зависимость скорости нарастания такой функции $Y(t) = \frac{dZ}{dt}$, а затем по указанному выше алгоритму производят расчет времени ее спада до нуля.

Если же функция более сложная – имеет несколько независимых переменных, то она аппроксимируется полиномами, полученными математическими методами планирования многофакторного эксперимента (в том числе расчетного с ЭВМ) [3].

1.Заездный А.М. Основы расчетов нелинейных и параметрических радиотехнических цепей. – М.: Связь, 1973. – 448 с.

2.Дикань С.В., Намитоков К.К. Аппараты систем бесперебойного электроснабжения. – К.: Техніка, 1989. – 174 с.

3.Зедгенидзе И.Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем. – М.: Наука, 1976. – 390 с.

Получено 05.05.2000

УДК 629.11.012.55

А.Н.ЛАРИН, канд. техн. наук

Харьковский институт пожарной безопасности МВД Украины

МОДЕЛЬ ПНЕВМАТИЧЕСКОЙ ШИНЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ

Приводятся математические зависимости для определения деформаций в элементах шины на основе теории многослойных анизотропных оболочек. Определяются напряжения в слоях шины. Предлагается вариант задания граничных условий. Описано применение метода локальных вариаций для решения полученных уравнений.

Основой предлагаемой расчетной математической модели является модель, приведенная в [1]. Основные формулы для упругих характеристик многослойного пакета определяем с учетом гипотезы Киргофа-Лява для всего пакета, связывающей усилия и моменты с деформациями координатной поверхности оболочки [2, 3, 4]. В соответствии с принятыми допущениями выражение полной энергии геометрически слоистой нелинейной оболочки при действии внутреннего давления и обжатия на плоскость имеет вид

$$Э = \frac{1}{2}\iint\Big[B_{11}e_{11}^2 + B_{12}e_{12}^2 + B_{22}e_{22}^2 + 2B_{22}\mu_1 e_{11}e_{22} + D_{12}\chi_{12}^2 +$$

$$+ D_{22}\chi_{22}^2 + 2D_{22}\nu_1\chi_{11}\chi_{22} + C_1(\varphi_1 - \lambda_1)^2 + C_2(\varphi_2 - \lambda_2)^2 +$$

$$+ 2e_{11}(\Omega_{11}\chi_{11} + \Omega_{00}\chi_{22}) + 2e_{12}\Omega_{12}\chi_{12} + 2e_{22}\ (\Omega_{00}\chi_{11} +$$

$$+\Omega_{22}\chi_{22}\big)-2q_3u_3\big]A_1A_2dx_1dx_2+\frac{1}{2}\iint\limits_{F_k}E_3h_3\varepsilon_3^2A_1A_2\cos\beta dx_1dx_2 .$$

Здесь обозначено

$$e_{11}=\varepsilon_{11}^0+\frac{1}{2}\varphi_1^2;\ e_{12}=\varepsilon_{12}^0+\varphi_1\varphi_2;$$

$$\varepsilon_{11}^0=u_{1,1}A_1^{-1}+u_2A_{1,2}(A_1A_2)^{-1}-k_1u_3;$$

$$\varepsilon_{12}^0=u_{1,2}A_2^{-1}+u_{2,1}A_1^{-1}-(u_1A_{1,2}+u_2A_{2,1})(A_1A_2)^{-1}$$

$$\varphi_1=u_{3,1}A_1^{-1}+k_1u_1;\ \chi_{11}=-\lambda_{1,1}A_2^{-1}-\lambda_2A_{1,2}(A_1A_2)^{-1};$$

$$\chi_{12}=-\lambda_{1,2}A_2^{-1}-\lambda_{2,1}A_1^{-1}+(\lambda_1A_{1,2}+\lambda_2A_{2,1})(A_1A_2)^{-1}; \qquad (2)$$

$$\mu_1=B_{22}^{-1}\sum_{k=1}^{m}\overline{E}_1^k h_k\mu_1^k;\ \nu_1=B_{22}^{-1}\sum_{k=1}^{m}\overline{E}_1^k h_k\mu_1^k;\ C_1=\frac{5}{6}G_{13}h;$$

$$B_{11}=\sum_{k=1}^{m}\overline{E}_1^k h_k;\ B_{12}=\sum_{k=1}^{m}G_{12}^k h_k;\ D_{11}=\sum_{k=1}^{m}\overline{E}_1^k\int\limits_{h_k}x_3^2dx_3;$$

$$D_{12}=\sum_{k=1}^{m}G_{12}^k\int\limits_{h_k}x_3^2dx_3;\ \Omega_{00}=\sum_{k=1}^{m}\overline{E}_1^k\mu_1^k\int\limits_{h_k}x_3dx_3;$$

$$\Omega_{11}=\sum_{k=1}^{m}\overline{E}_1^k\int\limits_{h_k}x_3dx_3;\ \Omega_{12}=\sum_{k=1}^{m}G_{12}^k\int\limits_{h_k}x_3dx_3;$$

$$\overline{E}_1^k=E_1^k\left(1-\mu_1^k\mu_2^k\right)^{-1};\ \varepsilon_3=\omega_3h_3^{-1},$$

где E_3, ω_3, h_3 – модуль упругости, обжатие и высота протектора; F_k – площадь области контакта протектора.

В уравнении (1) u_1,u_2,u_3 – тангенциальные перемещения координатной поверхности и прогиб оболочки; λ_1,λ_2 – углы поворота нормали оболочки. Формулы для определения ε_{22}, ε_{22}^0, φ_2, χ_{22}, B_{22}, D_{22}, μ_2, ν_2, C_2, Ω_{22} получаем из соответствующих выражений (2) путем перестановки индексов $1\leftrightarrow 2$.

Для тороидальной оболочки в качестве криволинейных координат принимаем углы φ в окружном и Θ в меридиональном направлении, т.е. $x_1 = \varphi$, $x_2 = \Theta$. При нагружении накачанной шины положение плоскости контакта определяется ее нормальным прогибом.

При одновременном действии внутреннего давления и нагрузки перемещения срединной поверхности каркаса w_k должны удовлетворять уравнениям равновесия и соответствующим ограничениям на перемещения. При $\varphi = 0$

$$(u_3 - h/2)\cos\beta + u_2 \sin\beta - h_3 \geq w_k . \quad (3)$$

В случае невыполнения условия (3) вычисляем величину прогиба протектора w_3, равную невязке

$$w_3 = -\left[w_k - (u_3 - h/2)\cos\beta - u_2 \sin\beta - h_3\right]. \quad (4)$$

Зная значения $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \chi_1, \chi_2$ в каждой точке срединной поверхности и учитывая, что в каждой точке каждого слоя оболочки имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной поверхности оболочки, из обобщенного закона Гука получаем составляющие тензора напряжения в каждом слое оболочки:

$$\sigma_\alpha^i = B_{11}^i \varepsilon_1 + B_{12}^i \varepsilon_2 + \gamma\left(B_{11}^i \chi_1 + B_{12}^i \chi_2\right);$$

$$\sigma_\beta^i = B_{12}^i \varepsilon_1 + B_{22}^i \varepsilon_2 + \gamma\left(B_{12}^i \chi_1 + B_{22}^i \chi_2\right),$$

где $B_{11}^i = \left(a_{22}^i a_{66}^i - \left[a_{26}^i\right]^2\right)\Omega_i^{-1}$, $B_{22}^i = \left(a_{11}^i a_{66}^i - \left[a_{16}^i\right]^2\right)\Omega_i^{-1}$,

$$B_{12}^i = \left(a_{16}^i a_{26}^i - a_{12}^i a_{66}^i\right)\Omega_i^{-1}, \quad B_{66}^i = \left(a_{11}^i a_{22}^i - \left[a_{12}^i\right]^2\right)\Omega_i^{-1},$$

$$\Omega_i = \left(a_{11}^i a_{22}^i - \left[a_{12}^i\right]^2\right)a_{66}^i + 2a_{12}^i a_{16}^i a_{26}^i - a_{11}^i\left[a_{26}^i\right]^2 - a_{22}^i\left[a_{16}^i\right]^2,$$

$$a_{11}^i = \frac{1}{E_1^i}, \quad a_{22}^i = \frac{1}{E_2^i}, \quad a_{12}^i = -\frac{\mu_{21}^i}{E_2^i} = -\frac{\mu_{12}^i}{E_1^i}, \quad a_{16}^i = \lambda_1^{*i}, \quad a_{26}^i = \lambda_2^{*i},$$

$$a_{66}^i = \frac{1}{G_{12}^i}.$$

При расчете шины принимаем, что на ободе ($\Theta = \Theta^*$) край шины заделан, т.е. $u_1 = u_2 = u_3 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Уравнение поверхности шины имеет вид

$$\begin{cases} x = \rho \sin\Theta \\ y = \rho\cos\Theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\Theta\cos\varphi \end{cases}.$$

Для определения кривизны поверхности необходимо знать первую и вторую производные на поверхности:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0; \ \frac{\partial x}{\partial \Theta} = \rho' \cdot \sin\Theta + \rho\cos\Theta;$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} = 0; \ \frac{\partial^2 x}{\partial \Theta^2} = \rho'' \cdot \sin\Theta + 2\rho'\cos\Theta - \rho\sin\Theta; \ \frac{\partial^2 x}{\partial\varphi\partial\Theta} = 0;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cdot\cos\Theta\cdot\cos\varphi; \ \frac{\partial y}{\partial\Theta} = (\rho'\cdot\cos\Theta + \rho\cdot\sin\Theta)\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} = -\rho\cdot\cos\Theta\cdot\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\Theta^2} = (\rho''\cdot\cos\Theta + 2\rho'\sin\Theta - \rho\cos\Theta)\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi\partial\Theta} = -\rho\cdot\sin\Theta\cdot\cos\varphi; \ \frac{\partial z}{\partial\varphi} = -\rho\cdot\cos\Theta\cdot\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial z}{\partial\Theta} = (\rho'\cdot\cos\Theta + \rho\cdot\sin\Theta)\sin\varphi; \ \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} = -\rho\cdot\cos\Theta\cdot\cos\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\Theta^2} = (\rho''\cdot\cos\Theta + 2\rho'\sin\Theta - \rho\cos\Theta)\cos\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi\partial\Theta} = -\rho\cdot\sin\Theta\cdot\sin\varphi.$$

Кривизны поверхности – корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix}; \ k_{1,2} = \frac{EN}{GL} \pm \sqrt{\left(\frac{EN}{4GL}\right)^2 - LNEG}; \qquad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}\frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} \\ k_1 . k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \end{cases},$$

где $G = A_2^2 = \frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} = \rho^2 \cos^2 \Theta$;

$$E = A_1^2 = \frac{\partial^2 x}{\partial\Theta^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial\Theta^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial\Theta^2} = \rho'^2 + \rho^2;$$

$$F = \frac{\partial^2 x}{\partial\Theta\partial\varphi} + \frac{\partial^2 y}{\partial\Theta\partial\varphi} + \frac{\partial^2 z}{\partial\Theta\partial\varphi} = 0;$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial\Theta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial\Theta^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial\Theta^2} \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial\Theta} & \frac{\partial y}{\partial\Theta} & \frac{\partial z}{\partial\Theta} \end{vmatrix} = \frac{-2\rho'^2 + \rho'\rho'' - \rho^2}{\rho\cos\Theta\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}};$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial\Theta} & \frac{\partial y}{\partial\Theta} & \frac{\partial z}{\partial\Theta} \end{vmatrix} = \frac{-\rho\cos\Theta(\rho'\sin\Theta + \rho\cos\Theta)}{\rho\cos\Theta\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}};$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial\varphi\partial\Theta} & \frac{\partial^2 y}{\partial\varphi\partial\Theta} & \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi\partial\Theta} \\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial\Theta} & \frac{\partial y}{\partial\Theta} & \frac{\partial z}{\partial\Theta} \end{vmatrix} = 0.$$

Определим производные ρ', ρ''. Для этого наружную поверхность шины представим как три окружности с сопряженными радиусами. Уравнение каждой из окружностей в системе координат $X'O'Z'$ имеет вид

$$R^2 = (\rho\cos(\Theta') - a)^2 + (\rho\sin(\Theta') - b)^2,$$

где a и b – соответственно смещения центра окружности относительно осей $O'Z'$ и $O'X'$ (рис.1), откуда получаем ρ:

$$\rho = \begin{cases} b\sin\Theta + a\cos\Theta + \sqrt{(b\sin\Theta + a\cos\Theta)^2 + R^2 - a^2 - b^2} \\ \text{при условии } \rho > b\sin\Theta + a\cos\Theta; \\ b\sin\Theta + a\cos\Theta - \sqrt{(b\sin\Theta + a\cos\Theta)^2 + R^2 - a^2 - b^2} \\ \text{при условии } \rho < b\sin\Theta + a\cos\Theta. \end{cases} \qquad (6)$$

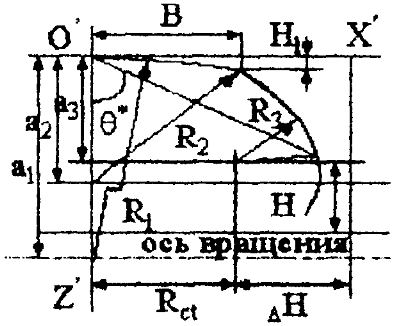

Рис.1 – К выводу уравнений для определения производных

Производная ρ' равна

$$\frac{\partial\rho}{\partial\Theta} = \frac{\rho(b\cos\Theta - a\sin\Theta)}{\rho - b\sin\Theta - a\cos\Theta}. \qquad (7)$$

Вторую производную находим дифференцированием уравнения (7):

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial\Theta^2} = \frac{-\rho(b\sin\Theta - a\cos\Theta) + 2\rho'(b\cos\Theta - a\sin\Theta) - \rho'^2}{\rho - b\sin\Theta - a\cos\Theta}. \qquad (8)$$

Требуется найти вектор-функцию $U = (U_1, U_2, U_3, \lambda_1, \lambda_2)$ двух независимых переменных φ и Θ, определенную в области $0 < \varphi < \pi$, $0 < \Theta < \Theta^*$ с граничными условиями при $\Theta = 0$ $U_1 = U_2 = U_{2,\varphi} =$

$= \lambda_{1,\Theta} = \lambda_2 = 0; \qquad \varphi = 0 \qquad U_1 = U_2 = \lambda_{2,\Theta} = \lambda_1 = 0; \qquad \varphi = \pi$;

$U_1 = U_2 = = U_3 = 0$; $\Theta = \Theta^*$ $U_1 = U_2 = U_3 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$; при $\Theta < \Theta'$ – в контакте шины с опорой $U_3 = const$ и $U_2 = const$ и ограничениями на остальные значения $(U_3 - h/2)\cos\beta +$ $+ U_2 \sin\beta - h_3 \le w_3$.

Подынтегральная функция (5)

$$f = B_{11}e_{11}^2 + B_{12}e_{12}^2 + B_{22}e_{22}^2 + 2B_{22}\mu_1 e_{11}e_{22} + D_{12}\chi_{12}^2 + D_{22}\chi_{22}^2 +$$
$$+ 2D_{22}\nu_1\chi_{11}\chi_{22} + C_1(\varphi_1 - \lambda_1)^2 + C_2(\varphi_2 - \lambda_2)^2 + 2e_{11}(\Omega_{11}\chi_{11} +$$
$$+ \Omega_{00}\chi_{22}) + 2e_{12}\Omega_{12}\chi_{12} + 2e_{22}(\Omega_{00}\chi_{11} + \Omega_{22}\chi_{22}) - 2q_3u_3 + \Delta f, \quad (9)$$

$$\Delta f = \begin{cases} \dfrac{w_3 E_3}{h_3}\cos\beta, & (U_3 - h/2)\cos\beta + U_2\sin\beta - h_3 > w_3 \\ 0, & (U_3 - h/2)\cos\beta + U_2\sin\beta - h_3 \le w_3 \end{cases}$$

и минимизирующая функция

$$J = \iint\limits_D f\left(\varphi, \Theta, U, \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \frac{\partial U}{\partial \Theta}\right) A_1 A_2 d\Theta d\varphi.$$

Интеграл приближенно заменяем суммой интегралов по ячейкам, целиком принадлежащим области. Обозначим через P_{ij} вершины ячеек с координатами φ_j и Θ_i. Точка P_{ij} внутренняя, если она вместе с четырьмя ячейками, вершиной которых является, лежит в замкнутой области. Остальные точки – граничные. $J = \sum I_{ij}$, где I_{ij} – приближенное значение интеграла по ячейке с вершинами P_{ij}, $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$, $P_{i+1,j+1}$.

$$I_{ij} = \Delta\varphi\Delta\Theta f\left(\varphi_j^*, \Theta_i^*, U_{ij}^*, (U_\varphi)_{ij}^*, (U_\Theta)_{ij}^*\right). \quad (10)$$

Здесь введены обозначения для средних значений функции в ячейке:

$$\varphi_j^* = \frac{\varphi_j + \varphi_{j+1}}{2}, \; \Theta_i^* = \frac{\Theta_i + \Theta_{i+1}}{2},$$

$$U_{ij}^* = \left(U_{ij} + U_{i,j+1} + U_{i+1,j} + U_{i+1,j+1}\right)/4,$$

$$(U_{\varphi})^{*}_{ij} = \left(U_{i+1,j+1} + U_{i+1,j} - U_{ij} - U_{i,j+1}\right) / 2\Delta\varphi,$$
$$(U_{\Theta})^{*}_{ij} = \left(U_{i+1,j+1} + U_{i,j+1} - U_{ij} - U_{i+1,j}\right) / 2\Delta\Theta.$$

Варьирование производим последовательно для каждого из компонентов вектора U, сначала для первого, затем для второго и т.д. Для каждого из компонентов вектора U^{k} задается свой шаг варьирования $h_k > 0$. При варьировании k-го компонента значения всех остальных компонентов вектора U остаются фиксированными. Изменение U_{ij} в одной внутренней точке P_{ij} вызывает изменение четырех слагаемых, входящих в сумму (11). Эти слагаемые соответствуют ячейкам, имеющим вершиной точку P_{ij}. Обозначим сумму через Φ_{ij}.

$$\Phi_{ij} = I_{ij} + I_{i-1,j} + I_{i,j-1} + I_{i-1,j-1}. \qquad (11)$$

Обозначим через Φ^{+}_{ij} и Φ^{-}_{ij} значения, принимаемые суммой (11) при подстановках в нее вместо U_{ij} соответствующих величин $U_{ij} + h$ и $U_{ij} - h$.

$$U^{n+1}_{ij} = \begin{cases} U^{n}_{ij} & \Phi_{ij} \le \Phi^{+}_{ij}, \Phi_{ij} \le \Phi^{-}_{ij} \\ U^{n}_{ij} + h \quad \text{при} & \Phi^{+}_{ij} < \Phi_{ij}, \Phi^{+}_{ij} \le \Phi^{-}_{ij} \\ U^{n}_{ij} - h & \Phi^{-}_{ij} < \Phi_{ij}, \Phi^{-}_{ij} < \Phi^{+}_{ij} \end{cases}.$$

Результаты расчета нагруженного профиля шин приведены на рис.2, 3.

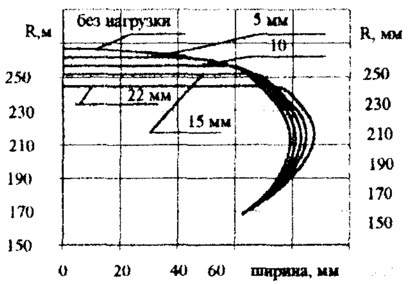

Рис.2. – Профиль шины 155/70R13 в зависимости от прогиба

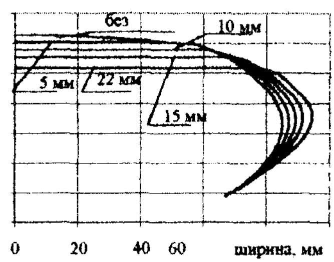

Рис.3. – Профиль шины 165/70R13 в зависимости от прогиба

В результате математического моделирования взаимодействия шины с дорогой можно сделать следующие выводы:

- деформации от вертикальной нагрузки распространяются не более чем на треть окружности шины. В остальной части шины напряженно-деформированное состояние создается внутренним давлением воздуха;

- так как напряжения в направлении нормали к поверхности боковой стенки шины намного меньше меридиональных и окружных напряжений, то напряженное состояние стенки шины можно рассматривать как плосконапряженное.

1.Николаев И.К. Математическая модель диагональной шины и ее численная реализация // Механика пневматических шин. – М.: НИИШП, 1976. – С.47-69.

2.Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин – М.: Наука, 1967. – 263 с.

3.Бухин Б.Л. Теория безмоментных сетчатых оболочек вращения и ее приложения к расчету пневматических шин / Дисс. на соиск. уч. степени д-ра техн. наук. – М., 1972. – 387 с.

4.Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тэтерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.

5.Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. – М.: Наука, 1973. – 238 с.

Получено 05.05.2000

УДК 628.74

В.А.ГОЛЕНДЕР, канд. техн. наук, С.Л.ДМИТРИЕВ,
С.Ю.ПОТЕТЮЕВ, И.А.ЧЕПУРИН
Харьковский институт пожарной безопасности МВД Украины
П.З.ГУЛАКОВ
Харьковский метрополитен

К ВОПРОСУ О МОДЕЛИРОВАНИИ ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ СИТУАЦИЙ В МЕТРОПОЛИТЕНЕ

Проблема тушения пожаров и спасения людей в метрополитене является одной из составляющих государственной программы обеспечения национальной безопасности Украины. Здесь рассматриваются вопросы, связанные с пожарной опасностью и возможностью возникновения чрезвычайных ситуаций (ЧС).

Происходящие возгорания и пожары в метро свидетельствуют о высокой пожарной опасности его подвижного состава. Пожарная опасность связана с объективно существующим классическим треугольником пожара: принудительная и естественная вентиляция воздуха в тоннелях и сооружениях, наличие источников зажигания (большей частью электрических), значительная пожарная нагрузка. Практически все в метро, начиная с подвагонного оборудования и кончая облицовочными материалами, содержит горючие и трудногорючие элементы. Пожарная нагрузка вагонов всех серий и типов при-