МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

Л. П. Вороновська

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Модуль 1

(для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 275 – Транспортні технології, освітньої програми – Транспортні технології (міський транспорт))

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2020

Вороновська Л. П. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» Модуль 1 для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 275 – Транспортні технології, освітньої програми – Транспортні технології (міський транспорт) / Л. П. Вороновська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова, 2020. – 114 с.

Автор канд. пед. наук Л. П. Вороновська

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доц. Л. Б. Коваленко

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 5 від 25.11.2019 р.

Конспект лекцій складено з метою допомогти студентам транспортних спеціальностей вишів під час підготовки до занять та іспитів з вищої математики.

Зміст

Вступ

Конспект лекцій побудований за модульною технологією навчання згідно з робочими програмами курсу «Вища математика» для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання 275 – Транспортні технології, освітньої програми – Транспортні технології (міський транспорт).

До конспекту увійшли лекції за темами «Лінійна та векторна алгебра», «Аналітична геометрія на площині та у просторі», «Теорія границь» та «Диференціювання функцій однієї змінної».

Доступне, коротке подання теоретичного матеріалу супроводжується детальними ілюстраціями, великою кількістю прикладів для практичного закріплення вивченого.

Лекція 1

Матриці та дії над ними. Визначники і їх властивості

1.1 Матриці (основні поняття)

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел, що складається з m рядків та n стовпців. Матриця записується у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

або, скорочено, $A = (a_{ij})$, де $i = \overline{1,m}$ – номер рядка, $j = \overline{1,n}$ – номер стовпця.

Матрицю A називають матрицею розміру $m \times n$ і записують $A_{m\times n}$. Числа a_{ij} називаються її ***елементами.***

Матриці A і B *рівні між собою*, якщо рівні всі відповідні елементи матриць, тобто $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$.

Матриця, у якої число рядків дорівнює числу стовпців $m = n$, називається ***квадратною n-го порядку.*** Елементи, в яких $i = j$ $(a_{11}, a_{22}, \dots)$, утворюють ***головну діагональ*** матриці.

Квадратна матриця, в якій всі елементи, окрім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***діагональною.***

Діагональна матриця, в якій кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається ***одиничною*** і позначається E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця, у якої всі елементи, що знаходяться вище (нижче) головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***нижнє трикутною (верхнє трикутною) або східчастою.***

Матриця, всі елемент якої дорівнюють нулю, називається ***нульовою*** і позначається O.

Матриця, яка складається тільки з одного рядка $m = 1$, називається *вектором-рядком*

$$B = (b_1 \;\; b_2 \;\; \dots \;\; b_n).$$

Матриця, яка складається тільки з одного стовпця $n = 1$, називається ***вектором-стовпцем***

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Матриця, отримана із даної шляхом заміни кожного рядка стовпцем з тим же номером, називається матрицею ***транспонованою*** до даної і позначається A^T.

Приклад. Знайти A^T для матриці A.

Розв'язання: Якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2 Операції над матрицями

Додавання

Операція додавання матриць вводиться тільки для матриць однакових розмірів. Сумою двох матриць $A_{m\times n} = (a_{ij})$ і $B_{m\times n} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times n} = (c_{ij})$ така, що $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$.

Приклад.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 8 & -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 9 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно виконується віднімання матриць.

Множення на число

Добутком матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на число k називається матриця $B_{m\times n} = (b_{ij})$ така, що $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$.

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, k = 2, \qquad 2A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 6 & 2 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Властивості лінійних дій над матрицями:

1. $A + B = B + A$;
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$;
3. $A+O=A$;
4. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$;
5. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$;
6. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$.

Елементарні перетворення матриць:

- перестановка місцями двох рядків матриці;
- множення всіх елементів ряду матриці на число, відмінне від нуля;
- додавання до всіх елементів ряду матриці відповідних елементів іншого ряду, помноженого на число.

Дві матриці A і B називаються ***еквівалентними***, якщо одна з них отримується з іншої за допомогою елементарних перетворень. Записується $A \sim B$.

Множення матриць

Операція добутку двох матриць може бути виконана тільки тоді коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

Добутком матриці $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)$ *на матрицю* $B_{n\times p} = \left(b_{jk}\right)$ називається матриця $C_{m\times p} = (c_{ik})$ така, що

$$c_{ik} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + \cdots + a_{in}\cdot b_{nk}\text{, де } i = \overline{1,m},\ k = \overline{1,p}.$$

Приклад. Знайти добуток матриць:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Якщо матриці A і B квадратні одного розміру, то існує добуток AB і BA, причому $AB \neq BA$.

Властивості добутку матриць:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$;
3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$.

Властивості операції транспонування:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
2. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

1.3 Визначники та їх властивості

1.3.1 Основні поняття

Квадратній матриці A порядку n відповідає число $detA$ (або $|A|$, або Δ), яке є її визначником.

1. $n = 1$. $A = a_1$; $detA = a_1$.
2. $n = 2$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$;

$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

3. $n = 3$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$;

$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$
$+a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$.

Приклад. Знайти визначник матриць:

Розв'язання. а) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; $detA = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3 = -8 + 3 = -5$.

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $detA = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 5 +$

$$+(-3)\cdot 1\cdot(-2)+1\cdot 4\cdot 2-2\cdot 6\cdot(-2)—3\cdot 1\cdot 5-$$
$$-1\cdot 4\cdot 3=30+6+8+24+15-12=71.$$

Мінором $\boldsymbol{M_{ij}}$ елемента a_{ij} визначника n-го порядку Δ_n називається визначник (n—1)-го порядку, який одержується з визначника Δ_n шляхом видалення i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Алгебраїчне доповнення $\boldsymbol{A_{ij}}$ елемента a_{ij} визначається за формулою $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

1.3.2 Властивості визначників

1. Якщо рядки визначника замінити стовпцями, визначник не зміниться.

2. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак.

3. Визначник, який має два однакових рядки, дорівнює нулю.

4. Спільний множник елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника можна винести за знак визначника.

5. Якщо елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника представляє собою суми двох доданків, то визначник може бути розкладений на суму двох відповідних визначників.

Приклад.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

6. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного ряду додати відповідні елементи паралельного ряду, помножених на будь-яке число. (Елементарні перетворення визначника).

7. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого ряду на відповідні їм алгебраїчні доповнення. (Розклад визначника за елементами деякого ряду).

Приклад. Розкласти визначник за елементами першого рядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Приклад. Обчислити визначник четвертого порядку за елементами другого рядка.

Розв'язання.

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+(-4) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (-16 + 3 + 50 - 4 + 10 - 60) +$$

$$+4(36 + 2 - 10 - 3 - 30 + 8) +$$

$$+6(9 + 10 - 4 - 15 - 12 + 2) =$$

$$= -2(-17) + 4 \cdot 3 + 6(-10) = -14.$$

1.4 Невироджені матриці. Обернена матриця

1.4.1 Основні поняття

Нехай A - квадратна матриця n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця A називається ***невиродженою***, якщо визначник $detA$ не дорівнює нулю:

$$detA \neq 0.$$

В протилежному випадку ($detA = 0$) матриця A називається *виродженою*.

1.4.2 Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до невиродженої квадратної матриці A, якщо виконується умова

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

де $E -$ одинична матриця того ж порядку, що і матриця A. Матриця A^{-1} має тіж самі розміри, що і матриця A.

Теорема. *Для будь-якої невиродженої матриці A n-го порядку існує єдина обернена матриця A^{-1}.*

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} A_{11}^T A_{12}^T \dots A_{1n}^T \\ A_{21}^T A_{22}^T \dots A_{2n}^T \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ A_{n1}^T A_{n2}^T \dots A_{nn}^T \end{pmatrix},$$

де A_{ij}^T – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} транспонованої матриці A^T .

Властивості оберненої матриці:

1. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$;
4. $A^{-1}A = A\,A^{-1} = E$.

План знаходження оберненої матриці A^{-1}

1. Знайти $detA$.
2. Знайти A^T .
3. Знайти алгебраїчні доповнення кожного елемента матриці A^T .
4. Записуємо A^{-1}.
5. Зробити перевірку A^{-1} ($A^{-1}A = E$.)

Приклад. Переконатися, що дана матриця A невироджена, і знайти обернену матрицю A^{-1}. Перевірити що $A^{-1}A = E$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

1. $detA = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 15 + 4 + 18 = 41 \neq 0$

   – матриця A невироджена.

2. $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Знайдемо алгебраїчні доповнення до матриці A^T.

$A_{11}^T = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$=2; $A_{12}^T = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$=11;

$A_{13}^T = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$= −1; $A_{21}^T = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$=−6;

$A_{22}^T = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$=8 $A_{23}^T = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$=3;

$A_{31}^T = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$=19; $A_{32}^T = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$=2;

$A_{33}^T = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$=11.

4. Запишемо обернену матрицю.

$$A^{-1} = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 2 & 11 & -1 \\ -6 & 8 & 3 \\ 19 & 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

5. Перевіримо рівність $A^{-1}A = E$.

$$A^{-1}A = \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 2 & 11 & -1 \\ -6 & 8 & 3 \\ 19 & 2 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 4+33+4 & -6+11-5 & 2+0-2 \\ -12+24-12 & 18+8+15 & -6+0+6 \\ 38+6-44 & -57+2+55 & 19+0+22 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{41}\begin{pmatrix} 41 & 0 & 0 \\ 0 & 41 & 0 \\ 0 & 0 & 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отже, отримана обернена матриця A^{-1} вірна.

1.4.3 Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розміру $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Виділимо в ній k рядків і k стовпців ($k \leq \min(m, n)$). З виділених елементів запишемо визначник k-го порядку. Всі такі визначники називаються ***мінорами цієї матриці.***

Найбільший з порядків мінорів даної матриці, відмінний від нуля, називається ***рангом матриці.*** Позначають $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{rangA}$.

Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називається *базисним*. У матриці може бути декілька базисних мінорів.

Властивості рангу матриці:

1. При транспонуванні матриці її ранг не змінюється.

2. Якщо викреслити з матриці нульовий ряд, то ранг матриці не зміниться.

3. Ранг матриці не зміниться при елементарних перетвореннях матриці.

Приклад. Знайти ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: Всі мінори 3-го порядку дорівнюють нулю, але є мінор другого порядку відмінний від нуля

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 6 = -15 \neq 0.$$

Отже, $rangA = 2$. Базисний мінор складається з елементів які знаходяться на перетині 2-го та 3-го рядків з 1-м та 3-м стовпцями.

Лекція 2
Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі. Розв'язування систем за формулами Крамера та матричний метод

2.1 Основні поняття

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), яка має m рівнянь з n невідомими, називається система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де числа $a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ називаються ***коефіцієнтами*** системи, числа b_i – ***вільними членами.***

Таку систему зручно записувати в ***матричній формі***

$$A \cdot X = B.$$

Тут A – матриця коефіцієнтів системи, яка називається ***основною матрицею***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{вектор-стовпець з невідомих } x_j,$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - \text{вектор-стовпець з вільних членів } b_i.$$

Система називається ***однорідною***, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю $b_i = 0 \ (i = \overline{1, m})$, і – ***неоднорідною***, якщо хоча б один з вільних членів відмінний від нуля.

Розширеною матрицею системи називається матриця $\bar{A}$ системи, доповнена стовпцем вільних членів

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Розв'язком системи називається *n* значень невідомих $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$, при підстановці яких всі рівняння системи перетворюються в істинні рівності. Будь-який розв'язок системи можна записати у вигляді матриці-стовпця

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Система рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має бодай лише один розв'язок, і ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок, і ***невизначеною***, якщо має декілька розв'язків.

2.2 Теорема Кронекера-Капеллі

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Вичерпну відповідь на питання про сумісність цієї системи дає теорема Кронекера-Капеллі.

Теорема. *Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу основної матриці.*

Якщо ранг сумісної системи дорівнює числу невідомих, то система має лише один єдиний розв'язок.

Якщо ранг сумісної системи менше числа невідомих, то система має нескінечну множину розв'язків.

2.3 Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.1)$$

Основна матриця A такої системи квадратна. Визначник цієї матриці

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

називається *визначником системи.* Якщо визначник системи відмінний від нуля, то система не вироджена.

Правило Крамера. Нехай $detA = \Delta \neq 0$, тоді розв'язок системи рівнянь (2.1) має вигляд $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$ $(j = \overline{1, n})$, де Δ_j − визначник, отриманий із визначника Δ системи заміною j-го стовпця при невідомому x_j стовпцем вільних членів B.

Якщо $\Delta = 0$, а хоча б один з $\Delta_j \neq 0$, то система несумісна, тобто розв'язків не має.

Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \cdots = \Delta_n = 0$, то система рівнянь або несумісна, або невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = -4 \\ x + 3y - 2z = 13. \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

Розв'язання: Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 24 - 1 - 9 - 4 + 4 = 20;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 13 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 13 + 8 - 3 + 8 + 52 = 40;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 13 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 26 + 1 + 24 - 39 + 4 + 4 = 20;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 13 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 4 - 156 + 36 + 26 + 4 = -80.$$

Тоді $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{40}{20} = 2,$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{20}{20} = 1,$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-80}{20} = -4.$$

Перевірка: $2x - 4y + z = -4;$

$2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + (-4) = -4;$

$4 - 4 - 4 = -4;$

$-4 = -4$ – тотожність істинна.

Відповідь: $x = 2;\ \ y = 1;\ \ z = -4.$

2.4 Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці

Теорема. *Якщо основна матриця A квадратної системи $AX = B$ невироджена (тобто $detA \neq 0$), то система має єдиний розв’язок, який обчислюється за формулою*

$$X = A^{-1}B.$$

Оскільки матриця A – невироджена, то існує матриця A^{-1}. Тоді

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B; \qquad (A^{-1}A)X = A^{-1}B;$$

$$EX = A^{-1}B; \quad X = A^{-1}B.$$

Приклад . Розв'язати систему рівнянь методом оберненої матриці (матричним методом)

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - 4y + 2z = 5 \\ 2x + 3y - 5z = -1 \end{cases}.$$

Розв'язання: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. $detA = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 49 \neq 0$ – матриця A не вироджена.
2. $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.
3. Знайдемо алгебраїчні доповнення кожного елемента A^T:

$A_{11}^T = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 14;$ $A_{12}^T = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 7;$

$A_{13}^T = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$ $A_{21}^T = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 9;$

$A_{22}^T = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -13;$ $A_{23}^T = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7;$

$A_{31}^T = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 11;$ $A_{32}^T = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5;$

$A_{33}^T = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -14.$

4. З отриманих алгебраїчних доповнень складемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 9 & -13 & -7 \\ 11 & -5 & -14 \end{pmatrix}.$$

5. Знайдемо матрицю X:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 14 & 7 & 0 \\ 9 & -13 & -7 \\ 11 & -5 & -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$x = 1; y = -1; z = 0.$$

6. Перевірка: $3x + 2y - z = 1$;

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 0 = 1;$$

$$1 = 1.$$

Відповідь: $x = 1; y = -1; z = 0$.

2.5 Розв’язування систем методом Гауса

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

Нехай A – основна матриця системи, а $\overline{A}$ – розширена матриця цієї системи.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Так як кожному елементарному перетворенню системи відповідає елементарне перетворення розширеної матриці системи, то замість системи будемо працювати з розширеною матрицею цієї системи.

Елементарним перетворенням рядків розширеної матриці $\overline{A}$ і перестановці стовпців тільки основної матриці A відповідають наступні рівносильні перетворення лінійної системи:

1) зміна місцями будь-яких двох рівнянь (перенумеровування рівнянь);

2) множення обох частин будь-якого рівняння на довільне ненульове число;

3) додавання до обох частин будь-якого рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на довільне число;

4) перенумеровування невідомих.

Метод Гауса дослідження і розв'язування СЛАР складається з двох основних етапів.

На першому етапі (*прямий хід* методу Гауса – зверху вниз) здійснюють послідовне виключення невідомих за допомогою вказаних рівносильних перетворень системи.

В результаті система зводиться до східчастої форми.

На другому етапі (*зворотний хід* методу Гауса – знизу вгору) вільні невідомі приймають за довільні сталі (параметри). Відкидають нульові рівняння (тотожності $0 = 0$). Переносять в праву частину всі члени, що містять вільні невідомі. Одержують систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих. Цю систему розв'язують, підіймаючись знизу вгору.

Зауваження. Метод Гауса використовують для розв'язання систем з будь-якою кількістю невідомих, тому що із зростанням n кількість обчислень зростає незначно.

Приклад. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 2t = -7, \\ 3x + y + z - t = 5, \\ 2x - 2y + z - 3t = 14, \\ x - 3y - 4z + t = 6. \end{cases}$$

Розв’язання:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 & -7 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -3 & 14 \\ 1 & -3 & -4 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 & -7 \\ 0 & -8 & 7 & 5 & 26 \\ 0 & -8 & 5 & 1 & 28 \\ 0 & 6 & 2 & -3 & 13 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 & -7 \\ 0 & -8 & 7 & 5 & 26 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -58 & -6 & -52 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 & -7 \\ 0 & -8 & 7 & 5 & 26 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -29 & -3 & -26 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -2 & -7 \\ 0 & -8 & 7 & 5 & 26 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 55 & -55 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 2t = -7, \\ -8y + 7z + 5t = 26, \\ -z - 2t = 1, \\ 55t = -55. \end{cases}$$

Отже, з останнього рівняння маємо: $t = -1$. З третього рівняння отримаємо значення z: $-z - 2 \cdot (-1) = 1$; $z = 1$. Підставляючи в другий рядок отримані значення z і t маємо: $-8y + 7 - 5 = 26$; $y = -3$. І, нарешті, з першого рядка $x + 3y - 2z - 2t = -7$ з урахуванням отриманих значень t, z і y: $x - 9 - 2 + 2 = -7$, маємо $x = 2$.

Відповідь: $x = 2, y = -3, z = 1, t = -1$.

2.6 Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо однорідну систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однорідна система завжди сумісна, тому що завжди має наступний розв'язок:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0.$$

Цей розв'язок називається *нульовим* (або *тривіальним*). Будь-який інший розв'язок, в якому хоча б один невідомий відмінний від нуля, називається *ненульовим* (або *нетривіальним*).

Теорема. *Для того, щоб однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь мала нетривіальний розв'язок, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи був менше числа невідомих* $(rangA < n)$.

У випадку, коли число рівнянь дорівнює числу невідомих $(m = n)$, умова $(rangA < n)$ відповідає тому, що визначник системи дорівнює нулю ($\Delta = 0$).

Приклад. Розв'язати систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z = 0, \\ x - 4y + z = 0, \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання: Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 40 - 3 + 6 - 36 - 5 + 4 = 6 \neq 0.$$

Ранг матриці системи дорівнює 3 $(rangA = 3)$ і співпадає з числом невідомих, а отже система має лише тривіальний розв'язок. Отже, $x = 0, y = 0, \ z = 0$.

Приклад. Розв'язати систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + 2y + 2z = 0, \\ 3x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання: Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 1 - 18 - 6 + 4 + 9 = 0.$$

Ранг матриці менший 3, тому така система має нетривіальний розв'язок.

Спосіб 1. Знайдемо розв'язок, вилучивши одне з рівнянь системи, наприклад третє:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

Нехай $z = k$, де k – довільне число.

$$\begin{cases} 2x - 3y = -k, \\ x + 2y = -2k. \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} -k & -3 \\ -2k & 2 \end{vmatrix} = -2k - 6k = -8k;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -k \\ 1 & -2k \end{vmatrix} = -4k + k = -3k.$$

Отже маємо: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{8}{7}k;\ \ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{3}{7}k;\ \ \ z = k$.

Або $x = -8k;\ \ y = -3k;\ \ \ z = 7k$, де $k \epsilon R$.

Спосіб 2. Розв'яжемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ \quad -7y - 3z = 0, \\ \qquad\quad 0z = 0. \end{cases}$$

Отже, з останнього рівняння маємо: $z = k,\ k \epsilon R$. Підставляючи в другий рядок отримане значення z маємо: $-7y - 3k = 0$; $y = -\frac{3}{7}k$. І, нарешті, з першого рядка $x + 2y + 2z = 0$, з урахуванням отриманих значень z і y: $x - \frac{6}{7}k + 2k = 0$, маємо $x = -\frac{8}{7}k$.

Відповідь: $x = -8k;\ \ y = -3k;\ \ \ z = 7k$, де $k \epsilon R$.

Змінні та сталі величини. Теорія границь. Властивості границь. Невизначеності та основні прийоми їх розкриття. Перша та друга важлива границя. Неперервність функції. Точки розриву функції Змінні та сталі величини

3.1 Змінні та сталі величини

Сталою величиною або ***константою*** (від латинського слова "constans" – "сталий") називається величина, яка не змінює свого значення в умовах задачі.

Змінною величиною називається величина, яка може набувати різних значень в умовах задачі.

Сукупність всіх числових значень змінної величини утворює її *область значень*.

Змінна x є *упорядкована величина*, якщо про кожне з двох будь-яких її значень можна сказати, яке з них попереднє і яке наступне.

Змінна величина x називається *обмеженою*, якщо всі її значення за модулем не перевищують деякого додатного числа M протягом всього процесу змінювання: $|x| \leq M$.

У противному випадку змінна величина називається *необмеженою*. Точніше, змінна величина x називається *необмеженою*, якщо для довільного додатного числа M знайдеться хоча б одне значення x, яке за модулем перевищує це число M: $|x| > M$.

Змінна величина x називається *зростаючою*, якщо в процесі змінювання її значення не зменшуються, тобто кожне наступне значення не менше попереднього.

Змінна величина x називається *спадною*, якщо в процесі змінювання її значення не збільшуються, тобто кожне наступне значення не більше попереднього.

Зростаючі та спадні змінні величини називаються *монотонними*.

3.2 Границя змінної величини

Визначення. Стале число a називається границею деякої числової послідовності дійсних чисел x_n, якщо, яким би не був окіл точки a, він включає всі члени вказаної послідовності, починаючи з деякого номера, тобто $|x_n - a| < \varepsilon$. Границю змінної величини будемо позначати як $x_n \to a$ або $lim\, x_n = a$.

Приклад. Змінна величина послідовно набуває значення:

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2}, x_2 = 1 + \frac{1}{4}, x_3 = 1 + \frac{1}{8}, \dots, x_n = 1 + \frac{1}{2^n}.$$

Доведемо, що змінна величина має границю, яка дорівнює одиниці.

Розв'язання. Обчислимо $|x_n - 1| = \left|\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) - 1\right| = \frac{1}{2^n}$. Бачимо, що для будь-якого наперед заданого малого додатного числа ε всі наступні значення змінної, починаючи з x_n, де $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, буде виконуватися нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, що і необхідно було довести.

Основні властивості змінних величин

1. Границя константи дорівнює самій константі.
2. Змінна величина не може прямувати до двох границь.
3. Теорема про стиснуту змінну. Якщо $x_n \leq y_n \leq z_n$,

$n = 1,2, \ldots$ і $\lim x_n = \lim z_n = a,$ то і $\lim y_n = a$. Тобто, якщо дві змінні величини прямують до однієї й тієї ж границі, а третя змінна замкнена між ними, то вона теж прямує до тієї ж границі.

3.3 Границя функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай незалежна змінна x нескінченно наближається до числа x_0, а відповідне значення функції $y = f(x)$ нескінченно наближається до деякого числа A. Тоді кажуть, що число $A -$ границя функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$.

Визначення. Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для всіх значень x, які достатньо мало відрізняються від числа x_0, відповідні значення функції $y = f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A. Границю функції позначають

$$lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Згідно з визначенням, число A є границею функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для будь-якого наперед узятого малого додатного числа ε можна підібрати таке ж мале число $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < 0$, буде справедливою також нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Односторонні границі

Визначення. Число A називається ***лівою границею*** функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для будь-якого малого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, де $\delta(\varepsilon)$ таке, що для всіх $x \epsilon (a, x_0)$, що задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначається ліва границя як

$$lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A.$$

Аналогічно визначається ***права границя*** функції:

$$lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Ліва та права границі функції називаються односторонніми границями функції.

Якщо функція визначена на деякому інтервалі (a, b), крім, можливо, точки $x = x_0$, то для існування границі функції необхідно і достатньо, щоб ліва і права границі функції існували і дорівнювали одна одній:

$$lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

В загальному випадку ліва і права границя можуть існувати, але не дорівнювати одна одній.

3.4 Нескінченно малі і нескінченно великі величини

Визначення. Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно великою*** величиною при $x \to x_0$, якщо для всіх значень x, які достатньо мало відрізняються від x_0, відповідні значення функції за абсолютною величиною перебільшують будь-яке наперед задане яке завгодно велике додатне число:

$$lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Визначення. Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно малою*** величиною при $x \to x_0$, якщо її границя при $x \to x_0$ прямує до нуля:

$$lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Наприклад, функція $y = \frac{1}{x^2}$ при $x \to 0$ є нескінченно великою, а функція $y = 2^{-x}$ при $x \to \infty$ є нескінченно малою величиною.

Теорема. Якщо $f(x)$ – нескінченно велика величина, то $\frac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала величина, і навпаки, якщо $\varphi(x)$ – нескінченно мала величина, то $\frac{1}{\varphi(x)}$ – нескінченно велика величина.

Доведення: Нехай $f(x) \to \infty$, при $x \to x_0$; нам необхідно переконатися в тому, що $\frac{1}{f(x)} \to 0$. Задамо довільне мале число $\varepsilon > 0$ і візьмемо число $M = \frac{1}{\varepsilon}$. За умовою теореми $f(x)$ – нескінченно велика величина, а тому для всіх x, близьких до x_0, буде виконуватися умова:

$$|f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Але в такому випадку буде справедливо і наступне:

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{M} = \varepsilon.$$

З цього випливає, що $lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$. Тобто величина $\frac{1}{f(x)}$ є нескінченно малою. Що потрібно було довести.

Аналогічно доводиться і друга частина теореми.

3.5 Основні теореми про границі функції

Теорема 1. Границя алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі границь функцій доданків:

$$\lim_{x\to x_0}(U+V+\cdots+W)=\lim_{x\to x_0}U+\lim_{x\to x_0}V+\cdots+\lim_{x\to x_0}W.$$

Теорема 2. Границя добутку кінцевого числа функцій дорівнює добутку границь функцій:

$$\lim_{x\to x_0}(U\cdot V\cdot\ldots\cdot W)=\lim_{x\to x_0}U\cdot\lim_{x\to x_0}V\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to x_0}W.$$

Наслідок 1. Сталий множник можна виносити за знак границі:

$$\lim_{x\to x_0}C\cdot U=C\cdot\lim_{x\to x_0}U.$$

Наслідок 2. Добуток кінцевого числа нескінченно малих величин є нескінченно мала величина.

Наслідок 3. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно мала величина.

Теорема 3. Границя частки функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо границя знаменника відрізняється від нуля:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{U}{V} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} U}{\lim\limits_{x \to x_0} V}, \text{якщо } \lim_{x \to x_0} V \neq 0.$$

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x \to 2} \frac{7x^2 - 3x + 4}{5x - 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}(7x^2 - 3x + 4)}{\lim\limits_{x \to 2}(5x - 1)} =$$

$$= \frac{7\left(\lim\limits_{x \to 2} x\right)^2 - 3\lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 4}{5\lim\limits_{x \to 2} x - \lim\limits_{x \to 2} 1} = \frac{7 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 4}{5 \cdot 2 - 1} = \frac{26}{9}.$$

3.6 Невизначеності та основні прийоми їх розкриття

Визначення. Дріб, в якому і чисельник, і знаменник є нескінченно малими величинами, називається ***невизначеністю*** типу $\left|\frac{0}{0}\right|$. Знаходження границі такого дробу називається ***розкриттям невизначеності***.

Крім невизначеності $\left|\frac{0}{0}\right|$ є також невизначеності: $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|, |\infty - \infty|, |0 \cdot \infty|, |1^{\infty}|, |\infty^{\infty}|, |\infty^{0}|, |0^{0}| \ldots$

При роботі з нескінченно малими та нескінченно великими величинами будемо використовувати наступні властивості:

$$a \cdot 0 = 0; \qquad a \cdot \infty = \infty;$$

$$\frac{0}{a} = 0; \qquad \frac{\infty}{a} = \infty;$$

$$\frac{a}{0} = \infty; \qquad \frac{a}{\infty} = 0.$$

1) ***Невизначеність типу*** $\left|\frac{0}{0}\right|$***, що задана відношенням двох многочленів***

Правило. Щоб розкрити невизначеність типу $\left|\frac{0}{0}\right|$, що задана у формі

$$\lim_{x\to x_0}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+\cdots+K}{Lx^m+Mx^{m-1}+\cdots+P},$$

необхідно і чисельник, і знаменник розкласти на множники або розділити на критичний множник $(x-x_0)$ і скоротити дріб.

Приклад. Обчислити границю

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

Розкладемо чисельник та знаменник на множники, використовуючи формули $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ та $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1,x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c=0$.

$$8x^3-1=(2x-1)(4x^2+2x+1);$$

$$6x^2-5x+1=6\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\left(x-\tfrac{1}{3}\right)=(2x-1)(3x-1).$$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-1)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2+2x+1}{3x-1}=\frac{3}{1/2}=6.$$

2) ***Невизначеність типу*** $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$***, що задана відношенням двох многочленів***

Правило. Нехай при $x\to\infty$ і чисельник, і знаменник дробу нескінченно великі. Отже, ми маємо відношення двох нескінченно великих функцій. В такому випадку необхідно чисельник і знаменник дробу розділити на найвищу степінь x, яке зустрічається в цій функції.

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+6x}{7x^3-4x+3}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

(ми бачимо, що найвищою степеню незалежної змінної є x^3, тому розділимо кожен елемент дробу на x^3)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{5x^2}{x^3}+\frac{6x}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3}-\frac{4x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{7-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{2}{7}$$

бо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3}=0.$

(за властивостями нескінченно великих величин).

3) Невизначеності типу $\left|\frac{0}{0}\right|$ або $|\infty-\infty|$, що задані ірраціональними виразами

Правило. Щоб знайти границю функції, яка має ірраціональний вираз, з невизначеністю типу необхідно помножити чисельник і знаменник на спряжене до ірраціонального виразу.

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-9}=\frac{\sqrt{3+6}-3}{9-9}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

(спряженим до виразу $\sqrt{x+6}-3$ є $\sqrt{x+6}+3$, тому помножимо чисельник і знаменник на цей вираз)

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}\right)^2-9}{(x^2-9)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\frac{1}{12}.$$

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=|\infty-\infty|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}=\frac{2}{\infty}=0.$$

3.7 Перша та друга важлива границя.
3.7.1 Перша важлива границя

Теорема. Функція $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ при $\alpha\to 0$ має границю, що дорівнює 1:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

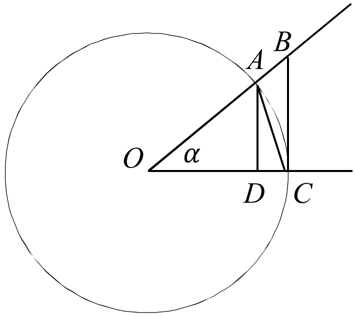


Рисунок 3.1

Доведення: Скористаємося геометричним визначенням синуса (рис. 3.1). Візьмемо коло одиничного радіуса і кут α в радіанах $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. З рисунку видно, що

$$S_{OAC} < S_{\text{сек}\,AOC} < S_{OBC};$$

$$\frac{1}{2} OC \cdot AD < \frac{OC^2 \cdot \alpha}{2} < \frac{1}{2} OC \cdot BC;$$

$$\frac{1}{2} \sin\alpha < \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2} tg\alpha;$$

$$\sin\alpha < \alpha < tg\alpha | : \sin\alpha;$$

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha};$$

$$1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha.$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \cos\alpha = 1 \;\Rightarrow\; 1 < \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1.$$

За теоремою про стиснуту змінну маємо:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

Наслідки першої важливої границі:

$$1)\ \lim_{\alpha \to 0} \frac{tg\,\alpha}{\alpha} = 1;$$

$$2)\ \lim_{\alpha \to 0} \frac{\arcsin\alpha}{\alpha} = 1;$$

$$3)\ \lim_{\alpha \to 0} \frac{arctg\,\alpha}{\alpha} = 1.$$

Зауваження. Для розкриття невизначеності виду $\left|\frac{0}{0}\right|$ з тригонометричними виразами необхідно розкласти чисельник і знаменник на множники і скоротити дріб або застосувати першу важливу границю чи її наслідки.

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-sinx}{x^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sinx}{cosx}-sinx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx-sinx\cdot cosx}{x^3cosx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sinx(1-cosx)}{x\cdot x^2cosx}=\begin{bmatrix}1-cos2\alpha=2sin^2\alpha\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2cosx}=2\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}sin\frac{x}{2}}{x\cdot x\cdot cosx}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}sin\frac{x}{2}sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x\cdot cosx}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1\right]=\frac{1}{2}.$$

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsin5x}{sin3x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{arcsin5x\cdot 15x}{sin3x\cdot 15x}=$$

$$=\begin{bmatrix}\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin5x}{5x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{sin3x}=1\end{bmatrix}=\frac{5}{3}.$$

3.7.2 Друга важлива границя

Теорема. Функція $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ має границю при $n \to \infty$.

Доведення: За формулою бінома Ньютона маємо:

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots +$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}.$$

Виконаємо перетворення:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots +$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Бачимо, що функція $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ зростаюча. Покажемо, що вона обмежена. Для цього замінимо в усіх членах праворуч вирази у дужках одиницями, отримаємо:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!}.$$

Ще більше збільшимо праву частину, якщо замінимо

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{2\cdot 3} \text{ на } \frac{1}{2^2};\ \frac{1}{4!} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} \text{ на } \frac{1}{2^3};\ \ldots;\ \frac{1}{n!} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} \text{ на } \frac{1}{2^{n-1}},$$

звідси маємо

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Дописавши в праву частину члени прогресії $\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}}, \ldots$, отримаємо

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right).$$

У дужках отримали суму нескінченної спадаючої геометричної прогресії, яка дорівнює 2. Звідси маємо

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Якщо $n = 1$, ліва частина нашої формули дорівнює 2. Отже остаточно маємо

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Визначення . Числом e називається границя

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Воно приблизно дорівнює $e \approx 2{,}718$ ...

Функція має границю не тільки тоді коли її аргумент приймає цілочислені значення, але й при неперервній його зміні та прямуванні до нескінченності.

Теорема. Функція $lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$ має границю, яка дорівнює числу e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

(приймемо без доведення).

Приклад. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{4+3x}\right)^{5x-2}=\begin{bmatrix}\frac{3x-1}{4+3x}\to 1,\text{при } x\to\infty\\ 5x-2\to\infty,\text{при } x\to\infty\end{bmatrix}=|1^{\infty}|=$$

в основі степенево-показникової функції додамо та віднімемо 1

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1}{4+3x}-1\right)^{5x-2}=$$

приведемо до спільного знаменника другий та третій доданки в дужках основи

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1-4-3x}{4+3x}\right)^{5x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-5)}{4+3x}\right)^{5x-2}=$$

помножимо степінь на дріб обернену до дробу, яку ми маємо в основі функції, а потім на таку ж, яку маємо.

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-5)}{4+3x}\right)^{\frac{4+3x}{-5}\cdot\frac{(-5)}{4+3x}\cdot(5x-2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5(5x-2)}{4+3x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10-25x}{4+3x}}=e^{-\frac{25}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e^{25}}}.$$

Розглянемо випадок, коли коефіцієнти, які знаходяться в основі функції біля старшого ступеня змінної різні:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{kx}=\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty}$$

В такій ситуації є два рішення: 1) якщо $a>c$, то $\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty}=\infty$

2) якщо $a<c$, то $\left(\frac{a}{c}\right)^{\infty}=0.$

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x-4}{9x+3}\right)^{x+2} = \left(\frac{7}{9}\right)^{\infty} = 0.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{2x-6}\right)^{7x} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\infty} = \infty.$$

Наслідки другої важливої границі:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = ln\, a;$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha.$$

Лекція 4

Похідна. Основні правила диференціювання. Похідна складної функції та оберненої функції. Основні формули диференціювання. Диференціювання функції, заданої параметрично. Логарифмічне диференціювання. Похідні неявних функцій Диференціал функції.

4.1 Поняття похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a; b)$ і $x \epsilon (a; b)$. Надамо аргументу приріст Δx так, щоб нова точка $x + \Delta x \epsilon (a; b)$. Оскільки точка x фіксована, то відповідний приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x\ ) - f(x)$ є функцією приросту аргументу Δx. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, яке також буде функцєю від Δx.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається швидкість змінювання функції y в цій точці відносно змінювання аргументу x. *Похідна дорівнює границі відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x\ ) - f(x)}{\Delta x}.$$

Еквівалентні позначення похідної y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

Операція знаходження похідної називається ***диференціюванням функції.*** Функція, що має похідну у точці x, називається *диференційованою* у цій точці.

Теорема. *Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в деякій точці x, то вона неперервна в цій точці.*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = y' \cdot 0 = 0.$$

Зауваження. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в деякій точці x, то вона може бути як диференційованою, так і недиференційованою в цій точці.

Приклад. Знайти похідну функції $y = x^2$.

Розв'язання. Для будь-якого x маємо $y = x^2$. Якщо аргумент дорівнює $x + \Delta x$, то $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$. Звідси

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

4.2 Основні правила диференціювання.

Нехай маємо деякі функції $u = u(x)$, $v = v(x)$, які диференційовані у проміжку $(a; b)$. Тоді:

Теорема 1. *Похідна алгебраїчної суми (різниці) кінцевого числа функцій дорівнює сумі (різниці) їх похідних.*

$$y = u \pm v, \text{ то } y' = (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Доведення. Розглянемо суму двох функцій.

Якщо $y = u + v$, то $y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)$; тоді
$\Delta y = (y + \Delta y) - y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (u + v)$;

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v.$$

Звідси

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

Тому маємо

$$\boldsymbol{(u \pm v)' = u' \pm v'}.$$

Теорема 2. *Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і похідної другої функції на першу функцію.*

$$y = uv, \text{ то } y' = (uv)' = u'v + uv'.$$

Доведення. Розглянемо добуток двох функцій.

Якщо $y = uv,$ то $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$;

$\Delta y = (y + \Delta y) - y = uv + \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v - uv;$

$$\Delta y = \Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta uv + u\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v = u'v + uv' + u' \cdot 0,$$

(при $\Delta x \to 0$ $\Delta u \to 0$ і $\Delta v \to 0$). Тому маємо

$$(\boldsymbol{uv})' = \boldsymbol{u'v} + \boldsymbol{uv'}.$$

Теорема 3. *Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, у якому знаменник є квадрат знаменника, а чисельник є різниця між добутками похідної чисельника на знаменник і добутком похідної знаменника на чисельник.*

$$y = \frac{u}{v}, \qquad \text{де } v \neq 0, \qquad \text{то} \quad y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Доведення. Розглянемо частку двох функцій.

Якщо $y = \frac{u}{v}$, то $y + \Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$; тоді

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + \Delta uv - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{\Delta uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta uv - u\Delta v}{\Delta x\, v(v + \Delta v)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta uv}{\Delta x} - \frac{u\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)};$$

(при $\Delta x \to 0$ $\Delta u \to 0$ і $\Delta v \to 0$). Тому маємо

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u'v} - \boldsymbol{uv'}}{\boldsymbol{v^2}}.$$

Дії з константами. *Сталий множник можна виносити з-під знаку похідної.*

$$y = cu, \qquad \text{то} \quad y' = (cu)' = cu';$$

$$y = \frac{u}{c}, \qquad \text{то} \quad y' = \left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c};$$

$$y = \frac{c}{u}, \qquad \text{то} \quad y' = \left(\frac{c}{u}\right)' = \frac{-c}{u^2}u'.$$

4.3 Похідна складної функції

Теорема. *Похідна складної функції дорівнює похідній даної функції по проміжному аргументу, помноженої на похідну цього аргументу по незалежній змінній.*

Доведення. Нехай $y = f(u),\ u = \varphi(x)$. Доведемо, що

$$y' = f'(u) \cdot u' = f'(u) \cdot \varphi'(x) = f'_u \cdot \varphi'_x.$$

Дамо аргументу x приріст Δx; в результаті цього маємо приріст проміжного аргументу Δu, яке зумовить зміну функції y на Δy. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ у вигляді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Обчислимо границю

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Так як $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'_u$ і $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'_x$, то

$$y' = f'_u \cdot \varphi'_x.$$

Запишемо таблицю похідних для складних функцій:

1. $x' = 1$;
2. $c' = 0$;
3. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$;
4. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
5. $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-1}{u^2} \cdot u'$;
6. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;

7. $(log_a u)' = \frac{1}{u \cdot ln\, a} \cdot u'$;

8. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

9. $(a^u)' = a^u \cdot ln\, a \cdot u'$;

10. $(sin\, u)' = cos\, u \cdot u'$;

11. $(cos\, u)' = -\, sin\, u \cdot u'$;

12. $(tg\, u)' = \frac{1}{cos^2 u} \cdot u'$;

13. $(ctg\, u)' = \frac{-1}{sin^2 u} \cdot u'$;

14. $(arcsin\, u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

15. $(arccos\, u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

16. $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

17. $(arcctg\, u)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$.

Приклад. Знайти похідні функцій.

а) $y = x^3 \cdot cos3x$;

$$y' = (x^3)' \cdot cos3x + x^3 \cdot (cos3x)' = 3x^2 cos3x + x^3(-sin3x)3 =$$

$$= 3x^2 cos3x - 3x^3 sin3x.$$

б) $y = \frac{arctg^4(2x+5)}{3^{sinx}}$;

$$y' = \frac{\left(arctg^4(2x+5)\right)' \cdot 3^{sinx} - arctg^4(2x+5) \cdot \left(3^{sinx}\right)'}{(3^{sinx})^2} =$$

$$= \frac{4arctg^3(2x+5)\left(arctg(2x+5)\right)' 3^{sinx} - arctg^4(2x+5)3^{sinx} ln3(sinx)'}{3^{2sinx}}$$

$$= \frac{4arctg^3(2x+5)\dfrac{1}{1+(2x+5)^2}(2x+5)' 3^{sinx} - arctg^4(2x+5)3^{sinx} ln3\, cosx}{3^{2sinx}}$$

$$= \frac{\frac{8arctg^3(2x+5)}{1+(2x+5)^2}3^{sinx} - arctg^4(2x+5)3^{sinx}\,ln3\,cosx}{3^{2sinx}} =$$

$$= \frac{3^{sinx}arctg^3(2x+5)\big(8 - arctg(2x+5)\,ln3\,cosx(1+(2x+5)^2)\big)}{3^{2sinx}}$$

$$= \frac{arctg^3(2x+5)\big(8 - arctg(2x+5)\,ln3\,cosx(1+(2x+5)^2)\big)}{3^{sinx}}.$$

4.4 Диференціювання функції, заданої параметрично

Нехай задано функцію

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)' \end{cases}$$

де t – параметр, а $x(t)$ і $y(t)$ неперервні і диференційовані функції аргументу t у деякому інтервалі $t\epsilon(a,b)$.

Нехай в деякій точці $t_0\epsilon(a,b)$, існує похідна, яка не дорівнює нулю $x'(t) = x'_t(t_0) \neq 0$. Нехай ця похідна в точці додатна, тоді вона буде додатна і в деякому околі точки t_0. З цього прямує, що функція $x(t)$ монотонно зростаюча, а тому має обернену $t = t(x)$. Похідна оберненої функції дорівнює

$$x'_t = \frac{1}{t'_x}.$$

Підставимо $t = t(x)$ у вираз для $y(t)$, маємо:

$$y = y\big(t(x)\big) = y(x).$$

Знаходимо її похідну, як похідну складної функції:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x.$$

Остаточно маємо:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклад. Знайти похідну функції: $\begin{cases} x = ln(1+t^2) \\ y = t - arctg\, t \end{cases}$.

Розв'язання. Обчислимо похідні x'_t, y'_t:

$$x'_t = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t; \quad y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Підставимо отримані похідні у формулу і спростимо результат:

$$y'_x = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}.$$

4.5 Логарифмічне диференціювання

Розглянемо функцію $y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$. Така функція називається ***степенево-показниковою функцією.*** Диференціювати її за формулами з таблиці похідних не можна. Тому скористаємося наступним алгоритмом:

1. Логарифмуємо цю функцію за основою *e*:

$$ln\, y = ln\left(f(x)\right)^{\varphi(x)};$$

2. Виконаємо перетворення використовуючи властивості логарифмів:

$$ln\, y = \varphi(x) \cdot ln\left(f(x)\right);$$

3. Диференціюємо обидві частини отриманого рівняння:

$$(ln\, y)' = \left(\varphi(x) \cdot ln\left(f(x)\right)\right)',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \left(\varphi(x)\right)' \cdot ln\left(f(x)\right) + \varphi(x) \cdot \left(ln\left(f(x)\right)\right)',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \left(\varphi(x)\right)' \cdot ln\left(f(x)\right) + \varphi(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot \left(f(x)\right)';$$

4. Виразимо шукану похідну:

$$y' = \left(\left(\varphi(x)\right)' \cdot ln\left(f(x)\right) + \varphi(x) \cdot \frac{\left(f(x)\right)'}{f(x)}\right)\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}.$$

Приклад. Знайти *y'*, якщо $y = (arctg\sqrt{x})^{ln(2x+1)}$.

Розв'язання. $lny = ln(arctg\sqrt{x})^{ln(2x+1)}$,

$$lny = ln(2x+1) \cdot ln(arctg\sqrt{x}) \quad ,$$

$$\frac{y'}{y} = (ln(2x+1))' \cdot ln(arctg\sqrt{x}) + ln(2x+1) \cdot \left(ln\left(arctg\sqrt{x}\right)\right)'$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{(2x+1)'}{2x+1} \cdot ln(arctg\sqrt{x}) + ln(2x+1) \cdot \frac{\left(arctg\sqrt{x}\right)'}{arctg\sqrt{x}},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{2x+1} \cdot ln(arctg\sqrt{x}) + ln(2x+1) \cdot \frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{(1+x) \cdot arctg\sqrt{x}} \ ,$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2ln(arctg\sqrt{x})}{2x+1} + \frac{ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x) \cdot arctg\sqrt{x}},$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{2ln(arctg\sqrt{x})}{2x+1} + \frac{ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x) \cdot arctg\sqrt{x}}\right),$$

$$y' = (arctg\sqrt{x})^{ln(2x+1)}\left(\frac{2ln(arctg\sqrt{x})}{2x+1} + \frac{ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x)arctg\sqrt{x}}\right).$$

Логарифмічне диференціювання використовують не лише для степенево-показникової функції, а й при знаходженні похідної від добутку (частки) більш ніж двох функцій. Послідовність дій не змінюється. Розглянемо на прикладі.

Приклад. Знайти y', якщо $y = \frac{tg^2x \cdot \sqrt[3]{x^2-7}}{(3x+8)^5}$.

Розв'язання. $ln\, y = ln\frac{tg^2x \cdot \sqrt[3]{x^2-7}}{(3x+8)^5}$;

Використаємо наступні властивості логарифмів:

$$ln(a \cdot b) = ln\, a + ln\, b;\;\; ln\frac{a}{b} = ln\, a - ln\, b;\;\; ln\, a^c = c \cdot ln\, a$$

виконаємо перетворення:

$$ln\, y = ln\, tg^2x + ln\sqrt[3]{x^2-7} - ln(3x+8)^5;$$

$$ln\, y = 2\, ln(tgx) + \frac{1}{3} ln(x^2-7) - 5\, ln(3x+8).$$

Продиференціюємо отриманий вираз:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{tgx} \cdot (tgx)' + \frac{1}{3(x^2-7)} \cdot (x^2-7)' - \frac{5}{3x+8} \cdot (3x+8)';$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{tgx} \cdot \frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{3(x^2-7)} \cdot 2x - \frac{5}{3x+8} \cdot 3;$$

$$y' = \left(\frac{2}{sinx \cdot cosx} + \frac{2x}{3(x^2-7)} - \frac{15}{3x+8}\right) \cdot \frac{tg^2x \cdot \sqrt[3]{x^2-7}}{(3x+8)^5}.$$

4.6 Похідні неявних функцій

Диференціювання функції, яка задана деяким рівнянням

$F(x,y)=0$, де незалежна змінна x зв'язана з функцією y , що не розв'язується відносно y, зводиться до наступного:

1) диференціюємо ліву і праву частини рівняння, що задає функцію, вважаючи y *функцію від* x*, тобто застосовуючи правило диференціювання складної функції*;

2) розв'язуємо отримане рівняння відносно шуканої похідної y'.

Зауваження. Похідна неявної функції $F(x,y)=0$, в загальному випадку, виражається не тільки через значення аргументу x, а й через значення функції y при даному значенні x.

Приклад. Знайти похідну функції

$$sin(3x-6y)+5x^2y=2y^3.$$

Розв'язання. $(sin(3x-6y)+5x^2y)'=(2y^3)'$,

$$cos(3x-6y)(3x-6y)'+5((x^2)'y+x^2(y)')=6y^2y',$$

$$cos(3x-6y)(3-6y')+10xy+5x^2y'=6y^2y',$$

$$3cos(3x-6y)-6y'cos(3x-6y)+10xy+5x^2y'=6y^2y',$$

$$y'\cdot(-6cos(3x-6y)+5x^2-6y^2)=-3cos(3x-6y)-10xy,$$

$$y'=\frac{-3cos(3x-6y)-10xy}{-6cos(3x-6y)+5x^2-6y^2},$$

$$y'=\frac{3cos(3x-6y)+10xy}{6cos(3x-6y)-5x^2+6y^2}.$$

4.7 Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна і диференційована при певних значеннях незалежного аргументу:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

З цього прямує, що відношення приросту функції до приросту аргументу можна представити у вигляді

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$ де $\varepsilon -$ нескінченно мала при $\Delta x \to 0.$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x.$$

Нескінченно малий приріст функції Δy дорівнює сумі величини, яка пропорційна нескінченно малому приросту незалежної змінної Δx та нескінченно малої, більш високого порядку у порівнянні з Δx.

Визначення. Головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту незалежної змінної, називається ***диференціалом функції:***

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Приріст Δx незалежної змінної називається її ***диференціалом*** dx*:*

$$\Delta x = dx.$$

Диференціал функції дорівнює добутку похідної функції на диференціал незалежної змінної:

$$dy = f'(x)dx.$$

Властивості диференціала

За визначенням диференціала знайдемо диференціали деяких функцій:

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx; \qquad d(cosx) = -sinx\,dx;$$
$$d(lnx) = \frac{dx}{x}; \qquad d(arctg\,x) = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Правила обчислення диференціалів.

1. Диференціал алгебраїчної суми двох функцій:
$$d(U \pm V) = dU \pm dV.$$
2. Диференціал добутку двох функцій:
$$d(U \cdot V) = V \cdot dU + U \cdot dV.$$
3. Диференціал частки двох функцій:
$$d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \cdot dU - U \cdot dV}{V^2}.$$

Диференціал складної функції. Інваріантність диференціала.

Нехай дано $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – неперервні і диференційовані функції своїх аргументів.

Похідна складної функції знаходиться за формулою

$$y' = f'_u \cdot \varphi'_x\,.$$

Помножимо обидві частини рівності на dx, отримаємо

$$dy = f'_u \cdot u'_x dx.$$

За означенням диференціала $u'_x dx = du,$ тому

$$dy = f'_u \cdot du.$$

Ця властивість має назву ***інваріантності форми диференціала від аргументу функції.***

Приклад. Знайти диференціал функції

$$y = 2^{tgx} + ln^3 x \cdot arcsin3x.$$

Розв'язання. $dy = d(2^{tgx} + ln^3 x \cdot arcsin3x) =$

$$= d(2^{tgx}) + arcsin3xd(ln^3 x) + ln^3 xd(arcsin3x) =$$

$$= \frac{2^{tgx} d(tgx)}{ln2} + arcsin3x \cdot 3ln^2 xd(lnx) + ln^3 x \frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} =$$

$$= \frac{2^{tgx}}{ln2 \cdot cos^2 x} dx + 3arcsin3x \cdot \frac{ln^2 x}{x} dx + \frac{3ln^3 x}{\sqrt{1-9x^2}} dx;$$

$$dy = \left(\frac{2^{tgx}}{ln2 \cdot cos^2 x} + 3arcsin3x \cdot \frac{ln^2 x}{x} + \frac{3ln^3 x}{\sqrt{1-9x^2}} \right) dx.$$

Лекція 5

Основні теореми диференціального числення. Теореми Ферма, Роля, Лагранжа, Коші. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей.

Теорема Ферма. *Нехай задана функція* $y=f(x)$, *неперервну на інтервалі* $[a,b]$. Нехай *функція* $y=f(x)$ *приймає своє найбільше (найменше) значення у деякій точці* x_0, *що належить інтервалу* $[a,b]$. *Якщо в точці* x_0 *похідна існує, то вона дорівнює нулю:*

$$f'(x_0)=0.$$

Теорема Ролля. *Якщо функція* $y=f(x)$ *неперервна на інтервалі* $[a,b]$, *диференційована в усіх внутрішніх точках цього відрізка і на його кінцях приймає рівні значення* $f(a)=f(b)$, *то існує хоча б одна точка* x_0, *в якій похідна дорівнює нулю*

$$f'(x_0)=0.$$

Теорема Лагранжа. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a,b]$ *і диференційована в усіх його внутрішніх точках, то на інтервалі* (a,b) *знайдеться хоча б одна точка* c, *в якій виконується рівність*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).$$

Теорема Коші. *Якщо* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *– дві функції, неперервні на відрізку* $[a,b]$ *і диференційовані в усіх його внутрішніх точках, причому похідна* $\varphi'(x)$ *ніде не обертається у нуль, то на інтервалі* (a,b) *знайдеться принаймні одна така точка* c, *що виконується рівність*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f^{'}(c)}{\varphi^{'}(c)}.$$

Приймемо ці теореми без доведення.

Теорема Лопіталя. *Нехай функція* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *при* $x \to x_0$ *одночасно прямують до нуля або до нескінченності. Якщо відношення їх похідних має границю, то відношення самих функцій також має границю, яка дорівнює границі відношення похідних, тобто*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доводити цю теорему у загальному випадку ми не будемо, а обмежимося лише розглядом найпростіших випадків.

Доведемо перш за все, що якщо $x \to x_0$ функції $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ прямують до нуля і їх похідні в точці x_0 існують, якщо $\varphi^{'}(x_0) \neq 0$, то

За умовою теореми $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$. Розглянемо відношення

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}}.$$

Перейдемо до границі при $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}.$$

Зауваження 1. Теорема має місце і в тому випадку, коли функції $f(x)$ $і$ $\varphi(x)$ невизначені при $x = x_0$, але

$$lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \ і \ lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0.$$

Зауваження 2. Якщо $f'(x_0) = \varphi'(x_0) = 0$ і $f'(x)$ та $\varphi'(x)$ відповідають тим же умовам, що і $f(x)$ і $\varphi(x)$, то, застосовуючи правило Лопіталя до відношення $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ маємо формулу

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \ \text{і т. д.}$$

Зауваження 3. Якщо $\varphi'(x_0) = 0,$ а $f'(x_0) \neq 0,$ то теорема використовується до оберненого відношення

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} \to 0, \qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)} \to \infty.$$

Розглянемо випадки застосування правила Лопіталя.

1. Функція представлена відношенням двох функцій, які одночасно прямують до нуля або до нескінченності (невизначеності типу $\left|\frac{0}{0}\right|$або $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$).

Приклад. Знайти границі функцій

а) $\lim_{x\to 0} \frac{ln(5+3x)}{2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{(ln(5+3x))'}{(2x)'} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{5+3x}}{2} = \frac{3}{10}$;

б) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{7x-3}}{x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^{7x-3})'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{7e^{7x-3}}{2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(7e^{7x-3})'}{(2x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{49e^{7x-3}}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty.$$

2. Функція представлена різницею двох функцій, які одночасно прямують до нескінченності (невизначеність типу $|\infty - \infty|$*).*

Приклад. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = |\infty - \infty| =$$

(приведемо різницю дробів до спільного знаменника)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{\left(x(e^x - 1)\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x}$$

$$= \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x(2 + x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}.$$

3. Функція представлена добутком двох функцій, одна з яких є нескінченно мала, а інша нескінченно велика величина (невизначеність типу $|0 \cdot \infty|$*)*

Границя має вид:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = |0 \cdot \infty| = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}} = \left|\dfrac{0}{0}\right|;$

$$2)\ \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x)=|0\cdot\infty|=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Приклад. Знайти границі функцій

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 0} x^2\cdot lnx=|0\cdot\infty|=\lim_{x\to 0}\frac{lnx}{1/x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0\ ;$$

$$\text{б)}\ \lim_{x\to 1} lnx\cdot ln(x-1)=|0\cdot\infty|=\lim_{x\to 1}\frac{ln(x-1)}{1/lnx}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{ln^2x}\cdot\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot(lnx)^2}{x-1}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{(lnx)^2+\frac{2xlnx}{x}}{1}=-\lim_{x\to 1}((lnx)^2+2lnx)=0\ ;$$

$$\text{в)}\ \lim_{x\to a}(a^2-x^2)\cdot tg\frac{\pi x}{2a}=|0\cdot\infty|=\lim_{x\to a}\frac{a^2-x^2}{\frac{1}{tg\frac{\pi x}{2a}}}=\lim_{x\to a}\frac{a^2-x^2}{ctg\frac{\pi x}{2a}}$$

$$=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to a}\frac{-2x}{\frac{-1}{sin^2\frac{\pi x}{2a}}\cdot\frac{\pi}{2a}}=\frac{4a^2}{\pi}.$$

4. Функція степенево-показникова(невизначеності типу $|1^\infty|, |\infty^0|, |0^0|$*)*

Для обчислення таких границь за правилом Лопіталя необхідно спочатку прирівняти границю до деякого числа A, що є границею функції , прологарифмувати отримане рівняння та знайти границю логарифма, а потім знайти значення A.

Приклад. Знайти границі функцій

$$\text{а)}\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx};\ \text{б)}\ \lim_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}}.$$

Розв'язання: а) Функція є степенево-показниковою, тому позначимо границю функції через A , та прологарифмуємо її:

$$\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = |0^0| = A\ ,$$

$$lnA = ln\lim_{x\to 0}(arcsinx)^{tgx} = \lim_{x\to 0}ln(arcsinx)^{tgx} =$$

$$= \lim_{x\to 0}tgx \cdot ln(arcsinx) = \lim_{x\to 0}\frac{ln(arcsinx)}{ctgx} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-sin^2x}{\sqrt{1-x^2}\cdot arcsinx} =$$

(використовуючи першу важливу границю та її наслідки маємо)

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = 0\ ,$$

$$\text{тоді}\ \ A = e^0 = 1\ .$$

$$\text{б)}\ \lim_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = |\infty^0| = A,$$

$$lnA = ln\lim_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0}ln(ctgx)^{\frac{1}{lnx}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{lnx}\cdot lnctgx =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{lnctgx}{lnx} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-1}{sin^2x \cdot ctgx}}{1/x} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{sin^2x \cdot ctgx} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x}{sin^2x \cdot \frac{cosx}{sinx}} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{sinx \cdot cosx} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{sinx} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{-1}{cosx} = -1,$$

отримали $lnA = -1$, тоді $A = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Лекція 6

Умови зростання та спадання функцій. Необхідні та достатні умови екстремуму. Найменше та найбільше значення функції в інтервалі

6.1 Ознаки монотонності функції

Теорема *(необхідна ознака монотонності).*

1) *Якщо функція $f(x)$ в інтервалі (a, b) зростає, то її похідна $f'(x)$ невід'ємна: $f'(x) \geq 0$;*
2) *Якщо функція $f(x)$ в інтервалі (a, b) спадає, то її похідна $f'(x)$ недодатня: $f'(x) \leq 0$;*
3) *Якщо функція $f(x)$ не змінюється в інтервалі (a, b), то її похідна $f'(x)$ дорівнює нулю.*

***Геометричний зміст цієї теореми*:**

1) якщо функція зростає, то дотична до графіка функції утворює гострий кут з віссю Ox;

2) якщо функція спадає, то дотична до графіка функції утворює тупий кут з віссю Ox.

Теорема *(достатня ознака монотонності).*

1) *Якщо похідна $f'(x)$ від функції $f(x)$ скрізь в інтервалі додатна, то функція $f(x)$ в цьому інтервалі зростає;*
2) *якщо похідна $f'(x)$ від функції $f(x)$ скрізь в інтервалі від'ємна, то функція $f(x)$ в цьому інтервалі спадає;*
3) *якщо похідна $f'(x)$ від функції $f(x)$ скрізь в інтервалі дорівнює нулю, то функція $f(x)$ в цьому інтервалі не змінюється (є константою).*

Приклад. Дослідити функцію на монотонність:

$$y = x^3 - 3x.$$

Розв'язання. Зауважимо, що будь-яке дослідження функції необхідно розпочинати із находження області визначення функції:
$D(y) = R.$

Похідна цієї функції $y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$; $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$.

Отже, функція $y = x^3 - 3x$ зростає на проміжках $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-1; 1)$.

6.2 Екстремум функції

Особливу роль у дослідженні функції відіграють значення x, які розділяють інтервали зростання від інтервалів спадання функції. При переході через ці точки функція $y = f(x)$ із зростаючої стає спадною, і навпаки, із спадної – зростаючою.

Визначення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Точка x_0 називається точкою ***максимуму*** функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0)$ є найбільше значення функції $y = f(x)$ в деякому околі точки x_0 (рис. 6.1).

Визначення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Точка x_0 називається точкою ***мінімуму*** функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0)$ є найменше значення функції $y = f(x)$ в деякому околі точки x_0 (рис. 6.2).

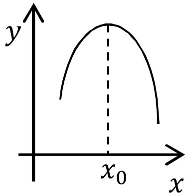


Рисунок 6.1

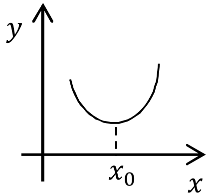


Рисунок 6.2

Точки максимуму і мінімуму називаються точками екстремуму функції.

Теорема *(необхідна ознака екстремуму). Якщо в точці x_0 функція $y = f(x)$ досягає екстремуму, то її похідна в цій точці або дорівнює нулю $f'(x_0) = 0$, або не існує.*

Доведення. Дійсно, якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції, то значення функції в ній є найбільшим (або найменшим) в деякому околі точки x_0. Звідси прямує, що якщо в точці x_0 існує похідна, то, за теоремою Ферма, вона дорівнює нулю.

Точки x_0 в яких похідна дорівнює нулю або не існує називають *критичними* точками функції.

Теорема *(достатня ознака екстремуму). Точка x_0 є точкою екстремуму функції $y = f(x)$, якщо при переході x через x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак на протилежний; при зміні знака «+» на «–» точка x_0 є точкою максимуму, при зміні знака з «–» на «+» точка x_0 є точкою мінімуму.*

Доведення. Нехай при переході x зліва направо через x_0 похідна змінює знак з «+» на «–» ; з цього прямує, що ліворуч точки x_0 розташований інтервал зростання функції, а праворуч –

інтервал спадання функції. Тобто, точка x_0 є точкою максимуму функції.

Аналогічні міркування при зміні знаку з «–» на «+» ; при переході x через x_0 зліва направо, точка x_0 є точкою мінімуму функції.

Загальний план дослідження функції на екстремум та монотонність

1. З'ясовуємо область визначення функції (ОВФ).
2. Знайдемо похідну функції.
3. Знайдемо критичні точки ($f'(x) = 0$). Нанесемо їх на координатну пряму.
4. В кожному з отриманих інтервалів з'ясуємо знак похідної. За знаком похідної визначаємо характер поведінки функції. З'ясовуємо, при переході через які *критичні* точки похідна змінює знак, саме ці точки є точками екстремуму функції. Інколи два суміжні інтервали мають однаковий знак, тому точка, яка їх розділяє, не є точкою екстремуму.
5. Знаходимо значення функції в точках екстремуму.

Приклад. Дослідити функцію монотонність та екстремум

$$y = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}.$$

Розв'язання:

1. Область визначення функції: $x \neq \pm 1$; тобто
$$D(y) = (-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, \infty).$$
2. Знайдемо $y'(x)$:

$$y' = \frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

3. $y' = 0$ при $x = 0$ і y' не існує при $x = \pm 1$, тобто критичною точкою є тільки точка $x = 0$, оскільки при $x = \pm 1$ функція не існує.

4. На інтервалах $(-\infty, -1)$ та $(-1{,}0)$ функція спадає, оскільки тут $y' < 0$.

На інтервалах $(0{,}1)$ та $(1, \infty)$ функція зростає, оскільки тут $y' > 0$ (рис. 6.3).

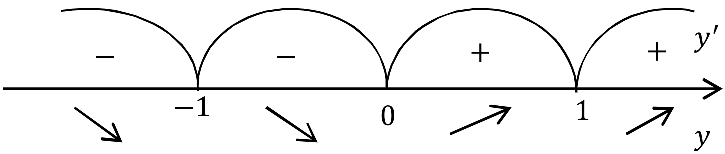


Рисунок 6.3

При переході через $x = 0$ похідна змінює знак з – на +, тому при $x = 0$ маємо мінімум функції.

5. $y_{min} = y(0) = 1$, тобто точка $B(0{,}1)$ – точка екстремуму функції.

Відповідь: функція спадає при $x \epsilon (-\infty, -1)$ та $(-1{,}0)$; функція зростає при $x \epsilon (0{,}1)$ та $(1, \infty)$; точка $B(0{,}1)$ – точка екстремуму функції (min).

6.3 Найменше та найбільше значення функції в інтервалі.

Розв'язання задачі на найменше та найбільше значення функції в інтервалі пов'язано з дослідженням функції на екстремум та монотонність. Функція $y = f(x)$ може приймати найменше (найбільше) значення або в точках екстремуму, або на кінцях інтервалу $[a, b]$.

Загальний план дослідження на найменше та найбільше значення функції в інтервалі

1. З'ясовуємо область визначення функції (ОВФ).
2. Знайдемо похідну функції.
3. Знайдемо критичні точки ($f'(x) = 0$).
4. Заходимо значення функції в критичних точках в яких похідна існує і які належать інтервалу $[a, b]$ та значення функції у крайніх точках інтервалу. Порівняти отримані значення і обрати з них найменше та найбільше.

Приклад. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = x^2 \ln x$ на інтервалі $[e^{-3}, 1]$.

Розв'язання.

1. ОВФ: $x\epsilon(0, \infty)$;
2. $y' = 2x \cdot lnx + x^2 \frac{1}{x} = 2x \cdot lnx + x$;
3. $2x \cdot lnx + x = 0$; $x(2lnx + 1) = 0$; $x_1 = 0$,

   $$2lnx + 1 = 0, x_2 = e^{-\frac{1}{2}}.$$

   x_1 не належить ОВФ, $x_2\epsilon[e^{-3}, 1]$.
4. $y(e^{-3}) = e^{-6}lne^{-3} = -3e^{-6} = \frac{-3}{e^6}$;

   $y\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1}lne^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}e^{-1} = -\frac{1}{2e}$;

   $y(1) = ln1 = 0$.

Отже, найменше значення функція набуває при $x = e^{-\frac{1}{2}}$, а найбільше – при $x = 1$.

6.4 Умови опуклості та угнутості графіка функції. Точки перегину

Визначення. Дуга називається *опуклою*, якщо вона перетинається з будь-якою січною не більше ніж у двох точках.

Якщо дуга опукла, то вона повністю знаходиться з одного боку від дотичної, проведеної в будь-якій точці. Опукла дуга може бути опуклою вгору (опуклою) (рис. 6.4) або опуклою вниз (угнутою) (рис. 6.5). Опукла дуга знаходиться нижче дотичної, а угнута – вище.

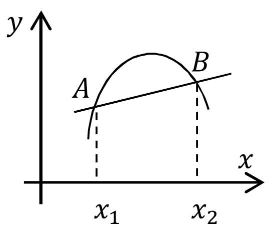


Рисунок 6.4

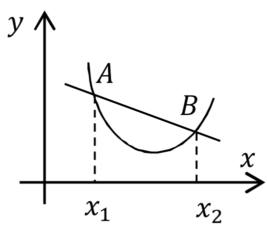


Рисунок 6.5

Особливу роль грають точки переходу від інтервалів опуклості до інтервалів угнутості, ці точки називаються *точками перегину.*

Визначення. *Точкою перегину* називається така точка лінії, яка відділяє опуклу дугу від угнутої.

Теорема. Якщо друга похідна $f''(x)$ скрізь в інтервалі (a, b) від'ємна $(f''(x) \le 0)$, то дуга лінії $y = f(x)$, опукла в цьому інтервалі; якщо $f''(x)$ скрізь в інтервалі (a, b) додатна $(f''(x) \ge 0)$, то лінія $y = f(x)$ у цьому інтервалі угнута.

Теорема. (*необхідна умова існування точок перегину*) *Якщо в точці* x_0 *лінії* $y = f(x)$ *має точку перегину, то або* $f''(x_0) = 0$ *або не існує.*

Теорема. (*достатня умова існування точок перегину*) *Точка* (x_0, y_0) *(якщо в цій точці виконується необхідна умова) є точкою перегину лінії* $y = f(x)$, *якщо друга похідна функції* $f''(x)$ *змінює знак при переході* x *через* x_0.

Приймемо ці теореми без доведення.

Схема дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину

1. З'ясуємо область визначення функції (ОВФ).
2. Знайдемо першу та другу похідні.
3. Визначимо критичні точки другого порядку, тобто точки в яких $f''(x) = 0$ або не існує.
4. Нанесемо на координатну пряму критичні точки та точки в яких функція не існує. З'ясуємо знак другої похідної $f''(x)$ в кожному частковому інтервалі. Якщо $f''(x) < 0$, то функція опукла, якщо $f''(x) > 0$ – угнута. Якщо при переході через критичні точки другого порядку похідна $f''(x)$ змінює знак, то ці точки є точками перегину.
5. Знаходимо значення функції в точках перегину.

Приклад. Знайти точки перегину та інтервали опуклості і угнутості функції $y = x^2 e^x$.

Розв'язання: 1. ОВФ: $x \epsilon R$.

2. $y' = 2xe^x + x^2e^x = e^x(2x + x^2)$;
   $y'' = e^x(2x + x^2) + e^x(2 + 2x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$.
3. $e^x(x^2 + 4x + 2) = 0$; $e^x \neq 0$; $x^2 + 4x + 2 = 0$,

$$x_1 = -2 - \sqrt{2};\ \ x_2 = -2 + \sqrt{2}.$$

4.

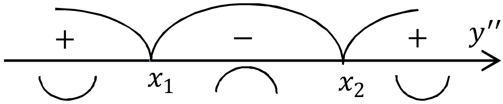


Рисунок 6.6

Функція угнута при $x \epsilon \left(-\infty, -2 - \sqrt{2}\,\right) \cup \left(-2 + \sqrt{2}, \infty\right)$ та опукла при $x \epsilon \left(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}\right)$. Точки з абсцисами $x_1 = -2 - \sqrt{2};\ \ x_2 = -2 + \sqrt{2}$ є точками перегину (рис. 6.6).

5. $$y\left(-2 - \sqrt{2}\right) = \left(-2 - \sqrt{2}\right)^2 e^{-2-\sqrt{2}} = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}};$$

$$y\left(-2 + \sqrt{2}\right) = \left(-2 + \sqrt{2}\right)^2 e^{-2+\sqrt{2}} = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}.$$

6.5 Асимптоти графіка функції

Визначення. Пряма лінія S називається *асимптотою* лінії L, якщо відстань від точки лінії L до прямої S прямує до нуля при необмеженому віддалені цієї точки від початку координат.

Вертикальні та похилі асимптоти

1) Нехай лінія $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту. Рівняння вертикальної асимптоти $x = x_0$, а відповідно визначенню асимптоти $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$; і навпаки якщо точка x_0 є точкою нескінченного розриву функції $f(x)$, то пряма

$x = x_0$ є асимптотою лінії $y = f(x)$. Якщо $lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то лінія $y = f(x)$ має своєю асимптотою пряму $x = x_0$.

Взаємне розташування нескінченної гілки лінії та її вертикальної асимптоти $x = x_0$ розглядають за допомогою лівої та правої границь.

Приклад. Знайти вертикальні асимптоти функції

$$y = \frac{x^2 - x}{x + 3}.$$

*Розв'язання:*1. ОВФ: $x \neq -3$.

$$2. \lim_{x \to -3-0} \frac{x^2 - x}{x + 3} = \frac{(-3-0)^2 - (-3-0)}{-3-0+3} = \frac{12}{-0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to -3+0} \frac{x^2 - x}{x + 3} = \frac{(-3+0)^2 - (-3+0)}{-3+0+3} = \frac{12}{0} = \infty.$$

3. При $x \to -3$ кожен з двох односторонніх границь прямує до нескінченності, тому $x = -3$ – вертикальна асимптота. При $x \to -3 - 0$ гілка функції прямує до $-\infty$; при $x \to -3 + 0$ гілка функції прямує до ∞.

2) Нехай лінія $y = f(x)$ має похилу асимптоту. Рівняння такої асимптоти $y = kx + b$. Відповідно визначенню відстань від MN_1 прямує до нуля при $x \to \infty$ (рис. 6.7). Зручніше розглянути відстань MN, що також прямує до нуля при $x \to \infty$

$$MN = kx + b - f(x);$$

$$\lim_{x \to \infty} \big(kx + b - f(x)\big) = 0;$$

$$f(x) = kx + b + \varepsilon(x),$$

де $\varepsilon(x)$ нескінченно мала при $x \to \infty$. Поділимо обидві частини на x і перейдемо до границі при $x \to \infty$:

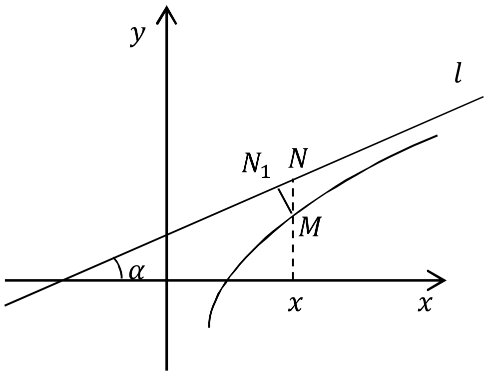


Рисунок 6.7

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{kx}{x}+\frac{b}{x}+\frac{\varepsilon(x)}{x}\right);$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Знайдемо b: $b=lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$.

Зауваження 1. При знаходженні k для показникової функції необхідно розглядати випадки при $x\to+\infty$ і при $x\to-\infty$ окремо (тобто маємо k_1 і k_2). Якщо $k_i=\pm\infty$, то похилої асимптоти не має і знаходити b_i не потрібно.

Зауваження 2. Якщо $k=0$, то похила асимптота перетворюється на горизонтальну:

$$y=b,\qquad b=\lim_{x\to\infty}f(x).$$

Приклад. Знайти похилу асимптоту функції

$$y = \frac{x^2 - x}{x + 3}.$$

Розв'язання:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2 - x}{x + 3}}{x} \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x}{(x + 3)x} = 1\,.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - x}{x + 3} - x\right) = |\infty - \infty| =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - x^2 - 3x}{x + 3} = -4.$$

$y = x - 4$ похила асимптота функції.

6.6 Загальна схема дослідження функції

1. Область визначення функції (ОВФ).
2. Точки перетину з осями координат. Точки перетину з віссю Oy знаходимо з умови $x = 0$, а з віссю Ox з умови $y = 0$.
3. Парність (непарність) функції. Функція парна, якщо виконується умова $y(-x) = y(x)$, і непарна якщо $y(-x) = -y(x)$.
4. Періодичність. Якщо функція періодична, то $y(x + \mathrm{T}) = y(x),$ де Т – період функції.
5. Дослідження функції на монотонність та екстремум.
6. Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину.
7. Асимптоти функції.
8. Побудова графіку функції.

Приклад. Провести повне дослідження функції та побудувати графік

$$y = \frac{x^2}{x+4}.$$

Розв'язання:

1. ОВФ: $x + 4 \neq 0$; $x \neq -4$.
2. При $x = 0, y = 0$. т. M_1 (0,0) – точка перетину з осями координат.
3. $y(-x) = \frac{x^2}{-x+4}$, $y(-x) \neq \pm y(x) -$ функція загального виду.
4. Неперіодична.
5. $y' = \frac{2x(x+4)-x^2}{(x+4)^2} = \frac{x^2+8x}{(x+4)^2}$,

   $y' = 0$, при $x^2 + 8x = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -8$.

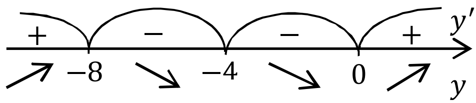


Рисунок 6.8

При $x \epsilon (-\infty, -8) \cup (0, \infty)$ функція зростає, при $x \epsilon (-8, -4) \cup (-4, 0)$ функція спадає (рис. 6.8).

$y(-8) = \frac{(-8)^2}{-8+4} = \frac{64}{-4} = -16,$ $M_2(-8, -16) -$ точка екстремуму (max). $y(0) = 0$, $M_3(0,0)$ – точка екстремуму (min).

6. $y'' = \frac{(2x+8)(x+4)^2 - 2(x^2+8x)(x+4)}{(x+4)^4} = \frac{24}{(x+4)^3}$,

$y'' \neq 0$ – точок перегину не має.

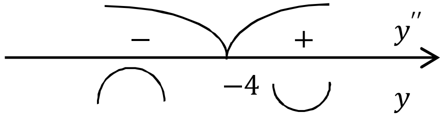


Рисунок 6.9

При $x\epsilon(-\infty, -4)$ функція опукла, при $x\epsilon(-4, \infty)$ функція угнута (рис. 6.9).

7. Вертикальні асимптоти: ОВФ $x \neq -4$, тому

$$\lim_{x\to -4-0} \frac{x^2}{x+4} = \frac{(-4-0)^2}{-4-0+4} = \frac{16}{-0} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to -4+0} \frac{x^2}{x+4} = \frac{(-4+0)^2}{-4+0+4} = \frac{16}{0} = \infty.$$

При $x \to -4$ кожна з двох односторонніх границь прямує до нескінченності, тому $x = -4$ – вертикальна асимптота. При $x \to -4-0$ гілка функції прямує до $-\infty$; при $x \to -4+0$ гілка функції прямує до ∞.

Похила асимптота:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x+4}}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+4x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x+4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x}{x+4} = -4,$$

$y = x - 4$ похила асимптота.

Побудуємо графік функції (рис.6.10)

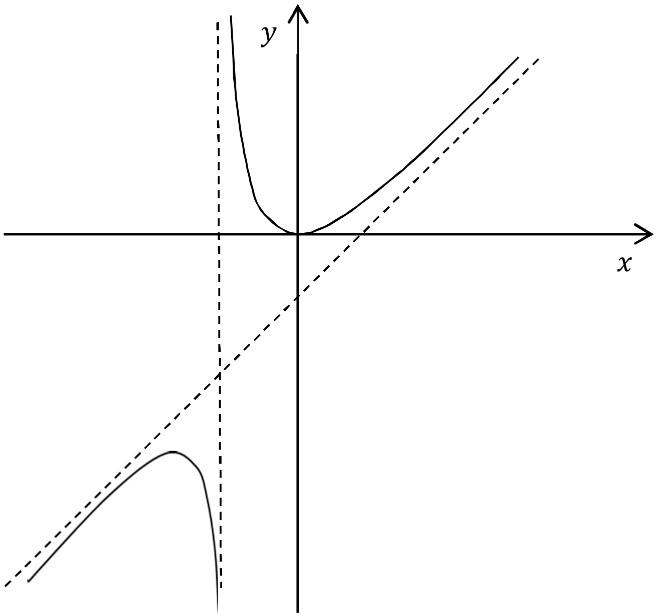


Рисунок 6.10

Дослідження функції виконано.

Лекція 7 Пряма лінія на площині. Відстань від точки до прямої. Площа трикутника. Типові задачі на пряму лінію

7.1 Декартова прямокутна система координат на площині

Для визначення положення довільної точки використовується деяка система координат. Її вибір залежить від характеру поставленої задачі. Найбільш поширеною на практиці є декартова прямокутна.

Довільній точці M координатної прямої Ox відповідає певне дійсне число x – її ***координата***. Навпаки, довільному дійсному числу x відповідає певна точка M координатної прямої Ox. Враховуючи таку взаємно однозначну відповідність, координатну пряму називають ***числовою прямою*** і ототожнюють з множиною дійсних чисел R: $R\epsilon(-\infty;\ +\infty)$.

Відстань між довільними двома точками $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$ визначається формулою

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

Дві взаємно перпендикулярні координатні прямі Ox і Oy зі спільним *початком* O утворюють *декартову прямокутну систему координат на площині* Ox називається *віссю абсцис*, а Oy – *віссю ординат*. Сукупність прямих, що перпендикулярні координатним осям, утворює *координатну сітку* на координатній площині Oxy . Положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою парою чисел $(x; y)$ – її *координатами* (x – *абсциса*, y – *ордината*).

7.2 Відстань між двома точками. Ділення відрізка у заданому відношенні. Площа трикутника

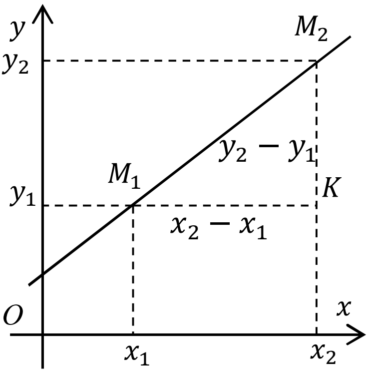


Рисунок 7.1

З прямокутного $\Delta\, M_1KM_2$ (рис. 7.1) за теоремою Піфагора випливає, що ***відстань між*** довільними ***двома точками*** $M_1(x_1, y_1)$ *і* $M_2(x_2, y_2)$ *визначається формулою*

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Нехай задані дві точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ і відношення $\lambda = M_1M/MM_2$, у якому точка $M(x, y)$ ділить відрізок M_1M_2 (рис. 7.2).

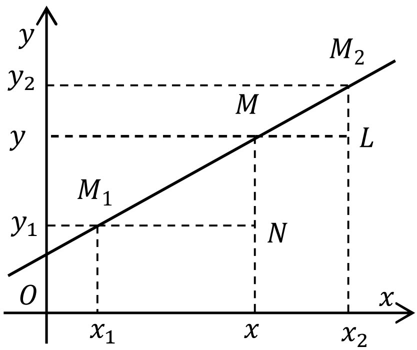


Рисунок 7.2

З подібності прямокутних трикутників $\Delta M_1NM \sim \Delta MLM_2$ випливає, що

$$\frac{NM}{LM_2} = \frac{M_1N}{ML} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda;$$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda.$$

Звідси ***координати точки $M(x,y)$, яка ділить заданий відрізок у заданому відношенні***, обчислюються за формулами

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 пополам, то $\lambda=1$. Тоді ***координати середини відрізка*** визначаються за формулами

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}; \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Площу трикутника з вершинами в точках $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ та $C(x_3,y_3)$ знаходимо за формулою:

$$S=\frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|.$$

7.3 Основні типи рівнянь прямої на площині

7.3.1 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Теорема Будь-якій прямій відповідає рівняння першого степеня.

Доведення: Розглянемо загальний випадок розташування прямої на площині (див. рис. 7.3). Нехай α – кут, який утворює пряма з віссю Ox. Позначимо через $\boldsymbol{k=tg\alpha}$ – ***кутовий коефіцієнт прямої***. Позначимо через b – ординату точки перетину N прямої з віссю Oy.

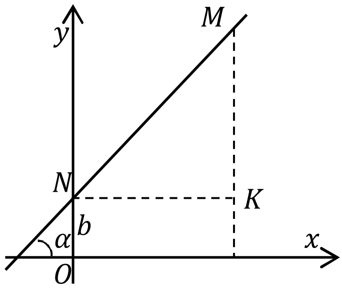


Рисунок 7.3

Візьмемо будь-яку точку $M(x,y)$ що належить прямій. Проведемо MK і NK паралельно координатним осям. Отримаємо трикутник MNK – прямокутний (за побудовою). З прямокутного трикутника маємо:

$$\frac{MK}{NK} = tg\alpha = k, \qquad NK = x,$$

$$MK = y - b, \frac{y-b}{x} = k,$$

$y = kx + b$ – ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.***

Зауваження: 1)Якщо $k = 0$, пряма паралельна вісі Ox і рівняння прямої має вид: $y = b$.

2) Якщо k додатне, пряма утворює гострий кут з віссю Ox, якщо k від'ємне – тупий кут.
3) Якщо пряма перпендикулярна вісі Ox, кутовий коефіцієнт відсутній і рівняння прямої має вид: $x = a$.

7.3.2 Загальне рівняння прямої

Теорема. Будь-якому рівнянню першого степеня відповідає деяка пряма.

Доведення: Загальний вигляд рівняння першого степеня

$$Ax + By + C = 0.$$

Нехай $A = 0$, тоді $By + C = 0$, $y = -\frac{C}{B}$ (рівняння виду $y = b$).

Нехай $B = 0$, тоді $Ax + C = 0$, $x = -\frac{C}{A}$ (рівняння виду $x = a$).

Нехай $A \neq 0, B \neq 0$, тоді $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ (рівняння виду $y = kx + b$).

В будь-якому випадку рівняння першого ступеня описує пряму лінію. Отже,

$Ax + By + C = 0$ – ***загальне рівняння прямої.***

7.3.3 Рівняння прямої у відрізках

Нехай дано пряму $Ax + By + C = 0$, що не паралельна ні одній з координатних осей та не проходить через початок координат, тобто $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, (рис. 7.4).

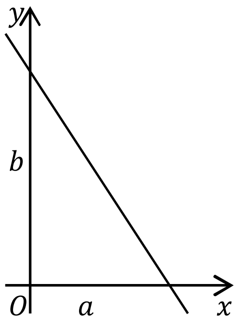


Рисунок 7.4

Перетворимо це рівняння:

$$Ax + By = -C | : (-C);$$

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1;$$

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1.$$

Нехай $\frac{-C}{A} = a$, $\frac{-C}{B} = b$. Тоді рівняння має вигляд

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – ***рівняння прямої у відрізках.***

7.3.4 Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай дано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, які належать прямій. Рівняння прямої $y = kx + b$ (1), якщо точка M_1 належить прямій, то виконується рівність $y_1 = kx_1 + b$ (2).

З рівняння (1) віднімемо рівняння (2), отримаємо

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

За умовою ця пряма проходить і через точку M_2, а тому координати точки M_2 задовольняють рівнянню:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Кутовий коефіцієнт шуканої прямої має вигляд:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Таким чином шукане рівняння має вигляд:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

або $$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Приклад. Дано трикутник ABC: $A(-2,-3)$, $B(4,3)$, $C(2,5)$. Знайти рівняння медіани BL.

Розв'язання: За визначенням, медіана поділяє сторону навпіл (рис.7.5), тому знайдемо координати точки L, використовуючи формули:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

$$x_L = \frac{-2 + 2}{2} = 0;\ \ y_L = \frac{-3 + 5}{2} = 1.$$

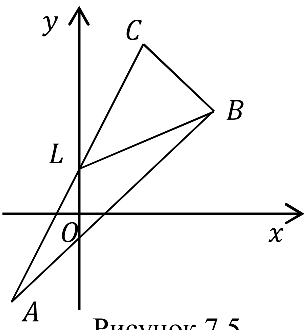


Рисунок 7.5

$L(0,1)$ – середина відрізку AC.

За формулою рівняння прямої, що проходить через дві точки маємо:

$$\frac{y - 3}{1 - 3} = \frac{x - 4}{0 - 4}; \qquad \frac{y - 3}{-2} = \frac{x - 4}{-4};$$

$$-4(y-3) = -2(x-4) | : (-4);$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}x - 2;$$

$y = \frac{1}{2}x + 1 -$ рівняння медіани BL.

7.3.5 Рівняння прямої, що проходить через дану точку з заданим кутовим коефіцієнтом

Нехай дано точку $A(x_1, y_1)$ і кутовий коефіцієнт k, будемо шукати рівняння у вигляді $y = kx + b(1)$, не відоме b знайдемо з умови проходження прямої через точку A:

$$b = y_1 - kx_1.$$

Підставимо b у рівняння (1) і отримаємо:

$y = kx + y_1 - kx_1$ або

$y - y_1 = k(x - x_1) -$ ***рівняння прямої, що проходить через дану точку з заданим кутовим коефіцієнтом.***

7.4 Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай дано дві прямі l_1 і l_2: $y = k_1x + b_1, y = k_2x + b_2$. Прямі мають відповідно кутові коефіцієнти:

$k_1 = tg\alpha_1$ і $k_2 = tg\alpha_2$.

Розглянемо випадок коли прямі l_1 і l_2 перетинаються під довільним кутом φ (рис. 7.6). Під кутом φ розуміємо найменший кут, на який потрібно повернути проти годинникової стрілки пряму l_1 до прямої l_2 щоб вони збігалися. Скористаємося теоремою про зовнішній кут трикутника:

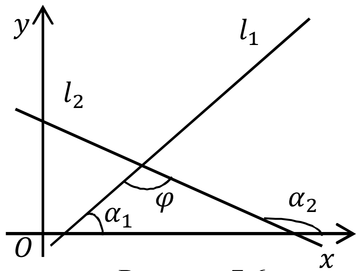


Рисунок 7.6

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi; \;\; \varphi = \alpha_2 - \alpha_1;$$

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1);$$

$$tg\varphi = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2};$$

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2};$$

$\varphi = arctg\left(\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right) -$ ***кут між прямими.***

Розглянемо випадок коли прямі паралельні, тоді кути, що утворюють прямі з додатнім напрямком осі абсцис рівні: $\alpha_1 = \alpha_2$. Тому $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$, і відповідно

$k_1 = k_2$ – ***умова паралельності прямих.***

Розглянемо випадок коли прямі перпендикулярні. З теореми про зовнішній кут трикутника маємо $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^{\circ}$,

$$tg\alpha_2 = tg\left(\alpha_1 + 90^{\circ}\right) = -ctg\alpha_2 = -\frac{1}{tg\alpha_2};$$

$k_1 = -\frac{1}{k_2}$ – ***умова перпендикулярності прямих.***

7.5 Відстань від точки до прямої. Площа трикутника

Знайдемо відстань d від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої l: $Ax + By + C = 0$ (рис. 7.7).

Нехай точка $L(x_1, y_1)$ належить прямій. Перетворимо загальне рівняння прямої в рівняння з кутовим коефіцієнтом

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, \qquad k = -\frac{A}{B}.$$

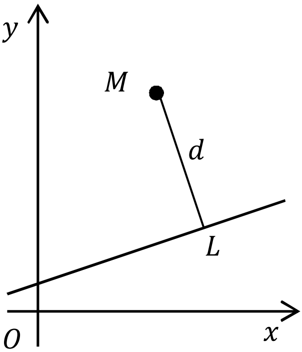


Рисунок 7.7

Прямі l і ML взаємно перпендикулярні, за умовою перпендикулярності прямих

$$k_1 = -\frac{1}{k_2};\ k_{ML} = \frac{B}{A}.$$

Рівняння ML: $y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0)$, так як L належить прямій ML, то x_1 і y_1 задовольняють рівняння

$$y_1 - y_0 = \frac{B}{A}(x_1 - x_0) | : B;$$

$$\frac{y_1 - y_0}{B} = \frac{x_1 - x_0}{A} = g, \text{тоді}$$

$$y_1 - y_0 = gB;\ \ x_1 - x_0 = gA. \qquad (I)$$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sqrt{g^2A^2 + g^2B^2} =$$

$$= |g|\sqrt{A^2 + B^2} \qquad (II)$$

З (I) знайдемо x_1, y_1:

$$y_1 = gB + y_0;\ \ x_1 = gA + x_0.$$

Підставимо отримані вирази x_1, y_1 у загальне рівняння прямої l, отримаємо:

$$A(gA + x_0) + B(gB + y_0) + C = 0;$$

$$\vartheta A^2 + Ax_0 + \vartheta B^2 + By_0 + C = 0;$$

$$\vartheta(A^2 + B^2) = -Ax_0 - By_0 - C;$$

$$\vartheta = \frac{-(Ax_0 + By_0 + C)}{A^2 + B^2}. \qquad (III)$$

Підставимо у (II) вираз (III), тримаємо:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Отже, щоб знайти відстань від точки до прямої необхідно підставити координати цієї точки у загальне рівняння прямої і модуль цього виразу поділити на корінь квадратний із суми квадратів коефіцієнтів, які знаходяться біля змінних x, y.

7.6 Типові задачі на пряму лінію

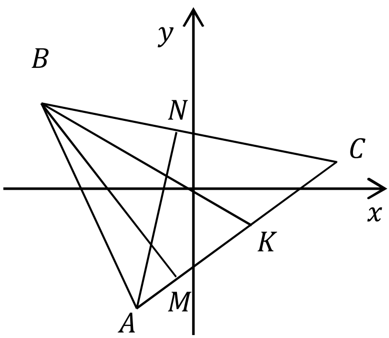


Рисунок 7.8

Приклад. Для трикутника з вершинами $A(-2,-4)$, $B(-6,3)$, $C(5,1)$ (рис. 7.8) розв’язати наступні задачі:

а) Обчислити площу трикутника.

Розв’язання. Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|;$$

Тому маємо:

$$S = \frac{1}{2}|(-2-5)(3-1) - (-6-5)(-4-1)| = \frac{1}{2}|-14-55|.$$

$$S = 34{,}5 \text{ (од. кв.)}.$$

б) Записати рівняння сторін трикутника.

Розв'язання. Рівняння сторони AB: $A(-2,-4)$, $B(-6{,}3)$. За формулою рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-(-2)}{-6-(-2)} = \frac{y-(-4)}{3-(-4)}$$

Після тотожних перетворень отримаємо:

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{15}{2}.$$

Рівняння сторін *BC* і *AC* знаходимо аналогічно:

BC: $B(-6{,}3)$, $C(5{,}1)$

$$\frac{x-(-6)}{5-(-6)} = \frac{y-3}{1-3}. \quad \text{Звідси: } y = -\frac{2}{11}x + \frac{21}{11}.$$

AC: $A(-2,-4)$, $C(5{,}1)$

$$\frac{x-(-2)}{5-(-2)} = \frac{y-(-4)}{1-(-4)}. \quad \text{Звідси } y = \frac{5}{7}x - \frac{18}{7}.$$

в) Знайти внутрішній кут α трикутника.

Розв'язання. Для виконання цього завдання скористаємося формулою

$$tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Кут α утворено перетином прямих AB і AC. Отже, тут з урахуванням додатного обходу проти годинникової стрілки маємо:

$$k_1 = k_{AC} = \frac{5}{7}, \qquad k_2 = k_{AB} = -\frac{7}{4};$$

$$tg\alpha = \frac{-\frac{7}{4} - \frac{5}{7}}{1 - \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{4}} = \frac{-\frac{69}{28}}{-\frac{7}{28}} = \frac{69}{7}; \alpha = arctg\frac{69}{7}.$$

в) Знайти рівняння медіани BK.

Розв'язання. Медіана – це відрізок, який сполучає вершину трикутника з серединою його протилежної сторони. Координати точки K (рис. 19) знайдемо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Тут: $\text{A}(-2, -4)$, $\text{C}(5,1)$. Отже, маємо:

$$x_K = \frac{-2 + 5}{2} = \frac{3}{2}, \qquad y_K = \frac{-4 + 1}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Рівняння BK запишемо за формулою:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Тут: $B(-6{,}3), K\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. Отже $\dfrac{x+6}{\frac{3}{2}+6} = \dfrac{y-3}{-\frac{3}{2}-3}$.

Після тотожних перетворень маємо рівняння медіани *ВК:*

$$y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5}.$$

г) Знайти рівняння висоти AN.

Розв'язання. Висота AN – це перпендикуляр проведений з вершини A до сторони трикутника BC. Отже, для прямих BC і AN виконується умова перпендикулярності:

$$k_{AN} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{\left(-\frac{2}{11}\right)} = \frac{11}{2}.$$

Рівняння висоти *AN* знаходимо за формулою:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

де $k = k_{AN}, A(x_0, y_0)$. Тобто: $k = \frac{11}{2}$, $A(-2, -4)$.

Маємо $y + 4 = \frac{11}{2}(x+2)$; $y = \frac{11}{2}x + 11 - 4$.

Рівняння висоти AN: $y = \frac{11}{2}x + 7$.

д) Обчислити довжину висоти CM.

Розв'язання. Довжину висоти CM знайдемо як відстань від точки $C(x_0, y_0)$ до прямої AB за формулою:

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

Для цього перепишемо рівняння прямої AB в загальному виді:

$$y = -\frac{7}{4}x - \frac{15}{2}\,; \quad 4y = -7x - 30; \quad 7x + 4y + 30 = 0;$$

отже, $A = 7, B = 4, C = 30$. Точка $C(x_0, y_0)$ має координати $x_0 = 5, y_0$=1.

Отже: $$d = \left|\frac{7 \cdot 5 + 4 \cdot 1 + 30}{\sqrt{7^2 + 4^2}}\right| = \frac{69}{\sqrt{65}}.$$

ж) Записати рівняння прямої, яка проходить через вершину трикутника B паралельно до його сторони AC.

Розв'язання. Позначимо рівняння шуканої прямої як BF. За умовою пряма BF паралельна прямій AC, а тому використавши умову паралельності двох прямих знайдемо кутовий коефіцієнт прямої BF:

$$k_{BF} = k_{AC} = \frac{5}{7}.$$

Для прямої BF відомі кутовий коефіцієнт та точка яка належить прямій, а отже використаємо наступне рівняння:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Тут $k = \frac{5}{7}$, $B(6{,}3)$. Маємо:

$$y - 3 = \frac{5}{7}(x + 6)\,; \quad y = \frac{5}{7}x + \frac{30}{7} + 3, \qquad BF\colon\ y = \frac{5}{7}x + \frac{51}{7}.$$

Лекція 8
Основні типи рівняння площини у просторі. Окремі випадки загального рівняння площини

8.1 Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

Нехай на площині α задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і відомий ***вектор нормалі*** $\vec{n} = (A; B; C) \neq \vec{0}$ (рис. 8.1).

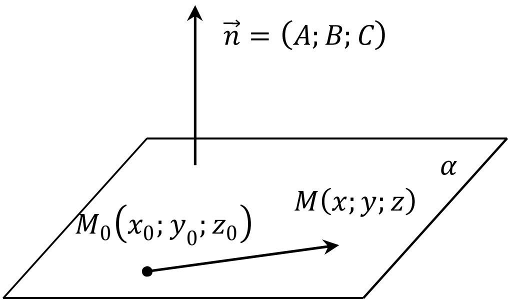


Рисунок 8.1

Візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ на цій площині та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Точка $M(x; y; z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярний до нормалі $\vec{n}$. Використовуючи умову перпендикулярності векторів, маємо

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

або в координатній формі

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

– рівняння площини, що проходить через задану точку M_0 перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}$.

8.2 Загальне рівняння площини

Розкриємо дужки в рівнянні

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

і отримаємо $Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$. Згрупуємо сталі величини та позначимо $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Тоді одержимо

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

– ***загальне рівняння площини***, що є лінійним відносно координат x, y, z, причому хоча б один з коефіцієнтів A, B, C відмінний від нуля, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Теорема. *Будь-яка площина визначається лінійним рівнянням відносно координат x, y, z. Кожному лінійному рівнянню зі змінними x, y, z відповідає деяка площина.*

8.3 Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай на площині α задано три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3)$ які не лежать на одній прямій (рис. 8.2).

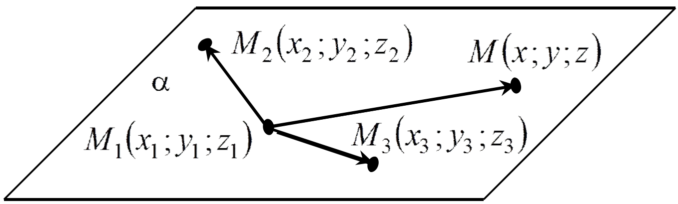


Рисунок 8.2

Візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$ на цій площині та побудуємо три вектори

$$\overrightarrow{M_1M}(x - x_1; y - y_1; z - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)\ ,$$

$$\overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$$

що виходять з однієї точки M_1. Точка $M(x, y, z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли ці три вектори компланарні. Використовуючи умову компланарності трьох векторів, маємо

$$\left(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}\right) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$$

або в координатній формі

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

– ***рівняння площини, що проходить через три задані точки***.

8.4 Рівняння площини у відрізках

Нехай площина α перетинає всі три координатні вісі Ox, Oy і Oz відповідно у точках $M_1(a; 0; 0)$, $M_2(0; b; 0)$ і $M_3(0; 0; c)$ (рис. 8.3).

Використовуючи рівняння площини, що проходить через три точки, маємо

$$\begin{vmatrix} x - a & y - 0 & z - 0 \\ 0 - a & b - 0 & 0 - 0 \\ 0 - a & 0 - 0 & c - 0 \end{vmatrix} = 0;$$

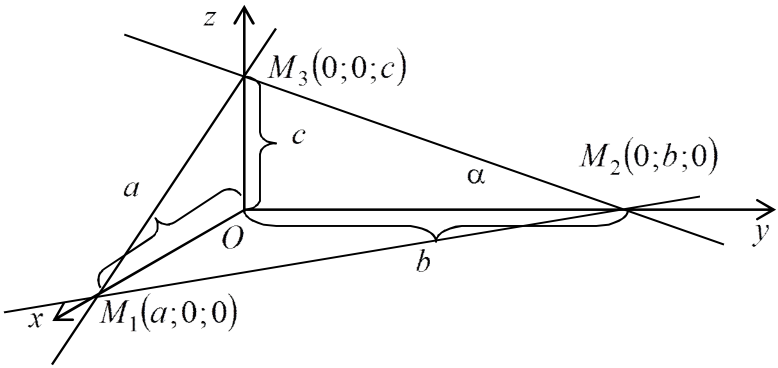


Рисунок 8.3

$$bcx - abc + abz + acy = 0;$$

$$bcx + abz + acy = abc | \div abc;$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 - \text{рівняння площини у відрізках.}$$

8.5 Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай задано дві площини α_1 і α_2 своїми загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{і} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Кут φ між площинами α_1 і α_2 дорівнює куту між їх векторами нормалей $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ (рис. 8.4).

Отже,

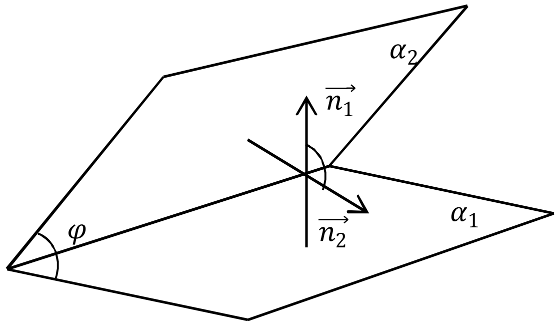


Рисунок 8.4

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{{A_1}^2+{B_1}^2+{C_1}^2}\sqrt{{A_2}^2+{B_2}^2+{C_2}^2}}.$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для площин.

Умова перпендикулярності двох площин

$$\boldsymbol{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}.$$

Умова паралельності двох площин

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Дві площини збігаються, якщо

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_1}.$$

Приклад. Знайти кут між заданими площинами $5x - 4y + 2z - 8 = 0$ і $3x + 7y - z + 1 = 0$.

Розв'язання. $\overrightarrow{n_1} = (5;\ -4; 2)$ і $\overrightarrow{n_2} = (3; 7;\ -1)$, тому маємо:

$$\cos\varphi = \frac{5\cdot 3 + (-4)\cdot 7 + 2\cdot(-1)}{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + 7^2 + (-1)^2}} = \frac{15 - 28 - 2}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{59}}$$

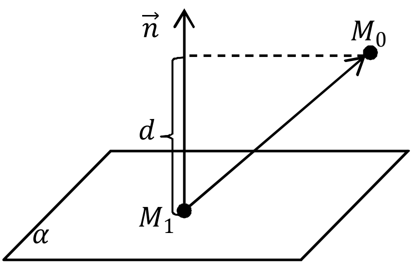
$$\cos\varphi = \frac{-15}{\sqrt{2655}};\ \varphi = \pi - arccos\frac{15}{\sqrt{2655}}.$$

8.6 Відстань від точки до площини

Нехай у просторі задані площина α своїм загальним рівнянням
$Ax + By + Cz + D = 0$ і деяка точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (рис. 8.5).

Візьмемо на цій площині довільну точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_0}$:

$$\overrightarrow{M_1M_0} = \ (x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1).$$



Тоді відстань d від точки M_0 до площини α дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на вектор нормалі $\vec{n} = (A; B; C)$

Рисунок 8.5

$$d = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Оскільки $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Приклад. Знайти відстань d від точки $M_0(4; -3; 5)$ до площини α: $3x + 6y - 2z - 2 = 0$.

Розв'язання. $A = 3$, $B = 6$, $C = -2$, $D = -2$, $x_0 = 4$, $y_0 = -3$, $z_0 = 5$.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3 \cdot 4 + 6 \cdot (-3) + (-2) \cdot 5 - 2|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}};$$

$$d = \frac{|-18|}{\sqrt{50}} = \frac{18}{5\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{5} \text{ (од.)}.$$

8.7 Рівняння прямої, що проходить через дану точку паралельно даному вектору (канонічні рівняння прямої)

Нехай на прямій l задана деяка точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і відомий ***напрямний вектор*** $\vec{S} = (m; n; p)$ цієї прямої – довільний ненульовий вектор, що їй паралельний (рис. 8.6).

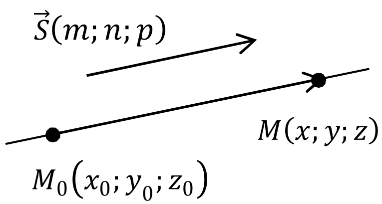


Рисунок 8.6

Візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ на цій прямій та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Точка M належить прямій тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору $\vec{S}$. Використовуючи умову паралельності векторів, маємо

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$ – ***канонічні рівняння прямої***.

8.8 Параметричні рівняння прямої

Якщо у канонічні рівняння прямої ввести коефіцієнт пропорційності t

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

і розв'язати їх відносно x, y та z, то отримаємо:

$$\frac{x-x_0}{m}=t, \qquad \frac{y-y_0}{n}=t, \qquad \frac{z-z_0}{p}=t.$$

$$\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases}$$

– ***параметричні рівняння прямої***, де змінна t служить параметром.

Приклад. Пряма задана канонічним рівнянням

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+1}{5}.$$

Записати параметричне рівняння цієї прямої.

Розв'язання.

$$\frac{x-1}{4}=t, \quad \frac{y+2}{-3}=t, \qquad \frac{z+1}{5}=t.$$

$$\begin{cases} x-1=4t \\ y+2=-3t; \\ z+1=5t \end{cases} \quad \begin{cases} x=4t+1 \\ y=-3t-2\,. \\ z=5t-1 \end{cases}$$

8.9 Рівняння прямої, що проходить через дві дані точки

Нехай на прямій l задано дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. За напрямний вектор можна взяти

$$\vec{S} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Тоді з канонічних рівнянь маємо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

– ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***.

Приклад. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-4; 2; -5)$ і $M_2(2; -6; 1)$.

Розв'язання.

$$\frac{x - (-4)}{2 - (-4)} = \frac{y - 2}{-6 - 2} = \frac{z - (-5)}{1 - (-5)}; \quad \frac{x + 4}{6} = \frac{y - 2}{-8} = \frac{z + 5}{6};$$

$$\frac{x + 4}{3} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z + 5}{3}.$$

8.10 Пряма як перетин двох площин

Просторова лінія може задаватися як перетин двох поверхонь. Зокрема, пряма l служить лінією перетину деяких двох площин α_1 і α_2. Якщо ці площини задані своїми загальними рівняннями

$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

то система

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

називається ***загальним рівнянням прямої***.

Приклад. Пряма l задана своїм загальним рівнянням

$$\begin{cases} x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x + y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Знайти її канонічне рівняння.

Розв'язання. Знайдемо напрямний вектор прямої, за допомогою векторного добутку векторів $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$.

$$\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 7\vec{k}.$$

Знайдемо деяку точку M_0 на прямій. Нехай $x = 0$, тоді

$$\begin{cases} -3y + 2z = 5 \\ y - z = -1 \end{cases}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2; \quad y = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -3; \quad z = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -2.$$

$$M_0(0;\ -3;\ -2)$$

Канонічне рівняння

$$\frac{x}{1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+2}{7}.$$

8.11 Кут між двома прямими

Нехай задано дві прямі своїми канонічними рівняннями
$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ і } l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$
Кут φ між прямими l_1 і l_2 дорівнює куту між їх напрямними векторами $\overrightarrow{S_1}=(m_1;n_1;p_1)$ і $\overrightarrow{S_2}=(m_2;n_2;p_2)$. Отже,

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{{m_1}^2+{n_1}^2+{p_1}^2}\sqrt{{m_2}^2+{n_2}^2+{p_2}^2}}.$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для прямих.

Умова перпендикулярності двох прямих

$$\boldsymbol{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0}.$$

Умова паралельності двох прямих

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

8.12 Умова перетину двох непаралельних прямих. Відстань між мимобіжними прямими

Дві прямі у просторі можуть перетинатися або бути паралельними чи мимобіжними.

Нехай задано дві непаралельні прямі

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ і } l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Прямі l_1 і l_2 перетинаються, коли вектори $\overrightarrow{S_1} = (m_1; n_1; p_1)$, $\overrightarrow{S_2} = (m_2; n_2; p_2)$ і $\overrightarrow{M_1M_2} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right)$ – компланарні (лежать в одній площині). Використовуючи умову компланарності трьох векторів $\left(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{S_1}\right) \cdot \overrightarrow{S_2} = 0$, одержуємо ***умову перетину двох непаралельних прямих***:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Зауваження. Для довільних прямих l_1 і l_2 ця рівність служить умовою їх належності одній площині. Якщо ця умова не виконується, то прямі l_1 і l_2 є мимобіжними.

Щоб знайти відстань між мимобіжними прямими l_1 і l_2, розглянемо вектор $\vec{a} = \overrightarrow{S_1} \times \overrightarrow{S_2}$, який перпендикулярний до обох прямих. Тоді відстань d між прямими l_1 і l_2 дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = \left(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\right)$ на вектор $\vec{a}$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}\right|}{|\vec{a}|}.$$

Зауваження. Ця формула справедлива також для прямих l_1 і l_2, що перетинаються. Зрозуміло, що при цьому $d = 0$.

Приклад. Знайти відстань d між заданими прямими:

$$l_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{2} \text{ і } l_2: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-3}.$$

Розв'язання.

$$\vec{a} = \overrightarrow{S_1} \times \overrightarrow{S_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Оскільки $\vec{a} \neq \vec{0}$, то прямі l_1 і l_2 – непаралельні. Далі знаходимо: $\overrightarrow{M_1M_2} = (-2-1; 0+2;\ 2-5) = (-3; 2;\ -3)$;

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 7^2 + 5^2} = \sqrt{110};$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}\right| = |-3 \cdot 6 + 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5| = |-19|\ ;$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a}\right|}{|\vec{a}|} = \frac{19}{\sqrt{110}}\ (\text{од.}).$$

8.13 Кут між прямою та площиною. Умови перпендикулярності та паралельності прямої та площини

Нехай задано пряму l канонічними рівняннями і площину α загальним рівнянням

$$l\!: \ \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}\ ; \quad \alpha\!: Ax + By + Cz + D = 0.$$

Кут φ між ними доповнює кут між напрямним вектором прямої $\vec{S} = (m, n, p)$ і вектором нормалі площини $\vec{n} = (A, B, C)$ до 90° (рис. 8.7).

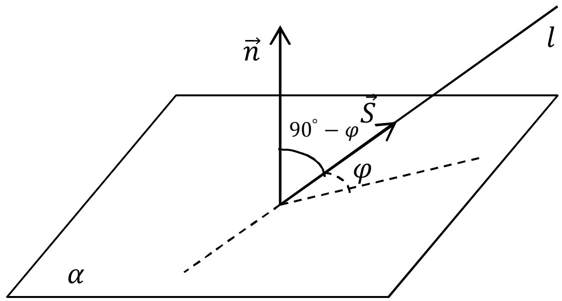


Рисунок 8.7

Тоді

$$\cos\left(90^\circ - \varphi\right) = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} .$$

Застосовуючи тригонометричну формулу зведення і враховуючи, що кут φ між прямою і площиною – гострий, маємо

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} .$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для взаємного розміщення прямої та площини.

Умова перпендикулярності прямої та площини:

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C} .$$

Умова паралельності прямої та площини:

$$\boldsymbol{Am + By + Cp = 0} .$$

8.14 Перетин прямої з площиною

Нехай задано пряму l параметричними рівняннями і площину α загальним рівнянням

$$l: \begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}; \quad \alpha: Ax + By + Cz + D = 0\,.$$

Для знаходження точки перетину прямої та площини необхідно скласти і розв'язати систему їх рівнянь. Цю систему зручно розв'язувати методом вилучення невідомих (методом Гауса), підставляючи вирази для x, y, z із параметричних рівнянь прямої у рівняння площини. Дістаємо рівняння для t

$$(Am + Bn + Cp)t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D).$$

1) Якщо $Am + Bn + Cp \neq 0$, тобто пряма не паралельна площині, то пряма і площина перетинаються в одній точці, що відповідає значенню параметра

$$t = \frac{-(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{Am + Bn + Cp}\,.$$

2) Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна площині, а $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, тобто точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямої l не лежить на площині α, то рівняння для t розв'язків не має. Пряма паралельна площині і не лежить на ній.

3) Якщо $Am + Bn + Cp = 0$, тобто пряма паралельна площині, і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, тобто точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямої l лежить на площині α, то рівняння для t виконується при всіх значеннях параметра. Пряма лежить на площині.

Приклад. Знайти проекцію N точки $M_0(2; -5; 4)$ на площину α: $3x + 2y - z - 6 = 0$.

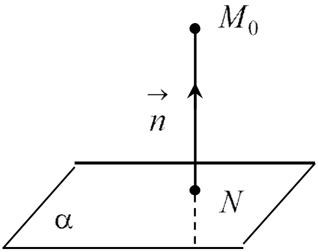


Рисунок 8.8

Розв'язання. Точка N служить основою перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на площину α (рис. 8.8). Напрямний вектор $\vec{S}$ прямої M_0N колінеарний вектору нормалі $\vec{n}$ площини. Можна вважати

$$\vec{S} = \vec{n} = (3; 2; \ -1).$$

Тоді параметричне рівняння прямої M_0N: $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 5 \\ z = -t + 4 \end{cases}$.

Підставляючи ці вирази у рівняння площини, одержимо значення параметра t, що відповідає точці перетину N прямої та площини

$$3(3t + 2) + 2(2t - 5) - (-t + 4) - 6 = 0; \quad t = -1.$$

Звідси $x = -1$; $y = -7$; $z = 5$.

Отже, проекцією служить точка $N(-1; \ -7; 5)$.

8.15 Відстань від точки до прямої

Нехай треба знайти відстань d від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої l, яка задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}$$

Розглянемо два способи визначення цієї відстані. 1. Візьмемо на прямій відому точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та побудуємо паралелограм на векторах $\vec{S} = (m, n, p)$ і $\overrightarrow{M_0M_1} = \left(x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\right)$ (рис. 8.9). Площа S цього паралелограма $S = \left|\vec{S}\right| \cdot d$ або $S = \left|\vec{S} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|$. Звідси

$$d = \frac{\left|\vec{S} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{\left|\vec{S}\right|}.$$

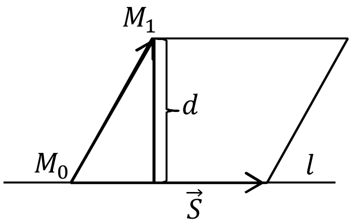


Рисунок 8.9

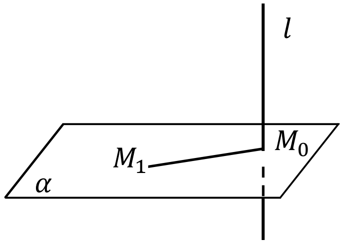


Рисунок 8.10

2. Проведемо через точку M_1 площину α, яка перпендикулярна до прямої l (рис. 8.10). Вектор нормалі $\vec{n} = (A, B, C)$ площини α колінеарний напрямному вектору $\vec{S}$ прямої l. Можна покласти $\vec{n} = \vec{S} = (m, n, p)$. Тоді

$$\alpha: m(x_1 - x_0) + n(y_1 - y_0) + p(z_1 - z_0) = 0.$$

Далі треба знайти точку M_0 перетину прямої та площини. Ця точка служить основою перпендикуляра, проведеного з точки M_1 на пряму l. Отже, $d = M_0M_1$.

Список рекомендованої літератури

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – СПб. : Профессия, 2001. – 432 с.
2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2006. – 736 с.
3. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн. / За ред. Г. Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003. – Кн. 1 : Основні розділи. – 400 с. – Кн. 2 – Спеціальні розділи. – 368 с.
4. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : АСТ, 2014. – Ч. 1. – 303 с., Ч. 2. – 415 с.
5. 5. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2003. – 648 с.
6. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов. – М. : Физматлит, 2005. – 240 с.
7. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 1 / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків : ХНУМГ, 2015. – 255 с.
8. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецьк : Сталкер, 2003. – 495 с.
9. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 2011. – Т. 1. − 430 с. – Т. 2. − 580 с.
10. Розендорн Э. Р. Теория поверхностей / Э. Р. Розендорн. – М. : Физматлит, 2006. – 304 с.
11. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 270 с.

Навчальне видання

ВОРОНОВСЬКА Лариса Петрівна

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
Модуль 1

(для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 275 – Транспортні технології, освітньої програми – Транспортні технології (міський транспорт))

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Л. П. Вороновська*

План 2019, поз. 70Л

Підп. до друку 06.03.2020. Формат 60 × 84/16.
Друк на ризографі. Ум. друк арк. 6,7
Тираж Зам. №

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.