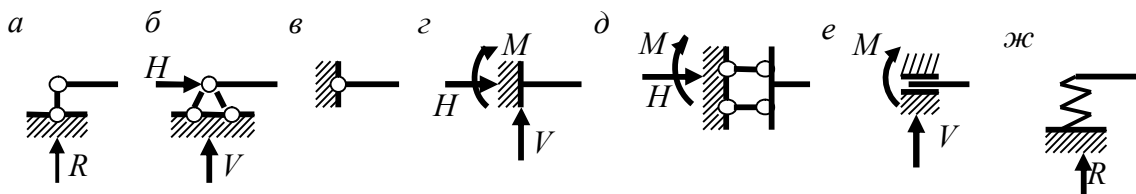


Рисунок 7.3

Тепер можна визначити кількість ступенів вільності споруди так:

$$W = 3D - 2III - C_0. \quad (7.1)$$

Для ферм, що складаються зі стержнів, з'єднаних між собою шарнірами, більш зручно користуватися такою формулою:

$$W = 2U - C - C_0, \quad (7.2)$$

де U – кількість вузлів ферми, тобто точок з'єднання стержнів; C – кількість стержнів ферми; C_0 – кількість опорних в'язей.

Отже, якщо у припущенні абсолютної жорсткості елементів маємо

$$W > 0, \quad (7.3)$$

система є геометрично змінюваною.

Зауважимо, що нерівність

$$W \leq 0, \quad (7.4)$$

яка доповнює (6.3) є необхідною, але недостатньою умовою незмінюваності споруди. Це пояснюється тим, що у (7.1), (7.2) обчислюється загальна кількість в'язей, без урахування їхнього розподілу між окремими з'єднаннями.

Якщо кількість ступенів вільності задовольняє умові (6.4), далі необхідно проаналізувати як в'язі розподіляються між окремими частинами споруди. Такий аналіз виконують умовною збіркою системи. Покажемо перевірку геометричної незмінюваності на прикладі ферми (рис. 7.4, а).

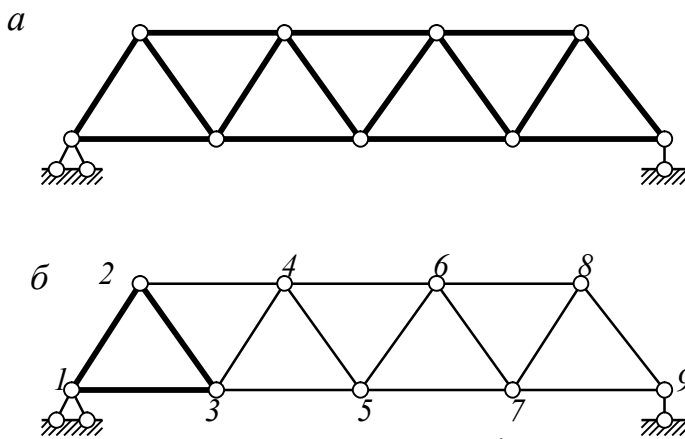


Рисунок 7.4

Кількість стержнів ферми $C = 15$, кількість вузлів $U = 9$, опорних в'язей $C_0 = 3$. Кількість ступенів вільності за (7.2) становить $W = 2 \cdot 9 - 15 - 3 = 0$. Необхідна умова (7.4) незмінюваності виконана. Геометричний аналіз почнемо з трикутника 1–2–3, який є незмінюваним. До нього за допомогою двох

стержнів 2–4 та 3–4 також нерухомо приєднано вузол 4, далі так само парами стержнів приєднуються вузли 5, 6, 7, 8 та 9. Отже, стержні ферми утворюють геометрично незмінювану систему – диск. Далі ферма-диск прикріплюється до землі з допомогою двох шарнірних опор: нерухомої та рухомої, тобто нерухомо. Остаточно робимо висновок, що ферма є геометрично незмінюваною.

7.3 Статичний метод перевірки геометричної незмінюваності

Статичний метод перевірки геометричної незмінюваності ґрунтується на тому, що зусилля у такій системі повинні бути скінченними і однозначними. Отже, якщо при розрахунку на довільне навантаження хоча би одне зусилля виявляється неоднозначним або нескінченно великим, система геометрично змінювана. Найпростішим навантаженням є нескінченно мале – нульове навантаження. Звідси *метод нульового навантаження*. Застосування цього методу покажемо на прикладі ферми (рис. 7.5, а).

Виріжемо трикутник 1–2–3 і розглянемо його рівновагу:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0; -N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha = 0; \\ \sum F_y &= 0; -N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha + N_3 - F = 0; \\ \sum M_O &= 0; N_1 \cdot 0 + N_2 \cdot 0 + N_3 \cdot 0 + F \cdot r = 0.\end{aligned}$$

Визначник одержаної системи трьох рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{vmatrix} -\cos \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & -\sin \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{дорівнює нулю, отже розв'язок системи дає}$$

нескінченно великі значення зусиль N_1, N_2, N_3 .

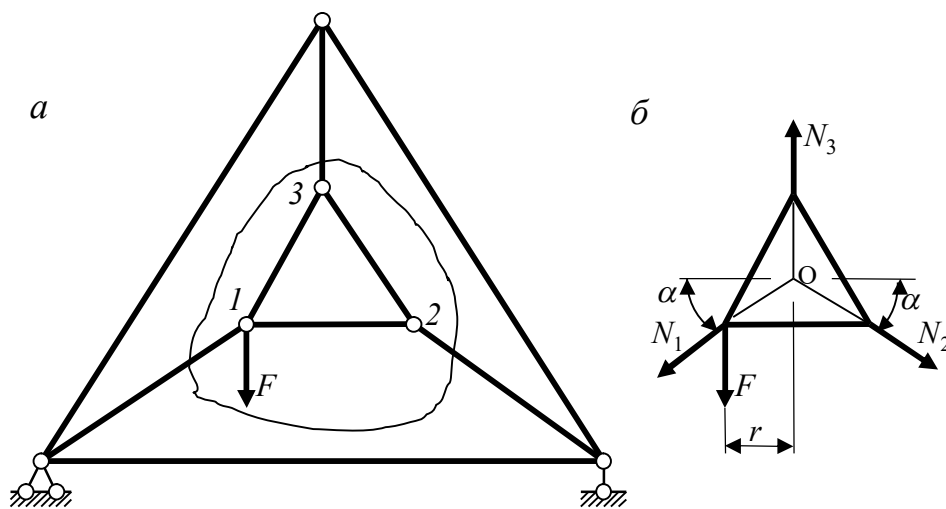


Рисунок 7.5

Це свідчить про геометричну змінюваність системи. Зазначимо, що при нульовому навантаженні ($F=0$) розв'язання буде давали невизначені зусилля виду $0/0$.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке розрахункова схема споруди? Якими міркуваннями керуються при її виборі?
2. З яких елементів може складатися споруда?
3. Як з'єднуються між собою окремі стержні плоскої споруди?
4. Що таке кратний шарнір?
5. Назвіть основні види опор плоских споруд.
6. Що називають кількістю ступенів вільності споруди?
7. Дайте визначення геометрично незмінюваної системи.
8. Чому при перевірці геометричної незмінюваності число ступенів вільності споруди можна визначати за умов припущення про абсолютну жорсткість окремих її елементів?
9. Як визначити кількість в'язей у з'єднанні дисків або в опорі?
10. Як геометрична незмінюваність споруди залежить від числа ступенів вільності?
11. Чому умова $W=0$ є недостатньою для геометричної незмінюваності системи?

8 СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНІ ФЕРМИ

8.1 Основні поняття. Класифікація ферм

Як відомо, при роботі стержня на згин нормальне напруження в поперечному перерізі змінюється за лінійним законом (рис. 8.1, *a*). Найбільш напруженими при цьому будуть крайні волокна, а матеріал середньої частини не повністю використовується. Саме тому в балках намагаються більшу частину матеріалу зосередити в поясах, максимально зменшуючи розміри іншої частини перерізу (стінки). Так виник двотавровий переріз, найбільш пристосований для роботи на згин (рис. 8.1, *б*).

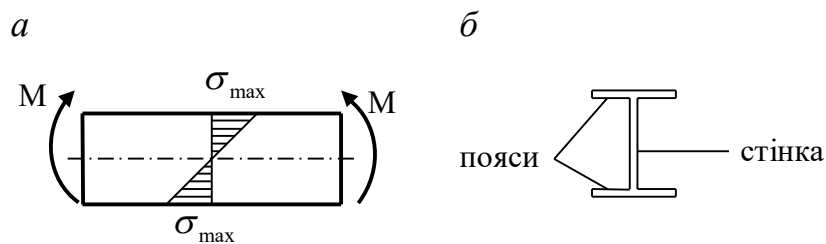


Рисунок 8.1

При зростанні прольоту для сприйняття більших згинаючих моментів висоту перерізу доводиться збільшувати настільки, що витрати матеріалу на стінку балки стають переважаючими. У цьому випадку вигідно перейти від суцільного перерізу до наскрізного, або гратчастого, коли замість суцільної балки конструкцію виготовляють у вигляді системи прямолінійних стержнів (рис. 8.2, *a*). Така система називається *фермою*. Стержні у вузлах ферми з'єднуються жорстко: зварюванням (рис. 8.2, *в*), на заклепках або болтах. Але через велику гнучкість стержнів урахування жорсткості їх з'єднань несуттєво відбивається на роботі ферми. У зв'язку із цим у розрахунковій схемі ферми припускають, що в усіх вузлах знаходяться ідеальні шарніри (рис. 8.2, *б*).

У спорудах, елементами яких є ферми, звичайно передбачають передачу навантаження у вузли ферм, тому їх стержні працюють тільки на розтяг-стиск. Ця обставина і зумовлює більшу економічність ферм у порівнянні з балками за рахунок більш повного використання матеріалу при роботі стержня на розтяг-стиск. Дійсно, у перерізі розтягнутого стержня, на відміну від стержня, що згинається, нормальне напруження однакове в усіх точках, тому матеріал використовується повністю.

За розміщенням та характером роботи у фермі розрізняють *пояси* й *гратки*. Пояси складають стержні, які обмежують контур ферми зверху та знизу.

Гратки утворюються похилими елементами – *розкосами* та вертикальними – *стояками* та *підвісками* (рис. 8.2, *б*). Стояки працюють на стиск, а підвіски – на розтяг.

Частина ферми, розташовану в межах між суміжними вузлами вантажного поясу, називають *панеллю*. Відстань між цими вузлами називають довжиною панелі й позначають *d*.

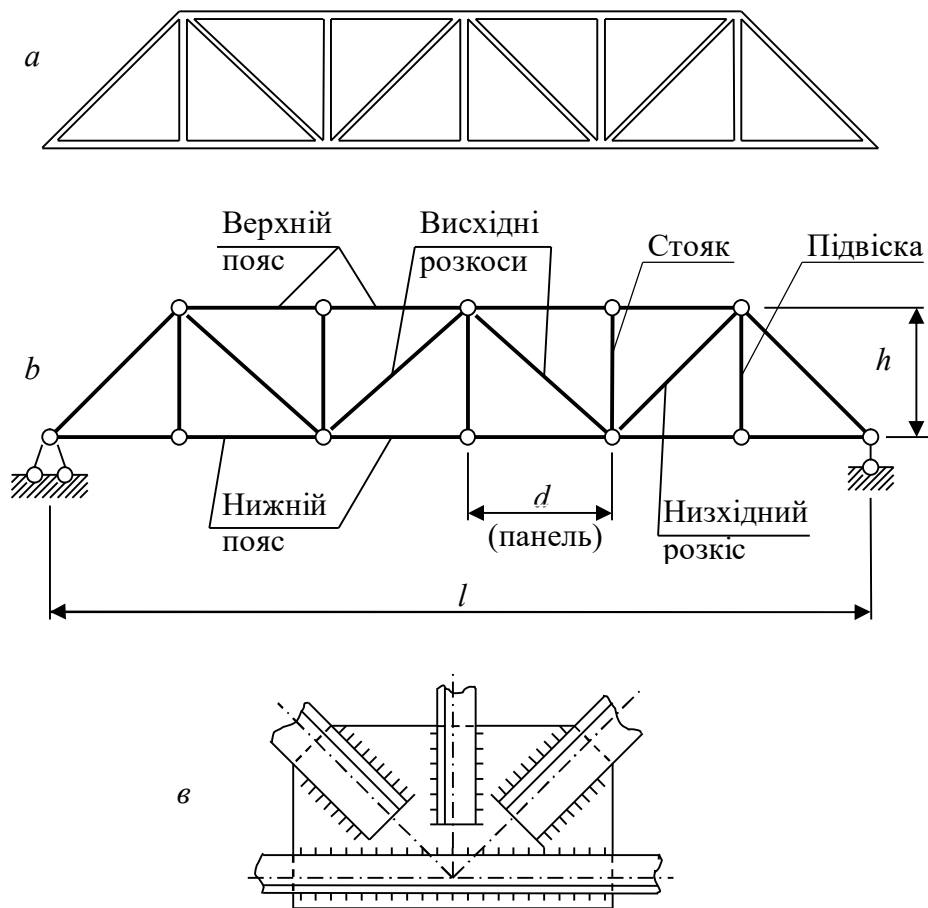


Рисунок 8.2

Ферми класифікують за такими ознаками:

- за призначенням: *мостові* (ферми прогонових споруд мостів, мостових кранів), *кроквяні* (ферми покриттів будов та споруд), *ферми каркасів* будов і споруд та ін., наприклад, ферми, що є частинами корпусу судна, літака, опори ліній електричних передач (ЛЕП);
- за напрямком реакцій при вертикальному навантаженні: *балочні* (рис. 8.3, а), *аркові* або *розпірні* (рис. 8.3, в); а також *консольні* (рис. 8.3, б);
- за обрисом поясів: ферми з *паралельними поясами* (рис. 8.2, б та 8.5), із *трикутним* (рис. 8.4, а) та *полігональним* (рис. 8.4, б) обрисом;
- за системою ґраток: ферми з простими ґратками – *трикутними* (рис. 8.5, а), *розкісними* (рис. 8.5, б), *напіврозкісними* (рис. 8.5, в); ферми із складними ґратками – *двохрозкісні* (рис. 8.5, г), *багаторозкісні* та ін., ферми із складеними ґратками – *шпренгельні* (рис. 8.5, д) та інші ферми, в яких окремі стержні є ґратчастими, тобто теж фермами.

Розрахунок ферм полягає у визначенні зусиль у її стержнях. Для цього у статично визначуваних фермах найчастіше застосовують *метод перерізів*.

При розрахунках вручну для визначення зусилля важливо обрати зручний переріз та застосувати умову рівноваги так, щоб зменшити складність розрахунків.

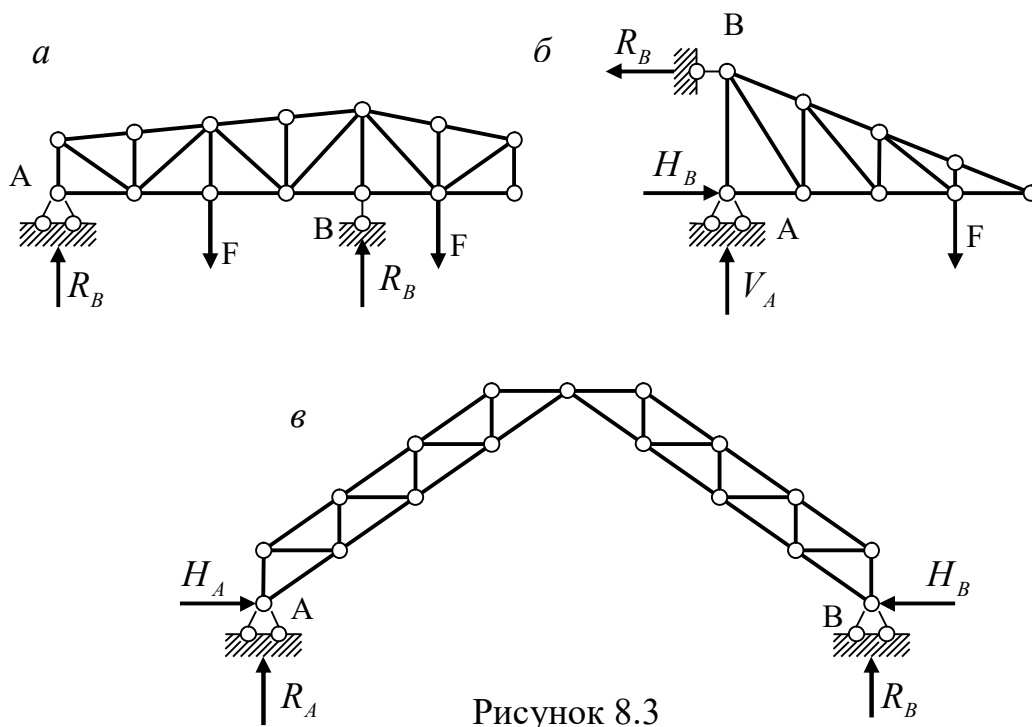


Рисунок 8.3

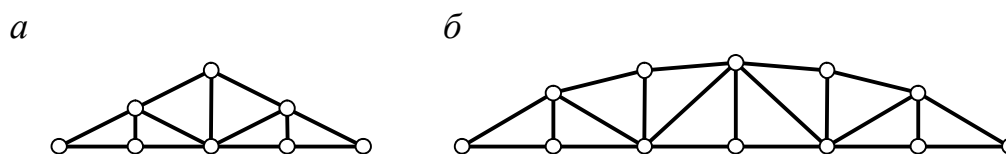


Рисунок 8.4

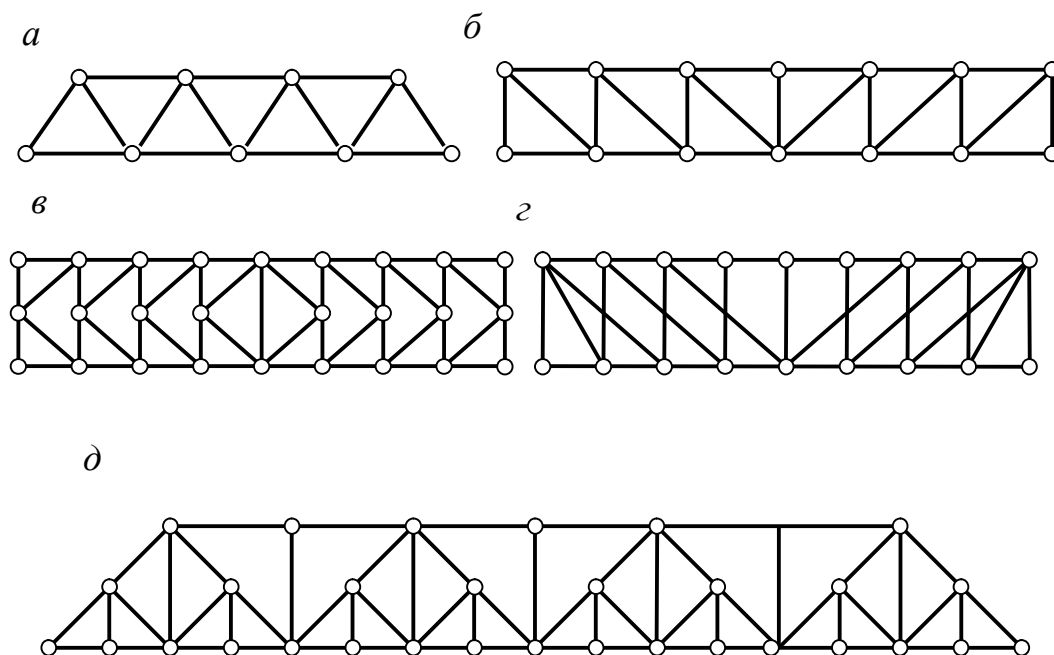


Рисунок 8.5

Залежно від розміщення та конфігурації перерізу, а також від типу використаних рівнянь рівноваги розрізняють такі способи: *вирізання вузлів наскрізних перерізів (моментної точки (Риттера), проекцій), сумісних перерізів, замкнутого перерізу*

8.2 Розрахунок ферм

8.2.1 Спосіб вирізання вузлів

Спосіб вирізання вузлів у класичній формі застосовують для визначення зусиль у фермах, розрахункова схема яких може бути утворена послідовним приєднанням вузлів парами стержнів (рис. 8.6, а). У цьому випадку спершу проводять переріз, що відтинає двостержневий вузол, наприклад, вузол 1 (рис. 8.6, б) і записують його умови рівноваги:

$$\sum F_y = 0; N_{1-2} \sin \alpha + R_A = 0,$$

звідки $N_{1-2} = -R_A / \sin \alpha$

та

$$\sum F_x = 0; N_{1-6} + N_{1-2} \cos \alpha = 0,$$

звідки $N_{1-6} = R_A / \operatorname{tg} \alpha$.

Потім з умов рівноваги вузла 2 знаходять зусилля N_{2-3}, N_{2-6} і далі продовжують розглядати наступні вузли в такій послідовності, щоб у кожному новому вузлі зустрічалося не більше двох невідомих зусиль (вузли 3, 4, 5). Після обчислення всіх зусиль залишаються невикористаними деякі умови рівноваги (одне у вузлі 5 і два у вузлі 6). Виконання цих умов рівноваги свідчить про правильність обчислення зусиль.

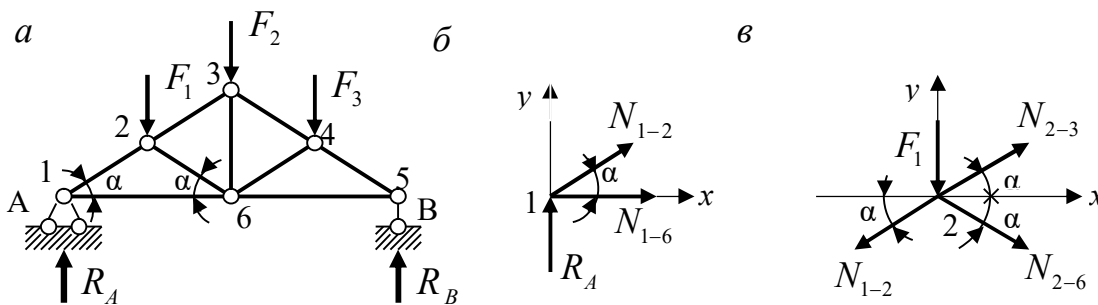


Рисунок 8.6

У деяких випадках для обчислення зусиль непотрібний запис умов рівноваги. Ці особливі випадки розташування стержнів та навантаження у вузлах наведено на рисунку 8.7 (в усіх випадках на рисунку 8.7 кут α не дорівнює 0° або 180°).

Перевагою способу вирізання вузлів є одноманітність обчислення зусиль. До його вад відносять накопичення похибок розрахунку при переході від вузла до вузла та необхідність обчислення допоміжних зусиль при визначенні поодиноких зусиль.

Наведений вище спосіб вирізання вузлів у класичній формі добре пристосований для ручного розрахунку. Але він не є універсальним, тому що непридатний для розрахунку ферм із довільним розташуванням стержнів. У зв'язку із цим для розрахунків на комп'ютері спосіб вирізання вузлів застосовується в більш загальній формі, зі складанням повної системи рівнянь рівноваги усіх вузлів.

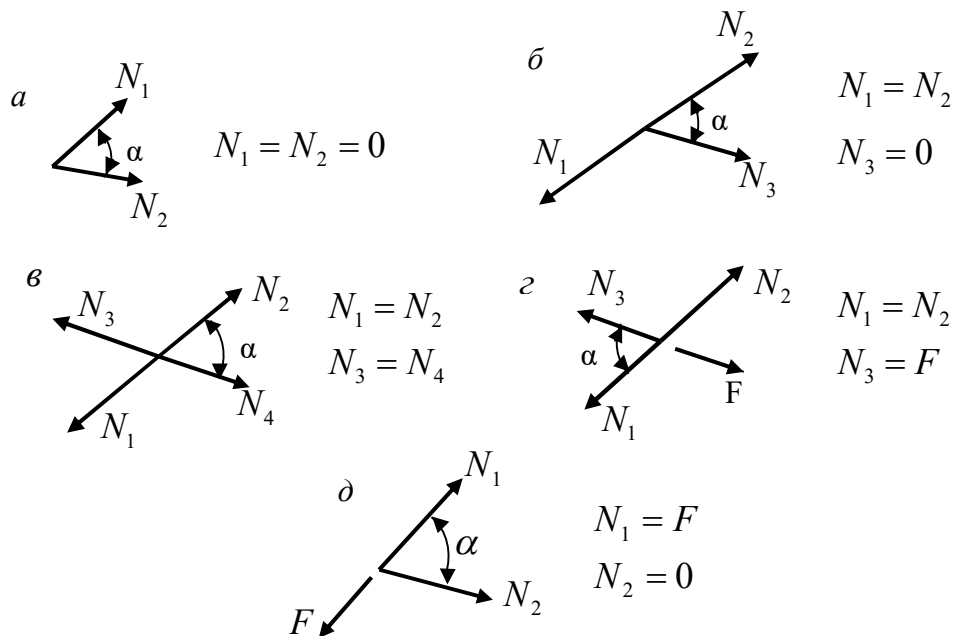


Рисунок 8.7

8.2.2 Розподіл зусиль у стержнях балочної ферми.

Спосіб моментної точки та спосіб проєкцій

При обчисленні поодиноких зусиль у стержнях ферми зручно користуватися *способом моментної точки й способом проєкцій*. Їх застосування розглянемо на прикладі балочної ферми із трикутними ґратками з підвісками (рис. 8.8, а). Опорні реакції знайдемо з умови симетрії:

$$R_A = R_B = \sum F/2 = 3,5 \cdot F.$$

Поставимо мету визначити зусилля в стержнях четвертої зліва панелі. Для обчислення цих зусиль проведемо наскрізний переріз I–I, що перетинає три стержні, і уявно відкинемо праву частину ферми. На залишеній частині ферми позначимо зусилля у перерізаніх стержнях спрямовуючи їх до перерізу.

При обчисленні зусилля N_1 звернемо увагу на те, що інші розрізані стержні (зусилля N_2, N_3) перетинаються в точці m_1 . Ця точка називається *моментною точкою (точкою Риттера)*. Відповідний спосіб, що використовує рівняння моментів відносно моментної точки називається *способом моментної точки*:

$$\sum M_{m_1} = 0, R_A \cdot 3d - F(2d + d) - N_1 \cdot h = 0. \quad (8.1)$$

Розв'язавши рівняння (8.1), знайдемо шукане зусилля:

$$N_1 = 7,5d/h.$$

Проаналізуємо рівняння (8.1). Для цього розглянемо балку (рис. 8.8,б) однакового з фермою прогону, завантажену тим самим навантаженням. Згинаючий момент у перерізі m_1 - балочний згинаючий момент

$$M_{m_1}^o = R_A \cdot 3d - F(2d + d). \quad (8.2)$$

Замінивши перші два доданки в рівнянні (8.1) співвідношенням (8.2), одержимо $M_{m_1}^o - N_1 \cdot h = 0$, звідки

$$N_1 = M_{m_1}^o / h. \quad (8.3)$$

На підставі (8.3) можна зробити висновки, що, по-перше, нижній пояс ферми розтягнутий, а, по-друге, зусилля в елементах нижнього поясу зростають при віддаленні від опор до середини прогону ферми (наслідуючи закон зміни балочних моментів M^o).

Аналогічно застосуємо спосіб моментної точки для обчислення зусилля N_2 :

$$\sum M_{m_2} = 0; R_A \cdot 4d - F(3d + 2d + d) + N \cdot h = 0. \quad (8.4)$$

В останньому рівнянні перші дві доданки являють собою балочний момент у перерізі m_2 . Тоді вираз (8.4) набуває такого вигляду:

$$M_{m_2}^o + N_2 \cdot h = 0,$$

$$\text{Звідки} \quad N_2 = -M_{m_2}^o / h. \quad (8.5)$$

Отже, верхній пояс стиснутий, а зусилля в ньому, як і в нижньому поясі, змінюються за законом балочних згинаючих моментів.

Для обчислення зусилля N_3 скористаємося способом проєкцій, бо інші розрізані стержні паралельні:

$$\sum y = 0, R_A - 3F - N_3 \cdot \sin \alpha = 0. \quad (8.6)$$

Звідси маємо $N_3 = F/(2 \sin \alpha)$.

Зовнішні сили, що, входять у рівняння (8.6), можна виразити через балочні поперечні сили. Дійсно, згідно з рисунком 8.8, б $Q_I^o = R_A - 3F$, і рівняння (8.6) набуває вигляду: $Q_I^o - N_3 \cdot \sin \alpha = 0$, звідки

$$N_3 = Q_I^o / \sin \alpha. \quad (8.7)$$

Якщо виконати таку саму послідовність обчислень для зусилля N_4 (перетин II–II), прийдемо до аналогічного виразу:

$$N_4 = -Q_{II}^o / \sin \alpha. \quad (8.8)$$

На підставі виразів (8.6) і (8.8) робимо висновок, що зусилля в розкосах наслідують закон зміни балочних поперечних сил (зменшуються за абсолютною величиною від опор до середини прольоту ферми). При цьому висхідні розкоси (див. N_4) стиснуті, а низхідні (N_3) – розтягнуті.

Завершуючи аналіз розподілу зусиль у досліджуваній фермі, визначимо зусилля в підвісці N_5 . Неважко побачити, що вузол С, до якого входить підвіска, відповідає окремому випадку на рисунку 8.7, г: $N_5 = F$.

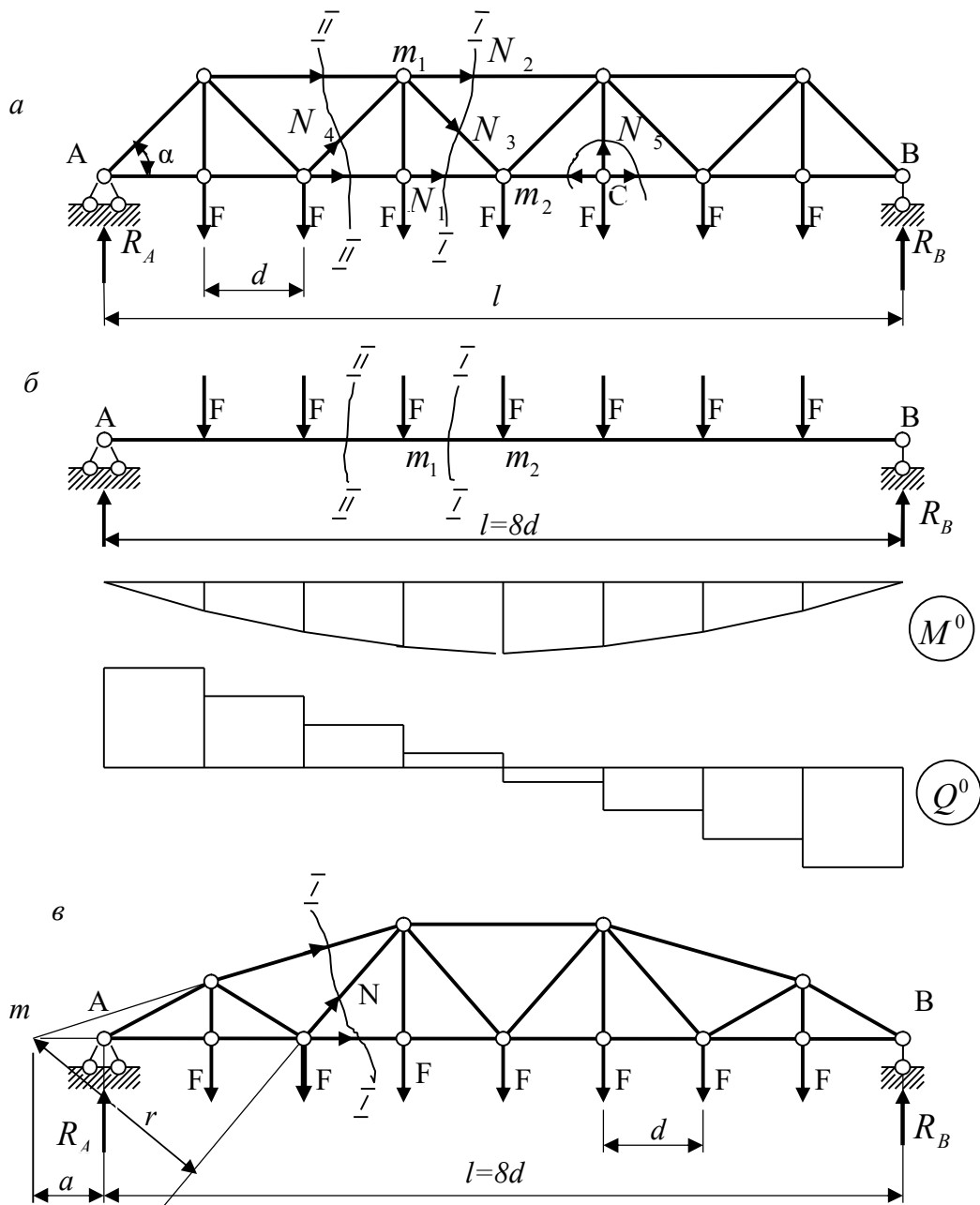


Рисунок 8.8

Очевидно, що всі підвіски працюють в однакових умовах – вони розтягнуті силою, прикладеною у відповідному вузлу нижнього поясу.

Виконаний аналіз дозволяє провести аналогію між роботою ферми та роботою балки. Серед елементів ферми виділяються пояси, що сприймають балочні згинаючі моменти, і ґратки, що сприймають балочну поперечну силу. Тому іноді ферми називають наскрізними або ґратчастими стержнями на відміну від балок – суцільних стержнів.

Цю аналогію можна поширити й на інші ферми. Наприклад, для оцінки роботи поясів та розкосів ферми опори ЛЕП (рис. 8.9, а) під вітровим

навантаженням можна, замінивши її стержнем (рис. 8.9, б), за епюрами M та Q одержати уявлення про роботу елементів ферми.

Прикладом використання балочної аналогії може бути застосування ферм із полігональним обрисом поясів (рис. 8.8, в). У цьому випадку збільшення висоти ферми до середини прогону дозволяє зробити розподіл зусиль в елементах поясів більш рівномірним. Відзначимо, що для обчислення зусиль у розкосах такої ферми способом проєкцій скористатися неможливо. Наприклад, для визначення зусилля N у розкосі третьої панелі (рис. 8.8, в) проведено переріз I–I.

Розрізані при цьому стержні поясів непаралельні й при продовженні перетинаються в точці m . Тоді застосовуємо спосіб моментної точки:

$$\sum M_m = 0; R_A \cdot a - F(a + d) - F(a - 2d) + N \cdot r = 0,$$

звідки

$$N = -\frac{R_A \cdot a - F(2a + 3d)}{r} = -\frac{F(1,5a - 3d)}{r}.$$

Відносно застосування способів визначення зусиль відзначимо, що в тих випадках, коли переріз перетинає три стержні, для визначення зусиль у них завжди раціонально скористатися одним зі способів – моментної точки або проєкцій.

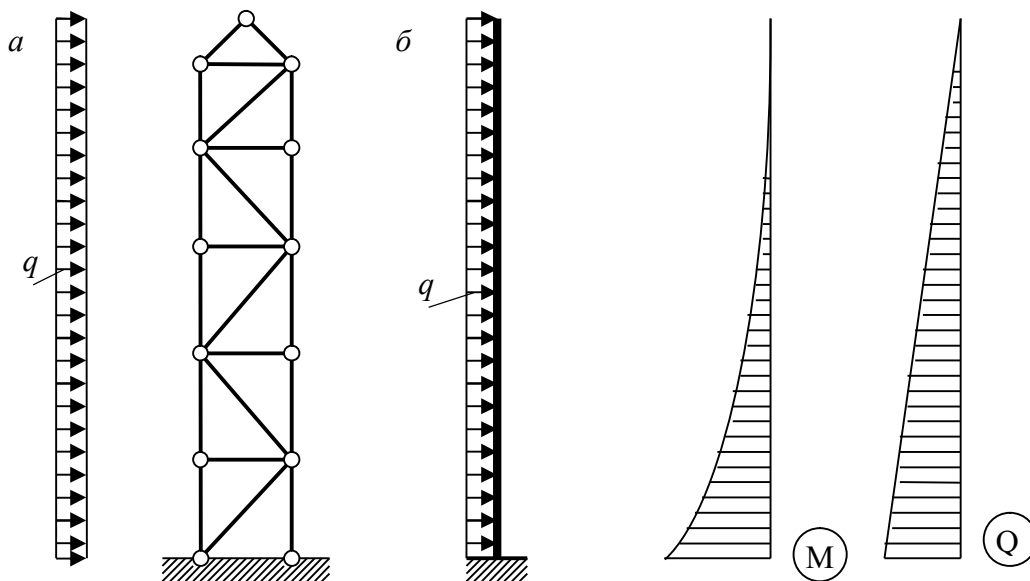


Рисунок 8.9

Якщо зусилля у двох перерізанних стержнях перетинаються при продовженні, ця точка перетину є моментною точкою для зусилля у третьому стержні (спосіб моментної точки). Якщо зусилля у двох стержнях паралельні одне одному, для визначення третього зусилля беруть суму проєкцій сил на вісь, перпендикулярну до паралельних зусиль (спосіб проєкцій).

Запитання для самоконтролю

1. Що називається фермою?
2. Які зусилля виникають в стержнях ферм і чому?
3. Чому ферми більш економічні порівняно з балками?
4. Які елементи розрізняють у фермах?
5. За якими ознаками класифікують ферми?
6. Як застосовується спосіб вирізання вузлів для ручного розрахунку?
7. Наведіть особливі випадки рівноваги вузлів.
8. В якому випадку раціонально застосувати спосіб моментної точки?
9. В якому випадку раціонально застосувати спосіб проекцій?
10. Чому ферму називають наскрізним (гратчастим) стержнем?

9 РОЗПІРНІ СИСТЕМИ

9.1 Основні визначення

Стержень з криволінійною віссю (точніше, брус малої кривини), показаний на рисунку 9.1, *а*, є балочною системою. Справді, при дії вертикального навантаження опорні реакції в такій системі вертикальні й згинаючі моменти в її перерізах будуть такими самими, як у простій двохопірній балці. На відміну від балки в такому брусі з'являються значні горизонтальні переміщення опорної точки *B*. Якщо закріпити обидві опорні точки нерухомо, то в опорах, крім вертикальних, з'являться горизонтальні опорні реакції (рис. 9.1, *б*). Ці реакції називають *розпором*, а таку систему – *аркою*. Походження терміну «розпір» пов'язано з тим, що він відповідає тим силам, які діють на опорні пристрої, прагнучи розсунути («розперти») їх у горизонтальному напрямку. Отже, ця система є розпірною і називається аркою.

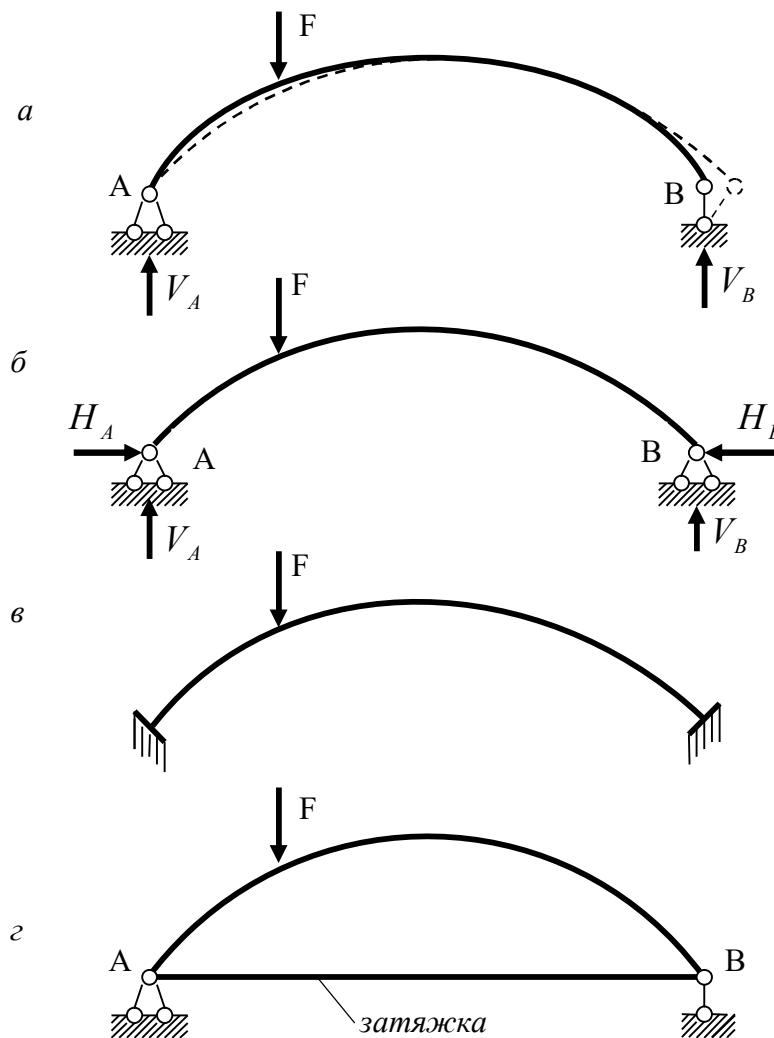


Рисунок 9.1

Розпір створює у перерізі арки момент, протилежний за знаком моменту вертикальних сил. За рахунок цього згинаючі моменти в арці зменшуються порівняно із згинаючими моментами в балці. Внаслідок кривини осі арки і наявності розпору, в її перерізах з'являються значні поздовжні сили, тобто, по суті, порівняно з балкою, деформація згину в арці частково замінюється деформацією стиску. Ця обставина робить арку більш економічною, особливо при великих прогонах.

Як відзначалося, системи, в яких при дії вертикального навантаження з'являються горизонтальні складові опорних реакцій, називають *розпірними*. Крім арок до них відносять тришарнірні рами, арочні ферми, комбіновані й висячі системи.

Арку, показану на рисунку 9.1, *а* називають *двошарнірною*. Така арка є статично невизначною. Якщо опори арки є затисненнями, арка називається *безшарнірною* (рис. 9.1, *в*). Вона також статично невизначна.

Арка, показана на рисунку 9.2, називається *тришарнірною*. Вона статично визначна. Такі арки розглядаються в цьому розділі.

Точки обпирання арки називають *п'ятами*, а точку, найбільш віддалену від п'ят (точку *С* на рис. 9.2) – *замком*. Найкоротшу відстань від лінії, що з'єднує п'яти, до замка називають *стрілою підйому арки* і позначають *f*. Відношення стріли підйому до прогону називають *пологістю арки*.

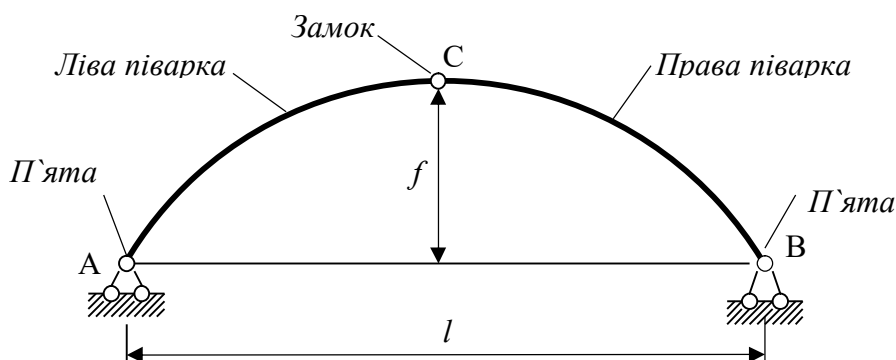


Рисунок 9.2

При $f/l < 1/4$ арки звичайно вважають пологими.

Нерухомість опор двошарнірної і тришарнірної арки може бути забезпечена також постановкою горизонтальної в'язі – *затяжки* (рис. 9.1, *г*, 9.3, *а*). При цьому затяжка може розташовуватися вище рівня п'ят (*підвищена затяжка*) і може бути виконана ламаною. Ці варіанти розташування затяжки для тришарнірної арки наведені на рисунку 9.1, *б*, *в*. Зусилля в затяжці, по суті, являє собою розпір звичайної арки. Арки із затяжками застосовують переважно в тих випадках, коли влаштування опор, що забезпечують сприйняття розпору, стає неекономічним (при слабких ґрунтах, в покриттях будівель).

Арку, п'яти якої розташовані на різних рівнях, називають *повзучою* (рис. 9.3, *г*).

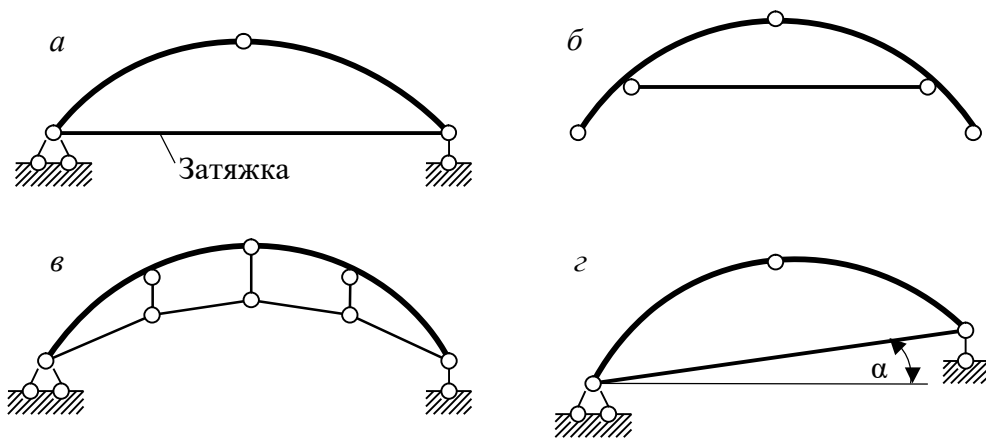


Рисунок 9.3

Вісь арки найчастіше приймають окресленою за параболою або дугою кола. Арки в цьому випадку називають відповідно *параболічними* та *коловими* (*циркульними*).

9.2 Розрахунок тришарнірної арки на вертикальне навантаження

Розглянемо спочатку визначення опорних реакцій. Як відзначалося, в опорах арки діють вертикальні й горизонтальні реакції (рис. 9.4, *а*). З умови $\sum x = H_A - H_B = 0$ виходить, що горизонтальні реакції арки при вертикальному навантаженні дорівнюють одна одній:

$$H_A = H_B = H. \quad (9.1)$$

Величина H є розпором.

Для визначення вертикальних складових реакцій використовують ті самі рівняння, що і для балки на двох опорах:

$$\sum M_A = -F_1 \cdot a_1 - F_2 \cdot a_2 + V_B \cdot l = 0, \quad (9.2)$$

звідки

$$\begin{aligned} V_B &= (F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot a_2) / l; \\ \sum M_B &= F_1(l - a_1) + F_2(l - a_2) - V_A \cdot l = 0, \end{aligned} \quad (9.3)$$

Тоді

$$V_A = [F_1(l - a_1) + F_2(l - a_2)] / l.$$

Реакції V_A та V_B цілком відповідають опорним реакціям простої балки того самого прогону при тому самому навантаженні (рис. 9.4, *в*). Тому ці реакції називають балочними.

Для визначення розпору використовують умову рівності нулю згинаючого моменту в проміжному шарнірі C . Цей момент можна записувати для лівих або правих сил:

$$\sum_{\text{лів}} M_C = 0 \quad \text{або} \quad \sum_{\text{прав}} M_C = 0. \quad (9.4)$$

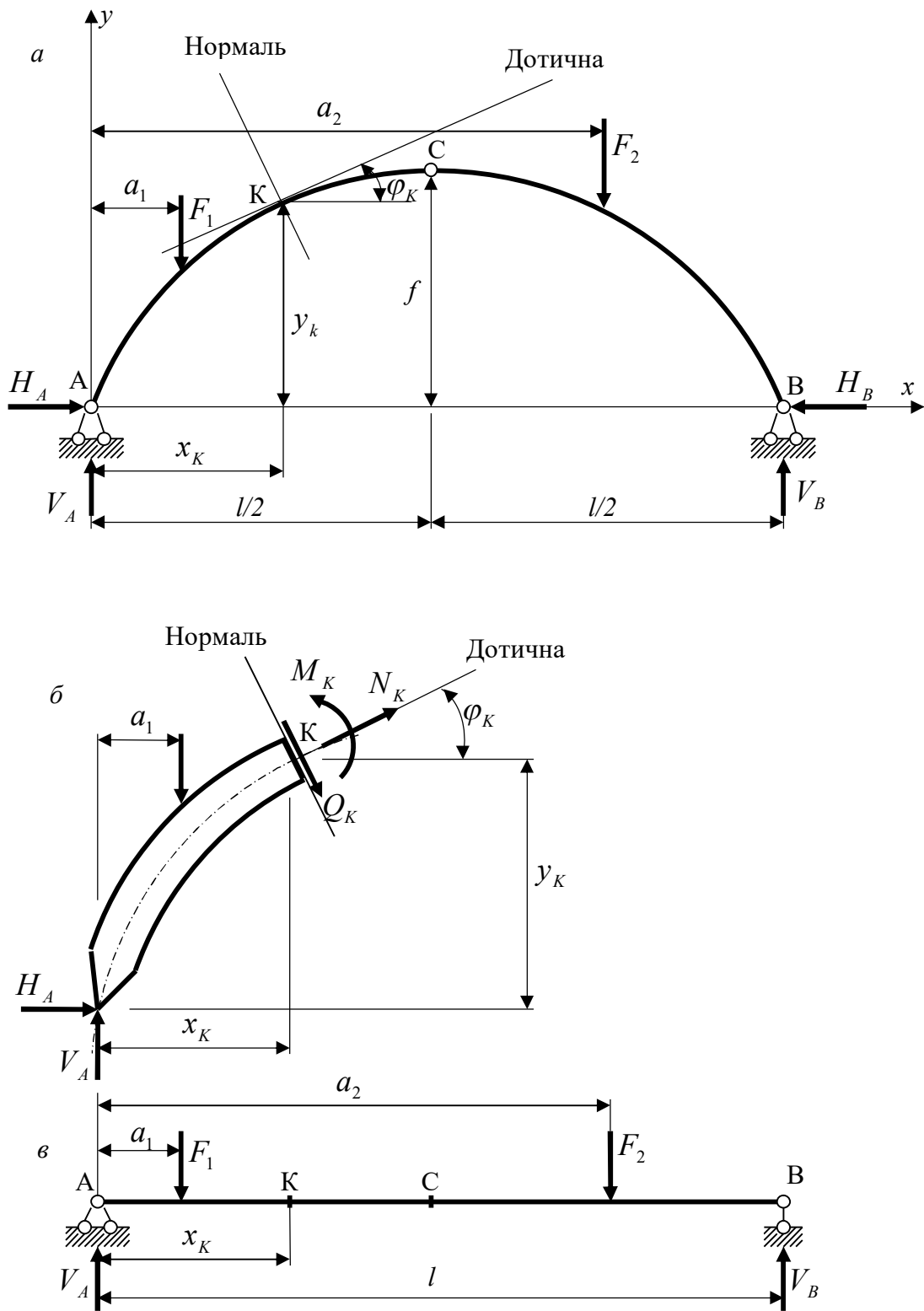


Рисунок 9.4

Наприклад, розглядаючи ліворуч розташовані сили, знаходимо

$$\sum_{\text{лів}} M_C = V_A \cdot \frac{l}{2} - F_1 \left(\frac{l}{2} - a_1 \right) - H \cdot f = 0. \quad (9.5)$$

З одержаного рівняння легко визначити розпір. Звернемо увагу на те, що перші два члени лівої частини рівняння (9.5) являють собою балочний

згинаючий момент M_C^o у перерізі C (рис. 9.4,б). Таким чином, одержуємо таку залежність:

$$H = M_C^o / f. \quad (9.6)$$

Звідси виходить, що *розпір зменшується при збільшенні стріли підйому*.

Розглянемо обчислення внутрішніх зусиль у довільному перерізі K з координатами центру ваги x_K та y_K (рис. 9.4, а). Розташування цих зусиль в перерізі показано на рисунку 9.4, б.

Як відомо, згинаючий момент у будь-якому перерізі дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх, сил, розташованих ліворуч або праворуч від перерізу. Запишемо вираз згинаючого моменту в перерізі K , розглядаючи частину арки, що знаходиться ліворуч від перерізу:

$$M_K = V_A \cdot x_K - F_1(x_K - a_1) - H \cdot y_K,$$

або з урахуванням введеного поняття про балочний згинаючий момент

$$\left[M_K^o = V_A \cdot x_K - F_1(x_K - a_1) \right] \text{ одержуємо}$$

$$M_K = M_K^o - H \cdot y_K. \quad (9.7)$$

Для визначення поперечної та поздовжньої сил у перерізі K запишемо суму проєкцій, наприклад, лівих сил відповідно на нормаль і на дотичну до осі арки. Кут нахилу дотичної до осі арки в точці K позначимо φ_K . Тоді маємо:

$$Q_K = (V_A - F_1) \cos \varphi_K - H \cdot \sin \varphi_K;$$

$$N_K = -(V_A - F_1) \sin \varphi_K - H \cdot \cos \varphi_K.$$

У наведених рівняннях вираз, взятий в дужки, являє собою поперечну силу в перерізі K , яка визначається так само, як у балці (рис. 9.4, в). Цю величину називають *балочною поперечною силою* і позначають Q_K^o . Тоді вирази для поперечної і поздовжньої сил остаточно запишемо в такому вигляді:

$$Q_K = Q_K^o \cdot \cos \varphi_K - H \cdot \sin \varphi_K; \quad (9.8)$$

$$N_K = -Q_K^o \cdot \sin \varphi_K - H \cdot \cos \varphi_K. \quad (9.9)$$

Як виходить з виразу (9.9), поздовжні сили в арці при дії вертикального навантаження завжди стискаючі. У зв'язку з цим іноді в арці, на відміну від інших систем, стискаючі поздовжні сили вважають додатними.

Вираз (9.7) підтверджує зроблене раніше припущення про те, що згинаючі моменти в арці менші, ніж у балці. Різниця в згинаючих моментах визначається наявністю в арці від'ємного моменту $H \cdot y_K$, створеного розпором. Ця обставина робить арку більш економічною, ніж балка.

Цікавим є аналіз залежності згинаючих моментів в арці від стріли підйому. Підставимо в рівняння (9.7) вираз (9.6). Одержуємо:

$$M_K = M_K^o - M_C^o \cdot y_K / f.$$

Цікаво аналізувати залежність згинаючих моментів від стріли підйому арки для випадків лінійної залежності ординат від стріли підйому. Наприклад, для параболічної арки, окресленої за рівнянням $y = 4f/l^2 x(l-x)$, одержуємо:

$$M_K = M_K^o - M_C^o \cdot 4 \cdot x_K(l-x_K) / l^2.$$

Отже у цьому випадку згинаючі моменти арки не залежать від стріли підйому і для зменшення витрат матеріалу арки слід виконувати пологими (чим менше стріла підйому арки, тим менша довжина осі арки). З іншого боку, при зменшенні стріли підйому зростає розпір і, отже, збільшуються поздовжні сили в перерізах арки (9.9). При малих значеннях стріли підйому поздовжні сили можуть стати переважаючими зусиллями в арці. Ця обставина може зробити вирішальним розрахунок пологої арки не на міцність, а на стійкість.

При побудованні епюр внутрішніх зусиль в арці виходять з того, що M , Q та N змінюються за нелінійними законами (9.7), (9.8) та (9.9). У зв'язку з цим для побудови епюр вісь арки розбивають на ділянки (рис.9.5, а), обчислюють в одержаних точках значення M , Q , N , відкладаючи їх від горизонтальних осей і, з'єднуючи плавними кривими, одержують шукані епюри (рис. 9.5, б-г). Обчислення ординат епюр зручно виконувати в табличній формі.

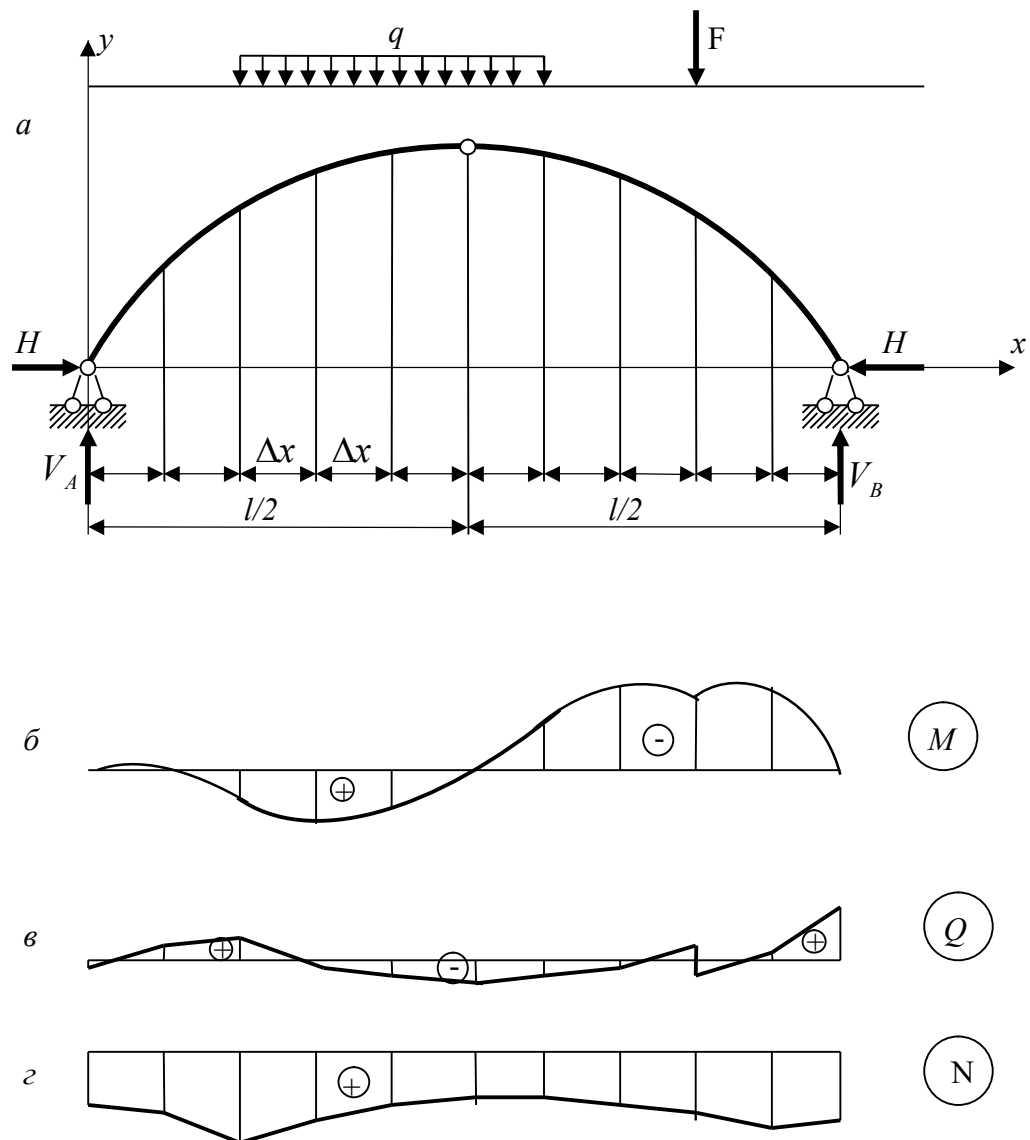


Рисунок 9.5

Розглянемо розрахунок арки із затяжкою (рис. 9.6). Відповідно до опорних закріплень ця арка є балочною системою, реакції при вертикальному навантаженні вертикальні і визначаються так само, як і в простій двохопорній балці.

Функцію розпору в арці із затяжкою, як вже зазначалося, виконує зусилля в затяжці. Для його визначення розтинаємо арку перерізом I–I, що проходить через проміжний шарнір C. Скористувавшись одним із рівнянь (9.4), знайдемо зусилля у затяжці:

$$S = M_C^0 / f. \quad (9.10)$$

З одержаного виразу випливає, що зусилля в затяжці дійсно відповідає розпору арки без затяжки, тому його часто називають внутрішнім розпором.

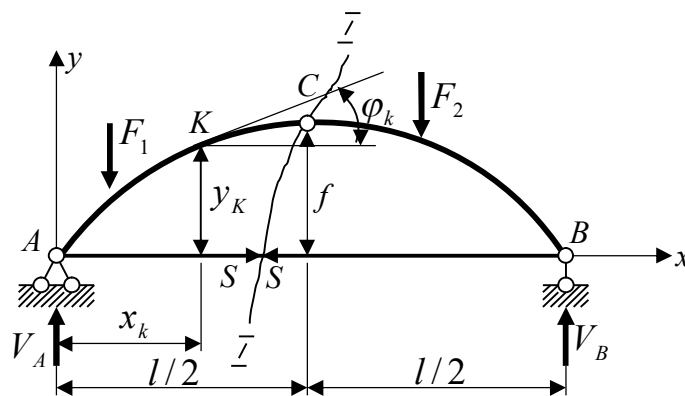


Рисунок 9.6

При обчисленні внутрішніх зусиль у такій арці можна користуватися виразами (9.7)...(9.9), формально замінивши в них H на S :

$$\begin{aligned} M_k &= M_k^0 - S \cdot y_k; \\ Q_k &= Q_k^0 \cos \varphi_k - S \cdot \sin \varphi_k; \\ N_k &= -Q_k^0 \sin \varphi_k - S \cdot \cos \varphi_k. \end{aligned} \quad (9.11)$$

При розрахунку арки з підвищеною затяжкою (рис. 9.7) слід мати на увазі, що частина арки, розташована нижче затяжки, працює як балочний брус малої кривини. Наведемо основні розрахункові формули:

$$S = M_C^0 / f'; \quad (9.12)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{K_1} &= M_{K_1}^0, \\ Q_{K_1} &= Q_{K_1}^0 \cdot \cos \varphi_{K_1}, \\ N_{K_1} &= -Q_{K_1}^0 \cdot \sin \varphi_{K_1}; \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{K_2} &= M_{K_2}^o - S \cdot y_{K_2}; \\ Q_{K_2} &= Q_{K_2}^o \cdot \cos \varphi_{K_2} - S \cdot \sin \varphi_{K_2}; \\ N_{K_2} &= -Q_{K_2}^o \cdot \sin \varphi_{K_2} - S \cdot \cos \varphi_{K_2}. \end{aligned} \right\} (9.14)$$

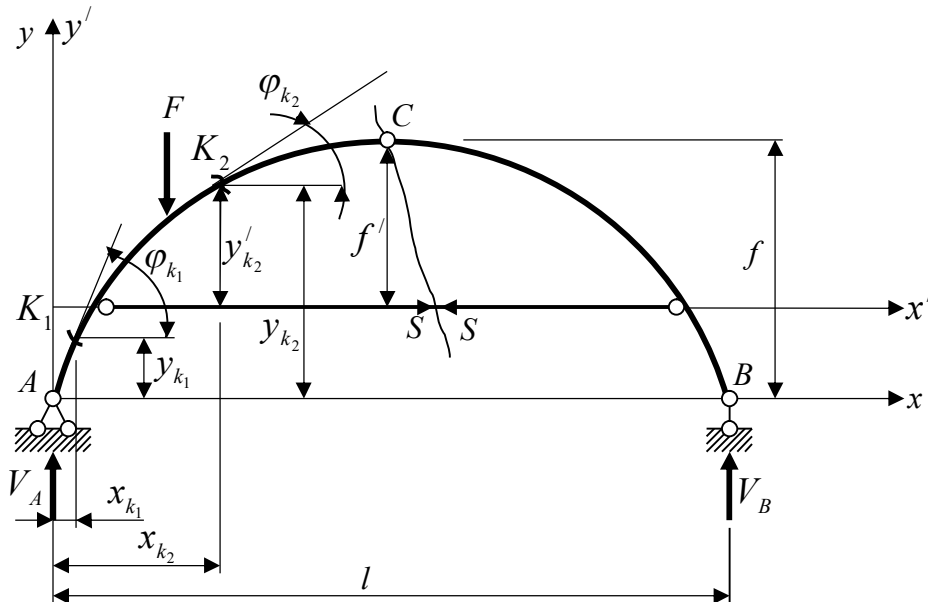


Рисунок 9.7

Запитання для самоконтролю

1. Які системи називають розпірними?
2. Як класифікують арки?
3. Назвіть основні елементи тришарнірної арки.
4. Які рівняння рівноваги використовуються для визначення опорних реакцій арки?
5. Як залежить розпір від стріли підйому арки?
6. Як записується вирази в перерізі арки від вертикального навантаження?
7. Чим відрізняються зусилля в арці від балкових зусиль?
8. Чому арка є більш економічною системою, ніж балка?
9. Чим відрізняється характер епюри внутрішніх зусиль в арці від балкових епюр?
10. У чому полягають особливості роботи арки із затяжкою?
11. У чому полягає особливість роботи частин арки, розташованих нижче підвищеної затяжки?

10 ПОНЯТТЯ ПРО РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ

10.1 Основи методу сил

10.1.1 Основні визначення. Ступінь статичної невизначуваності

Статично невизначуваними називають системи, зусилля в яких неможливо встановити за допомогою одних лише рівнянь рівноваги. Це пояснюється наявністю у статично невизначуваній системі зайвих в'язей, тобто в'язей понад мінімальну їх кількість, необхідну для геометричної незмінюваності системи. Так, в рамі, наведеній на рисунку 10.1, *a* для забезпечення геометричної незмінюваності достатньо мати три опорні в'язі, наприклад, затиснення в точці *A*, отже, дві інші в'язі в точці *B* зайві.

Для забезпечення геометричної незмінюваності можна використати й інші опорні в'язі, наприклад, нерухому шарнірну опору в точці *B* та одну з в'язей в точці *A*. Тоді зайвими будуть дві інші опорні в точці *A*. Слід зазначити, що поняття «зайві в'язі» не треба розуміти буквально. Наявність цих в'язей робить систему більш жорсткою і в багатьох випадках дозволяє одержати більш раціональний розподіл зусиль.

Кількість зайвих в'язей n , що визначає *ступінь статичної невизначуваності системи*, можна виразити через кількість ступенів свободи системи

$$n = -W. \quad (10.1)$$

Так, для рами, показаної на рисунку 10.1, *a*, за формулою Чебишова $W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 5 = -2$ або $n = 2$.

Для розглядуваної рами характерним є те, що після визначення опорних реакцій всі внутрішні зусилля можна знайти з рівнянь статички. Таку систему називають *зовнішньо статично невизначуваною*. На відміну від неї в рамі на рисунку 10.1, *б* три опорні реакції можна визначити з рівнянь рівноваги. Але при визначенні зусиль, наприклад, в перерізі I–I, доводиться розрізати замкнутий контур ще в одному місці (рис. 10.1, *в*). Отже, маємо статично невизначувану задачу, оскільки шість зусиль (рис. 10.1, *в*) не можна знайти з трьох умов рівноваги. Така система називається *внутрішньо статично невизначуваною*. Для таких рам формула (10.1) дає невірний результат.

У більшості випадків статично невизначувані системи містять як зовнішні, так і внутрішні зайві в'язі.

Як видно з розглянутого прикладу (рис. 10.1, *б*), замкнутий контур без шарнірів містить три зайві в'язі (за кількістю недостатніх умов рівноваги). Формула Чебишова не дозволяє виявити такі зайві в'язі рам, тому для визначення ступеня статичної невизначуваності рам звичайно застосовують формулу:

$$n = 3K - Ш + C_0 - 3, \quad (10.2)$$

де $Ш$ і C_o означають, як і у формулі Чебишова, відповідно число простих шарнірів і кількість опорних в'язей, а K - кількість замкнутих контурів, що утворюються стержнями рами.

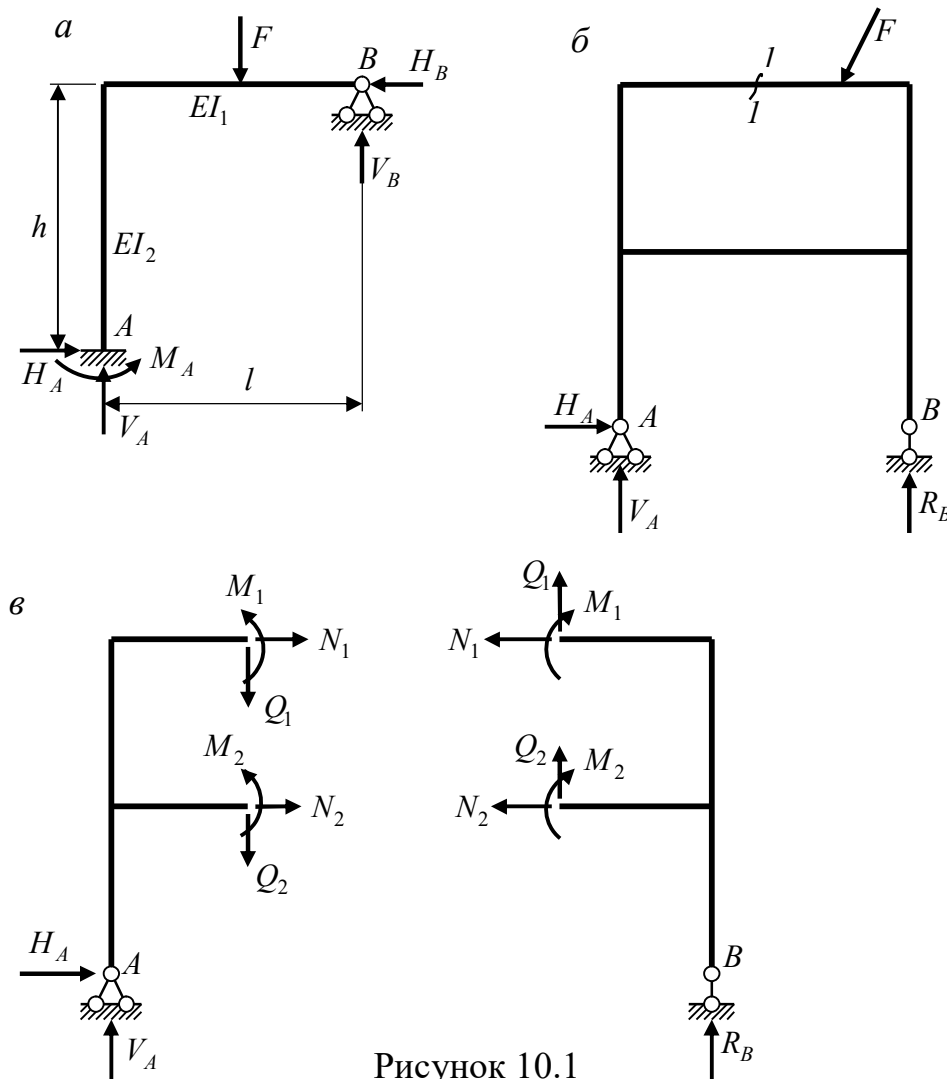


Рисунок 10.1

Для ферм, через відсутність жорстких з'єднань стержнів, співвідношення (10.1) завжди справедливе, тому, беручи до уваги вираз (7.2), здобуємо формулу:

$$n = C + C_o - 2Y. \quad (10.3)$$

Як зазначалося вище, для визначення зусиль у статично невизначуваній системі одних рівнянь статички недостатньо. Додаткові рівняння складають на основі дослідження переміщень перерізів системи.

Отже, сукупність рівнянь для розрахунку статично невизначуваної системи містить ряд невідомих зусиль і переміщень. У лінійно деформованих системах між зусиллями і переміщеннями існує однозначна лінійна відповідність, тому всі сили легко виразити через переміщення, і навпаки. Залежно від того, які величини (сили, переміщення або частина сил і частина переміщень) приймаються за основні невідомі, виділяють три основних методи розрахунку статично невизначуваних систем: метод сил, метод переміщень, змішаний метод. У цьому курсі будемо розглядати лише метод сил.

10.1.2 Розрахунок рам методом сил

Метод сил є універсальним методом розрахунку статично невизначуваних систем. Його суть і основні етапи розрахунку покажемо на прикладі рами, що наведена на рисунку 10.1, *a*. Розрахунок починаємо з визначення ступеня статичної невизначуваності.

Замкнуті контури і шарніри в заданій рамі відсутні, отже за (10.2) одержуємо:

$$n = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 5 - 3 = 2.$$

Зазначимо, що далі будемо заздалегідь вважати системи геометрично незмінюваними, інакше необхідно додатково перевіряти їх геометричну структуру.

Отже, розглядувана рама є двічі статично невизначуваною, тобто має дві зайві в'язі, для визначення зусиль в яких необхідно скласти додаткові рівняння – *рівняння сумісності деформацій*. Ці рівняння одержують, аналізуючи так звану *основну систему*.

Основною системою методу сил називають таку геометрично незмінювану й статично визначувану систему, яку одержують із заданої системи усуненням зайвих в'язей і заміною їх зусиллями. Ці зусилля у відкинутих зайвих в'язях є основними невідомими методу сил, їх називають *зайвими невідомими* і позначають X_1, X_2, \dots, X_n . Власне кажучи, ці сили діяли і в заданій системі як реакції у її внутрішніх або зовнішніх в'язях. Тепер же відносно до основної системи сили X_1, X_2, \dots, X_n стали зовнішніми активними силами. Ці сили можуть набувати будь-яких значень, у тому числі таких, що відповідають дійсним значенням внутрішніх зусиль у зайвих в'язях.

Як уже відзначалося, зайвими можуть бути різні в'язі, тому вибір основної системи можна зробити по-різному. Наприклад, для рами (рис. 10.1, *a*), на рисунку 10.2, *a–в* наведено різні варіанти основної системи. Усі ці основні системи одержані усуненням опорних в'язей. Пізніше розглянемо й інші варіанти основної системи, що добуваються усуненням внутрішніх в'язей.

З усіх можливих варіантів необхідно обрати одну основну систему. При цьому раціонально взяти таку, в якій зусилля визначаються якомога простіше. З цих міркувань виберемо для розрахунку основну систему, зображену на рисунку 10.1, *a*.

У подальшому розрахунок заданої рами заміняємо розрахунком основної системи. Для того, щоб така заміна була еквівалентною, необхідно і достатньо, щоб в основній системі переміщення уздовж відкинутих в'язей (інакше, в напрямку зайвих невідомих) були відсутні.

Для визначення цих переміщень розкладаємо все навантаження в основній системі на окремо діючі зайві невідомі й задане навантаження (рис. 10.2, *г...е*). Тоді переміщення у напрямку зайвого невідомого X_i дорівнюватиме сумі переміщень: Δ_{i1} - від сили X_i (рис. 10.2, *г*), Δ_{i2} - від сили X_2 (рис. 10.2, *д*), Δ_{if} - від заданого навантаження (рис. 10.2, *е*). За умовою еквівалентності основної і заданої систем це переміщення повинно бути нульовим:

$$\Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \Delta_{if} = 0. \quad (10.4)$$

Аналогічно для переміщення в напрямку X_2 запишемо таке рівняння:

$$\Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2f} = 0. \quad (10.5)$$

Для того, щоб записати рівняння (10.4) та (10.5) у явному вигляді через зайві невідомі, подамо кожне з переміщень Δ_{ik} як добуток одиничного переміщення δ_{ik} (в напрямку X_i від $\bar{X}_k = 1$) на величину відповідного невідомого X_k :

$$\Delta_{11} = \delta_{11} \cdot X_1, \quad \Delta_{12} = \delta_{12} \cdot X_2,$$

$$\Delta_{21} = \delta_{21} \cdot X_1, \quad \Delta_{22} = \delta_{22} \cdot X_2.$$

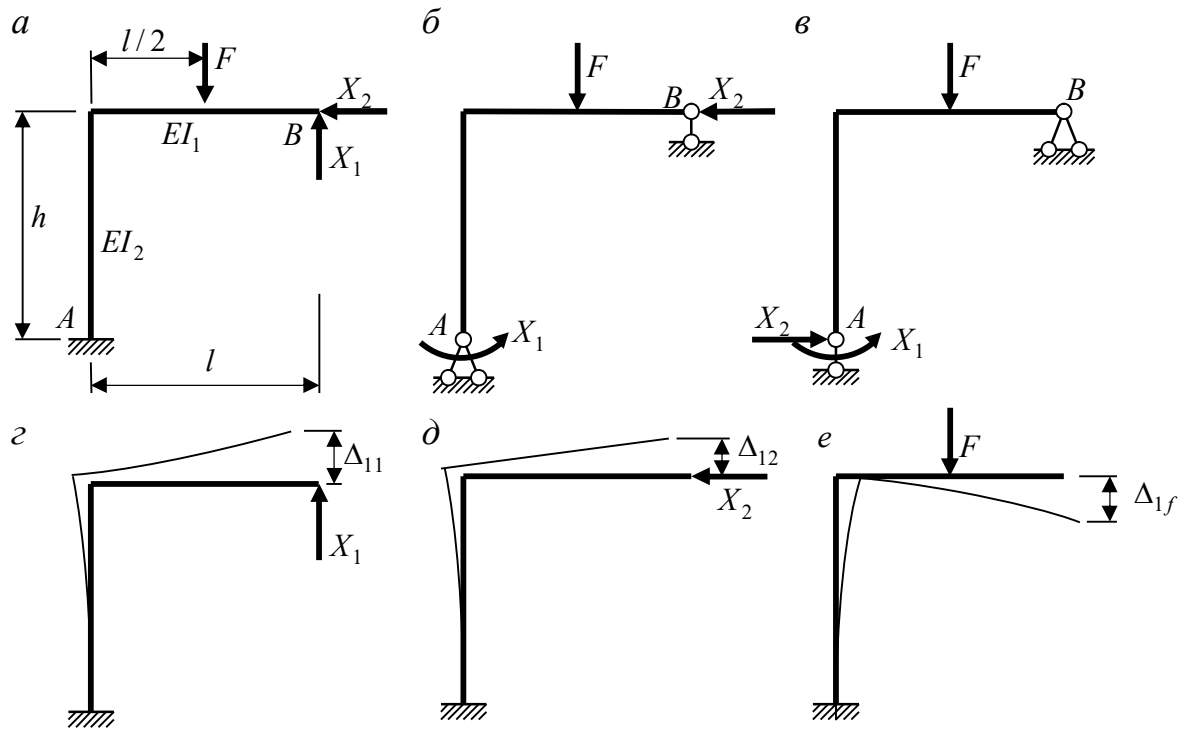


Рисунок 10.2

Тепер рівняння (10.4), (10.5) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1f} &= 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2f} &= 0. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Ці рівняння відображають умови сумісності деформацій (відсутність переміщень у напрямку зайвих в'язей) і називаються *канонічними рівняннями методу сил*.

Отже, для визначення двох невідомих сил X_1 та X_2 ми одержали два рівняння (10.6).

Одиничні ($\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}$) і вантажні (Δ_{1f}, Δ_{2f}) переміщення можна знайти за допомогою методу Мора. Оскільки рама є системою з переважним згином, у формулі Мора достатньо урахувати тільки згинаючі моменти. Тому спочатку побудуємо в основній системі епюри згинаючих моментів від кожного одиничного

зайвого невідомого і від заданого навантаження (рис. 10.3, *a...e*), тобто від тих впливів, від яких необхідно знайти переміщення.

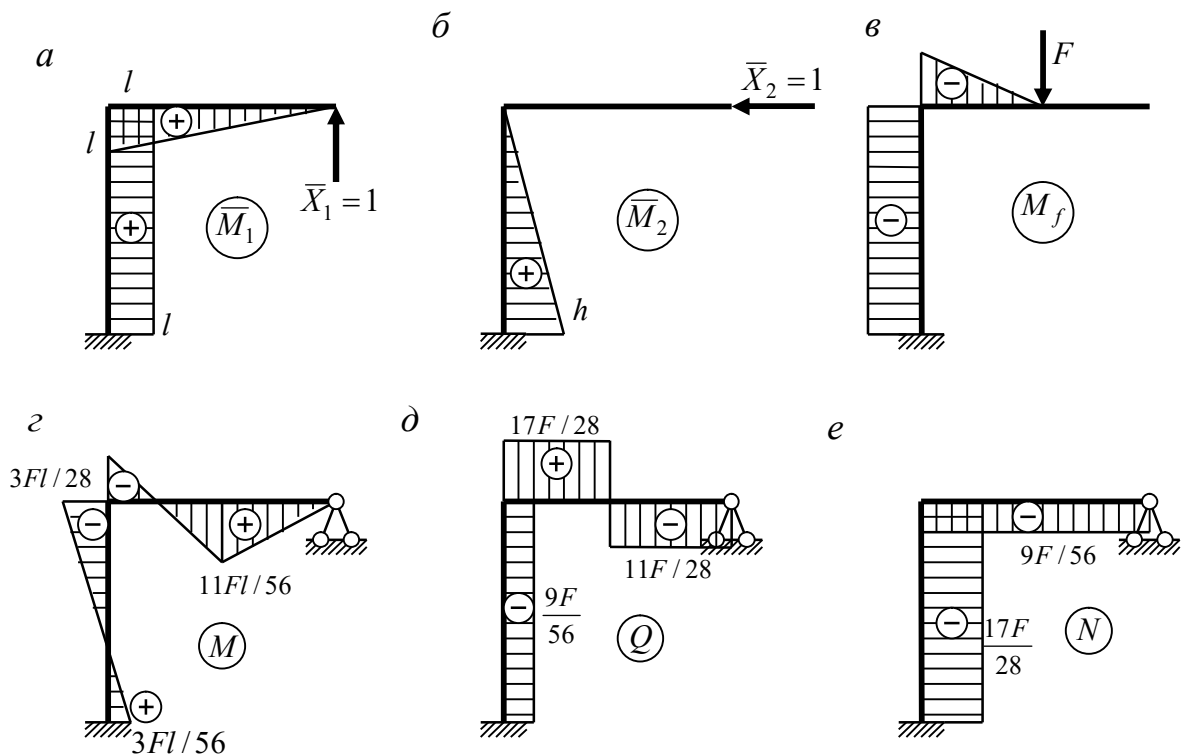


Рисунок 10.3

Застосовуючи правило Верещагіна, обчислюємо для розглядуваної рами:

$$\delta_{11} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_1 \bar{M}_1 ds = \frac{1}{EI_1} \frac{l \times l}{2} \frac{2}{3} l + \frac{1}{EI_2} l h l = \frac{l^3}{3EI_1} + \frac{l^2 h}{EI_2};$$

$$\delta_{12} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_1 \bar{M}_2 ds = \frac{1}{EI_2} \frac{h \times h}{2} l = \frac{h^2 l}{2EI_2}; \quad \delta_{22} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_2 \bar{M}_2 ds = \frac{1}{EI_2} \frac{h \times h}{2} \frac{2}{3} h = \frac{h^3}{3EI_2};$$

$$\Delta_{1f} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_1 M_f ds = -\frac{1}{EI_1} \frac{(Fl/2) \times l/2}{2} \left(\frac{2}{3} l + \frac{1}{3} \times \frac{l}{2} \right) - \frac{1}{EI_2} \frac{Fl}{2} h l = -\frac{5Fl^3}{48EI_1} - \frac{Fl^2 h}{2EI_2};$$

$$\Delta_{2f} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_2 M_f ds = -\frac{1}{EI_2} \frac{Fl}{2} h \frac{h}{2} = -\frac{Flh^2}{4EI_2}.$$

Зазначимо, що переміщення δ_{21} не обчислювалося тому, що за теоремою про взаємність переміщень $\delta_{21} = \delta_{12}$.

Після підстановки переміщень у канонічні рівняння маємо таку систему рівнянь:

$$\left(\frac{l^3}{3EI_1} + \frac{l^2h}{EI_2} \right) X_1 + \frac{h^2l}{2EI_2} X_2 - \frac{5Fl^3}{48EI_1} - \frac{Fl^2h}{2EI_2} = 0;$$

$$\frac{h^2l}{2EI_2} X_1 + \frac{h^3}{3EI_2} X_2 - \frac{Flh^2}{4EI_2} = 0.$$

Перетворимо її, помноживши кожне рівняння на EI_1 :

$$\left(\frac{l^3}{3} + l^2h \frac{EI_1}{EI_2} \right) X_1 + \frac{h^2l}{2} \frac{EI_1}{EI_2} X_2 - \frac{5Fl^3}{48} - \frac{Fl^2h}{2} \frac{EI_1}{EI_2} = 0;$$

$$\frac{h^2l}{2} \frac{EI_1}{EI_2} X_1 + \frac{h^3}{3} \frac{EI_1}{EI_2} X_2 - \frac{Flh^2}{4} \frac{EI_1}{EI_2} = 0.$$

Як бачимо, у цих рівняннях замість абсолютних значень жорсткості елементів присутні лише їх відношення. Звідси випливає, що зусилля у статично невизначуваній системі не залежать від абсолютних значень жорсткостей її елементів, а залежать тільки від співвідношень цих жорсткостей.

Задамо в нашому прикладі $EI_1/EI_2 = 1$ та $h = l$. Після підстановки цих співвідношень і нескладних перетворень приходимо до такої системи рівнянь:

$$\frac{4}{3} X_1 + \frac{1}{2} X_2 - \frac{29F}{48} = 0;$$

$$\frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{3} X_2 - \frac{F}{4} = 0.$$

Розв'язуючи цю систему будь-яким відомим способом, знаходимо значення зайвих невідомих:

$$X_1 = \frac{11}{28} F; \quad X_2 = \frac{9}{56} F.$$

Переходячи до визначення остаточних зусиль у заданій рамі, зазначимо, що, оскільки при одержаних зусиллях X_1 і X_2 канонічні рівняння задовольняються, основна система дійсно еквівалентна заданій. Розглядаючи основну систему (рис. 10.2, а) при відомих значеннях сил X_1 та X_2 , легко визначити внутрішні зусилля і побудувати епюри M , Q і N (рис. ,10.3 г...е).

На основі розглянутого прикладу можна дати таку послідовність розрахунку статично невизначних систем методом сил:

1. Знайти ступінь статичної невизначуваності.
2. Обрати основну систему.
3. Записати канонічні рівняння.
4. Побудувати епюри згинаючих моментів в основній системі від дії одиничних невідомих та заданого навантаження.
5. Визначити одиничні й вантажні зусилля в основній системі.
6. Розв'язати систему рівнянь і визначити зайві невідомі.
7. Визначити остаточні зусилля у заданій системі.

10.2 Основи метода скінченних елементів

Класичні методи розрахунку споруд орієнтовані на виконання розрахунків вручну. Цим пояснюється введення різноманітних спрощуючих гіпотез, розробка різних методів, що дозволяють окремо розв'язувати статичні та кінематичні рівняння статично невизначених задач та ін. Широке розповсюдження обчислювальної техніки дозволило застосовувати універсальні методи розрахунку, коли головне значення має формалізація розрахунків, а кількість обчислень відходить на другий план. Одним із таких методів є *метод скінченних елементів* (МСЕ). Його перевагою є можливість відмови від деяких спрощуючих припущень, формалізація розрахунків та застосування матричних операцій. Останнє дає можливість стисло записати алгебраїчні операції з великими масивами чисел.

Основна ідея МСЕ полягає в тому, що континуальна за суттю конструкція наводиться як набір окремих її частин, що називаються *скінченними елементами* (СЕ). Ці елементи пов'язані між собою в скінченній кількості точок, що називаються *вузлами*.

В якості скінченного елемента береться малий елемент заданої розрахункової схеми, напружено-деформований стан якого відповідає напружено-деформованому стану всієї системи

10.2.1 Види скінченних елементів. Ступені вільності

Розглянемо деякі скінченні елементи на прикладах.

1. В рамі, наведеній на рисунку 10.4, *а* зусилля й переміщення є функціями координат, що визначають положення перерізу вздовж осей стержнів. Розіб'ємо стержні рами на деяку кількість скінченних елементів довжиною b , Зусилля та переміщення будемо визначати тільки у вузлах (точках з'єднання елементів). Через ці вузлові величини можна потім визначити параметри напружено-деформованого стану системи для будь-якого перерізу в межах СЕ. Зрозуміло, чим меншими будуть скінченні елементи, тим ближче застосована дискретна схема буде до дійсної континуальної.
2. Тонка пластинка, що зазнає плоского напруженого стану. (рис. 10.4, *б*)

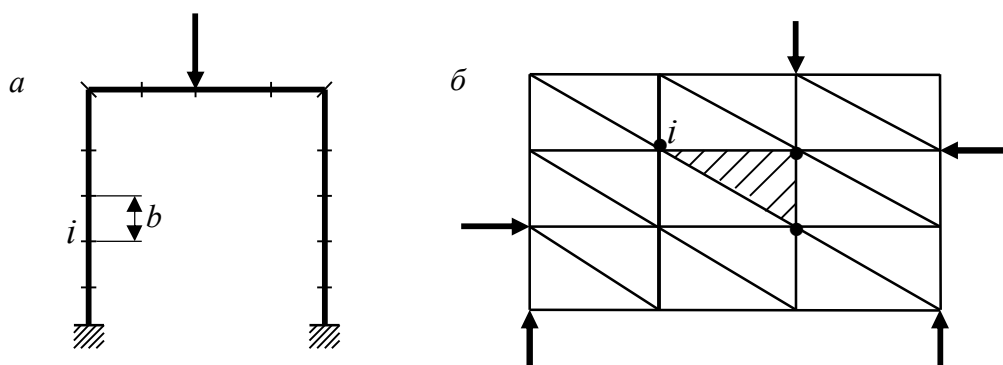


Рисунок 10.4

3. Для пластинки (рис. 10.5), що розраховується на згин за технічною теорією, напружено-деформований стан визначається прогинами точок її серединної поверхні $w(x, y)$ та кутами повороту θ_x та θ_y нормалей до серединної поверхні відносно осей x та y .

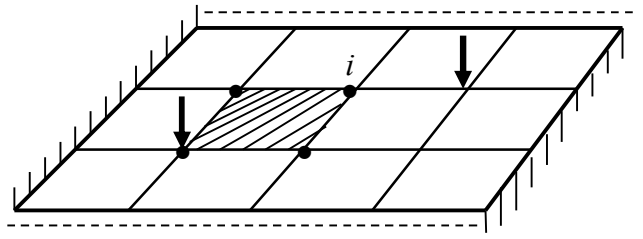


Рисунок 10.5

Розбиваючи серединну поверхню пластинки на прямокутні скінченні елементи, необхідно враховувати прогини вузлів та відповідні кути повороту. Аналогічні елементи можуть бути використані для розрахунку оболонок.

4. Неважко визначити, що переміщення вузлів ферми повністю визначають напружено-деформований стан кожного стержня ферми.

Отже, форма скінченних елементів може бути різною для різних розрахункових схем.

Кількість переміщень вузлів скінченного елемента, які враховуються в його розрахунковій схемі становить ступінь вільності скінченного елемента.

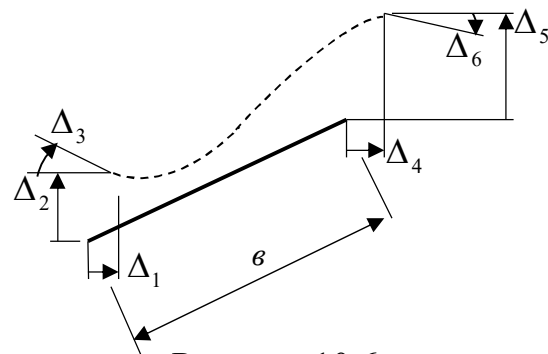


Рисунок 10.6

На рисунку 10.6 наведено окремий скінченний елемент рами. Напружено-деформований стан цього елемента цілком визначається

переміщеннями $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$ його кінців, отже, він має шість ступенів вільності.

Як видно з рисунка 10.4, б, трикутний скінченний елемент тонкої пластинки, що зазнає плоского напруженого стану, має 6 ступенів вільності, оскільки кожен його вузол може зазнавати двох незалежних переміщень.

Напружено-деформований стан чотирикутного елемента тонкої зігнутої пластинки (рис. 10.5) визначається дванадцятьма ступенями вільності – прогинами кожного вузла та кутами повороту нормалей до серединної поверхні у вузлах.

Далі будемо розглядати тільки стержневі системи, відповідно, стержневі скінченні елементи.

10.2.2 Кінематичні характеристики вузлів рами

У стержневих системах у якості вузлів зручно брати точки з'єднання стержнів, точки прикладання зосереджених сил та моментів, місця стрибкоподібної зміни жорсткості або інтенсивності розподіленого навантаження. Скінченними елементами в цьому випадку є стержні, що з'єднують сусідні вузли.

Вузли нумеруються в довільному порядку. На рисунку 10.7, а наведено нумерацію вузлів рами.

Для визначення взаємного розташування вузлів та їх статичних і кінематичних характеристик введемо систему координат xu , яку назвемо загальною або *глобальною*.

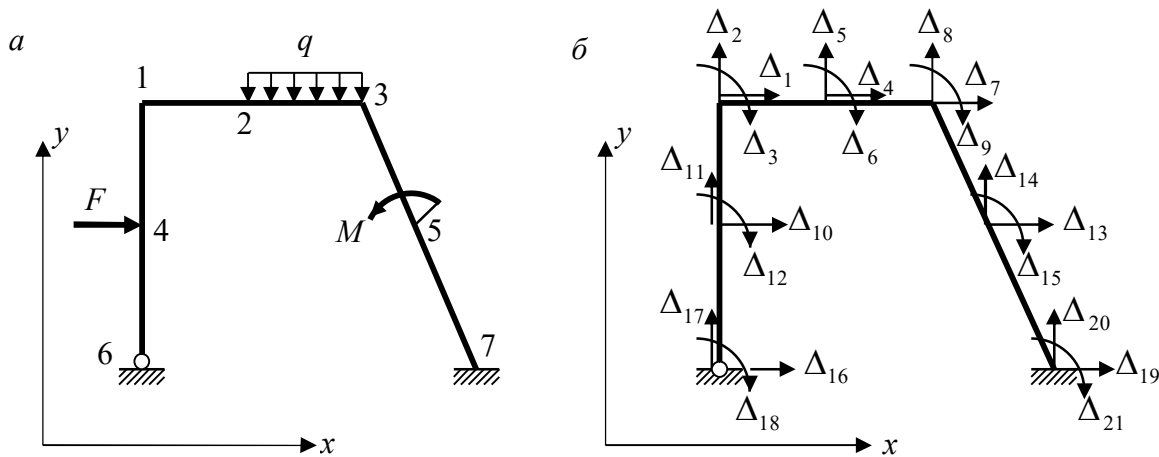


Рисунок 10.7

Переміщення жорсткого вузла є загальними для всіх стержнів, що з'єднуються в цьому вузлі, тому кожен такий вузол має три ступені свободи. Ці ступені свободи відповідають двом лінійним та одному кутовому переміщенням. Переміщення розглянутої рами в системі координат xu наведені на рисунку 10.7, б. Додатні лінійні зміщення спрямовані у бік відповідних координатних осей, додатні кутові зміщення – за напрямком годинникової стрілки.

Відзначимо, що наявність в'язей, наприклад, опорних, виключає можливість відповідних переміщень. У розглянутому прикладі у вузлах 6 та 7 знаходяться відповідно шарнірно нерухома та затискуюча нерухомі опори, отже, $\Delta_{16} = \Delta_{17} = \Delta_{19} = \Delta_{20} = \Delta_{21} = 0$. Крім того, поворот шарнірного вузла 6 відсутній, існує лише поворот кінця стержня, який визначається навантаженням на стержні 4–6. Отже і $\Delta_{18} = 0$.

Зміщення $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{15}$ є основними невідомими задачі, їх можна записати у вигляді вектора

$$\vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{15} \end{bmatrix}, \quad (10.7)$$

який називають *вектором вузлових зміщень рами*.

10.2.3 Статичні характеристики вузлів рами. Рівняння рівноваги

На кожний із вузлів рами діють зовнішні сили та внутрішні зусилля, що передаються на вузол внаслідок деформації стержнів - СЕ, які з'єднуються в цьому вузлі.

Зовнішні сили, що діють на вузол, будемо показувати у вигляді зосереджених сил та моментів, прикладених у напрямку відповідних переміщень вузлів (рис. 10.8).

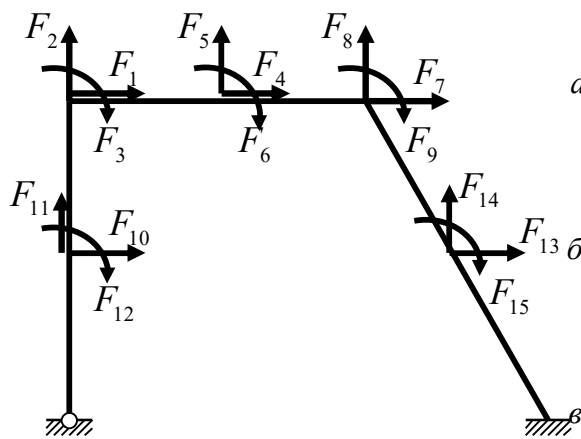


Рисунок 10.8

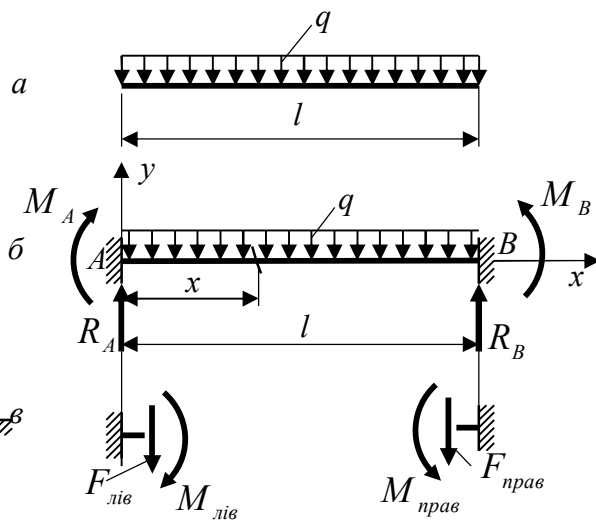


Рисунок 10.9

Величини сил визначаються схемою завантаження рами. При цьому навантаження, розташовані на скінченних елементах, необхідно звести до сил, які прикладаються до вузлів. Для прикладу наведемо визначення вузлових сил від рівномірно розподіленого навантаження для стержня (рис. 10.9, а) із двома жорсткими кінцями. Ці сили можна визначити з розрахунку балки із двома затисненнями на кінцях (рис. 10.9, б).

За результатами розрахунку, наприклад методом сил, одержимо:

$$M_B = M_A = -\frac{ql^2}{12}; R_B = R_A = \frac{ql}{2}.$$

Відсікаючи лівий та правий кінці стержня (рис. 10.9, в), одержуємо сили та моменти, що діють на лівий та правий вузли на кінцях стержня:

$$F_{лів} = F_{прав} = -\frac{ql}{2}; M_{лів} = \frac{ql^2}{12}; M_{прав} = -\frac{ql^2}{12}.$$

Отже, для рами (рис. 10.7, а) маємо:

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0; F_5 = -\frac{ql_{2-3}}{2}; F_6 = \frac{ql_{2-3}^2}{12}; F_7 = 0; F_8 = -\frac{ql_{2-3}}{2};$$

$$F_9 = -\frac{ql_{2-3}^2}{12}; F_{10} = F; F_{11} = F_{12} = 0; F_{13} = F_{14} = 0; F_{15} = -M; F_{16} = 0.$$

Ці сили можна записати у вигляді вектора вузлових сил:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{15} \end{bmatrix}. \quad (10.8)$$

При зміщеннях вузлів рами на кінцях стержнів - СЕ з'являються реактивні сили, що діють на вузли. Повні реакції від усіх стержнів, які з'єднуються у вузлі, будемо подавати у вигляді складових R_i уздовж переміщень Δ_i . Напрямок цих складових - реакцій R_i будемо подавати відповідно до їхньої дії на стержні з боку вузла, тобто назустріч вузловим силам F_i (рис. 10.10).

Для лінійно-деформованої системи реакції R_i можна записати так:

$$R_i = K_{i1}\Delta_1 + K_{i2}\Delta_2 + \dots + K_{ij}\Delta_j + \dots + K_{in}\Delta_n, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.9)$$

Механічну суть коефіцієнту K_{ij} можна визначити, якщо задати переміщення $\Delta_j = 1$, а інші переміщення вузлів нульовими. У цьому випадку $R_i = r_{ij} = K_{ij}$, тобто K_{ij} - це реакція в напрямку i -го зміщення, викликана зміщенням $\Delta_j = 1$.

Сукупність усіх реакцій системи подамо у вигляді вектора

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{15} \end{bmatrix}. \quad (10.10)$$

Тоді співвідношення між реакціями і переміщеннями можна записати в матричній формі так:

$$\vec{R} = \vec{K} \cdot \vec{\Delta}, \quad (10.11)$$

де \vec{K} - матриця реакцій від одиничних зміщень вузлів, яка називається *матрицею жорсткості системи*.

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

Зазначимо, що оскільки елементами матриці жорсткості є одиничні реакції, для них має місце взаємність, тобто $K_{ij} = r_{ij} = r_{ji} = K_{ji}$.

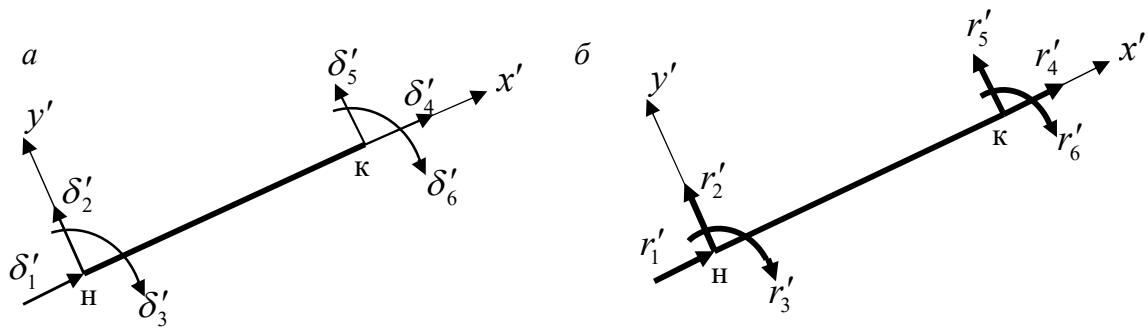


Рисунок 10.10

На кожен вузол рами діють у протилежних напрямках зовнішні сили F_i та реакції стержнів R_i . Оскільки рама знаходиться в рівновазі, кожен її вузол теж урівноважений, тобто

$$R_i = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

або в матричній формі $\vec{R} - \vec{F} = \vec{0}$, (10.13)

де $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ – нульовий вектор.

З урахуванням (10.11) рівняння рівноваги вузлів набуває такого виду:

$$\vec{K} \cdot \vec{\Delta} - \vec{F} = \vec{0}. \quad (10.14)$$

Матричне рівняння (10.14) дає можливість визначити переміщення вузлів від заданого навантаження, якщо відомі елементи матриці жорсткості системи.

10.2.4 Матриця жорсткості стержня рами в локальній системі координат

Для окремого стержня рами (рис. 10.10, а) оберемо систему координат $x'y'$ так, що її початок знаходиться на кінці стержня, що відповідає вузлу з меншим номером. Цю точку назвемо початком стержня. Вісь x' спрямуємо вздовж стержня у бік його кінця, а вісь y' - перпендикулярно осі стержня так, щоб прями кут був відкладений від осі x' проти годинникової стрілки. Цю систему координат називають *локальною*.

Переміщення кінців стержня нумеруємо так, як показано на рисунку 10.10, а. Аналогічно нумеруємо реакції r'_i (рис. 10.10, б). При цьому зауважимо, що напрямок цих реакцій відповідає їхній дії від вузла на стержень.

Вектор реакцій елементу

$$\vec{r}'_e = \begin{bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ \vdots \\ r'_6 \end{bmatrix}_e \text{ та вектор переміщень його кінців } \vec{\delta}'_e = \begin{bmatrix} \delta'_1 \\ \delta'_2 \\ \vdots \\ \delta'_6 \end{bmatrix}_e \text{ пов'язані між собою}$$

співвідношенням

$$\vec{r}'_e = \vec{K}'_e \cdot \vec{\delta}'_e, \quad (10.15)$$

де \vec{K}'_e - матриця жорсткості елемента у локальній системі координат:

$$\vec{K}'_e = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} & \cdots & K'_{16} \\ K'_{21} & K'_{22} & \cdots & K'_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K'_{61} & K'_{62} & \cdots & K'_{66} \end{bmatrix}_e. \quad (10.16)$$

Нагадаємо, що елемент K'_{ij} цієї матриці є реакцією r'_{ij} стержня в i -му напрямку, викликаною переміщенням $\delta'_j = 1$.

Елементи матриці \vec{K}'_e залежать від умов на кінцях стержня. Визначення деяких із цих реакцій покажемо далі на прикладі стержня з обома жорсткими кінцями. Для зручності будемо розглядати стержень горизонтальним.

На рисунку 10.11, *a* наведено стан стержня при зміщенні $\delta'_1 = 1$. Таке зміщення викликає стиск стержня. Поздовжню силу визначимо з формули Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = -1.$$

Отже:

$$N = -\frac{EA}{l}, \quad r'_{11} = \frac{EA}{l}; \quad r'_{41} = -\frac{EA}{l},$$

$$r'_{21} = r'_{31} = r'_{51} = r'_{61} = 0.$$

Реакції від зміщення $\delta'_2 = 1$ (рис. 10.11, *б*) знайдемо за допомогою методу сил або початкових параметрів. З урахуванням того, що на початку координат

$\theta_0 = 0; y_0 = 1; M_0 = r'_{32}; Q_0 = r'_{22}$,

маємо:

$$r'_{22} = \frac{12EI}{l^3}; \quad r'_{32} = -\frac{6EI}{l^2}$$

$$r'_{52} = -\frac{12EI}{l^3}; \quad r'_{62} = -\frac{6EI}{l^2}.$$

Оскільки розтяг – стиск при переміщенні δ'_2 відсутні,

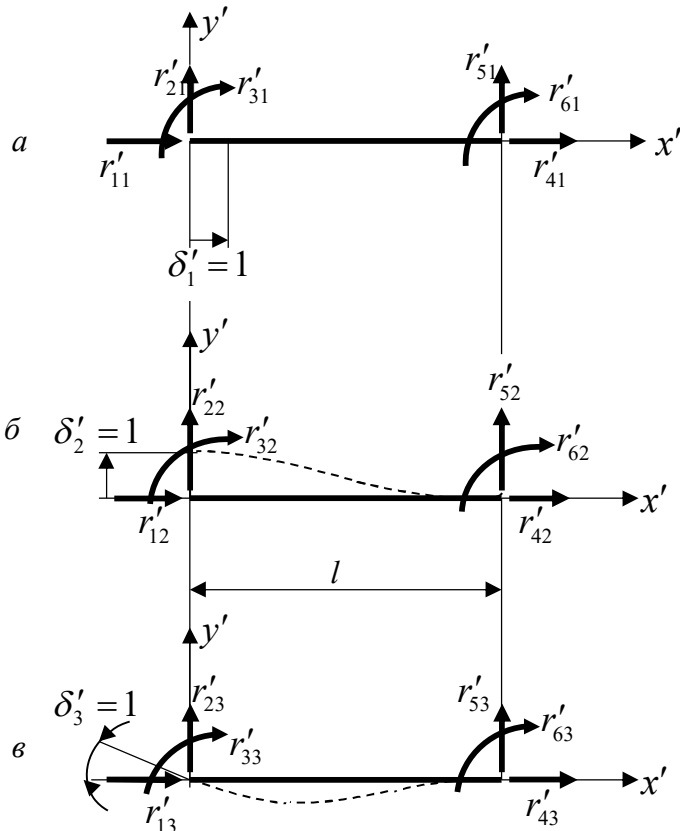


Рисунок 10.11

$$r'_{12} = r'_{42} = 0.$$

Реакції при зміщеннях $\delta'_4 = 1, \delta'_5 = 1$ та $\delta'_6 = 1$ неважко визначити з умов симетрії.

Так само одержимо реакції від зміщення $\delta'_3 = 1$:

$$r'_{13} = r'_{43} = 0; r'_{23} = -\frac{6EI}{l^2}; r'_{33} = \frac{4EI}{l};$$

$$r'_{53} = \frac{6EI}{l^2}; r'_{63} = \frac{2EI}{l}.$$

Отже, матриця жорсткості для стержня з жорсткими кінцями має такий вигляд:

$$\bar{K}'_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}_e.$$

Аналогічно можна одержати матриці жорсткості для стержня з іншими закріпленнями кінців.

10.2.5 Матриця жорсткості стержня рами у загальній системі координат

Переміщення вузлів рами $\bar{\Delta}$ записані у загальній - *глобальній системі координат*, отже, для її розрахунку необхідно матрицю жорсткості стержня також записувати у цій системі координат, а від переміщень та реакцій вузлів рами переходити до переміщень та реакцій на кінцях стержня у локальній системі координат.

Для перетворення переміщень та реакцій стержня із глобальної (рис. 10.12) у локальну систему координат слугує *матриця перетворення координат* \bar{T}'_e .

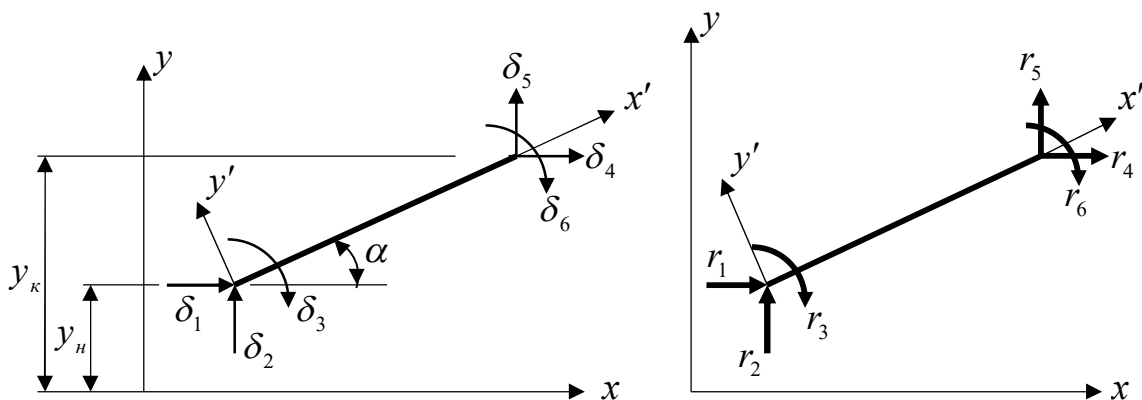


Рисунок 10.12

Для стержня рами ця матриця має такий вид:

$$\vec{T}_e = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_e. \quad (10.17)$$

Тригонометричні функції кута α можна виразити через координати початку та кінця стержня у глобальній системі координат (рис. 10.12):

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\Delta y}{l}; \quad \cos \alpha = \frac{\Delta x}{l}; \\ \Delta y &= y_k - y_n; \quad \Delta x = x_k - x_n; \\ l &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_k - x_n)^2 + (y_k - y_n)^2}. \end{aligned}$$

За допомогою матриці \vec{T}_e можна записати

$$\begin{aligned} \vec{\delta}'_e &= \vec{T}_e \cdot \vec{\delta}_e; \\ \vec{r}'_e &= \vec{T}_e \cdot \vec{r}_e. \end{aligned} \quad (10.18)$$

У глобальній системі координат вектори реакцій та переміщень пов'язані між собою співвідношенням, аналогічним (10.9):

$$\vec{r}_e = \vec{K}_e \cdot \vec{\delta}_e, \quad (10.19)$$

де \vec{K}_e - матриця жорсткості елемента в глобальній системі координат. Вона пов'язана з матрицею \vec{K}'_e в локальній системі координат:

$$\vec{K}_e = \vec{T}_e^T \vec{K}'_e \vec{T}_e. \quad (10.20)$$

Індекс «Т» у матриці означає її транспонування, тобто заміну в ній стовпчиків рядками та навпаки.

Для стержня з двома жорсткими кінцями елементи матриці \vec{K}_e будуть такими:

$$\begin{aligned} K_{11} = K_{44} = -K_{14} = -K_{41} &= \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \alpha; \\ K_{22} = K_{55} = -K_{25} = -K_{52} &= \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha; \\ K_{33} = K_{66} &= \frac{4EI}{l}; \end{aligned} \quad (10.21)$$

$$K_{12} = K_{21} = K_{45} = K_{54} = -K_{15} = -K_{51} = -K_{24} = -K_{42} = \left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3} \right) \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$K_{13} = K_{31} = K_{16} = K_{61} = -K_{46} = -K_{64} = -K_{34} = -K_{43} = \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha;$$

$$K_{35} = K_{53} = K_{56} = K_{65} = -K_{23} = -K_{32} = -K_{26} = -K_{62} = \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha;$$

$$K_{36} = K_{63} = \frac{2EI}{l}.$$

Для стержня із затисненням на початку і шарніром у кінці:

$$\bar{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & 0 \\ \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & 0 \\ -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \sin^2 \alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha - \frac{3EI}{l^3} \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.22)$$

10.2.6 Матриця жорсткості елемента ферми

Стержні ферм з'єднані у вузлах шарнірами, тому при вузловому навантаженні вони зазнають тільки розтягу-стиску. У такому разі, на відміну від рам, для стержня ферми необхідно враховувати тільки лінійні переміщення вузлів та відповідні реакції. Ці переміщення та реакції для окремого стержня в глобальній системі координат наведені на рисунку 10.13.

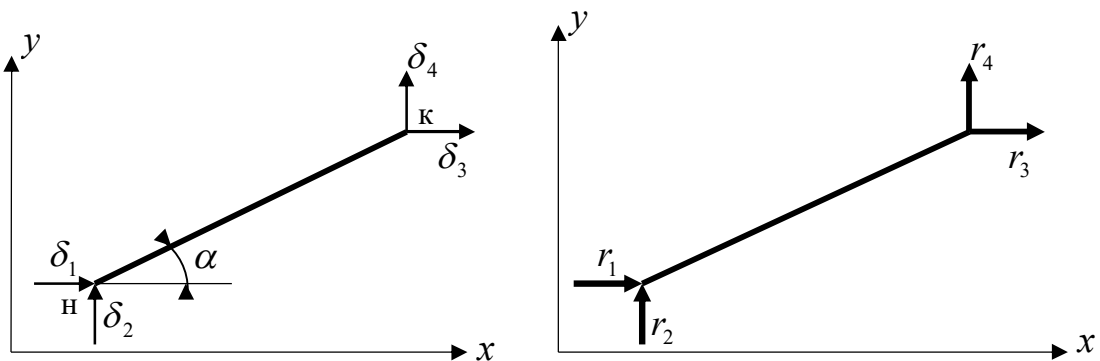


Рисунок 10.13

Значення елементів матриці жорсткості для стержня ферми можна одержати з відповідних значень для стержня рами. Для цього необхідно виключити в останніх величини, що враховують згин стержня та змінити індекси. Таким чином отримуємо матрицю:

$$\bar{K}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha \\ \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha \\ -\frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \cos^2 \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha \\ -\frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin^2 \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (10.23)$$

10.2.7 Матриця жорсткості всієї системи

Довільний елемент K_{ij} матриці жорсткості (10.23) системи є реакцією в напрямку зміщення Δ_i , викликаною зміщенням вузла $\Delta_j = 1$. Отже, елементами, наприклад, дев'ятого стовпчика матриці жорсткості рами (рис. 10.7, *a*) будуть реакції від зміщення $\Delta_9 = 1$. На рисунку 10.14, *a* наведені ці вузлові реакції. Відзначимо, що оскільки всі переміщення, крім Δ_9 , передбачаються нульовими, деформуватися при цьому будуть лише стержні 2-3 та 3-5.

Переміщення $\Delta_9 = 1$ одночасно є переміщенням $\delta_6^{2-3} = 1$ кінця стержня 2-3 та переміщенням $\delta_3^{3-5} = 1$ початку стержня 3-5 (рис. 10.14, *б*). Реакції стержнів у вузлах підсумовуються, визначаючи таким чином вузлові реакції – елементи загальної матриці жорсткості системи. Ураховуючи, що при переміщенні Δ_9 стержні 1-2, 1-4, 4-6 та 5-7 не деформуються, реакції цих стержнів дорівнюють нулю. Отже, одержуємо такі значення елементів 9-го стовпчика загальної матриці жорсткості рами:

$$\begin{aligned} K_{4,9} &= K_{1,6}^{2-3}; K_{5,9} = K_{2,6}^{2-3}; K_{6,9} = K_{3,6}^{2-3}; \\ K_{7,9} &= K_{4,6}^{2-3} + K_{1,3}^{3-5}; K_{8,9} = K_{5,6}^{2-3} + K_{2,3}^{3-5}; K_{9,9} = K_{6,6}^{2-3} + K_{3,3}^{3-5}; \\ K_{13,9} &= K_{4,3}^{3-5}; K_{14,9} = K_{5,3}^{3-5}; K_{15,9} = K_{6,3}^{3-5}; \\ K_{1,9} &= K_{2,9} = K_{3,9} = K_{10,9} = K_{11,9} = K_{12,9} = 0. \end{aligned}$$

10.2.8 Визначення зусиль у стержнях рами

Розв'язок рівняння (10.13) дає вектор переміщень вузлів рами:

$$\bar{\Delta} = \bar{K}^{-1} \cdot \bar{F}. \quad (10.24)$$

Елементи вектора переміщень одночасно є елементами вектора переміщень кінців відповідних стержнів рами в глобальній системі координат.

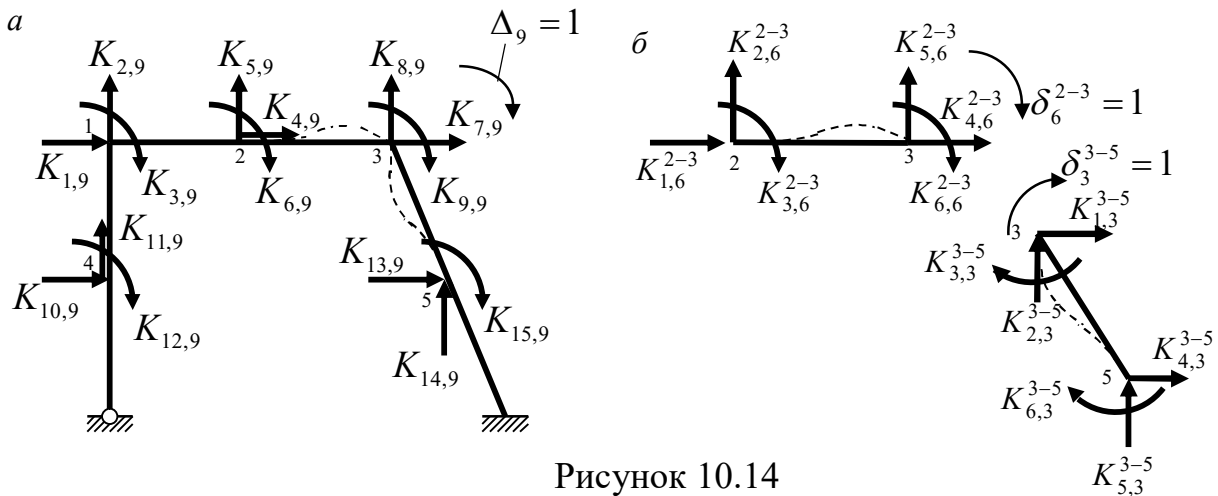


Рисунок 10.14

Наприклад, для стержня 2–3 рами (рис. 10.14, *a*) одержуємо:

$$\bar{\delta}_{2-3} = \begin{bmatrix} \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \Delta_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix}_{2-3} .$$

На рисунку 10.15 наведені додатні напрями зусиль на кінцях елемента. Величини цих зусиль складають вектор

$$\bar{S}_e = \begin{bmatrix} -N_n \\ Q_n \\ M_n \\ N_k \\ -Q_k \\ -M_k \end{bmatrix} .$$

Зусилля на кінцях стержня визначаються через переміщення кінців стержня та навантаження на стержні:

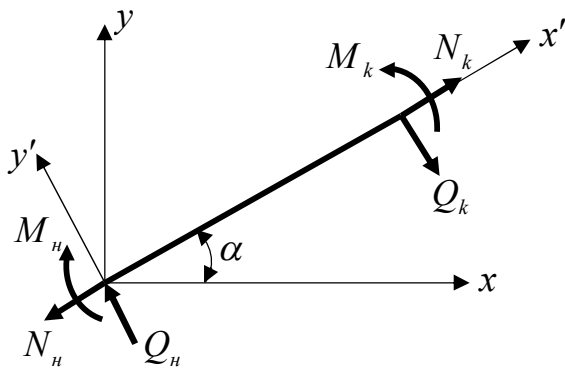


Рисунок 10.15

$$\bar{S}_e = \bar{h}_e \cdot \bar{\delta}_e + \bar{q}_e' . \quad (10.25)$$

де \bar{h}_e - матриця, що перетворює переміщення кінців елемента в глобальній системі координат S_e зусилля, що діють на початку та кінці стержня від цих переміщень; \bar{q}_e' - вектор реакцій на кінцях стержня від навантаження на стержні в локальній системі координат.

Для стержня з жорсткими кінцями матриця \bar{h}_e має такий вигляд:

$$\bar{h}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos\alpha & \frac{EA}{l} \sin\alpha & 0 & -\frac{EA}{l} \cos\alpha & -\frac{EA}{l} \sin\alpha & 0 \\ -\frac{12EI}{l^3} \sin\alpha & \frac{12EI}{l^3} \cos\alpha & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} \sin\alpha & -\frac{12EI}{l^3} \cos\alpha & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} \sin\alpha & -\frac{6EI}{l^2} \cos\alpha & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \sin\alpha & \frac{6EI}{l^2} \cos\alpha & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} \cos\alpha & -\frac{EA}{l} \sin\alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos\alpha & \frac{EA}{l} \sin\alpha & 0 \\ \frac{12EI}{l^3} \sin\alpha & -\frac{12EI}{l^3} \cos\alpha & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} \sin\alpha & \frac{12EI}{l^3} \cos\alpha & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} \sin\alpha & -\frac{6EI}{l^2} \cos\alpha & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} \sin\alpha & \frac{6EI}{l^2} \cos\alpha & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} . \quad (10.26)$$

Для стержня з затисненням на початку та шарніром у кінці:

$$\bar{h}_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ -\frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & 0 \\ \frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & \frac{3EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^2} \cos \alpha & 0 \\ -\frac{EA}{l} \cos \alpha & -\frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 & \frac{EA}{l} \cos \alpha & \frac{EA}{l} \sin \alpha & 0 \\ \frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & -\frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & \frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l^3} \sin \alpha & \frac{3EI}{l^3} \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.26)$$

Вектори реакцій \bar{q}_e' від рівномірно розподіленого навантаження, прикладеного в межах стержня відповідно з обома жорсткими кінцями та з затисненням на початку і шарніром у кінці мають такий вигляд:

$$\bar{q}_e' = \begin{bmatrix} -\frac{q_x l_y}{2} \cos \alpha - \frac{q_y l_x}{2} \sin \alpha \\ \frac{q_x l_y}{2} \sin \alpha - \frac{q_y l_x}{2} \cos \alpha \\ -\frac{q_x l_y^2}{12} + \frac{q_y l_x^2}{12} \\ -\frac{q_x l_y}{2} \cos \alpha - \frac{q_y l_x}{2} \sin \alpha \\ \frac{q_x l_y}{2} \sin \alpha - \frac{q_y l_x}{2} \cos \alpha \\ \frac{q_x l_y^2}{12} - \frac{q_y l_x^2}{12} \end{bmatrix}; \quad \bar{q}_e' = \begin{bmatrix} -\frac{5q_x l_y}{8} \cos \alpha - \frac{5q_y l_x}{8} \sin \alpha \\ \frac{5q_x l_y}{8} \sin \alpha - \frac{5q_y l_x}{8} \cos \alpha \\ -\frac{q_x l_y^2}{8} + \frac{q_y l_x^2}{8} \\ -\frac{3q_x l_y}{8} \cos \alpha - \frac{3q_y l_x}{8} \sin \alpha \\ \frac{3q_x l_y}{8} \sin \alpha - \frac{3q_y l_x}{8} \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (10.27)$$

Складові навантаження q_x та q_y та складові довжини стержня l_x та l_y беруть відповідно до рисунку 10.16.

При відсутності навантаження на стержні вектор \bar{q}_e' буде нульовим.

За такою самою схемою обчислюють зусилля і в фермі.

Ще раз відзначимо, що метод скінченних елементів є універсальним методом розрахунку як статично невизначуваних, так і статично визначуваних систем.

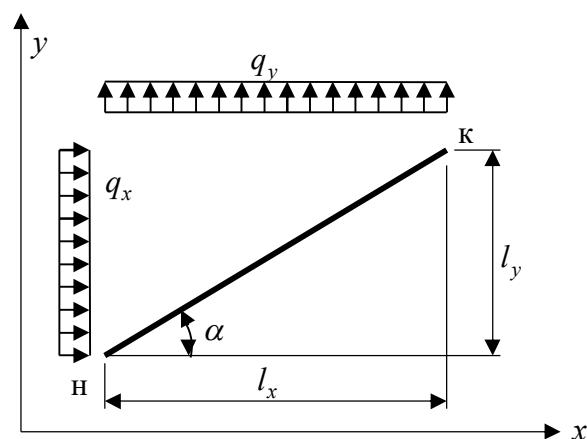


Рисунок 10.16

Запитання для самоконтролю

1. Як визначити ступінь статичної невизначуваності рами?
2. Назвіть основні класичні методи розрахунку статично невизначуваних систем.
3. Що приймають за невідомі методу сил?
4. Дайте визначення основної системи методу сил.
5. У чому різниця між абсолютно необхідними та умовно необхідними в'язями?
6. Наведіть можливі способи відкидання в'язей при виборі основної системи.
7. Що являють собою канонічні рівняння методу сил?
8. Що являють собою коефіцієнти та вільні члени канонічних рівнянь методу сил?
9. Який метод зазвичай застосовують для визначення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь?
10. Наведіть властивості головних та побічних коефіцієнтів канонічних рівнянь.
11. Як зусилля у статично невизначуваній системі при дії навантаження залежать від жорсткостей елементів системи
12. Як можна знайти зусилля у заданій системі після визначення зайвих невідомих?
13. Як перевірити правильність розрахунку статично невизначуваної системи?
14. Які переваги МСЕ перед класичними методами?
15. Що називають скінченним елементом?
16. Наведіть приклади скінченних елементів.
17. Як визначається кількість ступенів вільності скінченного елемента?
18. Скільки ступенів вільності має СЕ рами? Ферми? Що приймають у якості вузлів рами?
19. Які величини приймають у якості кінематичних характеристик вузлів рами?
20. Що є статичними характеристиками вузлів рами? Як вони визначаються?
21. Які величини є елементами матриці жорсткості? Яку властивість мають елементи матриці жорсткості?
22. Яку систему координат називають локальною? Глобальною?
23. Як складається матриця жорсткості системи?
24. Як визначається вектор переміщень вузлів системи?
25. Як визначаються зусилля на кінцях стержня рами після визначення переміщень?
26. Що є статичними характеристиками вузлів рами? Як вони визначаються?
27. Яка матриця називається матрицею жорсткості?
28. Які величини є елементами матриці жорсткості? Яку властивість мають елементи матриці жорсткості?

29. Наведіть рівняння рівноваги вузлів у матричній формі.
30. Яку систему координат називають локальною? Глобальною?
31. Який зв'язок існує між векторами реакцій на кінцях елемента і переміщеннями?
32. Який розмір має матриця жорсткості елемента рами? Ферми?
33. Як пов'язані між собою вектори переміщень у локальній та глобальній системах координат?
34. Для чого слугує матриця перетворення координат?
35. Як пов'язані між собою матриці жорсткості в локальній та глобальній системах координат?
36. Як складається матриця жорсткості системи?
37. Як визначається вектор переміщень вузлів системи?
38. Як визначаються зусилля на кінцях стержня рами після визначення переміщень?
39. Як визначаються зусилля в стержнях ферми через переміщення його кінців?

Список рекомендованої літератури

1. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності / В. Г. Піскунов, Ю. М. Феодоренко, В. Ю. Шевченко та ін. – Київ : Вища школа, 1994. – 423 с.
2. Сопротивление материалов / Под общ. ред. Г. С. Писаренко. – Київ : Вища школа, 1979. – 696 с.
3. Шутенко Л. М. Механіка споруд : навч. посібник / Л. М. Шутенко, В. П. Пустовойтов, М. А. Засядько. – Харків : ХДАМГ, 2001. – 234 с.
4. Чихладзе Э. Д. Строительная механика : Учебник для студентов высших учебных заведений. – Харьков : УкрГАЖТ, 2004. – 305 с.
5. Цифровий репозиторій ХНУМГ [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://eprints.kname.edu.ua>.

Навчальне видання

ЗАСЯДЬКО Микола Андрійович
ЧУПРИНІН Олександр Олексійович

ОПР МАТЕРІАЛІВ. БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для студентів 2 курсу денної форми навчання
спеціальності 191 – Архітектура та містобудування)*

Відповідальний за випуск *А. О. Гарбуз*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *М. А. Засядько*

План 2020, поз. 75Л

Підп. до друку 06.06.2020. Формат 60×84 1/16.

Друк на різнографі. Ум. друк. арк.6,7.

Тираж 50 пр.

Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О.М. Бекетова
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017.