МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

В. В. Бізюк

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2020

УДК 517:621.3.013(075.8)
Б59

Автор

Бізюк Валерій Васильович, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рецензенти:

Геворкян Юрій Леванович, кандидат фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»;

Левикін Ігор Вікторович, кандидат технічних наук, професор кафедри медіасистем і технологій Харківського національного університету радіоелектроніки

Рекомендовано до друку Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, протокол № 2 від 27 вересня 2019 р.

Бізюк В. В.

Б59 Елементи теорії поля : навч. посібник / В. В. Бізюк ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 76 с.

У навчальному посібнику розкриваються поняття скалярних та векторних полів, до розгляду яких веде багато задач фізики, електротехніки, математики, механіки й інших технічних дисциплін. Ці поняття важливі й у засвоєнні основних ідей математичного аналізу функцій багатьох змінних. Надано методичний матеріал для самостійної роботи, який містить контрольні питання, приклади за варіантами та відповіді на них.

Основою навчального посібника слугували лекції, які викладались на факультетах електропостачання і освітлення міст та транспортних систем і технологій.

Призначений для студентів денної та заочної форм навчання за спеціальністю 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка; освітня програма «Електромеханіка та електротехнології»

УДК 517:621.3.013(075.8)

© В. В. Бізюк, 2020
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія поля – великий розділ математики, фізики, механіки, у якому вивчаються скалярні, векторні, тензорні поля. До розгляду скалярних і векторних полів веде багато задач фізики, електротехніки, математики, механіки й інших технічних дисциплін. Вивчення одних фізичних полів сприяє вивченню й інших. Наприклад, сили всесвітнього тяжіння, магнітні, електричні сили – усі вони змінюються обернено пропорційно квадрату відстані від свого джерела. Вигляд силових магнітних ліній нагадує картину обтікання перешкод рідиною. Природно уявляти, скажімо, векторну трубку як замкнену частину простору, у якій рухається рідина, не перетинаючи її стінок.

Математичним ядром теорії поля є такі поняття, як градієнт, потік, потенціал, дивергенція, ротор, циркуляція й інші. Ці поняття важливі й у засвоєнні основних ідей математичного аналізу функцій багатьох змінних. Навчальний посібник вирізняється поєднанням фізичних понять і такими математичними термінами та поняттями, як криволінійні та поверхневі інтеграли, які застосовуються як математичний апарат для дослідження скалярних та векторних полів.

Цей навчальний посібник орієнтований на студентів електротехнічних спеціальностей і має на меті допомогти їм під час вивчення та засвоєння матеріалу. Кожний теоретичний розділ супроводжується прикладами розв’язування задач. Наприкінці посібника пропонується достатній матеріал для самостійної роботи, який містить питання для самоконтролю, задачі для самостійного розв’язування та відповіді на них.

1 СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ

1.1 Поняття поля

Полем *будемо називати область простору, кожній точці* P *якої поставлена в однозначну відповідність деяка величина* $F(P)$.

Оскільки $F(P)$ визначає поле, іноді саму цю величину називають полем.

Якщо $F(P)$ є величиною фізичною, то і поле називається фізичним, а залежно від природи $F(P)$ поля поділяють на *скалярні* та *векторні*.

Прикладами скалярних фізичних полів можуть бути поля температури, атмосферного тиску, електричного потенціалу. До векторних фізичних полів належать, наприклад, поля сили тяжіння, швидкості частинок текучої рідини, густини електричного струму.

Якщо функція $F(P)$ *не змінюється з плином часу, то поле називається* ***стаціонарним*** *або* ***сталим****, у протилежному разі —* ***нестаціонарним*** *або* ***змінним***. Математична теорія поля вивчає властивості векторних та скалярних полів, до розгляду яких зводять численні задачі фізики, електротехніки, математики та інших наук.

1.2 Скалярне поле

Поверхня та лінія рівня.

Розглянемо скалярне поле $u(P)=u(x;\ y;\ z)$.

Поверхнею рівня скалярного поля $\mathbf{u(P)}$ *називається така поверхня, на якій функція* $u(P)$ *має стале значення.*

Рівняння поверхні рівня: $u(x;\ y;\ z) = C \qquad (C = \text{const})$.

Наприклад. Для поля $u = x^2+y^2+z^2$ поверхні рівня визначаються рівнянням $u = C$; $x^2+y^2+z^2 = C$. $(C \geq 0)$.

Для різних значень C щоразу будемо мати окрему сферу. Тому кажуть, що поверхні рівня складають сім'ю поверхонь. Якщо задати у просторі точку, наприклад, P (1;-1;2), то можна виділити ту єдину сферу, яка проходить через цю точку: $1^2+(-1)^2+2^2=C$, $C=6$, отже: $x^2+y^2+z^2=6$.

Для плоского скалярного поля розглядають лінії рівня.

Наприклад. Для поля $u=x^2-y^2$ лінії рівня визначаються рівнянням $x^2-y^2=C$. Якщо $C>0$, маємо сім'ю гіпербол з вершинами на осі Ox, якщо $C>0$ – це сім'я гіпербол з вершинами на осі Oy, якщо $C=0$, маємо асимптоти гіперболи.

Лінії рівня (*лінії рівного потенціалу* чи *еквіпотенціальні лінії*) знаходять широкий вжиток при розрахунках електричних полів. У цьому разі вони є лініями, уздовж яких електричний потенціал у всіх їх точках є сталим. Фізично це означає, що робота, виконувана силами електричного поля по переносу одиничного позитивного заряду з довільної точки даної лінії рівня в точку, потенціал якої прийнятий рівним нулю, буде однакова. Сукупність ліній рівного потенціалу дає наочне зображення електричного поля, що полегшує його вивчення.

1.3 Похідна за напрямком

Нехай задано скалярне поле $u=u(P)$. Візьмемо у просторі точку $P(x;\ y;\ z)$. Проведемо з точки P вектор $\bar{S}$, який має напрямні косинуси $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (рис.1.1). На векторі $\bar{S}$ на відстані ΔS від його початку розглянемо точку $P_1(x+\Delta x;\ y+\Delta y;\ z+\Delta z)$.

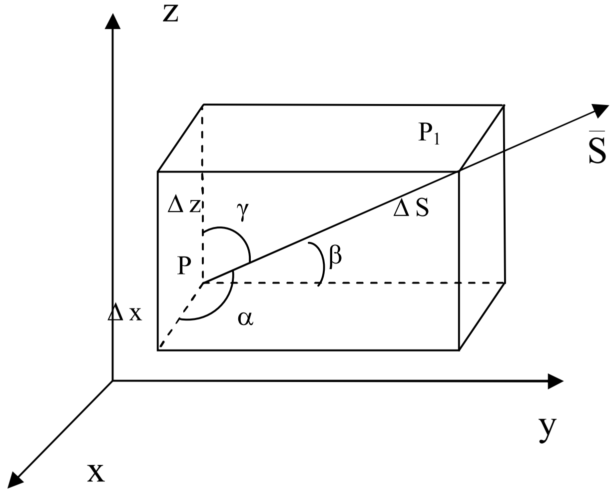

Рисунок 1.1 – Напрямний вектор

Отже, $\Delta S=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$.

Будемо вважати, що $u=u(x;\ y;\ z)$ неперервна і має неперервні похідні.

Повний приріст функції можна записати у вигляді

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+\varepsilon_3\Delta z,$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ наближаються до нуля, якщо $\Delta S \to 0$.

Поділимо рівність на ΔS:

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta S} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta S} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta S} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta S} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta S} + \varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta S}.$$

Враховуючи, що $\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\alpha$, $\frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos\beta$, $\frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos\gamma$, цю рівність перепишемо так:

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma.$$

Границя відношення $\frac{\Delta u}{\Delta S}$ *за* $\Delta S \to 0$ *зветься* ***похідною*** *від функції* $u = u(x;\ y;\ z)$ *у точці* $P(x;\ y;\ z)$ *за напрямком вектора* $\bar{S}$ *і позначається:* $\frac{\partial u}{\partial S} = \lim\limits_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S}$.

Отже, $$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

У випадку плоского поля $u = u(x;\ y)$ $\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$; $\cos\gamma = 0$ маємо: $$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha,$$

де α – кут, утворений напрямком $\bar{S}$ з віссю O_x.

Приклад. Задано функцію $u=x^2+y^2+z^2$. Знайти похідну $\frac{\partial u}{\partial S}$ в точці $P(1;1;1)$ у напрямку вектора $\bar{S} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$.

Розв'язання: Обчислюємо напрямні косинуси

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Далі $$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z$$

у точці P(1;1;1): $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_p = 2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_p = 2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_p = 2.$$

Отже, $$\left.\frac{\partial u}{\partial S}\right|_p = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

1.4 Градієнт

Нехай задано скалярне поле $u = u(x;\ y;\ z)$, а функція u має частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ та $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Вектор $\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$ *зветься* ***градієнтом скалярного поля*** u *і позначається:*

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}, \qquad |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Розглянемо зв’язок між градієнтом та похідною за напрямком.

Теорема. *Нехай задано скалярне поле* $u = u(x;\ y;\ z)$ *і в ньому визначено скалярне поле градієнтів* $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$.

Похідна $\frac{\partial u}{\partial S}$ за напрямком деякого вектора $\bar{S}$ дорівнює проекції вектора $\operatorname{grad} u$ на вектор $\bar{S}$

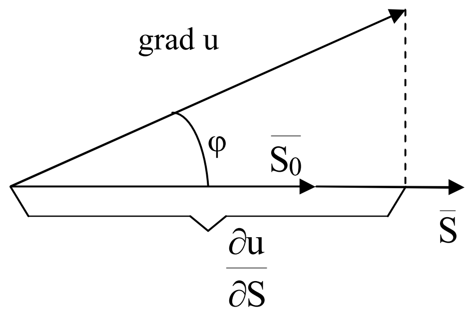

Рисунок 1.2 – Проекція градієнта на напрямок

Доведення. Розглянемо одиничний вектор $\overline{S_0}$, відповідний вектору $\bar{S}$:

$$\overline{S_0} = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k}.$$

Обчислимо скалярний добуток

$$\left(\operatorname{grad} u \cdot \overline{S_0}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Вираз у правій частині є не що інше, як похідна від функції $u = u(x;\ y;\ z)$ за напрямком $\bar{S}$: $\left(\operatorname{grad} u \cdot \overline{S_0}\right) = \dfrac{\partial u}{\partial S}$.

Якщо позначити кут між векторами $\operatorname{grad} u$ та $\overline{S_0}$ через φ (рис.1.2.), то можна записати $\left|\operatorname{grad} u\right| \cdot \cos\varphi = \dfrac{\partial u}{\partial S}$ або

$$\text{пр}_{\overline{S_0}} \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial S}.$$

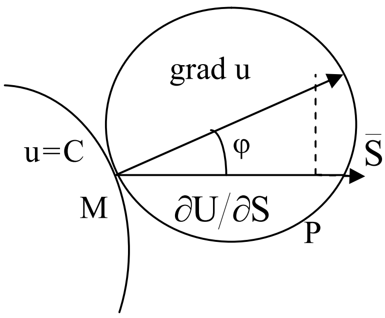

Рисунок 1.3 – Властивості градієнта

З доведеної теореми легко з'ясовується зв'язок між градієнтом та похідною в конкретній точці за напрямком. У точці $M(x;\ y;\ z)$ будуємо вектор $\operatorname{grad} u$ (рис.1.3). Далі будуємо сферу, для якої $\operatorname{grad} u$ є діаметром. З точки M проводимо вектор $\bar{S}$. Позначимо точку перетину його з поверхнею сфери через P. Тоді, очевидно, $MP = \left|\operatorname{grad} u\right| \cdot \cos\varphi.$ $\left(\varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$, тобто $MP = \dfrac{\partial u}{\partial S}$.

З'ясуємо деякі *властивості градієнта*.

1. Похідна в заданій точці за напрямком вектора $\bar{S}$ має найбільше значення, якщо напрямок вектора $\bar{S}$ співпадає з напрямком градієнта; це найбільше значення похідної дорівнює $\left|\operatorname{grad} u\right|$.

2. Похідна за напрямком вектора, перпендикулярного до вектора $\operatorname{grad} u$, дорівнює нулю.

3. Нарешті, якщо функція $u = u(x;\ y)$ є функцією двох змінних, то вектор $\operatorname{grad} u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\bar{j}$ лежить у площині Oxy.

Доведемо, що $\operatorname{grad} u$ направлений перпендикулярно до лінії рівня $u(x;\ y) = C$, яка лежить в площині Oxy і проходить через відповідну точку. Дійсно, кутовий коефіцієнт k_1 дотичної до лінії рівня $u(x;\ y) = C$ буде дорівнювати $k_1 = -\frac{u'_x}{u'_y}$. Кутовий коефіцієнт k_2 градієнта дорівнює $k_2 = \frac{u'_y}{u'_x}$.

Тоді $k_1 \cdot k_2 = -1$. Це і доводить справедливість твердження.

Приклад. Задана функція $u = x^2 + y^2 + z^2$. Визначити градієнт та модуль градієнта в точці M(1; 1; 1).

Розв'язання: У довільній точці $\text{grad } u = 2x\,\bar{i} + 2y\,\bar{j} + 2z\,\bar{k}$.

У точці M $\quad grad\, u\big|_M = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$, $\left|grad\, u\right|_M = 2\sqrt{3}$.

Вправи.

Дана функція $u(M) = u(x, y, z)$ і точки M_1 і M_2. Обчислити: 1) похідну цієї функції в точці M_1 за напрямом вектора $\overline{M_1M_2}$, 2) $grad\, u(M_1)$.

1. $u(M) = x^2y + y^2z + z^2x, M_1(1,-1,2), M_2(3,4,-1)$.
2. $u(M) = 5xy^3z^2, M_1(2,1,-1), M_2(4,-3,0)$.
3. $u(M) = z \cdot e^{x^2+y^2+z^2}, M_1(0,0,0), M_2(3,-4,2)$.
4. $u(M) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}, M_1(1,1,1), M_2(3,2,1)$.
5. $u(M) = x^2y + xz^2 - 2, M_1(1,1,-1), M_2(2,-1,3)$.
6. $u(M) = x \cdot e^y + y \cdot e^x - z^2, M_1(3,0,2), M_2(4,1,3)$.
7. $u(M) = ln(1 + xy^2 + z^2), M_1(1,1,1), M_2(3,-5,1)$.
8. $u(M) = x - 2y + e^z, M_1(-4,-5,0), M_2(2,3,4)$.

1.5 Криволінійний інтеграл по довжині (криволінійний інтеграл 1-го роду)

Задача про обчислення маси плоскої кривої. Нехай на площині XOY задана лінія L, по якій неперервно розподілена маса з густиною f(x; y). Потрібно обчислити масу дуги AB кривої L.

Розіб'ємо дугу AB кривої L точками на n елементарних дуг $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (рис.1.4) Розглянемо одну з них l_i. Будемо вважати, що довжина

Δl_i цієї дуги настільки мала, що її густина є сталою величиною і дорівнює значенню $f(\overline{x_i}; \overline{y_i})$ у деякій точці $(\overline{x_i}; \overline{y_i}) \in \Delta l_i$.

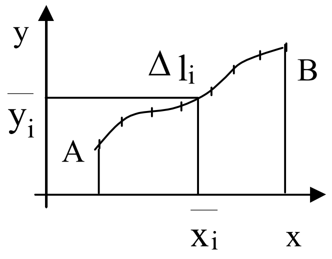

Рисунок 1.4 – Розбиття на елементарні дуги

Маса елементарної дуги $\Delta m_i = f(\overline{x_i}; \overline{y_i}) \cdot \Delta l_i$

Складемо маси всіх елементарних дуг: $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}; \overline{y_i}) \cdot \Delta l_i$. Одержана сума називається *інтегральною* для функції f(x,y), а границя цієї суми за необмеженого зростання точок поділу $(n \to \infty)$ називається *криволінійним інтегралом по дузі* (*криволінійним інтегралом 1-го роду*) і позначається так: $\int\limits_L f(x,y)dl = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}, \overline{y_i}) \cdot \Delta l_i$.

З іншого боку, очевидно, ця границя наближається до значення маси дуги кривої. Отже, $m = \int\limits_L f(x,y)\,dl$.

Якщо функція f(x; y) неперервна в деякій області D, яка містить у собі криву L, то криволінійний інтеграл від неї існує.

Властивості криволінійного інтеграла аналогічні властивостям звичайного одновимірного інтегралу.

1.6 Обчислення криволінійного інтеграла по дузі

Обчислення криволінійного інтеграла зводиться до приведення його до одновимірного інтегралу.

Випадок 1. Нехай лінія L задана в параметричному вигляді: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $a \le t \le b$, тобто коли t змінюється на відрізку [a;b], точка на кривій L з координатами (x(t);y(t)) рухається від точки A до точки B. Диференціал дуги такої кривої записується у вигляді $dl = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$.

У криволінійному інтегралі зробимо заміну змінної:

$$\int\limits_L f(x;y)\,dl = \int\limits_a^b f(x(t);y(t))\,\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\;dt\,.$$

Приклад. Обчислити $\int\limits_L ye^{-x}\,dl$, якщо $L:\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y = 2\,\mathrm{arctg}\,t - t \end{cases}\quad 0\le t\le 1.$

Розв'язання. Обчислимо: $x' = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\quad y' = \dfrac{2}{1+t^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Підставимо в інтеграл:

$$\int\limits_L ye^{-x}\,dl = \int\limits_0^1 (2\,\mathrm{arctg}\,t - t)\,e^{-\ln\left(1+t^2\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (2\,\mathrm{arctg}\,t - t)\,\frac{1}{1+t^2}\cdot\sqrt{\frac{4t^2+1-2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}}\,dt = \int\limits_0^1 (2\,\mathrm{arctg}\,t - t)\,\frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{2\,arctg\,t}{1+t^2}\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\,dt = arctg^2\,t\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|\Big|_0^1 =$$

$$= arctg^2\,1 - arctg^2\,0 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 1 = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

Випадок 2. Нехай лінія задана в явному вигляді: $y = y(x)$, $a \le x \le b$.

Тоді $dl = \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$. Відповідно $\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx\,.$

Приклад. Обчислити $\int\limits_{(AB)} x^2y\,dl$, якщо AB є чвертю кола $x^2+y^2=4$ $(x \ge 0,\ y \ge 0)$.

Розв'язання. $y = \sqrt{4-x^2}$ $\quad 0 \le x \le 2$; $\quad dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$;

$y' = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$$\int\limits_{(AB)} x^2y\,dl = \int\limits_0^2 x^2\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\int\limits_0^2 x^2\,dx = 2\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Якщо лінія L задана у просторі $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}\quad a \le t \le b$

то криволінійний інтеграл по дузі обчислюється за формулою

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt.$$

Приклад. Обчислити масу дуги конічної гвинтової лінії $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$, якщо густина $f(x;y;z)=2\pi$.

Розв'язання. $m = \int\limits_{(AB)} 2z\,dl$ у точках конічної гвинтової лінії

$f(x,y,z)=2e^t$, $0 \le t \le 2\pi$.

$$dl = \sqrt{\left(\dot{x}\right)^2 + \left(\dot{y}\right)^2 + \left(\dot{z}\right)^2}\,dt$$

$$dl = \sqrt{3}\,e^t\,dt$$

$$m = 2\sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi} e^{2t}\,dt = \sqrt{3} \text{ (одиниць маси).}$$

Вправи. Обчислити криволінійний інтеграл по дузі:

1. $\int 3x^2 dl$ $\quad L: y = lnx$ $\quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$
2. $\int xe^y\,dl$ $\quad L: y = lnx$ $\quad \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$
3. $\int\limits_L 16xy\,dl$ $\quad L: \begin{cases} x = sin\,4t \\ y = cos\,4t \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{16}$
4. $\int\limits_L \frac{z^2 dl}{x^2+y^2}$ $\quad L$: перший виток лінії $\begin{cases} x = 9\,cost \\ y = 9\,sint \\ z = 9t \end{cases}$
5. $\int\limits_L \left(z^2+y^2\right)dl$ $\quad L: \quad z^2+y^2=4$
6. $\int\limits_L xy\,dl$ $\quad L$: відрізок AB $\quad \left(A(0;0), B(4;4)\right)$
7. $\int\limits_L y\,dl$ $\quad L$: дуга параболи $y^2=2x$ від $A(0;0)$ до $B(2;2)$

8. $\int\limits_L x\,dl$ $\quad L$: дуга параболи $x^2 = 2y$ від $A(0;0)$ до $B(2;2)$

9. $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right) dl$ $\quad L$: коло $\quad x = 2\cos t \quad y = 2\sin t$

10. $\int\limits_L xy\,dl$ $\quad L$: чверть еліпсу в першому квадранті $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

11. $\int\limits_L \sqrt{2y}\,dl$ $\quad L$: перша арка циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$

12. $\int\limits_L \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dl$ $\quad L$: перший віток конічної лінії $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t \end{cases}$.

1.7 Застосування криволінійного інтегралу по дузі

Криволінійний інтеграл від функції $f(x,y)$ по дузі L є маса відповідної матеріальної кривої, густина якої виражається саме функцією $f(x,y)$: $m = \int\limits_L f(x,y)\,dl$.

Якщо густина є величина стала $f(x,y)=\rho=const$, тоді $m = \rho\int\limits_L dl$.

За допомогою криволінійного інтеграла можна обчислити статичні моменти плоскої матеріальної кривої:

– відносно осі Ох $\quad S_x = \int\limits_L y f(x,y)\,dl$;

– відносно осі Оу $\quad S_y = \int\limits_L x\, f(x,y)\,dl$;

або моменти інерції:

– відносно осі Ох $\quad I_x = \int\limits_L y^2 f(x,y)\,dl$;

– відносно осі Оу $\quad I_y = \int\limits_L x^2 f(x,y)\,dl$;

– відносно початку координат: $I_0 = \int\limits_L \left(x^2 + y^2\right) f(x, y)\, dl$.

Координати центра ваги для плоскої кривої: $x_c = \dfrac{S_y}{m}$; $y_c = \dfrac{S_x}{m}$.

Для просторової кривої:

статичні моменти:

$$S_{xy} = \int\limits_L z\, f(x; y; z)\, dl;\; S_{xz} = \int\limits_L y\, f(x; y; z)\, dl;\; S_{yz} = \int\limits_L x\, f(x; y; z)\, dl.$$

моменти інерції:

– відносно площини XOY $I_{xy} = \int\limits_L z^2 f(x, y, z)\, dl$;

– відносно осі OZ $I_z = \int\limits_L (x^2 + y^2) f(x, y, z)\, dl$;

– відносно початку координат $I_0 = \int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2) f(x, y, z)\, dl$.

Координати центра ваги для просторової кривої:

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m};\quad y_c = \frac{S_{xz}}{m};\quad x_c = \frac{S_{xy}}{m}.$$

2 ВЕКТОРНЕ ПОЛЕ

2.1 Векторне поле

Нехай в деякій області простору задано векторне поле

$$\overline{F}(P) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k},$$

де $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ та $R(x, y, z)$ − скалярні функції.

Означення. ***Векторною лінією поля*** $\overline{F}(P)$ *зветься лінія, дотична до якої в кожній її точці співпаде з вектором* $\overline{F}(P)$*, що визначає поле в цій точці.*

Прикладами векторних ліній поля в електротехніці є лінії вектора напруги магнітного поля $\overline{H}$ чи лінії вектора напруги електричного поля $\overline{E}$. Лінії вектора $\overline{E}$ називають силовими лініями внаслідок того, що напруга електричного поля чисельно дорівнює силі, яка діє в даній точці поля на одиничний додатній заряд. Напрямки вектора цієї сили та вектора $\overline{E}$ завжди співпадають.

Виведемо диференціальне рівняння векторних ліній.

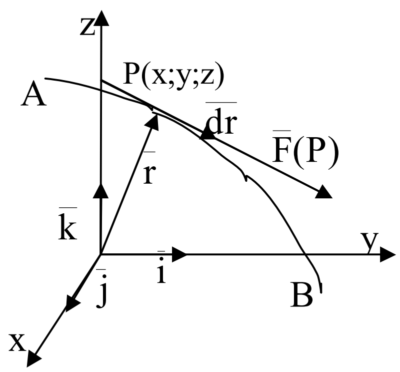

Рисунок 2.1 – Векторна лінія

Нехай (рис.2.1) AB . − векторна лінія, $\overline{r}$ – радіус-вектор точки $P(x; y; z)$. Тоді $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

Обчислимо $\overline{dr} = dx\,\overline{i} + dy\,\overline{j} + dz\,\overline{k}$.

З диференціального числення відомо, що вектор $\overline{dr}$ направлений по дотичній до AB в точці P. Отже, $\overline{dr} \,||\, \overline{F}(P)$, але тоді з умови паралельності векторів $\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$.

Це і є диференціальне рівняння векторних ліній. Якщо векторне поле за природою є поле сили, то і його векторні лінії будуть силовими.

Якщо векторне поле задано на площині, то таке поле будемо називати плоским: $\overline{F}(x, y) = P(x, y)\overline{i} + Q(x, y)\overline{j}$.

Приклад. Постійний електричний струм I тече по нескінченно довгому провіднику, співпадаючому з віссю OZ у напрямку знизу вгору. Вектор напруги магнітного поля $\overline{H}$, створюваного цим струмом, у довільній точці $P(x;y;z)$ дорівнює

$$\overline{H} = \frac{I}{2\pi\rho^2}\left(-y\overline{i} + x\overline{j}\right),$$

де $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – відстань від точки $P(x;\ y;\ z)$ до осі OZ. Знайти векторні лінії магнітного поля $\overline{H}$, як зображено на рисунку 2.2.

Розв'язання. Запишемо векторне поле у вигляді $\overline{H} = -\dfrac{Iy}{2\pi\rho^2}\overline{i} + \dfrac{Ix}{2\pi\rho^2}\overline{j} + 0\cdot\overline{k}$,

тобто $P = -\dfrac{Iy}{2\pi\rho^2}$, $\quad Q = \dfrac{Ix}{2\pi\rho^2}$, $\quad R = 0$.

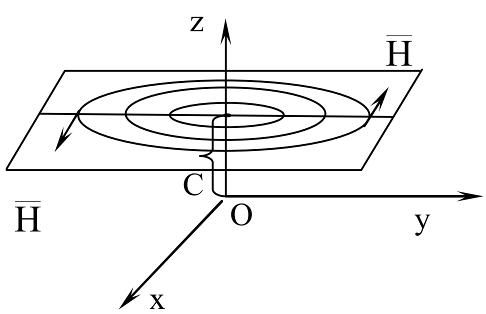

Рисунок 2.2 – Магнітне поле

Диференціальне рівняння векторних ліній після очевидних скорочень набуде вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{-y} = \dfrac{dy}{x} \\ z = C\ \left(C = \text{const}\right) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x\,dx = -y\,dy \\ z = C \end{cases}$$

Після інтегрування:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1^2 \quad \left(C_1 = \text{const}\right) \\ z = C \end{cases}$$

2.2 Криволінійний інтеграл по координатах

(криволінійний інтеграл 2-го роду)

Задача про обчислення роботи векторного поля

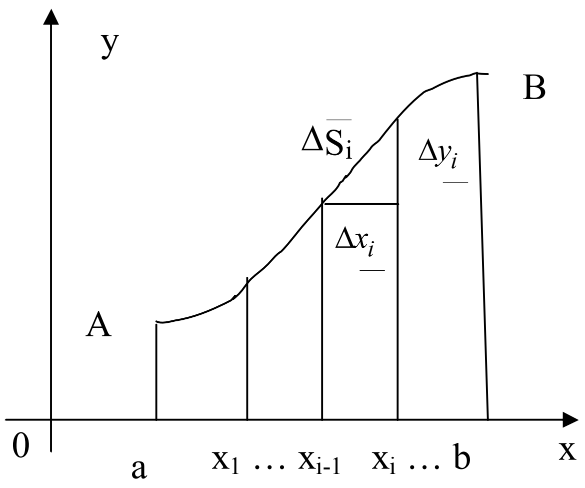

Рисунок 2.3 – Розбиття на елементарні ділянки

Розглянемо плоске векторне поле $\overline{F}(x, y) = P(x, y)\overline{i} + Q(x, y)\overline{j}$.

Нехай під дією сили матеріальна точка M рухається деякою лінією L. Необхідно обчислити роботу, яка виконується при переміщенні цієї точки від A до B по заданій лінії.

Розіб'ємо дугу AB на n частин точками з абсцисами $x_0 = a$, $x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ (рис.2.3).

Розглянемо і-ту елементарну ланку цієї дуги $\Delta\overline{S_i} = \Delta x_i\,\overline{i} + \Delta y_i\,\overline{j}$.

Будемо вважати, що довжина вектора $\left|\Delta\overline{S_i}\right|$ настільки мала, що для всього цього проміжку значення вектора функції стале і дорівнює значенню в деякій середній точці $\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}\right) \in \Delta\overline{S_i}$: $\overline{F}(\overline{x_i}, \overline{y_i}) = P\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}\right)\overline{i} + Q\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}\right)\overline{j}$.

Елементарна робота на ділянці $\Delta\overline{S_i}$ дорівнює:

$$\Delta A_i = \left(\overline{F}(\overline{x_i}, \overline{y_i})\Delta\overline{S_i}\right) = P\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}\right)\Delta x_i + Q\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}\right)\Delta y_i$$

Якщо обчислити елементарну роботу на кожній з елементарних ділянок, можна скласти суму

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} P\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}\right)\Delta x_i + Q\left(\overline{x_i}, \overline{y_i}\right)\Delta y_i \ .$$

Одержана сума є інтегральною, а її границя при необмеженому збільшенні точок розбиття (n→∞) *називається* ***криволінійним інтегралом*** *і позначається так*:

$$\int_L P\left(x, y\right)dx + Q\left(x, y\right)dy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i+1}^{n} P\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i\right)\Delta x_i + Q\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i\right)\Delta y_i \,.$$

Інтеграл $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ зветься *криволінійним інтегралом по координатах* або *криволінійним інтегралом 2-го роду.*

Для просторового векторного поля інтеграл має вигляд

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Криволінійний інтеграл у векторному полі зветься ***циркуляцією вектора*** $\overline{F}$ ***по дузі*** L *і позначається:* $\int\limits_L \overline{F}\,\overline{ds}$.

Якщо лінія L замкнена, то інтеграл записується так: $\oint \overline{F}\,\overline{ds}$, крім того, обов'язково вказують напрямок обходу.

Отже: $\int\limits_L \overline{F}\,\overline{ds} = \int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$.

2.3 Обчислення криволінійного інтегралу по координатах

Розглянемо у просторі векторне поле

$$\overline{F(x,y,z)} = P(x,y,z)\,\bar{i} + Q(x,y,z)\,\bar{j} + R(x,y,z)\,\bar{k}.$$

Обчислимо циркуляцію вектора $\overline{F}$ по дузі L, заданій в параметричному вигляді $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ $\quad \alpha \le t \le \beta$

Знайдемо $\begin{matrix} dx = x'(t)\,dt \\ dy = y'(t)\,dt \\ dz = z'(t)\,dt \end{matrix}$ і підставимо в інтеграл:

$$\int\limits_L \overline{F}\,\overline{ds} = \int\limits_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\right]dt.$$

Приклад. Обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + (x + y - 1)\bar{k}$ по відрізку прямої, який з'єднує точки A(1; 1; 1) та B(2; 3; 4).

Розв'язання. Запишемо рівняння лінії L тобто прямої AB:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

Перейдемо до параметричного запису прямої і обчислимо диференціали:

$$\begin{cases} x=t+1 & dx=dt \\ y=2t+1 & dy=2dt \\ z=3t+1 & dz=3dt \end{cases}$$

Врахуємо, що при заміні змінної змінюються межі інтегрування, а саме, якщо $1 \le x \le 2$, то $0 \le t \le 1$.

Отже: $$\int\limits_L \overline{F}\,\overline{ds}=\int\limits_A^B xdx+ydy+(x+y-1)dz=$$

$$=\int\limits_0^1 \left[t+1+(2t+1)\cdot 2+(t+1+2t+1-1)\cdot 3\right]dt=\int\limits_0^1 (14t+6)dt=14\cdot\frac{t^2}{2}+6z)\Bigg|_0^1=13.$$

У випадку плоского векторного поля $\overline{F}(x,y)=P(x,y)\overline{i}+Q(x,y)\overline{j}$ якщо крива L задана в явному вигляді $y=y(x)$ $(a \le x \le b)$, можна використати також попередній спосіб, записавши рівняння лінії L так:

$$L:\ \begin{cases} y=y(x) \\ x=x \end{cases} \quad a \le x \le b, \quad \text{тоді} \quad \begin{cases} dy=y'(x)dx \\ dx=dx \end{cases}$$

і маємо інтеграл:

$$\int\limits_L \overline{F}\,\overline{ds}=\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b \left[P(x,y(x))+Q(x,y(x))\,y'(x)\right]dx.$$

Приклад. Обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{F}(x,y)=2xy\overline{i}+x^2\overline{j}$ по відрізку прямої від точки A(0; 0) до точки B(1; 1).

Розв'язання. Запишемо рівняння лінії L: $y=x$ $(0 \le x \le 1)$, звідки $dy=dx$, а інтеграл набуде вигляду

$$\int\limits_L \overline{F}\,\overline{ds}=\int\limits_L 2xydx+x^2dy=\int\limits_0^1 \left[2x\cdot x+x^2\right]dx=3\int\limits_0^1 x^2dx=3\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=1.$$

Приклад. Обчислити роботу силового поля $\overline{F}=2xy\overline{i}+y^2\overline{j}-x^2\overline{k}$ при переміщенні матеріальної точки уздовж перерізу гіперболоїда $x^2+y^2-2z^2=2$ площиною $y=x$ від точки A(1; 1; 0) до точки $B\left(\sqrt{2};\sqrt{2};1\right)$.

Розв'язання. $A=\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_l 2xy\,dx+y^2dy-x^2dz$.

Запишемо рівняння лінії $\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=2 \\ y=x \end{cases}$ у параметричному вигляді:

$\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\sqrt{t} \\ z=\sqrt{t-1} \end{cases}$ при цьому $1\le t\le 2$, якщо, наприклад $1\le x\le\sqrt{2}$. Далі обчислимо

$$dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$$
$$dy=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$$
$$dz=\frac{dt}{2\sqrt{t-1}}$$

і все підставимо в інтеграл:

$$\int\limits_l 2xy\,dx+y^2dy-x^2dz=\int\limits_1^2\left[2\sqrt{t}\sqrt{t}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}+t\,\frac{1}{2\sqrt{t}}-t\,\frac{1}{2\sqrt{t-1}}\right]dt=.$$

$$=\int\limits_1^2\left(\sqrt{t}+\frac{1}{2}\sqrt{t}-\frac{t}{2\sqrt{t-1}}\right)dt=\frac{3}{2}\int\limits_1^2\sqrt{t}\,dt-\frac{1}{2}\int\limits_1^2\sqrt{t-1}\,dt-\frac{1}{2}\int\limits_1^2\frac{dt}{\sqrt{t-1}}=$$

$$=t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2-\frac{1}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2-\sqrt{t-1}\Big|_1^2=2\sqrt{2}-1-\frac{1}{3-1}=2\sqrt{2}-\frac{7}{3}=\frac{6\sqrt{2}-7}{3}$$

Криволінійний інтеграл визначається підінтегральним виразом, формою кривої інтегрування та напрямком інтегрування.

Властивість 1. Якщо змінюється напрямок інтегрування, то криволінійний інтеграл теж змінює знак.

Це виходить з означення криволінійного інтеграла по координатах, оскільки при зміні напрямку інтегрування вектор $\Delta\overline{S_i}$, а відповідно і його проекції Δx та Δy теж змінюють знак.

Властивість 2. Розіб'ємо дугу інтегрування L на частини, нехай $\overset{\cup}{AB} = \overset{\cup}{AC} + \overset{\cup}{CB}$. Тоді $\int\limits_{L} \overline{F}\,\partial\overline{S} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \overline{F}\,\partial\overline{S} = \int\limits_{\overset{\cup}{AC}} \overline{F}\,\partial\overline{S} + \int\limits_{\overset{\cup}{CB}} \overline{F}\,\partial\overline{S}$.

Ця властивість справедлива для довільного числа доданків.

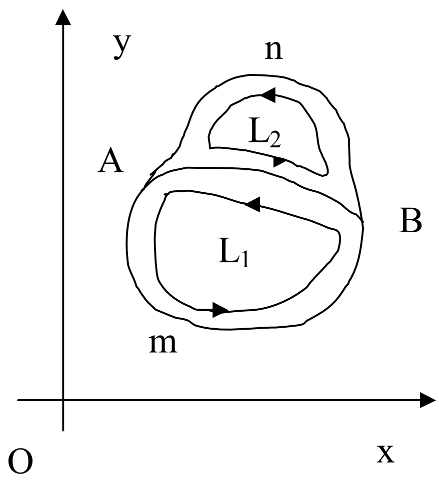

Рисунок 2.4 – Циркуляція по замкненому контуру

Властивість 3. Розглянемо циркуляцію $\int\limits_{L} \overline{F}\,\partial\overline{S}$ по замкненому контуру L. З'єднаємо дві довільні точки цього контуру дугою $\overset{\cup}{AB}$ (рис.2.4). Таким чином одержимо два замкнені контури

L_1: AmB та L_2: BnA.

Тоді $\int\limits_{L} \overline{F}\,\partial\overline{S} = \int\limits_{L_1} \overline{F}\,\partial\overline{S} + \int\limits_{L_2} \overline{F}\,\partial\overline{S}$ враховуючи, що $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \overline{F}\,\partial\overline{S} + \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \overline{F}\,\partial\overline{S} = 0$.

Вправи. Обчислити криволінійний інтеграл по координатах:

1. $\int\limits_{L_{OB}} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$ L: дуга параболи $y = 2\sqrt{x}$ від O(0; 0) до B(1; 2).
2. $\int\limits_{L_{AB}} (x + y)dx + (x - y)dy$ L: дуга параболи $y = x^2$ від A(-1; 1) до B(1; 1).
3. $\int\limits_{L_{AB}} xe^x ydx + (x - 1)e^x dy$ L: відрізок AB (A(0; 2); B(1; 2)).
4. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy$ L: дуга параболи $y = x^2$ від A(-1; 1) до B(1; 1).
5. $\int\limits_{L_{AB}} xydx + (y - x)dy$ L: дуга кубічної параболи $y = x^3$ від A(0; 0) до B(1; 1).
6. $\int\limits_{L_{AB}} -x\cos ydx + y\sin xdy$ L: відрізок AB(A(0; 0); B($\pi; 2\pi$)).
7. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{y}{x}dl$ L: дуга параболи $y = \frac{1}{2}x^2$ від A(1; $\frac{1}{2}$) до B(2; 2).

8. $\int\limits_{L_{AB}} xydx + (y - x)dy$ L: відрізок AB (A(0; 0); B(1; 1)).

9. $\int\limits_{L_{AB}} 2xydx + x^2 dy$ L: дуга параболи $y = x^2$ від A(0; 0) до B(1; 1).

10. $\int\limits_{L} 2xydx + x^2 dy$ L: дуга параболи $y^2 = x$ від A(0; 0) до B(1; 1).

11. $\int\limits_{L} ydx + xdy$ L: чверть кола $x = 2\cos t, y = 2\sin t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

12. $\int\limits_{L} ydx + xdy$ L: еліпс $x = 4\cos t, y = \sin t$, що обігається у додатному напрямку.

13. $\int\limits_{L} \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$ L: півколо $x = 2\cos t, y = 2\sin t, 0 \le t \le \pi$.

14. $\int\limits_{L_{AB}} xdx + ydy + (x + y - 1)dz$ L: відрізок AB (A(1; 1; 1); B(2; 3; 4)).

2.5 Формула Гріна

Встановимо зв'язок між подвійним інтегралом по деякій плоскій області D та криволінійним інтегралом по границі L цієї області.

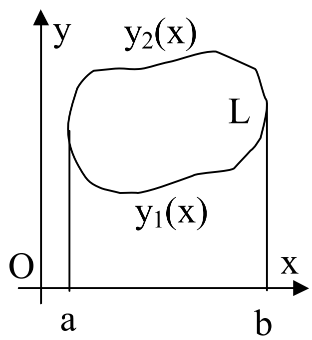

Рисунок 2.5 – Плоска область, обмежена контуром

Теорема. *Нехай задано плоске векторне поле* $\overline{F}(x, y) = P(x, y)\overline{i} + Q(x, y)\overline{j}$, *де* P (x,y) та Q (x,y) – *функції двох змінних, неперервні разом з частинними похідними першого порядку. Якщо* L – *лінія, яка обмежує область* D, (рис.2.5), *то*

$$\int\limits_{L} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint\limits_{D} \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] dxdy.$$

Доведення.

Обчислимо

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy =$$

$$= \int_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int_a^b \left[P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\right] dx = -\int_b^a P(x, y_2(x)) dx -$$

$$-\int_a^b P(x, y_1(x)) dx = -\int_L P(x,y) dx$$

аналогічно $\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \int_L Q(x,y)\, dy$.

Склавши відповідні вирази, маємо:

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right] dxdy.$$

Приклад. Обчислити $\oint_L \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dy$, якщо L. – замкнений контур ABCD, обмежений колами $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ та прямими $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, $x>0$, $y>0$ (рис.2.6.).

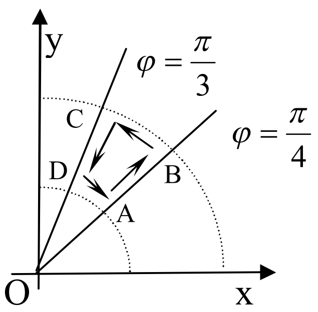

Рисунок 2.6 – Область у полярних координатах

Розв'язання. У прийнятих позначеннях

$$P(x,y) = \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x},\quad Q(x,y) = \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

Знайдемо

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2},\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{2}{x^2 + y^2}.$$

Тоді за формулою Гріна

$$\int_L \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dy = \iint_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2},$$

де область D обмежена контуром L.

Перейдемо до полярних координат $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ де $\begin{matrix} 1 \le \rho \le 2 \\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3} \end{matrix}$.

Отже: $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_1^2 \frac{1}{\rho^2}\rho\ d\rho = \frac{\pi}{12}\ln 2$.

Вправи. Обчислити криволінійні інтеграли.

1. За допомогою формули Гріна обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (x-y)dx + (x+y)dy$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$.
2. Обчислити $\int\limits_L (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy$, якщо L – коло $x^2 + y^2 = R^2$;

   a) безпосередньо;

   b) за допомогою формули Гріна.
3. Обчислити $\int\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, де L – коло $x^2 + y^2 = ax$

   a) безпосередньо;

   b) за допомогою формули Гріна.
4. За допомогою формули Гріна обчислити різницю між інтегралами $\mathrm{I}_1 = \int\limits_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$ та $\mathrm{I}_2 = \int\limits_{AnB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$, де AmB –

відрізок прямої, яка з $\int\limits_{L_{AB}} \frac{y}{x} de$єднує точки A(0; 0) та B(1; 1), а AnB – дуга параболи $y = x^2$.

5. Обчислити за допомогою формули Гріна $\int\limits_L 2(x^2 - y^2)dx + (x+y)^2 dy$, де L – контур трикутника з вершинами у точках A(1; 1), B(2; 2), C(1; 3), що пробігається у додатному

напрямку. Перевірте результат, обчислюючи безпосередньо інтеграл

6. Обчислити $\int\limits_L -x^2ydx + xy^2dy$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$.

7. Через точки A(1; 0) та B(2; 3) проведена парабола AmB, віссю якої є вісь ОУ та хорда її AnB. Знайти $\int\limits_{AmBnA} (x+y)dx - (x-y)dy$:

a) безпосередньо;

b) за допомогою формули Гріна.

2.6 Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування

Розглянемо приклад. Раніше ми обчислили інтеграл

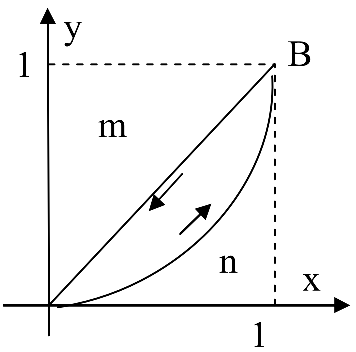

Рисунок 2.7 – Шлях інтегрування

$\int\limits_L \overline{F}\overline{ds} = \int\limits_A^B 2xy\,dx + x^2\,dy$ по відрізку прямої, що з'єднує точки A(0, 0) та B(1, 1), тобто L: y = x (рис. 2.7) і одержали значення інтеграла, що дорівнює 1.

Обчислимо той самий інтеграл, але шлях інтегрування оберемо параболою:

L: $y = x^2$ $\quad dy = 2xdx \qquad \int\limits_A^B 2xydx + x^2dy =$

$$= \int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} 2xydx + x^2dy = \int\limits_0^1 (2x \cdot x + x^2 \cdot 2x)dx = 4\int\limits_0^1 x^3dx = \frac{4x^4}{4}\Bigg|_0^1 = 1.$$

Як бачимо, значення інтеграла не змінилося, хоча шлях інтегрування був іншим: $\int\limits_{AmB} \overline{F}\,\overline{ds} = \int\limits_{AnB} \overline{F}\,\overline{ds}$

З іншого боку, якщо обчислити інтеграл по замкненій кривій L: AnBmA, то, очевидно, $\int\limits_L \overline{F}\,\overline{ds} = 0$.

Виникає питання: за яких умов щодо функцій P(x,y) та Q(x,y) $\int\limits_L \overline{F}\overline{ds} = \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$?

Теорема. *Нехай у всіх точках деякої області* D *функції* P(x, y) *та* Q(x, y) *разом зі своїми частинними похідними* $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ *та* $\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ *неперервні. Тоді для того, щоб криволінійний інтеграл по довільному замкненому контуру* L*, який цілком лежить в області* D*, дорівнював нулю, тобто* $\int\limits_L Pdx + Qdy = 0$*, необхідно і достатньо виконання умови* $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ *у всіх точках області* D.

Доведення. Нехай контур L обмежує область D. Запишемо формулу Гріна: $\int\limits_L P\partial x + Q\partial y = \iint\limits_D \left[\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy$.

Якщо умова теореми виконана, то подвійний інтеграл у правій частині дорівнює нулю і цим доведено достатність.

Доведемо необхідність. Допустимо, що $\int\limits_L Pdx + Qdy = 0$, а умова не виконується, тобто $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \neq 0$ хоча б в одній точці області D, скажімо, у точці $P(x_0;\ y_0)$ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} > 0$.

Оскільки в лівій частині нерівності функція неперервна, то вона буде додатня і у всіх точках деякої достатньо малої області D_1, яка містить у собі точку $P(x_0,y_0)$. Візьмемо подвійний інтеграл по цій області, який матиме додатнє значення: $\iint\limits_{D1}\left[\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy > 0$

Проте за формулою Гріна ліва частина нерівності дорівнює криволінійному інтегралу по контуру L_1, який обмежує область D_1, і дорівнює нулю. Виходить, наше допущення невірне і це приводить до висновку, що $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ в усіх точках області D.

Коли згадати, що рівність $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ є необхідною і достатньою умовою того, щоб вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ був повним диференціалом, то доведену теорему можна сформулювати так: для того, щоб криволінійний інтеграл $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не залежав від лінії інтегрування, необхідно і достатньо, щоб його підінтегральний вираз був повним диференціалом.

Підсумовуючи *висновки* нашого дослідження, можна стверджувати, що коли область D однозв'язна і функції P(x,y) та Q(x,y) разом зі своїми частинними похідними в цій області неперервні, то всі чотири наступні твердження рівносильні, тобто якщо виконується одне з них, то виконуються і всі інші:

1) криволінійний інтеграл $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, взятий по довільному замкненому контуру, цілком розміщеному в області D, дорівнює нулю;

2) криволінійний інтеграл $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не залежить від лінії інтегрування;

3) вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повний диференціал;

4) у всіх точках області D справедлива рівність $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Вправи. Перевірити, що інтеграли по замкненому контуру дорівнюють нулю:

1. $\oint\limits_L \sin x dx + \cos y dy$.

2. $\oint\limits_L \frac{ydx + xdy}{xy}$.

3. $\oint\limits_L \frac{y}{x} \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2}$.

4. $\int\limits_L e^{xy}\left(ydx + xdy\right)$.

5. $\oint\limits_L \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}\right)dy$.

6. $\oint\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)\left(xdx+ydy+zdz\right)$.

7. $\oint\limits_L \dfrac{xdx+ydy+zdz}{x^2+y^2+z^2}$.

8. $\oint\limits_L \dfrac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Обчислити криволінійні інтеграли від повних диференціалів:

1. $\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} ydx+xdy$.

2. $\int\limits_{(0;0)}^{(2;1)} 2xydx+x^2dy$.

3. $\int\limits_{(3;4)}^{(5;12)} \dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ (початок координат не лежить на контурі інтегрування).

4. $\int\limits_{(0;1)}^{(3;4)} xdx+ydy$.

5. $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} (x+y)(dx+dy)$.

6. $\int\limits_{(1;2)}^{(2;1)} \dfrac{ydx+xdy}{y^2}$ (не перетинають вісь OX).

7. $\int\limits_{(1;0;-1)}^{(6;4;8)} xdx+ydy-zdz$.

8. $\int\limits_{(0;0;0)}^{(3;4;5)} \dfrac{xdx+ydy-zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

2.7 Обчислення функції за її повним диференціалом

Розглянемо функцію u = u(x,y), задану в деякій області D, де вона неперервна разом зі своїми частинними похідними. Обчислимо її повний диференціал

$$du = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy.$$

Позначимо $P(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$, $Q(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, тоді

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

тобто, очевидно, для повного диференціалу $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

Проте за цієї умови криволінійний інтеграл $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не залежить від шляху інтегрування, а залежить від початкової і кінцевої точок. Звичайно такий інтеграл позначають так: $\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, а шлях інтегрування обирають довільно.

Розглянемо приклад: $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx + x^2dy$, а шлях інтегрування оберемо вздовж осей координат (рис.2.8).

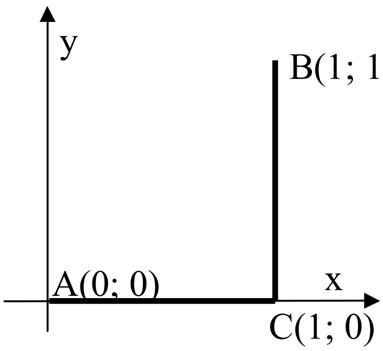

Рисунок 2.8 – Шлях інтегрування між заданими точками

На відрізку АС: $y = 0$; $dy = 0$, значить, інтеграл дорівнює нулю.

На відрізку СВ: $x = 1$; $dx = 0$, отже:

$$\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx + x^2dy = \int\limits_0^1 dy = y\Big|_0^1 = 1.$$

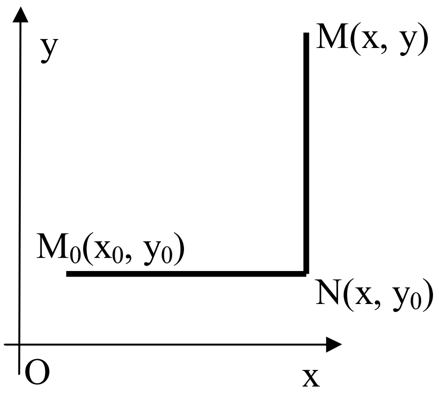

Рисунок 2.9 – Шлях інтегрування з фіксованою початковою точкою

Розглянемо тепер інтеграл з фіксованою початковою точкою $M_0(x_0; y_0)$ та змінною кінцевою $M(x; y)$ $\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ а шлях інтегрування оберемо так (рис.2.9):

на відрізку M_0N: $y = y_0$; $dy = 0$ інтеграл набуде вигляду:

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial u(x_i, y_0)}{\partial x}dx = u(x, y_0) - u(x_0, y_0)$$

на відрізку NM: $x = \text{const}$; $dx = 0$, а інтеграл набуде вигляду:

$$\int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)dy = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}dy = u(x, y) - u(x_i, y_i).$$

Взагалі:

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + u(x, y) - u(x, y_0) =$$

$$= u(x, y) - u(x_0, y_0).$$

Якщо функцію $u(x,y)$ назвемо первісною, то для повного диференціалу $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ одержана формула *є формулою Ньютона – Лейбниця* для криволінійних інтегралів.

Ця формула дає спосіб відшукання функції за її повним диференціалом:

$$u(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + u(x_0, y_0).$$

Приклад. Пересвідчитись, що вираз $\left(e^{xy} + 5\right)(xdy + ydx)$ є повним диференціалом деякої функції $u = u(x, y)$ та знайти цю функцію.

Розв’язання. Запишемо заданий вираз у вигляді $\left(e^{xy} + 5\right) \cdot ydx + \left(e^{xy} + 5\right) \cdot xdy$ тобто $P(x, y) = \left(e^{xy} + 5\right) \cdot y$; $Q(x, y) = \left(e^{xy} + 5\right) \cdot x$.

Обчислимо $\qquad \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = e^{xy}xy + e^{xy} + 5$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = e^{xy}xy + e^{xy} + 5$$

Як бачимо, $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ значить, заданий вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$.

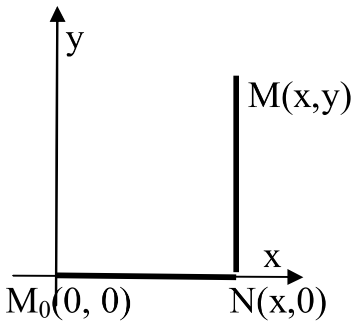

Рисунок 2.10 – Шлях інтегрування від початку координат до довільної точки

Обчислимо

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \left(e^{xy} + 5\right)ydx + \left(e^{xy} + 5\right)xdy$$

Шлях інтегрування оберемо так (рис. 2.10):

на відрізку M_0N: $y = 0$; $dy = 0$, на відрізку NM: $x = const$; $dx = 0$, отже:

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} \left(e^{xy} + 5\right)ydx + \left(e^{xy} + 5\right)xdy = I_{M_0N} + I_{NM} =$$

$$= 0 + \int_0^y \left(e^{xy} + 5\right)xdy = x \cdot \left(\frac{1}{x}e^{xy} + 5y\right)\Bigg|_0^y = x\left(\frac{1}{x}e^{xy} + 5y\right) - 1 = e^{xy} + 5xy - 1.$$

Отже: $u(x,y) = e^{xy} + 5xy - 1$.

Перевіримо правильність результату, тобто обчислимо повний диференціал функції $u(x,y) = e^{xy} + 5xy - 1$:

$$\partial u(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy = \left(e^{xy}y + 5y\right)dx + \left(e^{xy}x + 5x\right)dy.$$

Вправи. Знайти функції за даними повними диференціалами:

1. $du = x^2dx + y^2dy$.
2. $du = 4\left(x^2 - y^2\right)\left(xdx - ydy\right)$.
3. $du = \dfrac{(x + 2y)dx + ydy}{(x + y)^2}$.

4. $du = (2x + 3y)dx + (3x - 4y)dy$.

5. $du = \left(3x^2 - 2xy + y^2\right)dx - \left(x^2 - 2xy + 3y^2\right)dx$.

6. $du = e^{x-y}\left[(1 + x + y)dx - (1 - x - y)dy\right]$.

7. $du = \dfrac{dx}{x + y} + \dfrac{dy}{x + y}$.

8. $du = \dfrac{dx + dy + dz}{x + y + z}$.

9. $du = \dfrac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

10. $du = \dfrac{yzdx + xzdy + xydz}{1 + x^2y^2z^2}$.

11. $du = \dfrac{2(zxdy + xydz - yzdx)}{(x - yz)^2}$.

3 ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛІВ. ОПЕРАТОР ГАМІЛЬТОНА

3.1 Потенціальне векторне поле

Розглянемо плоске векторне поле

$$\overline{F}(x, y) = P(x, y)\overline{i} + Q(x, y)\overline{j}.$$

Нехай у деякій однозв'язній області D поля виконується умова

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}.$$

Тоді вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції

$u = u(x, y)$, тобто $du = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}dy$,

де $P(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}dx, \quad Q(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}dy$.

Але тоді задане векторне поле можна записати так:

$$\overline{F}(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\overline{j} = \operatorname{grad} u(x, y).$$

***Означення**. Векторне поле $\overline{F}$ зветься **потенціальним**, якщо воно є градієнтом деякого скалярного поля* u*:* $\overline{F} = \operatorname{grad} u(x, y)$.

Скалярна функція u зветься *потенціалом* векторного поля $\overline{F}$.

Іноді перед градієнтом ставиться знак " – ", що не має принципового значення, а лише відповідає конкретному фізичному змісту. Наприклад, для електростатичного поля $\overline{F} = -\operatorname{grad} u$ означає, що в напрямку вектора напруги електричного поля $\overline{F}$ електричний потенціал спадає.

Як бачимо, умова $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ у потенціальному полі рівнозначна існуванню повного диференціала. Відповідно, задача відшукання повного диференціала рівнозначна задачі обчислення потенціалу векторного поля.

Зазначимо, що потенціал векторного поля обчислюється з точністю до довільної сталої на підставі того, що $\operatorname{grad}(u+c) = \operatorname{grad} u$.

Приклад. Пересвідчитись, що векторне поле

$\bar{F} = (2x - 3y^2 + 1)\bar{i} + (2 - 6xy)\bar{j}$ потенціальне і знайти його потенціал.

Розв'язання. $P(x,y)=2x-3y^2+1$ $Q(x,y)=2-6xy$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -6y \qquad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -6y$$

$\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ свідчить про те, що поле потенціальне. Потенціал векторного поля дорівнює циркуляції цього поля по деякій лінії L

$$\int_L \bar{F}\,\overline{ds} = \int_L (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy.$$

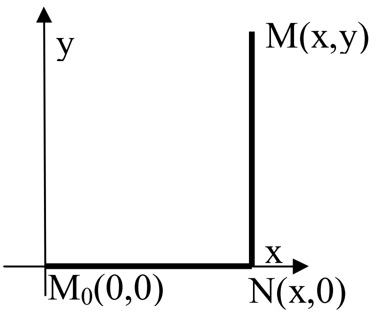

Рисунок 3.1 – Шлях інтегрування

Шлях інтегрування L виберемо так (рис.3.1):

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy =$$

по відрізку M_0N: $y=0$; $dy=0$

по відрізку NM: $x=x=const$; $dx=0$

$$= \int_0^x (2x+1)dx + \int_0^y (2 - 6xy)dy = \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_0^x +$$

$$+ (2y - 6x \cdot \frac{y^2}{2})\Bigg|_0^y = x^2 + x + 2y - 3xy^2$$

Отже, $u(x, y)=x^2+x+2y-3xy^2+C$ $(C = const)$.

Розглянемо просторове векторне поле

$$\bar{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}.$$

Якщо векторне поле $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ потенціальне, а $u = u(x, y, z)$ – його потенціал, то $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $R = \dfrac{\partial u}{\partial z}$.

У потенціальному векторному полі циркуляція не залежить від шляху інтегрування, а лише від початкової і кінцевої точок $M_0(x_0; y_0; z_0)$ та $M(x; y; z)$:

$$\int_L \bar{F}\,\overline{ds} = \int_{M_0}^{M} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{M_0}^{M} \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz =$$

$$= \int_{M_0}^{M} du = u\Bigg|_{M_0}^{M} = u(M) - u(M_0).$$

Обчислимо ротор потенціального поля:

$$rot\,\vec{F} = \left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}\right|_M = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right)\vec{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)\vec{k} = \vec{0}\,.$$

Отже, $rot\,\vec{F} = \vec{0}$, якщо поле – потенціальне. Тобто, потенціальне поле є безвихровим.

Зворотне твердження також вірне. Тобто, безвихрове. поле є потенціальним.

Зокрема, рівність $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{u} = \vec{0}$ свідчить про те, що поле градієнтів завжди потенціальне.

Висновок: щоб визначити, чи задане векторне поле потенціальне, достатньо пересвідчитись, що його ротор дорівнює нулю.

Для потенціального поля справедлива теорема, яка відповідає розглянутим раніше властивостям криволінійного інтегралу:

Теорема. Наступні чотири властивості векторного поля $\overline{F}$, заданого в однозв'язній області D, еквівалентні:

1. Циркуляція поля $\overline{F}$ по будь-якому замкнутому контуру, розміщеному
в області D, дорівнює нулю.

2. Циркуляція поля $\overline{F}$ упродовж довільної кривої L (яка лежить в області D) з початком у точці А та кінцем у точці В залежить тільки від положення точок А та В і не залежить від форми кривої.

3. Існує функція $u(x; y; z)$ така, що $\overline{F} = grad u$.

4. Поле $\overline{F}$ є безвихорним, тобто $rot\overline{F} = 0$.

3.2 Оператор Гамільтона та його застосування

Оператор Гамільтона, або набла записується символічно як вектор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}.$$

3.3 Оператор Гамільтона у скалярному полі

Нехай задано скалярне поле $u = u(x, y, z)$.

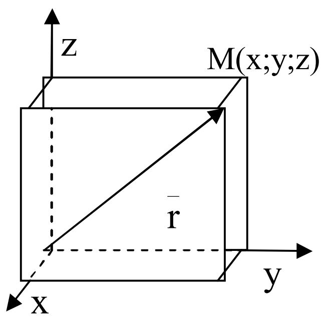

Рисунок 3.2 – Просторовий вектор

Застосуємо до функції $u = u(x, y, z)$ оператор набла:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} = grad\, u$$

Отже, $\nabla u = \mathrm{grad}\, u$

Приклад 1. Знайти $\mathrm{grad}\left|\bar{r}\right|$, де $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ відповідно $\left|\bar{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (рис.3.2).

Розв'язання. $\mathrm{grad}\left|\bar{r}\right| = \nabla\left|\bar{r}\right| =$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)\bar{k} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\bar{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\bar{k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\left(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right) = \frac{\bar{r}}{\left|\bar{r}\right|}.$$

Приклад 2. Знайти $\operatorname{grad}\dfrac{1}{|\bar{r}|}$.

Розв'язання. $\operatorname{grad}\dfrac{1}{|\bar{r}|} = \operatorname{grad}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\bar{k} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}2x\bar{i} - \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}2y\bar{j} - \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}2z\bar{k} =$$

$$= -\frac{x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} = -\frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3} .$$

3.4 Оператор Гамільтона у векторному полі

Нехай задано векторне поле $\bar{F} = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$.

Застосуємо оператор набла до цього векторного поля за правилами множення векторів. Оскільки добуток двох векторів може бути або скалярним, або векторним, то розглянемо спочатку скалярний добуток:

$$\left(\nabla\cdot\bar{F}\right) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\cdot\left(P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}\right)\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} .$$

Такий добуток має назву *дивергенція* і позначається так: $\operatorname{div}\bar{F}$.

Отже, $\operatorname{div}\bar{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} \qquad \nabla\cdot\bar{F} = \operatorname{div}\bar{F}$.

Наприклад, для вектора $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \quad \operatorname{div}\bar{r} = \nabla\cdot\bar{r} = 1+1+1 = 3$.

Розглянемо тепер векторний добуток, що означає соленоїдність поля

$$\left[\nabla\times\bar{F}\right] = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\cdot\left(P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}\right)\right) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} .$$

Такий добуток має назву *ротор*, і позначається:

$$rot\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \qquad \left[\nabla \times \overline{F}\right] = rot\,\overline{F}\,.$$

Приклад. Знайти ротор векторного поля $\overline{F} = y^2\bar{i} - 2xz\bar{j} - x^2\bar{k}$.

Розв'язання. $\mathrm{rot}\,\overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -2xz & -x^2 \end{vmatrix} = \left[\dfrac{\partial\left(-x^2\right)}{\partial y} - \dfrac{\partial(-2xz)}{\partial z}\right]\bar{i} -$

$$-\left[\frac{\partial\left(-x^2\right)}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{\partial z}\right]\bar{j} + \left[\frac{\partial(-2xz)}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{\partial y}\right]\bar{k} = 2x\bar{i} + 2x\bar{j} - (2z + 2y)\bar{k}\,.$$

Застосування оператора Гамільтона до суми скалярних полів здійснюється за правилами чисельного добутку: $\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v$.

Застосування оператора Гамільтона до суми векторних полів здійснюється за правилами скалярного добутку: $\nabla \cdot \left(\overline{F_1} + \overline{F_2}\right) = \nabla\,\overline{F_1} + \nabla\,\overline{F_2}$. або за правилами векторного добутку: $\nabla \times \left(\overline{F_1} + \overline{F_2}\right) = \nabla \times \overline{F_1} + \nabla \times \overline{F_2}$.

3.5 Застосування оператора Гамільтона до добутку скалярних та векторних полів

При вживанні оператора набла до добутку двох полів, якими можуть бути $u \cdot v$, $u \cdot \overline{F}$, $\overline{F_1} \cdot \overline{F_2}$, $\overline{F_1} \times \overline{F_2}$, треба користуватися правилами векторної алгебри та правилами диференціювання.

Як диференціальний оператор він діє лише на множник, що стоїть безпосередньо за ним

$$\nabla u \cdot v = (\nabla u) \cdot v = v \cdot grad\,u$$
$$\nabla(u \cdot v) = grad(u \cdot v).$$

В останньому випадку за правилами диференціювання $grad\,(u \cdot v) = \nabla(u \cdot v) = \nabla u \cdot v + u \cdot \nabla v = v\,grad\,u + u\,grad\,v$.

Як бачимо, у процесі диференціювання на певному етапі ми деякі функції вважаємо фіксованими (сталими). Щоб виділити ці функції, їх позначають індексом, наприклад:

$$\operatorname{div}\left(u \cdot \overline{F}\right) = \nabla\left(u \cdot \overline{F}\right) = \nabla\left(u_c \cdot \overline{F}\right) + \nabla\left(u \cdot \overline{F_c}\right) =$$
$$= \nabla\left(\overline{F} \cdot u_c\right) + \nabla u \cdot \overline{F_c} = \operatorname{div}\overline{F} \cdot u + \operatorname{grad} u \cdot \overline{F}.$$

Цей же результат можна одержати без вживання оператора набла:

$$\operatorname{div}\left(u \cdot \overline{F}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right) \cdot \left(uP\bar{i} + uQ\bar{j} + uR\bar{k}\right) =$$
$$= \frac{\partial(uP)}{\partial x} + \frac{\partial(uQ)}{\partial y} + \frac{\partial(uR)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}P + \frac{\partial P}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}Q + \frac{\partial Q}{\partial y}u + \frac{\partial u}{\partial z}R + \frac{\partial R}{\partial z}u =$$
$$= u\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}\right)\left(P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}\right) =$$
$$= u\operatorname{div}\overline{F} + \operatorname{grad} u \cdot \overline{F}.$$

Ще приклад: $\operatorname{div}\left(\overline{F}_1 \times \overline{F}_2\right) = \nabla\left(\overline{F}_1 \times \overline{F}_2\right) = \nabla\left(\overline{F}_{1c} \times \overline{F}_2\right) + \nabla\left(\overline{F}_1 \times \overline{F}_{2c}\right) =$ далі, користуючись циклічністю мішаного добутку трьох векторів $\bar{a} \cdot \left(\bar{b} \times \bar{c}\right) = \bar{b} \cdot \left(\bar{c} \times \bar{a}\right) = \bar{c} \cdot \left(\bar{a} \times \bar{b}\right)$, запишемо останній вираз так, аби оператор набла стояв безпосередньо перед тією функцією, на яку він діє:

$$= \overline{F}_{1c} \cdot \left(\overline{F}_2 \times \nabla\right) + \overline{F}_{2c} \cdot \left(\nabla \times \overline{F}_1\right) = -\overline{F}_{1c} \cdot \left(\nabla \times \overline{F}_2\right) + \overline{F}_{2c} \cdot \left(\nabla \times \overline{F}_1\right) =$$
$$= \overline{F}_2 \operatorname{rot}\overline{F}_1 - \overline{F}_1 \operatorname{rot}\overline{F}_2.$$

Введений індекс є допоміжним і в кінці обчислення його не пишуть, наприклад,

$$\operatorname{rot}\left(u \cdot \overline{F}\right) = \nabla \times \left(u \cdot \overline{F}\right) = \nabla x\left(u_c \cdot \overline{F}\right) + \nabla x\left(u \cdot \overline{F}_c\right) = u_c \cdot \left(\nabla \times \overline{F}\right) - \overline{F}_c \times \nabla \cdot u =$$
$$= u \cdot \left(\nabla \times \overline{F}\right) - \overline{F} x \nabla u = u \cdot \operatorname{rot}\overline{F} - \overline{F}\operatorname{grad} u.$$

Ми розглянули деякі диференціальні операції першого порядку. Після їх застосування до поля виникає нове поле, до якого знову можна вжити ці операції У результаті маємо диференціальні операції другого порядку. Таких операцій існує лише п’ять:

- у скалярному полі: $u=u(x,y,z)$

$\nabla\cdot(\nabla u)=\nabla\nabla u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u$,

$\nabla\times(\nabla u)=\nabla\times\nabla u = \operatorname{rot}\operatorname{grad} u$;

- у векторному полі: $\quad \overline{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$

$\nabla \cdot \left(\nabla \cdot \overline{F}\right) = \text{grad}\,\text{div}\overline{F}$,

$\nabla \cdot \left(\nabla \times \overline{F}\right) = \text{div}\,\text{rot}\overline{F}$,

$\nabla \times \left(\nabla \times \overline{F}\right) = \text{rot}\,\text{rot}\overline{F}$.

Розглянемо ці операції докладніше:

$$\nabla \cdot \nabla \cdot u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)u =$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\bar{j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\bar{k}\right)u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Оператор $\nabla \cdot \nabla$ позначається через Δ (дельта) і зветься *оператором Лапласа*. Отже, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ або $\Delta u = \text{div grad } u$ (як відомо, векторний добуток $\left[\bar{a} \times \bar{a}\right] = 0$). Це означає, що поле градієнта є *безвихорним*. Зокрема, в електротехніці $\quad \text{rot}\,\text{grad}u = 0$,

$$grad\ div\,\overline{F} = \nabla\left(\nabla \cdot \overline{F}\right),$$
$$div\,rot\overline{F} = \nabla\left(\nabla \times \overline{F}\right) = 0,$$

оскільки в мішаному добутку векторів є два однакових вектори. Це значить, що поле вихору – поле *соленоїдне*

$$\text{rotrot}\overline{F} = \nabla x\left(\nabla \times \overline{F}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \overline{F}\right) - \left(\nabla \cdot \nabla\right)F = \text{grad}\,\text{div}\overline{F} - \Delta\overline{F}.$$

тут $\Delta\overline{F}$ – результат застосування оператора Лапласа до вектора $\overline{F}$, а до подвійного векторного добутку застосовано перетворення

$$\bar{a} \times \bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{b} & \bar{c} \\ \left(\bar{a} \cdot \bar{b}\right) & \left(\bar{a} \cdot \bar{c}\right) \end{vmatrix} = \bar{b} \cdot \left(\bar{a} \cdot \bar{c}\right) - \left(\bar{a} \cdot \bar{b}\right) \cdot \bar{c}.$$

3.6 Ротор векторного поля

За означенням *ротор* (або *вихор*) векторного поля

$$\overline{F} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$$

має вигляд $rot\,\overline{F}=\left[\nabla\times\overline{F}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ Q & R\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & R\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ P & Q\end{vmatrix}=$

$$=\bar{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\bar{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\bar{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Підсумуємо властивості ротора:

1. Ротор сталого вектора дорівнює нулю $\quad rot\ a=0 \quad a=const;$
2. $\mathrm{rot}\left(\overline{F_1}\pm\overline{F_2}\right)=\mathrm{rot}\,\overline{F_1}\pm\mathrm{rot}\,\overline{F_2}$;
3. $\mathrm{rot}\left(u\cdot\overline{F}\right)=\mathrm{grad}\,u\times\overline{F}+u\cdot\mathrm{rot}\,\overline{F}$;
4. $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\overline{F}=0$;
5. $\mathrm{div}\,\overline{F_1}\times\overline{F_2}=\overline{F_2}\cdot\mathrm{rot}\,\overline{F_1}-\overline{F_1}\cdot\mathrm{rot}\,\overline{F_2}$.

Нехай тепер задане поле – потенціальне, а $u=u\ (x,\ y,\ z)$ – його потенціал. Тоді $P=\frac{\partial u}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial u}{\partial y},\quad R=\frac{\partial u}{\partial z}$.

Обчислимо ротор потенціального поля:

$$\mathrm{rot}\,\overline{F}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right)\bar{k}=0.$$

Отже, $\mathrm{rot}\,\overline{F}=0$, якщо поле – потенціальне.

Зворотне твердження також вірне.

Означення. Векторне поле будемо називати *безвихорним,* якщо його ротор дорівнює нулю. Тож всяке потенціальне поле є безвихорним.

Зокрема, рівність $rot\ grad\ u=0$ свідчить про те, що поле градієнтів завжди потенціальне.

Висновок: щоб визначити, чи буде задане поле потенціальним, достатньо пересвідчитись, щоб його ротор дорівнював нулю.

Приклад: Пересвідчитись, що векторне поле $\bar{E} = q\dfrac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3}$ потенціальне, і обчислити його потенціал ($q = \mathrm{const}$).

$$\bar{E} = q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} x\bar{i} + q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} y\bar{j} + q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} z\bar{k}.$$

Позначимо: $P(x,y,z) = q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} x$

$$Q(x,y,z) = q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} y$$

$$R(x,y,z) = q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} z$$

Тоді, наприклад, $\dfrac{\partial R}{\partial y} = -\dfrac{3}{2} q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} 2yz$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{3}{2} q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}} 2zy$$

і вираз у дужках $\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 0$.

Аналогічно можна показати, що два інші вирази в дужках також дорівнюють нулю, а, отже, $\mathrm{rot}\,\bar{E} = 0$, значить, $\bar{E}$ – потенціальне.

Обчислимо його потенціал $u(x,y,z) = \int\limits_L \overline{E}\,\overline{ds} =$

$$= \int\limits_{M_0}^{M} q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} x\,dx + q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} y\,dy + q\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} z\,dz$$

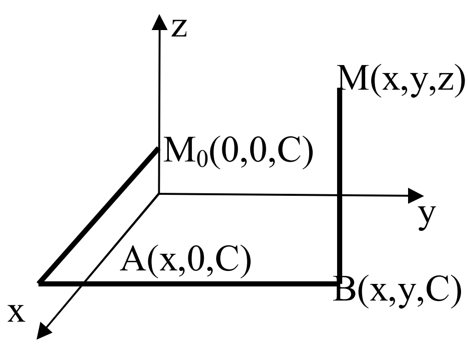

Рисунок 3.3 – Шлях інтегрування просторовий

Виберемо початкову точку $M_0(0; 0; C)$ ($C = \mathrm{const}$) і шлях інтегрування (рис.3.3):

M_0A: $y = 0$, $z = C$, $dy = 0$, $dz = 0$

AB: $x = x = \mathrm{const}$, $z = C$, $dx = 0$, $dz = 0$

BM: $x = x = \mathrm{const}$, $y = y = \mathrm{const}$, $dx = 0$, $dy = 0$, тоді:

$$u(x,y,z)=q\int_0^x\left(x^2+C^2\right)^{-\frac{3}{2}}x\,dx+q\int_0^y\left(x^2+y^2+C^2\right)^{-\frac{3}{2}}y\,dy+q\int_0^z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}z\,dz=$$

$$=\frac{q}{2}\frac{\left(x^2+C^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Bigg|_0^x+\frac{q}{2}\frac{\left(x^2+y^2+C^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Bigg|_0^y+\frac{q}{2}\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Bigg|_C^z=$$

$$=-q\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+C^2}}-\frac{1}{C}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+C^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+C^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+C^2}}\right\}=$$

$$=-q\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\frac{q}{C}=-\frac{q}{\left|\bar{r}\right|}+C_1.$$

Отже, скалярний потенціал поля $\bar{F}$ в точці M(x; y; z) дорівнює циркуляції вектора $\bar{F}$ уздовж довільної кривої, що з'єднує точку M з точкою M_0, в якій потенціал поля прийнятий рівним нулю.

Якщо потенціальне поле $\bar{F}$ – силове, то потенціал цього поля у точці M(x; y; z) чисельно дорівнює роботі сили уздовж довільної кривої, яка з'єднує точку M з точкою нульового потенціалу M_0.

3.7 Дивергенція векторного поля

За означенням дивергенція (розходження) векторного поля

$$\bar{F}=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\bar{j}+R(x,y,z)\bar{k}$$

має вигляд

$$\operatorname{div}\bar{F}=\nabla\cdot\bar{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Векторне поле $\bar{F}$ зветься *соленоїдним* (або *трубчастим*), якщо його дивергенція дорівнює нулю.

Зокрема, відома нам рівність $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{F}=0$ свідчить про те, що поле ротора є соленоїдним.

Означення. *Якщо у векторному полі* $\overline{F}$ *дивергенція в точці* M_0 $\operatorname{div}\overline{F}(M_0) > 0$*, то точка* M_0 *зветься* ***джерелом*** *(або* ***витоком****), а якщо* $\operatorname{div}\overline{F}(M_0) < 0$*, то точка* M_0 *зветься* ***стоком***.

Приклад 1. Розглянемо векторне поле

$$\overline{F} = \frac{\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}} = (x+y+z)^{-\frac{2}{3}}\,\overline{i} + (x+y+z)^{-\frac{2}{3}}\,\overline{j} + (x+y+z)^{-\frac{2}{3}}\,\overline{k}$$

і знайдемо його дивергенцію:

$$\operatorname{div}\overline{F} = -3\,\frac{2}{3}\,(x+y+z)^{-\frac{5}{3}} = -2\,\frac{1}{\sqrt[3]{(x+y+z)^5}}\,.$$

У точці $M_0(1; 0; 0)$ $\operatorname{div}F(M_0) < 0$, отже, в цьому випадку M_0 – точка стоку.

У точці $M_0(0; 0; -1)$ $\operatorname{div}F(M_0) > 0$, отже, тепер точка M_0 – точка витоку.

Приклад 2. Розглянемо векторне поле $\overline{F} = e^{xy}\left(y\overline{j} - x\overline{i} + xy\overline{k}\right)$.

$$\operatorname{div}\overline{F} = -\,e^{xy} - xy\,e^{xy} + e^{xy} + xy\,e^{xy} = 0$$

Поле буде соленоїдним, тобто не має ані джерел, ані стоків.

4 ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ПОТІК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

4.1 Поверхневий інтеграл першого роду

Нехай у просторі задано деяку область V. Нехай в цій області задано двосторонню поверхню σ, обмежену просторовою лінією L.

Нехай на поверхні σ визначено деяку скалярну функцію $u = u(y;\ y;\ z)$. Інакше кажучи, розглянемо скалярне поле $u = u(y;\ y;\ z)$ на поверхні σ.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. У середині кожної частини візьмемо довільну точку $M_i(x_i;\ y_i;\ z_i)$, обчислимо значення заданої функції в цій точці $u(M_i) = u(x_i;\ y_i;\ z_i)$ і помножимо це значення на площу елементарної частини $\Delta\sigma_i$ та складемо суму $\sum_{i=1}^{n} u(M_i)\Delta\sigma_i + \sum_{i=1}^{n} u(x_i;y_i;z_i)\Delta\sigma_i$

Ця сума є інтегральною, а її скінчена границя за умови прямування до нуля кожного з діаметрів елементарних частин зветься *поверхневим інтегралом першого роду* (або *поверхневим інтегралом по площі поверхні*):

$$\iint_{\sigma} u(x_i;y_i;z_i)d\sigma = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} u(x_i;y_i;z_i)\Delta\sigma_i .$$

Якщо, наприклад, функція $u(x;\ y;\ z)$ є поверхневою густиною маси, розповсюдженої по поверхні, то інтеграл виражає масу всієї поверхні; якщо
$u(x;\ y;\ z)$ є густиною розповсюдження елементарних зарядів, то інтеграл виражає сумарний заряд поверхні.

У тому випадку, коли $u(x;\ y;\ z) \equiv 1$, інтеграл $\iint_{\sigma} d\sigma$ просто дорівнює площі поверхні σ.

4.2 Обчислення поверхневого інтеграла першого роду

Розглянемо інтеграл $\iint\limits_{\sigma} u(x;y;z)\,d\sigma_i$.

Припустимо, що поверхня σ задана рівнянням $z = z(x;\ y)$. Покажемо, що в такому випадку обчислення інтеграла по поверхні зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D – проекції σ на площину XOY (рис.4.1).

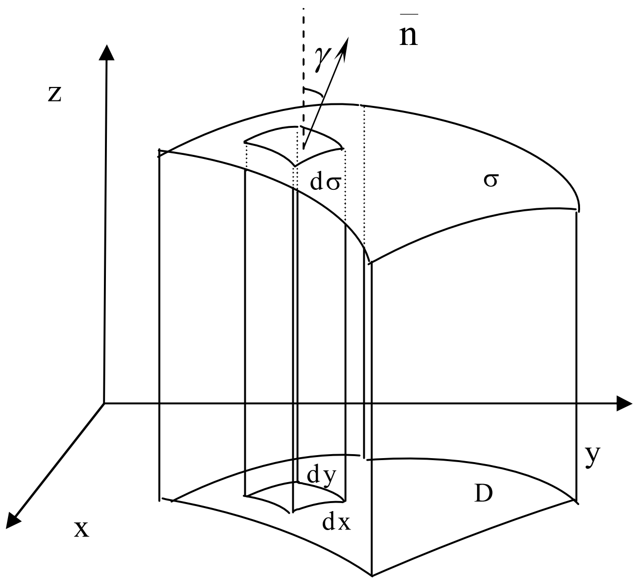

Рисунок 4.1 – Проекція елементарної площинки

Розглянемо елементарну площинку $d\sigma$ на поверхні σ, яка проектується на елемент dxdy області D.

Проведемо нормаль $\bar{n}$ так, щоб вона утворила гострий кут γ з віссю OZ. Будемо вважати, що $d\sigma$ настільки мала, що на всій цій площині нормаль не змінюється. Тоді $\cos\gamma\ d\sigma = dxdy$.

З іншого боку, нормаль $\bar{n}$ до поверхні $z = z(x;\ y)$ має проекції z'_x, z'_y,-1, тому $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}$.

Значить, $d\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$ і інтеграл

$$\iint\limits_{D} u(x;y;z)\,d\sigma = \iint\limits_{D} u(x;y;z(x;y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy.$$

Зауваження. Може статися, що рівняння поверхні не може бути розв'язане відносно Z , але може бути записане у вигляді $y = y(x;\ z)$ чи $x = x(y;\ z)$. Тоді хід міркувань залишається тим же з тією лише різницею, що поверхню σ будемо проектувати на площину XOZ чи YOZ.

Приклад. Обчислити площу частини поверхні параболоїда обертання $2z=x^2+y^2$, яка міститься в середині циліндра $x^2+y^2=R^2$.

Розв'язання. $z=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$, звідки $z'_x=x$, $z'_y=y$, тоді шукана площа поверхні $S=\iint\limits_D\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$, де область D – проекція частини поверхні σ на площину XOY становить круг радіуса R із центром у початку координат.

Якщо перейти до полярних координат

$$\begin{matrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\cos\varphi \end{matrix} \qquad x^2+y^2=\rho^2 \qquad dxdy=\rho d\rho d\varphi,$$

то $$S=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2\left(1+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^R\right]d\varphi=\frac{2\pi}{3}\left[\left(1+R^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right].$$

Вправи. Обчислити поверхневі інтеграли першого роду:

1. $\iint\limits_\sigma (x^2+y^2)\,d\sigma$, де σ – поверхня кулі $x^2+y^2+z^2=4$.

2. $\iint\limits_\sigma \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, де σ – бічна поверхня конусу $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=0$.

3. $\iint\limits_\sigma (z+2x+\frac{4}{3}y^2)\,d\sigma$, де σ – частина площини $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ у першому октанті.

4. $\iint\limits_\sigma xyz\,d\sigma$, де σ – частина площини $x+y+z=1$ у першому октанті.

5. $\iint\limits_\sigma x\,d\sigma$, де σ – частина поверхні кулі $x^2+y^2+z^2=4$ у першому октанті.

6. $\iint\limits_\sigma y\,d\sigma$, де σ – поверхня півкулі $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

7. $\iint\limits_\sigma x^2y^2\,d\sigma$, де σ – поверхня півкулі $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

4.3 Поверхневий інтеграл другого роду. Потік векторного поля

Нехай, як і раніше, у просторі задано деяку область V і нехай у цій області задано поверхню σ, обмежену просторовою лінією L. Відносно поверхні σ будемо припускати, що в кожній її точці визначено нормаль $\bar{n} = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k}$, $\quad (|\bar{n}| = 1)$..

Нехай в кожній точці поверхні σ визначено векторну функцію

$$\bar{F} = P(x;y;z)\,\bar{i} + Q(x;y;z)\,\bar{j} + R(x;y;z)\,\bar{k}.$$

Інакше кажучи, розглянемо векторне поле $\bar{F}$ на поверхні σ.

Розіб'ємо поверхню σ довільним способом на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. У середині кожної частини візьмемо довільну точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$, обчислимо в ній значення функції $\bar{F_i} = \bar{F}(M_i)$, потім візьмемо скалярний добуток векторів $\bar{F_i}$ та $\bar{n_i}$, і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F_i}\,\bar{n_i}\,\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{F}(M_i)\cdot\bar{n}(M_i)\right)\Delta\sigma_i.$$

Ця сума є інтегральною, а її скінченна границя за умови прямування до нуля кожного з діаметрів елементарних частин зветься *поверхневим інтегралом другого роду* (або *поверхневим інтегралом по координатах*):

$$\iint_{\sigma} \bar{F}\cdot\bar{n}\,d\sigma = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \left(\bar{F}(M_i)\cdot\bar{n}(M_i)\right)\Delta\sigma_i.$$

Розглянемо докладніше вираз i-го доданку. За правилом обчислення скалярного добутку

$$\left(\bar{F}(M_i)\cdot\bar{n}(M_i)\right)\Delta\sigma_i = |\bar{F_i}|\cdot|\bar{n_i}|\cdot\cos\varphi\cdot\Delta\sigma_i = |\bar{F_i}|\cdot\cos\varphi\cdot\Delta\sigma_i.$$

Останній вираз можна тлумачити таким чином: цей добуток визначає об'єм циліндру з основою $\Delta\sigma_i$ і висотою $|\bar{F_i}|\cdot\cos\varphi$ (рис.4.2). Отже, коли визнати, що векторне поле $\bar{F}$ є швидкість рідини, яка протікає через поверхню σ, то цей добуток дорівнює кількості рідини, яка протікає через

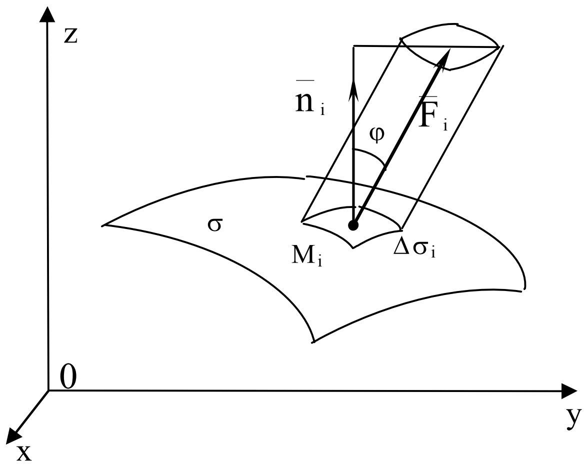

Рисунок 4.2 – Елементарний циліндр потоку векторного поля

площинку $\Delta\sigma_i$ за одиницю часу в напрямку вектора $\bar{\sigma}_i$. Вираз $\iint\limits_{\sigma} \bar{F}\cdot\bar{n}\,d\sigma$ відображає загальну кількість рідини, що протікає за одиницю часу через поверхню σ.

Таким чином, поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} \bar{F}\cdot\bar{n}\,d\sigma$ *зветься потоком векторного поля* $\bar{F}$ *через поверхню* σ.

Якщо розкрити скалярний добуток, то одержимо:

$$\iint\limits_{\sigma} \bar{F}\cdot\bar{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)d\sigma .$$

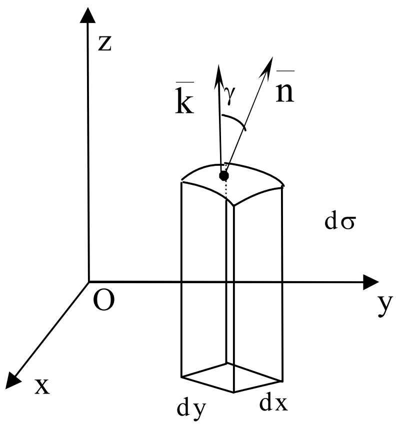

Рисунок 4.3 – Проекція елементарної площинки на координатну площину

Векторне поле $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ можна розглядати як суму трьох векторних полів, тоді і інтеграл $\iint\limits_{\sigma} \bar{F}\cdot\bar{n}\,d\sigma$ також можна виразити через суму трьох інтегралів:

$$\iint\limits_{\sigma} \bar{F}\cdot\bar{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma} P\bar{i}\cdot\bar{n}\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma} Q\bar{j}\cdot\bar{n}\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma} R\bar{k}\cdot\bar{n}\,d\sigma$$

Розглянемо останній з інтегралів: $\iint\limits_{\sigma} R\,\bar{k}\,\bar{n}\,d\sigma$.

$\left(\bar{k}\cdot\bar{n}\right) = |\bar{k}|\cdot|\bar{n}|\cdot\cos\gamma$ (рис.4.3). Далі: $\cos\gamma\,d\sigma$ є проекція площинки $d\sigma$ на площину XOY: $\cos\gamma\,d\sigma = dxdy$, то можна записати: $\iint\limits_{\sigma} R\,\bar{k}\,\bar{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma} Rdxdy$.

Аналогічно: $\cos\alpha\,d\sigma = dydz, \quad \cos\beta\,d\sigma = dxdz$.

Весь інтеграл записується так: $\iint\limits_{\sigma} \bar{F}\,\bar{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$.

Відповідно до запису цей поверхневий інтеграл другого роду ще звуть *поверхневим інтегралом по координатах*.

Зауважимо, що в запису $\iint\limits_{\sigma}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)d\sigma$ в дужках є скалярна функція. Позначивши її через

u(x; y; z) = P(x; y; z)cosα+ +Q(x; y; z)cosβ+R(x; y; z)cosγ,

маємо $\iint\limits_{\sigma} u(x;y;z)\,d\sigma$, тобто поверхневий інтеграл першого роду.

Таким чином, рівність

$\iint\limits_{\sigma}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)d\sigma=\iint\limits_{\sigma}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$ відображає,

по суті, *зв'язок між поверхневим інтегралами першого та другого роду*.

4.4 Обчислення поверхневого інтеграла другого роду

Обчислення поверхневого інтеграла

$$\iint\limits_{\sigma}\overline{F}\cdot\overline{n}\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)d\sigma$$

зводиться до обчислення подвійних інтегралів по плоских областях.

Якщо знову розбити інтеграл на складові частини, можна розглянути окремо $\iint\limits_{\sigma}R(x;y;z)\cos\gamma\,d\sigma$.

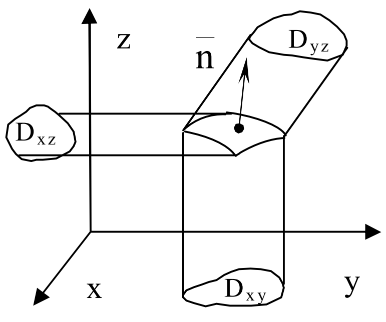

Рисунок 4.4 – Проекція поверхні на координатні площини

Нехай задана поверхня може бути записана рівнянням z = z(x; y), а проекцію поверхні σ на площину XOY позначимо D_{xy}. Тоді $\iint\limits_{\sigma}R(x;y;z)\cos\gamma\,d\sigma=\pm\iint\limits_{D_{xy}}R\left[x;y;z(x;y)\right]dxdy$ при цьому береться знак плюс, якщо cosγ ≥ 0, і знак мінус, якщо cosγ ≤ 0. Аналогічно обчислюються інтеграли, що були зведені до подвійних інтегралів по областях D_{xy} та D_{yz} (рис.4.4).

Отже: $\iint\limits_{\sigma}\overline{F}\cdot\overline{n}\,d\sigma=\iint\limits_{D_{yz}}P\left[x(y;z);y;z\right]dydz+$

$$+\iint\limits_{D_{xz}}Q\left[x;y(x;z);z\right]dxdz+\iint\limits_{D_{xy}}R\left[x;y;z(x;y)\right]dxdy.$$

Приклад. Обчислити потік векторного поля $\overline{F} = x\bar{i} + \bar{j} + z\bar{k}$ через поверхню $x^2+y^2+z^2=1$ $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$.

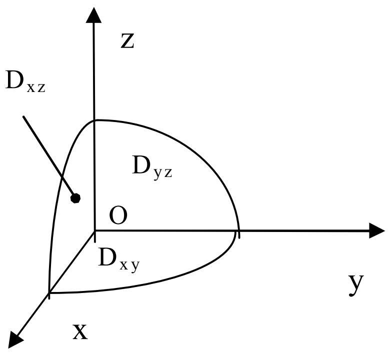

Рисунок 4.5 – Сферична поверхня в першому октанті

Розв'язання. Поверхня σ являє собою частину сфери, розміщену в першому октанті (рис.4.5).

Позначимо проекції σ на координатні площини відповідно D_{yz}, D_{xz}, D_{xy}, які будуть чвертями кругів радіуса 1. Тоді

$$\iint_{\sigma} \overline{F} \cdot \overline{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma} x\, dydz + dxdz + x z^2 dxdy = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2-z^2}\, dydz +$$

$$+ \iint_{D_{xz}} dxdz + \iint_{D_{xy}} x\left(1-x^2-y^2\right) dxdy = I_1 + I_2 + I_3$$

Обчислимо окремо кожний з інтегралів:

$$I_1 = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2-z^2}\, dydz = \left| \begin{array}{c} y = \rho\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \\ y^2+z^2 = \rho^2 \\ dydz = \rho\, d\rho\, d\varphi \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\, \rho\, d\rho = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} \Bigg|_0^1 \right) = \frac{\pi}{6},$$

$$I_2 = \iint_{D_{xz}} dxdz = \frac{1}{4}\pi \qquad \text{(це просто площа чверті круга),}$$

$$I_3 = \iint_{D_{xy}} x\left(1-x^2-y^2\right) dxdy = \left| \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ x^2+y^2 = \rho^2 \\ dxdy = \rho\, d\rho\, d\varphi \end{array} \right| =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\ d\varphi\int_0^1\rho\left(1-\rho^2\right)\rho\ d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^1\left(\rho^2-\rho^4\right)d\rho=\right]\cos\varphi\ d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{1}{3}\rho^3-\frac{1}{5}\rho^5\right)\Bigg|_0^1\right]\cos\varphi\ d\varphi=\frac{2}{15}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\ d\varphi=\frac{2}{15}\sin\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{15}$$

Отже, $\quad I=I_1+I_2+I_3=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\frac{2}{15}=\frac{5\pi}{12}+\frac{2}{15}$.

Якщо поверхня σ замкнена, додатним напрямком нормалі до поверхні прийнято вважати зовнішню нормаль.

Приклад. Позитивний електричний заряд **e**, розміщений на початку координат, створює векторне поле, так що в кожній точці простору визначається вектор $\bar{F}$ за законом Кулона:

$$\bar{F}=k\frac{e}{r^2}\cdot\bar{r},$$

де $\quad r$ – відстань точки від початку координат;

$\bar{r}$ – одиничний вектор, направлений по радіусу-вектору даної точки, $k=\mathrm{const}$.

Обчислити потік векторного поля через сферу радіуса R із центром у початку координат.

Розв'язання. Зважаючи на те, що $r=R=\mathrm{const}$, маємо

$$\iint_\sigma k\frac{e}{r^2}\cdot\bar{r}\cdot\bar{n}\,d\sigma=\frac{ke}{R^2}\iint_\delta\bar{r}\cdot\bar{n}\,d\sigma.$$

Проте останній інтеграл дорівнює площі поверхні σ, оскільки $\left(\bar{r}\cdot\bar{n}\right)=\left|\bar{r}\right|\cdot\left|\bar{n}\right|\cdot\cos 0^\circ=1$:

$$\frac{ke}{R^2}\iint_\sigma\bar{r}\cdot\bar{n}\,d\sigma=\frac{ke}{R^2}\sigma=\frac{ke}{R^2}\cdot 4\pi R^2=4\pi ke.$$

Вправи. Обчислити поверхневі інтеграли другого роду:

1. $\iint_\delta yzdydz+xzdzdx+xydxdy$, де δ – зовнішня сторона поверхні тетраедру, обмеженого площинами $x=0,y=0,z=0,x+y+z=3$.

2. $\iint\limits_{\delta} zdxdy$, де δ – зовнішня сторона еліпсоїду $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$.

3. $\iint\limits_{\delta} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, де δ – зовнішня сторона поверхні півкулі $x^2+y^2+z^2=9(z\geq 0)$.

4. $\iint\limits_{\delta} xdydz + ydzdx + zdxdy$, де δ – додатна сторона кубу, утвореного площинами $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1$.

5. $\iint\limits_{\delta} x^2y^2z^2dxdy$, де δ – додатна сторона нижній половини кулі $x^2+y^2+z^2=9$.

6. $\iint\limits_{\delta} z^2dxdy$, де δ – зовнішня сторона еліпсоїду $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$.

7. $\iint\limits_{\delta} xzdxdy + xydydz + yzdxdz$, де δ – зовнішня сторона поверхні тетраедру, утвореного площинами $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$.

4.5 Формула Стокса

Для поверхневих інтегралів наявна формула, аналогічна формулі Гріна. Існують різні шляхи виведення цієї формули, обгрунтовані до найменших подробиць, але ними ж і обтяжені. Зупинимось на дещо полегшеному варіанті, зате на такому, який наглядно ілюструє сутність усіх різновидів – зв'язок поверхневого інтегралу з подвійним, а останнього – через формулу Гріна – з криволінійним.

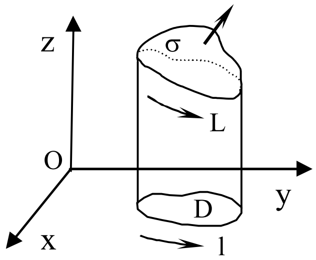

Рисунок 4.6 – Поверхня, обмежена лінією

Розглянемо у просторі деяку поверхню σ, обмежену лінією L (рис.4.6). Проекцією цієї поверхні на площину XOY буде область D, обмежена замкненою лінією l.

Нехай у просторі задано векторне поле $\bar{F}(x;y;z)=P(x;y;z)\bar{i}+Q(x;y;z)\bar{j}+R(x;y;z)\bar{k}$. Якщо покласти z=0 і

$R(x;y;z)\equiv 0$, матимемо плоске векторне поле, яке в області D приймає значення $\overline{F}(x;y)=P(x;y)\,\overline{i}+Q(x;y)\,\overline{z}$.

Обчислимо ротор цього векторного поля:

$$\mathrm{rot}\,\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & 0\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}.$$

Тоді потік цього ротора через область D буде:

$$\iint\limits_{D}\mathrm{rot}\,\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}\;\overline{n}\,d\sigma.$$

Оскільки нормаль $\overline{n}$ до області D співпадає з $\overline{k}$, тобто $\left(\overline{n}\cdot\overline{k}\right)=1$ і згадуючи формулу Гріна, маємо:

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}\;\overline{n}\,d\sigma=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_{l}\overline{F}\,\overline{d\sigma}.$$

Остаточно:

$$\int\limits_{l}\overline{F}\,\overline{d\sigma}=\iint\limits_{D}\mathrm{rot}\,\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma.$$

У просторі для замкненої поверхні σ, обмеженої лінією l, формула залишиться в тому ж вигляді

$$\int\limits_{L}\overline{F}\,\overline{d\sigma}=\iint\limits_{\sigma}\mathrm{rot}\,\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma,$$

водночас напрямок обходу контуру L погоджується з обраною стороною поверхні таким чином: якщо дивитися з кінця вектора нормалі до поверхні, то цей обхід здійснюється проти ходу годинникової стрілки. Висновок: *циркуляція векторного поля $\overline{F}$ по замкненій лінії L, яка обмежує поверхню σ, дорівнює потоку ротора цього векторного поля через цю поверхню.*

Приклад. Обчислити потік ротора векторного поля $\overline{F}=x\overline{i}+xy\overline{j}+z\overline{k}$ через поверхню σ: $x^2+y^2+z^2=1, \quad z\geq 0$.

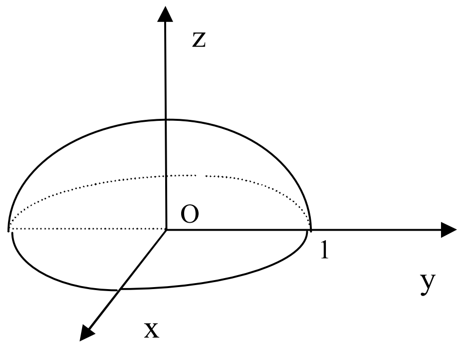

Рисунок 4.7 – Півсфера

Розв'язання. Поверхня σ (рис.4.7) являє собою півсферу, радіус якої дорівнює 1, а L відповідно – коло в площині XOY.

Отже: $\iint\limits_{\sigma} \operatorname{rot}\bar{F}\,\bar{n}\,d\sigma = \int\limits_{L} \bar{F}\,\overline{d\sigma} = \int\limits_{L} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{L} x\,dx + xy\,dy + z\,dz =$

Далі, врахуємо, що L лежить у площині XOY, значить z=0, і перейдемо до параметричних координат $\begin{matrix} x = 1\cdot\cos t & dx = -\sin t\,dt \\ y = 1\cdot\sin t & dy = \cos t\,dt \end{matrix} \quad 0 \le t \le 2\pi$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi}[-\cos t\cdot\sin t + \cos t\cdot\sin t\cdot\cos t]dt = \int\limits_{0}^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt + \int\limits_{0}^{2\pi}\left(\cos^2 t\cdot\sin t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 2t\Big|_{0}^{2\pi} - \frac{1}{3}\cos^3 t\Big|_{0}^{2\pi} = \frac{1}{4}(1-1) - \frac{1}{3}(1-1) = 0.$$

Варто зауважити, що коли векторне поле безвихрове, тобто $rot\,\vec{F} = 0$, то для довільного замкненого контура L, який цілком лежить у цьому полі, за формулою Стокса маємо $\oint_L \vec{F}\,d\vec{l} = \iint_{\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = 0$. Це означає, що безвихрове поле є потенціальним. Навпаки, якщо поле потенціальне, тобто для довільного замкненого контуру L $\oint_L \vec{F}\,d\vec{l} = 0$, то за формулою Стокса маємо $\iint_{\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \oint_L \vec{F}\,d\vec{l} = 0$, звідки $rot\,\vec{F} = 0$. Це означає, що потенціальне поле є безвихровим.

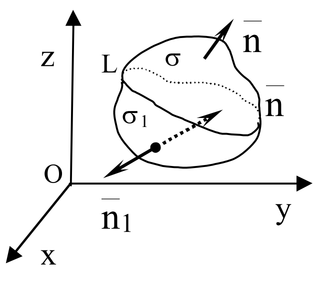

Рисунок 4.8 – Поверхня натягнута на контур

Із формули Стокса виходить, що потік вихору векторного поля $\bar{F}$ не залежить від виду поверхні σ, яка натягнута на контур L (рис.4.8). Якщо через цей контур провести дві поверхні σ_1 та σ_2, то $\iint\limits_{\sigma} \operatorname{rot}\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma 1} \operatorname{rot}\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma$. За правилами орієнтації поверхні σ_2 очевидно $\overline{n}_1 = -\overline{n}$, а, отже,

$$\iint\limits_{\sigma 1} \operatorname{rot}\overline{F}\,\overline{n}_1\,d\sigma = -\iint\limits_{\sigma 1} \operatorname{rot}\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma.$$

З іншого боку, поверхні σ_1 та σ_2 обмежують деякий об'єм V, для поверхні якого одержуємо рівність:

$$\iint\limits_{\sigma+\sigma 1} \operatorname{rot}\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma} \operatorname{rot}\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma 1} \operatorname{rot}\overline{F}\,\overline{n}_1\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma} \operatorname{rot}\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma - \iint\limits_{\sigma 1} \operatorname{rot}\overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma = 0$$

Отже, потік вихору векторного поля $\overline{F}$ через замкнену поверхню дорівнює нулю.

Якщо в деякій частині поля $\overline{F}$ (або в усьому полі) $rot\,\overline{F} \equiv 0$,то

$$\int\limits_{L} \overline{F}\,\overline{d\delta} = \iint\limits_{\sigma} 0 \cdot \overline{n}\,d\sigma = 0,$$

де L – довільний контур, який лежить цілком у зазначеній частині поля.

Вправи. Обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{a}(M)$ по контуру трикутника, утвореного в результаті перетину площини $(p)\colon Ax + By + Cz = D$ з координатними площинами, при додатному напрямку обігу контуру відносно нормального вектора $\overline{n} = (A, B, C)$ цієї площини двома способами: 1) використовуючи означення циркуляції, 2) за допомогою формули Стокса:

1. $\overline{a}(M) = (x+z)i + (x+3y)j + yk, \quad (p)\colon x + y + 2z = 2$.

2. $\overline{a}(M) = (2z-x)i + (x-y)j + (3x+z)k, \quad (p)\colon x + y + 2z = 2$.

3. $\overline{a}(M) = (x+y+z)i + 2zj + (y-7z)k, \quad (p)\colon 2x + 3y + z = 6$.

4. $\overline{a}(M) = 4zi + (x-y-z)j + (3y+z)k, \quad (p)\colon x - 2y + 2z = 2$.

5. $\overline{a}(M) = (y-z)i + (2x+y)j + zk, \quad (p)\colon 2x + y + z = 2$.

6. $\overline{a}(M) = (x+y)i + 3yj + (x+z)k, \quad (p)\colon 2x - y - 2z = -2$.

4.6 Розбіжність поля. Формула Остроградського

Нехай маємо векторне поле $\overline{F}$. Візьмемо в ньому довільну точку P і розмістимо її всередині замкнутої поверхні σ, яка обмежує об’єм Δv.

Знайдемо $\oiint\limits_{\sigma} \overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma$ – потік вектора $\overline{F}$ через замкнену поверхню σ (у напрямку зовнішньої нормалі). Обчислимо величину $\dfrac{\oiint\limits_{\sigma} \overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma}{\Delta v}$.

Припустимо, що існує границя цієї величини за умови, якщо поверхня σ стягується в точку P. Ця границя зветься *розбіжністю* або *дивергенцією* векторного поля $\overline{F}$ і позначається:

$$\operatorname{div}\overline{F} = \lim_{\Delta v\to 0} \frac{\oiint\limits_{\sigma} \overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma}{\Delta v},$$

Де $\operatorname{div}\overline{F}$ є скалярною величиною. Якщо в точці P $\operatorname{div}\overline{F}(P) > 0$, то для досить малого Δv $\dfrac{\oiint\limits_{\sigma} \overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma}{\Delta v} > 0$, і оскільки Δv>0, то $\oiint\limits_{\sigma} \overline{F}\,\overline{n}\,d\sigma > 0$, що за фізичним змістом потоку векторного поля означає, що в точці P маємо джерело поля. Якщо $\operatorname{div}\overline{F}(P) < 0$, тоді в точці P маємо стік поля. У точках, де $\operatorname{div}\overline{F} > 0$ векторні лінії починаються, а в точках, де $\operatorname{div}\overline{F} < 0$, вони закінчуються.

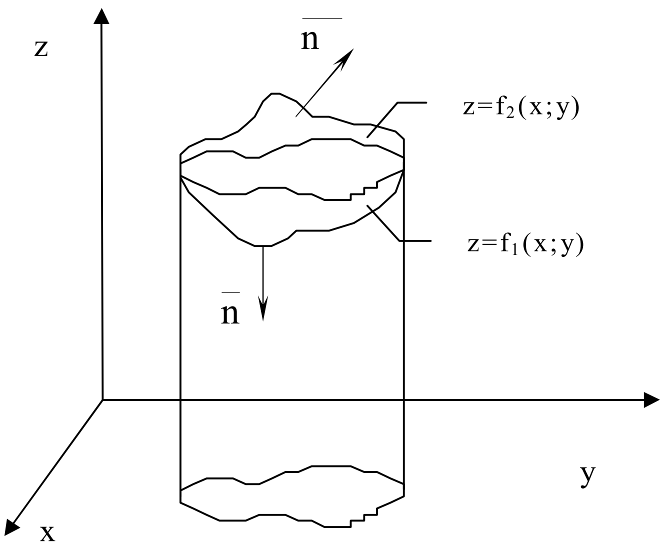

Рисунок 4.9 – Просторове тіло

Векторне поле, у кожній точці якого $\operatorname{div}\overline{F} = 0$, називається *соленоїдним* (або *трубчастим*). У такому полі немає ані джерел, ані стоків.

Розглянемо у просторі тіло V, обмежене замкненою поверхнею σ (Рис.4.9). Проекцію тіла на площину XOY позначимо через D. Лінія на поверхні тіла, яка проектується в границю області D, поділяє поверхню σ на дві частини σ_+ та σ_-, які описуються функціями відповідно $z = f_2(x;\ y)$ та $z = f_1(x;\ y)$. Окрім того, будемо відрізняти зовнішню сторону поверхні та внутрішню залежно від направленості нормалі до поверхні. Нехай тепер у цьому просторі задано векторне поле

$$\bar{F}(x;y;z) = P(x;y;z)\bar{i} + Q(x;y;z)\bar{j} + R(x;y;z)\bar{k}.$$

Обчислимо потрійний інтеграл $\iiint\limits_V \frac{\partial R(x;y;z)}{\partial z} dV =$

$$= \iiint\limits_V \frac{\partial R(x;y;z)}{\partial z} dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{f_1(x;y)}^{f_2(x;y)} \frac{\partial R(x;y;z)}{\partial z} dz \right] dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D \left[R(x;y;z)\Big|_{f_1(x;y)}^{f_2(x;y)} \right] dx\,dy = \iint\limits_D \left[R(x;y;f_2(x;y)) - R(x;y;f_1(x;y)) \right] dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D R(x;y;f_2(x;y))\,dx\,dy - \iint\limits_D R(x;y;f_1(x;y))\,dx\,dy.$$

Перетворимо одержані подвійні інтеграли в поверхневі. Для цього розглянемо поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_{\sigma+} R\ \bar{k}\ \bar{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma+} R(x;y;z)\ \bar{k}\ \bar{n}\,d\sigma = \iint\limits_D R(x;y;f_2(x;y))\,dx\,dy,$$

враховуючи, що $\cos\left(\bar{k}\ \hat{}\ \bar{n}\right) > 0$.

Аналогічно:

$$\iint\limits_{\sigma-} R\ \bar{k}\ \bar{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma-} R(x;y;z)\ \bar{k}\ \bar{n}\,d\sigma = -\iint\limits_D R(x;y;f_1(x;y))\,dx\,dy,$$

враховуючи, що в цьому випадку $\cos\left(\bar{k}\ \hat{}\ \bar{n}\right) < 0$ склавши одержані два інтеграли, маємо:

$$\iint\limits_D R(x;y;f_2(x;y))\,dx\,dy - \iint\limits_D R(x;y;f_1(x;y))\,dx\,dy =$$

$$\iint\limits_{\sigma+} R(x;y;z)\ \bar{k}\ \bar{n}\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma-} R(x;y;z)\ \bar{k}\ \bar{n}\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma} R(x;y;z)\ \bar{k}\ \bar{n}\,d\sigma.$$

Таким чином $\iiint\limits_V \frac{\partial R(x;y;z)}{\partial z} dV = \iint\limits_{\sigma} R(x;y;z)\ \bar{k}\ \bar{n}\,d\sigma$.

Аналогічно можна обчислити:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y} dV = \iint\limits_\sigma Q\ \bar{j}\ \bar{n}\, d\sigma; \qquad \iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x} dV = \iint\limits_\sigma P\ \bar{i}\ \bar{n}\, d\sigma.$$

Склавши ці три рівності, маємо:

$$\boxed{\iiint\limits_V \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz = \iint\limits_\sigma \left(P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}\right) \bar{n}\, d\sigma}.$$

Ця рівність і є формулою *Остроградського*.

Вправи. Обчислити потік векторного поля $\bar{a}(M)$ через зовнішню поверхню піраміди, утворену площиною *(p)* і координатними площинами, двома способами: 1) використовуючи означення потоку, 2) за допомогою формули Остроградського – Гауса:

1. $\bar{a}(M) = xi + (x+z)j + (y+z)k, \quad (p): 3x + 3y + z = 3$.
2. $\bar{a}(M) = (2y+z)i + (x-y)j + 2zk, \quad (p): x - y + z = 2$.
3. $\bar{a}(M) = 4xi + (x-y-z)j + (3y+2z)k, \quad (p): 2x + y + z = 4$.
4. $\bar{a}(M) = (2z-x)i + (x+2y)j + 3zk, \quad (p): x + 4y + 2z = 8$.
5. $\bar{a}(M) = 4zi + (x-y-z)j + (3y+z)k, \quad (p): x - 2y + 2z = 2$.
6. $\bar{a}(M) = (2x-z)i + (y-x)j + (x+2z)k, \quad (p): x - y + z = 2$.

Використаємо формулу в наступній теоремі:

Теорема. *Дивергенція векторного поля* $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ *виражається формулою* $div\,\bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, *де значення частинних похідних беруться в точці* M.

Доведення. За формулою Остроградського потік векторного поля можна записати у вигляді

$$\iint\limits_\sigma \bar{F}\ \bar{n}\, d\sigma = \iint\limits_\sigma \left(P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}\right) \bar{n}\, d\sigma = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Потрійний інтеграл за теоремою про середнє значення дорівнює добутку об'єму V на значення підінтегральної функції в деякій точці M_1 області V, тобто $\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M_1} \cdot V$.

Якщо об'єм V стягується в точку M, то точка M_1 також прямує до точки M, і ми маємо

$$\operatorname{div} \overline{F}(M) = \lim_{M_1 \to M} \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)_{M_1} \cdot V}{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

що і потрібно було довести.

Користуючись одержаним виразом для дивергенції, тепер і формулу Остроградського можна записати у вигляді: $\iint\limits_\sigma \overline{F}\ \overline{n}\, d\sigma = \iiint\limits_V \operatorname{div} \overline{F}\, dV$, тобто потік векторного поля з середини замкнутої поверхні дорівнює потрійному інтегралу за об'ємом, обмеженим цією поверхнею від дивергенції поля.

Розглянемо соленоїдне (або трубчасте) поле саме таке, для якого $\operatorname{div} \overline{F} = 0$.

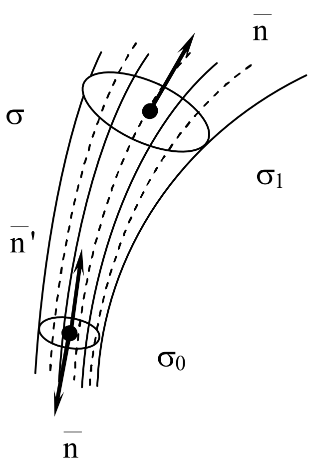

Рисунок 4.10 – Векторна трубка

Візьмемо в цьому полі яку-небудь площинку σ_0 і проведемо через кожну точку її границі векторні лінії. Ці лінії обмежують частину простору, так звану векторну трубку. Рідина рухається в цій трубці, не перетинаючи її стінок. Розглянемо частину цієї трубки, обмеженою вже згадуваною площинкою σ_0 і деяким перерізом σ_1 (рис.4.10).

Оскільки умовою за умовою $\operatorname{div} \overline{F} = 0$, то згідно формули Остроградського – Гауса потік векторного поля через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю, отже

$$\iint_{\sigma} \bar{F}\bar{n}\,d\sigma + \iint_{\sigma 0} \bar{F}\bar{n}\,d\sigma + \iint_{\sigma 1} \bar{F}\bar{n}\,d\sigma = \iiint_{V} \operatorname{div}\bar{F}\,dV = 0,$$

де σ – бічна поверхня трубки, а $\bar{n}$ – зовнішня нормаль. Оскільки на бічній поверхні трубки нормаль $\bar{n}$ перпендикулярна до векторної лінії поля, то $\iint_{\sigma} \bar{F}\bar{n}\,d\sigma = 0$.

Тоді виходить, що $\iint_{\sigma 1} \bar{F}\bar{n}\,d\sigma = -\iint_{\sigma 0} \bar{F}\bar{n}\,d\sigma$.

Якщо змінити напрямок нормалі на площинці σ_0, тобто взяти внутрішню нормаль $\bar{n}$, то одержимо: $\iint_{\sigma 1} \bar{F}\bar{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma 0} \bar{F}\bar{n}\,d\sigma$.

Це означає, що потік вектора в напрямку векторних ліній через кожний переріз векторної трубки один і той самий, тобто в полі без джерел через кожний переріз векторної трубки протікає одна й та ж кількість рідини.

Відповідно до формули $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{F} = 0$ поле ротора довільного векторного поля – трубчасте. Справедливо й зворотне твердження – кожне трубчасте поле є полем ротора деякого векторного поля, тобто якщо $\operatorname{div}\bar{F} = 0$, то існує таке векторне поле $\bar{\Phi}$, що $\bar{\Phi} = \operatorname{rot}\bar{F}$. Вектор $\bar{\Phi}$ називають *вектором-потенціалом* поля.

4.7 Висновки

Для соленоїдного (трубчастого) поля наступні чотири властивості еквівалентні:

1) потік поля через довільну замкнену поверхню дорівнює нулю;
2) потік поля через поверхню σ, обмежену контуром L і відповідно з ним орієнтовану, залежить тільки від вибору контуру L і не залежить від конкретного вибору поверхні σ;
3) існує таке поле $\bar{\Phi}$, що $\bar{\Phi} = \operatorname{rot}\bar{F}$;
4) розбіжність поля $\bar{\Phi}$ дорівнює нулю.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називається криволінійним інтегралом за довжиною (першого роду)?
2. Як обчислити криволінійний інтеграл першого роду за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння лінії інтегрування задані у параметричній формі?
3. Як обчислити криволінійний інтеграл за довжиною за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння лінії інтегрування задано в явному вигляді $y = y(x)$?
4. Як за допомогою криволінійного інтеграла першого роду обчислити довжину дуги, масу кривої та площу циліндричної поверхні?
5. Що таке векторне поле? Що таке векторні лінії?
6. Які основні характеристики векторного поля? Дайте означення дивергенції та ротора векторного поля.
7. Що таке щільність циркуляції векторного поля?
8. Запишіть формули для обчислення дивергенції та ротора у прямокутних координатах.
9. Яке поле називається соленоїдним? Безвихровим? Гармонічним?
10. Що називається криволінійним інтегралом за координатами (другого роду)?
11. Як обчислити криволінійний інтеграл другого роду за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння лінії інтегрування задані у параметричній формі?
12. Як обчислити криволінійний інтеграл за координатами за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння лінії інтегрування задано в явному вигляді $y = y(x)$?
13. Як визначається додатний напрям обходу замкненої кривої?
14. Сформулюйте теорему і запишіть формулу Гріна, що зв'язує криволінійний і подвійний інтеграли.
15. Як за допомогою криволінійного інтеграла за координатами обчислити площу плоскої фігури?
16. Як обчислити роботу змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж заданої кривої?
17. Сформулюйте умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування.
18. Як за допомогою криволінійного інтеграла за координатами відновити функцію двох чи трьох змінних за її повним диференціалом?

19. Як за допомогою криволінійного інтеграла другого роду знайти загальний розв'язок диференціального рівняння у повних диференціалах?

20. Яке поле називається потенціальним? Як зв'язані поняття безвихрового і потенціального поля?

21. Як знайти потенціал векторного поля?

22. Що таке вектор-потенціал соленоїдного поля?

23. Що таке оператор Гамільтона (набла-оператор)? Наведіть вирази для диференціальних операцій першого порядку – градієнта, дивергенції та ротора – за допомогою цього оператора.

24. Які існують диференціальні операції другого порядку? Що таке оператор Лапласа (лапласіан)?

25. Що називається поверхневим інтегралом за площею (першого роду)?

26. Як обчислюється поверхневий інтеграл першого роду?

27. Як знайти масу матеріальної поверхні за допомогою поверхневого інтеграла за площею?

28. Що називається поверхневим інтегралом за координатами (другого роду)?

29. Які застосування має поверхневий інтеграл за координатами?

30. У чому полягає зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду?

31. Як обчислюється поверхневий інтеграл за координатами методом проектування на одну координатну площину?

32. Як обчислюється поверхневий інтеграл другого роду методом проектування на всі три координатні площини?

33. Сформулюйте теорему і запишіть формулу Стокса, що зв'язує криволінійний і поверхневий інтеграли.

34. Сформулюйте теорему і запишіть формулу Остроградського – Гауса, що зв'язує поверхневий і потрійний інтеграли.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Обчислити модуль градієнта $|gradu|$ функції $u = u(x, y, z)$ в точці M (табл. 1)

Таблиця 1 – Варіанти функції до завдання

Варіант	Завдання
1	$u = x^2 y + y^2 z - 3z$ у точці $M(2; 1; 0)$
2	$u = xyz - 2y^2$ у точці $M(3; 1; 0)$
3	$u = x^2 y - z^2$ у точці $M(1; 1; 1)$
4	$u = x^2 yz^3 + 3x$ у точці $M(2; 0; 1)$
5	$u = 3x + 2y^2 + x^2 z^3$ у точці $M(0; 1; 3)$
6	$u = x^2 y^4 z^4$ у точці $M(1; 1; 1)$
7	$u = 2x^2 y^2 + z^2$ у точці $M(1; 1; 1)$
8	$u = x^2 + 3y + y^2 z^3$ у точці $M(2; 0; 1)$
9	$u = x^5 + yz^2$ у точці $M(1; 0; 12)$
10	$u = x^2 z + 2y^2 x + 2z$ у точці $M(1; 1; 1)$

Завдання 2. Обчислити вказаний криволінійний інтеграл першого роду (за довжиною) $I = \int\limits_L f(x,y)\,dl$ по заданій дузі L.

Таблиця 2 – Варіанти криволінійного інтегралу першого роду до завдання

Варіант	Завдання
1	$\int\limits_L (x^2 - y)\,dl$, L – дуга кола $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
2	$\int\limits_L x\sqrt{1+4y}\,dl$, L – дуга параболи $y = x^2$, $0 \le x \le 1$
3	$\int\limits_L \frac{y\,dl}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, L – дуга синусоїди $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi/2$
4	$\int\limits_L x^3\sqrt{y}\,dl$, L – дуга лінії $y = x^4$, $0 \le x \le 1$
5	$\int\limits_L \frac{(3-4y)\,dl}{\sqrt{1+9xy}}$, L – дуга кубічної параболи $y = x^3$, $0 \le x \le 1$
6	$\int\limits_L \frac{x-3y}{\sqrt{1+4y}}\,dl$, L – дуга параболи $y = x^2$, $0 \le x \le 1$
7	$\int\limits_L \frac{e^x}{\sqrt{1+y^2}}\,dl$, L – дуга експоненти $y = e^x$, $0 \le x \le 1$
8	$\int\limits_L \frac{y\,dl}{\sqrt{1+16x^2 y}}$, L – дуга лінії $y = x^4$, $0 \le x \le 1$
9	$\int\limits_L \frac{y\,dl}{\sqrt{1+x^6}}$, L – дуга лінії $y = x^4/4$, $0 \le x \le 1$
10	$\int\limits_L \frac{y\sin x\,dl}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, L – дуга косинусоїди $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi/2$

Завдання 3. Обчислити вказаний криволінійний інтеграл другого роду (за координатами) $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ по заданій дузі L.

Таблиця 3 – Варіанти криволінійного інтегралу другого роду до завдання

Варіант	Завдання
1	$\int\limits_{L_{OB}} 2xydx + x^2dy$, де L_{OB}: дуга параболи $y = x^2$ від $O(0;0)$ до $B(1;1)$
2	$\int\limits_{L_{OB}} ydx + xdy$, де L_{OB}: відрізок прямої від $O(0;0)$ до $B(1;1)$
3	$\int\limits_{L_{OB}} ydx + xdy$, де L_{OB}: відрізок прямої від $O(0;0)$ до $B(1;2)$
4	$\int\limits_{L} y\,dx - (x^4 - 8y^2)dy$, $L-$ дуга параболи $y = x^2/4$, $O(0;0)$ до $B(2;1)$
5	$\int\limits_{L} xy^2\,dx + x^{5/2}dy$, $L-$ дуга параболи $y^2 = 4x$ від $A(0;\,0)$ до $B(1;\,2)$
6	$\int\limits_{L} (x^2 - 2y)dx + 3x^2y\,dy$, $L-$ дуга параболи $y = x^2$, $0 \le x \le 1$
7	$\int\limits_{L} (x - y^2)dx + xy\,dy$, $L-$ дуга параболи $y^2 = 1 - x$ від $A(1;\,0)$ до $B(0,;1)$
8	$\int\limits_{L} 12xy\,dx - (x^2 + 4y^2)dy$, $L-$ дуга параболи $y = x^2/4$, $0 \le x \le 1$
9	$\int\limits_{L_{OB}} 2xydx + x^2dy$, де L_{OB}: відрізок прямої від $O(0;0)$ до $B(2;4)$
10	$\int\limits_{L_{OB}} 2ydx + (x - y)dy$, де L_{OB}: відрізок прямої від $O(0;0)$ до $B(1;2)$

Завдання 4. Обчислити циркуляція векторного поля $\vec{F}(x, y)$ по заданій лінії.

Таблиця 4 – Варіанти векторного поля до завдання

Варіант	Завдання
1	$\vec{F}(x, y) = 2xy\bar{i} + x^2\bar{j}$ по відрізку прямої від $A(0; 0)$ до $B(1; 1)$
2	$\vec{F}(x, y) = 2xy\bar{i} + x^2\bar{j}$ по відрізку прямої від $A(0; 0)$ до $B(2; 2)$
3	$\vec{F}(x, y) = 2xy\bar{i} + x^2\bar{j}$ по відрізку прямої від $A(1; 1)$ до $B(2; 2)$
4	$\vec{F}(x, y) = y\bar{i} + x\bar{j}$ по відрізку прямої від $A(0; 0)$ до $B(1; 1)$
5	$\vec{F}(x, y) = y\bar{i} + x\bar{j}$ по відрізку прямої від $A(0; 0)$ до $B(2; 2)$
6	$\vec{F}(x, y) = 2xy\bar{i} + x^2\bar{j}$ по дузі параболи $y = x^2$ від $A(0; 0)$ до $B(1; 1)$
7	$\vec{F}(x, y) = 2xy\bar{i} + x^2\bar{j}$ по дузі параболи $y = x^2$ від $A(0; 0)$ до $B(2; 2)$
8	$\vec{F}(x, y) = 2xy\bar{i} + x^2\bar{j}$ по дузі параболи $y = \sqrt{x}$ від $A(0; 0)$ до $B(1; 1)$
9	$\vec{F}(x, y) = y\bar{i} + x\bar{j}$ по дузі параболи $y = x^2$ від $A(0; 0)$ до $B(1; 1)$
10	$\vec{F}(x, y) = y\bar{i} + x\bar{j}$ по дузі параболи $y = x^2$ від $A(1; 1)$ до $B(2; 2)$

Завдання 5. Перевірити, що задане диференціальне рівняння $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є рівнянням у повних диференціалах $\left(\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x\right)$ і знайти його загальний розв'язок $u(x,y)=C$, відновлюючи функцію $u(x,y)$ за її повним диференціалом $du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ за допомогою криволінійного інтеграла за координатами, вибираючи за шлях інтегрування ламану, ланки якої паралельні координатним осям.

Таблиця 5 – Варіанти диференціального рівняння до завдання

Варіант	Завдання
1	$3\mathrm{x}^2 e^y dx+x^3 e^y dy=0$
2	$2xydx+(x^2-2e^y)dy=0$
3	$2xe^y dx+x^2e^y dy=0$
4	$y\,dx+(x-2e^y)dy=0$
5	$xy^2dx+(e^y+x^2y)dy=0$
6	$ydx+(x+3y^2)dy=0$
7	$xy^2dx+(x^2+6)ydy=0$
8	$3x^2y^4dx+4x^3y^3dy=0$
9	$xy^2dx+(x^2y+y^5)dy=0$
10	$y^3dx+(3xy^2+e^y)dy=0$

Завдання 6. Обчислити модуль ротора $\left|rot\vec{F}\right|$ векторного поля $\vec{F}$ в точці $M(1;1;1)$

Таблиця 6 – Варіанти векторного поля до завдання

Варіант	Векторне поле
1	$\vec{F} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + zx\bar{k}$
2	$\vec{F} = z^2\bar{i} + \frac{1}{2}x^2\bar{j} + y^2\bar{k}$
3	$\vec{F} = z^2\bar{i} + x^2\bar{j} + \frac{1}{2}y^2\bar{k}$
4	$\vec{F} = \frac{1}{2}z^2\bar{i} + x^2\bar{j} + y^2\bar{k}$
5	$\vec{F} = z\bar{i} + 2x\bar{j} + 2y\bar{k}$
6	$\vec{F} = 2z\bar{i} + x\bar{j} + 2y\bar{k}$
7	$\vec{F} = 2z\bar{i} + 2x\bar{j} + y\bar{k}$
8	$\vec{F} = 3z\bar{i} + 4x\bar{j}$
9	$\vec{F} = 4x\bar{j} + 3y\bar{k}$
10	$\vec{F} = 3z\bar{i} + 4y\bar{k}$

Завдання 7. Обчислити дивергенцію векторного поля $\vec{F}$ у точці $M(1;1;1)$

Таблиця 7 – Варіанти векторного поля до завдання

Варіант	Векторне поле
1	$\vec{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$
2	$\vec{F} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + zx\bar{k}$
3	$\vec{F} = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} + z\bar{k}$
4	$\vec{F} = x^2 y\bar{i} + y^2 z\bar{j} + z^2 x\bar{k}$
5	$\vec{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + 3z\bar{k}$
6	$\vec{F} = 3x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$
7	$\vec{F} = xy^2\bar{i} + yz^2\bar{j} + zx^2\bar{k}$
8	$\vec{F} = xy^3\bar{i} + yz^3\bar{j} + zx^3\bar{k}$
9	$\vec{F} = 2xz\bar{i} + 2yx\bar{j} + zy\bar{k}$
10	$\vec{F} = x^2 z\bar{i} + y^2 x\bar{j} + z^2 y\bar{k}$

Завдання 8. Обчислити потік $П$ векторного поля $\vec{a}$ через задану поверхню.

Таблиця 8 – Варіанти векторного поля та поверхні до завдання

Варіант	Завдання
1	$\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ через верхню сторону трикутника, вирізаного з площини $x + y + z = a$ площинами $x = 0, y = 0, z = o$
2	$\vec{a} = xz\vec{i}$ через зовнішню сторону параболоїда $z = 1 - x^2 - y^2$, обмеженого площиною $z = 0, (z \geq 0)$
3	$\vec{a} = x\vec{i} + z\vec{k}$ через бічну поверхню кругового циліндра $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, обмежену площинами $z = 0, z = h, (h \geq 0)$
4	$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через верхню сторону круга, що вирізується конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ на площині $z = h, (h \geq 0)$
5	$\vec{a} = 3x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$ через зовнішню сторону параболоїда $x^2 + y^2 = 9 - z$, розташовану в першому октанті
6	$\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (z^2 + x^2)\vec{k}$ через частину площини z = 0, обмежену колом $x^2 + y^2 = 1$ в напрямку орта $\vec{k}$
7	$\vec{a} = yz\vec{i} - x\vec{j} - y\vec{k}$ через повну поверхню конуса $x^2 + y^2 = z^2$, обмежену площиною $z = 1, (0 \leq z \leq 1)$
8	$\vec{a} = 2x\vec{i} + (1 - 2y)\vec{j} + 2z\vec{k}$ через замкнуту поверхню, обмежену параболоїдом $x^2 + z^2 = 1 - 2y, (y \geq 0)$ і площиною z = 0
9	$\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через повну поверхню піраміди, обмеженої площинами $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$
10	$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2003. – 736 с.
2. Бізюк В. В. Вища математика. Модуль 3 : конспект лекцій (для студентів 2 курсу денної та заочної форм навчання за спеціальністю 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка; освітня програма «Електромеханіка та електротехнології») / В. В. Бізюк ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 204 с.
3. Бізюк В. В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків / В. В. Бізюк, А. В. Якунін. – Харків : ХНАМГ, 2008. – 300 с.
4. Вища математика для електротехніків: у 3-х модулях / Модуль 3: Числові та функціональні ряди. Функції декількох змінних. Елементи теорії поля. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Рівняння математичної фізики / В. В. Бізюк, А. В. Якунін. – Харків : ХНАМГ, 2011. – 383 с.
5. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Наука, 1997. – 415 с.
6. Індивідуальні завдання з вищої математики. Частина 4 / Ю. Є Печеніжський, С. О. Станішевський, М. П. Данилевський, М. Й. Кадець. – Харків : ХДАМГ, 2007. – 60 с.
7. Методичні вказівки та контрольні роботи з вищої математики (для студентів заочної форми навчання усіх спеціальностей). Частина друга / А. І. Колосов, М. Й. Кадець та ін. – Харків : ХНАМГ, 2006. – 71 с.
8. Мышкис А. Д. Математика для втузов. Специальные курсы. / А. Д. Мышкис – М. : Наука, 1971. – 632 с.
9. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 2. / Н. С. Пискунов – М.: Наука, 1985. – 544 с.

ДОДАТОК А

Відповіді на завдання для самостійної роботи (табл. А.1)

Таблиця А.1 – Відповіді на завдання за варіантами

Номер варіанта	Номер завдання							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	6	$2\pi-4$	1	1	x^3e^y	$\sqrt{3}$	3	$\frac{a^3}{2}$
2	5	$\frac{3}{2}$	16	2	x^2y-2e^y+2	3	3	$\frac{\pi}{6}$
3	3	1	1	7	x^2e^y	3	5	$\frac{1}{2}\pi R^2h$
4	5	$\frac{63}{144}$	2	1	$xy-2e^y+2$	3	6	πh^3
5	5	2	1	4	$e^y+\frac{1}{2}x^2y^2-1$	3	5	$\frac{81}{8}\pi$
6	6	$-\frac{1}{2}$	2	1	$xy+y^3$	3	5	$\frac{\pi}{4}$
7	6	e-1	1	16	$\frac{1}{2}\left(x^2+6\right)y^2$	3	3	0
8	5	$\frac{1}{5}$	2	1	x^3y^4	3	3	$\frac{\pi}{2}$
9	3	$\frac{1}{20}$	1	1	$\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{6}y^6$	3	5	$\frac{1}{4}$
10	5	$\frac{1}{2}$	1	7	xy^3+e^y-1	3	6	$4\pi R^3$

Навчальне видання

БІЗЮК Валерій Васильович

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Відповідальний за випуск *А. В. Якунін*

Редактор *О. В. Михаленко*
Комп'ютерне верстання *В. В. Бізюк*
Дизайн обкладинки *Т. А. Лазуренко*

Підп. до друку 29.06.2019. Формат 60 × 84/16.
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 4,5.
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.