

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ І ЗАВДАННЯ
до організації самостійної роботи,
підготовки до практичних занять і контрольних робіт
із навчальної дисципліни

«БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА»

(для бакалаврів 2–3 курсу денної і заочної форм навчання за спеціальністю 192 – Будівництво та цивільна інженерія)

Методичні рекомендації і завдання до організації самостійної роботи, підготовки до практичних занять і контрольних робіт із навчальної дисципліни «Будівельна механіка» (для бакалаврів 2–3 курсу денної і заочної форм навчання за спеціальністю 192 – Будівництво та цивільна інженерія) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. О. О. Чупринін, М. А Засядько, О. І. Рубаненко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 41 с.

Укладачі :

канд. техн. наук, доц. О. О. Чупринін,
доц. М. А Засядько,
канд. техн. наук, доц. О. І. Рубаненко

Рецензент

Н. В. Серeda, доцент кафедри теоретичної і будівельної механіки Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

*Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол № 1 від 26.08.2020.*

ВСТУП

Ці методичні рекомендації призначені для самостійної роботи студентів під час підготовки до практичних занять і виконання контрольних завдань. Вони містять приклади розрахунків та вихідні дані для контрольних завдань.

Передусім необхідно ознайомитися з теоретичним матеріалом у [1–4] й у розділі 1 цих методичних рекомендацій.

Роботи, виконані не за шифром, а також не відповідно до вихідних даних, не зараховуються і повертаються без розгляду. Роботу виконують на аркуші формату А1 (584 × 840 мм) із розміщенням на ньому всіх креслень та необхідних розрахунків або в зошиті в клітинку. Вирішення задачі супроводжують стислими послідовними поясненнями, чіткими схемами, на яких вказують усі величини в числах, що входять в розрахунок. На епюрах проставляють значення усіх характерних ординат. При розрахунках не слід підраховувати велику кількість значущих цифр.

Конкретні числові завдання до кожної контрольної роботи студент вибирає сам із таблиць відповідно до його особистого шифру за трьома останніми цифрами номера залікової книжки. Наприклад, для залікової книжки № 81135 навчальний шифр 135, де 1 – перша, 3 – друга, 5 – третя цифри шифру. Із таблиць беруть тільки ті дані, які показано на розрахунковій схемі.

1 ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

1.1 Ферма

Визначити зусилля у стержнях ферми, наведеної на рисунку 1.1, від заданого навантаження: $F_1 = F_4 = 6\text{кН}$; $F_2 = F_3 = 12\text{кН}$.

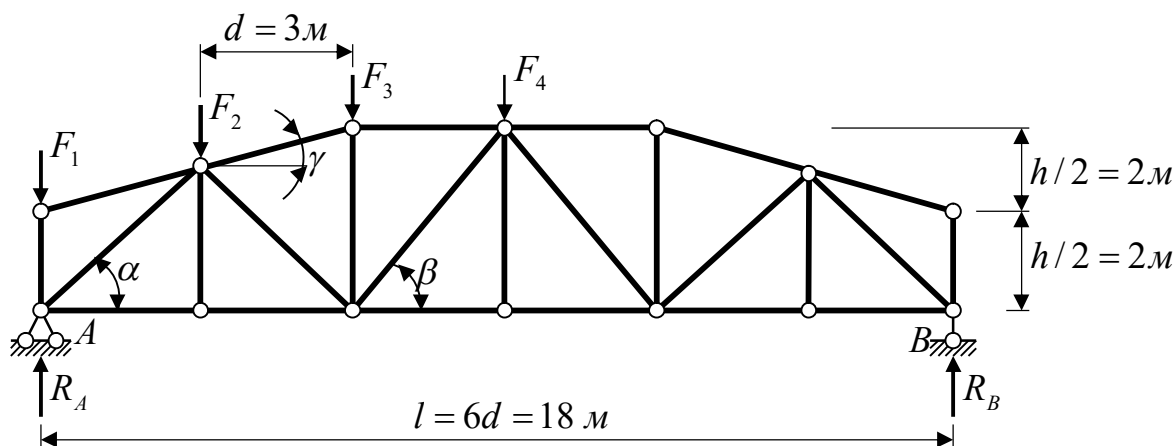


Рисунок 1.1 – Ферма

Розв'язання

Визначимо реакції опор:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= -F_2 d - F_3 \cdot 2d - F_4 \cdot 3d + R_B \cdot 6d = 0; \\ R_B &= \frac{F_2 d + F_3 \cdot 2d + F_4 \cdot 3d}{6d} = \frac{12 \cdot 3 + 12 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot 3 \cdot 3}{6 \cdot 3} = 9; \\ \sum M_B &= F_1 \cdot 6d + F_2 \cdot 5d + F_3 \cdot 4d + F_4 \cdot 3d - R_A \cdot 6d = 0; \\ R_A &= \frac{F_1 \cdot 6 \cdot d + F_2 \cdot 5d + F_3 \cdot 4d + F_4 \cdot 3d}{6d} = \\ &= \frac{6 \cdot 6 \cdot 3 + 12 \cdot 5 \cdot 3 + 12 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3 \cdot 3}{6 \cdot 3} = 27;\end{aligned}$$

перевірка: $\sum y = R_A + R_B - F_1 - F_2 - F_3 - F_4 = 27 + 9 - 6 - 12 - 12 - 6 = 0$.

Пронумеруємо вузли та стержні ферми. Першим призначаємо вузол на шарнірно нерухомій опорі, другим – вузол на шарнірно рухомій. Інші вузли нумеруємо у довільній – бажано логічній – послідовності.

Така нумерація пов'язана з подальшим розрахунком на комп'ютері. Стержні ферми нумеруємо в будь-якій послідовності. Номери стержнів на рисунку 1.2 наведені в колах.

Визначаємо зусилля в стержнях способом вирізання вузлів (СВВ). Для цього:

1. Першим призначаємо вузол на шарнірно нерухомій опорі (А), другим – вузол на шарнірно рухомій (В). Інші вузли нумеруємо у довільній послідовності. Стержні ферми нумеруємо в такій послідовності, як на рисунку 1.2 (спочатку стержні верхнього поясу, потім нижнього, далі розкоси ґратки і, нарешті, стояки і підвіски).

2. Обчислимо тригонометричні функції кутів нахилу стержнів (краще – до горизонтальних ліній):

– з трикутника '1-10-4' маємо: $\alpha = 45^{\circ}$; $\sin \alpha = \cos \alpha = 0,707$;

– з трикутника '11-12-6' маємо: $\sin \beta = \frac{l_{6-22}}{l_{6-11}} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0,8$;

$$\cos \beta = \frac{l_{11-12}}{l_{6-11}} = \frac{3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0,6;$$

– з трикутника, що обмежений стержнем 2 та його проекціями на горизонтальну і вертикальну осі, одержимо: $\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = 0,316$;

$$\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = 0,949.$$

3. Далі послідовно (наприклад, зліва направо) розглядаємо рівновагу вузлів так, щоб у кожному з них збігалось не більше двох стержнів з невідомими зусиллями (на той момент, коли розглядається вузол). Для визначеності зусилля в стержнях направляємо від вузла (вважаємо, що вони розтягнуті).

Розрахунок починаємо з вузла '3' (невідомі – N_1, N_{19} ; рис. 1.3, а).

$$\begin{aligned} \sum x &= N_1 \cos \gamma = 0; & \Rightarrow & N_1 = 0; \\ \sum y &= -F_1 - N_{19} + N_1 \sin \gamma = 0; & \Rightarrow & N_{19} = -F_1 = -6 \text{ кН}. \end{aligned}$$

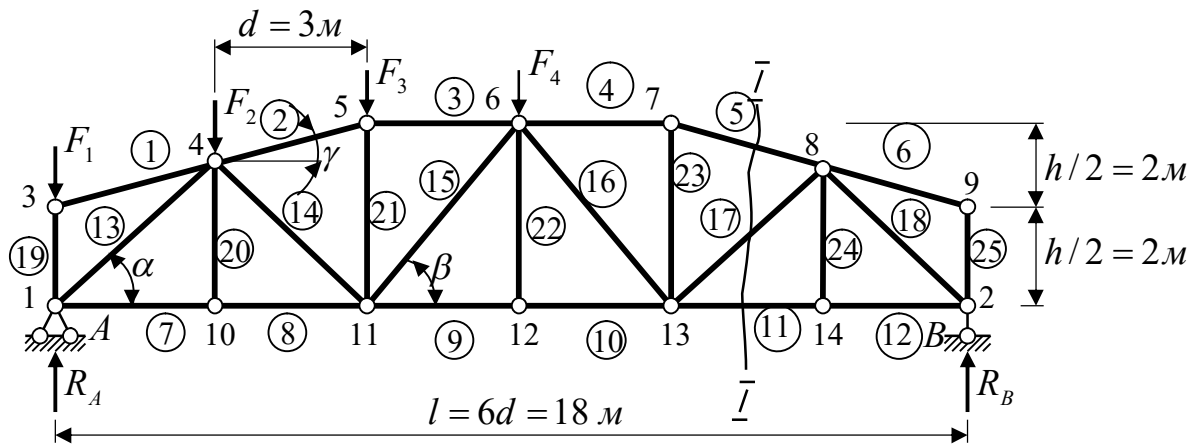


Рисунок 1.2 – Нумерація

Наступним обираємо вузол ‘1’ (рис. 1.3, б), оскільки в ньому два невідомих зусилля в стержнях 7 і 13. Із другого рівняння визначаємо зусилля N_{13} , із першого – N_7 :

$$\sum x = N_7 + N_{13} \cos \alpha = 0;$$

$$\sum y = R_A + N_{19} + N_{13} \sin \alpha = 0;$$

$$N_{13} = \frac{-R_A - N_{19}}{\sin \alpha} = \frac{-27 - 6}{0,707} = -29,70 \text{ кН};$$

$$N_7 = -N_{13} \cos \alpha = 29,7 \cdot 0,707 = 21,00 \text{ кН}.$$

Вузол ‘10’ – трьохстержневий ненавантажений вузол, у якому два стержні лежать на одній прямій (окремий випадок): $N_8 = N_7 = 21,00 \text{ кН}$; $N_{20} = 0$.

Потім розглядаємо вузол ‘4’ (рис. 1.3, в). У ньому два невідомі зусилля в стержнях 2 і 14, що входять попарно в кожне з рівнянь рівноваги:

$$\sum x = -N_1 \cos \gamma - N_{13} \cos \alpha + N_2 \cos \gamma + N_{14} \cos \alpha = 0;$$

$$\sum y = -N_1 \sin \gamma - N_{13} \sin \alpha + N_2 \sin \gamma - N_{14} \sin \alpha - F_2 = 0.$$

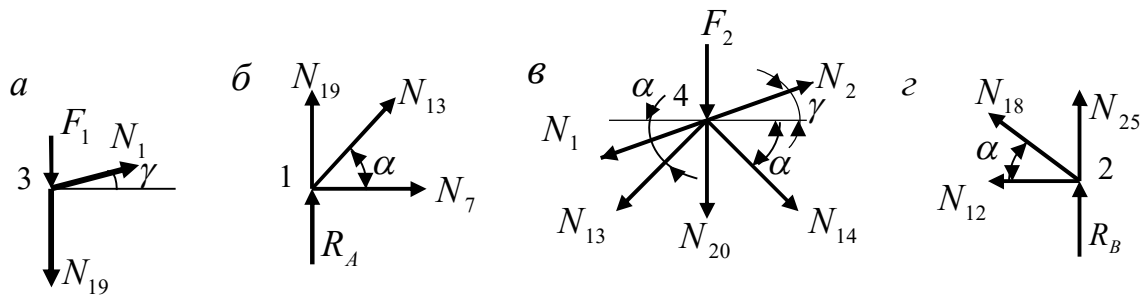


Рисунок 1.3 – Рівновага вузлів

Для визначення зусилля N_2 можна використати наступне перетворення: помножимо перше рівняння на $\sin \alpha$, друге – на $\cos \alpha$, і складемо отримані рівняння. При цьому додатки з невідомими зусиллями N_{14} скоротяться:

$$\begin{aligned}
 & -N_1 \cos \gamma \sin \alpha - N_{13} \cos \alpha \sin \alpha + N_2 \cos \gamma \sin \alpha - \\
 & -N_1 \sin \gamma \cos \alpha - N_{13} \sin \alpha \cos \alpha + N_2 \sin \gamma \cos \alpha - F_2 \cos \alpha = 0.
 \end{aligned}$$

З останнього рівняння отримаємо:

$$N_2 (\cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha) = N_1 (\cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha) + 2N_{13} \cos \alpha \sin \alpha + F_2 \cos \alpha,$$

звідки

$$N_2 = N_1 + \frac{(2N_{13} \sin \alpha + F_2) \cos \alpha}{(\cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \cos \alpha)} = 0 + \frac{(-2 \cdot 29,7 \cdot 0,707 + 12)}{(0,949 \cdot 0,707 + 0,316 \cdot 0,707)} = -23,72 \text{ кН}.$$

Тоді з рівняння проєкцій на вісь x визначаємо N_{14} :

$$N_{14} = N_{13} + \frac{(N_1 - N_2) \cdot \cos \gamma}{\cos \alpha} = -29,7 + \frac{(0 + 23,72) \cdot 0,949}{0,707} = 2,13 \text{ кН}.$$

Далі, пропускаючи викладки, знаходимо:

з вузла '5' $N_{21} = -4,51 \text{ кН}; N_3 = -22,51 \text{ кН};$

з вузла '11' $N_{15} = 3,75 \text{ кН}; N_9 = 20,26 \text{ кН};$

з вузла '12' $N_{22} = 0; N_{10} = N_9 = 20,26 \text{ кН};$

з вузла '6' $N_{16} = -11,25 \text{ кН}; N_4 = -13,5 \text{ кН};$

з вузла '7' $N_5 = -14,23 \text{ кН}; N_{23} = 4,5 \text{ кН};$

з вузла '13' $N_{17} = 6,36 \text{ кН}; N_{11} = 9,01 \text{ кН};$

з вузла '14' $N_{24} = 0; N_{12} = N_{11} = 9,01 \text{ кН};$

з вузла '8' $N_6 = 0; N_{18} = -12,73 \text{ кН};$

з вузла '9' $N_{25} = 0;$

Перевірку розрахунків СВВ виконуємо, розглядаючи одно з рівнянь рівноваги передостаннього вузла R (проекції сил на вісь x)

$$\sum x = -N_6 \cos \gamma = 0 \cdot 0,949 = 0,$$

і два рівняння рівноваги останнього вузла '2' (рис. 1.3, z):

$$\sum x = -N_{18} \cos \alpha - N_{12} = 12,73 \cdot 0,707 - 9 = 0;$$

$$\sum y = R_B + N_{18} \cdot \sin \alpha + N_{25} = 9 - 12,73 \cdot 0,707 + 0 = 0.$$

Результати розрахунку зручно навести на схемі ферми у вигляді значень зусиль на відповідних стержнях (рис. 1.4).

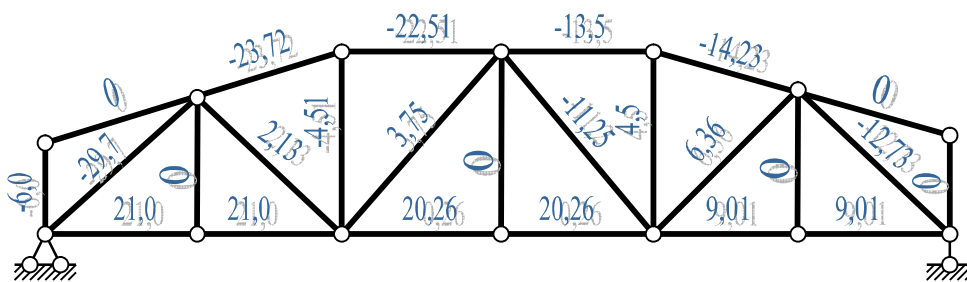


Рисунок 1.4 – Зусилля в стержнях

4. Перевіряємо наявність окремих випадків рівноваги вузлів.

Вузол '2' – двохстержньовий вузол, у якому навантаження діє уздовж одного із стержнів: $N_{19} = -F_1$; $N_1 = 0$.

Вузол '10' – трьохстержньовий ненавантажений вузол, у якому два стержня лежать на одній прямій: $N_7 = N_8$; $N_{20} = 0$.

Вузли '12' і '14' аналогічні до вузла '10': $N_9 = N_{10}$; $N_{22} = 0$ і $N_{11} = N_{12}$; $N_{24} = 0$.

Вузол '9' – двохстержньовий ненавантажений вузол: $N_6 = N_{25} = 0$.

Далі виконуємо розрахунок на комп'ютері. Алгоритм розрахунку реалізовано у файлі «Ферма ст. визн.xls». Відкривши цей файл за допомогою програми MS Excel пакету MS Office або OpenOffice.org Calc пакету OpenOffice.org, одержуємо на екрані монітора таблицю. У верхній частині таблиці (рис. 1.5) наводиться інформація про розташування стержнів у фермі: кожен рядок відповідає окремому стержню (рис. 1.2). Для кожного стержня у цьому рядку необхідно поставити -1 у стовпчику, що відповідає вузлу на початку стержня (вузол з меншим номером), і 1 у стовпчику, що відповідає вузлу на кінці стержня (вузол з більшим номером). Так, перший стержень розташований між вузлами 3 та 4, отже у комірку D3 заносимо значення -1 , а у

комірку E3 заносимо 1. У інших стовпчиках для стержня необхідно поставити значення 0. Нижче вводяться координати x та y вузлів ферми. Наприклад, вузол 6 має координати $x = 9$ м; $y = 4$ м, отже, у комірку G30 заносимо значення 9, а у комірку G31 значення 4. Ще нижче необхідно ввести вузлові навантаження F_x та F_y . Наприклад, у четвертому вузлі прикладена спрямована донизу сила $F_2 = 12$, отже у комірку E33 заносимо 0, а у комірку E34 значення -12 . При цьому реакції опор не приймаються до уваги. Програма формує і розв'язує рівняння рівноваги вузлів. Після введення останнього висхідного даного у комірках Q3-Q27 наводяться результати розрахунку – зусилля у стержнях ферми. Так, $N_{13} = -29,6985$, $N_{20} = 0$.

Варто розуміти:

1) програма «Ферма ст. визн.xls» розрахована на розрахунок балочних ферм, що мають максимальну кількість стержнів 25 та максимальну кількість вузлів 14;

2) якщо кількість стержнів менша, ніж 25, для інших стержнів та вузлів необхідно ввести усі значення 0.

Перевіримо рівновагу опорних вузлів ферми. Обчислюємо тригонометричні функції кута нахилу стержнів 13 та 18:

з трикутника 1-4-10 маємо: $\alpha = 45^\circ$; $\sin \alpha = \cos \alpha = 0,707$.

Вузол 1 (рис. 1.6, а).

$$\sum x = N_7 + N_{13} \cos \alpha = 0; 21,0 - 29,7 \cdot 0,707 = 0;$$

$$\sum y = R_A + N_{19} + N_{13} \sin \alpha = 0; 27 - 6 - 29,7 \cdot 0,707 = 0.$$

Вузол 2 (рис. 1.6, б).

$$\sum x = -N_{18} \cos \alpha - N_{12} = 12,73 \cdot 0,707 - 9 = 0;$$

$$\sum y = R_B + N_{18} \cdot \sin \alpha + N_{25} = 9 - 12,73 \cdot 0,707 + 0 = 0.$$

Вузли перебувають у рівновазі.

Стержні	Вузли														Розв'язання
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$N_1 = 0,00$
2	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$N_2 = 23,72$
3	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	$N_3 = 22,50$
4	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	$N_4 = 13,50$
5	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	$N_5 = 14,23$
6	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	$N_6 = 0,00$
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	$N_7 = 21,00$
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	$N_8 = 21,00$
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	$N_9 = 20,25$
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	$N_{10} = 20,25$
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	$N_{11} = 9,00$
12	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	$N_{12} = 9,00$
13	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$N_{13} = 29,70$
14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	$N_{14} = 2,12$
15	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	$N_{15} = 3,75$
16	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	$N_{16} = 11,25$
17	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	$N_{17} = 6,36$
18	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	$N_{18} = 12,73$
19	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$N_{19} = 6,00$
20	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	$N_{20} = 0,00$
21	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	$N_{21} = 4,50$
22	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	$N_{22} = 0,00$
23	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	$N_{23} = 4,50$
24	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	$N_{24} = 0,00$
25	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	$N_{25} = 0,00$

Координати вузлів		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x		0	18	0	3	6	9	12	15	18	3	6	9	12	15
y		0	0	2	3	4	4	4	3	2	0	0	0	0	0

Навантаження		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
F_x		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F_y		0	0	-6	2	2	-6	0	0	0	0	0	0	0	0

Рисунок 1.5 – Екран монітора



Рисунок 1.6 – Опорні вузли

1.2 Розрахунок рами методом сил

Розрахувати методом сил раму, наведену на рисунку 1.7, а.

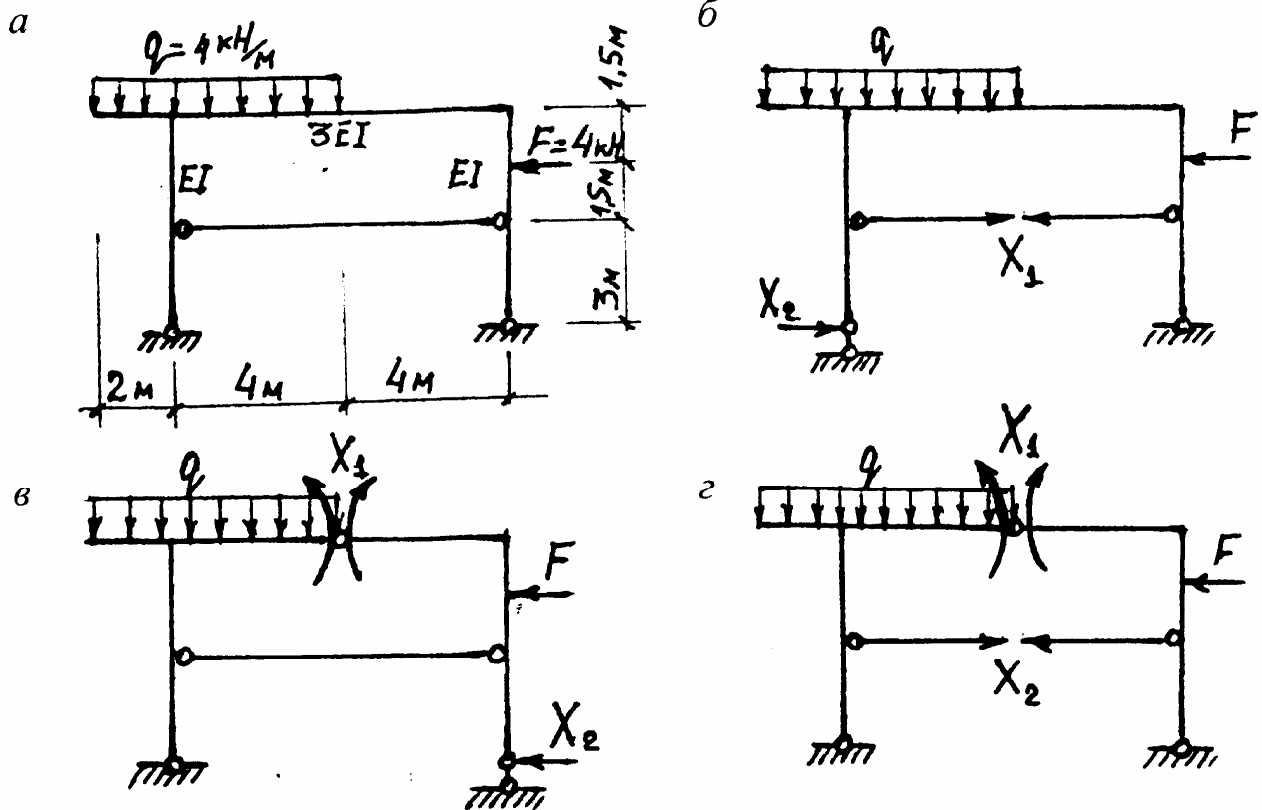


Рисунок 1.7 – Варіанти основної системи

Розв'язання

Знаходимо ступінь статичної невизначеності:

$$n = 3K - \text{Ш} + C_0 - 3 = 3 \cdot 1 - 2 + 4 - 3 = 2.$$

Рама двічі статично невизначна (має дві зайві в'язі).

Вибір основної системи в цьому прикладі виконуємо, порівнюючи три варіанти (рис. 2.7, б, в, г), що принципово відрізняються один від одного. Кожен з варіантів основної системи задовольняє умові геометричної незмінюваності.

Для розрахунку обираємо основну систему, наведену на рисунку 1.7, б. Ця система найбільш зручна для розрахунку, зокрема не містить замкнутих тришарнірних контурів (як на рис. 2.7, в), і не являє собою тришарнірну раму (як на рис. 2.7, г).

Канонічні рівняння для $n = 2$ запишемо так:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1f} = 0,$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2f} = 0.$$

Побудова епюр згинаючих моментів в основній системі.

Детально розглянемо розрахунок основної системи на дію заданого навантаження (рис. 1.8, а).

Визначаємо опорні реакції від навантаження:

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot 8 - (q \cdot 6) \cdot 7 - F \cdot 4,5 = 0;$$

$$R_A = \frac{q \cdot 42 + F \cdot 4,5}{8} = \frac{4 \cdot 42 + 4 \cdot 4,5}{8} = 23,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; (q \cdot 6) \cdot 1 - F \cdot 4,5 - V_B \cdot 8 = 0;$$

$$V_B = \frac{q \cdot 6 - F \cdot 4,5}{8} = \frac{4 \cdot 6 - 4 \cdot 4,5}{8} = 0,75 \text{ кН};$$

$$\sum x = 0; H_B - F = 0; H_B = F = 4 \text{ кН}.$$

Перевіряємо реакції:

$$\sum y = R_A + V_B - q \cdot 6 = 23,25 + 0,75 - 4 \cdot 6 = 0.$$

Розбиваємо стержні рами на ділянки так, щоб їхніми межами були: вузли рами (точки з'єднання стержнів), точки прикладання зосереджених сил і зосереджених моментів, точки на кінцях розподіленого навантаження (у загальному випадку – точки зміни інтенсивності розподіленого навантаження). У цьому прикладі, з урахуванням того, що затяжка працює на розтяг-стиск, маємо 8 ділянок (I...VIII на рис. 1.8, а).

Почнемо з ділянки I. Вона являє собою консоль, завантажену рівномірно розподіленим навантаженням. Епюра моментів тут буде стандартною зі значенням згинального моменту в перерізі біля вузла

$$M = -\frac{q \cdot \ell^2}{2} = -\frac{4 \cdot 2^2}{2} = -8 \text{ кНм}.$$

На вільному кінці консолі епюра моментів нульова і дотична до осі стержня.

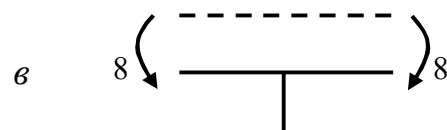
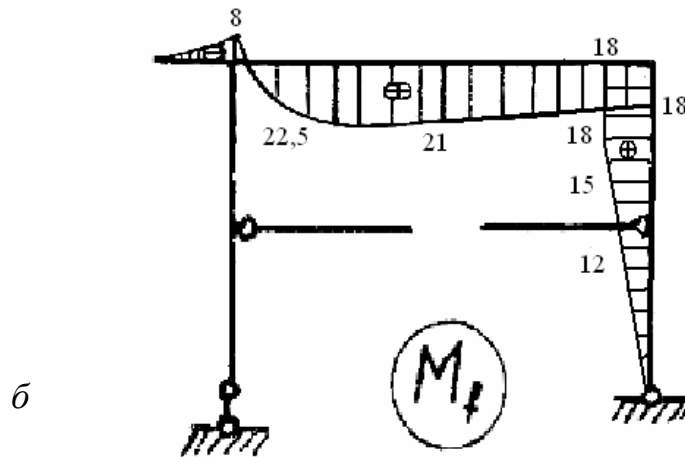
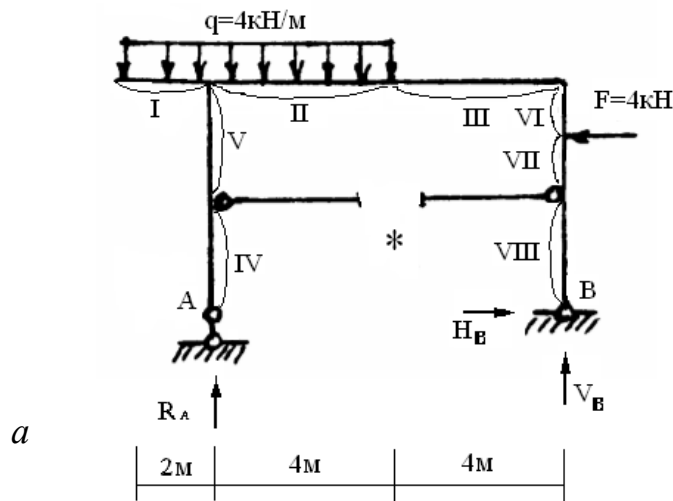


Рисунок 1.8 – Вантажна еюра

Ділянка II завантажена рівномірно розподіленим навантаженням q , отже еюра моментів має вигляд квадратної параболи. Тому для побудування еюри необхідно мати не менше трьох значень моментів. На лівому кінці (нескінченно близько до лівого кінця ділянки), розглядаючи ліві сили, маємо:

$$M_{\text{лів}} = R_A \cdot 0 - (q \cdot 2) \cdot 1 = 0 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 \text{ кНм},$$

на правому (нескінченно близько до правого кінця):

$$M_{\text{прав}} = R_A \cdot 4 - (q \cdot 6) \cdot 3 = 23,25 \cdot 4 - 4 \cdot 18 = 21 \text{ кНм}.$$

Додаткове, третє, значення зручно отримати в середньому перерізі ділянки за формулою

$$M_{\text{ср}} = \frac{M_{\text{прав}} + M_{\text{лів}}}{2} + \frac{q\ell^2}{8}, \quad (1.1)$$

де $M_{\text{прав}}$ і $M_{\text{лів}}$ – згинаючі моменти на правому й лівому кінцях ділянки довжиною ℓ , завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням q .

Відзначимо, що значення моментів необхідно брати з урахуванням їхнього знаку. Знак перед другим доданком у (1.1) відповідає напрямку навантаження донизу, в іншому випадку його треба змінити на зворотній.

Отже для ділянки II маємо:

$$M_{\text{ср}} = \frac{21 - (-8)}{2} + \frac{4 \cdot 4^2}{8} = 22,5 \text{ кНм}.$$

На ділянці III навантаження відсутнє, отже для побудови епюри достатньо двох значень моментів на кінцях:

$$M_{\text{лів}} = R_A \cdot 4 - (q \cdot 6) \cdot 3 = 23,25 \cdot 4 - 4 \cdot 18 = 21 \text{ кНм},$$

$$M_{\text{прав}} = R_A \cdot 8 - (q \cdot 6) \cdot 7 = 23,25 \cdot 8 - 4 \cdot 41 = 18 \text{ кНм},$$

$$\text{або } M_{\text{прав}} = H_B \cdot 6 + V_B \cdot 0 - F \cdot 1,5 = 4 \cdot 6 + 0 - 4 \cdot 1,5 = 18 \text{ кНм}.$$

Оскільки на ділянках, що залишились, розділене навантаження відсутнє, далі на кожній ділянці будемо знаходити по два значення моментів – на кінцях.

Для визначення знаків моментів на вертикальних елементах рами (стояках) оберемо точку всередині рами (*) і дивимосся на відповідну ділянку, подумки стоячи в цій точці.

Тоді для ділянки VI маємо на верхньому (лівому відносно точці *) кінці:

$$M_{\text{лів}} = H_B \cdot 6 - F \cdot 1,5 = 4 \cdot 6 - 4 \cdot 1,5 = 18 \text{ кНм},$$

і нижньому (правому відносно точці *):

$$M_{\text{прав}} = H_B \cdot 4,5 - F \cdot 0 = 4 \cdot 4,5 - 0 = 18 \text{ кНм}.$$

Моменти на інших ділянках наведемо без пояснень.

Ділянка VII:

$$M_{\text{лів}} = H_B \cdot 4,5 = 4 \cdot 4,5 = 18 \text{ кНм},$$

$$M_{\text{прав}} = H_B \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ кНм}.$$

Ділянка VIII:

$$M_{\text{лів}} = H_B \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ кНм},$$

$$M_{\text{прав}} = 0.$$

Неважко побачити, що в усіх перерізах ділянок IV та V згинаючі моменти дорівнюють нулю (простіше при цьому розглядати сили, розташовані ліворуч від цих перерізів).

За результатами розрахунків будуємо епюру M_f (рис. 1.8, б). Нагадаємо, що додатні моменти відкладаються донизу. Для перевірки епюри треба розглянути рівновагу вузлів рами. Так, вирізаючи лівий вузол рами (рис. 1.8, в) прикладаємо на кінцях стержнів моменти, беручи їх значення з епюри моментів. Для визначення напрямку моменту пам'ятаємо, що згинаючі моменти за нашими правилами повинні на епюрі розташуватися з боку розтягнутих волокон. Отже, відзначивши пунктиром (рис. 2.8, в) той бік, де волокна розтягнуті, прикладаємо у відповідному напрямку момент. Сума моментів у вузлі повинна дорівнювати нулю:

$$8 - 8 = 0.$$

Зазначимо, що рівновагу двостержневого вузла можна перевірити формально. Для цього треба подумки повернути стержні разом з епюрами так, щоб вони розташувались на одній прямій. Якщо вузол врівноважений, то ординати повинні співпасти одна з одною. Неспівпадіння можливе лише в разі дії на вузол зовнішнього зосередженого моменту. В такому разі краще для перевірки рівноваги вирізати вузол окремо.

Нагадаємо, що в межах кожного стержня (між суміжними вузлами рами) для епюр моментів дійсними є правила, що наводяться для балок. Наприклад, "стрибок" на епюрі повинен бути тільки в точках прикладання зосереджених моментів. Так само виконуємо розрахунок рами на дію зайвого невідомого $X_1 = 1$ (рис. 1.9, а) і одержуємо епюру \bar{M}_1 (рис. 1.9, б).

Побудова епюри \bar{M}_2 від дії $X_2 = 1$ наведена на рисунку 1.10.

При побудові всіх епюр необхідно додержуватись масштабу, який для кожної епюри можна приймати свій, незалежно від інших. При цьому бажано аналізувати стикування епюр на сусідніх ділянках. Наприклад, на епюрі M_f $M_{\text{прав}}^{\text{VI}} = M_{\text{лів}}^{\text{VII}} = 18 \text{ кНм}$. Аналогічні співвідношення мають місце і на межах інших ділянок цієї та одиничних епюр. Крім того, епюри суміжних

ділянок можуть розташовуватися на одній прямій (наприклад на ділянках IV і V епюри \bar{M}_2).

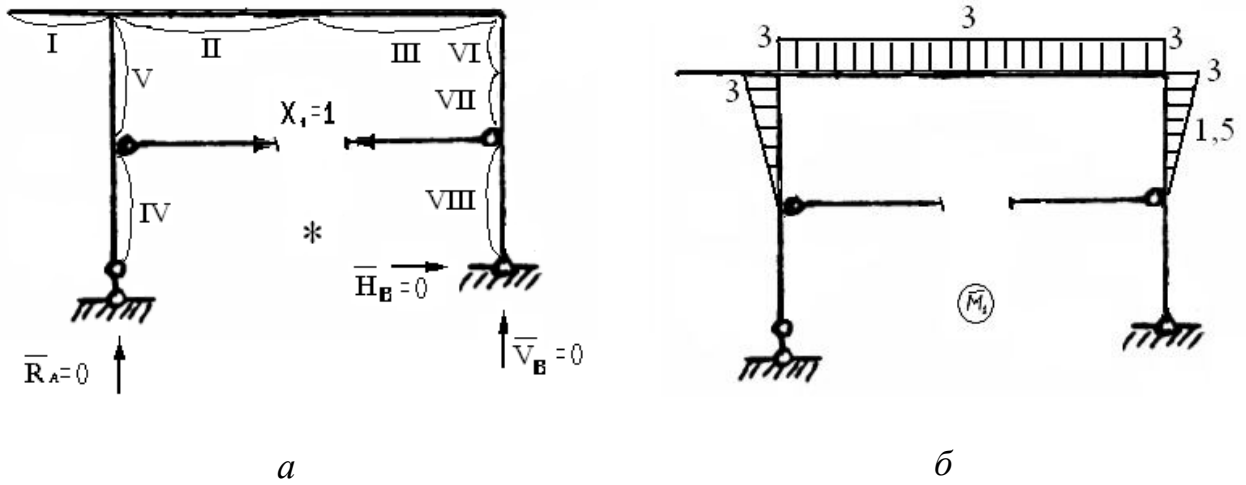


Рисунок 1.9 – Епюра \bar{M}_1

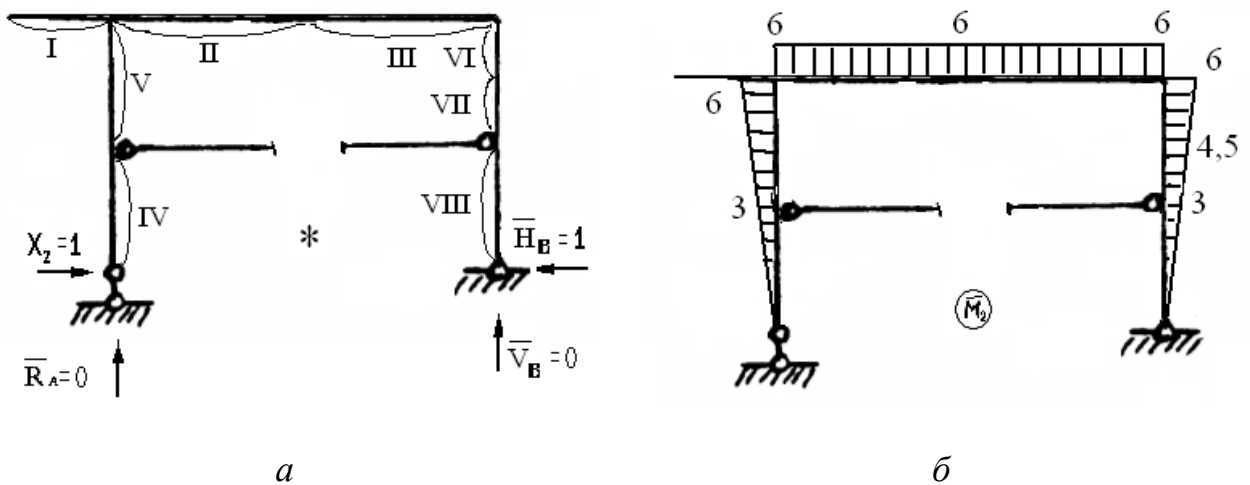


Рисунок 1.10 – Епюра \bar{M}_2

Поділ рами на ділянки в прикладі вже виконано при побудові епюр згинаючих моментів. Їхня нумерація наведена на рисунку 1.8, а.

Значимо, що недостаючи значення моментів у серединах ділянок знаходимо за (1.1). При відсутності розподіленого навантаження ця формула набуває вигляду

$$M_{\text{ср}} = \frac{M_{\text{прав}} + M_{\text{лів}}}{2}. \quad (1.2)$$

При побудові остаточної епюри слід пам'ятати, що на ділянках без розподіленого навантаження вона лінійна. Отже в такому випадку значення згинаючого моменту в середині ділянки є зайвим і його треба ігнорувати. Для цього прикладу епюра згинаючих моментів наведена на рисунку 1.11, а.

Перевірка рівноваги лівого вузла ригеля за рисунку 1.11, б дає:

$$\sum M = 23,02 - 8 - 15,02 = 0.$$

Правий двостержневий вузол перевіряємо за формальним правилом (див. побудову епюри M_f).

Визначення поперечних сил виконуємо за формулою (1.1).

$$Q_{1 \frac{\text{лів}}{\text{прав}}} = \frac{-8 - 0}{2} \pm \frac{4 \cdot 2}{2} = -4 \pm 4 = \begin{cases} Q_{1 \text{ лів}} = -4 + 4 = 0 \text{ кН,} \\ Q_{1 \text{ прав}} = -4 - 4 = -8 \text{ кН;} \end{cases}$$

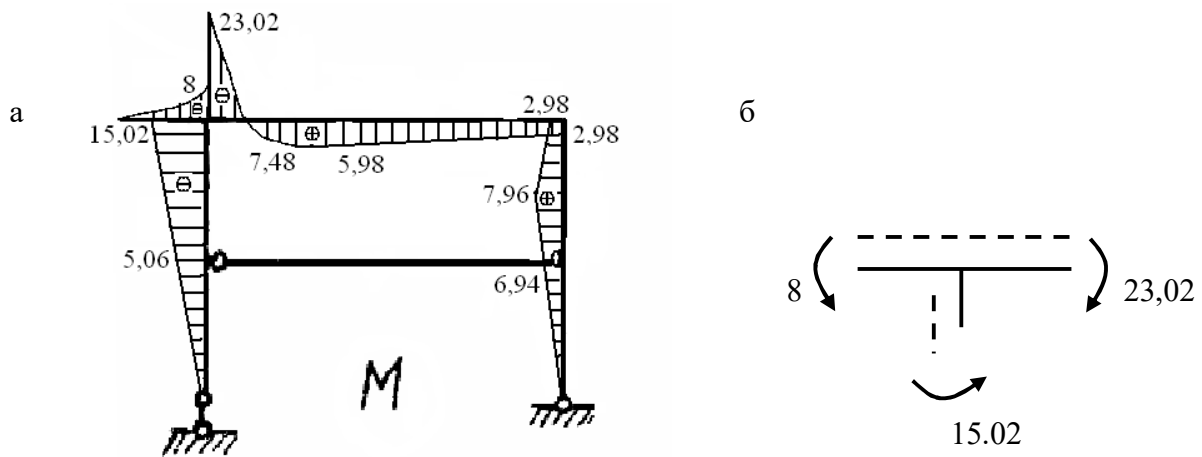


Рисунок 1.11 – Згинальний момент

$$Q_{2 \frac{\text{лів}}{\text{прав}}} = \frac{-5,98 - (-23,02)}{4} \pm \frac{4 \cdot 4}{2} = -7,25 \pm 8 = \begin{cases} Q_{1 \text{ лів}} = 7,25 + 8 = 15,25 \text{ кН}, \\ Q_{1 \text{ прав}} = 7,25 - 8 = -0,75 \text{ кН}; \end{cases}$$

$$Q_3 = \frac{2,98 - 5,98}{4} = -0,75 \text{ кН}; \quad Q_4 = \frac{5,06 - 0}{3} = -1,69 \text{ кН};$$

$$Q_5 = \frac{-15,02 - (-5,06)}{3} = -3,32 \text{ кН}; \quad Q_6 = \frac{7,96 - 2,98}{1,5} = 3,32 \text{ кН};$$

$$Q_7 = \frac{6,94 - 7,96}{1,5} = -0,68 \text{ кН}; \quad Q_8 = \frac{0 - 6,94}{3} = -2,31 \text{ кН}.$$

За цими даними будуємо епюру поперечних сил Q (рис. 1.12).

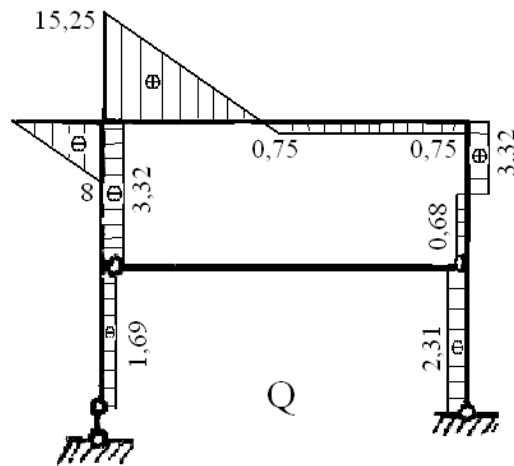


Рисунок 1.12 – Поперечно сила

Визначення поздовжніх сил виконуємо вирізанням вузлів. Попередньо, відсікаючи консольну частину (рис. 1.13, а), можна визначити поздовжню силу в довільному її перерізі: $N_1 = 0$. Далі розглядаємо лівий вузол рами (рис. 1.13, б):

$$\sum x; \quad N_2 + 3,32 = 0; \quad N_2 = -3,32 \text{ кН};$$

$$\sum y; \quad 8 + 15,25 + N_5 = 0; \quad N_5 = -23,25 \text{ кН}.$$

Наступний вузол можна взяти на правому кінці ригеля (рис. 1.13, *в*). Слід мати на увазі, що уздовж окремого стержня поздовжня сила може змінюватися лише за наявності такого навантаження, яке не перпендикулярне до осі стержня. Отже, маємо $N_3 = N_2 = -3,23 \text{ кН} = \text{const}$. Тоді рівняння $\sum x = N_3 + 3,32 = -3,32 + 3,32 = 0$ обертається на тотожність і може служити однією з перевірок розрахунку. Друге рівняння дає: $N_6 = -0,75 \text{ кН}$.

Далі можемо в будь-якій послідовності розглядати вузли на кінцях зтяжки: рис. 1.13, *д*, з рівноваги якого маємо:

$$N = 3,32 - 1,69 = 1,63 \text{ кН};$$

$$N_4 = N_5 = -23,25 \text{ кН};$$

$$N_8 = N_7 = N_6 = -0,75 \text{ кН}$$

і ще одна перевірка: $2,31 - 0,68 - N = 2,31 - 0,68 - 1,63 = 0$.

За обчисленими даними будемо епюру поздовжніх сил (рис. 1.14).

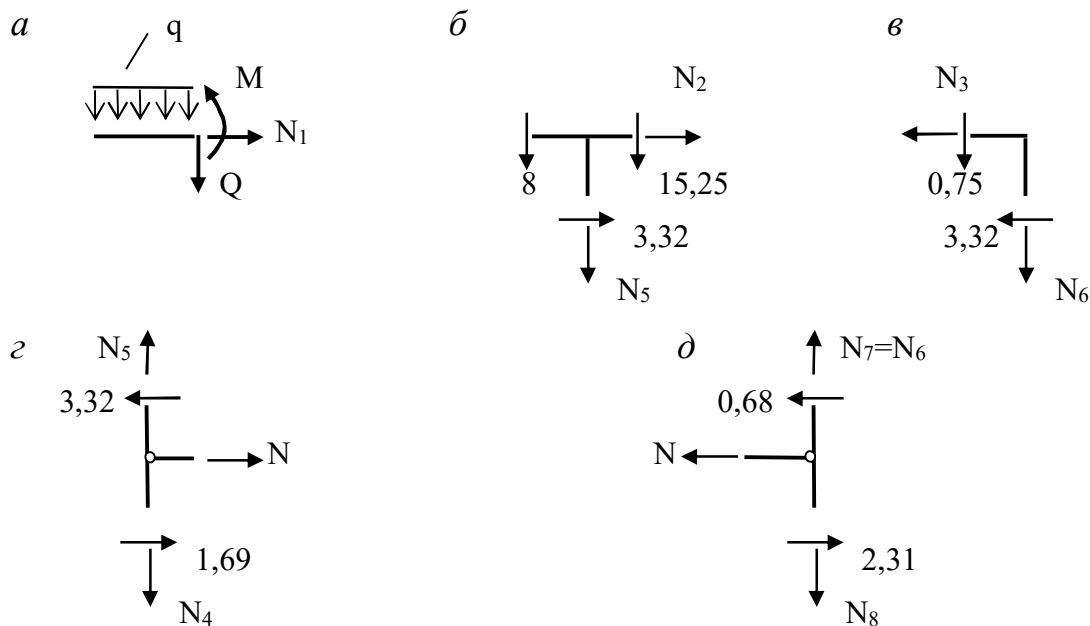


Рисунок 1.13 – Рівновага вузлів

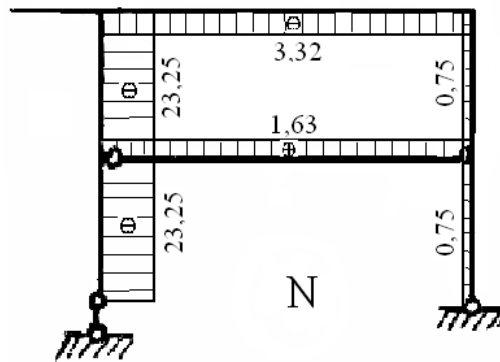


Рисунок 1.14 – Поздовжня сила

Як відомо, ригелі рам споруд зазнають переважно деформації згину, а стояки – згин зі стиском (позацентровий стиск). Отже в розглянутому прикладі найбільш навантаженим є лівий переріз ригеля ($|M|_{\max} = 23,02$ кНм) і верхній переріз лівого стояка ($|N|_{\max} = 23,25$ кН, $|M|_{\max} = 15,02$ кНм).

Розрахунок на комп'ютері.

Запис матриці одиничних вантажних моментів зручно виконати окремо для кожної ділянки у вигляді транспонованих матриць.

Так, для першої ділянки:

$$\{M_{1f}\}^T = [0 \quad -2 \quad -8];$$

$$\{\bar{M}_{11}\}^T = [0 \quad 0 \quad 0]; \quad \{\bar{M}_{12}\}^T = [0 \quad 0 \quad 0].$$

Зазначимо, що недостаючи значення моментів у серединах ділянок знаходимо за (1.1). При відсутності розподіленого навантаження ця формула набуває вигляду (1.2).

Для інших ділянок транспоновані матриці моментів будуть такими:

$$\{M_{2f}\}^T = [-8 \quad 22,5 \quad 21]; \quad \{M_{3f}\}^T = [21 \quad 19,5 \quad 18];$$

$$\{M_{4f}\}^T = [0 \quad 0 \quad 0]; \quad \{M_{5f}\}^T = [0 \quad 0 \quad 0];$$

$$\{M_{6f}\}^T = [18 \quad 18 \quad 18]; \quad \{M_{7f}\}^T = [18 \quad 15 \quad 12];$$

$$\{M_{8f}\}^T = [12 \quad 0 \quad 0];$$

$$\{\bar{M}_{21}\}^T = [-3 \quad -3 \quad -3]; \quad \{\bar{M}_{31}\}^T = [-3 \quad -3 \quad -3];$$

$$\begin{aligned}
\{\bar{M}_{41}\}^T &= [0 \ 0 \ 0]; & \{\bar{M}_{51}\}^T &= [0 \ -1,5 \ -3]; \\
\{\bar{M}_{61}\}^T &= [-3 \ -2,25 \ -1,5]; & \{\bar{M}_{71}\}^T &= [-1,5 \ -0,75 \ 0]; \\
\{\bar{M}_{81}\}^T &= [0 \ 0 \ 0]; \\
\{\bar{M}_{22}\}^T &= [-6 \ -6 \ -6]; & \{\bar{M}_{32}\}^T &= [-6 \ -6 \ -6]; \\
\{\bar{M}_{42}\}^T &= [0 \ -1,5 \ -3]; & \{\bar{M}_{52}\}^T &= [-3 \ -4,5 \ -6]; \\
\{\bar{M}_{62}\}^T &= [-6 \ -5,25 \ -4,5]; & \{\bar{M}_{72}\}^T &= [-4,5 \ -3,75 \ -3]; \\
\{\bar{M}_{82}\}^T &= [-3 \ -1,5 \ 0].
\end{aligned}$$

Наведений алгоритм розрахунку реалізовано у файлі “Метод сил.xls”. Відкривши цей файл за допомогою програми MS Excel пакету MS Office або OpenOffice.org Calc пакету OpenOffice.org, одержуємо на екрані монітора дві таблиці (рис. 1.15).

Зо допомогою миші й клавіатури заносимо у відповідні комірки (B3–B12) верхньої таблиці довжини ділянок – у прикладі:

$$\begin{aligned}
\ell_1 = 2; \ell_2 = 4; & \quad \ell_3 = 4; \quad \ell_4 = 3; \\
\ell_5 = 3; \ell_6 = 1.5; & \quad \ell_7 = 1.5; \quad \ell_8 = 3,
\end{aligned}$$

а потім коефіцієнти жорсткості стержнів (комірки C3–C12), тобто коефіцієнти при EI для відповідних ділянок рами – у прикладі це:

$$3; \quad 3; \quad 1; \quad 1; \quad 1; \quad 1; \quad 1; \quad 1.$$

Далі відповідно до записів попереднього пункту заносимо значення згинаючих моментів на початку, в середині й у кінці кожної ділянки.

Зазначимо, що результати розрахунку наводяться на екрані монітора у нижній таблиці у вигляді значень остаточно моментів у відповідних перерізах рами.

Значення у таблиці результатів одержують при введенні кожного чергового числа у верхню таблицю без додаткових дій оператора. Отже після введення останнього вихідного даного у нижній таблиці одразу наводиться результат розрахунку рами. Для цього прикладу він поданий на рисунку 1.16.

Увага! 1. Файл «Метод сил.xls» сформовано таким чином, що передбачається розрахунок рам, які містять не більше десяти ділянок при максимальній кількості зайвих невідомих – три. 2. При меншій кількості ділянок та невідомих в усі комірки верхньої таблиці треба занести нулі. Виняток становлять значення коефіцієнтів жорсткості: в усіх випадках ці

значення повинні відрізнятися від нуля, оскільки алгоритм розрахунку передбачає ділення на жорсткість.

	A	B	C	Грузовой момент			1-й единичный момент			2-й единичный момент			3-й единичный момент			
				Длина	Козфф.	1	Слева	Центр	Справа	Слева	Центр	Справа	Слева	Центр	Справа	Слева
3	1-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	2-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	3-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	4-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	5-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	6-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	7-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	8-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	9-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	10-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Решение			
Эпюра моментов			
	Слева	Центр	Справа
1-й уч.	0	0	0
2-й уч.	0	0	0
3-й уч.	0	0	0
4-й уч.	0	0	0
5-й уч.	0	0	0
6-й уч.	0	0	0
7-й уч.	0	0	0
8-й уч.	0	0	0
9-й уч.	0	0	0
10-й уч.	0	0	0

Рисунок 1.15 – Введення ІД

Побудова остаточної епюри згинаючих моментів.

За результатами розрахунків маємо:

$$\begin{aligned} \{M_1\}^T &= [0 \quad -2 \quad -8]; & \{M_2\}^T &= [-23,02 \quad 7,48 \quad 5,98]; \\ \{M_3\}^T &= [5,98 \quad 4,48 \quad 2,98]; & \{M_4\}^T &= [0 \quad -2,53 \quad -5,06]; \\ \{M_5\}^T &= [-5,06 \quad -10,04 \quad -15,02]; & \{M_6\}^T &= [2,98 \quad 5,47 \quad 7,96]; \\ \{M_7\}^T &= [7,96 \quad 7,45 \quad 6,94]; & \{M_8\}^T &= [6,94 \quad 3,47 \quad 0]. \end{aligned}$$

При побудові остаточної епюри слід пам'ятати, що на ділянках без розподіленого навантаження вона лінійна. Отже в такому випадку значення згинаючого моменту в середині ділянки є зайвим і його треба ігнорувати. Для цього прикладу епюра згинаючих моментів наведена на рисунку 1.11.

Microsoft Excel - Метод сил ОК

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Введите вопрос

Сб 1

	A	B	C	Грузовой момент			1-й единичный момент			2-й единичный момент			3-й единичный момент		
		Длина	Кэфф.	Слева	Центр	Справа	Слева	Центр	Справа	Слева	Центр	Справа	Слева	Центр	Справа
1															
2															
3	1-й уч.	2	3	0	-2	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	2-й уч.	4	3	-8	22.5	21	-3	-3	-3	-6	-6	-6	0	0	0
5	3-й уч.	4	3	21	19.5	18	-3	-3	-3	-6	-6	-6	0	0	0
6	4-й уч.	3	1	0	0	0	0	0	0	0	-1.5	-3	0	0	0
7	5-й уч.	3	1	0	0	0	0	-1.5	-3	-3	-4.5	-6	0	0	0
8	6-й уч.	1.5	1	18	18	18	-3	-2.25	-1.5	-6	-5.25	-4.5	0	0	0
9	7-й уч.	1.5	1	18	15	12	-1.5	-0.75	0	-4.5	-3.75	-3	0	0	0
10	8-й уч.	3	1	12	6	0	0	0	0	-3	-1.5	0	0	0	0
11	9-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	10-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13															
14															
15															
16															
17															
18															
19															
20															
21															
22															
23															
24															
25															
26															
27															
28															
29															
30															
31															
32															
33															
34															
35															
36															

	Решение		
	Эпюра моментов		
	Слева	Центр	Справа
1-й уч.	0	-2	5
2-й уч.	-23.0173	7.482704	5.982704
3-й уч.	5.982704	4.482704	2.982704
4-й уч.	0	-2.52909	-5.05818
5-й уч.	-5.05818	-10.0377	-15.0173
6-й уч.	2.982704	5.472484	7.962264
7-й уч.	7.962264	7.452044	6.941824
8-й уч.	6.941824	3.470912	0
9-й уч.	0	0	0
10-й уч.	0	0	0

Лист1 / Лист2 / Лист3 /

Готово

Рисунок 1.16 – Отримання результату

1.3 Розрахунок власних частот і форм поперечних коливань пружного стержня

Визначити перші три власні частоти і побудувати власні форми поперечних коливань сталевого стержня довжиною l із шарнірно обпертими кінцями (рис. 1.17). Стержень має прямокутний поперечний переріз, тому момент інерції перерізу буде: $J = \frac{bh^3}{12}$. Значення параметрів: $E = 2 \times 10^{11}$ Па; $\rho = 8 \times 10^3$ кг/м³; $b = 6$ см; $h = 8$ см; $l = 8$ м.

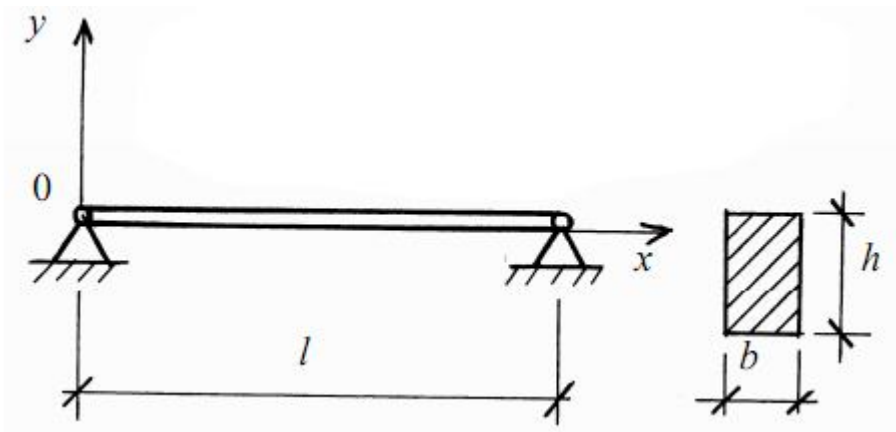


Рисунок 1.17 – Стержень із шарнірно обпертими кінцями

Розв'язання

При поперечних коливаннях стержня прогин буде уже функцією двох змінних:

$$y = y(x, t).$$

Відповідно до методу Фур'є, шукаємо розв'язок у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної:

$$y(x, t) = Y(y)T(t).$$

Що дозволяє отримати два звичайні диференціальні рівняння:

$$\begin{aligned} T'' + \omega^2 T &= 0, \\ Y^{IV} - k^4 Y &= 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

де $k^4 = \frac{\omega^2}{a^2}$, $a^2 = \frac{EJ}{\rho F}$, J – момент інерції перерізу, $F = b \times h$ – площа перерізу, E – модуль пружності, ω – **власна частота** поперечних коливань стержня, а функція $Y(x)$ (рівняння (1.3)), що залежить від координати x і визначає

розподіл амплітуд переміщень точок осі стержня – *власною формою* поперечних коливань стержня.

Загальний розв’язок рівняння (1.3) буде лінійною комбінацією цих функцій, яку зручніше записати у вигляді:

$$Y(x) = C_1 (\cos kx + ch kx) + C_2 (\cos kx - ch kx) + C_3 (\sin kx + sh kx) + C_4 (\sin kx - sh kx). \quad (1.4)$$

Запишемо граничні умови для даного прикладу для лівого (при $x = 0$) і правого (при $x = l$) кінців стержня:

$$Y(0) = 0, \quad Y''(0) = 0, \quad Y(l) = 0, \quad Y''(l) = 0. \quad (1.5)$$

Щоб скористатися граничними умовами, знайдемо другу похідну функції (1.4) по координаті x :

$$Y''(x) = k^2 [C_1 (-\cos kx + ch kx) + C_2 (-\cos kx - ch kx) + C_3 (-\sin kx + sh kx) + C_4 (-\sin kx - sh kx)]. \quad (1.6)$$

При цьому враховані співвідношення для похідних

$$\begin{aligned} (\cos kx)^l &= -k \times \sin kx, & (\sin kx)^l &= k \times \cos kx, \\ (ch kx)^l &= k \times sh kx, & (sh kx)^l &= k \times ch kx. \end{aligned}$$

Підставимо (1.4) і (1.6) у перші два рівняння граничних умов (1.5), зважаючи, що $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $ch 0 = 1$, $sh 0 = 0$:

$$\begin{aligned} Y(0) = 0, \text{ або } C_1(1 + 1) + C_2(1 - 1) + C_3(0 + 0) + C_4(0 - 0) &= 0, \\ Y''(0) = 0, \text{ або } k^2 [C_1(-1 + 1) + C_2(-1 - 1) + C_3(-0 + 0) + C_4(-0 - 0)] &= 0. \end{aligned}$$

З цієї системи знаходимо $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Запишемо 3-є і 4-є рівняння граничних умов (1.5) з урахуванням знайдених сталих C_1 і C_2 :

$$\begin{aligned} Y(l) = 0, \text{ або } C_3(\sin kl + sh kl) + C_4(\sin kl - sh kl) &= 0, \\ Y''(l) = 0, \text{ або } k^2 [C_3(-\sin kl + sh kl) + C_4(-\sin kl - sh kl)] &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Система однорідних рівнянь (2.28) має відмінний від нуля розв’язок тільки у випадку рівності нулю визначника цієї системи:

$$\begin{vmatrix} \sin kl + sh kl & \sin kl - sh kl \\ -\sin kl + sh kl & -\sin kl - sh kl \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, одержимо

$$\begin{aligned} (\sin kl + sh kl) \times (-\sin kl - sh kl) - (\sin kl - sh kl) \times (-\sin kl + sh kl) &= 0, \\ \text{або } -(\sin kl + sh kl) + (\sin kl - sh kl) &= 0. \end{aligned}$$

Розглядаючи останній вираз як різницю квадратів

$$(\sin kl - sh kl + \sin kl + sh kl) \times (\sin kl - sh kl - \sin kl - sh kl) = 0 ,$$

Отримаємо таке рівняння

$$2 \times \sin kl \times (-2 \times sh kl) = 0.$$

Оскільки при $k \neq 0$ функція $sh kl \neq 0$, то мусить виконуватись рівняння

$$\sin kl = 0. \quad (1.8)$$

Це й буде остаточним частотним рівнянням цієї задачі.

Тоді

$$k_n = \frac{\pi n}{l}. \quad (n = 1, 2, 3, \dots, \infty),$$

та

$$\omega_n = k_n^2 a = k_n^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}.$$

У цьому прикладі власні частоти:

$$\omega_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \sqrt{\frac{Ebh^3}{12\rho bh}} = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \frac{h}{2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}.$$

Тоді перші три власні частоти (при $n = 1, 2$ та 3 відповідно) будуть:

$$\omega_1 = 17,8 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$

$$\omega_2 = 71,2 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$

$$\omega_3 = 160,3 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right).$$

Тепер визначимо власні форми. З огляду на рівність нулю сталих C_1 і C_2 вираз (1.4) для власних форм у даному прикладі прийме вигляд для n -ної власної форми:

$$Y_n(x) = C_{3n} (\sin kx + sh kx) + C_{4n} (\sin kx - sh kx). \quad (1.9)$$

З одного з рівнянь (1.7) можна одну сталу інтегрування виразити через іншу. Наприклад, з другого рівняння:

$$C_{4n} = C_{3n} \frac{sh kl - \sin kl}{sh kl + \sin kl}. \quad (1.10)$$

Підставивши (1.10) у (1.9), одержимо вираз для *власних форм*:

$$Y_n(x) = C_{3n} \left[(\sin k_n x + \operatorname{sh} k_n x) + \frac{\operatorname{sh} k_n l - \sin k_n l}{\operatorname{sh} k_n l + \sin k_n l} (\sin k_n x - \operatorname{sh} k_n x) \right]. \quad (1.11)$$

Задаючи в рівнянні (1.10) значення координати x , можна (з точністю до сталої C_3) обчислити значення і побудувати графік власної форми $\bar{Y}_n(x) = Y_n(x) / C_{3n}$.

У випадку *шарнірного обпирання двох кінців стержня*, як у цьому прикладі (оскільки $\sin k_n l = 0$), рівняння (1.10) можна спростити:

$$Y_n(x) = C_{3n} 2 \sin k_n x = C_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (1.12)$$

де $C_n = C_{3n} 2$.

Тоді вирази й графіки (графіки будуються для функцій $\bar{Y}_n(x)$) для перших трьох власних форм будуть виглядати так, як на рисунку 1.18.

З приведених розрахунків випливає, що нижчій власній частоті ω_1 відповідає безвузлова форма коливань стержня, при якій усі точки стержня одночасно проходять через положення рівноваги й одночасно досягають максимального відхилення від нього. Зі збільшенням номера власної частоти зростає число вузлових точок, що при поперечних коливаннях стержня залишаються нерухомими.

Розрахунок на комп'ютері.

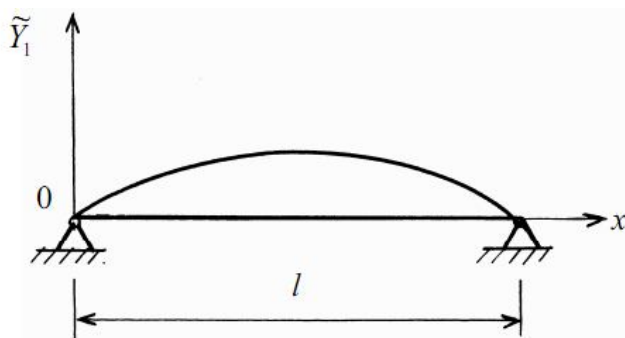
Для розрахунку коренів частотного рівняння, а також побудови графіків власних форм зручно використати ПЕОМ. Розрахунки виконуються у програмі *OpenOffice.org Calc* пакету *OpenOffice* (або *MS Excel* пакету *MS Office*). Послідовність дій може бути такою:

Чисельний метод пошуку коренів трансцендентного частотного рівняння.

Нехай треба визначити корені частотного рівняння (1.8), яке можна записати у загальній формі: $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$, де аргумент $\mathbf{z} = \mathbf{kl}$. Для цього можна скласти таблицю (рис. 1.19), де в першому стовпці будуть записані значення аргументу \mathbf{z} з певним кроком $\Delta\mathbf{z}$, починаючи з початкового значення \mathbf{z}_0 (наприклад, $\mathbf{z}_0=0$, $\Delta\mathbf{z}=0,25$). Для кожного значення аргументу \mathbf{z} треба обчислити функцію $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ і занести її значення у другий стовпець (стовпці **A** і **B** табл.). В околиці кореня функція $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ змінює свій знак на протилежний. У таблиці (рис. 1.19) перша зміна знаку функції $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ у стовпці **B** відбувається між значеннями аргументу $\mathbf{z}=1$ і $\mathbf{z}=1,25$, тобто між ними знаходиться перший корінь рівняння $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$, друга зміна знаку (другий корінь) –

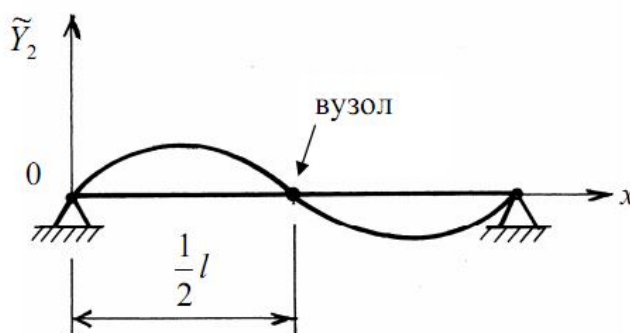
між значеннями $z = 4$ і $z = 4,25$, третя (третій корінь) – між $z = 7,25$ і $z = 7,5$. Може виникнути запитання, чому не розглядаються зміни знаку функції між значеннями аргументу $z = 1,5$ і $z = 1,75$, між $z = 4,5$ і $z = 4,75$ та між $z = 7,75$ і $z = 8$. Справа в тому, що деякі функції (як, наприклад, та, що розглядається у таблиці) мають точки розриву, що не є коренями. Відрізнити такі точки можна за поведінкою функції при наближенні до точки: при наближенні до кореня абсолютне значення функції зменшується, а при наближенні до точки розриву – зростає.

$$1) \tilde{Y}_1 = \sin \frac{\pi}{l} x,$$



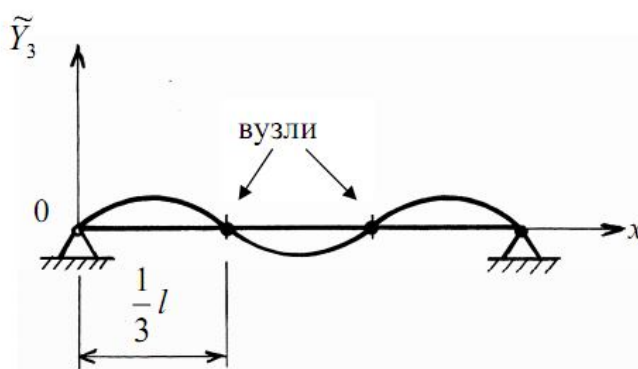
перша власна форма (безвузлова)

$$2) \tilde{Y}_2 = \sin \frac{2\pi}{l} x,$$



друга власна форма (одновузлова)

$$3) \tilde{Y}_3 = \sin \frac{3\pi}{l} x,$$



третя власна форма (двовузлова)

Рисунок 1.18 – Вирази і графіки для функцій $\tilde{Y}_n(x)$

Для уточнення значення кореня треба взяти значення аргументу z перед зміною знаку і вважати його початковим для наступної таблиці, де крок за аргументом Δz буде приблизно на порядок меншим. У таблиці (рис. 1.19) – це стовпці **C** і **D**, при цьому $\Delta z = 0,02$, а початкові значення були $z_0 = 1$ для першого кореня, $z_0 = 4$ – для другого і $z_0 = 7,25$ – для третього.

Подальші уточнення коренів наведені у стовпцях **E** і **F** (крок $\Delta z = 0,002$) та **G** і **H** (крок $\Delta z = 0,0001$). Таким способом можна визначити корені частотного рівняння з будь-якою точністю. У даному випадку визначені три корені з точністю до четвертого знаку після коми: $z_1 = k_{1l} = 1,0603$; $z_2 = k_{2l} = 4,2487$; $z_3 = k_{3l} = 7,3903$.

Підготовка комірок для розрахунків коренів частотного рівняння.

Комірки, в які будуть записані числові дані, треба відформатувати. Для пошуку коренів частотного рівняння можна взяти за основу розміщення текстової і числової інформації так, як у таблиці (рис. 1.19). У такому разі необхідно:

- на першому листі робочої книги виділити комірки B1-E1, а також A4–H52. Це можна зробити або мишою (при натиснутій клавіші «Ctrl», щоб виділити несуміжні діапазони комірок), або за допомогою клавіатури (клавішами зі стрілками при натиснутій клавіші «Shift», але при цьому можна виділити тільки суміжні комірки);
- клацнути на виділеній області правою кнопкою миші. З'явиться контекстне меню, в якому вибрати (ЛК) стрічку «Формат ячеек». У вікні «Формат ячеек» вибрати закладку «Числа», відмітити категорію «Число», встановити реквізит «Дробная часть» рівним «4» і натиснути на кнопку «ОК».

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Крок Δz :	0,2500	0,0200	0,0020	0,0001			
2								
3	Аргумент z	функція f	Аргумент z	функція f	Аргумент z	функція f	Аргумент z	функція f
4	0,0000	-1,0000	1,0000	-0,2042	1,0600	-0,0012	1,0600	-0,0012
5	0,2500	-0,9896	1,0200	-0,1417	1,0620	0,0064	1,0601	-0,0009
6	0,5000	-0,9158	1,0400	-0,0743	1,0640	0,0141	1,0602	-0,0005
7	0,7500	-0,7036	1,0600	-0,0012	1,0660	0,0219	1,0603	-0,0001
8	1,0000	-0,2042	1,0800	0,0780	1,0680	0,0297	1,0604	0,0003
9	1,2500	1,1613	1,1000	0,1643	1,0700	0,0376	1,0605	0,0007
10	1,5000	12,1963	1,1200	0,2584	1,0720	0,0455	1,0606	0,0010
11	1,7500	-7,4618	1,1400	0,3615	1,0740	0,0535	1,0607	0,0014
12	2,0000	-4,1491	1,1600	0,4748	1,0760	0,0616	1,0608	0,0018
13	2,2500	-3,2167	1,1800	0,5998	1,0780	0,0698	1,0609	0,0022
14	2,5000	-2,7336	1,2000	0,7385	1,0800	0,0780	1,0610	0,0026
15	2,7500	-2,4048	1,2200	0,8931	1,0820	0,0863	1,0611	0,0030
16	3,0000	-2,1376	1,2400	1,0665	1,0840	0,0947	1,0612	0,0033
17	3,2500	-1,8882						
18	3,5000	-1,6236						
19	3,7500	-1,3023						
20	4,0000	-0,8415	4,0000	-0,8415	4,2400	-0,0425	4,2480	-0,0033
21	4,2500	0,0067	4,0200	-0,7936	4,2420	-0,0328	4,2481	-0,0028
22	4,5000	2,6376	4,0400	-0,7433	4,2440	-0,0231	4,2482	-0,0023
23	4,7500	-28,5753	4,0600	-0,6905	4,2460	-0,0132	4,2483	-0,0018
24	5,0000	-5,3804	4,0800	-0,6348	4,2480	-0,0033	4,2484	-0,0013
25	5,2500	-3,6773	4,1000	-0,5759	4,2500	0,0067	4,2485	-0,0008
26	5,5000	-2,9956	4,1200	-0,5136	4,2520	0,0168	4,2486	-0,0003
27	5,7500	-2,5902	4,1400	-0,4475	4,2540	0,0270	4,2487	0,0002
28	6,0000	-2,2910	4,1600	-0,3772	4,2560	0,0372	4,2488	0,0007
29	6,2500	-2,0332	4,1800	-0,3021	4,2580	0,0476	4,2489	0,0012
30	6,5000	-1,7797	4,2000	-0,2218	4,2600	0,0580	4,2490	0,0017
31	6,7500	-1,4960	4,2200	-0,1355	4,2620	0,0685	4,2491	0,0022
32	7,0000	-1,1286	4,2400	-0,0425	4,2640	0,0791	4,2492	0,0027
33	7,2500	-0,5507	4,2600	0,0580	4,2660	0,0898	4,2493	0,0032
34	7,5000	0,7060						
35	7,7500	7,5824						
36	8,0000	-8,7997						
37	8,2500	-4,3917	7,2500	-0,5507	7,3900	-0,0017	7,3900	-0,0017
38	8,5000	-3,3264	7,2700	-0,4869	7,3920	0,0084	7,3901	-0,0012
39	8,7500	-2,8001	7,2900	-0,4190	7,3940	0,0185	7,3902	-0,0007
40	9,0000	-2,4523	7,3100	-0,3467	7,3960	0,0287	7,3903	-0,0002
41	9,2500	-2,1766	7,3300	-0,2695	7,3980	0,0389	7,3904	0,0003
42	9,5000	-1,9246	7,3500	-0,1867	7,4000	0,0493	7,3905	0,0008
43	9,7500	-1,6628	7,3700	-0,0977	7,4020	0,0597	7,3906	0,0013
44	10,0000	-1,3516	7,3900	-0,0017	7,4040	0,0703	7,3907	0,0018
45	10,2500	-0,9170	7,4100	0,1024	7,4060	0,0809	7,3908	0,0023
46	10,5000	-0,1501	7,4300	0,2155	7,4080	0,0916	7,3909	0,0028
47	10,7500	1,9899	7,4500	0,3392	7,4100	0,1024	7,3910	0,0033
48	11,0000	-227,9508	7,4700	0,4750	7,4120	0,1133	7,3911	0,0038
49	11,2500	-5,8452	7,4900	0,6250	7,4140	0,1242	7,3912	0,0043
50	11,5000	-3,8114						
51	11,7500	-3,0639						
52	12,0000	-2,6359						

Рисунок 1.19 – Розрахунок коренів частотного рівняння

Введення текстової інформації, числових даних, формул у комірки і визначення коренів частотного рівняння.

- у комірку A1 та комірки 3-го рядка ввести текстові заголовки;
- у комірки B1–E1 ввести кроки Δz , які будуть відрізнятись на різних послідовних пошуках коренів приблизно на порядок (див. рис. 1.19);
- у комірку A4 ввести початкове значення аргументу – 0 (тобто $z_0=0$);
- у комірку A5 ввести формулу: =A4+\$B\$1 (будьте уважні: *введення формули починається зі знаку =, а всі літери – тільки латинського алфавіту*), яка означає, що в даній комірці значення попередньої комірки (A4) буде збільшено на величину кроку Δz , взяту з комірки B1 (\$B\$1). Позначення \$ вказують на абсолютну адресу комірки, яка не буде змінюватись при копіюванні формули в інші комірки;

– скопіювати вміст комірки A5 в комірки A6–A52. Для цього встановити курсор миші у правий нижній кут комірки A5. Коли курсор прийме вигляд маленького чорного хрестика, натиснути ліву кнопку миші і, не відпускаючи кнопку, протягнути мишу вниз до комірки A52. На останній комірці відпустити ліву кнопку. Комірки A4–A52 будуть заповнені значеннями аргумента z ;

– у комірку B4 ввести формулу для функції $f(z)$. Список математичних функцій і правила їх запису можна переглянути у вікні «Мастер функцій», яке викликається з пункту меню «Вставка» / «Функция», або натисканням на відповідну іконку «fx». Наприклад, для функції:

$$f(z) = \sin z \cdot \operatorname{ch} z + (\operatorname{tg} z - 1)/e^z$$

треба ввести формулу

$$=\sin(A4)*\cosh(A4)+(\tan(A4)-1)/\exp(A4)$$

і скопіювати її у комірки B5–B52 . Стовець **B** буде заповнений значеннями функції $f(z)$ для відповідних значень аргументу z (що містяться у стовпці **A**);

– аналогічно заповнити інші стовпці **C – H** для уточнення значень коренів, використовуючи методику, що наведена у додатку А. При цьому врахувати, що кроки для аргументу z у стовпцях **C, E і G** будуть братися з комірок з адресами \$C\$1, \$D\$1 і \$E\$1 відповідно.

- виділити знайдені корені частотного рівняння z_1, z_2, z_3 .

Підготовка комірок, введення текстової інформації, числових даних і формул у комірки для побудови графіків власних форм.

Для виконання даного етапу треба перейти на другий лист робочої книги і виконати дії, аналогічні наведеним вище:

- ввести початкові дані для розрахунків :
 - довжину стержня l ;
 - три корені частотного рівняння z_1, z_2, z_3 ;
- крок за координатою x (перший стовпець) бажано вибрати так, щоб для побудови без- і одновузлових форм було приблизно 10 точок, для двовузлової – 15 точок;
- скласти таблиці для функцій власних форм $Y_n(x)$ (без урахування сталих інтегрування) залежно від значень координати x для кожного кореня частотного рівняння (рис. 1.20).

Побудова графіків власних форм.

На основі сформованих таблиць можна, використовуючи «Мастер диаграмм», побудувати графіки власних форм. При цьому бажано виділити комірки вибраної таблиці. «Мастер диаграмм» викликається з пункту меню «Вставка» / «Диаграмма» і пропонує виконати необхідні дії у вікні «Автоформат диаграммы» на чотирьох кроках:

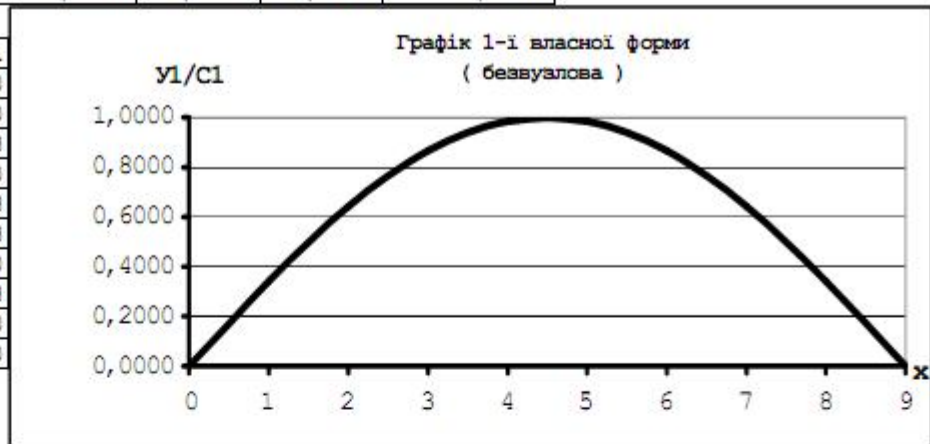
- на першому кроці з'являється вікно виділення діапазону комірок для побудови діаграми. Необхідно відмітити позначкою флажок «Первый столбец как подпись» і натиснути кнопку «Далее»;
- на другому кроці з'являється вікно вибору типу діаграми. Необхідно вибрати тип «Линии» – перший зліва у верхньому рядку і натиснути кнопку «Далее»;
- на третьому кроці з'являється вікно вибору варіанту діаграми. Необхідно вибрати варіант «Кубический сплайн» – третій зліва у другому рядку і натиснути кнопку «Далее»;
- на четвертому кроці з'являється вікно установки параметрів діаграми.

Пропонується:

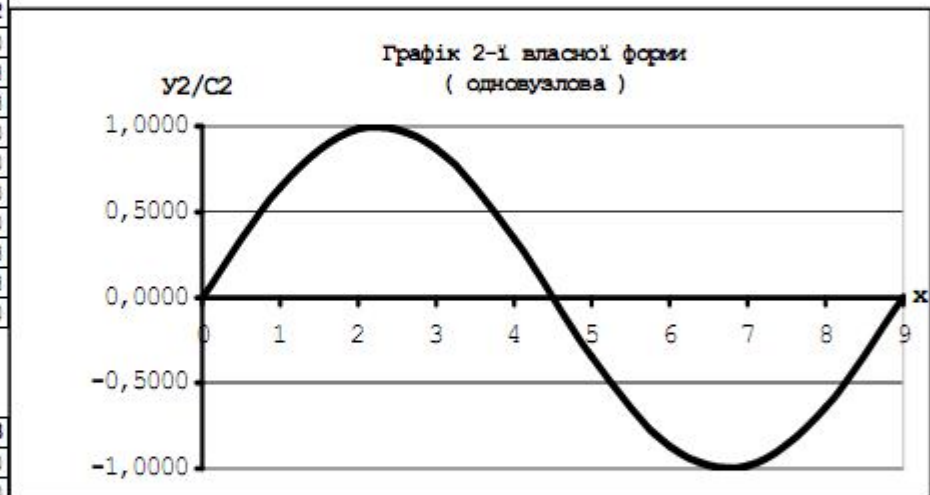
- заповнити поле «Название диаграммы», наприклад «Графік 1-ї власної форми (безвузлова)»;
- включити флажок «Добавить легенду»;
- встановити заголовки осей: «Ось x » – « x », «Ось y » наприклад, «У1/С1». Після закінчення натиснути кнопку «Готово».

Довжина стержня	Корені частотного рівняння		
9,0000	3,1416	6,2832	9,4248

x	u1/c1
0	0,0000
1	0,3420
2	0,6428
3	0,8660
4	0,9848
5	0,9848
6	0,8660
7	0,6428
8	0,3420
9	0,0000



x	u2/c2
0	0,0000
1	0,6428
2	0,9848
3	0,8660
4	0,3420
5	-0,3420
6	-0,8660
7	-0,9848
8	-0,6428
9	0,0000



x	u3/c3
0,0	0,0000
0,5	0,5000
1,0	0,8660
1,5	1,0000
2,0	0,8660
2,5	0,5000
3,0	0,0000
3,5	-0,5000
4,0	-0,8660
4,5	-1,0000
5,0	-0,8660
5,5	-0,5000
6,0	0,0000
6,5	0,5000
7,0	0,8660
7,5	1,0000
8,0	0,8660
8,5	0,5000
9,0	0,0000

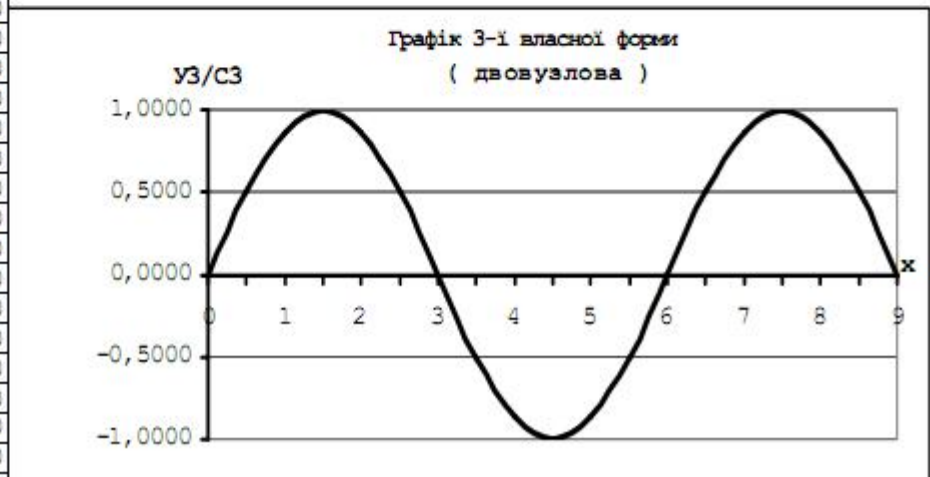


Рисунок 1.20 – Побудова графіків власних форм

У результаті в таблиці з'являється об'єкт «Діаграма», який за допомогою миші можна більш зручно розмістити на листі робочої книги і додатково відформатувати. Для цього потрібно виділити мишою об'єкт на діаграмі, за допомогою правої кнопки миші викликати контекстне меню, в ньому вибрати пункт «Свойства объекта» і виконати необхідні дії.

Можна перетягнути мишою підписи осей у більш зручне місце, змінити шрифт, повернути напрям тексту, змінити товщину і колір лінії графіка, колір фону графіка, максимальне і мінімальне значення на осі **У**, розміщення підписів поділок на осях та ін.

2 ВИХІДНІ ДАНІ ДО КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Вихідні дані до завдання необхідно взяти з таблиць 2.1–2.3 та рисунків 2.1–2.3 за вказівками викладача.

Для виконання *задачі 1* необхідно розглянути систему на рисунку 2.1 з числовими даними таблиці 2.1. У задачі потрібно визначити зусилля у всіх стержнях ферми.

Таблиця 2.1 – Вихідні дані до завдання 1

Перша цифра шифру	l , м	F_1 , кН	Друга цифра шифру	F_2 , кН	F_3 , кН	F_4 , кН	Третя цифра шифру	Номер схеми	h , м
1	21	20	1	11	25	10	1	1	4
2	18	15	2	12	20	15	2	2	3
3	30	35	3	13	30	20	3	3	6
4	15	40	4	14	10	25	4	4	4
5	21	25	5	15	25	30	5	5	5
6	24	15	6	16	20	10	6	6	6
7	20	10	7	17	70	15	7	7	3
8	22	40	8	18	25	20	8	8	4, 5
9	26	25	9	19	65	25	9	9	5
0	28	15	0	20	25	30	0	0	6

Задача 2. Для заданої рами з рисунку 2.2 з числовими даними таблиці 2.2 необхідно: з'ясувати ступінь статичної невизначеності; зробити вибір основної системи; записати канонічні рівняння методу сил; побудувати одиничні й вантажні епюри моментів для основної системи; обчислювати одиничні й вантажні переміщення; розв'язати системи рівнянь; побудувати епюри внутрішніх зусиль; виконувати перевірку отриманого рішення.

Таблиця 2.2 – Вихідні дані до завдання 2

Перша цифра шифру	l , м	h , м	Друга цифра шифру	F_1 , кН	q , кН/м	Третя цифра шифру	Номер схеми	F_2 , кН
1	4	6	1	20	10	1	1	30
2	5	4	2	10	20	2	2	20
3	6	5	3	30	5	3	3	40
4	6	6	4	5	10	4	4	20
5	8	6	5	20	10	5	5	30
6	5	8	6	10	20	6	6	40
7	6	6	7	10	5	7	7	30
8	4	6	8	20	10	8	8	10
9	6	4	9	30	5	9	9	40
0	5	5	0	20	10	0	10	30

Задача 3. Визначити перші три власні частоти і побудувати три власні форми поперечних коливань стержня довжиною l . Стержень має прямокутний поперечний переріз ширини b і висоти h . Матеріал – сталь ($E = 2 \times 10^{11}$ Па, $\rho = 8 \times 10^3$ кг/м³). Чисельні значення параметрів і код граничних умов містяться в таблиці 2.3. Цифри коду граничних умов відповідають номерам випадків на рисунку 2.3, перша цифра – на лівому кінці стержня ($x = 0$), друга – на правому ($x = l$). Наприклад, у задачі розділу 1 код граничних умов запишеться як 2–2, що означає шарнірне обпирання лівого ($x = 0$) і правого ($x = l$) кінців стержня. Для виконання завдання зручно використати ПЕОМ. Методика використання ПЕОМ для пошуку коренів частотного рівняння наведена розділу 1.

Таблиця 2.3 – Вихідні дані до завдання 3

Перша цифра шифру	l , м	Друга цифра шифру	b , см	h , см	Третя цифра шифру	Код граничних умов
1	21	1	1	10	1	2-2
2	22	2	2	12	2	1-1
3	23	3	3	15	3	2-3
4	24	4	4	20	4	2-1
5	25	5	5	10	5	3-2
6	26	6	5	12	6	2-3
7	27	7	4	10	7	3-1
8	28	8	3	12	8	1-3
9	29	9	6	15	9	3-3
0	20	0	6	20	0	1-2

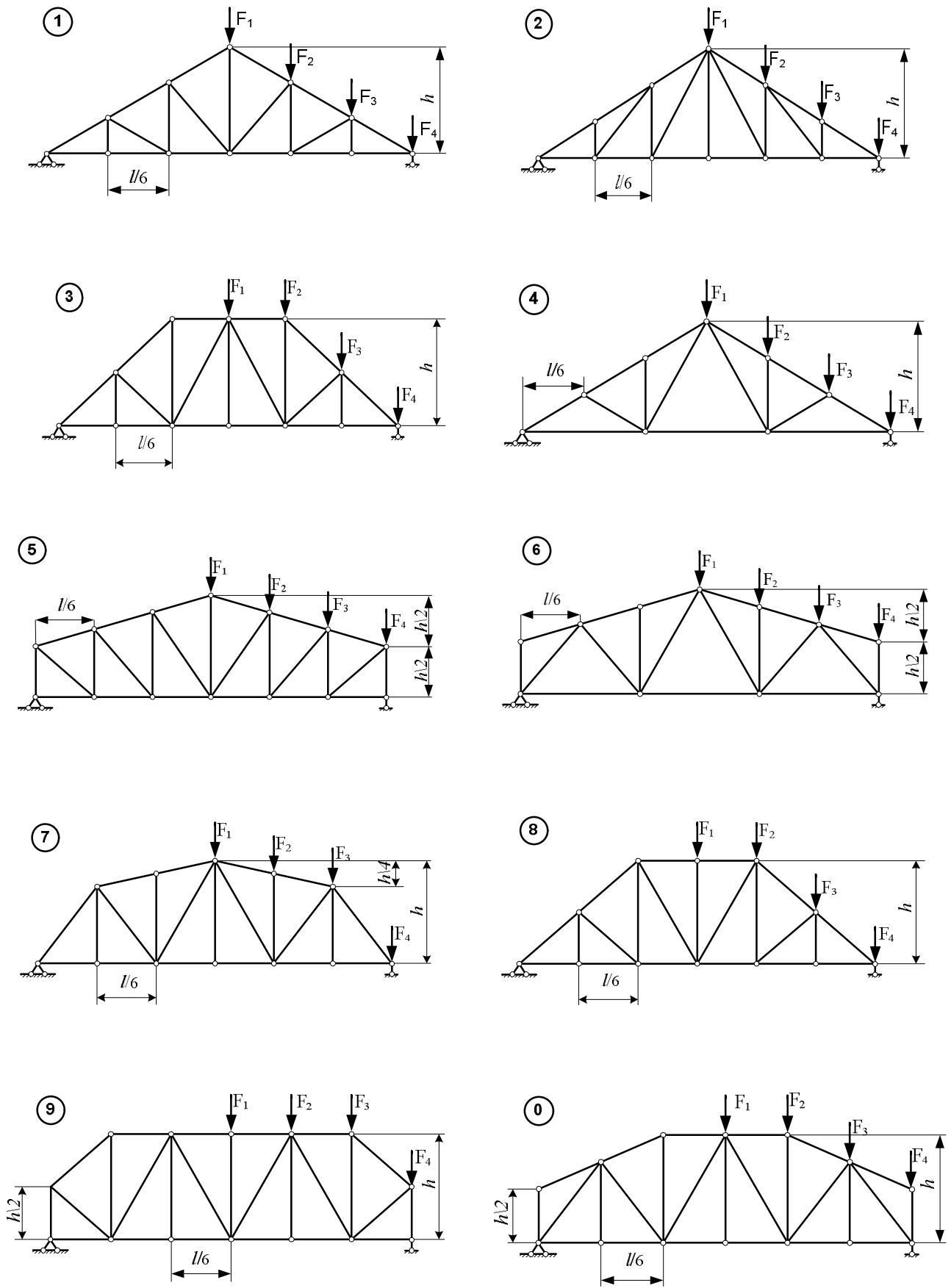


Рисунок 2.1 – Схеми до завдання 1

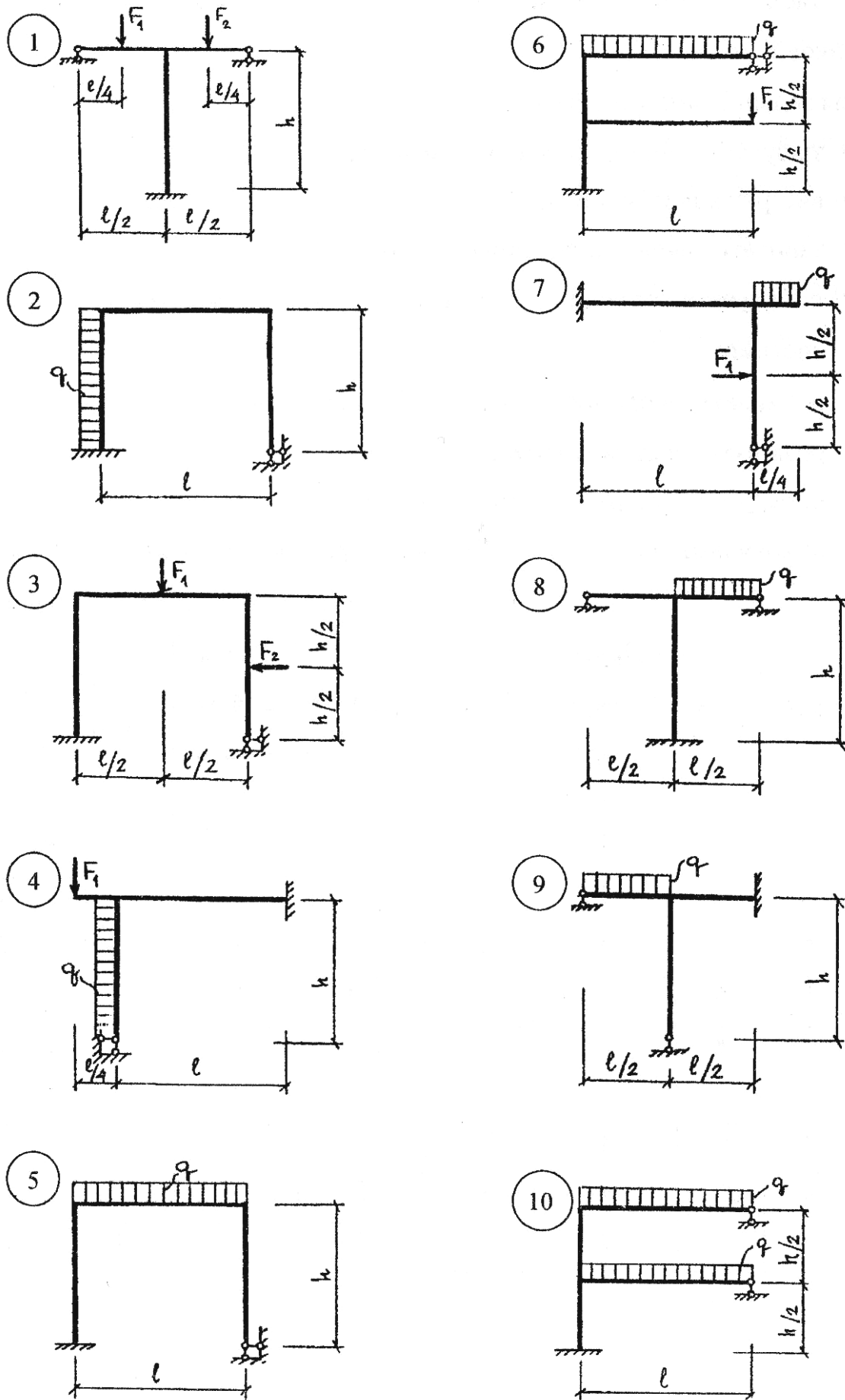
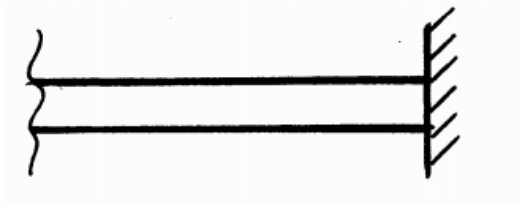


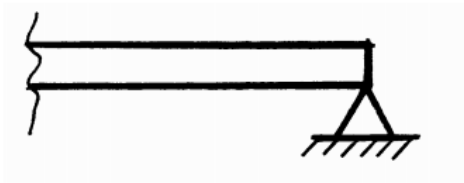
Рисунок 2.2 – Схеми до завдання 2

1. Защемлений кінець.



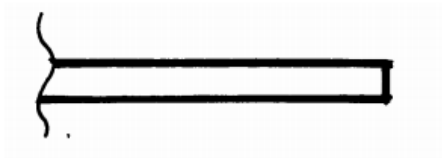
$$\begin{cases} y = 0, \\ \theta = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} Y = 0, \\ Y' = 0. \end{cases}$$

2. Шарнірно (вільно) опертий кінець.



$$\begin{cases} y = 0, \\ M = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} Y = 0, \\ Y'' = 0. \end{cases}$$

3. Вільний кінець.



$$\begin{cases} M = 0, \\ Q = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} Y'' = 0, \\ Y''' = 0. \end{cases}$$

Рисунок 2.3 – Цифри коду та граничні умови до завдання 3

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Шутенко Л. М. Конспект лекцій з курсу «Будівельна механіка» (для студентів 3 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом підготовки 6.060101 – Будівництво) / Л. М. Шутенко, В. П. Шпачук, М. А. Засядько ; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2013. – 117 с.
2. Шпачук В. П. Конспект лекцій з курсу «Будівельна механіка» Спецкурс. Частина 1 (для студентів 3-4 курсів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом підготовки 6.060101 – Будівництво) / В. П. Шпачук, М. А. Засядько ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ, 2014. – 55 с.
3. Шпачук В. П. Конспект лекцій з курсу «Будівельна механіка» Спецкурс. Частина 2 (для студентів 4-го курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.060101 – Будівництво) / В. П. Шпачук, М. А. Засядько ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 122 с.
4. Методичні вказівки для виконання розрахунково-графічної роботи із спецкурсу теоретичної механіки (для студентів 2, 3 курсів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.060101 – Будівництво) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. : О. І. Рубаненко, В. П. Шпачук. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 46 с.
5. Конспект лекцій з курсу Будівельна механіка: для студентів 3 курсу денної форми навчання галузі знань 19 – Архітектура та містобудування / В. П. Шпачук, М. А. Засядько, О. І. Рубаненко, О. О. Чупринін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 178 с.

Виробничо-практичне видання

Методичні рекомендації і завдання
до організації самостійної роботи, підготовки до практичних
занять і контрольних робіт
із навчальної дисципліни

«БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА»

*(для бакалаврів 2–3 курсу денної і заочної форм навчання
за спеціальністю 192 – Будівництво та цивільна інженерія)*

Укладачі: **ЧУПРИНІН** Олександр Олексійович,
ЗАСЯДЬКО Микола Андрійович,
РУБАНЕНКО Олександр Ігорович

Відповідальний за випуск *А. О. Гарбуз*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2019, поз. 168М.

Підп. до друку 15.10.2020. Формат 60 × 84/16.

Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 2,4.

Тираж 50 пр. Зам. № .

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.

Електронна адреса : rektorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017.