

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
для виконання розрахунково-графічної роботи
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
*(для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання
спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій)*

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2020

Методичні рекомендації для виконання розрахунково-графічної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика» (для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад: С. М. Мордовцев. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 27 с.

Укладач канд. техн. наук, доц. С. М. Мордовцев

Рецензент

С. М. Ламтюгова, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 2 від 26.09.2019.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 ЗАВДАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ.....	5
2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ	10
2.1 Приклад розв'язання завдання 1	10
2.2 Приклад розв'язання завдання 2	11
2.3 Приклад розв'язання завдання 3	13
2.4 Приклад розв'язання завдання 4	15
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	18
ДОДАТОК А Зразок оформлення розрахунково-графічної роботи.....	19
ДОДАТОК Б. Запис формул в MS EXCEL.....	20
ДОДАТОК В. Створення функції GRADMC в MS Excel	26

ВСТУП

Методичні рекомендації до виконання розрахунково-графічної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика» (модуль 1) розроблені для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій, які навчаються в Харківському національному університеті міського господарства імені О. М. Бекетова.

Метою виконання розрахунково-графічної роботи є формування у майбутніх фахівців з геодезії, картографії та землеустрою базових математичних знань для розв'язування практичних задач у сфері їх професійної діяльності.

Сучасні програми навчання приділяють велику увагу самостійній роботі студентів, тому в методичних рекомендаціях особлива увага приділяється доступному поданню теоретичного матеріалу, необхідного для розв'язання запропонованих завдань.

Після вивчення теоретичного матеріалу студент вирішує завдання розрахунково-графічної роботи відповідно до варіанту. У додатку А наведено зразок оформлення титульного аркуша роботи.

1 ЗАВДАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. За відомими результатами вимірів гіпотенузи c та катету a у прямокутному трикутнику ABC (рис. 1.1), які визначені з максимальними абсолютними похибками $|\Delta^*c|$ і $|\Delta^*a|$ (табл. 1.1), необхідно знайти максимальну абсолютну похибку при обчисленні кута A .

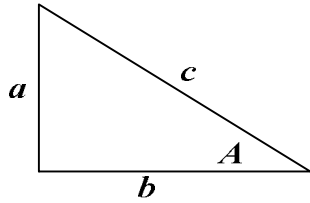


Рисунок 1.1

Таблиця 1.1 – Дані для виконання завдання 1

Варіант	Гіпотенуза c , м	Катет a , м	Δ^*c , м	Δ^*a , м
1	68	28	0,10	0,05
2	59	38	0,15	0,08
3	87	41	0,21	0,12
4	109	82	0,15	0,09
5	117	68	0,22	0,10
6	98	68	0,18	0,08
7	78	36	0,20	0,1
8	71	32	0,21	0,09
9	62	42	0,22	0,07
10	90	45	0,18	0,06
11	112	86	0,19	0,10
12	120	72	0,21	0,11
13	101	72	0,18	0,07
14	104	67	0,20	0,08
15	84	54	0,17	0,06
16	77	48	0,18	0,05
17	68	33	0,16	0,05
18	96	36	0,17	0,06
19	118	66	0,20	0,10
20	126	69	0,21	0,14
21	107	72	0,22	0,08
22	95	50	0,19	0,11
23	75	40	0,24	0,07
24	82	52	0,20	0,09

Завдання 2. За відомими результатами вимірів катета b і кута A у прямокутному трикутнику ABC (рис. 1.1), які визначені з максимальними абсолютними похибками $|\Delta^*b|$ і $|\Delta^*A|$ (табл. 1.2) необхідно знайти максимальну абсолютну похибку при обчисленні катета a .

Таблиця 1.2 – Дані для виконання завдання 2

Варіант	Кут A	Катет b , м	Δ^*A	Δ^*b , м
1	27° 48' 43"	115	0° 0' 11"	0,05
2	29° 54' 47"	110	0° 0' 10"	0,08
3	32° 00' 51"	105	0° 0' 12"	0,12
4	34° 06' 56"	100	0° 0' 14"	0,09
5	34° 20' 05"	95	0° 0' 10"	0,10
6	36° 26' 07"	90	0° 0' 11"	0,08
7	38° 32' 10"	85	0° 0' 12"	0,10
8	40° 38' 13"	80	0° 0' 12"	0,09
9	42° 44' 16"	130	0° 0' 14"	0,07
10	44° 50' 19"	125	0° 0' 15"	0,06
11	46° 56' 22"	117	0° 0' 16"	0,10
12	49° 02' 26"	109	0° 0' 08"	0,11
13	51° 08' 29"	101	0° 0' 07"	0,07
14	53° 14' 32"	93	0° 0' 14"	0,08
15	33° 20' 35"	85	0° 0' 10"	0,06
16	35° 26' 37"	140	0° 0' 12"	0,05
17	37° 32' 40"	132	0° 0' 12"	0,05
18	39° 38' 43"	124	0° 0' 14"	0,06
19	41° 44' 46"	116	0° 0' 07"	0,10
20	43° 50' 49"	108	0° 0' 08"	0,14
21	45° 56' 52"	100	0° 0' 09"	0,08
22	50° 24' 30"	11	0° 0' 11"	0,09
23	43° 20' 35"	88	0° 0' 08"	0,07
24	38° 36' 17"	137	0° 0' 13"	0,06

Завдання 3. Для визначення висоти H споруди виміряно горизонтальна

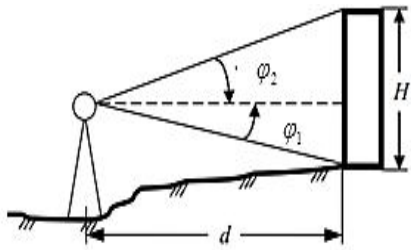


Рисунок 1.2

відстань d і вертикальні кути φ_1 ; φ_2 (рис. 1.2).

Знайти середньоквадратичну помилку обчислення висот, якщо задані максимальні абсолютні помилки

$$\sigma_d; \sigma_{\varphi_1} = \sigma_{\varphi_2} = \sigma_{\varphi} \text{ (табл. 1.3).}$$

Таблиця 1.3 – Дані для виконання завдання 3

Варіант	d , м	σ_d , м	σ_{φ}	φ_1	φ_2	σ_{φ}
1	95,5	0,030	30"	0° 30'	10° 30'	0° 0' 30"
2	100	0,025	28"	1° 10'	9° 30'	0° 0' 28"
3	110	0,035	26"	2° 15'	13° 56'	0° 0' 25"
4	120	0,040	24"	3° 46'	15° 22'	0° 0' 24"
5	130	0,045	22"	4° 15'	16° 10'	0° 0' 22"
6	140	0,020	32"	5° 47'	19° 58'	0° 0' 32"
7	76	0,030	34"	3° 12'	9° 05'	0° 0' 34"
8	82	0,025	36"	2° 30'	15° 10'	0° 0' 36"
9	88	0,035	38"	2° 10'	12° 44'	0° 0' 38"
10	94	0,040	40"	3° 32'	11° 45'	0° 0' 40"
11	100	0,045	37"	2° 11'	13° 22'	0° 0' 37"
12	106	0,020	34"	1° 48'	15° 30'	0° 0' 34"
13	112	0,030	31"	2° 15'	12° 38'	0° 0' 30"
14	118	0,025	28"	4° 30'	16° 21'	0° 0' 28"
15	124	0,035	25"	3° 30'	15° 40'	0° 0' 24"
16	73	0,040	30"	4° 19'	10° 50'	0° 0' 30"
17	81	0,045	27"	2° 52'	12° 35'	0° 0' 26"
18	89	0,020	30"	2° 50'	13° 24'	0° 0' 30"
19	97	0,040	28"	3° 10'	14° 30'	0° 0' 28"
20	105	0,030	26"	5° 17'	12° 9'	0° 0' 25"
21	113	0,050	24"	3° 30'	15° 18'	0° 0' 24"
22	150	0,055	44"	2° 12'	19° 30'	0° 0' 44"
23	124	0,035	36"	4° 30'	15° 48'	0° 0' 37"
24	95	0,045	38"	3° 10'	18° 28'	0° 0' 35"

Завдання 4. За вибіркою, яку представлено в таблиці 1.4 та згідно з варіантами:

а) знайти рівняння лінійної регресії і побудувати графіки точкової функції і регресійної прямої;

б) підрахувати коефіцієнти кореляції і детермінації.

Таблиця 1.4 – Дані для виконання завдання 4

Варіант 1		Варіант 2		Варіант 3		Варіант 4		Варіант 5		Варіант 6	
X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i
0,3	1,1	0,2	0,9	0,5	1,2	0,2	8,3	0,2	13,5	1,0	2,5
0,6	1,4	0,6	1,2	1,0	1,6	0,4	7,7	0,4	11,0	3,0	3,8
0,9	2,6	0,8	1,8	1,5	1,8	0,6	6,5	0,6	10,5	5,0	4,1
1,2	3,1	0,9	2,9	2,0	2,4	0,8	5,1	0,8	9,4	7,0	5,6
1,5	4,9	1,2	3,6	2,5	3,3	1,0	4,9	1,0	8,1	9,0	6,9
1,8	5,9	1,4	4,7	3,0	4,2	1,2	3,5	1,2	7,3	11,0	7,4
2,1	6,4	1,5	5,5	3,5	5,1	1,4	2,4	1,4	6,1	13,0	8,7
2,4	7,3	2,2	6,7	4,0	5,8	1,6	2,1	1,6	5,0	15,0	9,9
2,7	8,4	2,8	7,6	4,5	6,7	1,8	1,8	1,8	3,2	17,0	12,4
3,0	10,1	3,7	9,4	5,0	7,1	2,0	0,5	2,0	3,0	19,0	13,7
Варіант 7		Варіант 8		Варіант 9		Варіант 10		Варіант 11		Варіант 12	
X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i
0,1	3,6	0,4	15,1	1,0	14,0	1,0	4,0	1,0	3,7	0,4	1,5
0,2	3,8	0,8	14,6	3,0	13,6	3,0	4,8	2,0	4,4	0,6	2,8
0,3	4,4	1,2	14,1	5,0	12,1	5,0	6,8	3,0	5,9	0,8	4,9
0,4	5,8	1,6	11,4	7,0	10,5	7,0	7,4	4,0	6,3	1,0	7,5
0,5	7,2	2,0	9,8	9,0	8,8	9,0	8,8	5,0	7,1	1,2	7,9
0,6	7,9	2,4	9,1	11,0	7,4	11,0	9,3	6,0	9,3	1,4	9,0
0,7	8,5	2,8	6,7	13,0	5,2	13,0	11,7	7,0	10,4	1,6	11,0
0,8	10,1	3,2	5,2	15,0	4,3	15,0	12,9	8,0	11,0	1,8	12,8
0,9	11,0	3,6	4,1	17,0	3,9	17,0	14,3	9,0	14,3	2,0	15,0
1,0	11,6	4,0	2,6	19,0	3,0	19,0	16,0	10,0	15,0	2,2	15,6

Продовження таблиці 1.4

Варіант 13		Варіант 14		Варіант 15		Варіант 16		Варіант 17		Варіант 18	
X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i
1,0	0,4	0,2	10,0	0,3	12,1	0,5	1,1	1,0	2,2	1,0	3,1
2,0	2,8	0,4	8,5	0,6	10,8	1,0	1,6	1,5	3,6	2,0	3,7
3,0	1,2	0,6	7,4	0,9	8,7	1,5	2,7	2,0	4,1	3,0	4,2
4,0	2,1	0,8	6,1	1,2	6,4	2,0	3,9	2,5	5,0	4,0	5,9
5,0	3,3	1,0	4,9	1,5	5,1	2,5	5,4	3,0	5,6	5,0	6,7
6,0	4,8	1,2	4,2	1,8	4,4	3,0	7,6	3,5	6,7	6,0	8,5
7,0	5,0	1,4	3,5	2,1	3,2	3,5	8,6	4,0	8,5	7,0	9,4
8,0	6,2	1,6	2,4	2,4	2,7	4,0	9,4	4,5	9,3	8,0	10,1
9,0	7,4	1,8	1,2	2,7	1,5	4,5	10,8	5,0	10,4	9,0	11,0
10,0	8,2	2,0	0,8	3,0	1,1	5,0	11,0	5,5	12,0	10,0	11,8
Варіант 19		Варіант 20		Варіант 21		Варіант 22		Варіант 23		Варіант 24	
X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i
0,3	1,7	0,2	1,4	0,5	1,8	0,2	12,5	0,2	20,3	1,0	3,8
0,6	2,1	0,6	1,8	1,0	2,4	0,4	11,6	0,4	16,5	3,0	5,7
0,9	3,9	0,8	2,7	1,5	2,7	0,6	9,8	0,6	15,8	5,0	6,2
1,2	4,7	0,9	4,4	2,0	3,6	0,8	7,7	0,8	14,1	7,0	8,4
1,5	7,4	1,2	5,4	2,5	5,0	1,0	7,4	1,0	12,2	9,0	10,4
1,8	8,9	1,4	7,1	3,0	6,3	1,2	5,3	1,2	11,0	11,0	11,1
2,1	9,6	1,5	8,3	3,5	7,7	1,4	3,6	1,4	9,2	13,0	13,1
2,4	11,0	2,2	10,1	4,0	8,7	1,6	3,2	1,6	7,5	15,0	14,9
2,7	12,6	2,8	11,4	4,5	10,1	1,8	2,7	1,8	4,8	17,0	18,6
3,0	15,2	3,7	14,1	5,0	10,7	2,0	0,8	2,0	4,5	19,0	20,6

2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

2.1 Приклад розв'язання завдання 1

Надано: гіпотенуза c та катет a прямокутний трикутник ABC , які визначені з максимальними абсолютними похибками $|\Delta^*c| = 0,2$; $|\Delta^*a| = 0,1$, відповідно рівні $c = 75$, $a = 32$. Визначити кут A і максимальну абсолютну похибку при обчисленні кута A .

Рішення. Згідно з рисунком 1.1, $\sin A = \frac{a}{c}$. Тоді

$$A = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right). \quad (2.1)$$

Отже, кут A можна розглядати як функцію двох змінних c , a .

Базове значення кута A дорівнює:

$$A = \arcsin\left(\frac{32}{75}\right) = 0,440804 \text{ рад, або } A = \frac{0,440804}{\pi} \cdot 180^\circ = 25,2562 \text{ дес. град.} \quad (2.2)$$

Максимальна похибка обчислень кута A визначається за формулою:

$$|\Delta^*A| = \left|\frac{\partial A}{\partial a}\right| \cdot |\Delta^*a| + \left|\frac{\partial A}{\partial c}\right| \cdot |\Delta^*c|. \quad (2.3)$$

Обчислимо частинні похідні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial a} &= \frac{1}{c\sqrt{1-(a/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{c^2-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{75^2-32^2}} = 0,014743; \\ \frac{\partial A}{\partial c} &= \frac{a}{\sqrt{1-(a/c)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{c^2}\right) = -\frac{a}{c\sqrt{c^2-a^2}} = -\frac{32 \cdot 0,014743}{75} = -0,00629. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Згідно (1.2), отримаємо:

$$|\Delta^*A| = 0,014743 \cdot 0,1 + 0,00629 \cdot 0,2 = 0,002732 \text{ радіан.} \quad (2.5)$$

Переведемо радіани в десяткові градуси за формулою:

$$|\Delta^*A| = \frac{0,002732 \cdot 180^\circ}{\pi} = 0,1565 \text{ дес. град.} \quad (2.6)$$

Завдання можна вирішити за допомогою MS Excel (рис. 2.1). У додатку Б надано короткий посібник з введення формул і використання вбудованих функцій. Для перекладу десяткових градусів в формат градуси/хвилини/секунди використана вбудована функція GRADMC. У додатку В надано докладну інструкцію зі створення функції GRADMC.

B10		fx =1/КОРЕНЬ(B4*B4-B3*B3)			
	A	B	C	D	E
1	Завдання 1				
2					
3	$a=$	32	$\Delta*a=$	0,1	
4	$c=$	75	$\Delta*c=$	0,2	
5					
6	$A=$	0,44080391	рад.		
7	$A=$	25,25620366	дес. град		
8	$A=$	25° 15 ' 22 "			
9					
10	$\frac{\partial A}{\partial a}=$	0,014742593	$\frac{\partial A}{\partial c}=$	-0,00629	
11	Абсолютна похибка при обчисленні кута A .				
12	$\Delta*A=$	0,002732294	рад.		
13	$\Delta*A=$	0,156548912	дес. град		
14	$\Delta*A=$	0° 9 ' 23 "			

Рисунок 2.1 – Рішення завдання 1 в MS EXCEL

2.2 Приклад розв'язання завдання 2

Надано: у прямокутному трикутнику ABC (рис. 1.1) катет $b = 121,56$ м, кут $A = 25^\circ 21' 40''$. При цьому, максимальна абсолютна похибка при визначенні катета дорівнює $|\Delta*b|=0,05$ м, максимальна абсолютна похибка при визначенні кута A дорівнює $|\Delta*A|=12''$. Визначити катет a максимальну абсолютну похибку при обчисленні катета $|\Delta*a|$.

Рішення. Відомо, що катет визначається за формулою

$$a = b \cdot \operatorname{tg} A. \quad (2.7)$$

Тобто його можна розглядати як функцію двох змінних b, A .

Необхідно перевести кут A і $|\Delta*A|$ в десяткові градуси:

$$A = 25 + 21/60 + 40/3600 = 25,36111 \text{ дес. град.};$$

$$|\Delta^* A| = 12/3600 = 0,00333 \text{ дес. град.} \quad (2.8)$$

Крім того, значення $|\Delta^* A|$ перекладається в радіани за формулою:

$$|\Delta^* A| = \frac{0,00333 \cdot \pi}{180} = 0,0000581 \text{ радіан.} \quad (2.9)$$

Якщо розрахунки проводяться за допомогою калькулятора, при обчисленні тангенса кута A перевірте установку режиму розрахунку в градусах (DEG) (рис. 2.2)

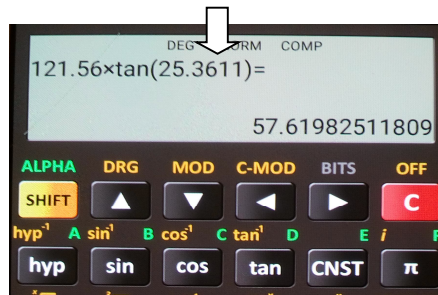


Рисунок 2.2 – Обчислення катету на калькуляторі

Згідно з (2.7), знайдемо базове значення катета (рис. 2.2)

$$a = 57,6198 \text{ м.}$$

Максимальна абсолютна похибка при обчисленні катета a визначається за формулою:

$$|\Delta^* a| = \left| \frac{\partial a}{\partial b} \right| \cdot |\Delta^* b| + \left| \frac{\partial a}{\partial A} \right| \cdot |\Delta^* A|, \quad (2.10)$$

де $\frac{\partial a}{\partial b} = \operatorname{tg} A = \operatorname{tg}(25,3611) = 0,474;$

$$\frac{\partial a}{\partial A} = \frac{b}{\cos^2 A} = \frac{121,56}{\cos^2(25,3611)} = 148,872$$

Згідно з (2.10), отримаємо максимальну абсолютну похибку при обчисленні катета a :

$$|\Delta^* a| = 0,474 \cdot 0,05 + 148,872 \cdot 0,0000581 = 0,03235 \text{ м.} \quad (2.11)$$

Приклад рішення завдання 2 за допомогою MS EXCEL надано на рисунку 2.3.

E5		fx =B5+C5/60+D5/3600				
	A	B	C	D	E	F
1	Завдання 2					
2						
3	$b=$	121,56	$\Delta*b=$	0,05		
4		град.	хвил.	сек.	дес. град	рад
5	$A=$	25	21	40	25,361111	0,4426349
6	$\Delta*A=$			12	0,0033333	0,000058
7	Катет					
8	$a=$	57,61985	м			
9						
10	$\frac{\partial a}{\partial b}=$	0,474	$\frac{\partial a}{\partial d}=$	148,872		
11	Абсолютна похибка при обчисленні кута A .					
12	$\Delta*a=$	0,032361	м			

Рисунок 2.3 – Рішення завдання 2 в MS EXCEL

2.3 Приклад розв'язання завдання 3

Надано: для визначення висоти H споруди виміряно горизонтальна відстань $d = 95,5$ м і вертикальні кути $\varphi_1 = -0^\circ54'$; $\varphi_2 = +10^\circ30'$ (рис 1.2). Знайти середньоквадратичну помилку обчислення висот, якщо середньоквадратичні помилки обчислення d і вертикальних кутів $\sigma_d = 0,03$ м; $\sigma_{\varphi_1} = \sigma_{\varphi_2} = \sigma_\varphi = 30''$.

Рішення. З рисунка 1.2 маємо:

$$H = d(\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2) \quad (2.12)$$

Середньоквадратична помилка обчислення висоти обчислюється за формулою:

$$\sigma_H = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \varphi_1}\right)^2 \sigma_{\varphi_1}^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial \varphi_2}\right)^2 \sigma_{\varphi_2}^2}. \quad (2.13)$$

Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial H}{\partial d} = \operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2; \quad \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} = \frac{d}{\cos^2 \varphi_1}; \quad \frac{\partial H}{\partial \varphi_2} = \frac{d}{\cos^2 \varphi_2}. \quad (2.14)$$

Оскільки $\sigma_{\varphi_1} = \sigma_{\varphi_2} = \sigma_{\varphi}$,

$$\sigma_H = \sqrt{(\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{1}{\cos^4 \varphi_1} + \frac{1}{\cos^4 \varphi_2} \right) d^2 \sigma_{\varphi}^2}. \quad (2.15)$$

Приклад рішення завдання 3 за допомогою MS EXCEL подано на рисунку 2.3.

B14		fx =КОРЕНЬ(B11*B11*D3*D3+E11*E11*F7*F7+G11*G11*F7*F7)							
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Завдання 3								
2									
3	d=	95,5	σd=	0,03	м				
4		град.	хвил.	сек.	дес. град	рад			
5	φ1=		54		0,9	0,015708			
6	φ2=	10	30		10,5	0,183260			
7	σφ=			30	0,008333	0,000145			
8									
9	Висота H=	19,20	м						
10									
11	$\frac{\partial H}{\partial d} =$	0,20105		$\frac{\partial H}{\partial \varphi_1} =$	95,5236	$\frac{\partial H}{\partial \varphi_2} =$	98,7805		
12									
13	Середньоквадратична помилка обчислення висоти								
14	σH=	0,0209	м.						
15									

Рисунок 2.3 - Рішення завдання 3 в MS EXCEL

2.4 Приклад розв'язання завдання 4

Надано: за вибіркою, яку представлено в таблиці 2.1, знайти:

- рівняння лінійної регресії і побудувати графіки точкової функції і регресійної прямої;
- коефіцієнти кореляції і детермінації.

Рішення. Побудуємо графік точкової функції (рис. 2.4).

Таблиця 2.1

X_i	Y_i
1	8,5
2	6,9
3	6,1
4	5,8
5	4,6
6	3,7
7	2,9
8	1,7
9	1,2
10	1,1

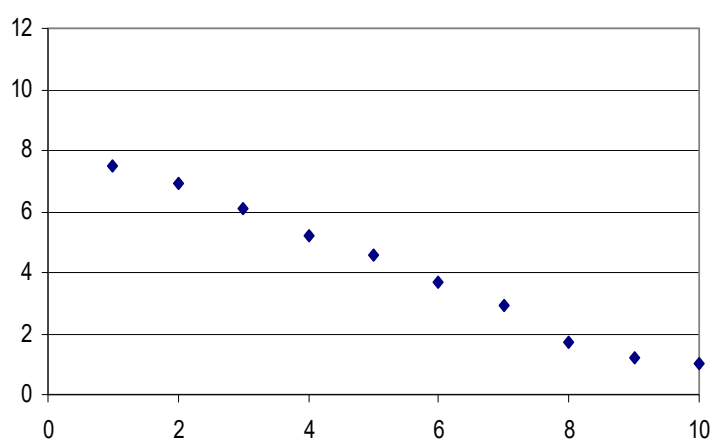


Рисунок 2.4 – Графік залежності y_i от x_i

За розташуванням точок можна припустити наявність лінійної кореляційної або регресійної залежності. Будемо шукати рівняння регресії у вигляді:

$$\hat{y} = kx + b. \quad (2.16)$$

Для визначення коефіцієнтів використовуємо метод найменших квадратів, згідно з яким:

$$Q = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (kx_i + b - y_i)^2 \Rightarrow \min. \quad (2.17)$$

Умова існування мінімуму виглядає так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a} &= 2 \sum (kx_i + b - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} &= 2 \sum (kx_i + b - y_i) \cdot x_i = 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

звідки:

$$\begin{aligned} nb + k \sum x_i &= \sum y_i; \\ b \sum x_i + k \sum x_i^2 &= \sum x_i y_i. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Поділимо на n й введемо позначення:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i; \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum x_i y_i; \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum x_i^2. \quad (2.20)$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned} b + k\bar{x} &= \bar{y} \\ b\bar{x} + k\overline{x^2} &= \overline{xy}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Після нескладних перетворень отримаємо:

$$b = \bar{y} - b\bar{x} \Rightarrow k = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (2.22)$$

Коефіцієнт k називається коефіцієнтом регресії. Вираз в чисельнику (2.22) є коваріацією (кореляційний момент) величин Y і X , яка характеризує ступінь розсіювання навколо середнього значення: $\text{cov}(x, y) = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$.

Сформуємо таблицю 2.2 і визначимо середні значення

Таблиця 2.2 – Визначення вибірових середніх значень

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	8,5	1	8,5	72,25
2	6,9	4	13,8	47,61
3	6,1	9	18,3	37,21
4	5,8	16	23,2	33,64
5	4,6	25	23,0	21,16
6	3,7	36	22,2	13,69
7	2,9	49	20,3	8,41
8	1,7	64	13,6	2,89
9	1,2	81	10,8	1,44
10	1,1	100	11,0	1,21
\bar{x}	\bar{y}	$\overline{x^2}$	\overline{xy}	$\overline{y^2}$
5,50	4,25	38,50	16,47	23,951

Обчислимо коефіцієнти за формулою (2.22):

$$k = (16,47 - 5,5 \cdot 4,25) / (38,5 - 5,5 \cdot 5,5) = -0,837;$$

$$b = 4,25 - (-0,78242) \cdot 5,5 = 8,8533.$$

Середні квадратичні відхилення змінних X та Y визначаються за формулами:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{x^2 - \bar{x}^2} = 2,8723; \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n}} = \sqrt{y^2 - \bar{y}^2} = 2,4166. \quad (2.23)$$

Коефіцієнт кореляції дорівнює:

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y} = -0,9907. \quad (2.24)$$

При $r > 0$ кореляційний зв'язок між змінними – пряма, при $r < 0$ – зворотна. Доповнимо таблицю двома стовпцями і обчислимо дисперсії.

Коефіцієнт детермінації характеризує частку дисперсії, що пояснюється регресією:

$$R^2 = r^2 = 0,9815. \quad (2.25)$$

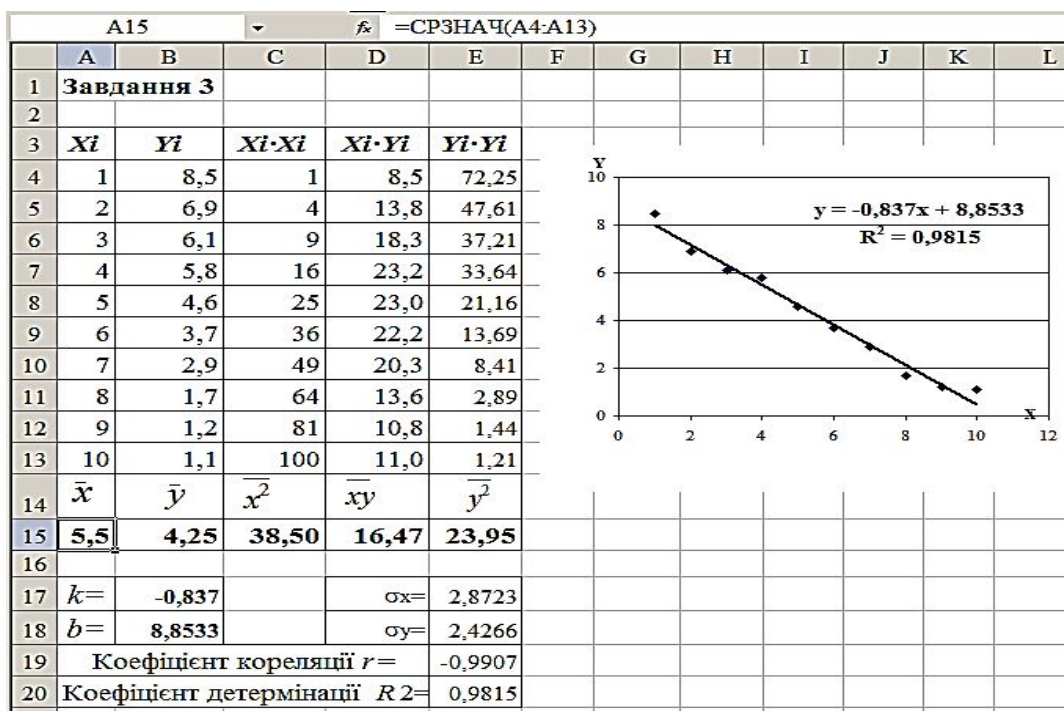


Рисунок 2.5 – Рішення завдання 4 в MS EXCEL

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1 Мордовцев С. М. Вища математика. Модуль 1 : конспект лекцій для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 193 – Геодезія та землеустрій / С. М. Мордовцев ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 88 с.

2 Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. Т.1. – 430 с.

3 Метешкін К. О. Математична обробка геодезичних вимірів : навч. посібник / К. О. Метешкін, Д. В. Шаульський ; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків: ХНАМГ, 2012. – 176 с.

ДОДАТОК А Зразок оформлення розрахунково-графічної роботи

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО
ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

Розрахунково-графічна робота
з дисципліни «Вища математика» (модуль 1)
студента (-тки) 1 курсу ГКЗ-202_ групи _

_____ (прізвище, ім'я, по-батькові студента)

Варіант № ____

Перевірив: _____

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 202_

ДОДАТОК Б. Запис формул в MS EXCEL

При записи формул треба пам'ятати три основних правила:

Перше правило: будь-яка формула починається зі знаку = і вводиться без пробілів.

Друге правило: адреси клітинок записуються тільки з використанням літер англійського алфавіту (стрічці або прописні – без різниці).

Третє правило: формулу найкраще редагувати в рядку формул.

Створення простих формул

Заповніть стовпці А і В. Треба перемножити числа стовпців А і В, а результат вивести в стовпці С.

Зробіть активної клітинку С1 і введіть в неї формулу: = **A1*B1** і натисніть клавішу Enter (табл. Б.1).

Таблиця Б.1

	А	В	С
1	5	4	=A1*B1
2	3	6	
3	6	9	
4	12	8	
5	10	9	

В клітинки С1 з'явиться результат множення вмісту клітинки А1 на вміст клітинки В1. Поверніться в С1. У рядку формул буде записана введена вами формула: = A1*B1. Отже, якщо в клітинку введено формулу, то вона з'явиться в рядку формул, а в самій клітинки - результат розрахунків за цією формулою.

Що робити далі? Можна, звичайно, перейти до клітинки С2 і знову записати формулу: = A2*B2 і так далі. Але це нераціонально, особливо для великих таблиць. Excel пропонує дієвий прийом копіювання формули, при якому адреси клітинок

будуть автоматично листуватися відповідно до розташування цих клітинок.

Для того щоб скопіювати формулу, поверніться до клітинки C1 і встановіть курсор миші в нижній правий кут так, щоб він прийняв вигляд маленького чорного хрестика, натисніть ліву кнопку миші (далі ЛК) й, не відпускаючи її, перемістіть курсор миші вниз по стовпчику C, до останнього рядка таблиці. Відпустіть ЛК. На екрані з'явиться результат множення стовпця A на стовець B. Клацніть, наприклад, по клітинки C4. У рядку формул ви побачите запис: = A4 * B4, який записано при копіюванні самою програмою.

Таким чином, досить ввести формулу один раз, а потім скопіювати її для рядків або стовпців. Адреси клітинок у формулі перепишуться автоматично.

Створення формули за допомогою миші і клавіатури

Адреси клітинок рекомендується вводити за допомогою миші. З клавіатури вводяться тільки оператори.

Встановіть табличний курсор до клітинки D1. Наприклад, в даному стовпці повинен з'явитися результат ділення чисел стовпчика A на B.

1. Введіть знак =
2. Клацніть ЛК по клітинки і A1 (в рядку формул автоматично запишеться адреса осередку).
3. Введіть з клавіатури знак / (коса риска)
4. Клацніть ЛК по клітинки B1
5. Натисніть Enter
6. Скопіюйте хрестиком формулу по рядках стовпчика D.

При записи формул можна використовувати оператори: + (додавання), – (віднімання), / (ділення), * (множення), ^ - піднесення до ступеня. Під час обчислень в першу чергу, виконуються дії в дужках. Множення і ділення виконуються раніше додавання і віднімання. Оператори, що мають однаковий пріоритет, виконуються зліва направо.

Якщо формулу введено невірно, в клітинки з'являється повідомлення про помилку. Ось деякі повідомлення:

Таблиця Б.2

#ДЕЛ/0	Спроба ділення на нуль
#ИМЯ?	Використовується ім'я, якого немає у списку
#ЗНАЧ!	Введена математична формула, яка посилається на текст
#ССЫЛКА!	Відсутня діапазон комірок, на який посилається формула

Примітка. На початку розділу було зроблено зауваження про те, що пробіли всередині формули неприпустимі. Але, якщо формула довга, в неї можна включити символи табуляції і розриви рядків. Тоді формула легко сприймається. Для того щоб ввести символи табуляції, встановіть в рядку формул текстовий курсор в задану позицію і натисніть сукупність клавіш Ctrl-Alt-Tab. Розрив рядка з'являється при натисканні клавіш Alt-Tab.

Використання констант у формулах

Адреси клітинок, які використовуються у формулі, називають відносними, тому що вони змінюються при копіюванні формули. Іноді необхідно зафіксувати адреса клітинки або серії клітинок, тобто зробити його абсолютним. Наприклад, при проведенні обчислень необхідно все числа стовпчика «С» помножити на 20%. Ця константа зберігається в певній клітинці.

Як зробити адресу клітинки абсолютним? Для цього перед координатою рядки або стовпці (або і рядки і стовпці) в формулах поміщають знак долара \$.

Зробіть активною клітинку Н1 і введіть ставку ПДВ, тобто 20 %. У стовпці Е ми хочемо обчислити ПДВ від чисел стовпчика С. Клацніть по клітинки Е1.

Як виглядає формула? Відповідь, на перший погляд, очевидна: = С1*Н1. Дійсно, введіть цю формулу. Отримаємо правильну відповідь: 1,0. Скопіюйте формулу хрестиком по рядках стовпчика Е. Але тоді в рядках Е2-Е5 з'явилися нулі, що є невірним!

В чому причина? Клацніть по комірці E2 і подивіться в рядок формул. Програма записала формулу = C2*N2. Але нам необхідно, щоб адреса клітинки N1 не змінювався, тому що в цієї клітинці зберігається константа.

Отже, щоб зафіксувати адресу, зробивши її абсолютною, потрібно повернутися в клітинку E1, клацнути в рядку формул по N1 і натиснути клавішу F4 (табл. Б.4).

Таблиця Б.4

	A	B	C	D	E
1	5	4	20	1,250	=C1*\$H\$1
2	3	6	18	0,500	
3	6	9	54	0,667	
4	12	8	96	1,500	
5	10	9	90	1,111	

Натисніть Enter. Скопіюйте цю формулу "хрестиком". (табл. Б.5)

Таблиця Б.5


	A	B	C	D	E
1	5	4	20	1,250	1,0
2	3	6	18	0,500	0,6
3	6	9	54	0,667	1,2
4	12	8	96	1,500	2,4
5	10	9	90	1,111	2,0


Клацніть, наприклад, по клітинці E5. У рядку формул буде запис:

$$= E5*H1$$

Отже, при копіюванні адреса клітинки N1 не зміниться.

Підсумовування рядків і стовпців

У більшості таблиць необхідно просто підсумувати числа в рядках і стовпцях. Для цього застосовується вбудована функція автоматичної суми. Наприклад, ми хочемо знайти суми чисел в стовпці A. Клацніть по клітинці A6. Натисніть на панелі інструментів на кнопочку .

В клітинки А6 з'явиться формула: **=СУММ(А1:А5)**. Це означає, що програма підключила вбудовану функцію підсумовування. Аргумент функції: А1:А5 вказує на діапазон клітинок, який необхідно підсумувати. Натисніть Enter. В клітинці А6 з'явиться результат. Скопіюйте "хрестиком" дану формулу уздовж шостого рядка. В результаті всі стовпці будуть підсумовані. Аналогічно можна підсумувати рядки. Виберіть клітинку G1 і натисніть кнопку , потім Enter. Далі скопіюйте "хрестиком" вниз отриману формулу.

Використання вбудованих функцій

Excel містить велику кількість вбудованих функцій: математичних, статистичних, фінансових тощо. Кожна функція має унікальне ім'я. Воно часто вказує на призначення функції. Аргументи функції записуються в круглих дужках. Наприклад, досить корисною буде функція ОКРУГЛ (), яка дозволяє округляти число до заданої кількості знаків після коми. Загальний вигляд функції:

=ОКРУГЛ (число або адреса клітинки; число знаків після коми)

Для прикладу:

1. Введіть у клітинку F10 число 10
2. Введіть у клітинку G10 число 6
3. В клітинці H10 запишіть формулу: **= F10 / G10**
4. Натисніть Enter. З'явиться результат: 1,666667.

Повернемося в клітинку H10. Клацніть по рядку формул і змініть формулу: **= ОКРУГЛ (F10 / G10; 2)** Натисніть кнопку Enter. Результат дорівнює 1,67.

Використання майстра функцій полегшує завдання введення формул з використанням вбудованих функцій. Встановіть табличний курсор в вільну клітинку. Для виклику майстра функцій натисніть кнопку f_x на панелі інструментів. З'явиться знайоме вікно, в якому перераховані всі функції, які згруповані за категоріями. Майстер дозволяє вивчити різні функції (таблиця Б.6).

Таблиця Б.6 – Функції MS EXCEL

Функція	Аргумент	Назначення
КОРЕНЬ()	Число	Обчислює квадратний корінь
СТЕПЕНЬ()	Показник ступеня	Виводить результат піднесення до ступеня
РАДИАНЫ()	Значення кута в градусах	Перетворює градуси в радіани
ГРАДУСЫ()	Значення кута в радіанах	Перетворює радіани в градуси
СРЗНАЧ()	Масив чисел	Обчислює середнє арифметичне значення заданого масиву клітинок
МАХ()	Масив чисел	Виводить максимальне значення масиву клітинок
МИН()	Масив чисел	Виводить мінімальне значення масиву клітинок
ПИ()		Виводить число $\pi = 3,14159265 \dots$
TAN()	Кут в радіанах	Обчислює тангенс кута
SIN()	Кут в радіанах	Обчислює синус кута
COS()	Кут в радіанах	Обчислює косинус кута
EXP()	Число	Обчислює експоненту аргументу
LN()	Число	Обчислює натуральний логарифм
ASIN()	Число	Обчислює \arcsin кута в радіанах
ACOS()	Число	Обчислює \arccos кута в радіанах
ATAN()	Число	Обчислює \arctg кута в радіанах
ABS()	Число	Виводить абсолютне значення аргументу

ДОДАТОК В. Створення функції GRADMC в MS Excel

Рекомендується створити нову функцію, яка увійде до складу функцій MS Excel і дозволяє переводити десяткові градуси в формат градуси/хвилини/секунди. Для цього відкрийте робочу книгу MS Excel. Натисніть комбінацію клавіш **Alt** і **F11**. У вікні VBA (Visual Basic for application) виберіть пункт головного меню "**Insert**", потім пункт "**Module**". З'явиться вікно модуля, в яке введіть код програми, що формує функцію GRADMC.

```
Function GRADMC(a)
```

```
GRADMC=Str(Fix(a))+"°"+Str(Fix((a-Fix(a))*60))+" ' "+ Str(Int(60*((a-Fix(a))*60-Fix((a-Fix(a))*60))))+" "
```

```
End Function
```

26

	B1			
	A	B	C	D
1	56,28965	56° 17' 22"		

Залиште інформацію в відповідному файлі. Для перевірки поверніться на перший лист Excel. В якійсь клітинці, наприклад, A1 введіть число 56,289654, а в клітинці B1 формулу: =GRADMC(A1)

Надалі цю функцію можна використовувати при вирішенні завдань РГР.

Виробничо-практичне видання

Методичні рекомендації
для виконання розрахунково-графічної роботи з дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
(для студентів денної і заочної форми навчання спеціальності
193 – Геодезія та землеустрій)

Укладач: **МОРДОВЦЕВ** Сергій Михайлович

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *С. М. Мордовцев*

План 2020, поз. 129 М

Підп. до друку _02.10.2020. Формат 60 x 84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 1,6
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.