МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

В. В. Бізюк, А. В. Якунін

ЕЛЕМЕНТИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для студентів першого курсу денної та заочної
форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю
141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)*

**Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2021**

УДК 517:621.3

Бізюк В. В. Елементи операційного числення : конспект лекцій для студентів першого курсу денної та заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / В. В. Бізюк, А. В. Якунін; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2021. – 59 с.

Автори:
канд. техн. наук, доц. В. В. Бізюк,
канд. техн. наук, доц. А. В. Якунін

*Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 2 від 26.09.2020 р.*

Конспект лекцій складено з метою допомоги студентам будівельних, електромеханічних та транспортних спеціальностей при підготовці до занять, заліків та іспитів з розділу «Елементи операційного числення» курсу вищої математики. Основою слугували лекції, які викладались на факультетах електропостачання і освітлення міст та транспортних систем і технологій.

ЗМІСТ

Передмова

Операційне числення, розроблене на основі перетворення Лапласа, широко застосовується для розв'язання диференціальних та інших споріднених з ними рівнянь, що описують процеси функціонування різноманітних об'єктів.

Цей конспект лекцій має практичну направленість і призначений для студентів технічних спеціальностей. Його мета – ознайомити з основними поняттями операційного числення та уяснити суть підходу до розв'язання типових задач. Тонкі теоретичні питання і задачі, що вимагають більш глибокої математичної підготовки, виходять за рамки курсу вищої математики і залишаються поза належною увагою. Для їх вивчення, в разі необхідності, треба звернутись до спеціалізованої літератури.

Викладення теоретичного матеріалу доводиться до рівня конкретних рецептів розв'язання типових задач та ілюструється докладними зразками їх практичного застосування, частина яких розрахована на самостійне опрацювання. Вказано на зв'язок операційного числення з курсами теоретичної електротехніки та теорії автоматичного керування. Конспект доповнено типовими вправами для самостійної роботи. У кінці наведено список рекомендованої літератури для бажаючих більш детально і глибоко вивчити операційне числення.

1 ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА

1.1 Оригінал і зображення. Таблиці операційного числення

Оригіналом називається довільна функція *f(t)*, що розглядається на півінтервалі [0; +∞) і має такі властивості:

1) *f(t)* кусково-неперервна на півінтервалі [0; +∞), тобто на будь-якому скінченному інтервалі має скінченне число точок розриву першого роду (скінченних стрибків);

2) існують додатні сталі $a > 0,\ M > 0$ такі, що $|f(t)| < M\,e^{at}$ при довільному значенні t із півінтервалу [0; +∞).

Для таких функцій *f(t)* вводиться оператор Лапласа (перетворення Лапласа) наступним чином:

$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt\ ,$$

де p– параметр, $p>0$.

Оператор – це відображення, що переводить функцію у функцію.

Інтегральний оператор Лапласа кожному оригіналу *f(t)* ставить у відповідність єдину функцію

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt\,,$$

яка називається зображенням.
Позначається

$$L[f(t)] = F(p) \text{ або } f(t) \div F(p), \text{ або } f(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} F(p).$$

Властивості перетворення Лапласа:

1. $L[cf(t)] = cL[f(t)] \quad c = const.$,
2. $L[f(t) + g(t)] = L[f(t)] + L[g(t)]$.

Таблиця 1 – Правила операційного числення

№ п/п	Операція, властивість	Оригінал *f(t)*	Зображення *F(p)*
1	2	3	4
1	Лінійність	$C_1 f_1(t) \pm C_2 f_2(t)$	$C_1 F_1(p) \pm C_2 F_2(p)$
2	Зміщення аргументу зображення (затухання оригіналу)	$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$
3	Зміна масштабу (подібність)	$f(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
4	Зміщення аргументу оригіналу (запізнювання оригіналу)	$f(t-b) \times \eta(t-b)$, $b > 0$	$e^{-bp} F(p)$
5	Випередження аргументу оригіналу	$f(t+b), \quad b > 0$, $t > 0$	$e^{bp}\left(F(p) - \int_0^b e^{-pt} f(t)dt\right)$
6	Диференціювання зображення	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
7	Перша похідна зображення	$t\, f(t)$	$-F'(p)$
8	Зображення похідних оригіналу	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) -$ $- p^{n-2} f'(0) -$ $- pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
9	Зображення першої похідної оригіналу	$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$

Продовження таблиці 1

1	2	3	4
10	Зображення другої похідної оригіналу	$f''(t)$	$p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$
11	Зображення інтеграла від оригіналу	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{p}F(p)$
12	Згортання оригіналів (множення зображень)	$\int_0^t f_1(u)\times$ $\times f_2(t-u)du$	$F_1(p)F_2(p)$
13	Інтегрування зображення	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(z)dz$

Таблиця 2 – Основні оригінали та їх зображення

№ п/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	2	3
1	$\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0;\\ 0, & t<0,\end{cases}$	$\frac{1}{p}$
2	$\eta(t-b)=\begin{cases}1, & t>b\\ 0, & t<b\end{cases}$	$e^{-bp}\cdot\frac{1}{p}$
3	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
4	$\sin bt$	$\frac{b}{p^2+b^2}$
5	$\cos bt$	$\frac{p}{p^2+b^2}$
6	$e^{-at}\sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$
7	$e^{-at}\cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
8	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$

Продовження таблиці 2

1	2	3
9	t	$\frac{1}{p^2}$
10	t^2	$\frac{2}{p^3}$
11	$t\eta(t-b)$	$e^{-bp}\left(b\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right)$
12	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
13	te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
14	$t\sin bt$	$\frac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
15	$t\cos bt$	$\frac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
16	$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - $ $- bt\ \cos bt)$	$\frac{1}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
17	$\sin(bt-\alpha)$	$e^{-\frac{\alpha}{b}p}\times\frac{b}{p^2+b^2}$
18	$\cos(bt-\alpha)$	$e^{-\frac{\alpha}{b}p}\times\frac{p}{p^2+b^2}$
19	$sh\,bt$	$\frac{b}{p^2-b^2}$
20	$ch\,bt$	$\frac{p}{p^2-b^2}$
21	$\delta(t)$	1
22	$\delta(t-b)$	e^{-bp}
23	$\delta^{(n)}(t)$	p^n
24	$\delta'(t)$	p

Теорема. (теорема про поведінку зображень на нескінченності). Нехай *f(t)* – довільний оригінал, *F(p)* - його зображення. Тоді $\lim\limits_{p\to+\infty} F(p)=0$, тобто будь-яке зображення прямує до нуля, коли параметр *p* прямує до нескінченності.

Доведення.

$|f(t)|<Me^{at}$; $a>0$, $M>0$; $p>a$;

$$|F(p)|=\left|\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt\right|\le\int_0^{+\infty}\left|e^{-pt}f(t)\right|dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}|f(t)|dt<$$

$$<\int_0^{+\infty}e^{-pt}Me^{dt}\,dt=M\int_0^{+\infty}e^{-(p-a)t}\,dt=M\lim_{N\to+\infty}\int_0^{N}e^{-(p-a)t}\,dt=$$

$$=M\lim_{N\to+\infty}\left.\left(\frac{e^{-(p-a)t}}{-(p-a)}\right)\right|_0^N=\frac{M}{p-a},$$

бо $e^{-(p-a)N}\to 0$ при $N\to+\infty$ $(p>a)$.

Якщо $p\to+\infty$, то $\dfrac{M}{p-a}\to 0$. Отже, $F(p)\to 0$ при $p\to+\infty$.

Теорема. (теорема єдинності). Якщо дві неперервні функції $f_1(t)$ і $f_2(t)$ мають одне і те ж зображення *F(p)*, то ці функції тотожно рівні, тобто

якщо $f_1(t)\div F_1(p)$; $f_2(t)\div F_2(p)$; $F_1(p)=F_2(p)$, то

$f_1(t)=f_2(t)$.

(Без доведення).

1.2 Одинична ступінчаста функція Хевісайда *η(t)* та її зображення

Функція *η(t)*, яка задається формулою

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0;\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

називається одиничною ступінчастою функцією Хевісайда (рис. 1.1). (Приймаємо *f(t)*=1).

$$L[\eta(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\eta(t)dt=\lim_{N\to+\infty}\int_0^{N}e^{-pt}\cdot 1dt=\lim_{N\to+\infty}\left.\left(-\frac{e^{-pt}}{p}\right)\right|_0^N=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{e^{-pN}}{p}+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p},$$

бо $e^{-pN}\to 0$ при $N\to+\infty$ $(p>0)$.

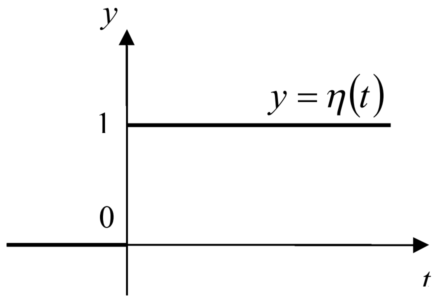


Рисунок 1.1 – Одинична функція Хевісайда

Отже,

$$\eta(t) \div \frac{1}{p} \quad \text{або} \quad 1 \div \frac{1}{p}.$$

Зауваження. Основи операційного числення розробив Хевісайд як інструмент для вивчення характеру проходження сигналів у трансатлантичному телеграфно-телефонному кабелі, що з'єднав Європу і Північну Америку наприкінці XIX століття. За допомогою одиничної функції $\eta(t)$ він описав стандартні сигнали азбуки Морзе (крапка і тире). За Хевісайдом, довільну імпульсну функцію $y = y(t)$, яка скрізь дорівнює нулю, окрім деякого скінченного інтервалу $(\alpha\,;\,\beta)$ (рис. 2)

$$y = y(t) = \begin{cases} 0, & t < \alpha\,; \\ f(t), & t \in (\alpha\,;\,\beta); \\ 0, & t > \beta\,, \end{cases}$$

можна подати однією формулою

$$y = f(t)(\eta(t-\alpha) - \eta(t-\beta)),$$

де $\eta(t-b)$ – одинична функція Хевісайда з запізнюванням

$$\eta(t-b) = \begin{cases} 1, & t > b\,; \\ 0, & t < b\,. \end{cases}$$

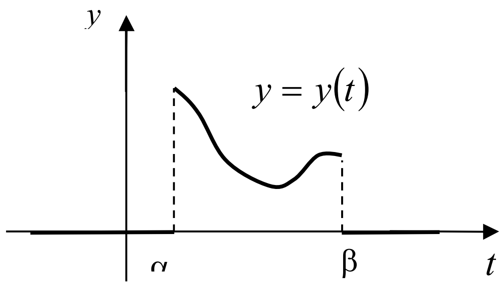


Рисунок 1.2 – Одинична функція Хевісайда з запізненням

1.3 Зображення функцій *sin bt, cos bt*

На основі формули інтегрування

$$\int e^{at} \sin bt\, dt = \frac{-be^{at} \cos bt + ae^{at} \sin bt}{a^2 + b^2}$$

маємо

$$L(\sin bt)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin bt\,dt=\lim_{N\to+\infty}\int_0^N e^{-pt}\sin bt\,dt=$$

$$\lim_{N\to+\infty}\left.\frac{-be^{pt}\cos bt+(-p)e^{-pt}\sin bt}{p^2+b^2}\right|_0^N=$$

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{-be^{-pN}\cos bN-pe^{-pN}\sin bN}{p^2+b^2}-\frac{-b}{p^2+b^2}\right)=\frac{b}{p^2+b^2},$$

бо $e^{-pN}\to 0;\ \cos bN$ і $\sin bN$ - обмежені функції.

Отже,

$$\sin bt \div \frac{b}{p^2+b^2}.$$

Аналогічно, на основі формули інтегрування

$$\int e^{at}\cos bt\,dt=\frac{ae^{at}\cos bt+be^{at}\sin bt}{a^2+b^2}$$

маємо

$$L(\cos bt)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos bt\,dt=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left.\left(\frac{-pe^{-pt}\cos bt+be^{-pt}\sin bt}{p^2+b^2}\right)\right|_0^N=\frac{p}{p^2+b^2}.$$

Отже,

$$\cos bt \div \frac{p}{p^2+b^2}.$$

1.4 Теорема зміщення (затухання)

Теорема. (теорема зміщення (затухання)). Якщо функція $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, тоді функція $F(p+a)$ служить зображенням функції $e^{-at}f(t)$:

$$f(t)\div F(p)\quad\Rightarrow\quad e^{-at}f(t)\div F(p+a).$$

Доведення.

$$L\left(e^{-at}f(t)\right)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-at}f(t)dt=\int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}f(t)dt=F(p+a).$$

1.5 Зображення функцій e^{-at}, $e^{-at}\sin bt$, $e^{-at}\cos bt$

$$1\div\frac{1}{p}\ \Rightarrow\ e^{-at}=e^{-at}\times 1\div\frac{1}{p+a};$$

$$\sin bt\div\frac{b}{p^2+b^2}\ \Rightarrow\ e^{-at}\sin bt\div\frac{b}{(p+a)^2+b^2};$$

$$\cos bt \div \frac{p}{p^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad e^{-at}\cos bt \div \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}.$$

1.6 Теорема про лінійність оператора Лапласа

Теорема. (теорема про лінійність оператора Лапласа).

Зображення алгебраїчної суми двох функцій, помножених на сталі величини, дорівнює відповідній сумі зображень цих функцій, помножених на відповідні сталі

$$L\big(C_1 f_1(t) \pm C_2 f_2(t)\big) = C_1\, L\big(f_1(t)\big) \pm C_2\, L\big(f_2(t)\big),$$

тобто якщо $f(t) = C_1 f_1(t) \pm C_2 f_2(t)$ і $f(t) \div F(p)$, $f_1(t) \div F_1(p)$, $f_2(t) \div F_2(p)$, то $F(p) = C_1 F_1(p) \pm C_2 F_2(p)$.

Доведення:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\big(C_1 f_1(t) \pm C_2 f_2(t)\big)dt = C_1 \int_0^{+\infty} e^{-pt} f_1(t)dt \pm$$

$$\pm\, C_2 \int_0^{+\infty} e^{-pt} f_2(t)dt = C_1 F_1(p) \pm C_2 F_2(p).$$

Приклад. Знайти зображення функції

$f(t) = 3\cos 2t - 5\sin 2t$.

Розв’язання.

$$F(p) = 3L(\cos 2t) - 5L(\sin 2t) = 3\frac{p}{p^2+2^2} - 5\frac{2}{p^2+2^2} = \frac{3p-10}{p^2+4}.$$

Приклад. Знайти оригінал функції

$$F(p) = \frac{5p+8}{p^2+6p+13}.$$

Розв’язання.

$$F(p) = \frac{5p+8}{p^2+6p+13} = \frac{5p+8}{(p+3)^2+2^2} =$$

$$= \left| \frac{p+3}{(p+3)^2+2^2} \div e^{-3t}\cos 2t\ ; \quad \frac{2}{(p+3)^2+2^2} \div e^{-3t}\sin 2t \right| =$$

$$= 5\frac{p+3+\frac{8}{5}-3}{(p+3)^2+2^2} = 5\cdot\frac{p+3}{(p+3)^2+2^2} - \frac{7}{2}\cdot\frac{2}{(p+3)^2+2^2} \div$$

$$\div\, 5e^{-3t}\cos 2t - \frac{7}{2}e^{-3t}\sin 2t = f(t).$$

1.7 Зображення функцій *sh bt, ch bt*

Використовуючи формули

$$sh\,bt = \frac{e^{bt} - e^{-bt}}{2}; \quad ch\,bt = \frac{e^{bt} + e^{-bt}}{2}$$

і зображення

$$e^{-at} \div \frac{1}{p+a}; \quad e^{at} \div \frac{1}{p-a},$$

а також властивість лінійності, маємо

$$sh\,bt = \frac{1}{2}\left(e^{bt} - e^{-bt}\right) \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-b} - \frac{1}{p+b}\right) = \frac{p+b-p+b}{2(p-b)(p+b)} = \frac{b}{p^2-b^2};$$

$$ch\,bt = \frac{1}{2}\left(e^{bt} + e^{-bt}\right) \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p+b}\right) = \frac{p}{p^2-b^2}.$$

Отже,

$$sh\,bt \div \frac{b}{p^2-b^2}; \quad ch\,bt \div \frac{p}{p^2-b^2}.$$

1.8 Теорема подібності (зміни масштабу)

Теорема (теорема подібності (зміни масштабу)).

Якщо функція $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, тоді функція $\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$ служить зображенням функції $f(at)$, де $a > 0$:

$$f(t) \div F(p) \quad \Rightarrow \quad f(at) \div \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right), \quad a > 0.$$

Доведення.

$$L(f(at)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at)\,dt = \left|\, u = at; \;\; t = \frac{u}{a}; \;\; dt = \frac{du}{a}; \right.$$

$$\left. u_н = 0; \;\; u_в = +\infty \,\right| = \int_0^{+\infty} e^{-p\frac{u}{a}} f(u)\frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{a}u} f(u)\,du = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

1.9 Теорема запізнювання (зсув аргументу у оригіналу)

Теорема (теорема запізнювання (зсув аргументу у оригіналу)). Нехай функція $f(t)$ тотожно дорівнює нулю при $t<0$. Якщо $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, то функція $e^{-bp}F(p)$ служить зображенням функції $f(t-b)$, де $b>0$ (рис. 1.3), тобто

$$\text{якщо } f(t) \div F(p), \text{ то } f(t-b) \div e^{-bp}F(p), \quad b>0.$$

Доведення.

$$L(f(t-b)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-b)dt = \int_0^{b} e^{-pt} f(t-b)dt +$$

$$+ \int_b^{+\infty} e^{-pt} f(t-b)dt = \left| \left.\begin{matrix} f(t-b)=0 \\ при \;\; t<b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_0^{b} e^{-pt} f(t-b)dt = 0 \right| =$$

$$= \int_b^{+\infty} e^{-pt} f(t-b)dt = \left| \begin{matrix} u=t-b; & t=u+b; \\ du=dt; \;\; u_н=0; & u_в=+\infty \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-p(u+b)} f(u)du = e^{-bp}\int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u)du = e^{-bp}F(p).$$

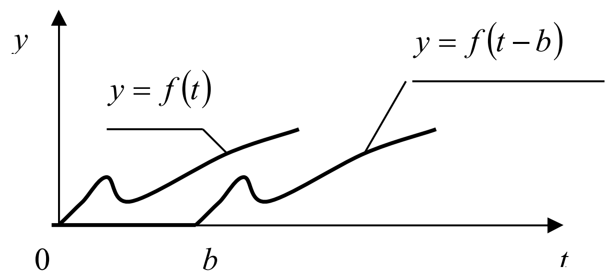


Рисунок 1.3 – Зсув аргументу у оригіналу

Зауваження 1. Для явного врахування умови $f(t-b)=0$ при $t<b$ формулу теореми запізнювання можна подати так

$$f(t-b)\eta(t-b) \div e^{-bp}F(p), \quad b>0,$$

де $\eta(t-b)$ – одинична функція Хевісайда з запізнюванням, при цьому

$$\eta(t) \div \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad \eta(t-b) \div e^{-bp}\cdot\frac{1}{p}.$$

Зауваження 2. Зображенням імпульсної функції (рис.1.2)

$y(t) = f(t)(\eta(t-\alpha)-\eta(t-\beta))$ служить $Y(p)=\int_\alpha^\beta e^{-pt} f(t)dt$. Якщо у виразі для оригіналу $y(t)$ розкрити дужки і сформувати відповідні зсуви аргументу в кожному доданку $y(t)=g(t-\alpha)\eta(t-\alpha)-h(t-\beta)\eta(t-\beta)$, то за теоремою запізнювання $Y(p)$ можна подати у вигляді

$$Y(p)=e^{-\alpha p}G(p) - e^{-\beta p}H(p), \text{ де } g(t) \div G(p); \;\; h(t) \div H(p).$$

Приклад. За відомим зображенням знайти відповідний оригінал:

а) $F(p)=\dfrac{2pe^{-\pi p/3}+2pe^{-2\pi p/3}}{p^2+9}$; б) $F(p)=\dfrac{3e^{-p}-3e^{-2p}}{p+1}$.

а) $F(p)=2e^{-\pi p/3}\cdot\dfrac{p}{p^2+9}+2e^{-2\pi p/3}\cdot\dfrac{p}{p^2+9}\div 2\cos 3(t-$
$-\pi/3)\cdot\eta(t-\pi/3)+2\cos 3(t-2\pi/3)\cdot\eta(t-2\pi/3)=-2\cos 3t\times$
$\times\eta(t-\pi/3)+2\cos 3t\times\eta(t-2\pi/3)=$
$=-2\cos 3t\times(\eta(t-\pi/3)-\eta(t-2\pi/3))=f(t).$

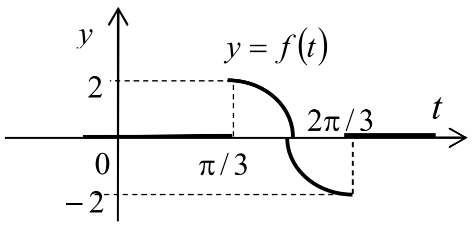


Рисунок 1.4 – Одержаний оригінал

Графік одержаного оригіналу подано на рис. 1.4.

б)
$F(p)=3e^{-p}\dfrac{1}{p+1}-3e^{-2p}\dfrac{1}{p+1}\div 3e^{-(t-1)}\eta(t-1)-$

$-3e^{-(t-2)}\eta(t-2)=3e^{-(t-1)}(\eta(t-1)-e\eta(t-2))=f(t)$

(Графік отриманого оригіналу побудуйте самостійно).

Теорема (теорема випередження).

Якщо $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, то функція $e^{bp}\left(F(p)-\int_0^b e^{-pt}f(t)dt\right)$ служить зображенням функції $f(t+b)$, де $b>0$ і $t>0$ (рис. 1.5).

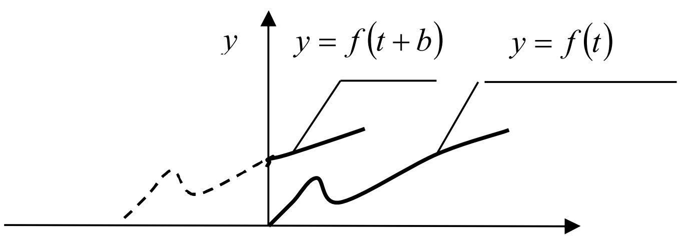


Рисунок 1.5 – Випередження аргументу

Доведення:

$$L(f(t+b))=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t+b)dt=\begin{vmatrix}u=t+b; & t=u-b;\\ du=dt; \ u_н=b; & u_в=+\infty\end{vmatrix}=$$

$$=\int_b^{+\infty}e^{-p(u-b)}f(u)du=e^{bp}\int_b^{+\infty}e^{-pu}f(u)du=\left(\int_b^0 e^{-pu}f(u)du+\right.$$

$$+\int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u)du \Bigg) = e^{bp}\left(-\int_0^b e^{-pu} f(u)du + F(p)\right).$$

1.10 Зображення функцій *sin (bt-α)*, co*s (bt-α)*

Нехай $f(t) \div F(p)$ і $b > 0, \alpha > 0$, тоді застосовуючи послідовно теореми подібності та запізнювання, маємо

$$f(bt-\alpha) = f\left(b\left(t - \frac{\alpha}{b}\right)\right) \div \frac{1}{b} e^{-\frac{\alpha}{b}p} F\left(\frac{p}{b}\right).$$

Використовуючи останнє співвідношення і формули

$$sin\, t \div \frac{1}{p^2+1}, \quad cos\, t \div \frac{p}{p^2+1},$$

одержимо

$$sin(bt-\alpha) \div \frac{1}{b} e^{-\frac{\alpha}{b}p} \times \frac{1}{(p/b)^2+1} = e^{-\frac{\alpha}{b}p} \times \frac{b}{p^2+b^2};$$

$$cos(bt-\alpha) \div \frac{1}{b} e^{-\frac{\alpha}{b}p} \times \frac{p/b}{(p/b)^2+1} = e^{-\frac{\alpha}{b}p} \times \frac{p}{p^2+b^2}.$$

1.11 Диференціювання зображення

Теорема (теорема про диференціювання зображення).

Якщо $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, тоді функція $(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$ служить зображенням функції $t^n f(t)$:

$$f(t) \div F(p) \quad \Rightarrow \quad t^n f(t) \div (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p).$$

Доведення.
Диференціюючи ліву і праву частини формули

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$$

по параметру p, одержимо

$$F'(p) = \frac{d}{dp}\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = \int_0^{+\infty}\left(\frac{d}{dp} e^{-pt}\right) f(t)dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} (-t) e^{-pt} f(t)dt = -\int_0^{+\infty} e^{-pt} t f(t)dt.$$

Отже, $F'(p) \div -tf(t)$ або $tf(t) \div -F'(p)$.

Аналогічно знаходимо другу похідну зображення

$$F''(p)=\frac{d}{dp}\left(-\int_0^{+\infty}e^{-pt}tf(t)\,dt\right)=-\int_0^{+\infty}\left(\frac{d}{dp}e^{-pt}\right)tf(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^2f(t)dt.$$

Отже, $\qquad t^2f(t)\div F''(p).$

Продовжуючи цей процес, на основі методу математичної індукції для довільної n-ної похідної зображення маємо співвідношення

$$t^nf(t)\div(-1)^nF^{(n)}(p).$$

1.12 Зображення функцій *t, tⁿ, t η(t-b), t e⁻ᵃᵗ, tⁿ e⁻ᵃᵗ, t sin bt, t cos bt*

Використовуючи формули для зображення одиничної функції Хевісайда і похідної зображення, одержимо

$$1\div\frac{1}{p}\ \Rightarrow\quad t=t\times 1\div-\left(\frac{1}{p}\right)'=-\left(-\frac{1}{p^2}\right)=\frac{1}{p^2}.$$

Отже,

$$t\div\frac{1}{p^2}.$$

Тоді

$$t^2=t\times t\div-\left(\frac{1}{p^2}\right)'=\frac{2}{p^3}=\frac{1\times 2}{p^3};$$

$$t^3=t\times t^2\div-\left(\frac{2}{p^3}\right)'=\frac{1\times 2\times 3}{p^4}.$$

Продовжуючи цей процес, на основі методу математичної індукції для довільного n маємо співвідношення

$$t^n\div\frac{n!}{p^{n+1}},$$

де $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots n$ – факторіал числа n.

Використовуючи формули для зображення одиничної функції Хевісайда з запізнюванням $\eta(t\text{-}b)$ і похідної зображення, одержимо

$$\eta(t-b)\div\frac{1}{p}e^{-bp}\ \Rightarrow\ t\eta(t-b)\div-\left(\frac{e^{-bp}}{p}\right)'=$$

$$=-\frac{e^{-bp}(-b)p-e^{-bp}}{p^2}=e^{-bp}\left(b\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right).$$

Отже,

$$t\eta(t-b) \div e^{-bp}\left(b\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right).$$

Використовуючи зображення функцій t, t^n і теорему зміщення (затухання), одержимо зображення функцій $t\,e^{-at}$ і $t^n\,e^{-at}$

$$te^{-at} \div \frac{1}{(p+a)^2}; \qquad t^n e^{-at} \div \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}.$$

Використовуючи формули для зображення функцій $\sin bt$, $\cos bt$ і похідної зображення, одержимо

$$sin\,bt \div \frac{b}{p^2+b^2} \Rightarrow t\,sin\,bt \div -\left(\frac{b}{p^2+b^2}\right)' =$$

$$= -b\cdot\frac{-2p}{\left(p^2+b^2\right)^2} = \frac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2};$$

$$cos\,bt \div \frac{p}{p^2+b^2} \Rightarrow t\,cos\,bt \div -\left(\frac{p}{p^2+b^2}\right)' =$$

$$= -\frac{p^2+b^2-2p\cdot p}{\left(p^2+b^2\right)^2} = \frac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}.$$

Отже,

$$t\,sin\,bt \div \frac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}; \qquad t\,cos\,bt \div \frac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}.$$

1.13 Зображення похідних оригіналу

Теорема 9 (теорема про зображення похідної оригіналу). Якщо *F(p)* є зображення функції *f(t)*, тоді функція *p F(p)-f(0)* служить зображенням похідної *f′(t)*:

$$f(t) \div F(p) \quad \Rightarrow \quad f'(t) \div p\,F(p) - f(0).$$

Доведення.

Використовуючи означення перетворення Лапласа і формулу інтегрування частинами, одержимо

$$L(f'(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)dt = \begin{vmatrix} u = e^{-pt}; & du = -pe^{-pt}dt; \\ dv = f'(t)dt; & v = \int f'(t)dt = f(t) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-pt}f(t)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)\times\left(-pe^{-pt}\right)dt = \left|\lim_{t\to+\infty} e^{-pt}f(t) = 0\right| =$$

$$= -f(0) + p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = p\,F(p) - f(0).$$

Отже,

$$f'(t) \div p\,F(p) - f(0).$$

Застосовуючи цю формулу повторно, одержимо

$$L(f''(t)) = L\left((f'(t))' \right) = p\,L(f'(t)) - f'(0) =$$

$$= p(p\,F(p) - f(0)) - f'(0) = p^2 F(p) - p\,f(0) - f'(0).$$

Отже,

$$f''(t) \div p^2 F(p) - p\,f(0) - f'(0).$$

На основі методу математичної індукції для довільної n-ної похідної оригіналу маємо співвідношення

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Зауваження. Формули для зображення похідних спрощуються, якщо всі початкові умови нульові $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$,.... Тоді

$$f(t) \div F(p); \quad f'(t) \div pF(p); \quad f''(t) \div p^2 F(p);$$

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p).$$

2 ВІДШУКАННЯ ОРИГІНАЛУ ЗОБРАЖЕННЯ

2.1 Відшукання оригіналу зображення, що має вигляд раціонального дробу

У загальному випадку, знаходження оригіналу за його зображенням – досить складна задача. Обмежимося лише її розв'язанням за допомогою таблиці відповідності оригіналів та їх зображень. Розглянемо найбільш поширений випадок, коли зображення має вигляд раціонального дробу.

Правило.

Нехай треба знайти оригінал для зображення *F(p)* у вигляді раціонального дробу

$$F(p)=\frac{p_m(p)}{Q_n(p)},$$

де $P_m(p)$ і $Q_n(p)$ – многочлени відповідно степеня m і n.

Тоді:

1) Якщо дріб неправильний $(m \geq n)$ то з нього треба виділити цілу частину.

2) Правильний дріб $(m<n)$ треба розкласти на суму елементарних дробів виду

$$\frac{A}{(p-a)^k};\quad \frac{Bp+C}{\left(p^2+a_1p+a_2\right)^k};\; k\geq 1;\quad D=a_1^2-4a_2<0.$$

3) Знайти оригінали для цілої частини і кожного елементарного дробу, скористатись властивістю лінійності перетворення Лапласа і знайти оригінал початкового дробу.

4) Спростити одержаний вираз.

Приклад 1. Знайти оригінал за його зображенням:

$$F(p)=\frac{3p-11}{(p-1)(p+2)\left(p^2-4p+5\right)}$$

Розв'язання.

$$F(p)=\frac{3p-11}{(p-1)(p+2)\left(p^2-4p+5\right)}=$$

$$=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p+2}+\frac{Cp+D}{p^2-4p+5}=$$

$$=\Big|\; A(p+2)\left(p^2-4p+5\right)+B(p-1)\left(p^2-4p+5\right)+$$

$$+(Cp+D)(p-1)(p+2)=3p-11$$

$$\begin{array}{ll} p=1: & \left\{\begin{array}{l} 6A=-8 \\ -3\cdot 17B=-17 \\ A+B+C=0 \\ 10A-5B-2D=-11 \end{array}\right. \\ p=-2: & \\ p^3: & \\ p^0: & \end{array}$$

$$A=-\frac{4}{3}; \quad B=\frac{1}{3}; \quad -\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+C=0; \quad C=1;$$

$$-\frac{40}{3}-\frac{5}{3}-2D=-11; \quad -40-5-6D=-33;$$

$$-6D=12; \quad D=-2 \; \Big| = \frac{-\frac{4}{3}}{p-1}+\frac{\frac{1}{3}}{p+2}+\frac{1p-2}{p^2-4p+5}=$$

$$=-\frac{4}{3}\times\frac{1}{p-1}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{p+2}+\frac{p-2}{(p-2)^2+1} \div$$

$$\div -\frac{4}{3}e^{t}+\frac{1}{3}e^{-2t}+e^{2t}\cos t=f(t).$$

3 ОПЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД

3.1 Операційний метод розв'язання диференціальних рівнянь та їх систем

Загальна схема методу показана на рис.3.1.

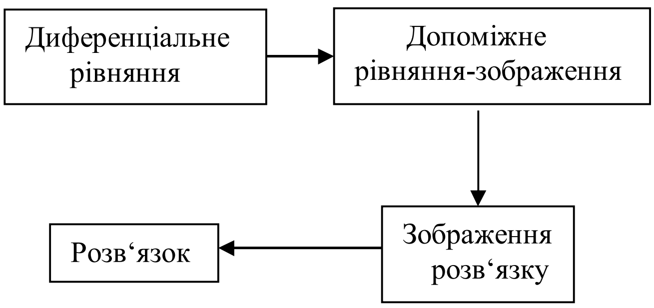


Рисунок 3.1 – Схема методу

Застосування цієї схеми докладно розберемо на прикладах.

Приклад 1 Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку

$$\begin{cases} y'+3y=12t, \\ y(0)=0. \end{cases}$$

Розв’язання.

Нехай $y(t) \div Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p); \quad t \div \frac{1}{p^2}.$$

Одержимо операторну форму диференціального рівняння

$$pY(p) + 3Y(p) = 12 \times \frac{1}{p^2}$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння

$$Y(p)(p+3) = \frac{12}{p^2}\ ; \quad Y(p) = \frac{12}{p^2(p+3)}$$

– зображення шуканого розв’язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{12}{p^2(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+3} =$$

$$= \Big| 12 = Ap(p+3) + B(p+3) + Cp^2\ ;$$

$$\begin{array}{ll} p = 0: & \left\{\begin{array}{ll} 3B = 12; & B = 12/3 = 4; \\ 9C = 12; & C = 12/9 = 4/3; \\ A + C = 0; & A = -C = -4/3; \end{array}\right. \\ p = -3: & \\ p^2: & \end{array}$$

$$\Bigg| = \frac{-\frac{4}{3}}{p} + \frac{4}{p^2} + \frac{\frac{4}{3}}{p+3} = -\frac{4}{3}\frac{1}{p} + 4\frac{1}{p^2} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{p+3} \div$$

$$\div -\frac{4}{3} \times 1 + 4 \times t + \frac{4}{3}e^{-3t} = \frac{4}{3}e^{-3t} + 4t - \frac{4}{3} = y(t).$$

Отже,

$$y(t) = \frac{4}{3}e^{-3t} + 4t - \frac{4}{3}$$

– шуканий розв’язок.

Приклад 2 Розв’язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y'' + 4y = e^{3t} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Розв’язання.

Нехай $y(t) \div Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y''(t) \div p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2; \;\; e^{3t} \div \frac{1}{p-3}.$$

Одержимо

$$p^2Y(p) - 2 + 4Y(p) = \frac{1}{p-3}$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння

$$Y(p)(p^2+4) = \frac{1}{p-3} + 2;$$

$$Y(p)(p^2+4) = \frac{1+2p-6}{p-3}; \qquad Y(p) = \frac{2p-5}{(p-3)(p^2+4)}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{2p-5}{(p-3)(p^2+4)} = \frac{A}{p-3} + \frac{Bp+C}{p^2+4} =$$

$$= \left| \, 2p - 5 = A(p^2+4) + (Bp+C)(p-3); \right.$$

$$\begin{matrix} p=3: \\ p^2: \\ p^0: \end{matrix} \quad \begin{cases} 13A = 1; & A = 1/13; \\ A + B = 0; & B = -A = -1/13; \\ 4A - 3C = -5; & 4/13 - 3C = -5; \; C = 23/13; \end{cases}$$

$$\left| = \frac{1}{13} \times \frac{1}{p-3} + \frac{-\frac{1}{13}p + \frac{23}{13}}{p^2+4} = \frac{1}{13} \times \frac{1}{p-3} - \frac{1}{13}\frac{p}{p^2+2^2} + \right.$$

$$+ \frac{23}{13} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{p^2+2^2} \div \frac{1}{13}e^{3t} - \frac{1}{13}\cos 2t + \frac{23}{26}\sin 2t = y(t).$$

Отже,

$$y(t) = \frac{1}{13}e^{3t} - \frac{1}{13}\cos 2t + \frac{23}{26}\sin 2t$$

– шуканий розв'язок.

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 4 \\ y(0) = 1; \;\; y'(0) = -1 \end{cases}$$

Розв'язання.

Нехай $y(t) \div Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p) - 1; \quad y''(t) \div p^2Y(p) - py(0) -$$
$$- y'(0) = p^2Y(p) - p + 1; \quad 1 \div \frac{1}{p}.$$

Одержимо

$$p^2Y(p) - p + 1 - 2(pY(p) - 1) + Y(p) = 4 \times \frac{1}{p}$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння

$$Y(p)(p^2 - 2p + 1) = \frac{4}{p} + p - 3;$$

$$Y(p)(p-1)^2 = \frac{p^2 - 3p + 4}{p}; \quad Y(p) = \frac{p^2 - 3p + 4}{p(p-1)^2}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{p^2 - 3p + 4}{p(p-1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{(p-1)^2} =$$

$$= \Big| \; p^2 - 3p + 4 = A(p-1)^2 + Bp(p-1) + Cp;$$

$$\begin{matrix} p = 0: \\ p = 1: \\ p^2: \end{matrix} \quad \begin{cases} A = 4; \\ C = 2; \\ A + B = 1; \qquad B = 1 - A = -3 \end{cases}$$

$$\Big| = 4 \times \frac{1}{p} - 3 \times \frac{1}{p-1} + 2 \times \frac{1}{(p-1)^2} \div$$

$$\div 4 - 3e^t + 2te^t = y(t).$$

Отже, $y(t) = 2te^t - 3e^t + 4$ – шуканий розв'язок.

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y'' + 9y = 24\cos 3t \\ y(0) = 0; \; y'(0) = 3 \end{cases}$$

Розв'язання.

Нехай $y(t) \div Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y''(t) \div p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 3;$$

$$\cos 3t \div \frac{p}{p^2+3^2} = \frac{p}{p^2+9}.$$

Одержимо

$$p^2Y(p) - 3 + 9Y(p) = 24 \times \frac{p}{p^2+9}$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння

$$Y(p)(p^2+9) = \frac{24p}{p^2+9} + 3\,; \quad Y(p) = \frac{24p}{(p^2+9)^2} + \frac{3}{p^2+9}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{24p}{(p^2+9)^2} + \frac{3}{p^2+9} = \frac{24}{2\times 3} \times \frac{2p\times 3}{(p^2+3^2)^2} + \frac{3}{p^2+3^2} \div$$

$$\div\, 4t\sin 3t + \sin 3t = y(t).$$

Отже, $y(t) = (4t+1)\sin 3t$ – шуканий розв'язок.

Приклад 5. Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння третього порядку

$$\begin{cases} y''' + 4y'' + 13y' = 0 \\ y(0) = -2;\ y'(0) = 0;\ y''(0) = 13 \end{cases}$$

Розв'язання.

Нехай $y(t) \div Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p) + 2\,; \quad y''(t) \div p^2Y(p) - py(0) -$$

$$- y'(0) = p^2Y(p) + 2p\,; \quad y'''(t) \div p^3Y(p) - p^2y(0) - py'(0) -$$

$$- y''(0) = p^3Y(p) + 2p^2 - 13\,.$$

Одержимо

$$p^3Y(p) + 2p^2 - 13 + 4(p^2Y(p) + 2p) + 13(pY(p) + 2) = 0$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння

$$Y(p)p(p^2+4p+13) = -2p^2 + 13 - 8p - 26\,;$$

$$Y(p) = \frac{-2p^2 - 8p - 13}{p(p^2+4p+13)}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{-2p^2 - 8p - 13}{p(p^2+4p+13)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2+4p+13} =$$

$$= \Big|\ A(p^2+4p+13) + (Bp+C)p = -2p^2 - 8p - 13\,;$$

$$
\begin{array}{ll}
p^2: & \begin{cases} A+B=-2\ ; \\ 4A+C=-8\ ; \\ 13A=-13\ ; \qquad\qquad A=-1 \end{cases} \\
p: & \\
p^0: &
\end{array}
$$

$C=-8-4A=-8+4=-4;\quad B=-2-A=-2+1=-1$

$$
\Bigg| = \frac{-1}{p}+\frac{-1p-4}{p^2+4p+13}=-\frac{1}{p}-\frac{p+2-2+4}{(p+2)^2+3^2}=
$$

$$
\Bigg| = -\frac{1}{p}-\frac{p+2}{(p+2)^2+3^2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{(p+2)^2+3^2}\ \div
$$

$$
\div -1-e^{-2t}\cos 3t-\frac{2}{3}e^{-2t}\sin 3t=y(t).
$$

Отже,

$$
y(t)=-1-e^{-2t}\cos 3t-\frac{2}{3}e^{-2t}\sin 3t
$$

– шуканий розв’язок.

Приклад 6. Розв’язати задачу Коші для системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку

$$
\begin{cases} x'=x+4y; \\ y'=y-x; \end{cases} \qquad x(0)=0\ ; \quad y(0)=1.
$$

Розв’язання.

Нехай $x(t)\div X(p)$; $y(t)\div Y(p)$ – відповідно оригінали та зображення шуканого розв’язку. Перейдемо в диференціальній системі до зображень

$x'(t)\div pX(p)-x(0)=pX(p)$;

$y'(t)\div pY(p)-y(0)=pY(p)-1$.

Одержимо операторну форму диференціальної системи

$$
\begin{cases} pX(p)=X(p)+4Y(p) \\ pY(p)-1=Y(p)-X(p) \end{cases}
$$

– допоміжна система-зображення. Розв’яжемо цю лінійну алгебраїчну систему, наприклад, за формулами Крамера

$$
\begin{cases} (p-1)X(p)-4Y(p)=0\ ; \\ X(p)+(p-1)Y(p)=1\ ; \end{cases}
$$

$$
\Delta=\begin{vmatrix} p-1 & -4 \\ 1 & p-1 \end{vmatrix}=(p-1)^2+4;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & p-1 \end{vmatrix}=4;
$$

$$
\Delta_2=\begin{vmatrix} p-1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=p-1;
$$

$$X(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{4}{(p-1)^2+4};\quad Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{p-1}{(p-1)^2+4}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$X(p)=2\times\frac{2}{(p-1)^2+2^2}\div 2e^t\,sin\,2t=x(t);$$

$$Y(p)=\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2}\div e^t\,cos\,2t=y(t).$$

Отже,

$$\begin{cases}x(t)=2e^t\,sin\,2t\ ;\\ y(t)=e^t\,cos\,2t\end{cases}$$

– шуканий розв'язок.

Приклад 7. Розв'язати задачу Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases}x'=-y+cos\,t\,;\\ y'=-x+sin\,t\,;\end{cases}\quad x(0)=0;\quad y(0)=0\,.$$

Розв'язання.

Нехай $x(t)\div X(p)$; $y(t)\div Y(p)$ – відповідно оригінали та зображення шуканого розв'язку. Перейдемо в диференціальній системі до зображень

$$x'(t)\div pX(p)-x(0)=pX(p);\quad cos\,t\div\frac{p}{p^2+1};$$

$$y'(t)\div pY(p)-y(0)=pY(p);\quad sin\,t\div\frac{1}{p^2+1}.$$

Одержимо

$$\begin{cases}pX(p)=-Y(p)+\dfrac{p}{p^2+1}\ ;\\ pY(p)=-X(p)+\dfrac{1}{p^2+1}\end{cases}$$

– допоміжна система-зображення. Розв'яжемо цю лінійну алгебраїчну систему, наприклад, методом вилучення (методом Гаусса)

$$\begin{cases}Y(p)=\dfrac{p}{p^2+1}-pX(p);\\ p\left(\dfrac{p}{p^2+1}-pX(p)\right)=-X(p)+\dfrac{1}{p^2+1}\ ;\end{cases}$$

$$X(p)(p^2-1)=\frac{p^2}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+1};$$

$$X(p)=\frac{1}{p^2+1}; \quad Y(p)=\frac{p}{p^2+1}-p\times\frac{1}{p^2+1}=0$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$X(p)=\frac{1}{p^2+1} \div sin\,t=x(t); \quad Y(p)=0 \div 0=y(t).$$

Отже,

$$\begin{cases} x(t)=sin\,t\ ; \\ y(t)=0 \end{cases}$$

– шуканий розв'язок.

Приклад 8. Розв'язати задачу Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} x'+y'-2x-2y=1-2t\,; \\ x''-2y'+x=0\,; \end{cases} \quad x(0)=0; \quad x'(0)=0; \quad y(0)=0\,.$$

Розв'язання.

Нехай $x(t)\div X(p)$; $y(t)\div Y(p)$ – відповідно оригінали та зображення шуканого розв'язку. Перейдемо в диференціальній системі до зображень

$$x'(t)\div pX(p)-x(0)=pX(p); \quad y'(t)\div pY(p)-y(0)=$$

$$=pY(p); \quad x''(t)\div p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p);$$

$$t\div\frac{1}{p^2}; \quad 1\div\frac{1}{p}.$$

Одержимо

$$\begin{cases} pX(p)+pY(p)-2X(p)-2Y(p)=\dfrac{1}{p}-2\times\dfrac{1}{p^2}\ ; \\ p^2X(p)-2pY(p)+X(p)=0 \end{cases}$$

– допоміжна система-зображення. Розв'яжемо цю лінійну алгебраїчну систему, наприклад, методом вилучення (методом Гаусса)

$$\begin{cases} (p-2)X(p)+(p-2)Y(p)=\dfrac{p-2}{p^2}\ ; \\ (p^2+1)X(p)-2pY(p)=0\ ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(p)+Y(p)=\dfrac{1}{p^2}\ ; \\ (p^2+1)X(p)-2pY(p)=0\ ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{1}{p^2} - Y(p) \ ; \\ (p^2+1)\left(\dfrac{1}{p^2} - Y(p)\right) - 2pY(p) = 0 \ ; \end{cases}$$

$$-Y(p)(p^2+1+2p) = -\frac{p^2+1}{p^2};$$

$$Y(p)(p+1)^2 = \frac{p^2+1}{p^2}; \quad Y(p) = \frac{p^2+1}{p^2(p+1)^2};$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{p^2+1}{p^2(p+1)^2} = \frac{(p+1)^2 - (p^2+1)}{p^2(p+1)^2} = \frac{2}{p(p+1)^2}$$

– зображення шуканого розв’язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$X(p) = \frac{2}{p(p+1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2} =$$

$$= \Big| \ A(p+1)^2 + Bp(p+1) + Cp = 2 \ ;$$

$$\begin{matrix} p = 0: \\ p = -1: \\ p^2: \end{matrix} \quad \begin{cases} A = 2 \ ; \\ C = -2 \ ; \\ A + B = 0 \ ; \quad B = -A = -2 \ ; \end{cases}$$

$$\Big| = \frac{2}{p} + \frac{-2}{p+1} + \frac{-2}{(p+1)^2} = 2 \times \frac{1}{p} - 2 \times \frac{1}{p+1} - -2\frac{1}{(p+1)^2} \quad \div$$

$$\div 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t} = x(t);$$

$$Y(p) = \frac{p^2+1}{p^2(p+1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{(p+1)^2} =$$

$$= \Big| \ Ap(p+1)^2 + B(p+1)^2 + Cp^2(p+1) + Dp^2 = p^2 + 1 \ ;$$

$$\begin{matrix} p = 0: \\ p = -1: \\ p^3: \\ p^2: \end{matrix} \quad \begin{cases} B = 1 \ ; \\ D = 2; \\ A + C = 0; \\ 2A + B + C + D = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \ ; \\ 2A + 1 + C + 2 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -C \ ; \\ 2A + 1 + C + 2 = 1; \end{cases}$$

$$2C + C + 2 = 0 \ ; \quad C = 2 \ ; \quad A = -2;$$

$$\Big| = \frac{-2}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} = -2 \times \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + 2 \times \frac{1}{p+1} +$$

$$+2\frac{1}{(p+1)^2} \div -2+t+2e^{-t}+2te^{-t}=y(t)$$

Отже,

$$\begin{cases} x(t)=2-2e^{-t}-2te^{-t}\ ; \\ y(t)=-2+t+2e^{-t}+2te^{-t} \end{cases}$$

– шуканий розв’язок.

3.2 Розв’язання диференціальних рівнянь з правою частиною, що містить запізнювання

Єдина особливість застосування операційного числення для розв’язання таких рівнянь полягає в необхідності врахування запізнювань при переході від зображення шуканого розв’язку до його оригіналу. Для цього треба:

1) в зображенні розв’язку згрупувати члени, що відповідають однаковим запізнюванням, і винести відповідний експоненційний множник e^{-bp} за дужки;

2) вираз у кожних дужках подати у вигляді лінійної комбінації табличних зображень;

3) знайти оригінал для кожного зображення в дужках і врахувати відповідні запізнювання.

Приклад 1. Розв’язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y''+9y=f(t) \\ y(0)=2\ ;\quad y'(0)=-3\ , \end{cases}$$

де права частина *f(t)* задана графічно (рис 3.2).

Розв’язання.

Виходячи з графіка, виразимо функцію *f(t)* аналітично

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t\in(-\infty;\,0); \\ 3t, & t\in(0;\,2); \\ 2, & t\in(2;\,5); \\ 0, & t\in(5;\,+\infty). \end{cases}$$

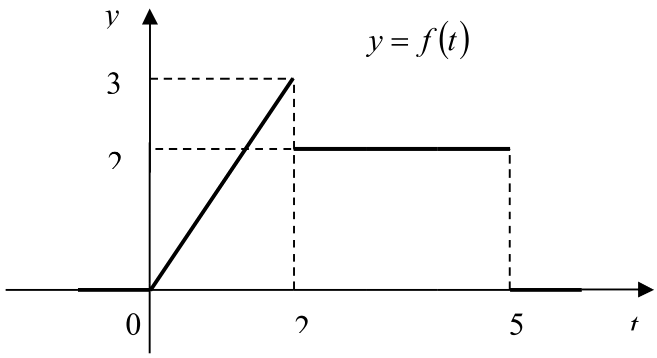


Рисунок 3.2 – Графік правої частини

Застосовуючи одиничну функцію Хевісайда, запишемо функцію *f(t)* однією формулою

$$f(t)=3t\left(\eta(t)-\eta(t-2)\right)+2\left(\eta(t-2)-\eta(t-5)\right).$$

Отже, права частина *f(t)* містить запізнювання.

Нехай $y(t)\div Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень

$$y''(t)\div p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-2p+3;$$

$$f(t)=3t-3t\eta(t-2)+2\eta(t-2)-2\eta(t-5)\div$$

$$\div 3\cdot\frac{1}{p^2}-3\left(2\cdot\frac{e^{-2p}}{p}+\frac{e^{-2p}}{p^2}\right)+2\cdot\frac{e^{-2p}}{p}-2\cdot\frac{e^{-5p}}{p}=$$

$$=\frac{3}{p^2}-e^{-2p}\cdot\frac{4p+3}{p^2}-e^{-5p}\cdot\frac{2}{p}=F(p).$$

Одержимо

$$p^2Y(p)-2p+3+9Y(p)=\frac{3}{p^2}-e^{-2p}\cdot\frac{4p+3}{p^2}-e^{-5p}\cdot\frac{2}{p}$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння

$$Y(p)\left(p^2+9\right)=\frac{2p^3-3p^2+3}{p^2}-e^{-2p}\cdot\frac{4p+3}{p^2}-e^{-5p}\cdot\frac{2}{p};$$

$$Y(p)=\frac{2p^3-3p^2+3}{p^2\left(p^2+9\right)}-e^{-2p}\cdot\frac{4p+3}{p^2\left(p^2+9\right)}-e^{-5p}\cdot\frac{2}{p\left(p^2+9\right)}$$

– зображення шуканого розв’язку.

Розкладаючи кожний раціональний дріб окремо в суму елементарних дробів, одержимо

$$Y(p)=\left(\frac{A_1}{p}+\frac{B_1}{p^2}+\frac{C_1p+D_1}{p^2+9}\right)-e^{-2p}\left(\frac{A_2}{p}+\frac{B_2}{p^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{C_2p+D_2}{p^2+9}\right)-e^{-5p}\left(\frac{A_3}{p}+\frac{B_3p+C_3}{p^2+9}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2}+2\cdot\frac{p}{p^2+9}-\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9}\right)-$$

$$-e^{-2p}\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{4}{9}\cdot\frac{p}{p^2+9}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9}\right)-$$

$$-e^{-5p}\left(\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{p}-\frac{2}{9}\cdot\frac{p}{p^2+9}\right).$$

Застосовуючи таблицю відповідності оригіналів та їх зображень і теорему запізнювання, знайдемо оригінал шуканого розв’язку

$$y(t)=\frac{1}{3}t+2\ cos\,3t-\frac{10}{8}sin\,3t-\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{3}(t-2)-\right.$$

$$\left.-\frac{4}{9}\ cos\,3(t-2)-\frac{1}{9}\ sin\,3(t-2)\right)\eta(t-2)-\left(\frac{2}{9}-\frac{2}{9}\ cos\,3(t-5)\right)\eta(t-5).$$

3.3 Зображення інтеграла від оригіналу

Теорема (теорема про зображення інтеграла від оригіналу). Якщо *F(p)* є зображення функції *f(t)*, тоді функція $\frac{1}{p}F(p)$ служить зображенням інтеграла $\int_0^t f(u)du$:

$$f(t)\div F(p)\quad\Rightarrow\quad\int_0^t f(u)du\div\frac{1}{p}F(p).$$

Доведення.

Нехай

$$f(t)\div F(p)\ ;\qquad\varphi(t)=\int_0^t f(u)du\ \div\ \Phi(p).$$

Знайдемо похідну інтеграла зі змінною верхньою межею

$$\varphi'(t)=\left(\int_0^t f(u)du\right)'=f(t).$$

Використаємо формулу для зображення похідної оригіналу

$$\varphi'(t)\ \div\ p\Phi(p)-\varphi(0).$$

Але $\quad\varphi(0)=\int_0^0 f(u)du=0$, тому $\quad\varphi'(t)\ \div p\Phi(p).$

Таким чином,

$$\left.\begin{array}{c}f(t)=\varphi'(t)\div p\Phi(p)\\ f(t)\div F(p)\end{array}\right\}\Rightarrow\quad F(p)=p\Phi(p).$$

Отже,

$$\Phi(p)=\frac{1}{p}F(p).$$

Приклад 1. Користуючись теоремою про зображення інтеграла від оригіналу і формулою $cos\,t \div \dfrac{p}{p^2+1}$, знайти зображення функції $sin\,t$.

Розв'язання.

$$sin\,t = \int_0^t cos\,u\,du \div \frac{1}{p} \times \frac{p}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}.$$

Приклад 2. Користуючись теоремою про зображення інтеграла від оригіналу, знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$.

$$F(p) = \frac{1}{p\left(p^2-4p+29\right)}.$$

Розв'язання.

$$F(p) = \frac{1}{p\left(p^2-4p+29\right)} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2-4p+29} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{5}{(p-2)^2+5^2} = \left|\frac{1}{(p-2)^2+5^2} \div e^{2t}\,sin\,5t\right| \div$$

$$\div \frac{1}{5}\int_0^t e^{2u}\,sin\,5u\,du = \left|\int e^{at}\,sin\,bt\,dt = \right.$$

$$\left. = \frac{-be^{at}\,cos\,bt + ae^{at}\,sin\,bt}{a^2+b^2}\right| =$$

$$= \frac{1}{5}\left.\frac{-5e^{2u}\,cos\,5u + 2e^{2u}\,sin\,5u}{2^2+5^2}\right|_0^t = \frac{1}{145}\left(-5e^{2t}\,cos\,5t + \right.$$

$$\left. + 2e^{2t}\,sin\,5t + 5\right) = f(t).$$

Зауваження. Крім диференціальних рівнянь, що включають похідні невідомої функції, для математичного моделювання різних явищ використовуються також інші споріднені з ними рівняння. Зокрема, інтегральні рівняння, що містять інтеграли від невідомої функції, а також інтегро-диференціальні рівняння, в яких невідома функція входить як під знак похідної, так і під знак інтеграла.

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок інтегро-диференціального рівняння

$$y' - 2y + \int_0^t y(u)du = 3,$$

який задовольняє початкову умову $y(0) = 0$.

Розв'язання.

Нехай $y(t) \div Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегро-диференціального рівняння до зображень

$$y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p);$$

$$\int_0^t y(u)du \div \frac{1}{p} Y(p); \qquad 1 \div \frac{1}{p}.$$

Одержимо

$$pY(p) - 2Y(p) + \frac{1}{p} Y(p) = 3 \times \frac{1}{p}$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння

$$p^2 Y(p) - 2pY(p) + Y(p) = 3; \quad (p^2 - 2p + 1)Y(p) = 3;$$

$$Y(p) = \frac{3}{(p-1)^2}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) = \frac{3}{(p-1)^2} \div 3 \times te^t = y(t).$$

Отже, $y(t) = 3te^t$ – шуканий розв'язок.

3.4 Згортка функцій. Розв'язання інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь

Згорткою двох функцій $f_1(t)$ і $f_2(t)$ називається функція $f(t)$, яка задається рівністю

$$f(t) = \int_0^t f_1(u) f_2(t-u) du.$$

Позначається $f(t) = f_1 * f_2$.

Справедливо

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(u) f_2(t-u) du = \int_0^t f_2(u) f_1(t-u) du = f_2 * f_1.$$

(Доведення за допомогою заміни $t - u = z$ в правому інтегралі).

Теорема 11 (Теорема згортання оригіналів (теорема множення зображень)). Якщо $F_1(p)$ і $F_2(p)$- зображення відповідно функцій $f_1(t)$ і $f_2(t)$, то добуток $F_1(p)F_2(p)$ служить зображенням функції $f(t) = \int_0^t f_1(u) f_2(t-u) du$, тобто якщо $f_1(t) \div F_1(p)$; $f_2(t) \div F_2(p)$, то

$$\int_0^t f_1(u) f_2(t-u) du \div F_1(p) F_2(p).$$

(Без доведення).

Зауваження. На основі теореми згортання можна одержати зображення інтеграла від оригіналу

$$f_1(t)=f(t);\ f_2(t)=1 \ \Rightarrow\ F_1(p)=F(p);\ F_2(p)=\frac{1}{p};$$

$$\int_0^t f(u)du=\int_0^t f(u)f_2(t-u)du \ \div F(p)\times\frac{1}{p}.$$

Отже,

$$\int_0^t f(u)du \ \div \frac{F(p)}{p}.$$

Приклад 1. Користуючись теоремою згортання оригіналів, знайти оригінал за його зображенням

$$F(p)=\frac{1}{\left(p^2+b^2\right)^2}.$$

Розв’язання.

$$F(p)=\frac{1}{\left(p^2+b^2\right)^2}=\frac{1}{p^2+b^2}\times\frac{1}{p^2+b^2}=$$

$$=\left|F(p)=F_1(p)\times F_2(p);\ F_1(p)=\frac{1}{p^2+b^2}\div\frac{1}{b}\sin bt;\right.$$

$$\left.F_2(p)=\frac{1}{p^2+b^2}\div\frac{1}{b}\sin bt;\quad f(t)=\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du\right|\div$$

$$\div\int_0^t (1/b)\sin bu\times(1/b)\sin b(t-u)du=$$

$$=\frac{1}{2b^2}\int_0^t\left(\cos(bu-b(t-u))-\cos(bu+b(t-u))\right)du=$$

$$=\frac{1}{2b^2}\left(\int_0^t\cos(2bu-bt)du-\cos bt\int_0^t du\right)=$$

$$=\frac{1}{2b^2}\left(\frac{1}{2b}\sin(2bu-bt)\Big|_0^t-\cos bt\times u\Big|_0^t\right)=$$

$$=\frac{1}{2b^2}\left(\frac{1}{2b}\sin bt-\frac{1}{2b}\sin(-bt)-t\cos bt\right)=$$

$$=\frac{1}{2b^3}\left(\sin bt-bt\cos bt\right)=f(t)$$

– шуканий оригінал.

Приклад 2. Розв’язати інтегральне рівняння Вольтерра першого роду

$$\int_0^t y(u)cos(t-u)du = t\,sin\,t\,.$$

Розв’язання.

Нехай $y(t) \div Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегрального рівняння до зображень

$$cos\,t \div \frac{p}{p^2+1}; \quad t\,sin\,t \div \frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2};$$

$$\int_0^t y(u)cos(t-u)du \div Y(p) \times \frac{p}{p^2+1}.$$

Одержимо

$$Y(p) \times \frac{p}{p^2+1} = \frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння

$$Y(p) = \frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2} : \frac{p}{p^2+1} = \frac{2}{p^2+1}$$

– зображення шуканого розв’язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p) == 2 \times \frac{1}{p^2+1} \div 2\,sin\,t = y(t).$$

Отже, $y(t) = 2\,sin\,t$ – шуканий розв’язок.

Приклад 3. Розв’язати інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$y(t) - 6\int_0^t y(u)sin\,3(t-u)du = t\,cos\,3t\,.$$

Розв’язання.

Нехай $y(t) \div Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегрального рівняння до зображень

$$sin\,3t \div \frac{3}{p^2+9}; \quad t\,cos\,3t \div \frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2};$$

$$\int_0^t y(u)sin\,3(t-u)du \div Y(p) \times \frac{3}{p^2+9}.$$

Одержимо

$$Y(p) - 6 \times Y(p) \times \frac{3}{p^2+9} = \frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2}$$

– допоміжне рівняння. Розв’яжемо це рівняння

$$Y(p)\times\frac{p^2+9-18}{p^2+9}=\frac{p^2-9}{\left(p^2+9\right)^2};\quad Y(p)=\frac{1}{p^2+9}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p)=\frac{1}{p^2+9}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{p^2+3^2}\ \div\ \frac{1}{3}sin3t=y(t).$$

Отже, $y(t)=\frac{1}{3}sin3t$ – шуканий розв'язок.

Приклад 4. Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$y(t)+2\int_0^t y(u)cos(t-u)du=e^t\ .$$

Розв'язання.

Нехай $y(t)\div Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегрального рівняння до зображень

$$cos\,t\ \div\frac{p}{p^2+1};\quad e^t\ \div\frac{1}{p-1};$$

$$\int_0^t y(u)cos(t-u)du\ \div Y(p)\times\frac{p}{p^2+1}.$$

Одержимо

$$Y(p)+2Y(p)\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p-1}$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння

$$\left(p^2+1\right)Y(p)+2pY(p)=\frac{p^2+1}{p-1};$$

$$Y(p)\left(p^2+1+2p\right)=\frac{p^2+1}{p-1};\quad Y(p)=\frac{p^2+1}{(p-1)(p+1)^2}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p)=\frac{p^2+1}{(p-1)(p+1)^2}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{(p+1)^2}=$$

$$=\Big|\ A(p+1)^2+B\left(p^2-1\right)+C(p-1)=p^2+1;$$

$$\begin{array}{ll} p=-1: & \left\{\begin{array}{l} -2C=2; \\ 4A=2; \\ A-B-C=1; \end{array}\right. \\ p=1: & \\ p^0: & \end{array}$$

$C=-1$; $A=1/2$; $B=A-C-1=1/2+1-1=1/2$;

$$\left| = \frac{1}{2}\times\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{p+1}-\frac{1}{(p+1)^2} \div \frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}-te^{-t}=ch\,t-te^{-t}=y(t).\right.$$

Отже, $y(t)=ch\,t-te^{-t}$ – шуканий розв'язок.

Приклад 5. Знайти частинний розв'язок інтегро-диференціального рівняння

$$y'-2\int_0^t e^{t-u}y(u)du=e^{-2t},$$

який задовольняє початкову умову $y(0)=1$.

Розв'язання.

Нехай $y(t)\div Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах інтегро-диференціального рівняння до зображень

$$y'(t)\div pY(p)-y(0)=pY(p)-1;\quad e^{t}\div\frac{1}{p-1};$$

$$\int_0^t e^{t-u}y(u)du\div\frac{1}{p-1}Y(p);\qquad e^{-2t}\div\frac{1}{p+2}.$$

Одержимо

$$pY(p)-1-2\,\frac{1}{p-1}Y(p)=\frac{1}{p+2}$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо це рівняння

$$p(p-1)(p+2)Y(p)-(p-1)(p+2)-2(p+2)Y(p)=p-1;$$

$$Y(p)(p+2)(p(p-1)-2)=p-1+(p-1)(p+2);$$

$$Y(p)=\frac{`p^2+p-3}{(p^2-p-2)(p+2)}$$

– зображення шуканого розв'язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$Y(p)=\frac{`p^2+2p-3}{(p+1)(p-2)(p+2)}=\frac{`A}{p+1}+\frac{`B}{p-2}+\frac{`C}{p+2}=$$

$$=\left|A(p-2)(p+2)+B(p+1)(p+2)+C(p+1)(p-2)=p^2+2p-3;\right.$$

$$\begin{array}{ll} p=-1: & \left\{\begin{array}{ll} -3A=-4\ ; & \qquad A=4/3\ ; \\ 12B=5\ ; & \qquad B=5/12; \\ 4C=-3\ ; & \qquad C=-3/4; \end{array}\right. \\ p=2: & \\ p=-2: & \end{array}$$

$$\left|=\frac{4}{3}\times\frac{1}{p+1}+\frac{5}{12}\times\frac{1}{p-2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{p+2}\ \div\right.$$

$$\div\ \frac{4}{3}e^{-t}+\frac{5}{12}e^{2t}-\frac{3}{4}e^{-2t}=y(t).$$

Отже,

$$y(t)=\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{5}{12}e^{2t}-\frac{3}{4}e^{-2t}$$

– шуканий розв’язок.

4 ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ

4.1 Приклади розв’язання операційним методом задач теоретичної електротехніки

Математичними моделями перехідних процесів у електричних ланцюгах служать диференціальні та споріднені з ними (інтегральні, інтегро-диференціальні, скінченно-різницеві і т. п.) рівняння.

Зауваження. При складанні таких рівнянь звичайно користуються першим та другим законами Кірхгофа.

Перший закон Кірхгофа: алгебраїчна сума всіх струмів, що протікають в довільній точці ланцюга, дорівнює нулю.

Другий закон Кірхгофа: для кожного замкнутого контуру алгебраїчна сума падінь напруги в окремих гілках дорівнює нулю.

У довільний момент часу t перехідного процесу для активного опору R, індуктивності L, ємності C справедливі наступні співвідношення, що зв’язують падіння напруги на кінцях елемента $u(t)$ та силу струму в ньому $i(t)$:

$$u_R(t)=R\,i_R(t); \qquad u_L(t)=L\,\frac{d\,i_L(t)}{dt};$$

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt+u_C(0),$$

де $u_C(0)$ – падіння напруги на ємності в початковий момент часу $t=0$.

Приклад 1. Контур складається з послідовно сполучених активного опору R та індуктивності L (рис. 4.1). Знайти закон зміни сили струму $i(t)$ в контурі при його відключенні від джерела зі сталою електрорушійною силою E і закороченні ланцюга в початковий момент часу $t=0$ (перемикач K переводиться при $t=0$ із положення A в положення B).

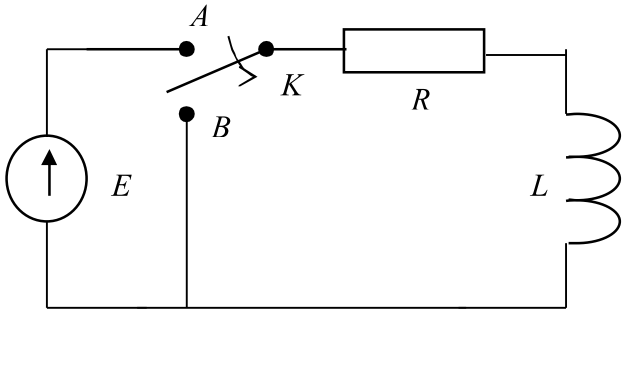


Рисунок 4.1– Контур з опору та індуктивності

Розв’язання.

Нехай $i(t) \div I(p)$ – шукана сила струму (оригінал) і відповідне зображення. У момент перемикання $t = 0$ за законом Ома сила струму

$$i(0) = \frac{E}{R}.$$

Після перемикання за другим законом Кірхгофа

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0.$$

Перейдемо в одержаному диференціальному рівнянні до зображень

$$\frac{di}{dt} \div p\,I(p) - i(0) = p\,I(p) - \frac{E}{R};$$

$$L\left(p\,I(p) - \frac{E}{R}\right) + RI(p) = 0$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння

$$(Lp + R)I(p) = \frac{LE}{R}; \qquad I(p) = \frac{LE/R}{Lp + R}$$

– зображення шуканого розв’язку. Знайдемо відповідний оригінал

$$I(p) = \frac{LE/R}{Lp + R} = \frac{E}{R} \times \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \div \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = i(t).$$

Отже,

$$i(t) = \frac{E}{R}\,e^{-\frac{R}{L}t}$$

– шуканий закон зміни сили струму в контурі.

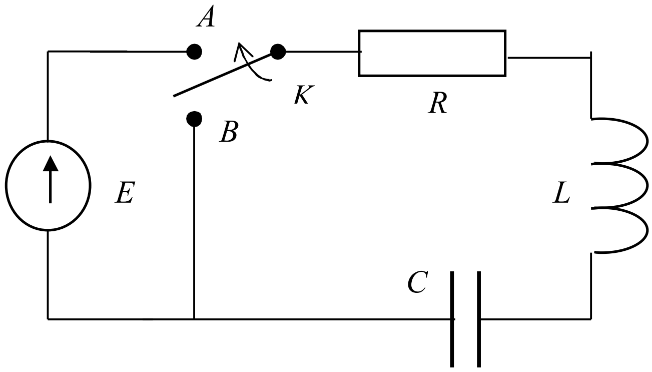
Приклад 2. Контур складається з послідовно сполучених активного опору R, індуктивності L і ємності C (рис. 4.2). Знайти закон зміни сили струму в контурі при його підключенні в початковий момент часу $t = 0$ до джерела зі сталою електрорушійною силою E (перемикач K переводиться при $t = 0$ з положення B в положення A).

Розв’язання.

Нехай $i(t) \div I(p)$ – шукана сила струму (оригінал) і відповідне зображення. В початковий момент $t = 0$ сила струму і початкова напруга на обкладинках конденсатора дорівнюють нулю

$$i(0) = 0; \quad u_C(0) = 0.$$

Тоді згідно з другим законом Кірхгофа



$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(z)dz = E\,.$$

Рисунок 4.2 – Контур з опору, індуктивності та ємності

Перейдемо в обох частинах одержаного інтегро-диференціального рівняння до зображень

$$\frac{di}{dt} \div p\,I(p) - i(0) = p\,I(p); \quad \int_0^t i(z)dz \div \frac{1}{p}I(p); \;\; 1 \div \frac{1}{p};$$

$$R\,I(p) + Lp\,I(p) + \frac{1}{C}\times\frac{1}{p}I(p) = E\times\frac{1}{p}$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння

$$CRp\,I(p) + CLp^2 I(p) + I(p) = CE\,;$$

$$I(p) = \frac{CE}{CLp^2 + CRp + 1} = \frac{\frac{E}{L}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{CL}}$$

– зображення шуканого розв’язку. Знайдемо відповідний оригінал.

Введемо позначення

$$\alpha = \frac{R}{2L}\;; \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \qquad \omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 > 0\,.$$

Тоді

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{CL} = p^2 + \frac{R}{2L}p + \left(\frac{R}{2L}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2} = p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \omega_0^{\,2} - \alpha^2 = (p+\alpha)^2 + \omega^2;$$

$$I(p) = \frac{E}{L\omega}\times\frac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2} \div \frac{E}{L\omega}\,e^{-\alpha t}\,sin\,\omega t = i(t).$$

Отже,

$$i(t) = \frac{E}{L\omega}\,e^{-\alpha t}\,sin\,\omega t$$

– шуканий закон зміни сили струму в контурі. Тут $\alpha=\dfrac{R}{2L}$ - коефіцієнт затухання; $\omega=\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}$ - кругова частота контуру; $\omega_0=\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ - кругова частота, яку мав би контур при відсутності активного опору $\left(R=0\right)$.

Приклад 3. Два однакових контури, кожний з яких складається з послідовно сполучених активного опору *R*, індуктивності *L* і ємності *C*, зв'язані взаємною індукцією *M* (рис. 4.3). Знайти закон зміни сили струму в першому $i_1(t)$ та другому $i_2(t)$ контурі при умові, що другий контур закорочений, а перший контур в початковий момент часу *t=0* підключається до джерела зі сталою електрорушійною силою *E* (перемикач *K* переводиться при *t=0* з положення *B* в положення *A*). Вважати індукційний зв'язок ідеальним, при якому *M=L*.

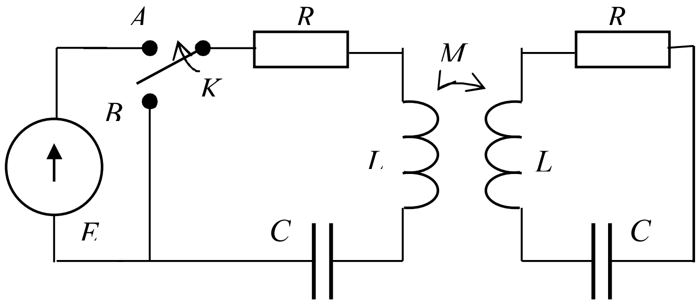


Рисунок 4.3 – Контури з опорів, індуктивності та ємності

Розв'язання.

Нехай $i_1(t)\div I_1(p)$, $i_2(t)\div I_2(p)$ – шукані закони зміни сили струму (оригінали) і відповідні зображення. В початковий момент *t=0* обидва контури закорочені, тому початкова сила струму і початкова напруга на обкладинках конденсаторів дорівнюють нулю

$$i_1(0)=0;\quad u_{C1}(0)=0;\quad i_2(0)=0;\quad u_{C2}(0)=0.$$

Застосовуючи другий закон Кірхгофа до кожного з контурів, одержимо інтегро-диференціальну систему

$$\begin{cases} Ri_1+L\dfrac{di_1}{dt}+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_1(z)dz+M\dfrac{di_2}{dt}=E; \\ Ri_2+L\dfrac{di_2}{dt}+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_2(z)dz+M\dfrac{di_1}{dt}=0. \end{cases}$$

Враховуючи умову $M=L$, маємо

$$\begin{cases} Ri_1 + L\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{C}\int\limits_0^t i_1(z)dz + L\dfrac{di_2}{dt} = E\,; \\ Ri_2 + L\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{1}{C}\int\limits_0^t i_2(z)dz + L\dfrac{di_1}{dt} = 0. \end{cases}$$

Перейдемо в обох частинах одержаної інтегро-диференціальної системи до зображень

$$\frac{di_1}{dt} \div pI_1(p) - i_1(0) = pI_1(p); \qquad \int\limits_0^t i_1(z)dz \div \frac{1}{p}I_1(p);$$

$$\frac{di_2}{dt} \div pI_2(p) - i_2(0) = pI_2(p); \qquad \int\limits_0^t i_2(z)dz \div \frac{1}{p}I_2(p);$$

$$\int\limits_0^t i_1(z)dz \div \frac{1}{p}I_1(p); \;\; 1 \div \frac{1}{p};$$

$$\begin{cases} RI_1(p) + LpI_1(p) + \dfrac{1}{Cp}I_1(p) + LpI_2(p) = E \times \dfrac{1}{p}\,; \\ RI_2(p) + LpI_2(p) + \dfrac{1}{Cp}I_2(p) + LpI_1(p) = 0. \end{cases};$$

– допоміжна система-зображення. Розв’яжемо цю лінійну алгебраїчну систему за формулами Крамера

$$\begin{cases} \left(LCp^2 + RCp + 1\right)I_1(p) + LCp^2 I_2(p) = EC\,; \\ LCp^2 I_1(p) + \left(LCp^2 + RCp + 1\right)I_2(p) = 0. \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} LCp^2 + RCp + 1 & LCp^2 \\ LCp^2 & LCp^2 + RCp + 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (RCp + 1)\left(2LCp^2 + RCp + 1\right) =$$

$$= 2RC^2L\left(p + \frac{1}{RC}\right)\left(p^2 + \frac{R}{2L}p + \frac{1}{2LC}\right);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} EC & LCp^2 \\ 0 & LCp^2 + RCp + 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2RC^2L\left(\frac{E}{2R}p^2 + \frac{E}{2L}p + \frac{E}{2RCL}\right);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} LCp^2 + RCp + 1 & EC \\ LCp^2 & 0 \end{vmatrix} = -EC^2Lp^2;$$

$$I_1(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\dfrac{E}{2R}p^2 + \dfrac{E}{2L}p + \dfrac{E}{2RCL}}{\left(p + \dfrac{1}{RC}\right)\left(p^2 + \dfrac{R}{2L}p + \dfrac{1}{2LC}\right)};$$

$$I_2(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{\frac{E}{2R}\ p^2}{\left(p+\frac{1}{RC}\right)\left(p^2+\frac{R}{2L}p+\frac{1}{2LC}\right)}$$

– зображення шуканих сил струму. Знайдемо відповідні оригінали.

Введемо позначення

$$\frac{1}{RC}=\alpha\ ;\qquad \frac{R}{4L}=\beta\ ;\qquad \frac{1}{2LC}-\frac{R^2}{16L^2}=\omega^2>0.$$

Тоді

$$\left(p^2+\frac{R}{2L}p+\frac{1}{2LC}\right)=p^2+2\cdot\frac{R}{4L}p+\left(\frac{R}{4L}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{1}{2LC}-\frac{R^2}{16L^2}\right)=(p+\beta)^2+\omega^2;$$

$$I_1(p)=\frac{\frac{E}{2R}p^2+\frac{E}{2L}p+\frac{E}{2RCL}}{(p+\alpha)\left((p+\beta)^2+\omega^2\right)}=\frac{\frac{E}{2R}}{p+\alpha}+$$

$$+\frac{\frac{E}{4L}}{(p+\beta)^2+\omega^2}=\frac{E}{2R}\times\frac{1}{p+\alpha}+\frac{E}{4L\omega}\times$$

$$\times\frac{\omega}{(p+\beta)^2+\omega^2}\ \div\frac{E}{2R}\ e^{-\alpha t}+\frac{E}{4L\omega}\ e^{-\beta t}\ sin\,\omega t=i_1(t);$$

$$I_2(p)=-\frac{\frac{E}{2R}p^2}{(p+\alpha)\left((p+\beta)^2+\omega^2\right)}=-\frac{\frac{E}{2R}}{p+\alpha}+$$

$$+\frac{\frac{E}{4L}}{(p+\beta)^2+\omega^2}=-\frac{E}{2R}\times\frac{1}{p+\alpha}+\frac{E}{4L\omega}\times$$

$$\times\frac{\omega}{(p+\beta)^2+\omega^2}\ \div-\frac{E}{2R}\ e^{-\alpha t}+\frac{E}{4L\omega}\ e^{-\beta t}\ sin\,\omega t=i_2(t).$$

Отже, шукані закони зміни сили струму

$$i_1(t)=\frac{E}{2R}\ e^{-\alpha t}+\frac{E}{4L\omega}\ e^{-\beta t}\ sin\,\omega t;$$

$$i_2(t)=-\frac{E}{2R}\ e^{-\alpha t}+\frac{E}{4L\omega}\ e^{-\beta t}\ sin\,\omega t.$$

4.2 Математичне моделювання динаміки систем у змінних «вхід – вихід». Передаточна, перехідна та імпульсна перехідна функції

У багатьох випадках, зокрема, коли неможливе вимірювання внутрішніх змінних або невідомі закони протікання процесів, математичне моделювання здійснюється на основі дослідження зовнішньої поведінки системи у термінах «вхід – вихід».

Розглянемо основні поняття на прикладі системи, що описується диференціальним рівнянням першого порядку

$$T\frac{dy}{dt} + y = ku\,,$$

де $u=u(t)$, $y=y(t)$ – відповідно вхідна та вихідна змінні; T, k – сталі коефіцієнти. Така система називається аперіодичною ланкою (інерційною ланкою першого порядку), а величини T, k – відповідно сталою часу і коефіцієнтом підсилення.

На рис. 4.4 зображена аперіодична ланка у вигляді електричного ланцюга, що складається з активних опорів R_1, R_2 та індуктивності L. Тут вхідна і вихідна змінні – відповідні напруги $u=u_1(t)$, $y=y_2(t)$. При цьому

$$T = L/(R_1 + R_2); \qquad k = R_2/(R_1 + R_2).$$

Переходячи до зображень за Лапласом при нульових початкових умовах

$$u(t) \div U(p); \quad y(t) \div Y(p); \quad \frac{dy}{dt} \div pY(p),$$

одержимо операторну форму рівняння динаміки аперіодичної ланки

$$(Tp+1)Y(p) = k\,U(p).$$

Передаточною функцією системи $W(p)$ називається відношення зображень вихідної $Y(p)$ і вхідної $U(p)$ змінних при нульових початкових умовах

$$W(p) = Y(p)/U(p).$$

Звідси

$$Y(p) = W(p)\,U(p).$$

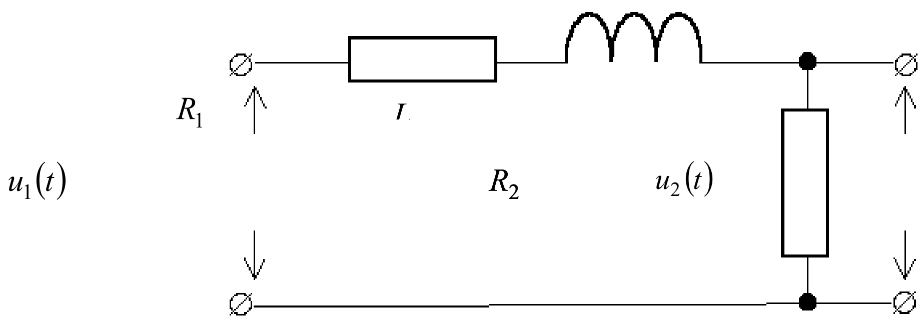


Рисунок 4.4 – Електричний ланцюг з опорів та індуктивності

Перехідною функцією системи *h(t)* називається реакція системи (значення вихідної змінної *y(t)*) на вхідну дію у вигляді одиничної ступінчастої функції Хевісайда $u(t)=\eta(t)$ при нульових початкових умовах.

Оскільки

$$u(t)=\eta(t)\div 1/p=U(p),$$

то для зображення перехідної функції *H(p)* маємо

$$H(p)=Y(p)=W(p)\,U(p)=W(p)\,\frac{1}{p}.$$

Отже, зображення перехідної функції *H(p)* дорівнює передаточній функції *W(p)*, поділеній на *p*:

$$H(p)=W(p)/p.$$

Для аперіодичної ланки

$$H(p)=\frac{k}{(Tp+1)p}=k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1/T}\right)\div k\left(1-e^{-t/T}\right)=h(t).$$

Імпульсною перехідною (ваговою) функцією системи $\varphi(t)$ називається реакція системи (значення вихідної змінної $y(t)$) на вхідну дію у вигляді одиничної імпульсної дельта-функції Дірака $u(t)=\delta(t)$ при нульових початкових умовах.

Оскільки

$$u(t)=\delta(t)\div 1,$$

то для зображення імпульсної перехідної функції $\Phi(p)$ маємо

$$\Phi(p)=Y(p)=W(p)\,U(p)=W(p)\cdot 1.$$

Отже, зображення імпульсної перехідної функції $\Phi(p)$ дорівнює передаточній функції $W(p)$:

$$\Phi(p)=W(p).$$

Для аперіодичної ланки

$$\Phi(p)=\frac{k}{Tp+1}=\frac{k}{T}\cdot\frac{1}{p+1/T}\div\frac{k}{T}\,e^{-t/T}=\varphi(t).$$

Знайдемо зв'язок між імпульсною перехідною функцією $\varphi(t)$ і перехідною функцією $h(t)$:

$$\varphi(t)\div\Phi(p)=W(p)=p\,H(p)\div\frac{dh}{dt}.$$

Отже, імпульсна перехідна функція $\varphi(t)$ дорівнює похідній перехідної функції $h(t)$:

$$\varphi(t)=\frac{dh}{dt}.$$

Для характеристики динамічних властивостей системи можна використати будь-яку з розглянутих функцій $W(p)$, $h(t)$, $\varphi(t)$. Метод дослідження і проектування систем за допомогою передаточної функції є одним з основних у теорії автоматичного керування.

Контрольні запитання

1. Яка функція називається оригіналом? Наведіть приклади оригіналів і функцій, що не є оригіналами.
2. Дайте означення перетворення (оператора) Лапласа. Що таке зображення оригіналу?
3. У чому полягає властивість лінійності оператора Лапласа?
4. Як веде себе будь-яке зображення на нескінченності?
5. Що таке одинична ступінчаста функція Хевісайда? Яке її зображення?
6. У чому полягає теорема про затухання оригіналу?
7. Сформулюйте теорему про зсув аргументу в оригіналі.
8. Який зв'язок між похідною зображення й оригіналом?
9. Як знаходиться зображення похідних оригіналу?
10. Сформулюйте правило знаходження оригіналу для зображення у вигляді раціонального дробу на основі таблиці відповідності оригіналів та їх зображень.
11. За якою схемою здійснюється розв'язування диференціальних рівнянь та їх систем?
12. Як знаходиться зображення інтеграла від оригіналу?
13. Наведіть приклади розрахунку перехідних процесів у електричних ланцюгах за допомогою операційного числення.

Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Використовуючи тотожні перетворення оригіналів і властивість лінійності, на основі таблиці відповідності оригіналів та їх зображень знайти зображення $F(p)$ вказаної функції $f(t)$. Результат записати у вигляді єдиного дробу.

Номер варіанта	Завдання
1	$f(t) = t\,e^{-2t} - 2\cos 3t - 3$
2	$f(t) = 3t\ \sin 2t - e^{3t} - 3$
3	$f(t) = e^{2t}\ \cos 2t - 3t \sin 2t$
4	$f(t) = 2\,e^{2t}\ \sin t - 3\cos 2t$
5	$f(t) = 4t\,e^{-2t} - sh4t - 1$
6	$f(t) = 2e^{-t}\ \cos t - t \cdot sh2t$
7	$f(t) = e^{-2t}\ \sin t - 2t \cdot sh3t$

8	$f(t)=2e^{3t}\cos t-3\sin 2t$
9	$f(t)=3e^{-3t}\sin 2t-2t+2$
10	$f(t)=2e^{-t}\sin 4t-t\cdot sht$
11	$f(t)=2t\sin 3t-3\cos t$
12	$f(t)=2t\cos 3t-2t+2$
13	$f(t)=e^{2t}\cos 2t-t\cdot sh2t$
14	$f(t)=e^{-2t}\cos t+4t\cdot ch2t$
15	$f(t)=3e^{-2t}\cos 3t-4t^2$
16	$f(t)=ch^2 3t$
17	$f(t)=sh2t\cdot\cos 6t$
18	$f(t)=ch2t\cdot\cos 4t$
19	$f(t)=\cos 3t\cdot\cos 7t$
20	$f(t)=4t\sin t-t\cdot ch2t$
21	$f(t)=sh2t\cdot\sin 6t$
22	$f(t)=ch3t\cdot\sin 4t$
23	$f(t)=\cos^2 3t$
24	$f(t)=sh^2 2t$
25	$f(t)=\sin 3t\cdot\sin 5t$
26	$f(t)=\sin 5t\cdot\cos 7t$
27	$f(t)=\sin^2 4t$
28	$f(t)=sh5t\cdot ch3t$
29	$f(t)=2te^{3t}-\sin 4t+3$
30	$f(t)=3t\cos 2t-\sin 3t$

Завдання 2. Розкладаючи спочатку правильний раціональний дріб у суму елементарних дробів, а потім застосовуючи лінійність перетворення Лапласа і таблицю відповідності оригіналів та їх зображень, знайти оригінал *f(t)* за його зображенням *F(p)*.

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання
1	$F(p)=\dfrac{p+1}{p(p^2-4p+13)}$	16	$F(p)=\dfrac{p}{(p^2+9)(p^2+1)}$
2	$F(p)=\dfrac{p-2}{p(p^2-6p+25)}$	17	$F(p)=\dfrac{1}{(p-2)(p^2+9)}$
3	$F(p)=\dfrac{p+4}{p(p^2-8p+17)}$	18	$F(p)=\dfrac{p}{(p-3)(p^2+16)}$

4	$F(p)=\dfrac{p^2-4}{p(p^2+8p-9)}$	19	$F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+9)(p^2+4)}$
5	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-4p-5)}$	20	$F(p)=\dfrac{p^2}{(p+2)(p^2+25)}$
6	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-12p+40)}$	21	$F(p)=\dfrac{p^2-4p}{p^3-8}$
7	$F(p)=\dfrac{p^2+6}{p(p^2+6p+18)}$	22	$F(p)=\dfrac{p^3}{p^4-5p^2-36}$
8	$F(p)=\dfrac{p+3}{p(p^2-6p+10)}$	23	$F(p)=\dfrac{p^3+p}{p^4-16}$
9	$F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+7p-8)}$	24	$F(p)=\dfrac{p^2}{p^4+5p^2+4}$
10	$F(p)=\dfrac{p^2+1}{p(p^2-9p-10)}$	25	$F(p)=\dfrac{p^2-3p+6}{p^3+27}$
11	$F(p)=\dfrac{p}{(p-5)(p^2+9)}$	26	$F(p)=\dfrac{p^2-8p}{p^3+8}$
12	$F(p)=\dfrac{p^2-1}{(p^2+4)(p^2+25)}$	27	$F(p)=\dfrac{p^3-p^2}{p^4-81}$
13	$F(p)=\dfrac{p-1}{(p^2+1)(p^2+64)}$	28	$F(p)=\dfrac{p^2+9}{p(p^2+2p-3)}$
14	$F(p)=\dfrac{p^3+2}{(p^2+4)(p^2+36)}$	29	$F(p)=\dfrac{p^3-2p^2}{(p+2)^2(p^2+4)}$
15	$F(p)=\dfrac{p^3}{(p^2+1)(p^2+49)}$	30	$F(p)=\dfrac{4p^3-3p^2}{p^4-3p^2-4}$

Завдання 3. Методом операційного числення розв'язати задачу Коші для лінійного диференціального рівняння другого порядку (знайти частинний розв'язок заданого диференціального рівняння, який задовольняє вказаним початковим умовам).

Номер варіанта	Завдання
1	$x''+4x'+4x=3e^{-2t}\cos t$; $x(0)=3$; $x'(0)=0$
2	$x''+2x'-3x=\sin 2t$; $x(0)=2$; $x'(0)=0$

3	$x'' + 6x' + 10x = 6t\,e^{-2t}$; $x(0) = -2$; $x'(0) = 0$
4	$x'' + 5x' + 6x = 2\sin 2t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = 4$
5	$x'' + 2x' = 4e^{-2t}\cos t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = 2$
6	$x'' + 4x' + 13x = 2t\,e^{-2t}$; $x(0) = -3$; $x'(0) = 1$
7	$x'' + 4x' + 20x = 6t$; $x(0) = 4$; $x'(0) = -2$
8	$x'' - 4x' - 5x = 4e^{-t}\cos 2t$; $x(0) = -2$; $x'(0) = -4$
9	$x'' - 9x = 4e^{-3t}\sin 3t$; $x(0) = 4$; $x'(0) = 0$
10	$x'' - 3x' - 10x = 6\,e^{2t}\cos 3t$; $x(0) = -4$; $x'(0) = 2$
11	$x'' - 5x' + 6x = 2e^{2t}\sin 2t$; $x(0) = 6$; $x'(0) = 3$
12	$x'' - 6x' + 10x = 6t\,e^{3t}$; $x(0) = -2$; $x'(0) = 0$
13	$x'' + 2x' + 17x = 8\sin 4t$; $x(0) = 2$; $x'(0) = 6$
14	$x'' - 2x' - 3x = 6e^{3t}\sin 2t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -2$
15	$x'' + 4x = 4t^2$; $x(0) = -3$; $x'(0) = 2$
16	$x'' - 4x' - 5x = 4e^{-t}\sin t$; $x(0) = 2$; $x'(0) = 1$
17	$x'' - 4x = 12\cos 2t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -2$
18	$x'' - x' - 6x = 12e^{-2t}\cos 2t$; $x(0) = 2$; $x'(0) = 0$
19	$x'' - 9x = 4\sin 3t$; $x(0) = 4$; $x'(0) = 0$
20	$x'' + 4x' + 5x = 2t\,e^{t}$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -1$
21	$x'' - 4x' + 13x = 12\cos 2t$; $x(0) = 2$; $x'(0) = 3$
22	$x'' + 2x' = 4e^{-2t}\cos 2t$; $x(0) = -3$; $x'(0) = 2$
23	$x'' + 4x' - 12x = e^{-2t}\sin 2t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -3$
24	$x'' + 5x' - 14x = 2t\,e^{2t}$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -1$
25	$x'' - 4x = 12e^{-2t}\sin 2t$; $x(0) = 2$; $x'(0) = -4$
26	$x'' - x' - 6x = 12e^{3t}\cos 2t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -5$
27	$x'' + 2x' - 24x = 12t^2$; $x(0) = 1$; $x'(0) = 4$
28	$x'' - 4x' + 29x = 10\,e^{2t}$; $x(0) = 2$; $x'(0) = -2$
29	$x'' + 6x' - 7x = 6e^{-t}\sin 2t$; $x(0) = -2$; $x'(0) = 6$
30	$x'' + 9x = 4e^{-3t}\sin 3t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -4$

Завдання 4. Методом операційного числення розв’язати задачу Коші для неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь (знайти частинний розв’язок заданої диференціальної системи, який задовольняє вказаним початковим умовам).

Номер варіанта	Завдання	Номер варіанта	Завдання

1	$\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = x - y + \cos 2t \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = 3$	16	$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = -x - 2\cos 3t \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = 0$
2	$\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = 3x - y + \sin 3t \end{cases}$ $x(0) = -4;\ y(0) = 0$	17	$\begin{cases} x' = 6x - 10y \\ y' = x - y + 5\cos t \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = -6$
3	$\begin{cases} x' = x + 4y + 3e^{-2t} \\ y' = x - 2y \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 5$	18	$\begin{cases} x' = 2x + y + 2e^{-t} \\ y' = x + 2y - 3e^{-t} \end{cases}$ $x(0) = 6;\ y(0) = 2$
4	$\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = -2x - y + 6t \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = 0$	19	$\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = 5x - y + 6e^{-2t} \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = 2$
5	$\begin{cases} x' = -x + 3y - e^{t} \\ y' = x + y - 3e^{t} \end{cases}$ $x(0) = 3;\ y(0) = -2$	20	$\begin{cases} x' = 4x + y + 3\cos 2t \\ y' = -2x + 3y - \sin 2t \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 0$
6	$\begin{cases} x' = 7x + 2y - 2\sin t \\ y' = -9x - 2y + \cos t \end{cases}$ $x(0) = 4;\ y(0) = 0$	21	$\begin{cases} x' = 4x - 5y - 2\mathrm{t} \\ y' = 2x - 2y + 3t \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = 0$
7	$\begin{cases} x' = -2x - 6y \\ y' = -x - y + 6t \end{cases}$ $x(0) = 4;\ y(0) = 1$	22	$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 7x - 3y - 4t \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = -2$
8	$\begin{cases} x' = -3x - 4y \\ y' = x + y + 6e^{-t} \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = -1$	23	$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = 4x + y - 4\cos 2t \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 7$
9	$\begin{cases} x' = -5x + 2y + 4e^{2t} \\ y' = 4x - 3y - 2e^{2t} \end{cases}$ $x(0) = 3;\ y(0) = -2$	24	$\begin{cases} x' = x + 2y + 2e^{-t} \\ y' = 2x + y - 4e^{-t} \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 1$
10	$\begin{cases} x' = 2x + 4y + 4t \\ y' = 3x + 6y - 3\mathrm{t} \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 6$	25	$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y + 4t \end{cases}$ $x(0) = 2;\ y(0) = 1$
11	$\begin{cases} x' = x + 5y - 2e^{2t} \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = -1$	26	$\begin{cases} x' = 4x + 6y + 4\cos 2t \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 5$
12	$\begin{cases} x' = 7x - 2y \\ y' = 4x - 2y - \sin 2t \end{cases}$ $x(0) = 6;\ y(0) = 0$	27	$\begin{cases} x' = -x + y - e^{-2t} \\ y' = x - y + 2e^{-2t} \end{cases}$ $x(0) = 5;\ y(0) = 1$

13	$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 5t \\ y' = 3x + 2y - 3 \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 1$	28	$\begin{cases} x' = x - y + 2\sin t \\ y' = 5x - y - \cos t \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 5$
14	$\begin{cases} x' = 2x - y - 3e^{-t} \\ y' = x + 2y \end{cases}$ $x(0) = -2;\ y(0) = 1$	29	$\begin{cases} x' = 6x - 2y - e^{2t} \\ y' = 5x - y - 3e^{2t} \end{cases}$ $x(0) = 4;\ y(0) = 0$
15	$\begin{cases} x' = 2x - y + 2\sin 2t \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$ $x(0) = -4;\ y(0) = 3$	30	$\begin{cases} x' = -x + 5y + 4e^{3t} \\ y' = -x + 3y \end{cases}$ $x(0) = 6;\ y(0) = -4$

1. Використовуючи тотожні перетворення оригіналів і властивість лінійності, на основі таблиці відповідності оригіналів та їх зображень знайти зображення *F(p)* вказаної функції *f(t)*. Результат записати у вигляді єдиного дробу.

1.1. $f(t) = ch^2 3t$;

1.2. $f(t) = \sin 3t \cdot \sin 5t$;

1.3. $f(t) = \cos^2 3t$;

1.4. $f(t) = sh^2 2t$;

1.5. $f(t) = \cos 3t \cdot \cos 7t$;

1.6. $f(t) = \sin^2 4t$;

1.7. $f(t) = sh 2t \cdot \cos 6t$;

1.8. $f(t) = \sin 3t \cdot \cos 7t$;

1.9. $f(t) = ch 3t \cdot \sin 4t$;

1.10. $f(t) = sh 5t \cdot ch 3t$;

1.11. $f(t) = 3e^{-3t} \sin 2t - 2t + 2$;

1.12. $f(t) = t e^{-2t} - 2\cos 3t - 3$;

1.13. $f(t) = 3t \sin 2t - e^{3t} - 3$;

1.14. $f(t) = 2t \cos 3t - 2t + 2$;

1.15. $f(t) = 2t \sin 3t - 3\cos t$;

1.16. $f(t) = 3t \cos 2t - 2\sin 3t$;

1.17. $f(t) = 2e^{2t} \sin t - 3\cos 2t$;

1.18. $f(t) = 2e^{3t} \cos t - 3\sin 2t$;

1.19. $f(t) = 3e^{-2t} \cos 3t - 4t^2$;

1.20. $f(t) = 2t e^{3t} - \sin 4t + 3$;

1.21 $f(t) = 2t e^{-2t} - \cos 3t - 5$;

1.22 $f(t) = t \sin 2t - 2e^{3t} - 2$;

1.23 $f(t) = 4t e^{-2t} - sh 4t - 1$;

1.24 $f(t) = \cos^2 4t$;

1.25 $f(t) = \sin^2 2t$;

1.26 $f(t) = t e^{3t} - 2\sin t - 5$;

1.27 $f(t) = t e^{3t} - \sin 2t + 3$;

1.28 $f(t) = 3e^{-2t} - 4t^2 + 2$;

1.29 $f(t) = 2t \cos 3t - 2t + 2$;

1.30 $f(t) = 2t \sin 3t - 3\cos t$.

2. Знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням $F(p)$.

2.1 $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+4)}$;

2.2 $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+16)}$;

2.3 $F(p)=\dfrac{p-2}{p^2-6p}$;

2.4 $F(p)=\dfrac{1}{p^2+9p}$;

2.5 $F(p)=\dfrac{p}{(p-5)(p^2+9)}$;

2.6 $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2-4p}$;

2.7 $F(p)=\dfrac{3p^2-8}{p^3-4p^2+8p}$;

2.8 $F(p)=\dfrac{1}{(p-2)(p^2+9)}$;

2.9 $F(p)=\dfrac{p}{(p-3)(p^2+16)}$;

2.10 $F(p)=\dfrac{12}{p^2(p-4)}$;

2.11. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-4p+13)}$;

2.12. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-6p+25)}$

2.13. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-8p+17)}$;

2.14. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+8p-9)}$;

2.15. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-4p-5)}$;

2.16. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-12p+40)}$;

2.17. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+6p+18)}$;

2.18. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-6p+10)}$;

2.19. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+7p-8)}$;

2.20. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-9p-10)}$.

3. Користуючись теоремою згортання оригіналів, знайти оригінал *f(t)* за його зображенням *F(p)*.

3.1. $F(p)=\dfrac{p}{(p-5)(p^2+9)}$;

3.2. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+25)}$;

3.3. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+64)}$;

3.4. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+36)}$;

3.5. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+9)(p^2+49)}$;

3.6. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+9)(p^2+1)}$;

3.7. $F(p)=\dfrac{1}{(p-2)(p^2+9)}$;

3.8. $F(p)=\dfrac{p}{(p-3)(p^2+16)}$;

3.9. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+9)(p^2+4)}$;

3.10. $F(p)=\dfrac{1}{(p+2)(p^2+25)}$.

4. Розкладаючи спочатку правильний раціональний дріб у суму елементарних дробів, а потім застосовуючи лінійність перетворення Лапласа і таблицю відповідності оригіналів та їх зображень, знайти оригінал *f(t)* за його зображенням *F(p)*.

4.1. $F(p)=\dfrac{p^2-5p}{(p-2)(p^3-8)}$; 4.2. $F(p)=\dfrac{p^2}{p^4-5p^2-36}$;

4.3. $F(p)=\dfrac{3p^2+2}{(p^2+2p+1)^2}$; 4.4. $F(p)=\dfrac{p^2}{p^4+5p^2+4}$;

4.5. $F(p)=\dfrac{p^3-5p^2+6}{(p-2)(p^3-4p^2+4p)}$; 4.6. $F(p)=\dfrac{p^2+9p}{(p^2-4)(p^2-5p+6)}$;

4.7. $F(p)=\dfrac{2p^3-p^2}{(p^2+4p+4)(p^2+p-2)}$; 4.8. $F(p)=\dfrac{p^3-3p+6}{(p-3)(p^3-6p^2+9p)}$;

4.9. $F(p)=\dfrac{p^3-4p^2}{(p^2-9)(p^2-5p+6)}$; 4.10. $F(p)=\dfrac{4p^3-3p^2+2p}{(p^2-6p+9)(p^2-2p-3)}$.

5. Методом операційного числення розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння третього порядку.

5.1. $x'''+x''-2x'=0$; $x(0)=1$; $x'(0)=1$; $x''(0)=-2$;

5.2. $x'''-4x''+8x'=0$; $x(0)=-2$; $x'(0)=0$; $x''(0)=1$;

5.3. $x'''-2x''+x'=0$; $x(0)=1$; $x'(0)=2$; $x''(0)=-2$;

5.4. $x'''-4x'=0$; $x(0)=1$; $x'(0)=0$; $x''(0)=3$;

5.5. $x'''-x''-6x'=0$; $x(0)=1$; $x'(0)=0$; $x''(0)=-1$;

5.6. $x'''+3x''+2x'=0$; $x(0)=4$; $x'(0)=-2$; $x''(0)=0$;

5.7. $x'''+8x=0$; $x(0)=1$; $x'(0)=0$; $x''(0)=-3$;

5.8. $x'''+4x'=0$; $x(0)=1$; $x'(0)=-2$; $x''(0)=0$;

5.9. $x'''+4x''+4x'=0$; $x(0)=1$; $x'(0)=0$; $x''(0)=3$;

5.10. $x'''+2x''+2x'=0$; $x(0)=0$; $x'(0)=1$; $x''(0)=2$.

6. Методом операційного числення розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.

6.1. $x''+4x'+4x=3e^{-2t}\cos t$; $x(0)=3$; $x'(0)=0$;

6.2. $x''+2x'-3x=6\sin 2t$; $x(0)=2$; $x'(0)=0$;

6.3. $x''-4x=12\cos 2t$; $x(0)=2$; $x'(0)=1$;

6.4. $x''-4x'-5x=4e^{-t}\sin t$; $x(0)=0$; $x'(0)=-2$;

6.5. $x''+6x'+10x=6te^{-2t}$; $x(0)=-2$; $x'(0)=0$;

6.6. $x''+2x'=4e^{-2t}\cos t$; $x(0)=0$; $x'(0)=2$;

6.7. $x'' + 5x' + 6x = 2\sin 2t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = 4$;

6.8. $x'' - 9x = 4\sin 3t$; $x(0) = 4$; $x'(0) = 0$;

6.9. $x'' + 4x' + 5x = 2te^{t}$; $x(0) = 2$; $x'(0) = 0$;

6.10. $x'' - x' - 6x = 2\cos 2t$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -1$.

7. Методом операційного числення розв'язати задачу Коші для однорідної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

7.1. $\begin{cases} x' = x + 5y \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$ $x(0) = 1$; $y(0) = -1$

7.2. $\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = x - y \end{cases}$ $x(0) = 2$; $y(0) = 3$

7.3. $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$ $x(0) = 0$; $y(0) = -2$

7,4. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ $x(0) = 2$; $y(0) = 0$

7.5. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x - 2y \end{cases}$ $x(0) = 0$; $y(0) = 5$

7.6. $\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = x + y \end{cases}$ $x(0) = 0$; $y(0) = -4$

7.7. $\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = -2x - y \end{cases}$ $x(0) = -1$; $y(0) = 0$

7.8. $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$ $x(0) = -1$; $y(0) = 1$

7.9. $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$ $x(0) = 0$; $y(0) = -3$

7.10. $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ $x(0) = 2$; $y(0) = 1$

8. Методом операційного числення розв'язати задачу Коші для неоднорідної системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку.

8.1. $\begin{cases} x' = -x + 3y + \sin t \\ y' = 3x - y \end{cases}$ $x(0) = 0$; $y(0) = 0$

8.2. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 5t \\ y' = 3x + 2y - 3 \end{cases}$ $x(0) = 0$; $y(0) = 1$

8.3. $\begin{cases} x' = x + 2y + 2e^{-t} \\ y' = 2x + y - 4 \end{cases}$ $x(0) = 0$; $y(0) = 1$

8.4. $\begin{cases} x' = -x + 3y - 3e^{-2t} \\ y' = x + y + e^{t} \end{cases}$ $x(0) = 1$; $y(0) = 1$

8.5. $\begin{cases} x' = 4x - 5y - 2 \\ y' = 2x - 2y + 3t \end{cases}$ $x(0) = 1$; $y(0) = 0$

8.6. $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = -x - 2\cos t \end{cases}$ $x(0) = 2$; $y(0) = 0$

8.7. $\begin{cases} x' = -x + y + e^{-2t} \\ y' = x - y + 2e^{t} \end{cases}$ $x(0) = 1$; $y(0) = 1$

8.8. $\begin{cases} x' = -3x - 4y + e^{t} \\ y' = x + y + e^{-t} \end{cases}$ $x(0) = 1$; $y(0) = -1$

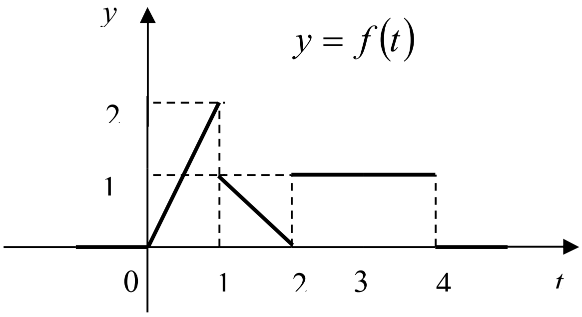
8.9. $\begin{cases} x' = -3x - y + 2 \\ y' = x - y + e^{-t} \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = -2$

8.10. $\begin{cases} x' = -x + 5y + e^{t} \\ y' = -x + 3y + 2 \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = -3$

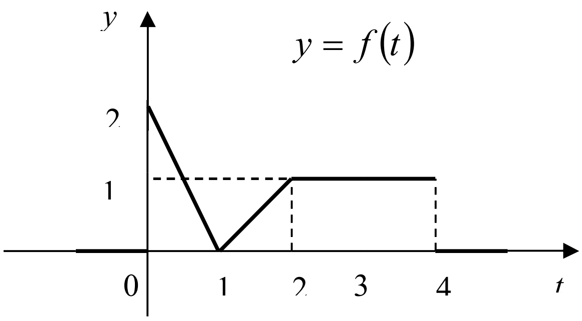
9. Методом операційного числення розв'язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку, права частина якого *f(t)* задана графічно.

Вказівка. Виходячи з графіка, виразити функцію *f(t)* аналітично однією формулою, застосовуючи одиничну функцію Хевісайда. При розв'язанні врахувати наявність в правій частині *f(t)* запізнювань.

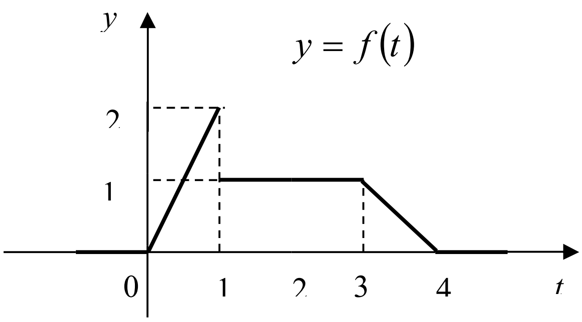
9.1. $x'' - 4x = f(t);\quad x(0) = 2;\quad x'(0) = 0.$



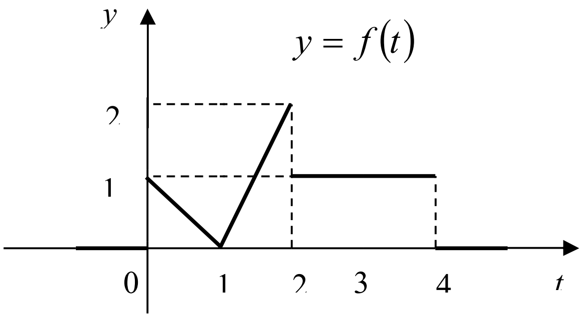
9.2. $x'' + 4x = f(t);\quad x(0) = 0;\quad x'(0) = -2.$



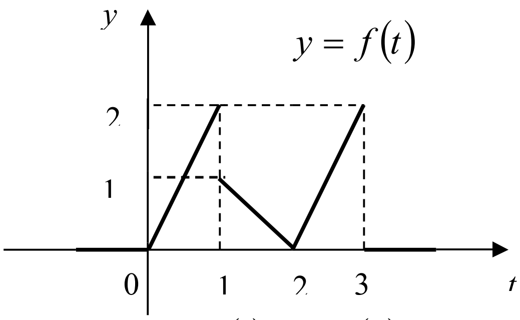
9.3. $x'' + 2x' = f(t);\quad x(0) = 3;\quad x(0) = -1.$



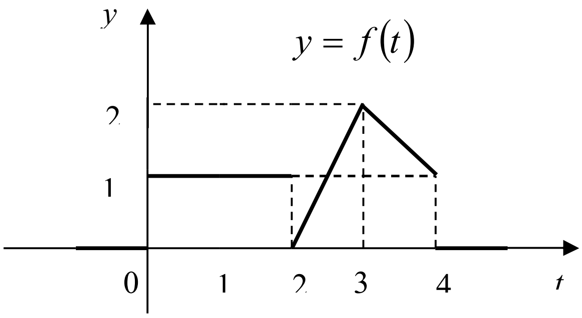
9.4. $x'' + 2x' + x = f(t);\quad x(0) = 1;\quad x'(0) = -2.$



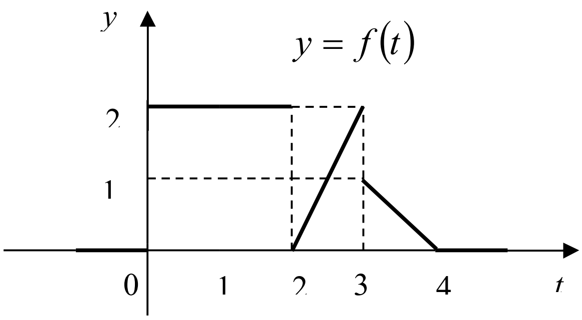
9.5. $x'' - 3x' + 2x = f(t)$; $x(0) = 3$; $x'(0) = -1$.



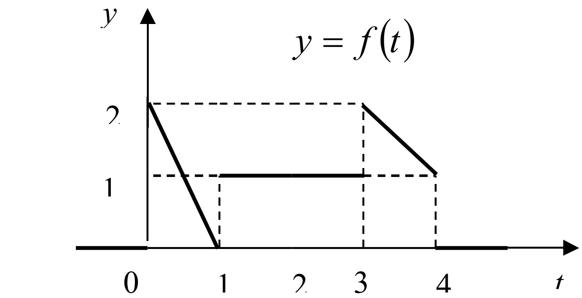
9.6. $x'' + 9x = f(t)$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -3$.



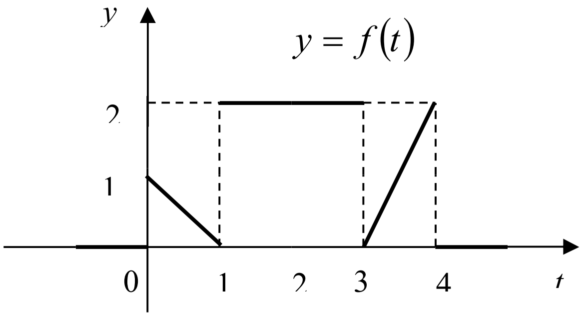
9.7. $x'' - 2x' = f(t)$; $x(0) = 0$; $x'(0) = -1$.



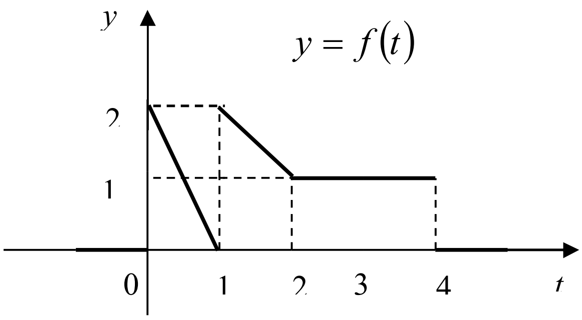
9.8. $x'' - 2x' + x = f(t)$; $x(0) = -2$; $x'(0) = 0$.



9.9. $x'' + 3x' = f(t);\qquad x(0) = 0;\quad x'(0) = -2\,.$



9.10. $x'' - 9x = f(t);\qquad x(0) = -2;\quad x'(0) = 0\,.$



СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бізюк В. В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків : навч. посібник / В. В. Бізюк, А. В. Якунін – Харків : ХНАМГ, 2008. – 300 с.

2. Бізюк В. В. Вища математика. Модуль 2 : конспект лекцій (для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання за спеціальністю 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка; освітня програма Електромеханіка та електротехнології) / В. В. Бізюк ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 107 с. – Режим доступу https://eprints.kname.edu.ua/43918/

3. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учебник / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Наука, 1997. – 415 с.

4. Станішевський С. О. Вища математика для електротехніків: у 3-х модулях / Модуль 2: Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Елементи варіаційного числення / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, А. О. Володченко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2010. – 350 с.

5. Мартиненко В. С. Операционное исчисление. / В. С. Мартиненко. – Київ : Вища шк., 1990. – 359 с.

Навчальне видання

БІЗЮК Валерій Васильович
ЯКУНІН Анатолій Вікторович

ЕЛЕМЕНТИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів першого курсу денної та заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

Відповідальний за випуск *С. М. Мордовцев*

Редактор *О. В. Михаленко*
Комп’ютерне верстання *В. В. Бізюк*

Підп. до друку 27.01.2021. Формат 60 × 84/16.
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 3,5.
Тираж 100 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.