МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКІЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

О. В. Кічаєва

НАДІЙНІСТЬ ОСНОВ ТА ФУНДАМЕНТІВ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів очної та заочної форм навчання
другого (магістерського) рівня вищої освіти
за спеціальністю 192 – Будівництва та цивільна інженерія)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2021

Кічаєва О. В. Надійність основ та фундаментів: конспект лекцій для студентів очної та заочної форм навчання другого (магістерського) рівня вищої освіти за спеціальністю 192 – Будівництво та цивільна інженерія / О. В. Кічаєва ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 60 с.

Автор:
д-р техн. наук, проф. О. В. Кічаєва

Рецензенти:

О. В. Самородов, доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри геотехніки та підземних споруд (Харківський національний університет будівництва та архітектури);

В. П. Кожушко, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри мостів, конструкцій та будівельної механіки (Харківський національний автомобільно-дорожній університет)

Рекомендовано кафедрою механіки ґрунтів, фундаментів та інженерної геології, *протокол № 5 від 26.12.2019.*

Конспект лекцій складено з метою допомогти студентам-будівельникам вишу під час підготовки до занять та заліків із дисципліни «Надійність основ та фундаментів».

ЗМІСТ

ЛЕКЦІЯ 1 ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ. ОСОБЛИВОСТІ ҐРУНТІВ ЯК МАТЕРІАЛУ ОСНОВ З ПОЗИЦІЇ ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ

Під **надійністю** розуміють здатність об’єкта виконувати задані функції протягом заданого проміжку часу [26]. Поширюючи термін надійності на систему «будівля – основа», зауважимо, що дана система повинна виконувати функції забезпечення (будь-яких) потреб життєдіяльності населення протягом розрахункового терміну служби, зберігаючи у встановлених режимах експлуатаційні та конструктивні показники в заданих режимах роботи та в умовах експлуатації, технічного обслуговування і ремонту. У стандарті ISO 2394 формулювання *надійності* звучить так: це здатність конструкції відповідати встановленим вимогам в заданих умовах протягом її передбаченого терміну експлуатації.

Під **безпекою** об’єкта розуміють властивість об’єкта при експлуатації, а також у разі порушення працездатності не створювати загрози для життя і здоров’я, а також загрози для навколишнього середовища (ГОСТ 27.002) [23].

До комплексної властивості надійності розглянутої складної системи належить стабільність показників якості та ефективності її функціонування, яка залежить від надійності конструкцій і систем, тобто, в нашому випадку, це збереження міцності будь-якого небезпечного перерізу кладки при будь-яких можливих впливах (і їх поєднанні), а також відсутність перевищення нормативних значень деформацій будівлі (споруди). Термін «безпека» стосовно системи «будівля – основа» може трактуватися як надійність щодо життя і здоров’я людей та навколишнього середовища.

Розрахунки системи «будівля – основа» виконуються за методом граничних станів.

У національному документі ДБН В.1.2-14-2018 [26], в європейському документі EN 1990 Eurocode [65, 66], міжнародному стандарті ISO 2394 розміщено систематизований опис основних понять конструктивної надійності.

Відомий документ Об'єднаного комітету з надійності конструкцій (JCSS) «Імовірнісні модельні норми JCSS» [69] рекомендує використовувати імовірнісні методи оцінки конструктивної надійності; в цьому ж документі описуються моделі основних змінних і методів імовірнісної оцінки.

Система «будівля – основа» – складна система, і для спрощення аналізу її надійності необхідно розбити її на ряд підсистем (елементів), які самостійно характеризуються вхідними та вихідними параметрами. Тоді функція всієї системи визначається як добуток функцій надійності, що входять до системи елементів: ґрунтова основа, несучі стіни.

Унаслідок того, що несучі конструктивні системи будівель проектуються, здебільшого, як невідновлювані, показником надійності по міцності цих систем і їх елементів можна прийняти ймовірність безвідмовної роботи протягом заданого терміну служби. Тому для розрахунків надійності системи необхідний структурний аналіз конструктивної системи, метою якого є виявлення елементів, які впливають на надійність системи і їх взаємозв'язку по надійності.

Розвиток імовірнісних методів продовжили такі вчені, як Л. С. Авіром [1], М. М. Єрмолаєв [29], М. Б. Краковський [32], О. П. Кудзис, О. С. Личов [38], В. В. Михеєв, В. Д. Райзер [46], М. М. Складнєв [52], Б. Й. Снаркис, В. П. Чирков [56].

В Україні варто відзначити роботи А. М. Бамбури, А. Я. Барашикова [4], О. І. Вайнберга [12], Ю. Л. Винникова [18], О. П. Воскобійник [19], Р. І. Кінаша, І. М. Коваленка [31], А. І. Лантуха-Лященка [34, 36], А. В. Махінька, В. А. Пашинського [39], А. В. Перельмутера [40, 41], С. Ф. Пичугіна [43, 42], О. В. Семка [51], Д. В. Стефанишина [53], С. Б. Усаковського [55], О. В. Школи [57] та інших.

Сучасна теорія надійності складних технічних систем дозволяє отримати кількісну оцінку надійності та безпеки будівельних конструкцій і споруд. Теорія надійності стала бурхливо розвиватися після впровадження методу граничних станів, що базується на роботах М. С. Стрєлецького, О. О. Гвоздєва, В. М. Келдиша, Й. І. Гольденблата. Основи теорії надійності були започатковані в работах В. В. Болотіна [7, 8, 9], М. Н. Гольдштейна, О. Р. Ржаніцина, М. М. Єрмолаєва та В. В. Михеєва [29], К. Капура, К. Корнелла [63], Л. Ламберзона, М. Ф. Хоциалова, Ф. М. Фрейденталя. Прикладні задачі теорії надійності розглянуто в роботах Г. Аугусті [3], А. Баратта [3], Б. І. Беляєва, А. Н. Бирбраєра, Ф. Кашиаті, В. Д. Костюкова, Б. Е. Кочеткова, Б. П. Макарова, Н. Р. Моргенштерна, А. В. Перельмутера [40], М. М. Складнєва [52], Б. Й. Снарскиса [28], Ю. Д. Сухова, С. А. Тімашева [54], П. І. Яковлева.

В теорії надійності широко використовується поняття граничного стану. Фактично розв'язок задачі теорії надійності зводиться до визначення ймовірності виникнення відповідного граничного стану.

Для вирішення завдань щодо визначення ризику виникнення граничного стану застосовується певна *функція граничного стану*. Така функція складається на основі існуючого (найчастіше нормативного) методу розв'язання конкретної детерміністичної задачі в межах методології граничних станів. Зазвичай функція граничного стану записується у відповідності з нерівністю, що характеризує умову, при якій ще не реалізується граничний стан будь-якого виду.

При вирішенні задач теорії надійності особливу складність представляє визначення значення ризику досягнення граничного стану на основі розв'язання відповідної задачі статистичної динаміки. Для розв'язання такої задачі сьогодні використовуються такі методи: метод чисельного інтегрування; метод статистичних випробувань (Монте-Карло); метод, що базується на статистичній лінеаризації функцій випадкових величин.

При визначенні рівня надійності будівель та споруд необхідно вирішувати завдання по виявленню та опису зміни умов роботи – навантажень, властивостей будівельних матеріалів та ґрунтів тощо. Основні фактори, що визначають надійність системи «будівля – основа»:

– максимальна відповідність прийнятих схем та методів розрахунку системи дійсним умовам її роботи в кожному конкретному випадку;

– достовірність опису інженерно-геологічних умов будівництва споруди й даних про характеристики матеріалів та ґрунтів основ, що отримані в процесі вишукувань і обстежень;

– достовірність матеріалів про навантаження і впливи, яких зазнає система в процесі реконструкції;

– правильність реалізації проектних рішень у процесі будівництва, що забезпечується засобами контролю за якістю й передбаченою технологією виконання робіт.

Кількісний опис більшої частини з перерахованих факторів у всій складності їх взаємодії має проводитися з урахуванням мінливості як властивостей ґрунтів основ та матеріалів, так і навантажень та впливів. Чим вищою є якість вихідних даних, тим з більшою ймовірністю проектна надійність системи взагалі та складових її елементів зокрема наближається до експлуатаційної.

Фізико-механічні властивості ґрунтів різні через різноманітність їх складу і структури, дисперсність, багатофазність, полімінеральність, вплив на них інженерно-геологічних процесів різного роду, особливість внутрішніх зв’язків, величину напружень у масиві ґрунту. При цьому властивості ґрунтів змінюються з часом при зволоженні (коливання УГВ), багаторічному перебуванні під навантаженням, під час землетрусу, наявності карстових явищ, суфозії, просадкових явищах тощо.

ЛЕКЦІЯ 2 МІНЛИВІСТЬ ФІЗИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК, ХАРАКТЕРИСТИК МІЦНОСТІ ТА ДЕФОРМАТИВНОСТІ ҐРУНТІВ. МІНЛИВІСТЬ ЗОВНІШНІХ ВПЛИВІВ НА ҐРУНТИ ОСНОВ СПОРУД

Найменш вивченими є статистичні параметри і закони розподілу розкиду фізико-механічних ґрунтів, їх зміна в процесі зведення будівлі (споруди), а також впливів від інженерно-геологічних процесів. На думку Ю. Л. Винникова [18], «…напруги і деформації основ фундаментів - це просторово-часові випадкові поля, властивості яких залежать від неоднорідності ґрунтового масиву, а також просторових і часових флуктуацій зовнішніх навантажень і впливів ...». Розкид значень фізико-механічних характеристик ґрунтів у природному стані досить широкий – згідно з ДСТУ Б.В.2.1-5-96, однорідним вважається інженерно-геологічний елемент, у якого коефіцієнт варіації для фізичних властивостей не перевищує 15 %, а для механічних – 30 %.

Статистичні параметри випадкових величин властивостей ґрунтів: математичне очікування μ, середньоквадратичне відхилення (стандарт) σ, коефіцієнт варіації і закон розподілу. Значення коефіцієнтів варіації V і законів розподілу випадкових величин показані в таблиці 2.1 [18].

Полтавські учені встановили статистичні параметри розподілів випадкових величин ущільнених ґрунтів і технологічних параметрів [18, 75]. Розподіл напруг під підошвою фундаменту характеризується значним розсіюванням через різного рівня навантаження на фундаменти, інженерно-геологічної будови стисливої товщі, особливості конструктивного рішення будівлі, виду фундаментів.

Розглянемо параметри розподілу навантажень і впливів на цегляні будівлі і споруди, використовуючи рекомендації Об'єднаного комітету з надійності конструкцій (JCSS) «Імовірнісні модельні норми JCSS» [69].

Таблиця 2.1 – Значення коефіцієнтів варіації *V* і законів розподілу для різних характеристик природного ґрунту[1]

Характеристика	Коефіцієнт варіації *V*, % Закон розподілу			
	пісок	супісок	суглинок	глина
Вологість, w	30–50/4,4–49/– нормальний	10–30/6,2–27,7/8–30 нормальний	8–28/3,8–15/8–30 нормальний	4–25/12,65/8–30 нормальний
Коефіцієнт пористості, e	3–13/1,1–6,7/– нормальний	6–12/2,3–16,5/– нормальний	6–25/3,5–14,2/– нормальний	3–22/19,3/– нормальний
Щільність, ρ	2–7,5/0,5–3,2/<10 нормальний	2–4,5/0,5–2,5/<10 нормальний	2,5–7,5/0,8–3,7/<10 нормальний	4–6/4,3/<10 нормальний
Щільність часток, ρ_s	–/0–0,3/– нормальний	–/0,2–0,65/– нормальний	–/0,2–0,6/– нормальний	–/0,8/– нормальний
Число пластичності, I_p		25–50/–/10–40 нормальний	5–35/–/10–40 нормальний	7–30/–/10–40 нормальний
Межа розкочування, w_p		6–17/–/6–30 нормальний	5–25/–/6–30 нормальний	7–27/–/6–30 нормальний
Межа текучості, w_L		5–16/–/6–30 нормальний	5–20/–/6–30 нормальний	5–20/–/6–30 нормальний
Опір зсуву, τ		9–27/–/10–30 логнормальний	6–29/–/10–30 логнормальний	–/–/20–50 логнормальний
Кут внутрішнього тертя, φ	–/–/5–15 нормальний	–/–/5–15	–/–/12–56	–/–/12–56
Модуль сумісних деформацій (штамповий), E	–/–/15–65 логарифмічно нормальний		15–35/18,6–65,4 логарифмічно нормальний	

2.1 Навантаження від власної ваги конструкцій

Власна вага G елемента конструкції визначається за допомогою наступного співвідношення:

$$G = \int_{Vol} \gamma dV, \tag{2.1}$$

де V – об’єм, що описується межами елемента конструкції;

γ – питома вага матеріалу;

Для елемента, матеріал якого може вважатися досить однорідним, рівняння (2.1) може бути записане в такий спосіб:

$$G = \gamma_{AV} V, \tag{2.2}$$

де $\gamma_{AV} V$ - середнє значення питомої ваги елемента.

[1] У чисельнику наведені дані по М. М. Єрмолаєву і В. В. Міхеєву / дані по А. К. Бугрову і В. К. Шиліну / дані по К. К. Фону ті Калхаві; у знаменнику наведено закон розподілу по Дж. А. Фентону

У таблиці 2.2 наведені середні значення μ_γ і коефіцієнти варіації V_γ для оцінки величини повної мінливості питомої ваги від власної ваги, які можуть бути прийняті в розрахунках; дані значення належать до генеральних сукупностей і отримані з джерел [68, 47, 12, 25] – нормативні документи, В. Д. Райзер, О. І. Вайнберг.

Для великих елементів мінливість питомої ваги може прийматися як $V{\cdot}\rho_0$, де ρ_0 – кореляція між двома сильно віддаленими точками в межах одного елемента; для конструкції в цілому, що складається з безлічі елементів, мінливість може бути позначена як $V{\cdot}\rho_m$, де V характеризується повною мінливістю згідно з таблицею 2.2. При цьому ρ_0 = 0,85, а ρ_m = 0,70.

Таблиця 2.2 – Середні значення і коефіцієнти варіації значень питомої ваги деяких будівельних матеріалів

Матеріал	Од. вим.	μ_γ	V_γ
Цегляна кладка з керамічної повнотілої цегли	кН/м^3	17	0,05
Цегляна кладка із силікатної повнотілої цегли	кН/м^3	18	0,05
Бетон	кН/м^3	24	0,03

У більшості випадків середні значення розмірів можуть вважатися рівними їх номінальним значенням, таким чином, середні значення об’єму V елементів конструкції розраховується із середніх значень розмірів.

Величина стандартного відхилення значення об’єму V розраховується безпосередньо за величинами стандартних відхилень розмірів. Величини стандартних відхилень розмірів поперечного перерізу для матеріалів і конструкцій, що розглядаються в роботі, наведені в таблиці 2.3.

Згідно з [67], характеристичне значення для постійного навантаження, основну частку якого складає власна вага конструкцій, приймають рівним номінальному проєктному значенню, що відповідає 50 % квантилі розподілу, тобто $\mu_G = G$.

Таблиця 2.3 – Середні значення і стандарти відхилення для дисперсії розмірів поперечного перерізу від їх номінального значення

Конструкція або елемент конструкції	Среднє значення	Стандартне відхилення
Неоштукатурені елементи цегляної кладки	$0{,}02a_{nom}$	$0{,}04a_{nom}$
Оштукатурені елементи цегляної кладки	$0{,}02a_{nom}$	$0{,}02a_{nom}$
Елементи з бетону $a_{nom} \leq 1\ 000$ мм	$0{,}003a_{nom}$	$4 + 0{,}006a_{nom}$
Елементи з бетону $a_{nom} > 1\ 000$ мм	3 мм	10 мм

Імовірнісні моделі постійного навантаження, прийняті при калібруванні окремих коефіцієнтів Єврокодів:

– $\mu_G = 1{,}0\ G_k$, $V_G = 0{,}1$;

– $\mu_G = 1{,}05\ G_k$, $V_G = 0{,}07$ [74];

– $\mu_G = 1{,}05\ G_k$, $V_G = 0{,}1$ [60].

У технічному звіті SAKO [71] постійне навантаження було розділене на навантаження від власної ваги і від інших постійних навантажень (коефіцієнт варіації 0,1). Даний підхід є більш реалістичним і методологічно більш правильним, ніж застосування одного значення коефіцієнта варіації.

При ймовірнісних розрахунках найбільш часто використовується значення коефіцієнта варіації рівне $V_G = 0{,}1$, що являє собою верхнє значення даного коефіцієнта (табл. 2.4).

Таблиця 2.4 – Параметри розподілу навантажень від власної ваги

Навантаження від	Позн.	Од. вим.	μ_G	V_G	Закон розподілу
Цегляної кладки з цегли М150 на бетонному розчині М100	$\rho_{КК}$	кг/м^3	G	0,1	нормальний
Конструкцій бетонних перекриттів	$P_{ЗБК}$	кг/м^3	G	0,05	нормальний

2.2 Корисне навантаження

Корисні навантаження являють собою особливий вид тимчасових навантажень, природа яких пов'язана з експлуатаційним призначенням будівлі (приміщення). Корисні навантаження являють собою випадкову функцію (процес), що залежить від часу й простору.

Вивченню корисного навантаження присвячені роботи таких учених, як П. В. Авраменко [2], А. П. Буличов, Є. І. Десятник, В. Ю. Довейка [28], М. М. Складнєв [52], Б. Й. Снарскис, К. А. Ендем [59], Р. Коротіс [64], Е. С. С. Чу [62], С. Калвер, Б. Еллінґвуд. При цьому корисні навантаження залишаються найменш вивченими. Основна причина – відсутність єдиної методики дослідження корисних навантажень, що ускладнює порівняння й аналіз існуючих даних. Вивчення статистичних параметрів корисного навантаження ускладнюється також великою різноманітністю видів цих навантажень. Проф. С. Ф. Пічугін відзначає відсутність «... *представницьких статистичних даних і ймовірнісних моделей по корисних і технологічних навантаженнях*» [43]. Тому мають місце труднощі при нормуванні значень корисного навантаження, що і є причиною умовного підходу до вибору ймовірнісної моделі корисного навантаження в більшості досліджень по калібруванню окремих коефіцієнтів.

Звичайно при ймовірнісному аналізі корисне навантаження поділяють на два складники: довготривалий (тривалий) і короткочасний. Імовірнісна модель корисних навантажень не має чіткої залежності від територіальних особливостей району будівництва, тому можливе використання даних у ряді інших країн. У більшості робіт, що пов'язані з імовірнісними розрахунками, для ймовірнісної моделі змінних корисних навантажень використовуються статистичні параметри, що опубліковані в нормах JCSS [69], які базуються на ймовірнісних методах розрахунку. Ці моделі добре узгоджуються з дослідженнями Б. Й. Снарскиса, В. Д. Райзера, А. П. Буличова.

Розглянемо статистичні параметри корисного навантаження для будівель різного призначення. Статистичні параметри корисного навантаження для адміністративних будівель досліджені П. В. Авраменко [2]; дані результати засновані на обстеженні робочих приміщень адміністративних будівель у Москві (загальна площа обстеження становила близько 13 000 м^2). Довготривалий складник включав навантаження від меблів, обладнання і постійно працюючого персоналу, короткочасний – від скупчення людей. У таблиці 2.5 наведені статистичні параметри корисного навантаження від приміщень адміністративних будівель.

Таблиця 2.5 – Статистичні параметри корисного навантаження від приміщень адміністративних будівель

Вид навантаження	Од. вим.	Середнє значення	Стандартне відхилення
Параметри довготривалого складника корисного навантаження при різних вантажних площах			
Довготривалий складник при наступних значеннях А:			
– А = 36 м^2	кН/м^2	0,88	0,21
– А = 6 м^2	кН/м^2	0,88	0,40
– А = 3 м^2	кН/м^2	0,88	0,54
Параметри корисного навантаження при вантажній площі А = 27 м^2			
Довготривалий складник	кН/м^2	0,840	0,280
Короткочасний складник	кН/м^2	0,312	0,116
Повне	кН/м^2	1,182	0,204

У роботі В. Ю. Довейка, Б. І. Снарскіса [28] представлені статистичні характеристики корисного навантаження, отримані за результатами обстеження приміщень житлових будинків Каунаса (табл. 2.6).

Результати обстеження офісних приміщень загальною площею 144136 м^2 в Сіднеї (Австралія) представлені Е. С. С. Чу в роботі [61]. Середнє значення довготривалої складової корисного навантаження μ = 0,518 кН/м^2, а стандартне відхилення визначається: $\sigma^2 = 0{,}133 + 0{,}798\ k/A$, де k – коефіцієнт, що залежить від форми функції впливу, A – вантажна площа.

Таблиця 2.6 – Статистичні параметри корисного навантаження від приміщень житлових будівель

Вид навантаження для житлового приміщення	Од. вим.	Середнє значення	Стандартне відхилення
Максимальне всієї квартири	кН/м^2	0,818	0,222
Максимальне для однієї кімнати	кН/м^2	0,970	0,254
Від меблів	кН/м^2	0,304	0,088

У роботі К. А. Ендем [59] представлені результати обстеження офісних приміщень загальною площею 21 360 м^2 (середня площа приміщення 20 м^2) і отримані статистичні параметри корисного навантаження для приміщень даного призначення (табл. 2.7).

Таблиця 2.7 – Статистичні параметри корисного навантаження для офісних приміщень

Площа приміщення, м^2	Од. вим.	Загальна площа, м^2	Середнє значення	Стандартне відхилення
$A \le 10$	кН/м^2	710,6	0,441	0,273
$10 < A \le 20$	кН/м^2	7845,9	0,330	0,183
$20 < A \le 50$	кН/м^2	11630,8	0,291	0,194
$50 < A \le 80$	кН/м^2	810,4	0,406	0,176
$A > 80$	кН/м^2	362,3	0,425	0,95
Весь діапазон	кН/м^2	21360	0,324	0,20
Примітка. Значення включають навантаження від постійно працюючого персоналу				

Наведемо дані Р. Коротіса [64] і ще одну роботу Е. С. С. Чу [62] з дослідження статистичних параметрів короткочасного корисного навантаження (табл. 2.8).

Найчастіше при аналізі надійності будівельних конструкцій для періоду віднесення 50 років використовується розподіл Гумбеля. Закон розподілу Гумбеля (подвійний експоненціальний розподіл) найчастіше використовується для опису екстремальних значень будь-якого явища і характеризується щільністю ймовірності й інтегральною функцією виду:

Таблиця 2.8 – Статистичні параметри короткочасного складника корисного навантаження для офісних будівель

Вид короткочасного складника	Од. вим.	Середнє значення	Стандарт. відх.	Джерело
Навантаження від перестановки обладнання, меблів	кН/м^2	0,41	0,48	[64]
		0,0015	0,016	[62]
Навантаження від скупчення людей на зборах	кН/м^2	0,49	0,44	[64]
		0,14	0,59	[62]
Навантаження від скупчення людей в надзвичайних ситуаціях	кН/м^2	1,24	1,11	[64]
		0,08	0,49	[62]

$$p(X) = \alpha exp\left[-\alpha(x-u) - e^{-\alpha(x-u)}\right]; \tag{2.3}$$

$$F(X) = exp\left[-exp\left(-\alpha(x-u)\right)\right]. \tag{2.4}$$

Такий розподіл визначається двома параметрами: α й u визначаються через математичне очікування *m(X)* й дисперсію випадкової величини вибірки максимумів за формулами:

$$m = u + \frac{0,577216}{\alpha}; \tag{2.5}$$

$$D(X) = \sigma^2 = \frac{\pi^2}{6\alpha^2}, \text{звідки } \sigma = \frac{1,28255}{\alpha}. \tag{2.6}$$

2.3 Снігове навантаження

Відповідно до рекомендацій Об’єднаного комітету з надійності конструкцій (JCSS) «Імовірнісні модельні норми JCSS» [69] імовірнісна модель снігового навантаження на землі S_g представлена:

– функцією розподілу ймовірностей для загальної тривалості навантаження *T*;

– функцією розподілу ймовірностей для максимального навантаження S_{gmax} для періоду, що дорівнює 1 року.

Функція розподілу ймовірностей, її математичне очікування μ й коефіцієнт варіації V визначаються для випадків морського й континентального клімату. Функції розподілу ймовірностей у цих двох випадках є гамма-розподілами, при цьому значення параметрів повинні ґрунтуватися на результатах місцевих спостережень.

Згідно з Єврокодом [67] й ДБН В.1.2-2:2006 [25], як характеристичне значення снігового навантаження S_k (S_0) прийнято значення, яке перевищується в середньому один раз у 50 років або з річною ймовірністю перевищення 0,02.

Для апроксимації снігового навантаження найбільш широко використовуються перший граничний розподіл Гумбеля, логнормальний розподіл і розподіл Вейбулла. Результати численних досліджень [22] свідчать про можливість опису емпіричних рядів річних максимумів снігового навантаження для кліматичних умов, близьких до України, подвійним експоненціальним законом розподілу Гумбеля. Для нормування характеристичних значень снігового навантаження для території, приміром, Республіки Білорусь і Російської Федерації, використовуються три типи розподілів: Гумбеля, Вейбулла і Фреше (для оцінювання «хвостової» частини розподілу). Такий розподіл дозволяє отримати більш обґрунтовані характеристичні значення снігового навантаження. Проте для аналізу надійності конструкцій, що характеризується дуже малими значеннями ймовірностей, більш безпечним є використання закону Гумбеля, що узгоджується зі сформованою практикою і сучасними тенденціями ймовірнісного опису снігового навантаження в рамках концепції надійності, прийнятої в Єврокодах.

Згідно з Єврокодами, характеристичне значення снігового навантаження на покриття визначається за формулою:

$$S_k = s = \mu_i C_e C_t S_k, \tag{2.7}$$

де μ_i – коефіцієнт форми снігового навантаження;

C_e – коефіцієнт навколишнього середовища;

C_t – температурний коефіцієнт;

S_k – характеристичне значення снігового навантаження на грунт.

Граничне розрахункове значення снігового навантаження на горизонтальну проекцію покриття (конструкції) за ДБН В.1.2-2:2006 [25] обчислюється за формулою:

$$S_m = \gamma_{fm} S_0 C, \qquad (2.8)$$

де γ_{fm} - коефіцієнт надійності за граничним значенням снігового навантаження;

S_0 - характеристичне значення снігового навантаження (в Па), яке відповідає вазі снігового покриву на 1 м^2 поверхні ґрунту, яке може бути перевищено в середньому 1 раз в 50 років. Це характеристичне значення снігового навантаження визначається в залежності від снігового району по карті ДБН чи Додатку Е ДБН. Наприклад, для м. Харкова та Харківської області це значення знаходиться в межах 1 460…1 600 Па (146…160 кг/м^2).

Похибка моделі снігового навантаження визначається мінливістю коефіцієнтів «переходу». Статистичні параметри коефіцієнтів «переходу» від навантаження на поверхні ґрунту до снігового навантаження на покриття не досить вивчені. У більшості робіт імовірнісні моделі коефіцієнтів «переходу» приймаються відповідно до рекомендацій JCSS [69].

Статистичні параметри снігового навантаження на поверхні землі для періоду віднесення 50 років, прийняті в роботах з калібрування окремих коефіцієнтів Єврокодів:

$\mu_S = S_k$, $V_S = 0{,}22$ [73];

$\mu_S = 0{,}7$ кПа, $V_S = 0{,}3$ [74].

В усіх роботах прийнято розподіл Гумбеля.

В. А. Пашинський і С. Ф Пічугін запропонували модель, в якій атмосферні впливи представляються у вигляді квазістаціонарного диференційованого випадкового процесу зі стаціонарною частотною структурою і річним періодом нестаціонарності закону розподілу ординати [43]. Для опису випадкового процесу зміни снігового навантаження на поверхні землі досить задати функцію математичного очікування, а також постійні в часі значення коефіцієнта варіації, коефіцієнта асиметрії та ефективної частоти. Розподіл ординати описується поліномо-експоненціальним законом зі щільністю:

$$p(x) = exp(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3), \tag{2.9}$$

де $a_0, \ldots, a_3$ – змінні у часі параметри, визначені за значеннями математичного очікування, стандарту і коефіцієнта асиметрії в відповідний момент часу.

Статистичні характеристики описаної ймовірнісної моделі снігового навантаження на поверхні землі обчислені за даними понад 100 метеостанцій, що розташовані на території України й у деяких інших районах СНД. Завдяки достатній інформаційній забезпеченості ймовірнісна модель квазістаціонарного випадкового процесу широко застосовується при вирішенні задач про спільну дію снігу та інших навантажень на будівельні конструкції.

2.4 Навантаження від вітру

Для опису ймовірнісної моделі вітрового впливу необхідні:

– статистичні характеристики базової швидкості вітру;

– базового швидкісного напору вітру;

– коефіцієнтів «переходу» від базової швидкості вітру до вітрового профілю;

– коефіцієнтів «переходу» від швидкості вітру до вітрового впливу (тиску, силам) на споруду;

– похибки моделей визначення ефектів вітрового впливу (статична, динамічна реакція споруд).

Параметри ймовірнісної моделі вітрового впливу (табл. 2.9) можуть прийматися, виходячи з рекомендацій JCSS [69].

Статистичні параметри вітрового впливу для періоду віднесення 50 років, прийняті в роботах з калібрування окремих коефіцієнтів Єврокодів:

μ_W = 0,7 W_k, V_W = 0,35 [65];

μ_W = 0,9 W_k, V_W = 0,34 [60];

μ_W = 1 кПа, V_W = 0,3 [74].

Таблиця 2.9 – Статистичні параметри вітрового навантаження по JCSS

Вид навантаження	Позн.	Од. вим.	μ_S/S_k	V_W	Закон розпод.
Швидкісний напір	W	кН/м^2	1,00 – 1,04	0,13 – 0,15	Гумбеля
Похибка моделі вітрового впливу			0,7 – 0,8	0,28 – 0,3	Логнор-мальне
Вітровий вплив (з урахуванням похибки моделювання)			0,7 – 0,8	0,31 – 0,34	Гумбеля

2.5 Впливи від нерівномірних осідань

Впливи від нерівномірних осідань F_D також можуть бути прийняті у відповідності з нормальним законом розподілу, який характеризується математичним очікуванням μ_D і середньоквадратичним відхиленням σ_D. Вертикальні зсуви фундаменту задаються навантаженнями відповідно до [50]:

$$P_z = \frac{\Delta_z B_z}{l}, \tag{2.10}$$

де l = 1 см;

Δ_z – вертикальне зміщення фундаментів, см:

$$B_z = K_z A l; \tag{2.11}$$

де K_z – коефіцієнт жорсткості основи на стиск, Н/см^3:

$$K_z = \frac{\omega_z E}{\sqrt{A}(1-\nu^2)}. \tag{2.12}$$

У цій формулі ω_z – безрозмірні коефіцієнти, що визначаються залежно від відношення розмірів сторін підошви фундаменту b/a (a – сторона підошви фундаменту в напрямку горизонтального зрушення ґрунту); ν – коефіцієнт Пуассона ґрунту; A – площа підошви фундаменту, см^2; E – модуль деформації ґрунту, що визначається штамповими випробуваннями, Н/см^2. Тут замість E може бути використаний компресійний модуль деформацій E_k, який визначається випробуванням проб ґрунту основи з уведенням коригуючого (підвищувального) коефіцієнта при консистенції ґрунту $0{,}5 < I_L \leq 1$ відповідно до [27]. Середній модуль по глибині просідаючої товщі визначається виразом:

$$E = \frac{\sum E_{ki} h_i m_{ki}}{H}, \qquad (2.13)$$

де E_{ki}, h_i – модуль деформацій і висота і-го шару ґрунту відповідно;

H – глибина просідаючої товщі, що дорівнює Σh_i;

m_{ki} – перехідний коефіцієнт від компресійних випробувань до штампових.

Навантаження на фундамент визначаються шляхом вирахування зусиль, що викликають зміщення опорного вузла, від зусиль у відповідних елементах, які отримані за розрахунком:

$$R_z = N_z - P_z, \qquad (2.14)$$

де N_z – вертикальне навантаження на фундамент.

ЛЕКЦІЯ 3
ВИПАДКОВІ ЯВИЩА, ВЕЛИЧИНИ ТА ПОДІЇ. МАТЕМАТИЧНА ТА СТАТИСТИЧНА ЙМОВІРНІСТЬ ПОДІЙ

У повсякденному житті нам часто доводиться зустрічатися з різними явищами і фактами, які ми називаємо випадковими. Зокрема, інформація, на основі якої розв'язуються практичні задачі в економіці, зазвичай носить наближений, неточний, випадковий характер. Але й у випадкових фактах за певних умов можуть бути виявлені певні закономірності. Ці закономірності вивчає ***теорія ймовірностей*** [13, 14, 15, 21]. Для розв'язання задач, пов'язаних з аналізом економічної інформації, використовують ймовірнісні та статистичні методи, оскільки характерною особливістю теорії ймовірностей є те, що вона розглядає явища, в яких в тій чи іншій формі присутня невизначеність.

Як і в кожній дисципліні, в теорії ймовірностей існують деякі початкові поняття, які покладені в її основу. Першим таким поняттям є поняття ***випадкової події***. По-перше, під **подією** розуміємо таку дію, про яку можна сказати, що вона відбулась, або відбувається, або може відбутись, або неможлива. Поняття випадкової події пов'язане з заданням певного комплексу умов. Процес реалізації певного комплексу умов називається експериментом. Тепер можемо дати означення випадкової події. **Випадкова подія – це подія, яка може відбутись або не відбутись в результаті здійснення деякого експерименту, тобто в результаті реалізації певного комплексу умов.**

Якщо під час кожної реалізації заданого комплексу умов подія обов'язково відбувається, то вона називається ***вірогідною.*** Якщо ж в результаті експерименту подія обов'язково не відбудеться, то це – ***неможлива подія***.

Випадкова величина (англ. *Random variable*) – величина, можливими значеннями якої є результат випробування випадкового явища. Випадкова величина – одне з основних понять теорії ймовірностей. Випадковою величиною можна назвати будь-яку (не обов'язково чисельну) змінну x, значення якої утворюють множину випадкових елементарних подій {x}. У вигляді функції, випадкова величина повинна бути вимірною.

Зазвичай результати цих випробувань залежать від деяких фізичних змінних, які не мають чіткої визначеності. Наприклад, при підкиданні звичайної монети, кінцевий результат впаде вона аверсом чи реверсом залежить від невизначених фізичних параметрів. Який результат буде зрештою спостерігатися є непевним. Областю визначення випадкової величини є множина можливих результатів. У випадку з монетою, розглядають лише два можливих результатом – вона впаде однією з двох сторін.

Випадкова величина визначається як функція, яка відображає результати у вигляді числових величин (міток), що зазвичай задаються дійсними числами. У даному випадку, існує процедура присвоєння чисельного значення кожному можливому результату експерименту, і на відміну від іменування назвами, ця процедура сама по собі не є випадковою і не є змінною.

Випадкове явище – це явища, які протікають кожен раз по-різному при повторенні дослідження в незмінних умовах. Очевидно, що після одноразового здійснення експерименту, неможливо виявити закономірності, які властиві для конкретної випадкової події. Однак закономірності можна виявити, якщо здійснювати експеримент багаторазово в однакових умовах. Отже, другим з початкових понять теорії ймовірностей є поняття ***масовості явищ (подій)***. Масові явища розглядаються як протилежність до одиничних і масовість може проявлятись: 1) в часі; 2) в просторі; 3) і в часі, і в просторі. Тепер ми можемо остаточно сформулювати, що є предметом теорії ймовірностей.

Предметом теорії ймовірностей є вивчення кількісних закономірностей, характерних для масових однорідних випадкових подій. Теорія ймовірностей є теоретичною базою для математичної статистики. **Предмет математичної статистики – дослідження закономірностей, яким підпорядковані масові випадкові явища, на підставі статистичних даних – результатів спостережень.** Ці закономірності вивчають за допомогою методів теорії ймовірностей.

Число, яке дає кількісну оцінку можливості появи деякої події називають ***ймовірністю*** події. Ймовірність події А позначають Р(А).

Розглядаючи деяке випробування, мислено підраховують у ньому число всіх рівноможливих та попарно несумісних його результатів, які утворюють повну групу подій. Серед них виділяють таку кількість результатів випробування, які є сприятливими для деякої події А ($N(A) = m$).

Ймовірністю появи випадкової події *A* називають відношення числа результатів випробування, сприятливих для *A* – m, до числа всіх рівноможливих, єдиноможливих та попарно несумісних результатів випробування – n:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{3.1}$$

1. Імовірність достовірної події дорівнює одиниці.

У цьому випадку $m = n$, відповідно $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1.$

2. Імовірність неможливої події дорівнює нулю.

У цьому випадку $m = 0$, відповідно $P(A) = \frac{0}{n} = 0.$

3. Імовірність випадкової події $A \subset \Omega$ є додатне число, що лежить у межах від нуля до одиниці, тобто $0 \leq P(A) \leq 1$.

Нехай проведено *n* незалежних випробувань, в кожному з яких подія А може відбутися. Припустимо, що подія А відбулася *m* разів ($m \leq n$).

Число $\frac{m}{n}$ називають *відносною частотою* події А і позначають W(A). Відносну частоту можна знайти тільки після проведення випробування. Спостереження показали, що при достатньо великій кількості випробувань *n* відносна частота $\frac{m}{n}$ проявляє властивість стабільності. Ця властивість полягає в тому, що відносні частоти при різних *n* відрізняються мало і коливаються біля деякого числа. Стале число, навколо якого групуються відносні частоти при достатньо великих *n,* називається ***статистичною ймовірністю***:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}. \tag{3.2}$$

ЛЕКЦІЯ 4 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

У таблицях 4.1, 4.2 та 4.3 викладено деякі поняття і залежності теорії ймовірностей.

Таблиця 4.1 – Додавання ймовірностей несумісних подій

Формулювання	Аналітичний запис
Імовірність об'єднання двох випадкових несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей.	$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$ (4.1)
Якщо випадкові події A_1, A_2,…, A_n попарно несумісні, то імовірність появи хоча б однієї з цих подій дорівнює сумі їх ймовірностей.	$P(A_1 \cup A_2 \cup A_n) =$ $= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n),$ (4.2)
Сума ймовірностей повної групи випадкових подій дорівнює одиниці	$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1,$ (4.3)
Сума імовірності протилежних подій дорівнює одиниці	$\boldsymbol{P(A) + P(\tilde{A}) = 1},$ (4.4)

Таблиця 4.2 – Залежні та незалежні події, умовні ймовірності

Формулювання	Позначення
Випадкові події А та В називаються ***залежними***, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або непояви другої події	
Випадкові події А та В називаються ***незалежними***, якщо імовірність появи однієї події не залежить від появи або непояви іншої	
Імовірність події В, обчислена при умові появи події А, називають умовною імовірністю події В	$P_A(B)$ або $P(B/A)$
Якщо події А та В незалежні, то умовна імовірність дорівнює безумовній імовірності	$P_A(B) = P(B)$

Таблиця 4.3 – Множення ймовірностей

Формулювання	Аналітичний запис
Імовірність сумісної появи двох випадкових подій А та В дорівнює добутку ймовірностей однієї з цих подій та умовної імовірності другої події при умові, що перша подія з'явилася	$P\ (A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) =$ $= P(B) \cdot P_B(A)$
Імовірність сумісної появи двох незалежних випадкових подій А та В дорівнює добутку ймовірностей цих подій	$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$
У випадку скінченої кількості незалежних випадкових подій	$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) =$ $= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$

Теорема. Імовірність появи хоча б однієї із подій A_1, A_2,...A_n, незалежних в сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, … , $\bar{A}_n$:

$$P\ (A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n). \qquad (4.5)$$

Таблиця 4.4 – Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Формулювання	Аналітичний запис
Якщо випадкові події А та В сумісні, то імовірність їх об'єднання дорівнює сумі їх ймовірностей без імовірності їх сумісної появи	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ (4.6)
Якщо події А та В незалежні Якщо події А та В залежні	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$ (4.7) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B)$ (4.8)

Таблиця 4.5 – Формули повної імовірності та Байєса

Формулювання	Формула
Формула повної імовірності Якщо випадково подія А може настати лише сумісно з однією із несумісних між собою подій B_1, B_2, …, B_n, що утворюють повну групу, тоді імовірність події а обчислюється за формулою:	$\mathrm{P(A)} = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{Bk}(A),$ (4.9)
Формула Байєса Вона використовується, коли подія F, яка може настати тільки з однією із гіпотез A_1, A_2, … , A_n, що утворюють повну групу подій, відбулась і необхідно зробити кількісну переоцінку апріорних ймовірностей цих гіпотез $P(A_1)$, $P(A_2)$, … , $P(A_n)$, відомих до випробування, тобто потрібно знайти апостеріорні (після досліду) умовні імовірності гіпотез $P_F(A_1)$, $P_F(A_2)$, … , $P_F(A_n)$	$P_f(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(F)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P_{A_i}(F)},$ (4.10)

Закони розподілу дискретних випадкових величин

1. *Біномний розподіл.* Нехай проводиться $\boldsymbol{n}$ незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність події $\boldsymbol{A}$ дорівнює $\boldsymbol{p}$. Розглянемо випадкову величину $\boldsymbol{X}$, яка визначає число появ події $\boldsymbol{A}$ (число успіхів) у цій серії випробувань. Очевидно, що $\boldsymbol{X}$ може набувати значень 0, 1, 2,..., k,..., n, ймовірність яких обчислюють за формулою Бернуллі:

$$p_k = p(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},\ k = 0,1,\ldots,\ n,\ q = 1 - p. \qquad (4.11)$$

У цьому випадку випадкова величина має біномний розподіл ймовірностей, або розподіл Бернуллі.

Функція розподілу має вигляд:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, & m-1 < x \le m, \quad m = 1,2,\ldots n. \\ 1, x > n & \end{cases} \qquad (4.12)$$

Числові характеристики біномного розподілу

$$M(x) = np, \tag{4.13}$$

$$D(X) = npq, \tag{4.14}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}. \tag{4.15}$$

2. *Розподіл Пуассона.* Якщо число випробувань ***n*** велике, а ймовірність ***p*** досить мала ($p \le 0{,}01$), ймовірність $p_k = p\ (X = k)$ можна обчислити за формулою Пуассона:

$$p_k \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np, k = 0, 1, 2, \dots \tag{4.16}$$

Цей закон розподілу називають розподілом Пуассона або розподілом рідкісних подій. Функція розподілу випадкової величини має вигляд:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & n-1 < x \le n, \ \ n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \tag{4.17}$$

Числові характеристики закону Пуассона:

$$M(X) = D(X) = \lambda. \tag{4.18}$$

3. *Рівномірний дискретний розподіл.* Якщо дискретна випадкова величина набуває кожного свого значення x_k, $k = 1,2,\dots,$ ***n*** з однаковою ймовірністю $p_k = 1/n$, то маємо дискретний рівномірний розподіл ймовірностей. Функція розподілу:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ \frac{m-1}{n}, & x_{m-1} < x < x_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots, n. \\ 1, x > x_n \end{cases} \tag{4.19}$$

4. *Геометричний розподіл.* Дискретна випадкова величина ***X*** має геометричний розподіл ймовірностей, якщо вона приймає значення 1, 2, 3, ..., k,... з ймовірностями $P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$. Функція розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} p \cdot q^{k-1} = p\frac{1-q^{n-1}}{1-q}, \ n-1 < x \le n \end{cases} \tag{4.20}$$

Числові характеристики геометричного розподілу:

$$M(X) = \frac{1}{p}, \tag{4.21}$$

$$D(X) = \frac{q}{p^2}, \quad (4.22)$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}. \quad (4.23)$$

Закони розподілу неперервних випадкових величин

Випадкову величину називають ***неперервною***, якщо множина її можливих значень є проміжком, скінченим чи нескінченим. Задати неперервну випадкову величину таблично неможливо, тому застосовуються аналітичний та графічний способи. Інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини $\boldsymbol{F(x) = P(X < x)}$ є неперервною, диференційованою майже скрізь, за винятком можливо окремих ізольованих точок. До властивостей інтегральної функції, що були перелічені вище, приєднуються ще деякі властивості, а саме:

1. Імовірність того, що неперервна величина $\boldsymbol{X}$ набуває якого-небудь значення $\boldsymbol{x_1}$, дорівнює нулю: $P(X = x_1) = 0$.

2. Для неперервної випадкової величини $\boldsymbol{X}$ при будь-яких a й b, $a < b$, справджуються рівності:

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a). \quad (4.24)$$

Оскільки інтегральна функція неперервної величини є диференційованою функцією, можна розглядати її похідну, яку позначають $f(x)$ і називають *щільністю розподілу неперервної величини*:

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}. \quad (4.25)$$

Графік $f(x)$ називається кривою розподілу. Щільність розподілу має такі властивості:

1. $f(x) \ge 0$ для будь-якого $x \in R$;

2. Імовірність того, що неперервна величина прийме значення з інтервалу $\boldsymbol{(a; b)}$:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx; \quad (4.26)$$

3. $-F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, x \in R$; (4.27)

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$ (4.28)

Наприклад, на рисунку 4.1 показано функції розподілу вертикального навантаження та вертикальної міцності цегляної стіни, на рисунку 4.2 – графіки щільності ймовірності розподілу вертикального навантаження та вертикальної міцності стіни.

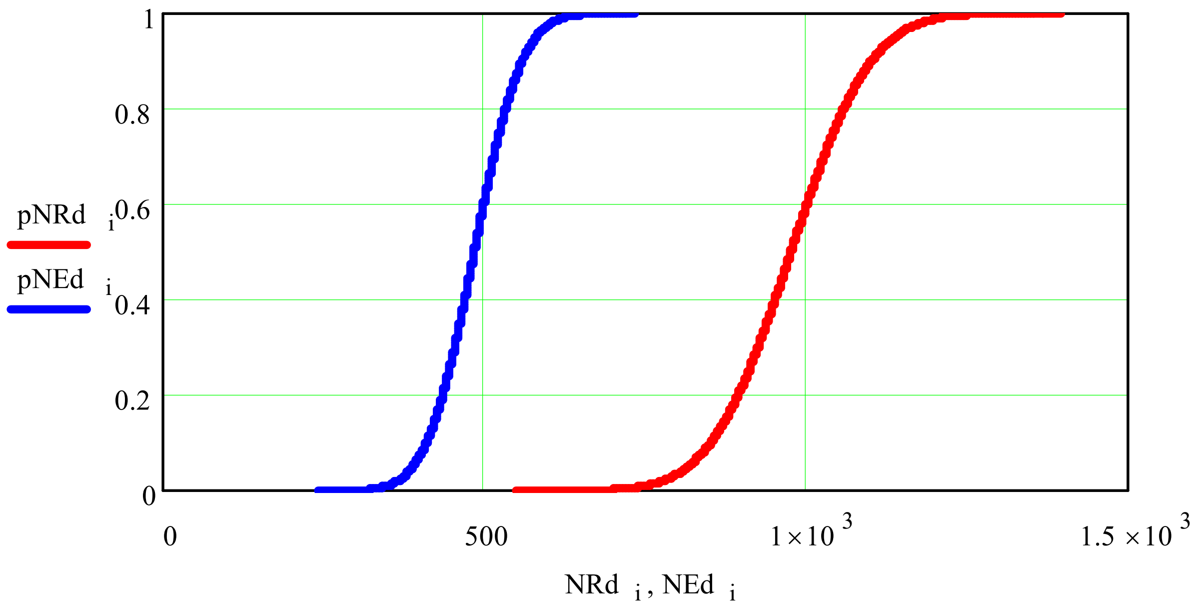

Рисунок 4.1 – Функції розподілу вертикального навантаження N_{Ed} і вертикальної міцності стіни N_{Rd}

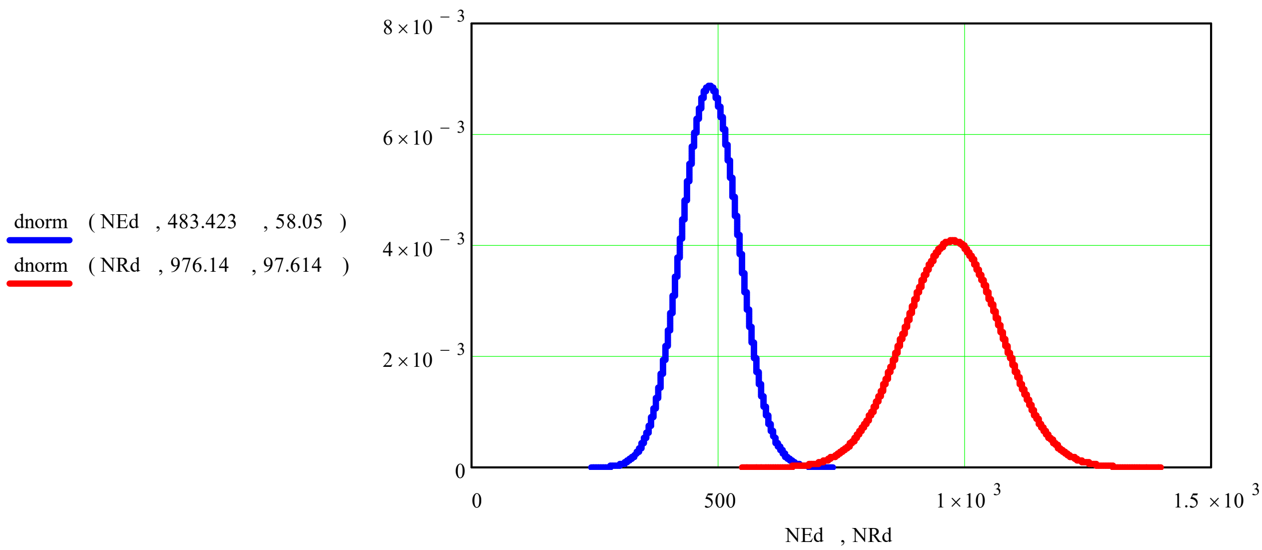

Рисунок 4.2 – Щільності ймовірності розподілу вертикального навантаження N_{Ed} і вертикальної міцності стіни N_{Rd}

Рівномірний розподіл.

Неперервна випадкова величина має рівномірний розподіл на проміжку [a, b], якщо щільність розподілу є стала величина на цьому проміжку і дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \quad \text{або } x > b \\ \frac{1}{b-a}, & a < x < b, \end{cases} \qquad (4.29)$$

де *a, b* – параметри розподілу.

Інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \qquad (4.30)$$

Числові характеристики рівномірного розподілу:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \qquad (4.31)$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}; \qquad (4.32)$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{3}(b-a)}{6}. \qquad (4.33)$$

Ймовірність попадання в інтервал (α, β) дорівнює:

$$P(\propto < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}. \qquad (4.34)$$

Показниковий розподіл.

Неперервна випадкова величина має показниковий розподіл, якщо її щільність розподілу ймовірностей дорівнює:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases} \qquad (4.35)$$

де $\lambda > 0$ – параметр.

Інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases} \qquad (4.36)$$

Показниковий закон має наступні числові характеристики:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \qquad (4.37)$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \qquad (4.38)$$

$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}. \qquad (4.39)$$

Нормальний розподіл (розподіл Гаусса).

Неперервна випадкова величина має нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу дорівнює:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-a)^2}{2a^2}}, \tag{4.40}$$

де *a, σ > 0* – параметри.

Графік функції ***f(x)*** називається кривою нормального розподілу (рис. 4.3).

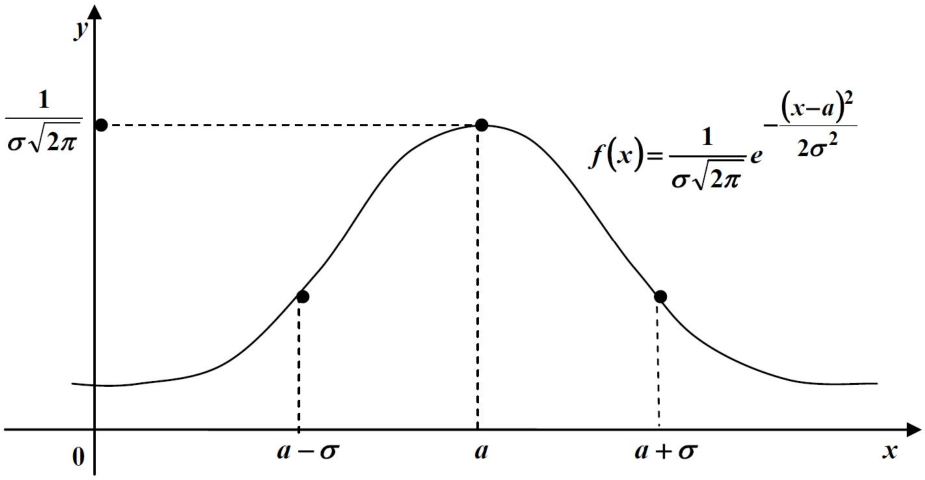

Рисунок 4.3 – Графік функції *f(x)*

Інтегральна функція нормального розподілу має вигляд:

$$F(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \tag{4.41}$$

Числові характеристики нормального розподілу:

$$M(X) = a; \tag{4.42}$$

$$D(X) = \sigma^2; \tag{4.43}$$

$$\sigma(X) = \sigma. \tag{4.44}$$

Отже, параметр ***a*** є математичне сподівання, а ***σ*** - середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини.

Імовірність потрапляння в інтервал *(α, β)*:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\propto}^{\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \tag{4.45}$$

де $\Phi(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функція Лапласа, значення якої містяться у спеціальних таблицях.

Правило 3σ – згідно з ним практично всі значення нормально розподіленої випадкової величини знаходяться в інтервалі *(a - 3σ, a + 3σ)*. Це правило часто використовується в математичній статистиці.

Розглянутий нормальний закон відіграє в теорії ймовірностей важливу роль. Це пояснюється тим, що при деяких припущеннях розподіл суми великого числа випадкових величин виявляється близьким до нормального розподілу.

ЛЕКЦІЯ 5 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕТОДУ ПРОЕКТУВАННЯ КОНСТРУКЦІЙ ТА ОСНОВ СПОРУД ЗА ГРАНИЧНИМИ СТАНАМИ

Руйнування конструкцій будівель і споруд розглядається як настання граничного стану, при якому відбувається вичерпання міцності перерізу або елемента. У методі граничних станів передбачено врахування виходу конструкцій з ладу шляхом уведення забезпеченості нормативних значень, тобто для навантаження – ймовірності того, що воно виявиться меншим, ніж граничне експлуатаційне значення, а для міцності – ймовірності того, що вона буде більшою, ніж характеристичне (нормативне) значення. Тобто всі розрахункові вимоги норм формулюються для граничних станів, які визначають межу між допустимими і неприпустимими (позамежними) станами конструкцій. Перехід через граничний стан відповідає одному з видів відмови.

Граничні стани, які можуть бути віднесені до конструкції в цілому, її окремих елементів, з’єднань або поперечних перерізів, діляться на дві групи.

Відповідно до державних норм, для конструкцій і основ установлені дві групи граничних станів:

– перша група включає граничні стани, які ведуть до повної або часткової втрати несної здатності об’єкта в цілому, а також до повної непридатності до експлуатації його конструкцій;

– друга група включає граничні стани, що утруднюють нормальну експлуатацію конструкцій будівлі або зменшують її довговічність у порівнянні з призначеним строком служби.

У 2009 році на заміну ГОСТ 27751 «Надежность строительных конструкций и оснований» уведений новий нормативний документ ДБН В.1.2-14-2009 «Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель, споруд, будівельних конструкцій та основ», а потім його нова редакція від 2018 р. – ДБН В.1.2-14-2018 [26]. У новому документі застосований дещо інший підхід з обліку відповідальності будівель і споруд, який передбачає врахування можливих економічних і соціальних наслідків при їх відмові (аварії), а також диференційований підхід до розрахунку окремих конструктивних елементів, що мають різний ступінь значимості (відповідальності) в загальній багатоелементній системі будівлі (споруди).

У ДБН В.1.2–14–2018 враховуються умови, в яких реалізується граничний стан. Для цього встановлюються характерні ситуації, які називаються розрахунковими і які визначаються розрахунковою схемою конструкції, переліком граничних станів, котрі слід розглядати, видами впливів, що можуть реалізовуватися в даній розрахунковій ситуації, значенням допустимої ймовірності відмови.

При встановленні допустимої ймовірності слід враховувати, що в різних розрахункових ситуаціях для різних конструктивних елементів ті ж самі граничні стани можуть мати різні наслідки, соціальні втрати та економічні збитки.

Умови забезпечення безвідмовності, згідно з ДБН В.1.2–14–2018, формулюються у вигляді нерівностей, що підлягають перевірці.

$$g(G_d, f_d, a_d, C, \gamma_n, \gamma_d, T_{ef}) \geq 0 , \qquad (5.1)$$

де $g(\bullet)$ – така функція параметрів системи, при якій $g(\bullet) < 0$ означає досягнення позамежного стану;

G_d , f_d, a_d – розрахункові значення навантажень, характеристик міцності матеріалів або опору ґрунту та геометричних характеристик конструкції відповідно;

C – обмеження на контрольований параметр;

γ_n – коефіцієнт надійності з відповідальності (коефіцієнт відповідальності), який враховує значимість конструкції та об’єкта в цілому, а також можливі наслідки відмови і враховується як множник до розрахункового значення навантаження;

γ_d – коефіцієнт надійності моделі, який враховує невизначеність розрахункової схеми;

T_{ef} – термін експлуатації об’єкта.

Для граничних станів першої групи умова (5.1) може бути виражена через дві функції:

– S – ефект навантаження;

– R – несуча здатність елемента або поперечного перерізу.

Тоді гранична нерівність (5.1) може бути записана у вигляді:

$$\gamma_n S (G_d, a_d, \gamma_{sd}, T_{ef}) \leq R (f_d, a_d, \gamma_{rd}, T_{ef}). \tag{5.2}$$

Граничні стани другої групи можуть бути описані нерівністю:

$$S (G_d, f_d, a_d, \gamma_n, \gamma_{sd}, T_{ef}) \leq C/\gamma_{rd}, \tag{5.3}$$

де C – обмеження по експлуатаційній придатності, що відповідають розглянутому граничного стану.

У ДБН розглядається три типи розрахункових ситуацій:

– постійні, для яких характерна тривалість реалізації T_{sit} того ж порядку, що і встановлений термін експлуатації будівельного об'єкта T_{ef} (наприклад, період експлуатації між двома капітальними ремонтами або змінами технологічного процесу);

– перехідні, для яких характерна тривалість реалізації T_{sit} невелика в порівнянні зі встановленим терміном експлуатації T_{ef} (наприклад, період зведення об'єкта, капітального ремонту, реконструкції);

– аварійні, для яких мало вірогідна поява P_{sit} і, як правило, невелика тривалість реалізації $T_{sit} << T_{ef}$, але які є досить важливими з точки зору наслідків можливих відмов (наприклад, ситуації, що виникають під час вибухів, пожеж, аварій устаткування, зіткнень транспортних засобів , а також безпосередньо після відмови будь-якого елемента конструкції).

Розрахункові умови реалізації відмови в узагальненому вигляді записуються у вигляді функції робочої здатності g, яка враховує параметри $\tilde{x}_i$, що характеризують випадкові значення впливів $\tilde{F}$, міцнісних характеристик $\tilde{f}$, геометричних характеристик ã, часу T й інші фактори:

$$g(\tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_n) < 0. \tag{5.4}$$

Основним показником надійності є ймовірність відмови $P_f(T_{ef})$, отже, ймовірність того, що за встановлений час виникне відмова заданого виду:

$$P_f(T_{ef}) = Prob\{g(\tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_n) < 0/T_{ef}\}, \tag{5.5}$$

де символ $Prob\{g(\tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_n) < 0/\mathrm{T}\}$.

Безвідмовність можна також характеризувати дальністю відмови β, що приблизно зв'язана з імовірністю P_f співвідношенням:

$$\beta = \Phi^{-1}(1 - \mathrm{P}_f), \tag{5.6}$$

де Φ(z) – функція нормованого розподілу ймовірностей робочої здатності g.

Нормативні вимоги до безвідмовності формулюються за допомогою розрахункової умови реалізації відмови (5.5) і ймовірності її виконання у вигляді:

$$P_{f,i}(T_{ef}) = Prob\{g_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) < 0/T_f\} \le P_i^{ex}, \tag{5.7}$$

де g_i – функція робочої здатності з відмови і-го виду;

P_i^{ex} – доцільне значення ймовірності відмови і-го виду, яке приймається відповідно до таблиці В.1 ДБН В.1.2-14-2018.

Якщо використовується дальність відмови β, то замість (5.7) приймається умова:

$$\beta_i \ge \beta_i^{ex}, \tag{5.8}$$

де доцільне значення β_i^{ex} для відмови і-го виду приймається згідно з таблицею В.2 ДБН В.1.2–14–2018 або відповідно до прийнятої доцільної ймовірності відмови.

Для забезпечення експлуатаційної надійності основ за нормативною методикою необхідно виконувати розрахунок за деформацією основ, при якому повинна виконуватися умова [27]:

$$s \le s_u, \tag{5.9}$$

де s – спільна деформація основи й споруди, яку визначають одним із способів по [27]; при цьому для котлованів завглибшки менше 5 м вона становить:

$$s = \beta \sum_{i=1}^{n} \frac{(\sigma_{zp,i} - \sigma_{z\gamma,i}) \cdot h_i}{E_i}, \tag{5.10}$$

де β – безрозмірний коефіцієнт, що дорівнює 0,8;

E_i – модуль деформації і-го шару ґрунту по гілці первинного завантаження, кПа;

h_i – товщина елементарного шару;

n – кількість шарів у межах стисливої товщі H_c.

Середні напруги в елементарному шарі:

$$\sigma_{zp,i} = \frac{\sigma_{zi} + \sigma_{z,i+1}}{2}, \; \sigma_{z\gamma,i} = \frac{\sigma_{\gamma i} + \sigma_{\gamma,i+1}}{2}. \qquad (5.11, 5.12)$$

Тут $\sigma_{zp,i}$ – додаткові напруги від зовнішнього навантаження на глибині z:

$$\sigma_{zp} = \alpha \cdot p, \qquad (5.13)$$

де $p = p_{cp}$ – середній тиск під підошвою фундаменту, що дорівнює:

$$p_{cp} = \frac{N}{b \cdot l} + \gamma_{mt} \cdot d + q, \qquad (5.14)$$

N – вертикальне навантаження на рівні верхнього обрізу фундаменту;

b, l – розміри підошви фундаменту, м;

γ_{mt} – середнє значення питомих ваг фундаменту, ґрунту й підлоги, що розташовані над підошвою фундаменту, приймається рівним 20 кН/м^3,

d – глибина закладення, м;

q – навантаження на підлогу;

α – коефіцієнт затухання напруг у залежності від відносної глибини $\zeta = \frac{2 \cdot z}{b}$ і співвідношення сторін фундаменту $\eta = l/b$;

$\sigma_{z\gamma}$ – вертикальні напруги від власної ваги ґрунту, знятого в котловані до рівня підошви фундаменту, на глибині z:

$$\sigma_{z\gamma} = \alpha_{\kappa} \cdot \sigma'_{zg,0}, \qquad (5.15)$$

де $\alpha_к$ знаходиться по таблиці [27]: і залежить від співвідношень

$\zeta = \frac{2 \cdot z}{B_{\kappa}}$ і $\eta = l/b$,

$B_к$ – ширина котловану;

$\sigma'_{zg,0}$ – вертикальна напруга від власної ваги ґрунту, вийнятого з котловану на рівні підошви фундаменту, й дорівнює $\sigma'_{zg,0} = \gamma_{гр} \cdot d_n$,

d_n – глибина закладення фундаменту від рівня природного рельєфу;

s_u – граничне значення спільної деформації основи і споруди, що регламентоване нормами.

При виконанні таких розрахунків згідно з нормативною методикою експлуатаційна надійність системи «будівля – основа» вважається забезпеченою, якщо виконується нерівність (5.9).

ЛЕКЦІЯ 6 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ІНЖЕНЕРНОЇ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНІСНОЇ ОЦІНКИ РІВНЯ НАДІЙНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ ТА ҐРУНТОВИХ ОСНОВ СПОРУД

За О. Р. Ржаніциним [48], задача розрахунку конструкцій на безпеку може бути сформульована у вигляді вимоги про виконання нерівності:

$$R - F > 0, \tag{6.1}$$

де R – узагальнена несна здатність;

F – узагальнений силовий вплив.

Імовірність нерівності (1.4) являє собою ймовірність неруйнування конструкції. Для визначення значення ризику (ймовірності) досягнення граничного стану P_u О. Р. Ржаніциним отримана наступна формула:

$$P_u = \int_{-\infty}^{\infty} p_F(x) \cdot P_R(x) dx = 1 - p_R(x) \cdot P_F(x) dx, \tag{6.2}$$

де $P_R(x)$ і $p_R(x)$ – функція розподілу і функція щільності ймовірності узагальненої несної здатності;

$P_F(x)$ і $p_F(x)$ – функція розподілу і функція щільності ймовірності узагальненого силового впливу.

У разі, коли розподіли узагальненої несної здатності R і узагальненого силового впливу F є близькими до нормальних, нормальний розподіл величини характеризується математичним очікуванням μ і середньоквадратичним відхиленням σ. У такому випадку значення ризику (ймовірності) досягнення граничного стану P_u можна знайти за формулою:

$$P_u = 1 - \Phi(\beta), \tag{6.3}$$

де $\Phi(\beta)$ – інтеграл ймовірностей (функція Лапласа), що визначається за спеціальними таблицями;

β – характеристика безпеки, що рівняється:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_F}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_F^2}}, \tag{6.4}$$

де μ_R, μ_F – математичне очікування факторів R і F відповідно;

σ_R, σ_F – середньоквадратичне очікування факторів R і F відповідно.

У нормах США для розрахунку сталевих конструкцій формула для знаходження характеристики безпеки виглядає таким чином:

$$\beta = \frac{ln\left(\overline{R} / \overline{F}\right)}{\sqrt{V_R^2 + V_F^2}}, \tag{6.5}$$

де V_R та V_F – коефіцієнти варіації випадкових величин несної здатності конструкції $\tilde{R}$ та силового впливу $\tilde{Q}$.

Сучасна теорія надійності, сформульована у роботах В. В. Болотіна, А. В. Перельмутера, С. Ф. Пичугина, О. Р. Ржаніцина, М. С. Стрєлецького базується на таких основних положеннях:

– зовнішні навантаження на споруду, а також і її реакція являють собою *випадкові* процеси, які характеризуються параметрами змінними протягом експлуатації;

– надійність споруди трактується, як ймовірність того, що параметри системи знаходяться у межах певної області. Вихід хоча б деяких параметрів за межі допустимої області є засторогою, щодо подальшої безпечної експлуатації споруди;

– відмови у роботі споруди трапляються в результаті накопичення пошкоджень (дефектів) та її фізичного зносу.

Загальним підходом до визначення надійності передбачається аналіз граничних станів елемента.

ЛЕКЦІЯ 7 МОДЕЛЬ ОЦІНКИ НАДІЙНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ СПОРУД

Модель оцінки надійності елементів споруд, що проектуються, базується на фундаментальному принципі, запропонованому і розвитому в роботах М. С. Стрєлецького та О. Р. Ржаніцина у 40-х роках ХХ-го сторіччя.

Згідно з цим принципом, *надійність елемента визначається, як ймовірність не руйнування,* інакше кажучи, як ймовірність того, що величина узагальненого резерву міцності S(X) буде мати додатне значення:

$$S(\boldsymbol{X}) = R(\boldsymbol{X}) - Q(\boldsymbol{X}),\ S(\boldsymbol{X}) > 0, \tag{7.1}$$

де $R(\boldsymbol{X})$ – випадкова функція узагальненої опірності елемента;

$Q(\boldsymbol{X})$ – випадкова функція узагальненого навантаження елемента,

$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2 \ldots \boldsymbol{X}_n]^{\mathrm{T}}$;

n – мірний вектор незалежних випадкових змінних - топологічних, механічних параметрів елемента та параметрів навантаження.

Зауважимо, що в загальному випадку вектор $\boldsymbol{X}$ є залежним від часу і теорія надійності має моделі в яких $R(\boldsymbol{X})$ та $Q(\boldsymbol{X})$ з (7.1) є функціями випадкових змінних та часу. Проте більш поширеною є модель надійності без врахування фактору часу. Окрім того, без втрати загальності, тут будемо вважати, що функції моделі (7.1) є не випадковими функціями, а *випадковими величинами з заданими законами розподілу*. При цих припущеннях модель (7.1) виглядатиме так:

$$S = R - Q, \quad S \rangle\, 0, \tag{7.2}$$

де R – випадкова величина узагальненої опірності елемента;

Q - випадкова величина узагальненого навантаження елемента;

S – узагальнений резерв міцності, також випадкова величина.

Іншими словами, *узагальненим резервом міцності* називають статистичну різницю між опірністю і навантаженням елемента (рис. 7.1).

Приклади узагальнених опірності і навантаження елемента наведені в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1 – Приклади узагальнених опірності і навантаження

R – узагальнена опірність елемента	*Q – узагальнене навантаження елемента*
Несуча здатність поперечного перерізу за згинальним моментом.	Згинальний момент від постійних і тимчасових навантажень.
Несуча здатність поперечного перерізу за поперечною силою.	Поперечна сила від постійних і тимчасових навантажень.
Встановлена характеристична ширина розкриття тріщин.	Дійсна ширина розкриття тріщин, які викликані навантаженнями і впливами.
Гранична величина прогину балки, встановлена нормами	Дійсна величина прогину балки, викликана навантаженнями

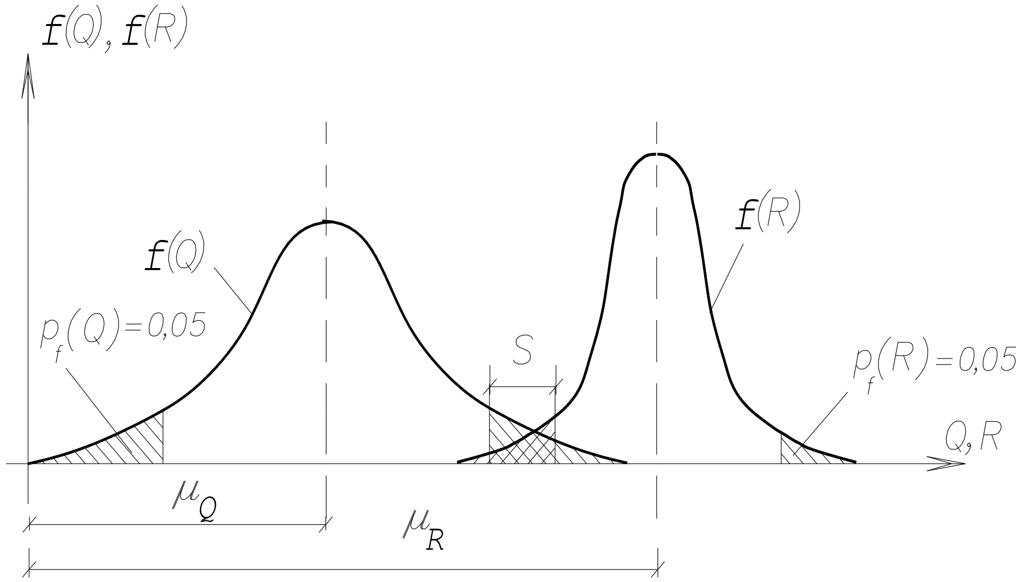

Рисунок 7.1 – Узагальнений резерв міцності

Буде зручним визначати надійність як *ймовірність досягнення граничного стану*, тобто як ймовірність руйнування. Для моделі (7.2)

$$p_f = P(R - Q \le 0). \qquad (7.3)$$

У загальному запису модель надійності виглядає так:

$$p_f = P(G(R\,,\,Q) \le 0), \qquad (7.4)$$

де p_f – ймовірність досягнення граничного стану;

$G(\cdot)$ – функція граничного стану.

Надійність (ймовірність перевищення граничного стану) узагальненої моделі:

$$p_f = P\left[G(\mathrm{x}) \le 0\right] = \int \ldots \int_{G(\mathrm{X}) \le 0} f_{\mathrm{x}}(\mathrm{x})d\mathrm{x}\,, \qquad (7.5)$$

де $f_x(x)$ – функція сумісної щільності розподілу вектора випадкових змінних x.

Якщо змінні вектора **Х** незалежні між собою (не корелюють) - функція сумісної щільності розподілу знаходиться просто, як добуток функцій щільності розподілу кожної з випадкових змінних:

$$f_x(\mathrm{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_i), \tag{7.6}$$

де $f_{x_i}(x_i)$ – функції щільності розподілу випадкових змінних вектора Х.

Інтеграл (7.5) не має аналітичного обчислення, проте існує велика кількість числових методів обчислення. Два з них, найбільш потужних, на наш погляд, наводяться в цьому курсі.

ЛЕКЦІЯ 8 ХАРАКТЕРИСТИКА БЕЗПЕКИ

У 50-х роках О. Р. Ржаніцин [48] для розрахунків надійності споруд запропонував і теоретично обґрунтував параметр, який назвав *характеристикою безпеки*. Цей параметр, математично зв’язаний з ймовірністю через функцію нормального розподілу, виявився зручним інструментом для аналізу надійності і використовувався для обчислення коефіцієнтів надійності будівельних норм проєктування будівель і споруд у СРСР. Зараз характеристика безпеки прийнята, як нормативний параметр за європейськими будівельними нормами з надійності та Єврокодами.

Є усталеним позначати характеристику безпеки грецьким символом β. У літературі англійською чи французькою мовами параметр β називають *індексом надійності* або *безпеки* (англ. *reliability index, safety index*). Ми застосовуємо назву, яку параметру дав О. Р. Ржаніцин.

Характеристика безпеки вводиться, як параметр надійності у випадку нормального розподілу узагальнених опору *R* та навантаження *E.* Резерв несної здатності матиме характеристики розподілу, які отримуються через характеристики розподілу *R* та *Q*:

$$\mu_S = \mu_R - \mu_E;\ \sigma_S^2 = \sigma_R^2 + \sigma_E^2;\ \sigma_S = \sqrt{\sigma_S^2}, \tag{8.1}$$

а сама характеристика безпеки визначається так:

$$\beta = \frac{\mu_S}{\sigma_S}, \tag{8.2}$$

де μ_S – математичне сподівання узагальненого резерву опору елемента;

σ_S – середнє квадратичне відхилення (стандарт) узагальненого резерву опору елемента.

Графічна інтерпретація характеристики безпеки наведена на рисунку 8.1.

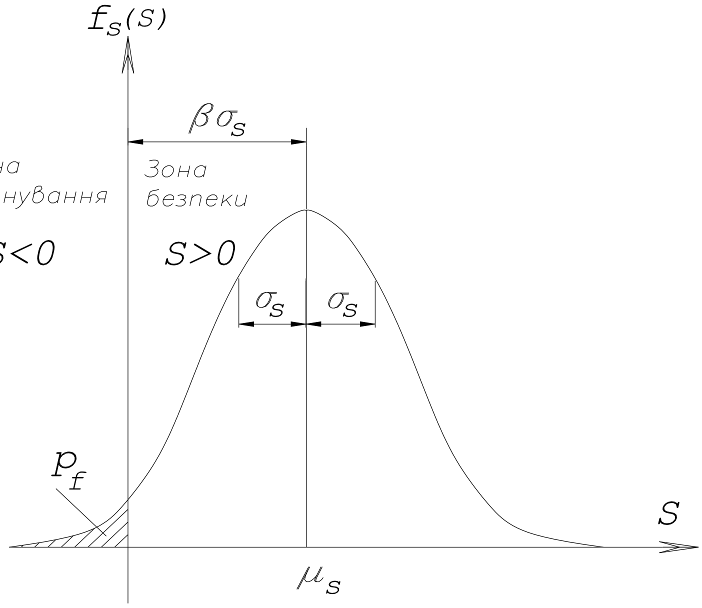

Рисунок 8.1 – Розподіл узагальненого резерву опору елемента

Рівняння для моделі надійності з нормальним законом розподілу записується так:

$$p_f = \mathrm{P}(R - Q \le 0) = \mathrm{P}(S \le 0) = \Phi\left(\frac{0 - \mu_S}{\sigma_S}\right), \tag{8.3}$$

де Φ ( ) – стандартна функція нормального розподілу (середнє дорівнює нулеві і дисперсія одиниці).

Ймовірність перевищення граничного стану

$$p_f = \Phi\left[\frac{-(\mu_R - \mu_E)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}}\right] = \Phi(-\beta), \tag{8.4}$$

Отже, у випадку нормального закону розподілу узагальнених опору *R* та навантаження *E* і як слідство, резерву несної здатності *S*, надійність p_f визначається в функції від характеристики безпеки. При цьому сама характеристика безпеки вираховується через середні значення та дисперсії узагальнених опору *R* та навантаження *E*.

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}}, \tag{8.5}$$

Співвідношення між характеристикою безпеки та надійністю для деяких фіксованих значень p_f наведені в таблиці 8.1.

Таблиця 8.1 – Співвідношення між характеристикою безпеки та надійністю

p_f	0,1	0,05	0,023	0,01	0,001	0,000 5	0,000 03	10^{-5}	10^{-6}
P_f	0,9	0,95	0,977	0,99	0,999	0,999 5	0,999 97	0,999 99	0,999 999
β	1,3	1,64	2,0	2,3	3,1	3,3	4,0	4,2	4,7

Практичний алгоритм визначення надійності елемента

Характеристика безпеки є зручним параметром для практичного визначення надійності елемента, що проектується, чи знаходиться в експлуатації.

Наведемо алгоритм визначення надійності за першою групою граничних станів для елементів, що знаходяться в стані згину.

Вихідні параметри для обчислень:

– характеристичне значення зусилля (сила, момент) в перерізі;
– несуча здатність перерізу за зусиллям (силою, моментом);
– коефіцієнти варіації навантажень;
– коефіцієнти варіації матеріалів.

Алгоритм розрахунку.

1. Вираховуються математичні сподівання узагальненого опору та навантаження, які відповідають коефіцієнтам рівня довіри $\nu_R = 0{,}95$ та $\nu_Q = 0{,}05$ знаходяться за формулами:

$$\mu_R = \frac{R_n}{(1-1{,}64\,V_R)}\ ;\ \ \mu_Q = \frac{Q_n}{(1+1{,}64\ V_Q)}, \tag{8.6}$$

де R_n та Q_n – характеристичні значення опору (несної здатності) та навантаження елемента, відповідно.

1,64 – кількість стандартів, що відділяють характеристичне значення відповідної випадкової змінної від її математичного сподівання; в чинних характеристичних документах, що відповідає забезпеченості характеристичних характеристик матеріалів $\nu_R = 0{,}95$ та характеристичних навантажень $\nu_Q = 0{,}05$.

2. Вираховується γ_0 – математичне сподівання (статистичне середнє) реального коефіцієнту запасу:

$$\gamma_0 = \mu_R / \mu_Q \tag{8.7}$$

3. Отримані величини дають змогу вирахувати значення характеристики безпеки:

$$\beta = \frac{\gamma_0 - 1}{\sqrt{V_Q^2 + \gamma_R^2\, V_R^2}} \tag{8.8}$$

де V_Q – коефіцієнт варіації узагальненого навантаження;

V_R – коефіцієнт варіації узагальненої опірності елемента.

4. За значенням β (8.8) визначається надійність перерізу $p_f = \Phi(-\beta)$.

ЛЕКЦІЯ 9 ОЦІНКА РІВНЯ НАДІЙНОСТІ ҐРУНТОВИХ ОСНОВ СПОРУД. ОСНОВНІ ПЕРЕДУМОВИ І ПОЛОЖЕННЯ. ПРОЄКТНА НАДІЙНІСТЬ ҐРУНТОВИХ ОСНОВ СПОРУД

За *ступінь надійності* (*рівень надійності Н*) основ і фундаментів будинків і споруд доцільно приймати ймовірність P неможливості настання граничних станів протягом строку експлуатації будівлі. Якщо ця ймовірність дорівнює одиниці, то основи і фундаменти цілком надійні, якщо ж Н = 0, то ненадійні (за М. М. Єрмолаєвим та В. В. Міхеєвим [29]).

У загальному вигляді:

$$H = P(Y \geq 0) = P(Y_1 - Y_2 \geq 0), \tag{9.1}$$

де Y – сукупний фактор, що характеризує систему;

Y_1 – внутрішній фактор системи, під яким розуміють несучу здатність основи або граничну деформацію споруди;

Y_2 – зовнішній фактор, під яким розуміють навантаження, осідання, крени тощо.

Наприклад, рівень надійності основ та фундаментів за осіданнями можна визначити за виразом:

$$H = P(F \geq 0) = P(S_u - S), \tag{9.2}$$

де F – функція ризику цього граничного стану, яка означає ймовірність того, що функція ризику не виходить за межі граничних станів.

Для розрахунку рівня надійності за співвідношенням (9.1) необхідно знати закону розподілу випадкових величин Y_1 та Y_2. Ці закони визначають за методами теорії імовірності, вивчивши попередньо статистичні закони розподілу випадкових величин (факторів, що визначають несучу здатність, деформації тощо). Чим більше факторів експериментально досліджено, тим об'єктивнішою буде оцінка надійності основ та фундаментів. Якщо буде встановлено, що чинник Y відповідає нормальному розподілу, то вираз (9.1) приймає вигляд [29]:

$$H = 0{,}5\left[1 + F\left(\frac{1}{\nu_y}\right)\right], \qquad (9.3)$$

де $F\left(\frac{1}{\nu_y}\right)$ – інтеграл імовірності (функція Лапласа), значення якого наведені в статистичних таблицях;

ν_y – коефіцієнт варіації випадкової величини $(Y_1 - Y_2)$, рівний:

$$\nu_y = \sigma_y / m_y, \qquad (9.4)$$

де σ_y – середньоквадратичне відхилення величини $(Y_1 - Y_2)$;

m_y – математичне очікування випадкової величини Y, що відповідає найімовірнішому її значенню.

Отже, для визначення рівня надійності основ і фундаментів необхідно знати m_y та ν_y, які встановлюють через відповідні чисельні характеристики факторів Y_1 та Y_2 за формулами:

$$m_y = m_{y_1} - m_{y_2}; \qquad (9.5)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2}. \qquad (9.6)$$

Величина, зворотна коефіцієнту варіації випадкової величини $(Y_1 - Y_2)$, має назву ***характеристики безпеки***, яка вже згадувалася раніше:

$$u = \frac{1}{\nu_y} = \frac{m_y}{\sigma} = \frac{m_{y_1} - m_{y_2}}{\sqrt{\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2}}. \qquad (9.7)$$

Коефіцієнт запасу (або коефіцієнт надійності) у роботі основ і фундаментів при їх розрахунку за будь-яким граничним станом дорівнює:

$$k = m_{y_1} / m_{y_2}. \qquad (9.8)$$

Тоді:

$$u = \frac{1}{\nu_y} = \frac{k - 1}{\sqrt{\nu_{y_1}^2 k^2 + \nu_{y_2}^2}}. \qquad (9.9)$$

Таким чином, визначивши коефіцієнт запасу k та коефіцієнти варіації факторів Y_1 та Y_2, встановлюють рівень надійності основ і фундаментів *Н*.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Авиром Л. С. Надежность конструкций сборных зданий и сооружений / Л. С. Авиром – М.: Стройиздат, 1971. – 216 с.

2. Авраменко П. В. Временные нагрузки на перекрытия многоэтажных административных зданий / П. В. Авраменко // Строительная механика и расчет сооружений – 1980. – №1. – С. 67 – 71.

3. Аугусти Г. Вероятностные методы в строительном проектировании / Г. Аугусти, А. Баратта, Ф. Кашиати. Пер. с английского Ю. Д. Сухова. – М.: Стройиздат, 1988. – 584 с.

4. Барашиков А. Я. Надійність будівель і споруд: навч. посібник / А.Я. Барашиков, М. Д. Сирота. – Київ: ІСДО, 1993. – 204 с.

5. Бишоп Р. Колебания / Р. Бишоп. Пер. с англ. под ред. Я.Г. Пановко. 2 изд., перераб. – М.: Наука, 1979. – 160 с.

6. Богданофф Дж. Вероятностные модели накопления повреждений / Дж. Богданофф, Ф. Козин. Пер. с англ. С. А. Тимашева / под. ред. С. А. Тимашева. – М.: Мир, 1989. – 344 с.

7. Болотин В. В. О сочетании случайных нагрузок, действующих на сооружение / В. В. Болотин // Строительная механика и расчет сооружений – 1962. – №2. – С. 1 – 5.

8. Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений / В. В. Болотин. – М.: Стройиздат, 1971. – 255 с.

9. Болотин В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций / В. В. Болотин. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.

10. Болотин В. В. Ресурс машин и конструкций. / В. В. Болотин . –М.: Машиностроение, 1990. – 446 с.

11. Винников Ю. Л. Будівельні конструкції: навч. посібник / Ю. Л. Винников, О. О. Довженко, С. Ф. Пічугін, А. О. Дмитренко. – Полтава: ТОВ «АСМІ», 2015. – 400 с.

12. Вайнберг А. И. Надежность и безопасность гидротехнических сооружений. Избранные проблемы: монография / А. И. Вайнберг. – Харьков: 2008. – 304 с.

13. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учеб. пособие для студ. вузов. / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 464 с.

14. Вентцель Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. 2-е изд. / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М.: Высш. шк., 2000. – 383 с.

15. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: учебник для студ. вузов. 10-е изд. / Е. С. Вентцель. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 576 с.

16. Вероятностные модельные нормы JCSS (JCSS Probabilistic Model Code) / пер. с англ., 2001. – 130 с.

17. Винников Ю. Л. Фундаменти будівель і споруд: довідковий посібник / Ю. Л. Винников, В. А. Муха, А. В. Яковлєв та ін. – К., Урожай, 2002. – 432 с.

18. Винников Ю. Л. Імовірнісні методи в геотехніці / Ю. Л. Винников, М. О. Харченко // Зб. наук. праць ПНТУ. – №1(43). – 2015. – С. 93 – 111.

19. Воскобійник О. П. Методологія нормування технічних станів сталезалізобетонних конструкцій: автореф. дис. … докт. техн. наук: 05.23.01 – будівельні конструкції, будівлі і споруди / Воскобійник Олена Петрівна; ПНТУ ім. Юрія Кондратюка. – Полтава, 2014. – 40 с.

20. Геммерлинг А. В. Расчетные критерии предельных состояний / А. В. Геммерлинг // Строительная механика и расчет сооружений. – 1969. – №2. – С. 1 – 4.

21. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для студ. вузов / В. Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1971. – 368 с.

22. Гордеев В. Н. Нагрузки и воздействия на здания и сооружения / В. Н. Гордеев, А. И. Лантух-Лященко, А. В. Махинько, В. А. Пашинский, А.В. Перельмутер, С.Ф. Пичугин / под общ. ред. А.В. Перельмутера. – М.: Изд. АСВ, 2007. – 476 с.

23. ГОСТ 27.002-89. Надежность в технике. Основные понятия. – М., 1990. – 37 с.

24. ГОСТ 27751-88 [СТ СЭВ 384-87]. Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения по расчету. – М., 1988. – 10 с.

25. ДБН В.1.2-2:2006. Навантаження і впливи. Норми проектування. – Київ: Мінбуд України, 2006. – 75 с.

26. ДБН В.1.2–14:2018. Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель, споруд, будівельних конструкцій та основ. – Київ: Мінрегіонбуд України, 2018. – 30 с.

27. ДБН В.2.1-10-2018. Основи і фундаменти будівель та споруд. Основні положення. – Київ: Мінрегіон України, 2018. – 36 с.

28. Довейка В. Ю. Статистические характеристики полезной нагрузки на перекрытия жилых домов / В. Ю. Довейка, Б. И. Снарскис // Вопросы надежности железобетонных конструкций. – Куйбышев, 1973. – С. 107–110.

29. Ермолаев Н. Н., Михеев В. В. Надежность оснований сооружений / Н. Н. Ермолаев, В. В. Михеев. – Л.: Стройиздат, 1976. – 152 с.

30. Кашеварова Г. Г. Программная реализация алгоритма учета статистического разброса механических свойств материалов / Г. Г. Кашеварова // Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. – 2012. – №1. – С. 133 – 141.

31. Коваленко И. Н. Исследования по анализу надежности сложных систем / И. Н. Коваленко. – К.: Наукова думка, 1975. – 210 с.

32. Краковский М. Б. Надежность конструкций, проектируемых по советским и зарубежным нормам / М. Б. Краковский // Бетон и железобетон. М., 1986. – №6. – С. 38 – 41.

33. Лантух-Лященко А. І. До нової редакції ДБН «Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель, споруд, будівельних конструкцій та основ» / А. І. Лантух-Лященко // Промислове будівництво та інженерні споруди : наук.-виробн. журнал. –Київ : ТОВ «Укрінсталькон ім. В.М. Шимановського», 2018. – №1. – С. 1 – 7.

34. Лантух-Лященко А. И. Феноменологическая модель деградации элементов сооружений / А. И. Лантух-Лященко // *Труды международной научно-технической конференции «Вычислительная механика деформируемого твердого тела»*. М.: МИИТ, 2006. – С. 259 – 265.

35. Лантух-Лященко А. І. Марковские модели накопления повреждений / А. І. Лантух-Лященко // Наука и искусство. *Науково-виробничий журнал «Промислове будівництво та інженерні споруди».* Київ, 2009. – № 2. – С. 22 – 25.

36. Лантух-Лященко А. І. Оцінка надійності споруди за моделлю марковського випадкового процесу з дискретними станами / А. І. Лантух-Лященко // *Автомобільні дороги і дорожнє будівництво:* зб. наук. праць. Київ: Український транспортний університет, 1999. – Вип. 57. – С. 183 – 188.

37. Лантух-Лященко А. И. Концепция надежности в Еврокоде / А.И. Лантух-Лященко // *Збірник «Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика».* Київ, 2014. – Вип. 6. – С. 79 – 88.

38. Лычев А. С. Надежность строительных конструкций: учебное пособие / А. С. Лычев. – М.: Изд-во АСВ, 2008. – 184 с.

39. Пашинський В. А. Атмосферні навантаження на будівельні конструкції для території України / В. А. Пашинський. – К.: Сталь, 1999. – 185 с.

40. Перельмутер А. В. Избранные проблемы надежности и безопасности строительных конструкций / А. В. Перельмутер. – М.: Издательство ассоциации строительных вузов, 2007. – 185 с.

41. Перельмутер А. В. Эксплуатационная надежность конструкций зданий и сооружений и нормы проектирования при реконструкции / А.В. Перельмутер. – Киев: Знание, 1991. – 19 с.

42. Перельмутер А. В. Об оценке уязвимости строительных конструкций / А. В. Перельмутер, С. Ф. Пичугин // Инженерно-строительный журнал, 2014. – №5. – С. 5 – 14.

43. Пичугин С. Ф. Надежность стальных конструкций производственных зданий / С. Ф. Пичугин. – Полтава: АСМІ, 2009. – 452 с.

44. Пичугин С. Ф. Ветровая нагрузка на строительные конструкции: монография / С. Ф. Пичугин, А. В. Махинько. – Полтава: АСМІ, 2005. – 342 с.

45. Пичугин С. Ф. Снеговые и гололедные нагрузки на строительные конструкции: монография / С. Ф. Пичугин, А. В. Махинько. – Полтава: АСМІ, 2012. – 460 с.

46. Райзер В. Д. Теория надежности в строительном проектировании: монография / В. Д. Райзер. – М.: АСВ, 1998. – 304 с.

47. Райзер В. Д. Методы теории надежности в задачах нормирования расчетных параметров строительных конструкций / В. Д. Райзер. – М.: Стройиздат, 1986. – 192 с.

48. Ржаницын А. Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность / А. Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1978. – 239 с.

49. Ржаницын А. Р. Применение статистических методов в расчётах сооружений на прочность и безопасность / А. Р. Ржаницын // *Строительная промышленность*, 1952. – № 6. – С. 22 – 25.

50. Руководство по проектированию зданий и сооружений на подрабатываемых территориях: в двух частях. Ч. II. – М.: Стройиздат, 1989. – 437 с.

51. Семко О. В. Імовірнісні аспекти розрахунку сталезалізобетонних конструкцій: монографія / О. В. Семко. – К.: Сталь, 2004. – 316 с.

52. Складнев Н. Н. О методических принципах вероятностного расчета строительных конструкций / Н. Н. Складнев // Строительная механика и расчет сооружений, 1986. – № 3. – С. 12 – 16.

53. Стефанишин Д. В. Про використання законів Гумбеля типу I та Пірсона типу III при прогнозуванні максимальних витрат води / Д. В. Стефанишин // Зб. наук. праць «Гідротехніка», 2014. – Вип. 1(1). – С. 12 – 18.

54. Тимашев С. А. Надежность больших механических систем / С. А. Тимашев. – М.: Наука, 1982. – 184 с.

55. Усаковский С. Б. Прикладные задачи теории сооружений. О новой парадигме теории расчета сооружений: монография / С. Б. Усаковский. – Киев: КНУСА, 2014. – 145 с.

56. Чирков В. П. Прикладные методы теории надежности в расчетах строительных конструкций: учебное пособие / В. П. Чирков. – М.: Маршрут, 2006. – 620 с.

57. Школа А. В. Диагностика портовых сооружений: монография / А. В. Школа. – Одесса, Астропринт, 2010. – 592 с.

58. Шпете Г. Надежность несущих строительных конструкций / Г. Шпете, пер. с нем. – М.: Стройиздат, 1994. – 288 с.

59. Andam K. A. Floor live loads for office buildings. / K.A. Andam // *Building and Environment*. – 1986. – Vol. 21, № 3/4. – P. 211 – 219.

60. Beck A. T. A first attempt towards reliability-based calibration of Brazilian Structural Design codes/ A.T. Beck, Jr. Souza // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.* – 2010. – Vol. XXXII, № 2. – P. 119–127.

61. Choi E. C. C. Live load in office buildings. Lifetime maximum load and the influence of room use / E.C.C. Choi // Proc. *lnstn Civ. Engrs Structs & Bldgs*. – 1992. – Vol. 94, № 3, Aug. – P. 307 – 314.

62. Choi E. C. C. Extraordinary Live Load in Office Buildings. / E.C.C Choi // *J. Structural Ingeneering*. – 1991. – Vol. 117, № 11. – P. 3216 – 3227.

63. Cornell A. C. A Probability Based Structural Code / A. C. Cornell // *ACI Journal*. – 1969. – Vol. 66., No. 12. – P. 46 – 52.

64. Corotis R., Tsay. W., Probabilistic Load Duration Model for Live Loads / R. Corotis, W. Tsay // *J. Structural Ingeneering*. – Eng. 1983. – Vol. 109, № 4. – P. 859 – 874.

65. EN 1990 Eurocode: Basis of structural design / Brussells: European Committee for Standardization, 2002. – 130 p.

66. EN 1990:2001. Eurocode. Basis of structural design. Brussels: CEN, 2002. – 89 p.

67. Eurocode 1. Basis and design and action on structures. CEN, 1991. – 103 p.

68. Eurocode 6. Design of masonry structures. CEN, 2005. – 123 p.

69. JCSS Probabilistic Model Code, Zurich: Joint Committee on Structural Safety, 2001. <www.jcss.byg.dtu.dk>. Date of access: 15.01.2012.

70. Probabilistic Model Code. 12-th draft. Joint Committee on Structural Safety. PART I. BASIS OF DESIGN. JCSS-OSTI/DIA/VROC–10.11.2000. – ETH Zurich. – 64 p.

71. SAKO. Joint Committee of NKB and INSTA-B. NKB Report: 1999:01 E, Basis of Design of Structures. Proposals for modification of Partial Safety Factors in Eurocodes.

72. Safety of Structures. An independent technical expert review of partial factors for actions and load combinations in EN 1990 «Basis of Structural Design»: BRE Client Report № 210297 [Electronic resource]. Building Research Establishment. 2003. – Mode of access: http://www.europeanconcrete.eu. – Date of access: 10.05.2011.

73. Sýkora M. Reliability-based design of roofs exposed to a snow load / M. Sýkora, M. Holicky // In Li, J. – Zhao, Y.-G. – Chen, J. (eds.), Reliability Engineering – Proceedings of the International Workshop on Reliability Engineering

and Risk Management IWRERM 2008, Shanghai, 21–23 August 2008. – Shanghai: Tongji University Press, 2009. – P. 183–188.

74. Vrouwenvelder A. C. W. M. Probabilistic calibration procedure for the derivation of partial safety factors for the Netherlands building codes / A. C. W. M. Vrouwenvelder, A. J. M. Siemes // Delft University of Technology. – 1987. – HERON, 32 (4) – P. 9 – 29.

75. Zotsenko M., Vynnykov Y., Kharchenko M. Evalution of Failure Probability of Soil Cushions. 3rd international Symposium of Geotechnical Risk and Safety (ISGSR), Munich, Germany, 2011. p. 249-259.

Термінологічний словник[2]

Безпека споруди - є характеристика того, як контролюється випадковість відмови споруди, тобто ризику і яким чином ризик обмежується до певного розумного рівня.

Відмова - така подія, яка призводить до порушення нормального функціонування елемента або споруди в цілому.

Вплив - будь-яка причина, в результаті якої в конструкції змінюються внутрішні напруження, деформації або інші параметри стану.

Встановлений термін експлуатації - календарна тривалість експлуатації об’єкта, при досягненні якої його подальше застосування за призначенням допускається лише після спеціального підтвердження роботоздатності.

Граничний стан - стан, за якого подальша експлуатація будівельного об’єкта недопустима, пов’язана з труднощами або недоцільна.

Деградація – незворотні зміни, що погіршують здатність виробу виконувати потрібну функцію, що розвиваються з плином часу.

Довговічність є здатність споруди (елемента) зберігати роботоспроможність до граничного стану при встановленій системі технічного обслуговування.

Експлуатація будівлі (споруди) – використання об’єкта за функціональним призначенням (з проведенням необхідних заходів щодо збереження стану конструкції), за якого він здатен виконувати задані функції, зберігаючі значення параметрів, встановлені вимогами технічної документації.

Ефект впливу – реакція (внутрішні зусилля, напруження, переміщення, деформації) будівельних конструкцій на впливи, що враховуються.

Життєвий цикл експлуатації – період, протягом якого здійснюються інженерні вишукування, проектування, будівництво (в тому числі консервація),

[2] У конспекті лекцій використовуються загальноприйняті терміни, що наведені в чинних нормативних документах, зокрема ДБН В.1.2–14:2018 «Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель, споруд, будівельних конструкцій та основ» [26] та ГОСТ 27.002-89 «Надежность в технике. Основные понятия» [23].

експлуатація (в тому числі поточні ремонти), реконструкція, капітальний ремонт, знесення будівлі або споруди.

Залишковий ресурс – термін служби, який обчислюється від поточного моменту часу.

Квантиль – значення випадкової величини, яке відповідає заданому значенню її інтегральної функції розподілу.

Надійність – здатність елементів споруди виконувати задані функції в певних умовах експлуатації, зберігаючи протягом встановленого часу нормативні експлуатаційні показники. Надійність визначається ймовірністю того, що ***не буде досягнуто*** жодного з розрахункових граничних станів ні в одному з елементів споруди.

Ризик – прийнято визначати термін в два способи: а) ризик є ймовірність втрат викликаних аварійним руйнування споруди; б) ризик є відносна частота втрат.

Функція деградації – залежність, якою визначається рівень деградації в функції часу.

Навчальне видання

НАДІЙНІСТЬ ОСНОВ ТА ФУНДАМЕНТІВ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів очної та заочної форм навчання
другого (магістерського) рівня вищої освіти
за спеціальністю 192 – Будівництво та цивільна інженерія)

Укладач **КІЧАЄВА** Оксана Володимирівна

Відповідальний за випуск *О. В. Кічаєва*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *О. В. Кічаєва*

План 2020, поз. 2Л

Підп. до друку 16.02.2020. Формат 60 *x* 84/16.
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 3,4.
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.