МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до організації самостійної роботи
і проведення практичних занять
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

(*для студентів 1 курсу денної форми навчання спеціальності*

275 – Транспортні технології (за видами))

Модуль1

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2020

Методичні рекомендації до організації самостійної роботи і проведення практичних занять з дисципліни «Вища математика» (для студентів 1 курсу денної форми навчання спеціальності 275 – Транспортні технології (за видами)) Модуль 1 / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. Л. П. Вороновська. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 59 с.

Укладач: канд. пед. наук Л. П. Вороновська

Рецензент

Л. Б. Коваленко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувачка кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендована кафедрою вищої математики, протокол № 5 від 25.12.2019.

Зміст

1 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

1.1 Короткі теоретичні відомості

1. *Відстань d між точками* $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$ площини знаходять за формулою: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2. Якщо x_1 і y_1 - координати точки A, а x_2 і y_2 - координати точки B, то координати x і y точки С, яка поділяє відрізок АВ в даному відношенні $\lambda = \frac{AC}{CB}$, знаходять за формулами :

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Якщо λ=1, то точка $C(x, y)$ *поділяє відрізок AB навпіл*, і тоді координати x і y середини відрізка AB знаходять за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. *Площу трикутника* за даними координатами вершин $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ обчислюють за формулою:

$$S = \frac{1}{2}|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|.$$

4. *Рівняння прямої*:

а) загальне рівняння прямої : $Ax + By + C = 0$;

б) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y = kx + b$;

в) рівняння прямої у відрізках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;

г) рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ у даному напрямку:

$$y - y_0 = k(x - x_0);$$

д) рівняння прямої , яка проходить через дві точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ *:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

5. *Кут між двома прямими.* Нехай дані дві прямі

$$y = k_1x + b_1 \text{ і } \quad y = k_2x + b_2$$

Кутом між двома прямими на площині називають кут θ(Рис. 1) на який необхідно повернути пряму (1) проти годинникової стрілки до збігу із другою прямою (2) і знаходять за формулою:

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

З цієї формули прямують дві умови:

а) умова *паралельності* прямих: $k_1 = k_2$;

б) умова *перпендикулярності* прямих : $k_1 = \frac{-1}{k_2}$.

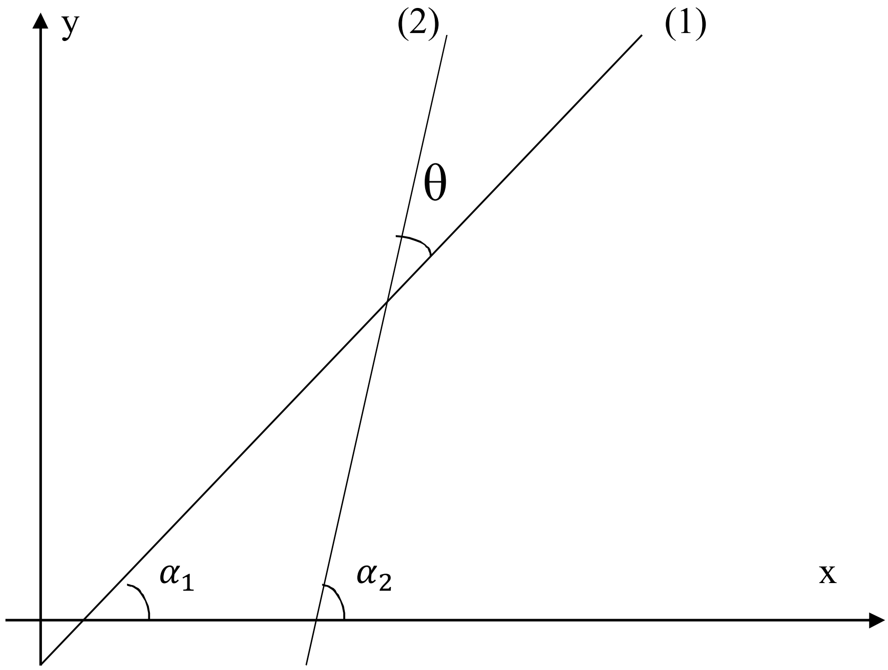


Рисунок 1

6. *Відстань від точки* $A(x_0, y_0)$ *до прямої* $Ax + By + C = 0$ знаходять за формулою:

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

1. 2 Розв'язання задач

Для трикутника (Рис. 2) з вершинами $A(-2,-4)$, $B(-6,3)$, $C(5,1)$ виконати наступні приклади:

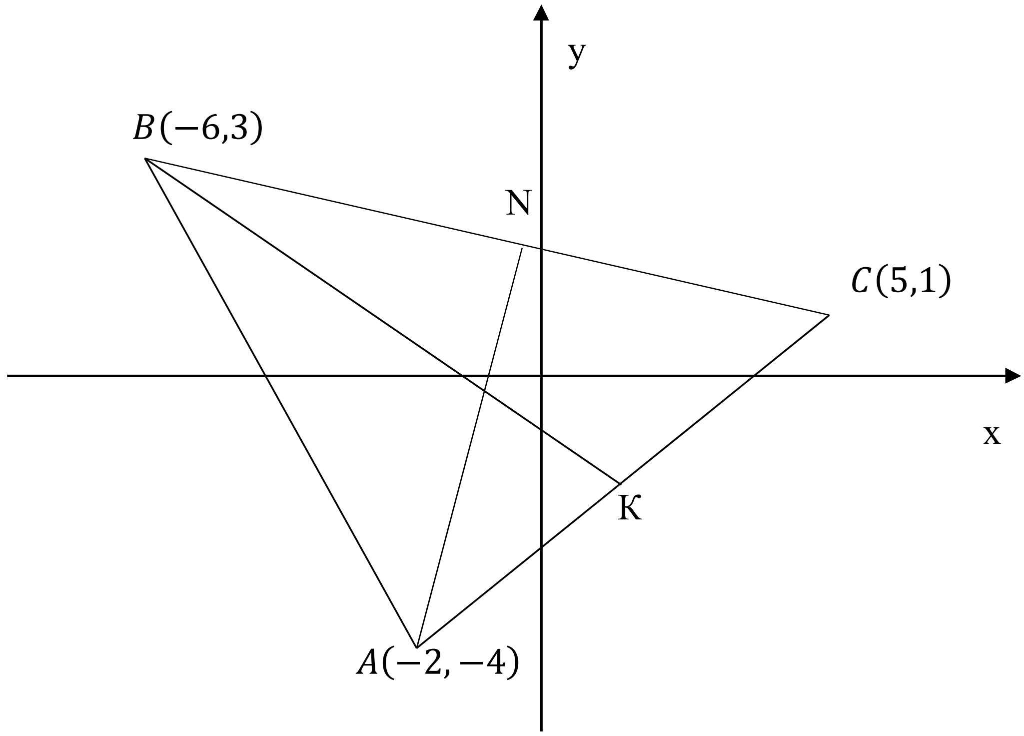


Рисунок 2

*Приклад 1.*Обчислити довжину сторін трикутника.

Розв'язання. Використаємо формулу : $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

$d_{AB} = \sqrt{(-6-(-2))^2 + (3-(-4))^2} = \sqrt{(-6+2)^2 + (3+4)^2} = \sqrt{65}$ од. д.

$d_{BC} = \sqrt{(5-(-6))^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(5+6)^2 + 4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ од. д.

$d_{AC} = \sqrt{(5-(-2))^2 + (1-(-4))^2} = \sqrt{(5+2)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{74}$ од. д.

Приклад 2. Визначити вид трикутника.

Розв'язання. Вид трикутника можна визначити за його рисунком (Рис. 2), або, знаючи довжину сторін, необхідно порівняти квадрат довжини найбільшої сторони з сумою квадратів довжин менших сторін.

Якщо $d_1^2 > d_2^2 + d_3^2$, то такий трикутник має тупий кут; якщо $d_1^2 = d_2^2 + d_3^2,$ то це прямокутний трикутник і якщо $d_1^2 < d_2^2 + d_3^2$,то це гострокутний трикутник. У даному разі маємо:

$d_{BC}^2 < d_{AB}^2 + d_{AC}^2; \quad 125 < 65 + 74; \quad 125 < 139.$

Отже: трикутник гострокутний, різносторонній.

Приклад 3. Обчислити площу трикутника.

Розв'язання. Площа даного трикутника за наведеною вище формулою дорівнює:

$$S = \frac{1}{2}|(-2-5)(3-1)-(-6-5)(-4-1)| = \frac{1}{2}|-14-55| = \left|\frac{-69}{2}\right|.$$

$$S = 34{,}5 \text{ од. кв.}$$

Приклад 4. Записати рівняння сторін трикутника.

Розв'язання. Рівняння сторони AB: $A(-2,-4), B(-6,3)$. За формулою рівняння прямої, що проходить крізь дві точки, маємо:

$$\frac{x-(-2)}{-6-(-2)} = \frac{y-(-4)}{3-(-4)}$$

Після тотожних перетворень маємо:

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{15}{2}.$$

Рівняння сторін *BC* і *AC* знаходимо так само.

BC: $B(-6,3)$, $C(5,1)$

$$\frac{x-(-6)}{5-(-6)} = \frac{y-3}{1-3}. \text{Звідси:} \quad y = -\frac{2}{11}x + \frac{21}{11}.$$

AC: $A(-2,-4)$, $C(5,1)$

$$\frac{x-(-2)}{5-(-2)} = \frac{y-(-4)}{1-(-4)}\ . \text{ Звідси } y = \frac{5}{7}x - \frac{18}{7}$$

Приклад 5. Знайти внутрішні кути трикутника.

Розв'язання. Для виконання цього завдання використаємо формулу

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Кут α утворено перетином прямих AB і AC (рис. 2). Отже, тут:

$$k_1 = k_{AC} = \frac{5}{7}, \qquad k_2 = k_{AB} = -\frac{7}{4}. \text{ Маємо:}$$

$$tg\alpha = \frac{-\frac{7}{4} - \frac{5}{7}}{1 - \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{4}} = \frac{-\frac{69}{28}}{-\frac{7}{28}} = \frac{69}{7}; \alpha = arctg\frac{69}{7}.$$

Кут β утворено перетином прямих AB і BC (рис. 2). Отже, тут:

$$k_1 = k_{AB} = -\frac{7}{4}, \qquad k_2 = k_{BC} = -\frac{2}{11}. \text{ Маємо:}$$

$$tg\beta = \frac{-\frac{2}{11} + \frac{7}{4}}{1 + \frac{7}{4} \cdot \frac{2}{11}} = \frac{\frac{69}{44}}{\frac{58}{44}} = \frac{69}{58}; \ \beta = arctg\frac{69}{58}.$$

Кут γ утворено перетином прямих AC і BC (рис. 2). Отже, тут:

$$k_1 = k_{BC} = -\frac{2}{11}, \qquad k_2 = k_{AC} = \frac{5}{7}. \text{ Маємо:}$$

$$tg\gamma = \frac{\frac{5}{7} + \frac{2}{11}}{1 - \frac{2}{11} \cdot \frac{5}{7}} = \frac{\frac{69}{77}}{\frac{67}{77}} = \frac{69}{67}; \ \gamma = arctg\frac{69}{67}.$$

Приклад 6. Знайти рівняння медіани BK.

Розв'язання. Медіана – це відрізок, який сполучає трикутника з серединою його протилежної сторони. Координати точки K (рис. 2) знайдемо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Тут: $\mathrm{A}(-2, -4)$, $\mathrm{C}(5,1)$. Отже, маємо:

$$x_K = \frac{-2 + 5}{2} = \frac{3}{2}, \qquad y_K = \frac{-4 + 1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Рівняння BK запишемо використовуючи формулу:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Тут: $B(-6{,}3), K\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. Отже $\frac{x + 6}{\frac{3}{2} + 6} = \frac{y - 3}{-\frac{3}{2} - 3}$.

Після тотожних перетворень маємо рівняння медіани *BK:*

$$y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5}.$$

Приклад 7. Знайти рівняння висоти AN.

Розв'язання. Висота AN- це перпендикуляр проведений з вершини A до сторони трикутника BC. Отже, для прямих BC і AN виконується умова їх перпендикулярності:

$$k_{AN} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{\left(-\frac{2}{11}\right)} = \frac{11}{2}.$$

Рівняння висоти *AN* знаходимо за формулою: $y - y_0 = k(x - x_0)$,

де $k = k_{AN}, A(x_0, y_0)$. Тобто: $k = \frac{11}{2}$, $A(-2, -4)$.

Маємо $y + 4 = \frac{11}{2}(x + 2)$; $y = \frac{11}{2}x + 11 - 4$.

Рівняння висоти AN: $y = \frac{11}{2}x + 7$.

Приклад 8. Обчислити довжину висоти CM.

Розв'язання. Довжину висоти CM знайдемо, як відстань від точки $C(x_0, y_0)$ до прямої AB використовуючи формулу:

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

Для цього запишемо рівняння прямої AB в загальному виді:

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{15}{2}; \quad 4y = -7x - 30; \quad 7x + 4y + 30 = 0;$$

отже, $A = 7, B = 4, C = 30$. Точка $C(x_0, y_0)$ має координати $x_0 = 5, y_0 = 1$.

$$\text{Отже:}\qquad d=\left|\frac{7\cdot5+4\cdot1+30}{\sqrt{7^2+4^2}}\right|=\frac{69}{\sqrt{65}}\,\text{од. д.}$$

Приклад 9. Знайти координати точки перетину медіани BK та висоти AN.

Розв'язання. Позначимо цю точку літерою P (рис. 2). Для знаходження її координат треба розв'язати систему рівнянь медіани BK та висоти AN:

$$\begin{cases} y=-\frac{3}{5}x-\frac{3}{5} \\ y=\frac{11}{2}x+7 \end{cases};\ \text{звідси маємо:}\ \ -\frac{3}{5}x-\frac{3}{5}=\frac{11}{2}x+7.$$

Після тотожних перетворень отримаємо: $x=-\frac{76}{61}$.

Знайдене значення x підставимо у перше рівняння і отримаємо *:*

$$y=\frac{9}{61}$$

Отже, точка перетину медіани і висоти: $P\left(-\frac{76}{61},\frac{9}{61}\right)$.

Приклад 10. Записати рівняння прямої, яка проходить через вершину трикутника B паралельно до його сторони AC.

Розв'язання. Позначимо рівняння шуканої прямої як BF. За умовою пряма BF паралельна прямій AC, а тому використавши умову паралельності двох прямих знайдемо кутовий коефіцієнт прямої BF:

$$k_{BF}=k_{AC}=\frac{5}{7}.$$

Для прямої BF відомі кутовий коефіцієнт та точка яка належить прямій, а отже використаємо наступне рівняння:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Тут: $k=\frac{5}{7}$, $B(6,3)$. Отже, $y-3=\frac{5}{7}(x+6)$; $y=\frac{5}{7}x+\frac{30}{7}+3$.

Рівняння прямої BF: $y=\frac{5}{7}x+\frac{51}{7}$.

2 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

2.1 Матриці. Визначники

Прямокутна таблиця чисел, складена з m рядків та n стовпців називається *матрицею* порядку $m \times n$. Матриця А має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1} a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ або } A=\|a_{ij}\|, \text{ або } A=\langle a_{ij} \rangle, \text{ де } i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

Тут a_{ij} елемент матриці А, який розташований в i-му рядку та j-му стовпці. Матриця називається квадратною, якщо $m = n$. Наприклад, матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix}, m = n = 2 \text{ або } A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix}, m = n = 3.$$

Необхідно виділити деякі матриці: $E = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ \dots 0 \\ 0\ 1\ 0\ \dots 0 \\ \dots \dots \dots \dots \\ 0\ 0\ 0\ \dots 1 \end{pmatrix}$ - одинична;

$D = \begin{pmatrix} a_{11}\ 0\ 0\ \dots 0 \\ 0\ a_{22}\ 0\ \dots 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0\ 0\ 0\ \dots\ a_{nn} \end{pmatrix}$ - діагональна та $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13}\ \dots\ a_{1n} \\ 0\ a_{22} a_{23}\ \dots\ a_{2n} \\ 0\ \ 0\ \ a_{33}\ \dots\ a_{3n} \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \dots\ \ a_{nn} \end{pmatrix}$ – верхньотрикутна.

Введемо поняття *визначника*. Позначимо ΔA або $detA$. Визначник це число, яке знаходиться наступним чином:

1) для $A = (a), n = 1, detA = a$. Тут n - розмірність (порядок) $detA$.

2) для $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix}, n = 2$: $detA = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

3) для $A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix}, n = 3, detA = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$.

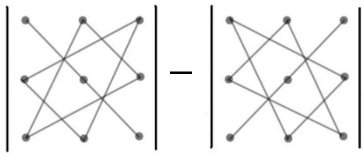
Останній визначник обчислюєм:

а) за правилом Саррюса. Спочатку під визначником дописуємо два верхніх рядка (або за визначником дописуємо два перших стовпця); потім виконуємо множення по три елементи починаючи з головної діагоналі з їх послідовним додаванням; потім виконуємо множення по три елементи починаючи з побічної діагоналі з їх послідовним відніманням. Кожний елемент визначника береться із своїм знаком. Отже,

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \\ a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13} +$$

$$+a_{12}a_{23}a_{31} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33});$$

б) за правилом “зірки” отримуємо ту саму суму. Правило “зірки”схематично виглядає наступним чином:

$detA =$ 

Приклад 1. Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти $detA$.

Розв’язання. Скористаємося правилом “зірки”

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) - (1 \cdot 0 \cdot (-2) +$$

$$+2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 5) = -3 - 8 - (18 - 10) = -19;$$

Скористаємося правилом Саррюса: $detA = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{matrix} = 3 \cdot 0 \cdot 5 +$

$$+2 \cdot 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 0 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \cdot 5 = -8 - 3 -$$
$$-18 + 10 = -19$$

Загальний метод обчислення визначників. Загальний метод обчислення визначників полягає у його розкладанні *за елементами рядка (або стовпця).*

Якщо візьмемо будь-який елемент визначника і викреслимо рядок і стовпець, в яких він розташований, то одержимо визначник меншого порядку. Такий визначник називається *мінором*. Мінор помножений на $(-1)^{m+n}$, де m

– номер рядка, а n – номер стовпця в яких знаходиться елемент, називається *алгебраїчним доповненням елемента*.

Наприклад, якщо $A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$, то алгебраїчне доповнення для елемента a_{13} має такий вигляд: $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix}$, а для елемента a_{32}: $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{21}a_{23} \end{vmatrix}$.

Тоді формула розкладання визначника за елементами першого рядка представляється наступним чином: $\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11} \begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} +$ $+(-1)^{1+2}a_{12} \begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13} \begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$. Розкладання можна проводити як за елементами будь-якого рядка так і за елементами будь-якого стовпця.

Приклад 2. Обчислити визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ загальним методом.

Розв'язання. Для обчислення $detA$ для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ оберемо розкладання визначника за елементами другого стовпця:

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}(-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{3+2}3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-5+4) + +4(15+2) - 3(6+1) = -2 + 68 - 21 = 45.$$

Визначник третього порядку можна обчислити за будь-яким з розглянутих методів. Для обчислення визначників порядку $n \geq 4$ використовується лише метод його розкладання за елементами рядка (або стовпця).

Властивості визначників:

1) Якщо визначник має нульовий рядок (стовпець) то $detA = 0$.

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

2) Якщо визначник має два пропорційні або однакові рядки, то $detA = 0$.

$detA = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \end{vmatrix} = -24 - 24 - 16 + 24 + 24 + 16 = 0$, бо другий і третій рядок пропорційні: $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{4}{8}$.

3) Спільний множник якогось рядка можна винести за знак визначник: $detA = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

4) Якщо переставити місцями рядки, то визначник змінить знак:

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

5) Визначник не зміниться, якщо до будь-якого рядка додати інший рядок або рядок помножити на довільне число.

2.2 Дії з матрицями

Деякі види матриць ми розглянули у розділі 2.1. В цьому розділі ми розглянемо дії над матрицями.

Квадратна матриця називається не виродженою, якщо $detA \neq 0$ і навпаки, якщо $detA = 0$, матриця вироджена.

Сумою $A + B$ двох матриць $A = \langle a_{ij} \rangle$ і $B = \langle b_{ij} \rangle$, що мають однакові розміри, називається матриця $C = \langle c_{ij} \rangle$, що має такий же розмір, а кожний елемент її дорівнює сумі відповідних елементів матриць A та B:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} .$$

Добутком матриці A на число k називається матриця $C = \langle c_{ij} \rangle$, яка має такий же розмір і кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента матриці A на число k:

$$c_{ij} = ka_{ij}.$$

Приклад 3. Обчислити $5A + B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\4&2&-2\\2&7&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&4&5\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Першим кроком при виконанні цієї задачі буде знаходження матриці $5A$: $5A=\begin{pmatrix}15&-5&0\\20&10&-10\\10&35&5\end{pmatrix}$, а тепер виконаємо наступну дію:

$$5A+B=\begin{pmatrix}15&-5&0\\20&10&-10\\10&35&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&4&5\\1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&-4&1\\18&14&-5\\11&35&7\end{pmatrix}.$$

Добуток матриць. Добуток матриці A на матрицю B можливо виконати тоді і тільки тоді, коли кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Тобто, якщо матриця A має розмірність $m\times n$, а

$B-\ n\times k$, то $C=AB-\ m\times k$.

Кожний елемент матриці C дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}.$$

Приклад 4. Знайти добуток двох матриць:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&4&3\\2&-1&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&1&2\\3&-1&0\\5&1&2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Спочатку звернемо увагу на те, що обидві матриці квадратичні одного розміру, а отже в такому випадку завжди можливо виконати дію множення.

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&4&3\\2&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&2\\3&-1&0\\5&1&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot4+2\cdot3-1\cdot5&1\cdot1-2\cdot1-1\cdot1&1\cdot2+2\cdot0-1\cdot2\\0\cdot4+4\cdot3+3\cdot5&0\cdot1-4\cdot1+3\cdot1&0\cdot2+4\cdot0+3\cdot2\\2\cdot4-1\cdot3-1\cdot5&2\cdot1+1\cdot1-1\cdot1&2\cdot2-1\cdot0-1\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5&-2&0\\27&-1&6\\0&2&2\end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix}4&1&2\\3&-1&0\\5&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2-1\\0&4&3\\2-1-1\end{pmatrix}==$$

$$\begin{pmatrix}4\cdot1+1\cdot0+2\cdot2 & 4\cdot2+1\cdot4-2\cdot1 & 4(-1)+1\cdot3-2\cdot1\\3\cdot1-1\cdot0+0\cdot2 & 3\cdot2-1\cdot4-0\cdot1 & 3(-1)-1\cdot3-0\cdot1\\5\cdot1+1\cdot0+2\cdot2 & 5\cdot2+1\cdot4-2\cdot1 & 5(-1)+1\cdot3-2\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8&10&-3\\3&2&-6\\9&12&-4\end{pmatrix}.$$

Порівнюючи отримані результати можемо зробити висновок:

$$AB\neq BA\,.$$

Приклад 5. Знайти $AB,$якщо $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&4&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&0\\1&2\\-1&3\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Звертаємо увагу, що число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці, а отже можемо виконати їх множення:

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\1&2\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot1+1\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot2-1\cdot3\\0\cdot3+4\cdot1-2\cdot1 & 0\cdot0+4\cdot2+2\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6&1\\2&14\end{pmatrix}.$$

А чи можна виконати дію BA? Відповідь - так. Бо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці (2=2).

Знайти добуток AB, якщо $A=(3\ \ -2\ \ 1)$, $B=\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$.

$$AB=(3\cdot4-2\cdot0+1\cdot3)=(15)\,.$$

Обернена матриця. Для деяких задач нам необхідно вміти знаходити *обернену матрицю.* *Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці* А, якщо

$$A^{-1}A=AA^{-1}=E.$$

Матриця A має обернену матрицю A^{-1}, коли $detA \neq 0$ (необхідна і достатня умови).

Якщо $detA \neq 0$, то $A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} A_{11}A_{12} \dots A_{n1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n1}A_{n2} \dots A_{nn} \end{pmatrix}$, де A_{ij} - відповідні алгебраїчні доповнення.

Приклад 6. Знайти A^{-1} до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Виконаємо наступне:

1)$detA = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 + 10 - 1 - 12 + 20 = 27.$ Отже, $detA \neq 0;$

2) знайдемо транспоновану матрицю A^T. Для цього міняємо рядки на стовпці:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

3) знайдемо алгебраїчні доповнення до всіх елементів A^T:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(20 - 2) = -18,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 5) = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 1 = 9,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(6 + 1) = -7,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 5 = 8;$$

4) з отриманих алгебраїчних доповнень запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -18 & 11 & -1 \\ 9 & -7 & 8 \end{pmatrix};$$

5) зробимо перевірку: $AA^{-1} = E$.

Отже, $AA^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -18 & 11 & -1 \\ 9 & -7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 + 30 - 3 & 0 + 6 - 6 & 0 + 12 - 12 \\ -54 + 55 - 1 & 18 + 11 - 2 & -18 + 22 - 4 \\ 27 - 35 + 8 & -9 - 7 + 16 & 9 - 14 + 32 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отриманий результат вказує на те, що обернена матриця знайдена вірно.

2.3 Правило Крамера розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Правило Крамера застосовується лише для таких систем лінійних алгебраїчних рівнянь, в яких кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь і $detA \neq 0$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Правило Крамера має вигляд :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots \ldots \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

де Δ - це головний визначник системи, складений з коефіцієнтів при невідомих, а визначники $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ одержуємо з головного визначника заміною i-го стовпця на стовпець правих частин системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ і т.д.}$$

Якщо $\Delta = 0$, то система або несумісна (не має розв'язків), або має безліч розв'язків.

Приклад 7. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 7 \end{cases} .$$

Розв'язання. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -10 - 4 - 21 - 140 + 2 - 3 = -176 \neq 0$, отже система має єдиний розв'язок .

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & -3 & 4 \\ 5 & 5 & 1 \\ 7 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 25 - 20 - 21 - 140 - 5 - 15 = -176;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -10 + 28 - 35 - 140 - 14 - 5 = -176;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 5 & 5 \\ 7 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 70 + 5 - 105 + 175 + 10 + 21 = 176 ;$$

$$x_1 = \frac{-176}{-176} = 1, \quad x_2 = \frac{-176}{-176} = 1, \qquad x_3 = \frac{176}{-176} = -1.$$

Для перевірки підставляємо отримані значення невідомих в будь-яке рівняння системи.

Перевірка : $x_1 + 5x_2 + x_3 = 5,$

$$-1 + 5(-1) + 1 = 5.$$

Маємо $5 = 5$. Тотожність істинна, тому зробимо висновок, що розв'язок знайдено вірно.

Приклад 8. Чи можна розв'язати систему за правилом Крамера?

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5 \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 5 \\ 7x_1 - x_2 - x_3 = 7 \end{cases} .$$

Розв'язання. Головний визначник системи $\Delta = 0$, тому правилом Крамера користуватись неможливо.

2.4 Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими, яку подано на початку розділу 2.3. Цю систему запишемо у матричній формі: $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Якщо $detA \neq 0$, то матриця A має A^{-1}. Помножимо обидві частини рівняння $AX = B$ на A^{-1}: $A^{-1}\,AX = A^{-1}B$, але $AA^{-1} = E$, тому $EX = A^{-1}B$. Враховуючи, що $EX = X$, маємо $X = A^{-1}B$.

Приклад 9. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$.

Розв'язання. Виконаємо наступне: 1) випишемо окремо матриці: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$;

2) знайдемо значення головного визначника системи:

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 8 + 27 - 12 - 12 + 15 = 20;$$

3) транспонуємо матрицю A:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix};$$

4) знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A^T:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(-15+8) = 7,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -(5+9) = -14,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-6-4) = 10,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -(-4+9) = -5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5;$$

5) запишемо обернену матрицю та зробимо її перевірку:

$$A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -14 & -2 & 10 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -14 & -2 & 10 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -2+7+15 & 3+7-10 & -4-21+25 \\ -28-2+30 & 42-2-20 & -56+6+50 \\ -10-5+15 & 15-5-10 & -20+15+25 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

6) знайдемо матрицю X: $X = A^{-1}B = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -14 & -2 & 10 \\ -5 & -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 4+56+0 \\ 56-16+0 \\ 20-40+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже ми отримали такі значення для невідомих: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$;

7) зробимо перевірку отриманих результатів. Для цього підставимо знайдені значення невідомих в будь-яке рівняння системи:

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4$$

$$2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 4(-1) = -4$$

$$-4 = -4\,.$$

Отримана тотожність істинна, а отже рішення знайдено вірно.

2.5. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

Для системи n лінійних рівнянь з n невідомимизапишемо розширену матрицю : $\left(\begin{matrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{matrix}\right)$. За допомогою елементарних перетворень приведемо її до виду верхньотрикутної матриці. Під елементарними перетвореннями розуміють множення рядків на деякі числа і додавання їх до інших рядків.

Метою перетворень є отримання іншої еквівалентної системи простішого вигляду.

Приклад 10. Розв'язати методом Гаусса систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо головний визначник системи:

$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 4 + 8 + 8 - 2 - 8 = 6$, $detA \neq 0$, а отже система має рішення.

Запишемо розширену матрицю: $\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{matrix}\right)$.

Виконаємо наступні елементарні перетворення:

1) помножимо перший і другий рядки на такі числа, щоб отримати однакові перші елементи в рядках. В даному випадку помножимо перший рядок на 2 і з першого рядка віднімемо другий. Перший рядок переписуємо в тому ж вигляді, а результат елементарного перетворення записуємо у другий рядок: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 4 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right)$;

2) ті ж самі дії виконуємо з першим та третім рядками. Перший рядок помножимо на 4 і віднімемо третій рядок. Результат перетворення запишемо у третій рядок. Перший і другий рядки переписуємо такими, як ми їх одержали у пункті 1): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 3 & 4 & -13 \end{array}\right)$;

3) працюємо тепер з другим та третім рядками. Необхідно отримати однакові другі елементи в цих рядках. В даному випадку вони вже рівні, тому виконаємо дію віднімання (з другого рядка віднімемо третій, а результат запишемо в третій рядок): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$.

Отримали матрицю, у якої всі елементи під головною діагоналлю дорівнюють нулю.

4) за виглядом отриманої матриці записуємо систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ \quad 3x_2 + 2x_3 = -11 \\ \qquad -2x_3 = 2 \end{cases};$$

5) третє рівняння системи має одну невідому, тому почнемо рішення системи з цього рівняння: $-2x_3 = 2$, $x_3 = -1$; перейдемо до другого рівняння: $3x_2 + 2x_3 = -11$; підставимо в нього $x_3 = -1$ і отримаємо $x_2 = -3$; перейдемо до першого рівняння $x_1 + x_2 + 2x_3 = -4$; підставимо в нього $x_3 = -1$ та $x_2 = -3$ і отримаємо $x_1 = 1$.

Отже $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$.

3 ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

3.1 Короткі теоретичні відомості

Число A називається *границею функції* $f(x)$ при x, яке прямує до x_0, якщо для будь-якого малого наперед заданого додатного числа ε можна знайти таке додатне δ яке залежить від ε, що при всіх значеннях x, які входять до області визначення функції, відмінних від x_0 і виконуючих умову $|x-x_0|<\delta,$ має місце нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Розглянемо необхідні теоретичні дані з теорії границь.

1. *Нескінченно малі і нескінченно великі функції:*

а) функція $f(x)$ називається нескінченно малою при $x\to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0\,;$$

б) функція $f(x)$ називається нескінченно великою при $x\to x_0$, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty.$$

2. *Властивості нескінченно малих функцій:*

а) якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ нескінченно малі, то їх сума, різниця та добуток є нескінченно малою;

б) якщо при $x\to x_0$ функція $f(x)$ нескінченно мала, а функція $\varphi(x)$ - обмежена, то їх добуток $f(x)\varphi(x)$ нескінченно мала.

3. *Властивості нескінченно великих функцій:*

Якщо при $x\to x_0$ функція $f(x)$ має скінчену границю ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$), а функція $\varphi(x)$ - нескінченно велика ($\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=\infty$) , то:

а) сума їх - нескінченно велика, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+\varphi(x)]=\infty$, а границя відношення $f(x)$ до $\varphi(x)$ дорівнює нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0;$$

б) якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ ($b > 0$), а $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, при цьому $\varphi(x)$ додатна в околиці точки x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = +\infty$;

в) добуток двох нескінченно великих функцій є функція нескінченно велика, тобто якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ і $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\varphi(x) = \infty$.

4. *Зв'язок між нескінченно великими і нескінченно малими функціями:*

а) якщо $f(x)$ при $x \to x_0$ - нескінченно велика функція, то функція $\frac{1}{f(x)}$ нескінченно мала;

б) якщо при $x \to x_0$ функція $\varphi(x)$ нескінченно мала, то функція $\frac{1}{\varphi(x)}$ - нескінченно велика, при цьому вважаємо, що в околиці точки x_0 функція $\varphi(x)$ в нуль не обертається.

5. *Правила граничного переходу:*

а) якщо при $x \to x_0$ функція $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають скінчені границі, то і їх алгебраїчна сума має границю , яка дорівнює сумі їх границь, тобто якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$, а $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = c$, то

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = b \pm c;$$

б) якщо при $x \to x_0$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають границі, то їх добуток також має границю, яка дорівнює добутку їх границь, тобто якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$, а $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = c$, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\varphi(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = bc\,;$$

в) якщо при $x \to x_0$ функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ мають границі і границя функції $\varphi(x)$ не дорівнює нулю, то границя їх відношення існує і дорівнює відношенню їх границь, тобто якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$, а $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = c$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \frac{b}{c}.$$

3.2 Методи обчислення границь

3.2.1 Знаходження границь від дробово-раціональної функції

Для того щоб знайти границю від дробово-раціональної функції у випадку, коли при $x \to x_0$ чисельник і знаменник дробу мають границі, рівні нулю (маємо невизначеність $\left|\frac{0}{0}\right|$), необхідно чисельник і знаменник дробу розділити на $x - x_0$ і перейти до границі. Якщо і після цього чисельник і знаменник нового дробу мають границі рівні нулю при $x \to x_0$, то необхідно провести повторне ділення на $x - x_0$.

Розглянемо приклади обчислення границі дробово-раціональної функції.

Приклад 1.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - 2x + 8} = \frac{4 - 2 + 2}{4 - 4 + 8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{3x^2 - 19x + 28} = \frac{16 - 4 - 12}{48 - 76 + 28} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

За правилом, наведеним вище, розділимо чисельник і знаменник на $x - 4$.

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3);$$

$$3x^2 - 19x + 28 = (x - 4)(3x - 7);$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x - 4)(x + 3)}{(x - 4)(3x - 7)} = \lim_{x \to 4} \frac{x + 3}{3x - 7} = \frac{4 + 3}{12 - 7} = \frac{7}{5}.$$

Приклад 3.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x + 10}{x^3 + 6x^2 + x - 14} = \frac{16 - 16 - 12 + 2 + 10}{-8 + 24 - 2 - 14} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x + 10 = (x + 2)(x^3 - 3x + 5)$$

$$x^3 + 6x^2 + x - 14 = (x + 2)(x^2 + 4x - 7)$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x + 2)(x^3 - 3x + 5)}{(x + 2)(x^2 + 4x - 7)} = \lim_{x \to -2} \frac{x^3 - 3x + 5}{x^2 + 4x - 7} = \frac{-8 + 6 + 5}{4 - 8 - 7} = -\frac{3}{11}.$$

Розглянемо декілька задач на знаходження границь дробово-раціональної функції при $x \to \infty$.

При $x \to \infty$ і чисельник, і знаменник дробу функції нескінченно великі. Отже, ми маємо справу з відношенням двох нескінченно великих функцій (маємо невизначеність $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$) . В такому випадку необхідно чисельник і знаменник дробу розділити на найвищу степінь x, яка зустрічається в членах дробу.

Приклад 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+6x}{7x^3-4x+3}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

(найвища степінь x дорівнює 3, тому розділимо кожен елемент дробу на x^3)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{5x^2}{x^3}+\frac{6x}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3}-\frac{4x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{7-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}}{7-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}}=\frac{2}{7}.$$

Тут $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0, \lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}=0, \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0, \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}=0$ (за властивостями нескінченно великих величин).

Приклад 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^5+3x^2-2x+1}{6x^3-9x^2-7x+2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^5}{x^5}+\frac{3x^2}{x^5}-\frac{2x}{x^5}+\frac{1}{x^5}}{\frac{6x^3}{x^5}-\frac{9x^2}{x^5}-\frac{7x}{x^5}+\frac{2}{x^5}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{\frac{6}{x^2}-\frac{9}{x^3}-\frac{7}{x^4}+\frac{2}{x^5}}=\frac{5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^4}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^5}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9}{x^3}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^4}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^5}}=\frac{5}{0}=\infty.$$

Приклад 6.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^3+3x^2-9}{4x^6-7x^5+2x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{8x^3}{x^6}+\frac{3x^2}{x^6}-\frac{9}{x^6}}{\frac{4x^6}{x^6}-\frac{7x^5}{x^6}+\frac{2x}{x^6}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{8}{x^3}+\frac{3}{x^4}-\frac{9}{x^6}}{4-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^5}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{8}{x^3}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x^4}-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{9}{x^6}}{4-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^5}}=\frac{0}{4}=0.$$

3.2.2 Знаходження границі від ірраціональної функції

Щоб знайти границю дробу, яка має ірраціональний вираз у випадку, коли і чисельник, і знаменник дробу дорівнює нулю (маємо невизначеність $\left|\frac{0}{0}\right|$), необхідно помножити чисельник і знаменник на вираз спряжений до даного ірраціонального виразу.

Приклад 7.

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-9}=\frac{\sqrt{3+6}-3}{9-9}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

(спряженим до виразу $\sqrt{x+6}-3$ є $\sqrt{x+6}+3$, тому помножимо чисельник і знаменник на цей вираз)

$$=\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+6}\right)^2-9}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\frac{1}{12}.$$

Приклад 8.

$$\lim_{x\to-2}\frac{2+x}{\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to-2}\frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}\right)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{\left(\sqrt{7-x}\right)^2-\left(\sqrt{11+x}\right)^2} = \lim_{x\to -2} \frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{7-x-11-x} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{-4-2x} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(2+x)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{-2(2+x)} = -\frac{6}{2} = -3.$$

Приклад 9.

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

(в даному випадку ми маємо ірраціональні вирази і в чисельнику, і в знаменнику, тому необхідно помножити чисельник і знаменник на відповідні вирази їм спряжені)

$$= \lim_{x\to -3} \frac{\left(\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{\left(\left(\sqrt{x^2+7}\right)^2-\left(\sqrt{7-3x}\right)^2\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{\left(\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-9}\right)^2\right)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{(x^2+7-7+3x)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{(x+3-x^2+9)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{(x^2+3x)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{-(x^2-x-12)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{x(x+3)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}\right)}{-(x-4)(x+3)\left(\sqrt{x^2+7}+\sqrt{7-3x}\right)} = \frac{-3(0+0)}{7(4+4)} = 0.$$

3.2.3 Перша важлива границя

Перша важлива границя:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1.$$

При знаходженні границь будемо використовувати наслідки з першої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$$

Приклад 10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-sinx}{x^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sinx}{cosx}-sinx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx-sinxcosx}{x^3cosx}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sinx(1-cosx)}{x\cdot x^2cosx}=\begin{bmatrix}1-cos2\alpha=2sin^2\alpha\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sinx}{x}=1\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2cosx}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}sin\frac{x}{2}}{x\cdot x\cdot cosx}=\left(\text{помножимо і чисельник і знаменник на}\,\frac{1}{4}\right)=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}sin\frac{x}{2}sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x\cdot cosx}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1;\lim_{x\to 0}cosx=1\right]=\frac{1}{2}.$$

Приклад 11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2x}{sin^23x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x}{sin^23x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x\cdot 9x^2}{sin^23x\cdot 9x^2}=\begin{bmatrix}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin^2x}{x^2}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x^2}{sin^23x}=1\end{bmatrix}=\frac{1}{9}.$$

Приклад 12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsin5x}{sin3x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{arcsin5x\cdot 15x}{sin3x\cdot 15x}=\begin{bmatrix}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arcsin5x}{5x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{sin3x}=1\end{bmatrix}=\frac{5}{3}.$$

Приклад 13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos4x-cos2x}{x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{-2sin\frac{4x+2x}{2}sin\frac{4x-2x}{2}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2sin3xsinx}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{3sin3xsinx}{3x\cdot x}=-6.$$

3.2.4 Друга важлива границя

В цьому розділі ми розглянемо границі від показниково-степеневої функції $f(x)^{\varphi(x)}$, коли $f(x) \to 1$ і $\varphi(x) \to \infty$; тобто маємо невизначеність $|1^{\infty}|$. Друга важлива границя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{kx} = |1^{\infty}| = e^{k} \quad \text{або} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{k}{x}} = |1^{\infty}| = e^{k}.$$

Число *e* – ірраціональне ($e \approx 2{,}718\ldots$), його називають експонентою. Коротко *exp*.

Приклад 14.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{4+3x}\right)^{5x-2} = \left[\begin{matrix}\dfrac{3x-1}{4+3x} \to 1, \text{коли } x \to \infty \\ 5x-2 \to \infty, \text{коли } \ x \to \infty\end{matrix}\right] = |1^{\infty}| =$$

(до основи показниково-степеневої функції додамо та віднімемо одиницю)

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1}{4+3x}-1\right)^{5x-2} =$$

(приведемо до єдиного знаменника другий та третій елементи основи)

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1-4-3x}{4+3x}\right)^{5x-2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-5)}{4+3x}\right)^{5x-2} =$$

(помножимо степінь на дріб обернену до дробу, яку додаємо до одиниці у основі функції, а потім на таку ж, яку маємо)

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-5)}{4+3x}\right)^{\frac{4+3x}{-5}\cdot\frac{(-5)}{4+3x}\cdot(5x-2)} = exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{-5(5x-2)}{4+3x}\right)$$

$$= exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{10-25x}{4+3x}\right) = exp\left(-\frac{25}{3}\right)$$

Приклад 15.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x-3}\right)^{3x+2} = |1^{\infty}| = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x-1}{4x-3}-1\right)^{3x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x-1-4x+3}{4x-3}\right)^{3x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{4x-3}\right)^{\frac{4x-3}{2}\cdot\frac{2}{4x-3}\cdot(3x+2)} = exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{4x-3}\right) = \sqrt{e^{3}}$$

Розглянемо випадок, коли коефіцієнти, які знаходяться в основі функції біля старшого степеня змінної, різні:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{kx} = \left(\frac{a}{c}\right)^{\infty}$$

У такому випадку є два рішення: 1) якщо $a > c$, то $\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty} = \infty$

2) якщо $a < c$, то $\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty} = 0.$

Приклад 16.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x-4}{9x+3}\right)^{x+2} = \left(\frac{7}{9}\right)^{\infty} = 0.$$

Приклад 17.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{2x-6}\right)^{7x} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\infty} = \infty.$$

4 ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

4.1 Похідна і диференціал функції

Поняття похідної є одним з основних математичних понять. Похідну широко використовують при розв'язанні інженерних, економічних та управлінських задач, особливо при вивченні швидкості різних процесів.

Визначення. *Похідною функції* $y = f(x)$ в точці x_0 називають границю (якщо вона існує) відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну функції $f(x)$позначають одним із символів: $f'(x), y'(x), y', \frac{dy}{dx}$

Отже,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} .$$

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням.* Функція $y = f(x)$ **,** яка має похідну в кожній точці інтервалу $(a; b)$, називається *диференційованою в цьому інтервалі*.

Значення похідної функції $y = f(x)$ в точці $x = x_0$ позначається $f'(x_0)$ або $y'(x_0)$.

Правила диференціювання

Нехай функції $u = u(x),\ v = v(x)$ – дві диференційовані в інтервалі (a, b) функції, тоді мають місце наступні правила:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;   2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{\boldsymbol{u'\cdot v - u\cdot v'}}{\boldsymbol{v^2}}$;   4. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;

5. $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot u'$.

Таблиця похідних

1. $(C)' = 0;$ 2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u';$

2а. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$ 2б. $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-1}{u^2} \cdot u';$

3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$ 3а. $(e^u)' = e^u \cdot u';$

4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$ 4а. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$ 6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

7. $(tg u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$ 8. $(ctg u)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u';$

9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$ 10. $(\arccos u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

11. $(arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$ 12. $(arcctg u)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'.$

4.1.1 Приклади знаходження похідних

Приклад1. Знайти похідні даних функцій:

а) $y = 5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30,$ б) $y = 3\sin 5x,$

в) $y = tg 3x^2,$ г) $y = \arccos\sqrt{5x^4 - 3},$ д) $y = \sqrt[5]{(5x^4 - 3x^3 + 7)^4},$

е) $y = \cos 2x^3 \cdot (5x - 2)^{12},$ ж) $y = arcctg^5 x \cdot \log_5(x^2 + 2),$ з) $y = \frac{(4x+2)^2}{e^{\sin x}}.$

Розв'язання.

а) $y = 5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30$,

дана функція є сумою степеневих функцій і сталої величини. Похідні від степеневих функцій знаходимо за другою формулою в таблиці похідних, пам'ятаючи перше правило диференціювання, похідну сталої величини шукаємо за першою формулою в таблиці:

$$y' = (5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30)' =$$
$$= 40x^7 - 100x^{24} + 15x^4 - 60x^2 + 24x + 7.$$

б) $y = 3sin5x,$

за четвертим правилом диференціювання виносимо сталу за знак похідної, потім використовуємо п'яту формулу з таблиці похідних, де $u = 5x$

$$y' = (3sin5x\ )' = 3 \cdot (sin5x)' = 3 \cdot cos5x \cdot (5x)' = 3 \cdot cos5x \cdot 5 = 15cos5x;$$

в) $y = tg3x^2$, $\quad y' = (tg3x^2\ )' = \frac{1}{cos^2 3x^2} \cdot (3x^2)' = \frac{1}{cos^2 3x^2} \cdot 6x = \frac{6x}{cos^2 3x^2}$;

у цьому випадку знаходили похідну, користуючись сьомою формулою таблиці похідних, де $u = 3x^2$;

г) $y = arccos\sqrt{5x^4 - 3}$,

використовуючи десяту формулу таблиці похідних, де $u = \sqrt{5x^4 - 3}$. В свою чергу $u = u(v)$, де $v = 5x^4 - 3$. Отже, знаходимо:

$$y' = \left(arccos\sqrt{5x^4 - 3}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{5x^4 - 3}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{5x^4 - 3}\right)' =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{4 - 5x^4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x^4 - 3}} \cdot (5x^4 - 3)' = \frac{-10x^3}{\sqrt{4 - 5x^4} \cdot \sqrt{5x^4 - 3}}.$$

д) $y = \sqrt[5]{(5x^4 - 3x^3 + 7)^4}$ $\left(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}\right)$

запишемо функцію в інший спосіб та використаємо другу формулу таблиці похідних:

$$y' = \left(\sqrt[5]{(5x^4 - 3x^3 + 7)^4}\right)' = \frac{4}{5} \cdot (5x^4 - 3x^3 + 7)^{-\frac{1}{5}} \cdot (5x^4 - 3x^3 + 7)' =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot (5x^4 - 3x^3 + 7)^{-\frac{1}{5}} \cdot (20x^3 - 9x^2) = \frac{80x^3 - 36x^2}{5\sqrt[5]{5x^4 - 3x^3 + 7}}.$$

е) $y = cos2x^3 \cdot (5x - 2)^{12}$,

спочатку розкладемо похідну за другим правилом диференціювання, потім використаємо формули з таблиці похідних:

$$y' = (cos2x^3)' \cdot (5x - 2)^{12} + cos2x^3 \cdot ((5x - 2)^{12})' =$$

$$= -sin2x^3 \cdot (2x^3)' \cdot (5x - 2)^{12} + cos2x^3 \cdot 12(5x - 2)^{11} \cdot (5x - 2)' =$$

$$= -6x^2 sin2x^3 \cdot (5x - 2)^{12} + 60cos2x^3 \cdot (5x - 2)^{11}.$$

ж) $y = arcctg^5 x \cdot log_5(x^2 + 2)$,

знаходимо похідну також, як у прикладі е) :

$$y' = (arcctg^5 x)' \cdot log_5(x^2 + 2) + arcctg^5 x \cdot \left(log_5(x^2 + 2)\right)' =$$

$$= 5arcctg^4 x (arcctgx)' log_5(x^2 + 2) + arcctg^5 x \frac{1}{(x^2 + 2)ln5}(x^2 + 2)' =$$

$$= \frac{-5arcctg^4 x \cdot log_5(x^2 + 2)}{1 + x^2} + \frac{2x \cdot arcctg^5 x}{(x^2 + 5)ln5}.$$

з) $y = \frac{(4x + 2)^2}{e^{sinx}}$,

в цьому прикладі спочатку використовуємо третє правило диференціювання, потім – формули з таблиці похідних:

$$y' = \frac{((4x + 2)^2)' \cdot e^{sinx} - (4x + 2)^2 \cdot \left(e^{sinx}\right)'}{(e^{sinx})^2} =$$

$$= \frac{2(4x + 2)(4x + 2)' e^{sinx} - (4x + 2)^2 e^{sinx}(sinx)'}{e^{2sinx}} =$$

$$= \frac{e^{sinx}(8(4x + 2) - (4x + 2)^2 cosx)}{e^{2sinx}} = \frac{(4x + 2)(8 - (4x + 2)cosx)}{e^{sinx}}$$

4.1.2 Похідна функції, заданої у параметричній формі

Нехай функцію задано у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервні і диференційовані, коли параметр $t\epsilon(\alpha;\beta)$. Нехай функція $x = \varphi(t)$ має обернену $t = t(x)$, яка також диференційована (це означає, що у деякій точці $t_0\epsilon(\alpha;\beta)$ похідна $x_t' \neq 0$), тоді має місце формула

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}. \qquad (*)$$

Приклад 2. Знайти y_x', якщо $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$.

Розв'язання. Знаходимо $x_t' = (1 - t^2)' = -2t$ і $y_t' = (t - t^3)' =$

$= 1 - 3t^2$. Підставляючи знайдені вирази для x_t' і y_t' до формули $(*)$, дістанемо

$$y_x' = \frac{1 - 3t^2}{-2t} = \frac{3t^2 - 1}{2t}.$$

Приклад 3. Знайти y_x', якщо $\begin{cases} x = ln(1 + t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$.

Розв'язання. Маємо

$$x_t' = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad y_t' = 1 - \frac{1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

Підставляючи знайдені вирази для x_t' і y_t' до формули $(*)$, дістанемо:

$$y_x' = \frac{\frac{t^2}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2}} = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2}.$$

Приклад 4. Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = e^t cost \\ y = e^t sint \end{cases}$.

Розв'язання. Знаходмио x'_t і y'_t :

$$x'_t = e^t cost - e^t sint = e^t(cost - sint);$$

$$y'_t = e^t sint + e^t cost = e^t(sint + cost).$$

$$y'_x = \frac{sint + cost}{cost - sint}.$$

4.1.3 Похідна неявно заданої функції

Якщо функція задана рівнянням $F(x, y) = 0$ (неявно), то для знаходження похідної від y по x необхідно: продиференціювати рівняння за x, вважаючи, що y є функцією від x (тобто $(x)' = 1$, $(y)' = y'$); отримане рівняння слід розв'язати відносно y'.

Приклад 5. Знайти y'_x, якщо $y^2 - 3x^5 + 8x^2y^3 - 10 = 0$.

Розв'язання. Диференціюємо функцію по x, вважаючи, що y є функцією від x:

$$2yy' - 15x^4 + 16xy^3 + 24x^2y^2y' = 0.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно y':

$$2yy' + 24x^2y^2y' = 15x^4 - 16xy^3, \qquad y'(2y + 24x^2y^2) = 15x^4 - 16xy^3,$$

$$y' = \frac{15x^4 - 16xy^3}{2y + 24x^2y^2}.$$

Приклад 6. Знайти y'_x, якщо $sin2x + cos3y = sin^2y + 1$.

Розв'язання. Диференцюємо функцію по x, вважаючи, що y є функцією від x:

$$2cos2x - 3sin3y \cdot y' - 2siny \cdot cosy \cdot y' = 0.$$

Розв’яжемо рівняння відносно y':

$$y' \cdot (3sin3y + 2siny \cdot cosy) = 2cos2x,$$

$$y' = \frac{2cos2x}{3sin3y + 2siny \cdot cosy}.$$

4.1.4 Логарифмічне диференціювання

Якщо функція $y = f(x)$ являє собою добуток кількох множників, то перш ніж диференціювати її, можна прологарифмувати цю функцію.

Приклад 7. Знайти y', якщо $y = \sqrt[5]{sinx} \cdot arctg^2 x \cdot \sqrt[4]{cosx}$.

Розв’язання. Прологарифмуємо обидві частини даного рівняння:

$$lny = ln\left(\sqrt[5]{sinx} \cdot arctg^2 x \cdot \sqrt[4]{cosx}\right),$$

$$lny = \frac{1}{5} lnsinx + 2lnarctgx + \frac{1}{4} lncosx,$$

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності, пам’ятаючи, що $(x)' = 1$, $(y)' = y'$:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{5} \cdot \frac{cosx}{sinx} + \frac{2}{arctgx} \cdot \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{-sinx}{cosx},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx \cdot (1 + x^2)} - \frac{tgx}{4},$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx \cdot (1 + x^2)} - \frac{tgx}{4}\right),$$

$$y' = \sqrt[5]{sinx} \cdot arctg^2 x \cdot \sqrt[4]{cosx} \cdot \left(\frac{ctgx}{5} + \frac{2}{arctgx \cdot (1 + x^2)} - \frac{tgx}{4}\right).$$

Похідна показниково-степеневої функції.

Функція $y = (u(x))^{v(x)}$ називається *показниково-степеневою* функцією. Похідна від неї знаходиться за допомогою логарифмічного диференціювання.

Приклад 8. Знайти y′, якщо $y = (x^2+1)^{sinx}$.

Розв'язання. Прологарифмуємо задану функцію:

$$lny = ln(x^2+1)^{sinx}, \qquad lny = sinx \cdot ln(x^2+1) \quad ,$$

Диференціюємо обидві частини останнього рівняння:

$$\frac{y'}{y} = cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + sinx \cdot \frac{2x}{x^2+1}.$$

Знаходимо y': $$y' = y \cdot \left(cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + sinx \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right).$$

На місце y записуємо вихідну функцію:

$$y' = (x^2+1)^{sinx} \cdot \left(cosx \cdot ln(x^2+1) \quad + sinx \cdot \frac{2x}{x^2+1}\right).$$

Приклад 9. Знайти y′, якщо $y = (arctg\sqrt{x})^{ln(2x+1)}$.

Розв'язання.

$$lny = ln(arctg\sqrt{x})^{ln(2x+1)}, \qquad lny = ln(2x+1) \cdot ln(arctg\sqrt{x}) \quad ,$$

$$\frac{y'}{y} = (ln(2x+1))' \cdot lnarctg\sqrt{x} + ln(2x+1) \cdot \left(lnarctg\sqrt{x}\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{(2x+1)'}{2x+1} \cdot lnarctg\sqrt{x} + ln(2x+1) \cdot \frac{\left(arctg\sqrt{x}\right)'}{arctg\sqrt{x}},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{2x+1} \cdot lnarctg\sqrt{x} + ln(2x+1) \cdot \frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{(1+x) \cdot arctg\sqrt{x}} \; ,$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2ln arctg\sqrt{x}}{2x+1} + \frac{ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x)\cdot arctg\sqrt{x}},$$

$$y' = y\cdot\left(\frac{2ln arctg\sqrt{x}}{2x+1} + \frac{ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x)\cdot arctg\sqrt{x}}\right),$$

$$y' = (arctg\sqrt{x})^{ln(2x+1)}\cdot\left(\frac{2ln arctg\sqrt{x}}{2x+1} + \frac{ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x)\cdot arctg\sqrt{x}}\right).$$

4.1.5 Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована у проміжку $(a; b)$. Похідна цієї функції f'(х) є функцією аргументу x . Якщо функція $f'(x)$ диференційована у цьому ж проміжку, то її похідна називається *похідною другого порядку* і позначається f''(х) (або y'', $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$). Таким чином, $y'' = (y')'$.

Похідна від похідної другого порядку, якщо вона існує, називається *похідною третього порядку* і позначається $f'''(x)$ (або y''', $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$). Таким чином, $y''' = (y'')'$.

Похідною n – го порядку (або n- ю похідною, якщо вона існує) називається похідна від похідної $(n – 1)$ порядку:

Таким чином, $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

Похідні, порядок яких вище першого, називають *похідними вищих порядків.*

Приклад 10. Знайти y''', якщо $y = 2e^{3x}$.

Розв'язання. $y' = 6\cdot e^{3x}$; $y'' = (6\cdot e^{3x})' = 18\cdot e^{3x}$;

$$y''' = (18 \cdot e^{3x})' = 54 \cdot e^{3x}.$$

Приклад 11. Знайти y''' в точці $x_0 = 1$, якщо $y = 7x^5 - 3x^3 + 8x - 4$.

Розв'язання. $y' = 35x^4 - 9x^2 + 8$, $y'' = 140x^3 - 18x$,

$$y''' = 520x^2 - 18,\ y'''(1) = 520 - 18 = 502\ .$$

4.1.6 Правило Лопіталя

(розкриття невизначеностей виду $\left|\frac{0}{0}\right|$ та $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$)

Теорема (Правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні і диференційовні в околі точки $x_0 = a$, тобто $0 < |x - a| < \varepsilon$, причому $\varphi'(x) \neq 0$, тоді якщо існує скінчена або нескінчена границя відношення похідних $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ при $x \to a$, то відношення функцій має ту ж саму границю, тобто:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left|\frac{0}{0}\right| \text{ або } \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження 1. Твердження теореми залишається в силі, якщо $a = \infty$, тобто: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left|\frac{0}{0}\right|$ або $\left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Зауваження 2. Існування границі відношення похідних гарантує існування границі відношення функцій. Обернене твердження невірно, оскільки границя відношення функцій може існувати при відсутності границі відношення похідних.

Зауваження 3. Якщо похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ будуть відповідати сформульованій теоремі, то можна брати границю відношень других похідних і т.д.. Тобто, правило Лопіталя можна застосовувати послідовно декілька разів.

Зауваження 4. Інші невизначенності треба тотожнє перетворювати до розглянутих: $\left|\frac{0}{0}\right|$ або $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$, щоб застосувати правило Лопіталя.

Приклад 12. Знайти границі функцій:

Розв'язання. $a)$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(5+3x)}{2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3}{5+3x}}{2} = \frac{3}{10}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{5x}}{x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5e^{5x}}{2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{25e^{5x}}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$;

(Застосували правило Лопіталя двічі)

в) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot lnx = |0\cdot\infty| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{lnx}{1/_{x^2}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1/_x}{-2/_{x^3}} = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0$;

(Виконали тотожнє перетворення $|0\cdot\infty|$ до $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$)

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg2x}{8x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2/_{1+4x^2}}{8} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{4(1+4x^2)} = \frac{1}{4}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1} lnx\cdot ln(x-1) = |0\cdot\infty| = \lim\limits_{x\to 1}\frac{ln(x-1)}{1/_{lnx}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to 1}\frac{1/_{x-1}}{-1/_{x\cdot(lnx)^2}} =$

$$-\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot(lnx)^2}{x-1} = \left|\frac{0}{0}\right| = -\lim_{x\to 1}\frac{(lnx)^2 + \frac{2xlnx}{x}}{1} = 0 \text{ ;}$$

(Виконали тотожнє перетворення і застосували правило Лопіталя двічі)

е) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi - 2arctgx)\cdot lnx = |0\cdot\infty| = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{1/_{lnx}} = \left|\frac{0}{0}\right| =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{1+x^2}}{\frac{-1}{x(lnx)^2}} == \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{2x(lnx)^2}{1+x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2(lnx)^2 + 4lnx}{2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4lnx}{x} + \frac{4}{x}}{2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2(lnx+1)}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 2\lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

(Виконали тотожнє перетворення і застосували правило Лопіталя 4 рази)

ж) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = |\infty - \infty| = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} =$

$$= \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x(2+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}.$$

(Виконали тотожнє перетворення і застосували правило Лопіталя двічі)

Приклад 13. Знайти границі функцій:

Розв'язання. а) $\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = |0^0| = A$,

функція є показниково-степеневою, тому позначимо границю функції як A , та прологарифмуємо її:

$$lnA = ln\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = \lim_{x\to 0} ln(arcsinx)^{tgx} =$$

$$= \lim_{x\to 0} tgx \cdot lnarcsinx = \lim_{x\to 0} \frac{lnarcsinx}{ctgx} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

Отримали границю відношення функцій, до якої можна застосувати правило Лопіталя. Після його застосування маємо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(lnarcsinx)'}{(ctgx)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-sin^2x}{\sqrt{1-x^2}\cdot arcsinx} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}\cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Далі скористалися еквеквівалентністю нескінченно мали.

Отже, $lnA = 0$ і тоді $A = e^0 = 1$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = |\infty^0| = A,$

$$lnA = ln\lim_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0}ln(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{lnx}\cdot lnctgx =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{lnctgx}{lnx} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{sin^2x\cdot ctgx}}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{sin^2x\cdot ctgx} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x}{sin^2x\cdot\frac{cosx}{sinx}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx\cdot cosx} = -\lim_{x\to 0}\frac{x}{sinx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cosx} = -1,$$

отримали $\ln A = -1$, тоді $A = e^{-1}$.

4.2 Дослідження функції за допомогою похідної

Визначимо загальні правила дослідження функції, які дозволять зробити ескіз графіка функції.

4.2.1 Зростання і спадання функції

Теорема. Для того, щоб диференційована на проміжку $(a;b)$ функція $f(x)$ зростала (спадала) на цьому проміжку, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) > 0 (f'(x) < 0)$ при будь – якому $x \in (a;b)$.

Приклад 14. Знайти проміжки зростання і спадання функції

$$y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}.$$

Розв'язання. Знайдемо область визначення функції: $x \neq 4$, тобто $D(y) = (-\infty;4) \cup (4;+\infty)$. Знайдемо похідну цієї функції:

$$y' = \frac{(2x-4)(x-4) - (x^2 - 4x + 1)}{(x-4)^2} = \frac{2x^2 - 8x - 4x + 16 - x^2 + 4x - 1}{(x-4)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 8x + 15}{(x-4)^2} = \frac{(x-5)(x-3)}{(x-4)^2}; y' = 0; \frac{(x-5)(x-3)}{(x-4)^2} = 0.$$

Знаходимо корені похідної: $x = 5$ і $x = 3$. На Рис. 4 зображено інтервали зростання і спадання даної функції.

Знак y':

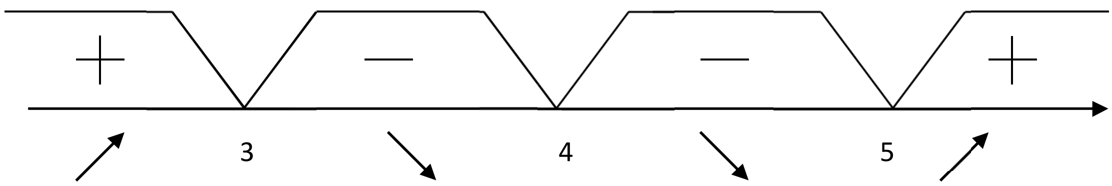


Рисунок 4

Зробимо висновок, що функція зростає при $x \epsilon (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$,

функція спадає при $x \epsilon (3; 4) \cup (4; 5)$.

4.2.2 Максимум і мінімум функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і її околі. Точка x_0 називається *точкою максимуму (мінімуму) функції* $f(x)$, якщо значення функції у точці x_0 більше (менше) за її значення в усіх точках деякого околу точки x_0 : $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ $\big($або $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)\big)$, коли $\Delta x > 0$ або $\Delta x < 0$.

Максимум і мінімум функції називають *екстремумами* або *екстремальними значеннями функції.*

Теорема (необхідна умова існування екстремуму). Якщо диференційована функція $f(x)$ має у точці x_0 максимум або мінімум, то необхідно,щоб її похідна в цій точці дорівнювала нулю або не існувала.

Геометрично рівність $f'(x_0) = 0$ означає, що в точці екстремуму функції $f(x)$ дотична до її графіка паралельна осі *Ox*, а якщо $f'(x_0) = \infty$, то дотична паралельна осі Oy.

Зауважимо, що умова $f'(x_0) = 0$ не є достатньою умовою існування екстремуму. Наприклад, для функції $y = x^3$ її похідна $y' = 3x^2$ дорівнює нулю при $x = 0$, але $x = 0$ не є точкою екстремуму.

Існують функції, які в точках екстремуму не мають похідної. Наприклад, неперервна функція $y = |x|$ в точці $x = 0$ похідної не має, але ця точка є точкою мінімуму.

Значення аргументу, при яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними.*

Теорема (достатня умова існування екстремуму). Якщо при переході (зліва направо) через критичну точку x_0 диференційованої в деякому околі цієї точки функції $f(x)$ її похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, то x_0 – є точкою максимуму; якщо з мінуса на плюс, то x_0 – є точкою мінімуму.

Приклад 15. Знайти критичні точки та проміжки зростання і спадання функції: $y = x^3 - 3x$.

Розв'язання. Нагадуємо, що будь – яке дослідження функції необхідно розпочинати з находження її області визначення. Тут $D(y) = R$.

Похідна цієї функції: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$; $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$.

При переході через точку $x_0 = -1$ похідна функції змінює знак з «+» на «$-$», тобто в точці $x_0 = -1$ знаходиться максимум функції. При переході через точку $x_0 = 1$ похідна функції змінює знак з «$-$» на «+», в точці $x_0 = 1$ знаходиться мінімум функції.

Отже, функція $y = x^3 - 3x$ зростає на проміжках $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-1; 1)$. Максимум її знаходиться в точці $x_0 = -1$, мінімум-в точці $x_0 = 1$.

4.2.3 Опуклість графіка функції. Точки перегину

Нехай функція $f(x)$ диференційована на проміжку $(a; b)$.

Графік функції $f(x)$ називається *опуклим (угнутим)* на проміжку $(a; b)$, якщо усі точки кривої $f(x)$ розташовані нижче (вище) точок дотичної, проведеної у будь – якій точці графіка на цьому проміжку.

Часто опуклі і угнуті функції називають *опуклими вгору і опуклими вниз* відповідно.

Точку графіка функції $f(x)$, у якій змінюється напрямок опуклості, називають *точкою перегину.*

У подальшому вважаємо, що функція $f(x)$ має другу похідну на проміжку $(a; b)$.

Теорема (достатня умова опуклості графіка функції). Якщо друга похідна функції $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ в усіх точках проміжку $(a; b)$, то графік функції опуклий вгору (опуклий вниз) на цьому проміжку.

Теорема (достатня умова існування точок перегину).Якщо друга похідна $f''(x)$ при переході через точку x_0, в якій вона дорівнює нулю або не існує, змінює знак, то ця точка є точкою перегину.

Приклад 16. Дослідити функцію $y = x^5 - 2x + 5$ на опуклість і знайти точки перегину.

Розв'язання. Область визначення $D(y) = R$. Знайдемо першу і другу похідні даної функції: $y' = 5x^4 - 2$, $y'' = 20x^3$. Друга похідна дорівнює нулю $y'' = 0$ при $x = 0$. Тому $y'' > 0$ при $x > 0$; $y'' < 0$ при $x < 0$.

Отже, графік функції $y = x^5 - 2x + 5$ є опуклим вгору на проміжку $(-\infty; 0)$ і опуклим вниз на проміжку $(0; \infty)$. Точка (0; 5) є точкою перегину.

4.2.4 Асимптоти графіка функції

Асимптоти дозволяють створити уявлення про поведінку графіка функції при віддалені його точок на нескінченність

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називають пряму, відстань до якої від точки, яка лежить на кривій, прямує нуля, якщо ця точка рухається вздовж графіка функції до нескінченності.

Асимптоти поділяють на два види: вертикальні й похилі (зокрема, горизонтальні).

Пряма $x = a$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Рівняння *похилої асимптоти* будемо шукати у вигляді

$$y = kx + b,$$

$$\text{де} \quad k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx).$$

Таким чином, якщо існує похила асимптота $y = kx + b$, то k і b знаходять за отриманими формулами. І навпаки: якщо існують скінченні границі в формулах для k і b, то пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою.

Зокрема, якщо $k = 0$, то $b = \lim_{x \to \infty} f(x)$. Тому $y = b$ – рівняння *горизонтальної асимптоти*.

Зауваження. Асимптоти графіка функції можуть бути різними при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$.

Якщо хоча б одна з границь при знаходженні k і b не існує або дорівнює ∞, то похилих асимптот немає.

Приклад 17. Знайти асимптоти графіка функцій $y = \frac{x^3}{x^2-1}$.

Розв'язання. Область визначення $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Шукаємо вертикальні асимптоти графіка функції :

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0} = -\infty ; \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0} = \infty ;$$

тому $x = -1$ і $x = 1$ є вертикальними асимптотами.

Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 1 ,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2-1} == 0.$$

Підставляючи $k = 1$ і $b = 0$ в рівняння $y = kx + b$, отримаємо: y = x, це шукана похила асимптота.

4.2.5 Дослідження функції в цілому

При дослідженні графіка функції в цілому, рекомендується, наприклад, загальна схема, за яко. Слід:

1. знайти область визначення функції, її точки розриву й проміжки неперервності;
2. дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;
3. знайти точки перетину графіка фунції з осями координат;
4. дослідити поведінку функції на нескінченності;
5. знайти інтервали монотонності та екстремуми функції;
6. знайти інтервали опуклості (угнутості) та точки перегину функції;
7. знайти асимптоти графіка функції;
8. побудувати ескіз графіка функції.

Порядок дослідження доцільно обирати згідно з особливостями даної функції.

Приклад 18. Дослідити функцію $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ та побудувати ескіз її графіка.

1. Область визначення: $x \neq \pm 1$; тобто

$$D(y) \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty).$$

Прямі $x = \pm 1$ служать вертикальними асимптотами, тому що

$$\lim_{x \to -1 \pm 0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty; \quad \lim_{x \to 1 \pm 0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty.$$

2. Обчислимо $y(-x) = \dfrac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \dfrac{1+x^2}{1-x^2} = y(x)$, тобто виконується рівність $y(-x) = y(x)$, одже, функція парна і її графік симетричний відносно осі Oy.

3. Точка перетину з віссю Oy: $x = 0; y(0) = \frac{1+0^2}{1-0^2} = 1$. Маємо точку *A(0;1).* Точок перетину з віссю Ox нема. При $y = 0$, рівняння $\frac{1+x^2}{1-x^2} = 0$ не має рішень.

4. Обчислюємо: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$, тобто пряма $y = -1$ служить горизонтальною асимптотою.

Знайдемо похилі асимптоти, які визначаються рівнянням

$$y = kx + b.$$

Знайдемо параметри k та b:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1+x^2}{x(1-x^2)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{1-3x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{-6x} = 0$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$$

Таким чином, отримали горизонтальну асимптототу: $y = -1$.

5. Інтервали монотонності та екстремуми.

Знайдемо $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2};$$

$y'(x) = 0$, якщо $x = 0$ та $y'(x)$ не існує, якщо $x = \pm 1$ тобто критичною є тільки точка $x = 0$, оскільки точки $x = \pm 1$ не належать області визначення функції.

Поведінку функції на інтервалах монотонності згідно знаку похідної показано на рис. 5.

Визначимо знак $y'(x)$:

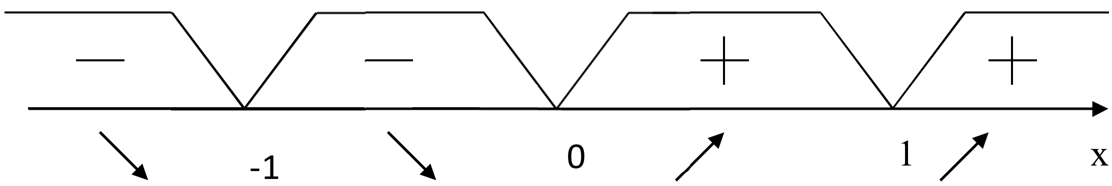


Рисунок 5

На інтервалах $(-\infty, -1)$ та $(-1,\ 0)$ функція спадає, оскільки тут $y'(x) < 0$.

На інтервалах $(\ 0, 1)$ та $(1, \infty)$ функція зростає, оскільки тут $y'(x) > 0$.

Зміна знаку похідної при переході через точку $x = 0$, вказує на те, що точка $B(0;1)$ є точкою екстремуму. Це точка мінімуму функції: $y_{min} = y(0) = 1$.

6. Інтервали опуклості і угнутості та точки перегину графіка функції.

Знайдемо другу похідну даної функції:

$$y''(x) = \left(y'(x)\right)' = \left(\frac{4x}{(1-x^2)^2}\right)' =$$

$$= \frac{4(1-x^2)^2 - 4x \cdot 2 \cdot (1-x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

Знак другої похідної і характер графіка функції на відповідних інтервалах приведені на рис. 6.

Визначимо знак $y''(x)$:

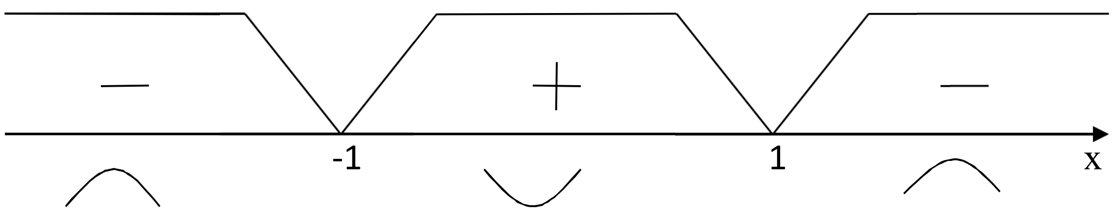


Рисунок 6

На інтервалах $(-\infty, -1)$ та $(1, \infty)$ графік функції опуклий, тому що тут $y''(x) < 0$. На інтервалі $(-1, 1)$ графік функції угнутий, тому що тут $y''(x) > 0$. Точок перегину немає.

7. Асимптоти графіка функції знайдені у п.1 і п.4.

8. Побудуємо ескіз графіка, використовуючи отриману вище інформацію (рис. 7) функції:

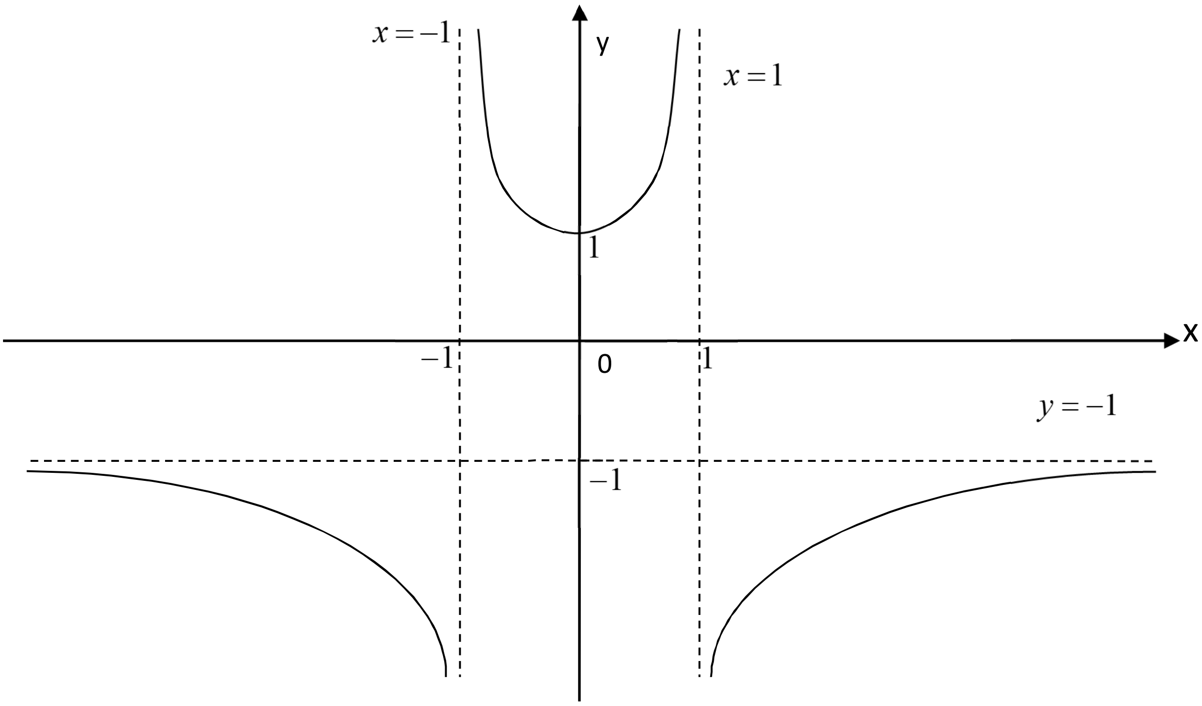


Рисунок 7

Приклад 19. Дослідити функцію $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Область визначення: $x \in R$, $D(y) = (-\infty;+\infty)$. Вертикальних асимптот функція не має.

2. Функція загального вигляду, тому що $y(-x) \neq \pm y(x)$.

3. Точки перетину з осями координат:

з віссю Oy: $x = 0$ $y(0) = \sqrt[3]{0^3 - 20^2 = 0}$, тобто *A(0;0)* - точка перетину з Oy.

з віссю Ox: $y = 0$, рівняння $\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} = 0$ має рішення $x = 0$ та $x = 2$, тобто *A(0;0)* та *B(2;0)* – точки перетину з Ox.

4. Поведінка функції на нескінченності

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} = \pm\infty.$$

5. Для дослідження функції на монотонність та екстремуми знайдемо $y'(x)$:

$$y'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 2x^2)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 - 4x) = \frac{3x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2}} = \frac{3x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{x(x-2)^2}}.$$

$$y'(x) = 0,\ x = \frac{4}{3},\ y'(x) \text{ не існує, якщо } x = 0 \text{ та } x = 2.$$

Критичні точки першого порядку $x = 0, x = \frac{4}{3}$ та $x = 2$. Знак похідної і поведінка функції на відповідних інтервалах представлені на рис. 8.

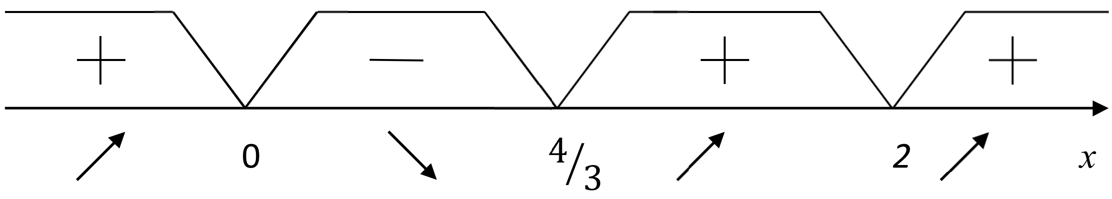


Рисунок 8

Точка $x = 2$ не є точкою екстремуму, оскільки $y'(x)$ не змінює знак під час переходу через неї.

На інтервалі $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ функція спадає, оскільки тут $y'(x) < 0$.

На інтервалах $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ функція зростає, оскільки тут $y'(x) > 0$.

$$y_{min} = y\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3} \cong -1{,}058,$$

тобто C$\left(\frac{4}{3}, -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ – точка мінімуму.

$$y_{max} = y(0) = 0,$$

тобто G (0;0) – точка максимуму.

6. Для дослідження функції на опуклість та угнутість та на наявність точок перегину знайдемо $y''(x)$:

$$y''(x) = \left(\frac{3x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(6x - 4)\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2} - (3x^2 - 4x) \cdot \frac{2(3x^2 - 4x)}{3\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}}{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^4}} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{-\frac{8}{3}x^2}{\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^5}} = -\frac{8}{9}\cdot\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^5}}.$$

Знак другої похідної і характер графіка функції на відповідних інтервалах приведені на рис. 9.

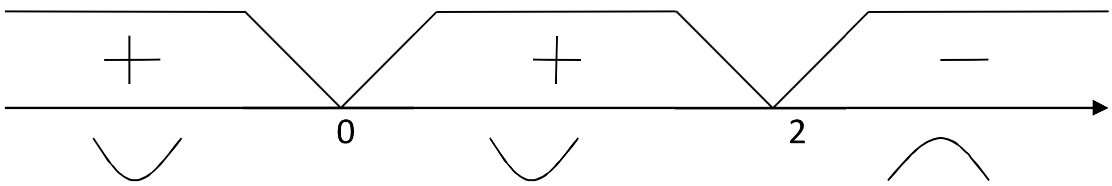


Рисунок 9

На інтервалах $(-\infty, 0) \cup (0, 2)$ графік функції угнутий, оскільки тут $y''(x) > 0$.

На інтервалі $(2, \infty)$ графік функції опуклий, оскільки тут $y''(x) < 0$.

Під час переходу через точку $x = 2$ друга похідна змінює знак, отже, це точка перегину графіка функції.

7. Знайдемо похилі асимптоти, які визначаються рівнянням $y = kx + b$. Знайдемо параметри *к* та *b*.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\cdot\sqrt[3]{1-\frac{2x^2}{x^3}}}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}} - 1\right) =$$

$$= |\infty\cdot 0| = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}}-1\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{3}.$$

Таким чином, отримали рівняння похилої асимптоти:

$$y = x = -\frac{2}{3} \text{ або } 3y - 3x + 2 = 0.$$

Вертикальних асимптот графік функції не має, оскільки $D(y) = (-\infty;+\infty)$.

8. Будуємо ескіз графіка функції за отриманою інформацією (рис. 10).

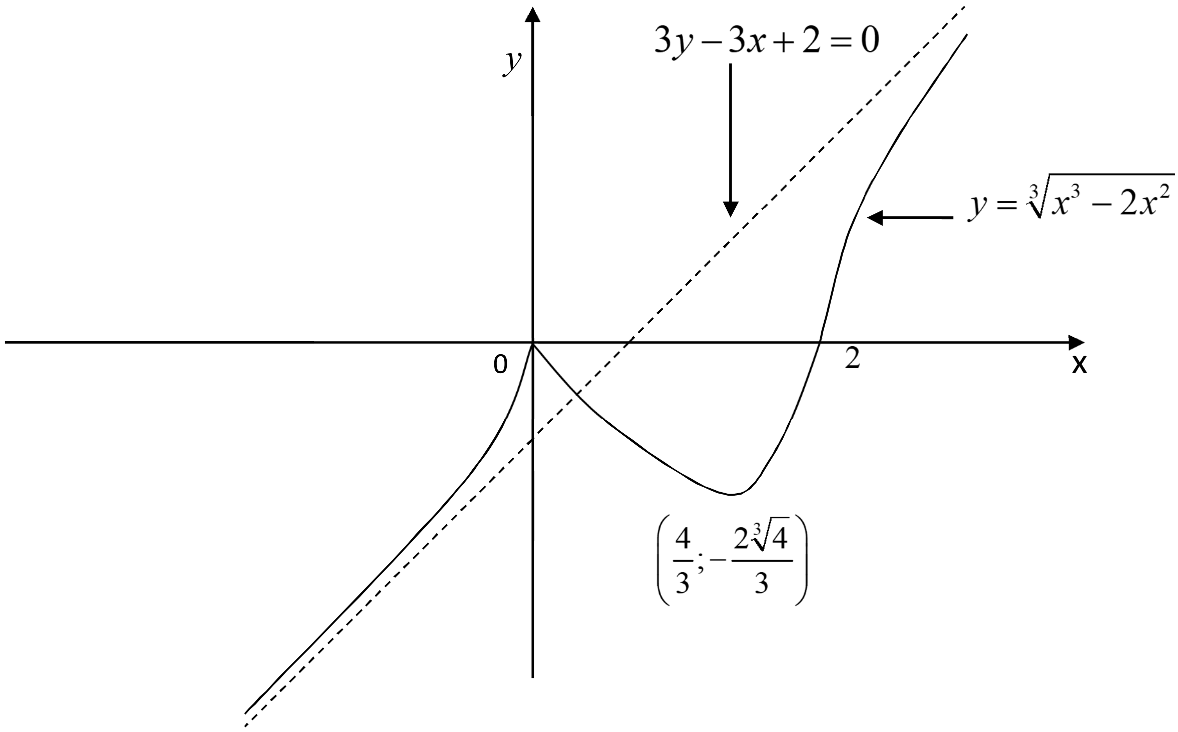


Рисунок 10

Список рекомендованої літератури

1. Вороновська Л. П. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» Модуль 1 для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 275 – Транспортні технології, освітньої програми – Транспортні технології (міський транспорт) / Л. П. Вороновська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова, 2019. – 113с.

2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – СПб. : Профессия, 2001. – 432 с.

3. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2006. – 736 с.

4. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн. / За ред. Г.Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003. – Кн. 1 : Основні розділи. – 400 с. – Кн. 2 – Спеціальні розділи. – 368 с.

5. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : АСТ, 2014. – Ч.1 – 303 с., Ч.2 – 415 с.

6. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2003. – 648 с.

7. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометри / Н. В. Ефимов. – М. : Физматлит, 2005. – 240 с.

8. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 1 / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський – Харків : ХНУМГ, 2015. – 255 с.

9. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецьк : Сталкер, 2003. – 495 с.

10. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 2011. Т.1. − 430 с. Т.2. − 580 с.

11. Розендорн Э. Р. Теория поверхностей / Э. Р. Розендорн. – М. : Физматлит, 2006. – 304 с.

12. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005.–270 с.

Виробничо-практичне видання

Методичні рекомендації
до організації самостійної роботи і проведення практичних занять
з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

(*для студентів 1 курсу денної форми навчання спеціальності
275 – Транспортні технології (за видами))*
Частина 1

Укладач: **ВОРОНОВСЬКА** Лариса Петрівна

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *Л. П. Вороновська*

План 2019, поз. 138М

Підп. до друку 06.03.2020. Формат 60×84/16.
Друк на ризографі. Ум. друк арк. 3,4.
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.