

На рис.3 приведены распределения давлений в направлении вращения вала по линии, проходящей через середины областей подвода смазки (кривая 1), и по оси симметрии несущей поверхности (кривая 2). На этом рисунке $X_2 - X_1$ представляет собой безразмерную длину поверхности вдоль оси X.

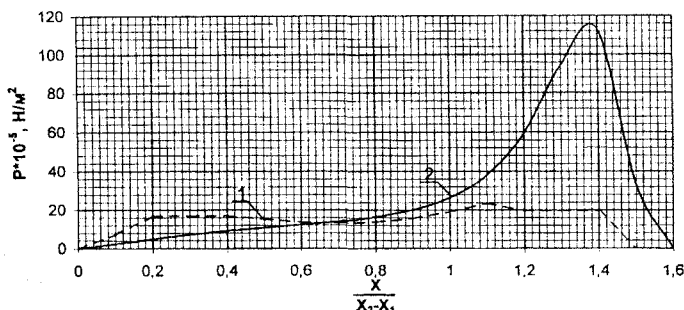


Рис.3.

Получено 10.05.2000

УДК 614.84:664

И.А.КРИСА, В.П.МАМОН, канд. техн. наук,

В.П.ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-матем. наук

Харьковский институт пожарной безопасности МВД Украины

К ВЫЧИСЛЕНИЮ ТЕМПЕРАТУРЫ ПЛАСТОВОГО САМОНАГРЕВАНИЯ СЫРЬЯ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

Построено в форме ряда решение задачи стационарной теплопроводности, удовлетворяющее граничным условиям третьего рода на торцах насыпи. Ускорена его сходимость. Проведен анализ влияния различных факторов на вычисленные значения избыточной температуры.

Задачи пластового самонагрева сырья в установившемся режиме решались в работах [1,2]. Предполагалось, что тепловой очаг локализован в глубине насыпи и влиянием торцевого теплообмена на распределение избыточной температуры в очаге и его окрестности можно пренебречь. Ниже строится решение с учетом торцевого теплообмена, что позволяет находить избыточную температуру и в случае, когда внутренний термоисточник расположен возле нижнего или верхнего оснований насыпи.

При вычислении установившейся температуры самонагревания $T = T(x)$ исходим из дифференциального уравнения [1, 2]:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \alpha^2 T = -\frac{1}{\lambda} q(x). \quad (1)$$

В нем $\alpha^2 = \beta p / (\lambda F)$; β – коэффициент теплоотдачи от сырья на стенки силоса; p – периметр поперечного сечения насыпи площадью F ; λ – коэффициент теплопроводности сырья; $q(x)$ – объемная плотность термоисточников в очаге; x – координата, направленная вверх по оси силоса.

Решение уравнения (1) построим для следующих граничных условий на нижнем $x = 0$ и верхнем $x = l$ торцах (основаниях) насыпи:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \beta_1 T(0); \quad \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=l} = -\beta_2 T(l). \quad (2)$$

Здесь β_1 и β_2 – коэффициенты теплоотдачи соответственно на нижнем и верхнем основаниях, причем $\beta_1 \geq 0$ и $\beta_2 \geq 0$.

Разложим искомую температуру в ряд

$$T(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m u_m(x), \quad (3)$$

где

$$u_m(x) = \beta_1 \sin(\mu_m x) + \mu_m \cos(\mu_m x); \quad (4)$$

μ_m – неотрицательные корни трансцендентного уравнения:

$$(\mu_m - \beta_1 \beta_2 \mu_m^{-1}) \sin(\mu_m l) = (\beta_1 + \beta_2) \cos(\mu_m l); \quad (5)$$

a_m – неизвестные коэффициенты.

Разложение (3) удовлетворяет обоим условиям (2).

Для определения констант a_m подставим выражение (3) в уравнение (1), затем умножим обе части его на $u_n(x)$, ($n = \overline{0; \infty}$) и проинтегрируем от 0 до l . Принимая во внимание ортогональность функций $u_m(x)$ на отрезке $[0; l]$ [3], находим неизвестные множители a_m и подставляем их в решение (3). Такая операция дает

$$T(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(\mu_m^2 + \alpha^2) I_{mm}} u_m(x). \quad (6)$$

Здесь

$$A_m = \int_0^l q(x) \cdot u_m(x) dx; \quad (7)$$

$$I_{mm} = \int_0^l u_m^2(x) dx = \frac{1}{2} \left[(\mu_m^2 + \beta_1^2) + \frac{\mu_m^2 - \beta_1^2}{2\mu_m^2} \sin(2\mu_m l) + \beta_1(1 - \cos(2\mu_m l)) \right].$$

Разложение (6) является общей формой решения. Оно позволяет находить распределение избыточной температуры для различных плотностей тепловых источников в очаге, задаваемых функцией $q(x)$. Следует отметить, что при сильной локализации очага (малом его размере по отношению к высоте насыпи) интегралы A_m медленно убывают с ростом m , что приводит к медленной сходимости ряда (6). Поэтому для упрощения расчетов ускорим его сходимость. С этой целью представим при $\beta_1 + \beta_2 > 0$ решение (6) в виде

$$T(x) = \frac{1}{\lambda} \left[S(x) - \alpha^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{\mu_m^2 \cdot (\mu_m^2 + \alpha^2)} u_m(x) \right]. \quad (8)$$

Здесь

$$S(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m^{-2} \cdot A_m \cdot I_{mm}^{-1} u_m(x) - \quad (9)$$

ряд, который сходится наиболее медленно. Поэтому его сумму найдем аналитическими методами.

Несложно убедиться, что $S(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = -\frac{1}{\lambda} q(x) \quad (10)$$

и граничным условиям (2). Решение краевой задачи, заданной выражениями (2), (10), имеет вид

$$S(x) = \int_0^l q(y) \cdot Q(x, y) dy, \quad (11)$$

где $Q(x, y) = \frac{1}{2\beta_3} [(\beta_1 - \beta_2 + \beta_1\beta_2 l)(x + y) - 2\beta_1\beta_2 xy + 2(1 + \beta_2 l) - \beta_3|x - y|]$; $\beta_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_1\beta_2 l$.

Замкнутая форма суммы ряда (9) ускоряет сходимость в решении (8) по сравнению с той, что присуща ряду (6). Следовательно, изложенные преобразования уменьшают объем вычислений.

Конкретизируем общее решение (8), задав плотность термоисточников выражением

$$q(x) = q_0(\omega(x - \xi + R) - \omega(x - \xi - R)). \quad (12)$$

Здесь $q_0 = \text{const}$ — объемная плотность тепловых источников в очаге высотой $2R$; ξ — координата центра очага; $\omega(t)$ — функция Хевисайда.

При распределении (12) вне очага тепловых источников нет, а внутри очага их плотность постоянная.

Вычислив аналитически интегралы (7), (11), находим:

$$A_m = \frac{2q_0}{\mu_m} \sin(\mu_m R) \cdot u_m(\xi); \quad (13)$$

$$S(x) = \frac{q_0 R}{\lambda \beta_3} [(\beta_1 - \beta_2 + \beta_1\beta_2 l)(x + \xi) + 2(1 + \beta_2 l) - 2\beta_1\beta_2 x \xi - \beta_3 \varphi(x)].$$

Здесь

$$\varphi(x) = \begin{cases} \xi - x & 0 \leq x \leq \xi - R \\ \frac{1}{2R} (R^2 + (x - \xi)^2) & \text{при } \xi - R \leq x \leq \xi + R \\ x - \xi & \xi + R \leq x \leq l. \end{cases}$$

Вычисление сумм рядов (8) или (6) с учетом выражений (13) требует использования большого числа корней трансцендентного уравнения (5). Нахождение их можно упростить, опираясь на результаты работы [4]. В ней показано, что при больших m ($m > 10$) значения корней с хорошей точностью представляются асимптотической формулой

$$\mu_m l \approx m\pi + (2b_m)^{-1} \left[(a_m^2 + 4(\beta_1 + \beta_2)l b_m)^{1/2} - a_m \right]. \quad (14)$$

В ней $a_m = m\pi - \frac{(\beta_1 \cdot \beta_2)l^2}{m\pi}$; $b_m = 1 + \frac{(\beta_1 \cdot \beta_2)l^2}{(m\pi)^2}$.

Таким образом, расчет поля избыточной температуры, порожденной равномерным распределением термоисточников в очаге самонагрева, не вызывает затруднений.

Проведем анализ результатов вычислений безразмерной избыточной температуры $\bar{T}_1(x) = \lambda T(x) / (q_0 R^2)$. В табл.1 указаны ее значения, полученные вычислением M членов в частичных суммах рядов (6) и (9) при $l/R = 50$; $x = \xi = l/2$; $\alpha R = 0,03$ и различных $\chi_1 = \chi_2 = \beta_1 R = \beta_2 R$. В числители записаны результаты, которые дает ряд (6), а в знаменатели – ряд ускоренной сходимости (8). Сравнение числителей и знаменателей при увеличении M показывает, что сходимость в знаменателях существенно лучше, чем в числителях, причем это наблюдается в широком интервале значений $\chi_1 = \chi_2$. Один член ряда ускоренной сходимости при отбрасывании остальных членов дает погрешность меньше одного процента. До ускорения сходимости такая точность достигается вычислением примерно 20 членов. Расчет показывает, что с увеличением $\chi_1 = \chi_2$ происходит уменьшение избыточной температуры в очаге. Это легко объяснить физическими соображениями, принимая во внимание то, что с ростом $\chi_1 = \chi_2$ увеличивается теплоотдача на торцах насыпи.

Таблица 1 – Безразмерные значения $\bar{T}(l/2)$, вычисленные с помощью рядов (6) (числители) и рядов (8) (знаменатели)

M	$\chi_1 = 0,01$	$\chi_1 = 0,1$	$\chi_1 = 1$	$\chi_1 = 10$	$\chi_1 = 100$
1	<u>34,02</u>	<u>20,11</u>	<u>16,90</u>	<u>16,53</u>	<u>16,50</u>
	41,46	25,83	21,33	20,80	20,75
3	<u>38,48</u>	<u>23,17</u>	<u>19,16</u>	<u>18,72</u>	<u>18,68</u>
	41,21	25,71	21,27	20,74	20,69
5	<u>39,69</u>	<u>24,23</u>	<u>19,99</u>	<u>19,52</u>	<u>19,47</u>
	41,20	25,69	21,26	20,73	20,68
20	<u>41,06</u>	<u>25,53</u>	<u>21,11</u>	<u>20,60</u>	<u>20,54</u>
	41,19	25,69	21,26	20,73	20,68
50	<u>41,22</u>	<u>25,70</u>	<u>21,27</u>	<u>20,75</u>	<u>20,69</u>
	41,19	25,69	21,26	20,73	20,68

О влиянии торцевого теплообмена на значение избыточной температуры в очаге позволяют судить данные табл.2. Они получены при $l/R = 50$; $x = \xi$; $\alpha R = 0,05$ и различных χ_1 и χ_2 . Показано, что с

удалением очага от основания насыпи температуры в нем изменяются. Характер изменения зависит от значения параметра χ_1 . При малых χ_1 , когда граничное условие на торце $x=0$ близко к идеальной термоизоляции, удаление очага от торца сопровождается снижением избыточной температуры. При больших χ_1 граничное условие приближается к идеальному торцевому теплообмену и удаление очага от такого торца приводит к повышению температуры в очаге.

Таблица 2 – Безразмерные значения $\bar{T}(\xi)$

ξ/R	$\chi_1 = 1/200$	$\chi_1 = 1/100$	$\chi_1 = 1/10$	$\chi_1 = 1$	$\chi_1 = 10$	$\chi_1 = 100$
$\chi_2 = 100$						
1	33,87	31,20	13,40	3,12	1,58	1,42
3	31,18	28,99	14,46	6,08	4,82	4,69
5	28,94	27,16	15,32	8,48	7,46	7,35
10	24,91	23,85	16,77	12,68	12,07	12,01
15	22,32	21,69	17,50	15,08	14,72	14,68
25	18,99	18,79	17,41	16,61	16,49	16,48
$\chi_2 = 0$						
1	34,67	31,96	13,55	3,13	1,59	1,42
3	32,00	29,79	14,67	6,12	4,85	4,71
5	29,83	28,04	15,60	8,57	7,53	7,42
10	26,13	24,98	17,34	13,01	12,37	12,30
15	24,01	23,28	18,53	15,85	15,45	15,41
25	22,73	22,43	20,51	19,42	19,26	19,24

Влияние условий теплообмена на краю $x=l$ (параметра χ_2) в рассмотренном примере не является существенным, особенно когда очаг самонагревания находится у противоположного края насыпи. С увеличением ξ , когда очаг приближается к середине насыпи, это влияние возрастает.

Таким образом, располагая информацией о параметрах очага, коэффициентах теплоотдачи и теплопроводности сырья, с помощью изложенных выше решений можно вычислить значение избыточной температуры и сделать заключение о пожароопасности процесса самонагревания в установившемся режиме.

1. Ольшанский В.П., Кулешов Н.Н., Мамон В.П., Белан С.В. Температурная задача установившегося самонагревания сырья в силосе // Наук. вісник будівництва. Вип. 6. – Харків: ХДТУБА, 1999. – С. 112-119.

2. Гуторов В.А., Криса И.А., Ольшанский В.П. Расчет температуры стационарного пластового самонагревания сырья в силосе // Інтегровані технології та енергозбереження. – 2000. – № 1. – С. 20-33.

3. Ольшанский В.П., Криса И.А., Еременко С.А. Температурная функция Грина в задаче пластового самонагрева сырья в силосе // Проблемы пожарной безопасности. Вып. 6. – Харьков: ХИПБ, 1999. – С. 99-106.

4. Ольшанский В.П. О температурной функции Грина в задаче пластового самонагрева растительного сырья // Интегровани технології та енергозбереження. – 2000. – №4. – С. 38-44.

Получено 05.05.2000

УДК 518:517.944-947

В.И.КАЛИНИЧЕНКО, канд. физ.-матем. наук

Харьковский национальный университет

Н.П.ПАН

Харьковская государственная академия городского хозяйства

А.В.СОВА, канд. физ.-матем. наук

Харьковский государственный технический университет радиозлектроники

ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ САМОСOPЯЖЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Приводится способ построения таких аппроксимаций, что одна из них дает строгое приближение снизу, а другая – сверху для рассматриваемых задач.

В последние годы наблюдается повышенный интерес к так называемым задачам управления системами с распределенными параметрами [1-4]. Здесь рассматривается абстрагируемый одномерный вариант реальных трехмерных задач электродинамики, теплопроводности, упругости, гидродинамики и т.п., т.е. эти проблемы имеют значительный содержательный смысл. Как известно [4], в задачах оптимального управления и регулирования тем или иным способом приходится решать (чаще всего в реальном масштабе времени) серию прямых задач. Точная математическая формулировка одной из них приведена ниже. В настоящее время нет способов получения точных решений (т.е. в замкнутом аналитическом виде), кроме, быть может, тривиальных случаев, не имеющих практической ценности. Численная же реализация приближенных методов не всегда гарантирует требуемую точность, которая теоретически достигается лишь в пределе, т.е. после выполнения достаточно большого числа шагов.

Здесь предлагается *двусторонний* алгоритм получения приближенных решений “в целом”, построенный таким образом, что точное решение находится “в вилке”. Уточним сказанное. Будем исходить из конкретной задачи и на ее основе решим еще две. При этом решения одной из них дадут приближения к точному решению сверху, а другой – снизу. Алгоритм предусматривает постепенное сужение “зазора” до