МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до проведення практичних занять
із навчальної дисципліни

«МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ»

(для бакалаврів спеціальності 193 − Геодезія та землеустрій)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2020

Методичні рекомендації до проведення практичних занять із навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» (для бакалаврів спеціальності 193 − Геодезія та землеустрій) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : О. О. Воронков. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 138 с.

Укладач: канд. екон. наук, доц. О. О. Воронков

Рекомендовано кафедрою *земельного адміністрування та геоінформаційних систем*, протокол № 1 від 30.08.19.

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс «Математична обробка геодезичних вимірювань» є нормативною дисципліною у навчальному плані спеціальності 193 − Геодезія та землеустрій. Обсяг курсу становить 120 академічних годин або 4 кредити ECTS, обсяг практичних занять - 34 аудиторних години (17 практичних занять). Відповідно до програми курс розділений на три змістових модуля: «Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики. Теорія похибок вимірювань», «Особливості обробки вимірювань у планових і висотних геодезичних мережах» та «Спосіб найменших квадратів».

Метою вивчення дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірювань» є ознайомлення здобувачів з принципами та методами математичної обробки геодезичних даних, формування знань та навичок щодо опрацювання результатів геодезичних вимірювань та оцінювання їхньої точності.

В результаті вивчення курсу студенти мають опанувати основні методи визначення імовірнісних характеристик випадкових величин, статистичного опису результатів спостереження та перевірки статистичних гіпотез. Студенти повинні знати види похибок вимірювань, властивості випадкових похибок та способи зрівнювання геодезичних побудов, а також вміти користуватись властивостями випадкових похибок, визначати критерії точності вимірювань, обробляти ряди рівноточних та нерівноточних вимірів, визначати точність та надійність як результатів геодезичних вимірювань, так і функцій вимірюваних величин.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1 «ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ. ТЕОРІЯ ПОХИБОК ВИМІРЮВАНЬ»

Практичне заняття 1
ВИЗНАЧЕННЯ ІМОВІРНОСТІ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

Мета - формування навичок щодо визначення імовірності випадкових подій з використанням теорем теорії імовірностей.

Основні відомості

Випадкова подія – це будь-який факт, що у наслідку досліду може відбутися або не відбутися.

Імовірністю випадкової події називають числову міру ступеня об'єктивної можливості появи цієї події у наслідку досліду.

Імовірність випадкової події можна визначити за класичним методом за формулою:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де n – загальне число можливих наслідків досліду;

m – число наслідків досліду, що сприяють появі події А.

Сумою двох подій А і В називають подію С, яка полягає у появі події А або події В або обох подій разом: С = А + В.

Добутком двох подій А і В називають подію С, що полягає у спільній появі подій А і В: С = А · В.

Протилежними називають дві несумісних події А та $\overline{A}$ (не А), якщо вони складають повну групу.

Подію А називають *незалежною* від події В, якщо імовірність події А не змінюється від того, відбулася подія В чи ні. Якщо ж імовірність події А залежить від того, відбулася подія В чи ні, то такі події називають *залежними*.

Імовірність події А, обчислену за умови, що подія В відбулася, називають *умовною імовірністю* події А.

Теорема додавання. Імовірність суми двох несумісних подій А і В дорівнює сумі імовірностей цих подій, тобто

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Наслідки теореми додавання:

1. Якщо події A_1, A_2, … , A_i, …, A_n утворюють повну групу несумісних подій, сума їхніх імовірностей дорівнює 1:

$$P(\Sigma A_i) = \Sigma P(A_i) = 1.$$

2. Сума імовірностей двох протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \text{ звідки}$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Якщо дві події є сумісними, імовірність їхньої суми дорівнює сумі імовірностей цих подій мінус імовірність їхньої спільної появи:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Теорема множення. Імовірність добутку двох подій A і B дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовну імовірність іншої, обчислену за умови, що перша відбулася:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Якщо події A і B незалежні, то умовна імовірність події B дорівнює безумовній імовірності цієї події,

$$P(B|A) = P(B).$$

Імовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку імовірностей цих подій:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Якщо маємо n незалежних подій:

$$P(\prod_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Формула повної імовірності. Повна безумовна імовірність події A з урахуванням випадковості умов протікання досліду, дорівнює сумі добутків імовірностей кожної з гіпотез на умовну імовірність події A при кожній з гіпотез.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(H_i A) = \sum_{i=1}^{N} P(H_i) P(A / H_i).$$

Формула Бейеса (теорема гіпотез). Ця формула дозволяє за відомими до проведення досліду (апріорними) імовірностями гіпотез $P(H_i)$ та за результатом досліду (настання події A) обчислити післядослідні (апостеріорні) імовірності гіпотез $P(H_i|A)$.

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) * P(A / H_i)}{\sum P(H_i) * P(A / H_i)}.$$

Формула Бернуллі (повторні незалежні випробування). Імовірність того, що в результаті певної кількості дослідів подія A з'явиться рівно m разів дорівнює:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

де $P_n(m)$ − імовірність того, що в n випробуваннях подія A з'явиться рівно m разів;

C_n^m − кількість сполучень з n елементів по m;

p – імовірність появи події A в одному досліді;

q = 1 – p – імовірність не появи події A в одному досліді.

Формула Пуассона. Якщо кількість незалежних випробувань n велика, але значення добутку np залишається невеликим, імовірність того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться m разів, можна визначити за формулою:

$$P_n(m) = \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}.$$

Задача 1.1

Партія виробів містить N виробів, з яких m є дефектними. Навмання з цієї партії беруть k виробів для контролю. Визначити імовірність того, що серед них буде рівно *l* дефектних виробів.

Розв'язання

Позначимо подію, для якої необхідно визначити імовірність

A = {у контрольній партії рівно *l* дефектних виробів}.

Загальна кількість можливих наслідків досліду n дорівнює числу сполучень з N виробів по k, тобто n = C_N^k. Кількість наслідків досліду, які сприяють появі події A = {у контрольній партії рівно *l* дефектних виробів} визначимо в такий спосіб. Кількість випадків, які сприяють появі *l* дефектних виробів у контрольній партії дорівнює числу сполучень з m дефектних виробів по *l*:

$$m_д = C_m^l .$$

Кількість випадків, які сприяють появі k-l недефектних виробів у контрольній партії дорівнює числу сполучень з N-m недефектних виробів по k-l:

$$m_г = C_{N\text{-}M}^{k\text{-}l} .$$

Імовірність події A

$$P(A) = \frac{m_д * m_г}{n} = \frac{C_m^l \cdot C_{N-M}^{k-l}}{C_N^k}.$$

Подію A розглядаємо як одночасну наявність у контрольній партії l дефектних і k-l недефектних виробів.

Задача 1.2

Студент прийшов здавати екзамен. Він знає 15 з 20 запитань програми. Визначити імовірність того, що він відповість на три пропонованих екзаменаційних запитання.

Розв'язання

Запишемо подію, імовірність якої необхідно визначити, A = {студент знає відповіді на три запитання}. Виразимо її через елементарні події:

A_1 = {знає відповідь на перше запитання}

A_2 = {знає відповідь на друге запитання}

A_3 = {знає відповідь на третє запитання}

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$$

Події A_1, A_2, A_3 – залежні події. Обчислимо їхні умовні імовірності.

$$P(A_1) = \frac{15}{20}.$$

Умовна імовірність події A_2, за умови, що відбулася подія A_1,

$$P(A_2|A_1) = \frac{14}{19}.$$

Умовна імовірність події A_3, за умови, що відбулися події A_1 і A_2,

$$P(A_3|A_1 \cdot A_2) = \frac{13}{18}.$$

Тоді імовірність події A за теоремою множення:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{13}{18} = 0{,}368.$$

Задача 1.3

Ви маєте знайти людину, в якої день народження збігається з Вашим. Скількох незнайомців Вам потрібно буде опитати, щоб імовірність події A = {день народження людини збігається з Вашим} була не меншою за 0,5?

Розв'язання

Імовірність того, що перша людина, в якої Ви запитали, не народилася в один день із Вами, дорівнює

$$P(\bar{A}) = \frac{365 - 1}{365}.$$

Якщо Ви опитаєте n чоловік, то за теоремою множення імовірність, що вони не народилися в один день із Вами дорівнюватиме:

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{365-1}{365}\right)^n.$$

Тоді імовірність події A={день народження людини збігається з Вашим}:

$$P(A) = 1 - \left(\frac{365-1}{365}\right)^n.$$

.

Оскільки задана ймовірність P(A) = 0,5, маємо:

$$0{,}5 = 1 - \left(\frac{365-1}{365}\right)^n.$$

Звідки n = 253 людини.

Задача 1.4

У двох урнах містяться кулі, що відрізняються тільки кольором. У першій - 5 білих; 11 чорних та 8 червоних. У другій - 10 білих; 8 чорних та 6 червоних. З кожної урни виймають одну кулю. Визначити імовірність події А = {вийняті кулі однакового кольору}.

Розв'язання

Для визначення імовірності події А = {вийняті кулі однакового кольору} виразимо її через елементарні події:

A_1 ={обидві кулі білі}

A_2 ={обидві кулі чорні}

A_3 ={обидві кулі червоні}.

Імовірність події А за теоремою множення для незалежних подій:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

Тоді:

$$P(A) = 5/24 \cdot 10/24 + 11/24 \cdot 8/24 + 8/24 \cdot 6/24 = 0{,}32.$$

Задача 1.5

Є три однакові на вигляд урни. У першій – 2 білі та 3 чорних кулі, в другій – 4 білі та 1 чорна, у третій – 3 білі. Навмання з однієї з урн виймають одну кулю. Визначити імовірність того, що вийнята куля виявиться білою.

Розв'язання

Позначимо подію А={вийнята куля біла}. Висуваємо три гіпотези:

H_1 ={обрана перша урна}

H_2 ={обрана друга урна}

H_3 ={обрана третя урна}.

Імовірність кожної гіпотези

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3.$$

Умовні імовірності події А:

$$P(A|H_1)=\frac{2}{5}; \qquad P(A|H_2)=\frac{4}{5}; \qquad P(A|H_3)= 1.$$

Повна безумовна ймовірність події А

$$P(A)= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) =$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{11}{15}.$$

Задача 1.6

Два стрільці роблять по одному пострілу у мішень. Для першого з них імовірність влучення дорівнює 0,8, а для другого - 0,4. Мішень пробита один раз (одне влучення). Знайти імовірність того, що мішень уражена першим стрільцем.

Розв'язання

Є факт, тобто подія А = {мішень уражена один раз}, отже один із стрільців промахнувся. Висуваємо гіпотези: H_1={мішень уражена першим стрільцем}; H_2={мішень уражена другим стрільцем}. Визначимо імовірності гіпотез. Мішень уражена першим стрільцем, якщо він при пострілі влучив у мішень і другий стрілець промахнувся, тоді $P(H_1) = 0{,}8 \cdot (1-0{,}4) = 0{,}48$. Мішень уражена другим стрільцем, якщо він при пострілі влучив у мішень і перший стрілець промахнувся, тоді $P(H_2) = (1-0{,}8) \cdot 0{,}4= 0{,}08$. Умовна імовірність події А, за умови, що має місце гіпотеза H_1 дорівнює $P(A/H_1)=1$, і за умови, що має місце гіпотеза H_2 дорівнює $P(A/H_1)=1$, тому що в цих випадках мішень буде напевно уражена один раз. Скористаємося теоремою гіпотез і визначимо імовірність реалізації гіпотези H_1:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum P(H_i) \cdot P(A/H_i)} = \frac{0{,}48 \cdot 1}{0{,}48 \cdot 1 + 0{,}08 \cdot 1} = 0{,}884.$$

Задача 1.7

Є п'ять однотипних пристроїв. Імовірність безвідмовної роботи кожного дорівнює 0,8. Визначити імовірність того, що в робочому стані перебувають m пристроїв (m = 1, 2, 3, 4, 5).

Розв'язання

Визначимо імовірність, що всі п'ять пристроїв пошкоджені:

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^{5-0} = 0{,}00032;$$

визначимо імовірність, що чотири пристрої пошкоджені:

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^{5-1} = 0{,}00638;$$

визначимо імовірність, що три пристрої пошкоджені:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^{5-2} = 0{,}0512;$$

визначимо імовірність, що два пристрої пошкоджені:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^{5-3} = 0{,}2047;$$

визначимо імовірність, що один пристрій пошкоджений:

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^{5-4} = 0{,}4095;$$

визначимо імовірність, що жодний пристрій не пошкоджений:

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^{5-5} = 0{,}328.$$

$$\Sigma p_i = 0{,}00032 + 0{,}00638 + 0{,}0512 + 0{,}2047 + 0{,}4095 + 0{,}328 = 1.$$

Задача 1.8

Імовірність виготовлення нестандартної деталі дорівнює 0,004. Знайти імовірність того, що серед 1000 деталей буде 5 нестандартних.

Розв'язання

Формалізуємо задачу: n = 1000, p = 0,004, a = np = 1000 · 0,004 = 4. Для визначення імовірності події $P_{1000}(5)$ скористаємось формулою Пуассона:

$$P_{1000}(5) = \frac{(4)^5}{5!} e^{-4} = 0{,}1563.$$

Практичне заняття 2
ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ТА ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Мета – сформувати вміння на підставі універсального закону розподілу випадкової величини визначати імовірності її значень та числові характеристики.

Основні відомості

Законом розподілу випадкової величини називають будь-яке правило, що дозволяє будь-якому значенню випадкової величини поставити у відповідність його імовірність.

Ряд розподілу – це таблиця, у верхньому рядку якої перелічені всі значення випадкової величини x_1, x_2, …, x_n в порядку зростання, а у нижньому – імовірності появи цих значень p_1, p_2, …, p_n:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

де $p_i = P\{X = x_i\}$.

Оскільки події $\{X = x_1\}$, $\{X = x_2\}$,…,$\{X = x_n\}$ несумісні та утворюють повну групу, сума їхніх імовірностей дорівнює одиниці $\sum p_i = 1$.

Функція розподілу випадкової величини X – це імовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше за x:

$$F(x) = P\{X \le x\}.$$

Функція розподілу має наступні властивості.

1. Значення функції розподілу належать відрізкові [0; 1]: $0 \le F(x_2) \le 1$;

2. Функція розподілу − неубутна функція, тобто $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

3. Імовірність того, що випадкова величина X прийме значення, укладене в інтервалі (x_1, x_2), дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі:

$$P\{ x_1 \le X \le x_2\} = F(x_2) – F(x_1).$$

4. Якщо всі можливі значення випадкової величини X належать інтервалу $(-\infty, +\infty)$, то при мінус нескінченності функція розподілу дорівнює нулю, а при плюс нескінченності − одиниці, тобто $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$.

Щільністю розподілу випадкової величини X у точці x називається похідна функції розподілу X у цій точці (передбачається, що F(x) безперервна і диференційована):

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Властивості щільності розподілу імовірностей:

1. Щільність розподілу є невід’ємною, тобто $f(x) \ge 0$ як похідна неубутної функції.

2. Функція розподілу визначається співвідношенням:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\text{dx}.$$

3. Інтеграл від щільності розподілу у нескінченних межах дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\text{dx} = 1,$$

де f(x)dx − елемент імовірності, тобто імовірність влучення випадкової величини X на елементарну ділянку dx.

4. Імовірність влучення безперервної випадкової величини на інтервал (x_1, x_2) дорівнює інтегралу щільності розподілу в межах від x_1 до x_2.

$$P\{x_1 \le X \le x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\text{dx}.$$

Узагальненням числових характеристик випадкової величини є так звані моменти або математичні сподівання випадкової величини. Розрізняють початкові α і центральні μ моменти.

Математичним сподіванням випадкової величини X називають суму добутків всіх можливих її значень на імовірності цих значень відповідно до формули

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \quad (2.1)$$

Для безперервної випадкової величини математичне сподівання має вигляд

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{x}\cdot\text{f}(x)\text{dx}. \quad (2.2)$$

Другий початковий момент α_2:

$$\alpha_2 = \text{M}[X^2]. \quad (2.3)$$

Як центровану випадкову величину розуміють її відхилення від математичного сподівання:

$$\overset{0}{X} = X - m_x . \qquad (2.4)$$

Можна показати, що перший центральний момент випадкової величини дорівнює нулю.

Найважливішим центральним моментом центральний момент другого порядку. Його називають дисперсією і він характеризує величину розкиду випадкової величини навколо її середнього значення.

Дисперсія випадкової величини для дискретної X:

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} \overset{0}{x}_i^2 \, p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i . \qquad (2.5)$$

Для безперервної випадкової величини:

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{0}{x}^2 f(x) \mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) \mathrm{dx}. \qquad (2.6)$$

Дисперсія випадкової величини є характеристикою розсіювання цієї величини навколо математичного сподівання.

Для оцінювання відхилення значення випадкової величини від її середнього з дисперсії вилучають квадратний корінь. Отриману характеристику називають середнім квадратичним відхиленням (с.к.в) σ. Її завжди використовують як оцінку точності отриманого результату геодезичного виміру.

Середнє квадратичне відхилення X:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \qquad (2.7)$$

Задача 2.1

Тричі кидають монету. Випадкова величина X - кількість появ герба. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X. Визначити функцію розподілу випадкової величини X та побудувати її графік.

Розв'язання

Побудуємо ряд розподілу X. Очевидно, що кількість появ герба в результаті триразового кидання монети може приймати чотири значення 0, 1, 2, 3. Для визначення імовірностей цих значень скористаємося формулою Бернуллі $\mathrm{P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}}$. Кількість дослідів n = 3, імовірність появи герба в одному досліді p = $\frac{1}{2}$, імовірність непояви герба в одному досліді q = 1 – p = 1 – $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$.

$$P_3(0) = C_3^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-0} = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8};$$

$$P_3(1) = C_3^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 3\,\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8};$$

$$P_3(2) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = 3\,\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8};$$

$$P_3(3) = C_3^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-3} = 1\,\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8};$$

Отже, ряд розподілу випадкової величини X має вигляд:

x_i	0	1	2	3
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

Виконаємо перевірку: $\sum p_i = 1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 1$.

За визначенням функція розподілу випадкової величини X - це імовірність того, що випадкова величина X отримає значення, менше за x: $F(x) = P\{X < x\}$.

Обчислимо значення функції розподілу:

$F(0) = P\{X < 0\} = 0;$
$F(1) = P\{X < 1\} = 1/8;$
$F(2) = P\{X < 2\} = 1/8 + 3/8 = 4/8;$
$F(3) = P\{X < 3\} = 4/8 + 3/8 = 7/8;$
при $X \geq 3$ $F(x) = 1$.

Побудуємо графік F(x) (рис. 2.1)

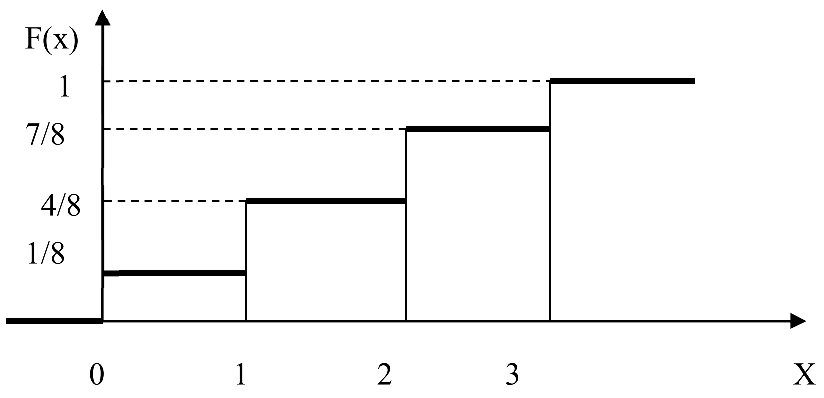


Рисунок 2.1 − Графік функції розподілу

Задача 2.2

Визначити числові характеристики дискретної випадкової величини для умов задачі 2.1. Маємо ряд розподілу:

x_i	0	1	2	3
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

Розв'язання

Визначимо математичне сподівання випадкової величини X:

$$m_x = \Sigma x_i p_i = 0 \cdot 1/8 + 1 \cdot 3/8 + 2 \cdot 3/8 + 3 \cdot 1/8 = 1{,}5.$$

Для визначення дисперсії скористаємось двома способами:

− формулою другого центрального моменту:

$$D_x = \Sigma(x_i - m_x)^2 - p_i =$$
$$= (0 - 1{,}5)^2 \cdot 1/8 + (1 - 1{,}5)^2 \cdot 3/8 + (2 - 1{,}5)^2 \cdot 3/8 + (3 - 1{,}5)^2 \cdot 1/8 = 0{,}75.$$

− та формулою, що містить другий початковий момент α_2:

$$D_x = \alpha_2 - m_x^2$$
$$\alpha_2 = \Sigma x_i^2 \cdot p_i =$$
$$= 0^2 \cdot 1/8 + 1^2 \cdot 3/8 + 2^2 \cdot 3/8 + 3^2 \cdot 1/8 = 3.$$
$$D_x = \alpha_2 - m_x^2 = 3 - 1{,}5^2 = 0{,}75.$$

Визначимо середнє квадратичне відхилення випадкової величини X:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}855.$$

Задача 2.3

Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2/4, & 0 < x \le 2. \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу імовірностей, побудувати графіки функцій f(x) та F(x).

Розв'язання

Визначимо щільність імовірностей, узявши похідну від функції розподілу на кожному з інтервалів, отримаємо:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x/2, & 0 < x \le 2; \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Побудуємо графіки функцій f(x) та F(x) (рис. 2.3).

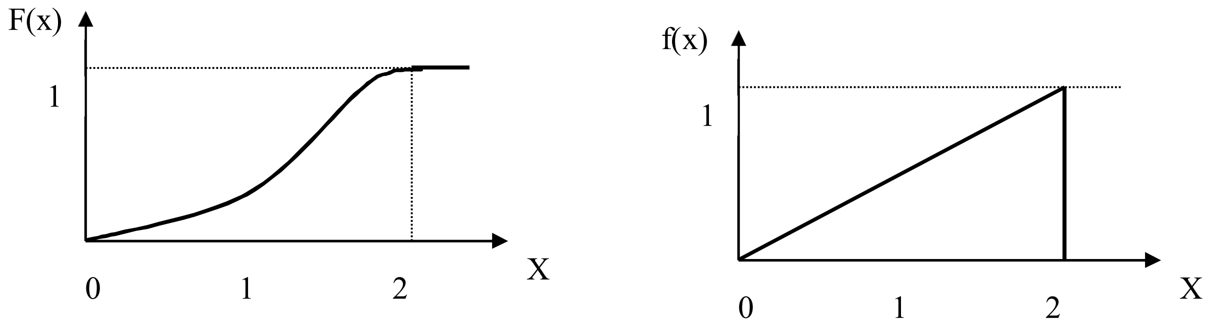


Рисунок 2.3 - Графіки функції розподілу та щільності розподілу

Практичне заняття 3
НАЙВАЖЛИВІШІ ДЛЯ ПРАКТИКИ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Мета − сформувати вміння користуватися законами розподілу випадкових величин для визначення імовірностей того, що випадкова величина належатиме певному інтервалу її значень.

Основні відомості

Біноміальний закон розподілу. Дискретна випадкова величина X має біноміальний закон розподілу (розподіл Бернуллі), якщо її можливі значення: 0, 1, ..., n, а відповідні імовірності визначаються із співвідношення:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

де p − імовірність появи події A в одному досліді, $0 < p < 1$;

q − імовірність не появи події A в одному досліді, $q = 1 - p$.

Числові характеристики випадкової величини, розподіленої за біноміальним, законом мають вигляд:

$$m_x = np;\ D_x = npq;\ \sigma_x = \sqrt{npq}.$$

Закон розподілу Пуассона визначає імовірність того, що за певний час τ відбудеться рівно k подій:

$$P(k) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau},$$

де λ − кількість подій на одиницю часу;

τ − інтервал часу.

Математичне сподівання (середня кількість подій, що потрапляють на ділянку часу довжиною τ) та *дисперсія* випадкової величини визначаються формулою:

$$m_x = D_x = \lambda\tau.$$

Експонентний закон розподілу. Функцію розподілу T обчислюють за формулою: $F(t) = P\{T < t\} = 1 - e^{-\lambda t}$.

Щільність розподілу T як похідна функції розподілу F(t) має вигляд:

$$f(t) = d(t)/dt = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за експонентним законом, зворотне параметру розподілу λ: $m_x = 1/\lambda$.

Дисперсія: $D_t = \frac{1}{\lambda^2}$, середнє квадратичне відхилення: $\sigma_x = 1/\lambda$.

Імовірність влучення випадкової величини, що має експонентний розподіл, на інтервал значень (α, β): $P\{\alpha \le t \le \beta\} = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$.

Нормальний закон розподілу імовірностей визначається, на відміну від попередніх, двома параметрами m_x і σ_x:

Криву нормального розподілу апроксимують виразом:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (3.1)$$

Імовірність потрапляння нормально розподіленої випадкової величини на інтервал значень (α, β) як інтеграл від щільності розподілу в межах від α до β:

$$P\{\alpha \le X \le \beta\} = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \frac{x-m_x}{\sigma_x} \\ dx = \sigma_x dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (3.2)$$

де $t_1 = \frac{\alpha-m_x}{\sigma_x}$; $t_2 = \frac{\beta-m_x}{\sigma_x}$.

Оскільки інтеграл (3.2) не можна узяти в елементарних функціях, для визначення імовірностей, що пов’язані з нормально розподіленою випадковою величиною, користуються спеціальною функцією, яку називають інтегралом імовірностей:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (3.3)$$

Значення інтегралу $\Phi(x)$ наведені у довідкових таблицях та у групі статистичних функцій програмного пакету Excel, зокрема, функція ГАУСС(x).

Інтеграл імовірностей має наступні властивості:

при $x=0$ $\quad \Phi(x)=0$;

при $x=\infty$ $\quad \Phi(x)=0,5$;

при $x=-\infty$ $\quad \Phi(x)=-0,5$;

$\Phi(-x) =-\Phi(x)$,

тобто функція $\Phi(x)$ є непарною функцією.

Таким чином, усі можливі значення інтегралу імовірностей $\Phi(x)$ належать інтервалу (-0,5;+0,5), причому при $|x| > 4$ можна вважати, що $\Phi(x) \approx \pm 0,5$.

Імовірність потрапляння випадкової величини X на інтервал значень (α, β) виражають через інтеграл імовірностей формулою:

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m_x}{\sigma_x}\right). \quad (3.4)$$

Закон рівномірної щільності. Цей закон розподілення мають похибки грубих вимірювань. Безперервна випадкова величина X має рівномірний розподіл на інтервалі від α до β, якщо її щільність розподілу на цьому інтервалі постійна:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при} \quad x \in (a, b) \\ 0 & \text{при} \quad x \notin (a, b) \end{cases}.$$

Математичне сподівання: $m_x = \frac{b+a}{2}$; дисперсія: $D_x = \frac{(b-a)^2}{12}$; середнє квадратичне відхилення: $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Імовірність влучення значень випадкової величини на інтервал (α, β):

$$P\{\alpha < X < \beta\} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Функція рівномірного розподілу:

$$F(x) = \frac{x-\alpha}{b-a}.$$

Задача 3.1

У відділ верхнього одягу універмагу один за одним входять три відвідувачі. За оцінками менеджера імовірність того, що відвідувач, який ввійшов, зробить покупку, дорівнює 0,3. Визначити імовірність того, що: а) жоден з відвідувачів нічого не купить; б) тільки один відвідувач зробить покупку; в) два відвідувачі зроблять покупку; г) всі троє куплять будь-що у відділі. Побудувати ряд розподілу та визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X - кількість відвідувачів, що зробили покупку.

Розв'язання

Появу трьох відвідувачів у відділі універмагу можна розглядати як проведення трьох дослідів. Досліди однакові, тому що імовірність появи події A = {здійснення покупки одним відвідувачем} однакова для всіх трьох і дорівнює p = 0,3. Відповідно імовірність непокупки для кожного відвідувача q = 0,7. Наслідки дослідів незалежні, тому що рішення про покупку для кожного з відвідувачів не залежить від рішень інших відвідувачів відділу.

Для визначення імовірностей біноміального розподілу випадкової величини X скористаємось формулою $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, зведемо їх до таблиці:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

Обчислимо математичне сподівання та дисперсію за формулами моментів випадкової величини:

$$m_x = 0 \cdot 0{,}343 + 1 \cdot 0{,}441 + 2 \cdot 0{,}189 + 3 \cdot 0{,}027 = 0{,}9;$$

$$D_x = 0 \cdot (0{,}343 - 0{,}9)^2 + 1 \cdot (0{,}441 - 0{,}9)^2 + 2 \cdot (0{,}189 - 0{,}9)^2 + 3 \cdot (0{,}027 - 0{,}9)^2 = 0{,}63.$$

Обчислимо математичне сподівання і дисперсію за формулами $m_x = np$; $D_x = npq$; $\sigma_x = \sqrt{npq}$:

$$m_x = n \cdot p = 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9;$$

$$D_x = n \cdot p \cdot q = 3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}63.$$

Задача 3.2

На АТС надходять виклики з інтенсивністю $\lambda = 0{,}8$ 1/хв. Визначити імовірність того, що протягом 2 хвилин а) не надійде жодного виклику; б) надійде рівно один виклик; в) надійде хоча б один виклик.

Розв'язання

Визначимо математичне сподівання кількості викликів, що надходять на АТС, яка відповідає інтервалу часу t=2 хвилини:

$$a = \lambda \cdot t = 0{,}8 \cdot 2 = 1{,}6.$$

За формулою Пуассона імовірність подій визначиться в такий спосіб:

а) імовірність того, що протягом 2 хвилин не надійде жодного виклику

$$\mathrm{P(A)} = \mathrm{P}(0) = \frac{1{,}6^0}{0!} e^{-1{,}6} = 0{,}202;$$

б) імовірність того, що протягом 2 хвилин надійде рівно один виклик

$$\mathrm{P(B)} = \mathrm{P}(1) = \frac{1{,}6^1}{1!} e^{-1{,}6} = 1{,}6 \cdot 0{,}202 = 0{,}323;$$

в) імовірність того, що протягом 2 хвилин надійде хоча б один виклик простіше визначити, використовуючи імовірність протилежної події:

$$\mathrm{P(C)} = 1 - \mathrm{P}(0) = 1 - 0{,}202 = 0{,}798.$$

Задача 3.3

Космічні частки, що потрапляють у супутник, утворюють поле із щільністю λ=1 частка/м^2. Агрегат супутника, який знаходиться у полі часток, займає площу s=10 см^2. Для виходу з ладу агрегату свідомо досить влучення в нього двох часток. При влученні однієї частки він виходить з ладу з імовірністю p=0,5. Визначити імовірність виходу з ладу агрегату.

Розв'язання

Позначимо подію, що цікавить нас, A = {вихід агрегату з ладу}. Цій події відповідають дві гіпотези:

H_1 = {в агрегат потрапила одна частка},

H_2 = {в агрегат потрапили дві частки}.

Умовні імовірності події А: $P(A/H_1) = 0,5$, $P(A/H_2) = 1$.
Імовірності гіпотез визначимо за законом розподілу Пуассона, параметр якого $a=1 \cdot 0,001=0,001$:

$$\mathrm{P}(H_1) = \mathrm{P}(1) = \frac{0,001^1}{1!} e^{-0,001} = 0,000999,$$

$$\mathrm{P}(H_2) = 1 - P(0) - P(1) =$$

$$= 1 - \frac{0,001^0}{0!} e^{-0,001} - P(1) = 1 - 0,999 - 0,000999 = 10^{-6}.$$

За формулою повної ймовірності дістанемо ймовірність події А:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = 0,000999 \cdot 0,5 + 10^{-6} \cdot 1 = 5,005 \cdot 10^{-4}.$$

Задача 3.4

Є випадкова величина X з експонентним законом розподілу. Параметр розподілу $\lambda = 0,4$. Визначити числові характеристики та функцію розподілу випадкової величини X, а також імовірність того, що вона прийме значення в інтервалі (6, 10).

Розв'язання

Числові характеристики випадкової величини X визначимо за формулами:

$$m_x = 1/\lambda=1/0,4 =2,5;\ D_x = 1/\lambda^2=1/(0,4)^2=6,25;\ \sigma_x = m_x = 2,5.$$

Щільність розподілу :

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0 \\ 0,4e^{-0,4x}, & \text{при} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Функція розподілу:

$$\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-0,4x}, & \text{при} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Визначимо імовірність того, що випадкова величина X прийме значення в інтервалі (6, 10):

$$\mathrm{P}\{6 \leq X \leq 10\} = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta} =$$

$$= e^{-0,4*6} - e^{-0,4*10} = 0,0907 - 0,0183 = 0,0724.$$

Задача 3.5

Відомі імовірнісні характеристики нормально розподіленої випадкової величини X: $m = 17$; $\sigma = 0,6$. Знайти імовірність події $P(\alpha < X < \beta)$, якщо $\alpha =16,8$; $\beta = 17,2$.

Розв'язання

Обчислимо імовірність, що X належить інтервалу (16,8; 17,2), для чого скористаємось формулою (3.4)

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{17{,}2 - 17}{0{,}6}\right) - \Phi\left(\frac{16{,}8 - 17}{0{,}6}\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 * \Phi\left(\frac{1}{3}\right) = 0{,}26.$$

Зауважимо, що для визначення значення інтегралу імовірностей, окрім спеціальних статистичних таблиць, можна скористатися функцією ГАУСС(x) табличного процесора Excel (рис. 3.2.)

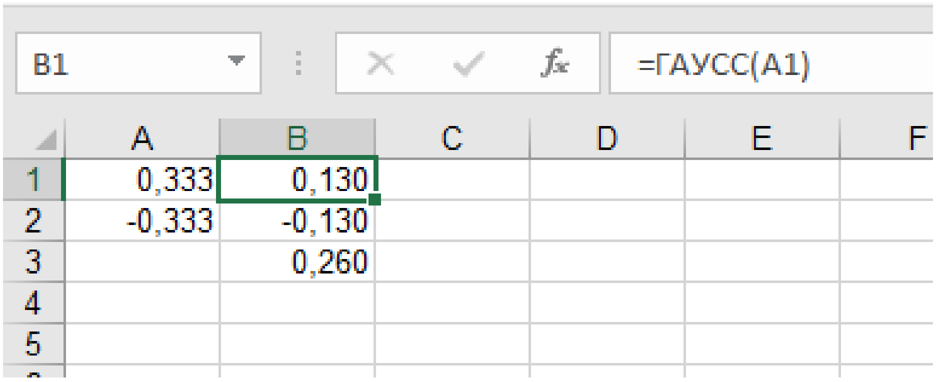


Рисунок 3.2 - Визначення значення інтегралу імовірностей

Задача 3.6

У нормально розподіленій сукупності 15 % значень X менші за 12 та 40 % значень X перевищують 16,2. Знайти середнє значення та середнє квадратичне відхилення даного розподілу.

Розв'язання

З умови задачі випливає, що

$$P\{X < 12\} = 0{,}15 \text{ і } P\{X < 16{,}2\} = 0{,}6.$$

Скористаємось формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - m_x}{\sigma_x}\right) = \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) + 0{,}5$$

і запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \Phi\left(\frac{12 - m_x}{\sigma_x}\right) + 0{,}5 = 0{,}15 \\ \Phi\left(\frac{16{,}2 - m_x}{\sigma_x}\right) + 0{,}5 = 0{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi\left(\frac{12 - m_x}{\sigma_x}\right) = -0{,}35 \\ \Phi\left(\frac{16{,}2 - m_x}{\sigma_x}\right) = 0{,}1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{12 - m_x}{\sigma_x} = -1{,}04 \\ \frac{16{,}2 - m_x}{\sigma_x} = 0{,}25 \end{cases} \Rightarrow.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_x = 15{,}386 \\ \sigma_x = 3{,}256 \end{cases}.$$

Параметри розподілу: $m_x = 15{,}386$, $\sigma_x = 3{,}256$.

Задача 3.7

Коробки з шоколадом пакує автомат. Їхня середня маса становить 1,06 кг. Відомо, що 5 % коробок мають масу меншу за 1 кг. Визначити відсоток коробок, маса яких перевищує 940 г.

Розв'язання

Визначимо відсоток коробок, маса яких менша за 940 г, тоді виявиться, що інші коробки мають масу, що перевищує 940 г:

$$P\{X < 0{,}940\} = F(0{,}940) = \Phi\left(\frac{0{,}94 - m_x}{\sigma_x}\right) + 0{,}5.$$

Математичне сподівання відомо з умови задачі $m_x = 1{,}06$, а для визначення невідомого середнього квадратичного відхилення скористуємося тим, що за умови 5 % коробок мають масу меншу за 1 кг.

$$P\{X < 1{,}0\} = F(1{,}0) = \Phi\left(\frac{1{,}0 - 1{,}06}{\sigma_x}\right) + 0{,}5 = 0{,}05,$$

звідки дістанемо:

$$\Phi\left(\frac{1{,}0-1{,}06}{\sigma_x}\right) = -0{,}45, \qquad \frac{1{,}0-1{,}06}{\sigma_x} = -1{,}655, \qquad \sigma_x = 0{,}03625.$$

Тоді

$$P\{X < 0{,}940\} = \Phi\left(\frac{0{,}94 - 1{,}06}{0{,}03625}\right) + 0{,}5 =$$
$$= \Phi(-3{,}31) + 0{,}5 = -0{,}499 + 0{,}5 = 0{,}001.$$

Відсоток коробок, маса яких перевищує 940 г, становить 99,9 %.

Задача 3.8

Отримати вираз для функції розподілу випадкової величини, розподіленої нормально.

Розв'язання

Для визначення функції розподілу для випадкової величини, що розподілена нормально, скористаємось формулою (3.4), отримаємо:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - m_x}{\sigma_x}\right) = \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) + 0{,}5.$$

Задача 3.9

Визначити імовірність потрапляння нормально розподіленої випадкової величини у область значень, що симетрична щодо її математичного сподівання $P\,(|x - m_x| < l)$.

Розв'язання

Для визначення імовірності скористаємось формулою (3.4).

$$P\{|x-m_x|<l\}=P\{m_x-l<X<m_x+l\}=$$
$$=\Phi\left(\frac{m_x+l-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{m_x-l-m_x}{\sigma_x}\right)=2\Phi\left(\frac{l}{\sigma_x}\right). \qquad (3.5)$$

Задача 3.10

Відомі імовірнісні характеристики нормально розподіленої випадкової величини X: $m = 17$; $\sigma = 0{,}6$. Знайти імовірність того, що $P(|x\text{-}m| < \delta)$, якщо $\delta = 0{,}3$.

Розв'язання

Для визначення імовірності того, що X відхилиться від свого середнього значення m менше ніж на δ скористаємось формулою (3.5):

$$P(|x-17|<0{,}3)=2\cdot\Phi\left(\frac{0{,}3}{0{,}6}\right)=0{,}38.$$

Задача 3.11

Деталь, що виготовлена автоматом, вважають придатною, якщо відхилення X контрольованого розміру від номіналу не перевищує 10 мм. Точність виготовлення деталей характеризується $\sigma=0{,}5$. Вважаючи, що X розподілена нормально, визначити, скільки відсотків придатних деталей виготовляє автомат.

Розв'язання

Іншими словами, необхідно визначити імовірність того, що помилка X потрапить у симетричний відносно m_x інтервал, який дорівнює 10 мм.

$$P\left\{\left|\overset{o}{X}\right|<10\right\}=2\cdot\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right)=2\cdot\Phi\left(\frac{10}{5}\right)=0{,}\,95.$$

Отже, автомат виробляє 95,4 % придатних деталей.

Задача 3.12

Відомі імовірнісні характеристики нормально розподіленої випадкової величини X: m_x та σ_x. Знайти імовірності подій:

$$P(|x-m_x|<\sigma_x);$$
$$P(|x-m_x|<2\sigma_x);$$
$$P(|x-m_x|<3\sigma_x).$$

Розв'язання

Покладемо у формулі (3.5) $l = \sigma_x$, тоді:

$$P\{|x - m_x| < \sigma\} = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_x}\right) = 2 \cdot \Phi(1) = 0{,}68.$$

Отже, 68 % значень будь-якої нормально розподіленої випадкової величини лежат у інтервалі ($m_x \pm \sigma_x$).

Нехай $l = 2\sigma_x$, тоді:

$$P\{|x - m_x| < 2\sigma\} = 2 \cdot \Phi\left(\frac{2\sigma_x}{\sigma_x}\right) = 2 \cdot \Phi(2) = 0{,}95.$$

Тобто 95 % значень будь-якої нормально розподіленої випадкової величини лежат у інтервалі ($m_x \pm 2\sigma_x$).

Якщо $l = 3\sigma_x$, то:

$$P\{|x - m_x| < 3\sigma\} = 2 \cdot \Phi\left(\frac{3\sigma_x}{\sigma_x}\right) = 2 \cdot \Phi(3) = 0{,}997.$$

Тобто 99,7 % значень будь-якої нормально розподіленої випадкової величини лежат у інтервалі ($m_x \pm 3\sigma_x$).

Цю властивість випадкових величин, що розподілені нормально, називають «правилом трьох сигма», його часто використовують під час оцінювання похибок вимірювань і, зокрема, геодезичних.

Задача 3.13

Довжину кімнати вимірюють рулеткою із грубими діленнями (10 см). Заокруглення провадять до найближчого цілого. X − помилка вимірювання. Знайти її щільність розподілу, функцію розподілу та числові характеристики.

Розв'язання

Довжина кімнати L з урахуванням помилки визначиться як L ± 5 см, тобто випадкова величина X змінюється в межах $-5 < X < +5$. Оскільки крива щільності розподілу обмежує площу, що дорівнює одиниці, значення f(x) дістанемо в такий спосіб:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{5-(-5)} = 0{,}1.$$

Математичне сподівання:

$$m_x = \frac{a+b}{2} = \frac{-5+5}{2} = 0.$$

Дисперсія:

$$D_x = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5+5)^2}{12} = 8{,}33; \quad \sigma_x = \sqrt{8{,}33} = 2{,}89.$$

Задача 3.14

Поїзда метро йдуть регулярно з інтервалом 2 хвилини. Пасажир виходить на платформу у випадковий момент часу, що не пов'язаний із розкладом поїздів. Випадкова величина T − час очікування поїзда. Знайти: а) щільність розподілу та числові характеристики випадкової величини T; б) імовірність того, що чекати доведеться не більше 0,5 хвилини.

Розв'язання

Оскільки поїзди під'їжджають до станції рівномірно, закон розподілу випадкової величини T − рівномірний, тобто $f(x) = \frac{1}{b-a}$, де $(b - a)$ − інтервал руху поїздів, причому $a = 0$, $b = 2$, тоді:

а) $f(x) = \frac{1}{2-0} = 0{,}5$; $m_x = \frac{b+a}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$ хв.; $D_x = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3}$.

б) імовірність того, що чекати доведеться не більше 0,5 хвилини визначимо наступним чином:

$$P\{T < 0{,}5\} = F(x) = \frac{0{,}5-0}{2-0} = 0{,}25.$$

Практичне заняття 4
СИСТЕМА ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ТА ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМИ

Мета – сформувати вміння користуватися законами розподілу системи двох випадкових величин для визначення числових характеристик системи, визначення їхньої залежності та вміння обчислювати числові характеристики функцій випадкових величин.

Основні відомості

Для характеристики системи двох випадкових величин використовують закони розподілу системи та числові характеристики системи.

Кореляційна таблиця − у якій перший рядок містить всі значення випадкової величини X, а перший стовпець − значення випадкової величин Y. У ij-й клітині таблиці записують імовірність події $\{X = x_i,\ Y = y_j\}$. Сума всіх імовірностей у кореляційній таблиці дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p\{x_i, y_j\} = 1.$$

Функція розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) дорівнює імовірності того, що випадкова величина X прийме значення, менше за x та випадкова величина Y прийме значення, менше за y: $F(x,y) = P\{X < x, Y < y\}$.

Властивості функції розподілу системи:

1. Функція розподілу − неубутна функція, тобто $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$, якщо $x_2 > x_1$; $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$, якщо $y_2 > y_1$.

2. Функція розподілу системи дорівнює нулю, якщо хоча б один з її аргументів обертається на мінус нескінченість: $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty,-\infty) = 0$.

3. Функція розподілу системи, якщо хоча б один з аргументів обертається на плюс нескінченість, дорівнює функції розподілу компоненту системи, що залишився $F(x, +\infty) = F(x)$; $F(+\infty,y) = F(y)$; $F(+\infty, +\infty) = 1$.

Щільність розподілу імовірностей системи двох випадкових величин (X, Y) $f(x, y)$ являє собою другу змішану похідну від $F(x, y)$:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y}.$$

Тут припускається, що $F(x, y)$ є безперервною та двічі диференційованою.

Властивості щільності розподілу імовірностей:

1. Щільність розподілу − невід'ємна функція, тобто $f(x, y) \geq 0$, якщо $x_2 > x_1$; $F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$, якщо $y_2 > y_1$.

2. Функція розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) дорівнює подвійному інтегралу від щільності розподілу системи:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x, y)dxdy,$$

де $f(x, y)dxdy$ – елемент імовірності, що є імовірністю влучення системи у елементарний прямокутник dxdy та дорівнює об'єму паралелепіпеду $f(x, y)dxdy$.

3. Подвійний інтеграл від щільності розподілу у нескінчених межах дорівнює одиниці:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1.$$

Математичні сподівання випадкових компонентів системи X та Y визначають, як перший початковий момент:

$$\alpha_{1,\,0} = M[X^1Y^0] = M[X]; \qquad \alpha_{0,\,1} = M[X^0Y^1] = M[Y]. \qquad (4.1)$$

Дисперсії випадкових компонентів системи X та Y визначають як другі центральні моменти:

$$\mu_{2,\,0} = M[\overset{o}{X}{}^2\overset{o}{Y}{}^0] = M[\overset{o}{X}{}^2] = D_X; \quad \mu_{0,\,2} = M[\overset{o}{X}{}^0\overset{o}{Y}{}^2] = M[\overset{o}{Y}{}^2] = D_Y. \quad (4.2)$$

Другий змішаний центральний момент $\mu_{x,y} = M[\overset{0}{X}\overset{0}{Y}] = K_{xy}$ називають кореляційним моментом (або коваріацією). Він є найважливішою характеристикою системи випадкових величин, оскільки характеризує наявність зв'язку між випадковими величинами. Для двох дискретних випадкових величин K_{xy} визначають за формулою:

$$K_{x,y} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \overset{0}{x}_i \overset{0}{y}_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - m_x)(y_j - m_y)p_{ij}, \qquad (4.3)$$

де $p_{ij} = P\{X = x_i/Y = y_j\}$ – умовна імовірність, тобто імовірність того, що X прийме значення x_i за умови, що Y прийме значення y_j.

Для двох безперервних випадкових величин:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x - m_x)(y - m_y)\, f(x,y)dxdy.$$

Кореляційний момент є характеристикою зв'язку між величинами X та Y, і у випадку незалежних X та Y він дорівнює нулю.

Для визначення тісноти зв'язку між X і Y використовують коефіцієнт кореляції r_{xy}, який визначають за формулою:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \qquad (4.4)$$

Функції випадкових величин

1. Математичне сподівання суми двох залежних або незалежних випадкових величин X та Y дорівнює сумі їхніх математичних сподівань:

$$M[X+Y] = \Sigma(x_i+y_i)p_i = \Sigma x_i p_i + \Sigma y_i p_i = M[X] + M[Y].$$

Для n доданків: $M[\Sigma X_i] = \Sigma M[X_i]$, отже математичне сподівання суми n випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних сподівань.

Математичне сподівання лінійної функції кількох випадкових величин $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$ дорівнює тій самій лінійній функції від їхніх математичних сподівань: $M[Y] = M[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b] = \sum_{i=1}^{n} a_i M[X_i] + b$, де a і b − невипадкові коефіцієнти.

2. Математичне сподівання добутку двох випадкових величин X та Y дорівнює добутку їхніх математичних сподівань плюс кореляційний момент:

$$M[XY] = M[X] \cdot M[Y] + K_{xy}.$$

Якщо випадкові величини X та Y незалежні, математичне сподівання добутку дорівнює добутку їхніх математичних сподівань.

3. Дисперсія суми двох випадкових величин X та Y дорівнює сумі дисперсій плюс подвоєний кореляційний момент:

$$D[X+Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}.$$

Якщо X і Y − незалежні випадкові величини, то дисперсія їхньої суми дорівнює сумі їхніх дисперсій, тоді сума n незалежних випадкових величин: $D[\Sigma X_i] = \Sigma D[X_i]$, звідки середнє квадратичне відхилення суми: $\sigma_\Sigma = \sqrt{\Sigma \sigma_i^2}$.

Дисперсія лінійної функції кількох випадкових величин $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$ дорівнює тій самій лінійній функції від їхніх математичних сподівань:

$D[Y] = D[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i] + 2\sum_{i<j} a_i a_j K_{x_i x_j}$, де a і b − невипадкові коефіцієнти. Якщо X_i − незалежні, то $D[Y] = D[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[X_i]$.

4. Дисперсія добутку двох незалежних випадкових величин X та Y визначається за формулою

$$D[XY] = D[X] \cdot D[Y] + M[X]^2 D[Y] + M[Y]^2 D[X].$$

Задача 4.1

Матриця розподілення випадкового вектору (X,Y) має вигляд:

x_i \ y_i	0	2	5
1	0,1	0	0,2
2	0	0,3	0
4	0,1	0,3	0

Знайти числові характеристики системи випадкових величин.

Розв'язання

Для визначення числових характеристик випадкової величини X побудуємо її ряд розподілу:

x_i	1	2	4
p_i	0,3	0,3	0,4

де $P\{X = 1\} = 0,1 + 0 + 0,2 = 0,3$; $P\{X = 2\} = 0 + 0,3 + 0 = 0,3$;

$$P\{X = 4\} = 0,1 + 0,3 + 0 = 0,4.$$

Тоді $m_X = \Sigma x_i p_i = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,4 = 2,5$;

$$D_X = \Sigma(x_i - m_x)^2 p_i = (1 - 2,5)^2 \cdot 0,3 + (2 - 2,5)^2 \cdot 0,3 + (4 - 2,5)^2 \cdot 0,4 = 1,65;$$

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{1,65} = 1,285.$$

Аналогічно побудуємо ряд розподілу випадкової величини Y:

y_i	0	2	5
p_i	0,2	0,6	0,2

та визначимо її числові характеристики:

$$m_Y = \Sigma y_i p_i = 0 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,2 = 2,2;$$

$$D_Y = \Sigma(y_i - m_y)^2 p_i = (0 - 2,2)^2 \cdot 0,2 + (2 - 2,2)^2 \cdot 0,6 + (5 - 2,2)^2 \cdot 0,2 = 2,54;$$

$$\sigma_Y = \sqrt{D_Y} = \sqrt{2,54} = 1,6.$$

Визначимо кореляційний момент системи випадкових величин X, Y:

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(x_i - m_x)(y_i - m_Y)p_{ij} =$$

$$= (1 - 2{,}5)\cdot[(0 - 2{,}2)\cdot 0{,}1 + (2 - 2{,}2)\cdot 0 + (5 - 2{,}2)\cdot 0{,}2] +$$
$$+(2 - 2{,}5)\cdot[(0 - 2{,}2)\cdot 0 + (2 - 2{,}2)\cdot 0{,}3 + (5 - 2{,}2)\cdot 0] +$$
$$+(4 - 2{,}5)\cdot[(0 - 2{,}2)\cdot 0{,}1 + (2 - 2{,}2)\cdot 0{,}3 + (5 - 2{,}2)\cdot 0] = -0{,}9.$$

Визначимо коефіцієнт кореляції

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{-0{,}9}{1{,}285\times 1{,}6} = -0{,}438.$$

Задача 4.2

Двічі кидають гральну кістку. Випадкові величини X – кількість появ шістки, Y – кількість появ парної цифри. Описати закони розподілу випадкових величин X та Y; описати закон розподілу випадкового вектору (X, Y); встановити, залежні чи незалежні X та Y.

Розв'язання

Знайдемо закон розподілу випадкового вектору (X, Y), склавши матрицю розподілу, оскільки X та Y − дискретні.

x_i \ y_i	0	1	2	$P\{X=x_i\}$
0	1/4	1/3	1/9	25/36
1	0	1/6	1/9	10/36
2	0	0	1/36	1/36
$P\{Y=y_i\}$	1/4	1/2	1/4	1

Для визначення умовних ймовірностей $P_{ij} = P\{X = x_i/Y = y_j\}$ скористаємось теоремами додавання та множення ймовірностей.

Побудуємо ряд розподілу випадкової величини X, для чого просумуємо умовні ймовірності в кореляційній таблиці за рядками, та Y, для чого просумуємо умовні ймовірності за стовпцями.

Встановимо, чи залежні X та Y. Відомо, що у випадку незалежних подій умовна імовірність події дорівнює її безумовній імовірності, але рівність $P\{y_j /x_i\} = P\{y_j\}$ не дотримується. Наприклад,

$$P_{22}\{y_j = 1, x_i = 1\}= P\{x_i = 1\} \cdot P\{y_j = 1/x_i = 1\}=1/6.$$

Отже, X та Y є залежними.

Задача 4.3

Для умов попередньої задачі визначити числові характеристики випадкового вектору (X, Y).

Розв'язання

Визначимо математичні сподівання X та Y:

$$m_X = \Sigma x_i p_i = 0 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{3};$$

$$m_Y = \Sigma y_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Визначимо дисперсії X та Y:

$$D_x = \Sigma(x_i - m_x)^2 p_i = \frac{5}{18};$$

$$D_y = \Sigma(y_i - m_y)^2 p_i = \frac{1}{2}.$$

Визначимо кореляційний момент системи випадкових величин X, Y:

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(x_i - m_x)(y_j - m_y)p_{ij} =$$

$$= (0 - \frac{1}{3})\left[(0-1)\cdot\frac{1}{4} + (1-1)\cdot\frac{1}{3} + (2-1)\cdot\frac{1}{9}\right] +$$

$$+(1 - \frac{1}{3})\left[0 + (1-1)\cdot\frac{1}{6} + (2-1)\cdot\frac{1}{9}\right] +$$

$$+(2 - \frac{1}{3})\left[(0-1)\cdot 0 + (1-1)\cdot 0 + (2-1)\cdot\frac{1}{36}\right] = \frac{1}{6}.$$

Визначимо коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{18}\cdot\frac{1}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Задача 4.4

На вимірювальний прилад надходить випадковий вектор (X, Y) з наступними характеристиками: $m_x = -1$; $m_y = 1$; $\sigma_x = 2$; $\sigma_y = 3$; $r_{xy} = 0,5$. На виході приладу вимірюється величина $Z = (X - Y)^2$. Визначити математичне сподівання випадкової величини Z.

Розв'язання

Оскільки коефіцієнт кореляції r_{xy} не дорівнює нулю, випадкові величини X та Y є корельованими. Перетворимо вираз Z:

$$M[Z] = M[(X-Y)^2] = M[X^2-2XY+Y^2]=$$

(математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань)

$$= M[X^2]- M[2XY]+ M[Y^2]=$$

(другий початковий момент запишемо як суму дисперсії і квадрата математичного сподівання та врахуємо, що математичне сподівання добутку корельованих випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань плюс кореляційний момент)

$$= D_x+M^2[X] – 2(M[X] \cdot M[Y]+K_{xy})+ D_y+M^2[Y] =$$

$$= 2^2+(-1)^2 – 2 \cdot (-1 \cdot 1+2 \cdot 3 \cdot 0,5) + 3^2+1^2 = 11.$$

Задача 4.5

Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини Z, якщо Z = 3+4(X-Y). Числові характеристики: m_x = –2; m_y = 4; D_x =4; D_y = 9; r_{xy} = –0,5.

Розв'язання

Оскільки коефіцієнт кореляції не дорівнює нулю, випадкові величини X та Y корельовані. Визначимо математичне сподівання Z:

$$M[Z] = M[3+4(X-Y)] = M[3]+4M[X+Y]=$$

$$= 3 + 4m_x + 4m_y = 3+4 \cdot (–2) + 4 \cdot 4 = 11.$$

Знайдемо дисперсію Z:

$$D[Z] = D[3+4(X-Y)] = D[3]+16D[X+Y] =$$

$$= 0+16(D[X]+D[Y]+2K_{xy}) =$$

$$= 16 \cdot [4+9+2 \cdot (–0,5)(4 \cdot 9] = 112,$$

де $K_{xy} = r_{xy} \cdot \sqrt{D_x D_y}$.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma_z = \sqrt{D_z} = \sqrt{112} = 10{,}6.$

Задача 4.6

Випадкові величини X та Y незалежні і мають наступні характеристики: m_x = 1; m_y = 2; σ_x = 1; σ_y = 2. Обчислити математичне сподівання випадкових величин:

а) $U = X^2 + 2Y^2 - XY - 4X + Y + 4$;

б) $V = (X + Y - 1)^2$.

Розв'язання

а) Визначимо математичне сподівання випадкової величини U:

$$M[U] = M[X^2] + 2M[Y^2] - M[XY] - 4M[X] + M[Y] + M[4] =$$

$$= D[X] + M^2[X] + 2(D[Y] + M_2[Y]) - M[X] \cdot M[Y] - 4M[X] + M[Y] + 4=$$

$$= 1 + 1 + 2 \cdot (4 + 4) - 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 2 + 4 = 18;$$

б) Визначимо математичне сподівання випадкової величини V:

$$M[V] = M[(X + Y - 1)^2] = M[X^2 + 2Y - 2 + Y^2 - 2Y + 1] =$$
$$= M[X^2] + 2M[Y] - M[2] + M[Y^2] - 2M[Y] + M[1] =$$
$$= D[X]+M^2[X]+2M[Y]-2+D[Y]+M^2[Y]-2M[Y]+1=$$
$$= 1 + 1 + 4 - 2 + 4 + 4 - 4 + 1 = 9.$$

Задача 4.7

Є випадкова величина X з математичним сподіванням m_x і дисперсією D_x. Знайти математичне сподівання і дисперсію наступних випадкових величин:

а) $Y = – X$;

б) $Z = X + 2Y – 1$;

в) $U = 3X – Y + 2Z – 3$.

Розв'язання

а) Визначимо математичне сподівання випадкової величини Y:

$$\text{а) } M[Y] = M[–X] = –m_x;$$

знайдемо дисперсію випадкової величини Y

$$D[Y] = D[-X] = (–1)^2 D_x = D_x;$$

б) Визначимо математичне сподівання випадкової величини Z:

$$M[Z] = M[X + 2Y – 1] = m_x – 2m_x – 1 = – m_x – 1;$$

знайдемо дисперсію випадкової величини Z з урахуванням того, що математичне сподівання добутку корельованих випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань плюс кореляційний момент:

$$D[Z] = D[X + 2Y – 1] = D_x + 4D_y + 2K_{xy} =$$

кореляційний момент запишемо як різницю другого початкового моменту і добутку математичних сподівань і дістанемо

$$K_{xy} = M[X2Y] - M[X] \cdot M[2Y] = M[X(-2X)] - M[X] \cdot M[2Y] =$$
$$= –2M[X^2] + 2M^2[X] = –2(M[X^2] - M^2[X]) = –2D_x.$$

тоді дисперсія Z

$$D[Z] = D_x + 4D_x – 4D[X] = D[X].$$

в) Визначимо математичне сподівання випадкової величини Z:

$$M[U] = M[3X-Y+2Z-3] = 3m_x – m_y +2m_z -3 =$$
$$=3m_x + m_x +2 (– m_x –1) -3 = 2m_x -5;$$

знайдемо дисперсію випадкової величини U з урахуванням формули (6.14)

$$D[U] = D[3X-Y+2Z-3] = D[3X] + D[-Y] + D[2Z] + 2(K_{xy} + K_{yz} + K_{xz});$$

визначимо кореляційні моменти

$$K_{xy} = M[3X(-Y)] - M[3X] \cdot M[-Y] = 3M[X^2] - 3M[X] \cdot M[X] =$$
$$= 3M[X^2] - 3M^2[X] = 3D_x;$$

$$K_{xz} = M[3X2Z] - M[3X] \cdot M[2Z] = M[3X2(X+2Y-1)] - M[3X] \cdot M[2X+4Y-2] =$$

$$= M[6X^2 -12X^2-6X)] - 3M[X] \cdot (2M[X]+4M[-X]-2) =$$
$$= M[6X^2] - 12M[X^2] - 6M[X] - 6M^2[X] + 12M^2[X] + 6 M[X] =$$
$$= –6 M[X^2] + 6 M^2[X] = –6 (M[X^2] - M^2[X]) = –6D_x.$$
$$K_{yz} = M[–Y2Z] - M[–Y] \cdot M[2Z]= M[2X (X+2Y-1)] - M[X] \cdot M[2(X+2Y-1)] =$$
$$= M[2X^2 - 4X^2 - 2X] - M[X] \cdot (2M[X] - 4M[X] - 2) =$$
$$= 2M[X^2] - 4M[X^2] - 2M[X] - 2M^2[X] + 4M^2[X] + 2M[X] =$$
$$= –2M[X^2] + 2M^2[X] = –2(M[X^2] - M^2[X]) = -2D_x.$$

Визначимо тепер дисперсію випадкової величини U:

$$D[U] = D[3X-Y+2Z-3] = 9D[X] + D[X] + 4D[X] + 2(3D_x - 6D_x - 2D_x) =$$
$$= 9D_x + D_x + 4D_x + 6D_x - 12D_x -4D_x = 4 D_x.$$

Практичне заняття 5
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРІВ. ОЦІНКИ ЧИСЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК. ПОГРІШНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРІВ

Мета – сформувати вміння обчислювати статистичні оцінки числових параметрів розподілу, оцінювати їхні властивості, визначати похибки вимірів та їхню надійність, структуру та властивості похибок вимірювань. Формування навичок з оцінювання випадкових та систематичних складових похибки виміру та перевірки статистичних гіпотез.

Основні відомості

Оцінки числових характеристик та їхні властивості

Будь-які значення шуканого параметру розподілу (математичного сподівання або дисперсії), обчислені на основі обмеженої кількості дослідів, містять елемент випадковості. Таке наближене випадкове значення параметр називають оцінкою цього параметру.

Математичне сподівання випадкової величини X являє собою її середнє значення. З n дослідів оцінку математичного сподівання визначають як середнє арифметичне m_x^*.

$$m_x^* = \frac{1}{n} * \sum x_i, \tag{5.1}$$

де n – кількість дослідів;

$\frac{1}{n}$ – частота появи значення x_i у кожному з n дослідів, якщо всі значення x_i різні.

Оцінку дисперсії випадкової величини X визначають як середнє арифметичне суми квадратів відхилень X від її середнього m_x^*:

$$D[X] = \frac{\sum(x_i - m_x^*)^2}{n}. \quad (5.2)$$

Статистичні оцінки числових характеристик, що отримані з обмеженої кількості дослідів n, є випадковими величинами, а отже мають власні числові характеристики (математичні сподівання і дисперсії), та до них виставляють низку вимог:

– статистична оцінка параметру розподілу має бути *спроможною*:

$$\lim_{n\to\infty} m_x^* = m_x;$$

$$\lim_{n\to\infty} D_x^* = D_x;$$

– статистична оцінка параметру розподілу має бути *незміщеною*:

$$M[m_x^*] = M[X];$$

$$M[D_x^*] = D[X];$$

– статистична оцінка параметру розподілу має бути *ефективною*:

$$D[m_x^*] = min;$$

$$D[D_x^*] = min.$$

Оцінка математичного сподівання, яка отримана за формулою (5.1) є спроможною та незміщеною оцінкою.

Оцінка дисперсії, що обчислена за формулою (5.2) є спроможною оцінкою, але зміщеною, тобто результат обчислення за формулою (5.2) дає систематичну помилку. Для отримання незміщеної оцінки дисперсії треба суму квадратів відхилень X від її середнього m_x^* розділити не на n, а на (n-1):

$$D[X] = \frac{\sum(x_i - m_x^*)^2}{n-1}, \quad (5.3)$$

а середнє квадратичне відхилення відповідно:

$$\sigma_x^* = \sqrt{D_x^*} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - m_x^*)^2}{n-1}}. \quad (5.4)$$

Оцінку кореляційного моменту визначають за формулою:

$$K_{XY_{виб}} = \frac{\Sigma(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{n-1}, \quad (5.5)$$

а оцінку коефіцієнту кореляції – за формулою:

$$r_{XY_{виб}} = \frac{K_{XY_{виб}}}{\sigma_{X_{виб}} \sigma_{Y_{виб}}}. \quad (5.6)$$

Наведені оцінки є спроможними та незміщеними.

Структура похибок вимірів

Будь-який вимір містить похибку, тому завжди виникає необхідність оцінювання точності отриманого результату. Для цього використовують дві характеристики точності: загальний зсув (систематичну похибку) θ і розкид (випадкову похибку) результатів вимірювань σ.

Кожен результат виміру x_i у загальному випадку є сумою двох складових - істинного значення вимірюваної величини L, що нам невідоме, та погрішності виміру ε_i, яка змінюється від одного виміру до іншого, тобто

$$x_i = L + \varepsilon_i,$$

де x_i – результат і-го виміру;

L – істинне значення вимірюваної величини;

ε_i – істинна погрішність і-го результату виміру.

У свою чергу істинна погрішність і-го результату виміру ε_i у загальному випадку містить дві складові: систематичну похибку ряду вимірювань, яка є однаковою для усіх отриманих результатів вимірів θ, та випадкову похибку результату і-го виміру δ_i:

$$\varepsilon_i = \theta + \delta_i \tag{5.7}$$

Оскільки математичне сподівання випадкової похибки дорівнює нулю:

$$M(\delta) = 0,$$

то математичне сподівання повної похибки дорівнює систематичному зсуву:

$$M(\varepsilon) = \theta.$$

Як повну характеристику відхилення результатів вимірювань від істинного значення часто використовують граничну погрішність

$$\Delta_{\text{пр}} = \theta \pm t \cdot \sigma. \tag{5.8}$$

Оцінку середньоквадратичного відхилення σ називають середньоквадратичною погрішністю (СКП) m, а систематичного зсуву - систематичною погрішністю θ. Величини m і θ, як оцінки характеристик точності, залежать від умов вимірів, а отже є величинами випадковими, і для них розраховують характеристики їхньої надійності: m_m – СКП середньоквадратичної погрішності і m_θ – СКП систематичної погрішності. Зазвичай ці величини застосовують для правильного заокруглення величин m та θ.

Оцінювання точності результатів вимірів за дійсними погрішностями

За відсутності систематичної похибки $\varepsilon_i = \delta_i$, для визначення оцінки розкиду застосовують формулу СКП:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n}}, \tag{5.9}$$

тоді її надійність становить

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}, \tag{5.10}$$

де [ ] – символ суми Гауса, що означає суму однорідних елементів, що розрізнюються індексами від 1 до n. Символ Гауса еквівалентний символу $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$, де n – кількість доданків. Відповідно до правила розкриття символу Гауса маємо $[\varepsilon] = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_n$.

Оцінку систематичної погрішності визначають як середнє повної погрішності ε_i, виходячи з того, що середнє випадкової складової похибки виміру дорівнює нулю $\bar{\delta} = 0$:

$$\bar{\theta} = \frac{[\varepsilon]}{n}. \quad (5.11)$$

Для оцінювання СКО за наявності θ, тобто середньої квадратичної погрішності СКП, застосовують формулу:

$$m = \sqrt{\frac{[\bar{\delta}^2]}{n-1}}, \quad (5.12)$$

де $\bar{\delta}_i = \varepsilon_i - \bar{\theta}$ – оцінка істинної погрішності i-го результату виміру.

Оцінку надійності СКП обчислюють за формулою

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (5.13)$$

Для перевірки значущості систематичного зсуву висувають нульову гіпотезу H0 : θ = 0. Гіпотеза підлягає перевірці, яку виконують за допомогою критерію $\Delta_{пр\bar{\theta}} = \frac{t_q \cdot m}{\sqrt{n}} < |\bar{\theta}|$, що є гранично можливим значенням $\bar{\theta}$, зумовленим випадковими факторами. tq вибирають з таблиць розподілу Стьюдента за рівнем значущості α та числом ступенів свободи ν = n – 1.

Якщо виконується нерівність виду $|\bar{\theta}| < \Delta_{пр\bar{\theta}}$, треба визнати, що θ сформовано випадковими факторами, і систематичні погрішності в даному ряді не знайдені. Виконання нерівності протилежного змісту говорить про наявність систематичних погрішностей в даному ряді вимірів.

Довірчий інтервал і довірча імовірність

Якщо для певного параметру розподілу, наприклад, математичного сподівання m_x отримано спроможну й незміщену оцінку а*, потрібно знати, до яких помилок може призвести заміна параметра m_x його точковою оцінкою а*, та з яким ступенем впевненості можна очікувати, що ці помилки не вийдуть за певні межі. Для розв’язання цієї задачі призначають досить велику імовірність β (0,95; 0,99) таку, що подію А= $\{|a* - m_x| < l\}$, яка характеризується цією імовірністю, можна вважати практично вірогідною, потім знаходять таке значення l, для якого справедлива рівність

$$P(A) = P\{(a - l) < m_x < (a + l)\} = \beta.$$

Тобто з імовірністю β невідоме значення параметру m_x перебуватиме в інтервалі L=[$a^* - l$, $a^* + l$]. Більші за l за абсолютним значенням помилки зустрічатимуться з імовірністю $\alpha = 1 - \beta$. Границі інтервалу називають довірчими границями $a_1 = a^* - l$, $a_2 = a^* + l$.

Задача 5.1

Для визначення точності вимірювального приладу було зроблено п'ять незалежних вимірювань, результати яких наведені у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1- Результати вимірювань

Номер вимірювання	1	2	3	4	5
x_i	2781	2836	2807	2763	2858

Визначити незміщену оцінку дисперсії помилок вимірювального приладу, якщо дійсне значення вимірюваної величини:

а) відоме і дорівнює 2800; б) невідоме.

Розв'язання

а) якщо значення вимірюваної величини відоме, то це означає, що $m_x = 2800$, і незміщену оцінку дисперсії в цьому разі можна визначити за формулою:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum(x_i - m_x)^2}{n};$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(2781 - 2800)^2 + (2836 - 2800)^2 + (2807 - 2800)^2 + (2763 - 2800)^2 + (2858 - 2800)^2}{5} = 1287{,}8.$$

б) якщо значення вимірюваної величини невідоме, то треба визначити оцінку середнього:

$$m_x^* = \frac{2781+2836+2807+2763+2858}{5} = 2809,$$

а незміщену оцінку дисперсії обчислити за формулою:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum(x_i - m_x)^2}{n-1};$$

$$\sigma_x^2 = \frac{(2781 - 2809)^2 + (2836 - 2809)^2 + (2807 - 2809)^2 + (2763 - 2809)^2 + (2858 - 2809)^2}{5 - 1} = 1508{,}5.$$

На рисунках 5.1 та 5.2 показаний розрахунок оцінки дисперсії із застосуванням таблиці Microsoft Excel. У комірці D14 для розв'язання задачі використана функція =ДИСП(B2:F2), що дає незміщену оцінку дисперсії при невідомому точному значенні середньої. Аргументом функції =ДИСП(B2:F2) є діапазон значень.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Номер виміру	1	2	3	4	5	
2	x_i	2781	2836	2807	2763	2858	
3							
4	$(x_i-\bar{x})^2$	361	1296	49	1369	3364	
5							
6	Вибіркова дисперсія			1287,8			
7							
8	Вибіркова середня			2809			
9							
10	$(\tilde{x}_i-\ )^2$	784	729	4	2116	2401	
11							
12	Вибіркова дисперсія			1508,5			
13							
14				1508,5			
15							
16							

Рисунок 5.1 – Розрахунок середнього з використанням рядка стану

	A	B	C	D	E	F
1	Номер виміру	1	2	3	4	5
2	x_i	2781	2836	2807	2763	2858
3						
4	$(x_i-\bar{x})^2$	=СТЕПЕНЬ(B2-2800;2)	=СТЕПЕНЬ(C2-2800	=СТЕПЕНЬ(D2-2800	=СТЕПЕНЬ(E2-2800	=СТЕПЕНЬ(F:
5						
6	Вибіркова дисперсія			=СУММ(B4:F4)/5		
7						
8	Вибіркова середня			2809		
9						
10	$(x_i-\tilde{x})^2$	=СТЕПЕНЬ(B2-D8;2)	=СТЕПЕНЬ(C2-D	=СТЕПЕНЬ(D2-D	=СТЕПЕНЬ(E2-D	=СТЕПЕНЬ(F:
11						
12	Вибіркова дисперсія			=СУММ(B10:F10)/(5		
13						
14				=ДИСП(B2:F2)		

Рисунок 5.2 – Розрахунок вибіркової дисперсії із застосуванням таблиці Microsoft Excel

Задача 5.2

Зроблено вимірювання випадкової величини Y за різних значень випадкової величини X, що наведено у таблиці 5.2. Визначити оцінку коефіцієнту кореляції цих величин.

Таблиця 5.2 – Результати вимірювань

x_i	–8	–10	22	2
y_i	–10	–2	4	-1

Розв'язання

Коефіцієнт кореляції визначаємо за формулою

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Для його обчислення необхідно знайти оцінку кореляційного моменту:

$$K_{xy}^* = \frac{\sum_i (x_i - m_x)(y_i - m_y)}{n-1}.$$

Для оцінювання середніх значень X та Y знайдемо оцінки середніх:

$$m_x = \frac{-8+10+22+2}{4} = 6{,}5,$$

$$m_y = \frac{-10-2+4-1}{4} = -2{,}25.$$

Визначимо оцінки дисперсій X та Y:

$$\sigma_x^2 = \frac{(-8-6{,}5)^2+(10-6{,}5)^2+(22-6{,}5)^2+(2-6{,}5)^2}{4-1} = 161;$$

$$\sigma_y^2 = \frac{(-10+2{,}25)^2+(-2+2{,}25)^2+(4+2{,}25)^2+(-1+2{,}25)^2}{4-1} = 33{,}6.$$

Визначимо оцінки середніх квадратичних відхилень:

$$\sigma_x^* = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{161} = 12{,}7\ ; \quad \sigma_y^* = \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{33{,}6} = 5{,}8.$$

Тепер розрахуємо кореляційний момент

$$K_{xy}^* = \frac{(-8-6{,}5)(-10+2{,}25)+(10-6{,}5)(-2+2{,}25)+(22-6{,}5)(4+2{,}25)+(2-6{,}5)(-1+2{,}25)}{4-1} = 68{,}2$$

та отримаємо коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}^*}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{68{,}2}{12{,}7 \cdot 5{,}8} = 0{,}926.$$

Задача 5.3

Лінію теодолітного ходу вимірювали мірною стрічкою п’ять разів. Отримані наступні результати: 217,24; 217,31; 217,28; 217,23; 217,20 м. Ту саму лінію виміряли світлодалекоміром, отриманий результат становить 217,216 м. Визначити оцінку систематичної похибки та СКП вимірювання лінії мірною стрічкою, якщо результат вимірювання лінії світлодалекоміром прийнятий за істинний. Перевірити значущість обчисленої систематичної похибки та оцінити надійність отриманої СКП.

Розв'язання

Маємо L = 217,216 м – істинне значення вимірюваної величини, l_i – результати п'яти вимірювань. Проаналізуємо похибку вимірювання ε, для чого обчислимо її числові характеристики – середнє значення та середнє квадратичне відхилення. Для цього спочатку обчислимо її випадкові значення як відхилення $\varepsilon_i = l_i - L$ від істинного значення 217,216 м та запишемо результати обчислень у сантиметрах у таблицю 5.3. Зокрема, для першого результату вимірювань маємо:

$$\varepsilon_1 = l_1 - \mathrm{L} = 217{,}24 - 217{,}216 = 2{,}4 \text{ см}.$$

Таблиця 5.3 – Результати обчислень

№	l_i, м	ε_i, см	δ, см	δ^2, см^2
1	217,24	2,4	-1,2	1,44
2	217,31	9,4	+ 5,8	33,64
3	217,28	6,4	+ 2,8	7,84
4	217,23	1,4	-2,2	4,84
5	217,20	-1,6	-5,2	27,04
Σ		18,0	0	74,80

Обчислимо середнє значення похибки вимірювання ε за формулою

$$\bar{\varepsilon} = \frac{[\varepsilon]}{n} = \frac{18{,}0}{5} = 3{,}6 \text{ см}.$$

Нагадаємо, що теоретично математичне сподівання випадкової складової погрішності δ дорівнює нулю (в силу симетричності нормального закону розподілу та рівної імовірності протилежних за знаком випадкових погрішностей). Отже, отримане середнє повної погрішності $\bar{\varepsilon} = 3{,}6$ є найбільш імовірним значенням похибки вимірювань, але воно містить як систематичну складову θ, так і випадкову δ.

Визначимо розкид значень похибки вимірювань ε, для чого обчислимо оцінку її середнього квадратичного відхилення за формулою:

$$m = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}},$$

де δ_i – відхилення ε_i від середнього $\bar{\varepsilon} = 3{,}6$, $\delta_i = \varepsilon_i - \bar{\varepsilon}$.

Зокрема, для першого результату вимірювань маємо:

$$\delta_1 = \varepsilon_1 - \bar{\varepsilon} = 2{,}4 - 3{,}6 = -1{,}2 \text{ см}.$$

Отримаємо:

$$m = \sqrt{\frac{74{,}8}{5-1}} = 4{,}324 \text{ см}.$$

Надійність оцінки середнього значення похибки вимірювань ε оцінюють за СКП СКП, тобто m_m:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{4{,}324}{\sqrt{2(5-1)}} = 1{,}53 \text{ см.}$$

Отже, ми визначили середнє значення похибки вимірювань та оцінили її точність і надійність. Але залишається запитання, чи містить ця похибка систематичну складову. Відповідь передбачає перевірку значущості систематичного зсуву. Якщо б похибка вимірювання ε не містила систематичної складової, то її середнє повинне було б дорівнювати нулю, а ми отримали $\bar{\varepsilon} = 3{,}6$ см, що дає нам підставу передбачати у складі ε наявність систематичної похибки θ.

Для перевірки значущості θ висуваємо нульову гіпотезу, тобто гіпотезу про її незначущість H_0: θ=0. Перевіряють цю гіпотезу з використанням критерію

$$\Delta_{пр\bar{\theta}} = \frac{t_q \cdot m}{\sqrt{n}} < \left|\bar{\theta}\right|,$$

де $\Delta_{пр\bar{\theta}}$ – граничне значення $\bar{\theta}$, зумовлене впливом випадкових факторів;

t_q – значення критерію Стьюдента, яке обирають із статистичних таблиць розподілення Стьюдента або використовують функцію Excel СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х(α;ν). Аргументами функції є імовірність α та число ступенів свободи ν = n – 1. Імовірність являє собою рівень значущості α = 1 – p, де p – така імовірність, за якої подію можна вважати практично вірогідною, її зазвичай беруть рівною 0,9, 0,95, 0,99. Функція дає двобічне зворотне розподілення Стьюдента.

Якщо виконується нерівність виду $\left|\bar{\theta}\right| < \Delta_{\text{пр}\bar{\theta}}$, потрібно визнати, що θ сформована випадковими факторами, і систематична похибка у даній низці вимірювань відсутня. Якщо ж виконується нерівність протилежного змісту, систематична похибка в даній низці вимірювань має місце.

Якщо зроблено висновок про значущість величини θ, для її правильного заокруглення потрібно обчислити величину її погрішності:

$$m_{\bar{\theta}} = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Перевіримо значущість θ та обчислимо $\Delta_{\text{пр}\bar{\theta}}$. Визначимо спочатку значення критерію Стьюдента t_q, для чого задамося рівнем значущості α=0,05 та визначимо число ступенів свободи ν = n – 1 = 5 –1 = 4. Скористаємось функцією Excel СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х(α;ν), отримаємо t_q = 2,78 (рис. 5.3).

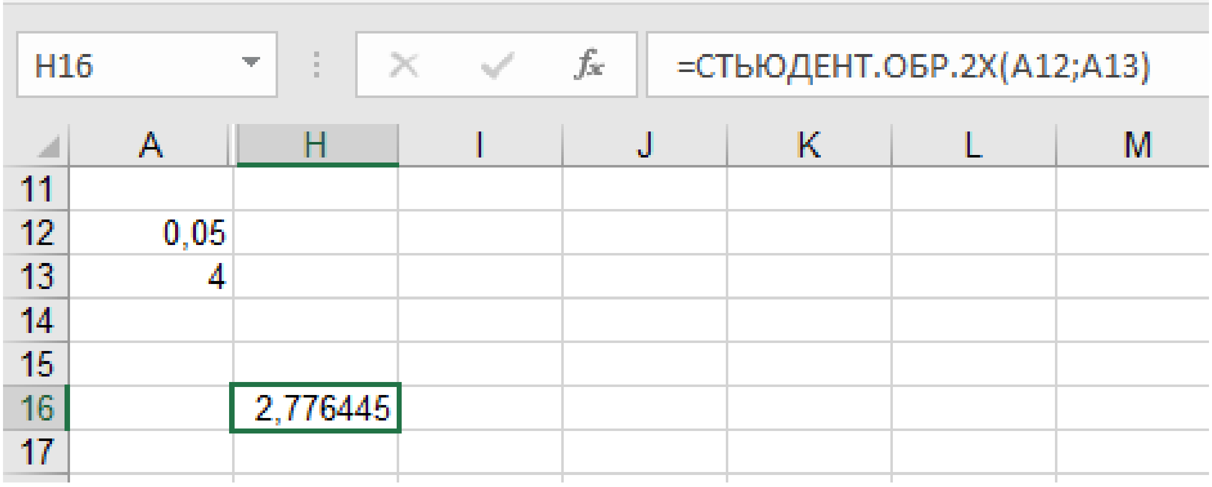


Рисунок 5.3 – Визначення критерію Стьюдента

Отже,

$$\Delta_{\text{пр}\bar{\theta}} = \frac{t_q \cdot m}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}78 \cdot 4{,}324}{\sqrt{5}} = 5{,}376,$$

отримали:

$$\Delta_{\text{пр}\bar{\theta}} = 5{,}376 > \left|\bar{\theta}\right| = 3{,}6.$$

Таким чином, граничне значення θ, зумовлене випадковими факторами, перевищує її значення, що отримане із статистичних даних. Це дає змогу заключити, що у нашому випадку має місце нульова гіпотеза H_0: θ = 0, і значення $\bar{\theta} = 3{,}6$ см є незначущим, оскільки сформовано виключно випадковими факторами.

Задача 5.4

Задано низку істинних похибок результатів вимірювань певної величини: –7, –6, –20, –2, 16, –7, –9, 2, 4, –7, –9, 2, 4, –7, –5, –3, 10, 5, –3, 3, 4, –8, 12, 6, –9, 5, 3, –2, –8, 9, 7, –4, 10, –16, 15, –8, 6, –7, –3, 4, –5, 9, 14, 11, –6, 2, –13, –8, 11, 16, –14, –7, 1.

Необхідно визначити, чи є наведені похибки випадковими, або вони мають систематичний характер.

Розв’язання

Запишемо вихідні дані у таблицю 5.4 та виконаємо обчислення.

Таблиця 5.4 – Результати обчислень

№	**ε_i, см**	**δ, см**	**δ^2, см^2**
1	–7	–6,7736	45,882
2	–6	–5,7736	33,334
3	–20	–19,7736	390,995
4	–2	–1,7736	3,146
5	16	16,2264	263,296

Продовження таблиці 5.4

№	ε_i, см	δ, см	δ^2, см^2
6	–7	–6,7736	45,882
7	–9	–8,7736	76,976
8	2	2,2264	4,957
9	4	4,2264	17,862
10	–7	–6,7736	45,882
11	–9	–8,7736	76,976
12	2	2,2264	4,957
13	4	4,2264	17,862
14	–7	–6,7736	45,882
15	–5	–4,7736	22,787
16	–3	–2,7736	7,693
17	10	10,2264	104,579
18	5	5,2264	27,315
19	–3	–2,7736	7,693
20	3	3,2264	10,410
21	4	4,2264	17,862
22	–8	–7,7736	60,429
23	12	12,2264	149,485
24	6	6,2264	38,768
25	–9	–8,7736	76,976
26	5	5,2264	27,315
27	3	3,2264	10,410
28	–2	–1,7736	3,146
29	–8	–7,7736	60,429
30	9	9,2264	85,126
31	7	7,2264	52,221
32	–4	–3,7736	14,240
33	10	10,2264	104,579
34	–16	–15,7736	248,806
35	15	15,2264	231,843
36	–8	–7,7736	60,429
37	6	6,2264	38,768
38	–7	–6,7736	45,882
39	–3	–2,7736	7,693
40	4	4,2264	17,862
41	–5	–4,7736	22,787
42	9	9,2264	85,126
43	14	14,2264	202,390
44	11	11,2264	126,032
45	–6	–5,7736	33,334
46	2	2,2264	4,957

Продовження таблиці 5.4

№	ε_i, см	δ, см	δ^2, $см^2$
47	–13	–12,7736	163,165
48	–8	–7,7736	60,429
49	11	11,2264	126,032
50	16	16,2264	263,296
51	–14	–13,7736	189,712
52	–7	–6,7736	45,882
53	1	1,2264	1,504
Σ			3931,281

Спочатку визначимо середнє значення похибки вимірювання

$$\overline{\theta} = \frac{[\varepsilon]}{n} = \frac{12,0}{53} = -0,2264 \text{ см}$$

та її середнє квадратичне відхилення m, для обчислення якого попередньо визначимо відхилення δ_i від середнього θ. Для першого результату вимірювань маємо:

$$\delta_1 = \varepsilon_1 - \bar{\theta} = -7 - 0,2264 = -6,7736 \text{ см.}$$

Оцінку СКП обчислюємо за формулою

$$m = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{3931,281}{53-1}} = 8,695 \text{ см.}$$

Оцінимо надійність СКП за формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{8,695}{\sqrt{2(53-1)}} = 0,853 \text{ см.}$$

Перевіримо значущість θ, для чого висуваємо нульову гіпотезу, тобто гіпотезу про її незначущість H_0: θ = 0. Скористаємось критерієм Стьюдента

$$\Delta_{пр\bar{\theta}} = \frac{t_q \cdot m}{\sqrt{n}} < \left|\bar{\theta}\right|,$$

де $\Delta_{пр\bar{\theta}}$ – граничне значення $\bar{\theta}$, викликане впливом випадкових факторів;

t_q – значення критерію Стьюдента, що обирають за рівнем значущості α та числом ступенів свободи ν = n – 1.

Розрахуємо $\Delta_{пр\bar{\theta}}$. Значення критерію Стьюдента для рівня значущості α = 0,05 і числа ступенів свободи ν = n – 1 = 53 – 1 = 52 дорівнює $t_q = 2,01$, тоді

$$\Delta_{пр\bar{\theta}} = \frac{t_q \cdot m}{\sqrt{n}} = \frac{2,01 \cdot 8,695}{\sqrt{53}} = 2,4,$$

отримаємо:

$$\Delta_{пр\bar{\theta}} = 2,4 > \left|\bar{\theta}\right| = 0,2264.$$

Оскільки виконується нерівність виду $\left|\bar{\theta}\right| < \Delta_{пр\bar{\theta}}$ (гранично можлива похибка перевищує її значення, отримане за статистичними даними), слід визнати, що θ сформована випадковими факторами, і систематична похибка в даному ряді відсутня, тобто значення $\overline{\theta} = -0{,}2264$ зумовлено тільки випадковими факторами.

Задача 5.5

Перевищення між точками A і B було визначено за програмою нівелювання другого класу і дорівнює 12,847 м. Крім того, перевищення h_{AB} багаторазово вимірювали нівеліром технічного класу точності, що дало наступні результати: 12,870, 12,842, 12,833, 12,861, 12,831, 12,864. Визначити оцінку систематичної похибки, СКП та граничну похибку визначення перевищення нівеліра технічної точності. Перевірити значущість систематичної похибки.

Розв'язання

1. Розрахуємо відхилення ε_i від значення 12,847 м, яке вважаємо істинним. Для першого результату виміру отримаємо:

$$\varepsilon_1 = l_1 - \mathrm{L} = 12{,}847 - 12{,}870 = 0{,}023 \text{ м} = 2{,}3 \text{ см.}$$

Усі розрахунки записуємо у таблицю 5.5.

Перед усім необхідно визначити оцінку систематичного зсуву та характеристику розкиду і оцінити значущість обчисленої систематичної похибки.

Нагадаємо, що математичне сподівання повної погрішності ε є її систематичною складовою θ. Щонайкращим наближенням до математичного сподівання є арифметична середина повної погрішності ε, отже щонайкраща оцінка систематичного зсуву матиме вигляд:

$$\overline{\theta} = \frac{[\varepsilon]}{n} = \frac{1{,}9}{6} = 0{,}317 \text{ см.}$$

Таблиця 5.5 – Результати розрахунків

№	**l_i, м**	**ε_i, см**	**δ, см**	**δ^2, см^2**
1	12,870	2,3	1,98	3,92
2	12,842	–0,5	–0,82	0,67
3	12,833	–1,4	–1,72	2,96
4	12,861	1,4	1,08	1,17
5	12,831	–1,6	–1,92	3,69
6	12,864	1,7	1,38	1,90
Σ		1,9	–0,02	14,31

Обчислимо відхилення θ від її середнього. Для першого результату вимірювання отримаємо:

$$\delta_1 = \varepsilon_1 - \bar{\theta} = 2{,}3 - 0{,}317 = 1{,}98 \text{ см.}$$

Оцінку СКП обчислюємо за формулою:

$$m = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{14{,}31}{6-1}} = 1{,}69 \text{ см.}$$

Оцінимо надійність СКП за формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{1{,}69}{\sqrt{2(6-1)}} = 0{,}535 \text{ см.}$$

Отже, ми визначили середню похибку вимірювань та оцінили її точність і надійність. Перевіримо значущість θ шляхом перевірки нульової гіпотези H_0: θ = 0. Скористаємось критерієм

$$\Delta_{пр\bar{\theta}} = \frac{t_q \cdot m}{\sqrt{n}} < |\bar{\theta}|,$$

де $\Delta_{пр\bar{\theta}}$ – граничне значення $\bar{\theta}$, зумовлене впливом випадкових факторів;

t_q – значення критерію Стьюдента.

З таблиці розподілу Стьюдента для рівня значущості α=0,05 та кількості ступенів свободи ν = n – 1 = 6 – 1= 5 визначимо t_q = 2,45. Обчислимо граничне значення $\bar{\theta}$, зумовлене впливом випадкових факторів:

$$\Delta_{\text{пр}\bar{\theta}} = \frac{t_q \cdot m}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}45 \cdot 1{,}69}{\sqrt{6}} = 1{,}69,$$

отримаємо:

$$\Delta_{\text{пр}\bar{\theta}} = 1{,}69 > |\bar{\theta}| = 0{,}317.$$

Оскільки виконується нерівність виду $|\bar{\theta}| < \Delta_{\text{пр}\bar{\theta}}$, вважаємо, що θ сформовано випадковими факторами, і систематичні погрішності в даному ряду відсутні.

Задача 5.6

За результатами вимірювань певної величини, дійсне значення якої відомо, отримано низку погрішностей: +6; –8; –4; –13; +7; +2; 0; +5; +4; –3. Визначити оцінку систематичної похибки СКП і граничну похибку. Перевірити значущість систематичної похибки.

Розв’язання

Усі розрахунки зводимо у таблицю 5.6.

Обчислимо середнє значення похибки вимірювання як суму відхилень, поділену на кількість вимірювань:

$$\bar{\theta} = \frac{[\varepsilon]}{n} = \frac{-4}{10} = -0{,}4.$$

Обчислимо відхилення δ_i від середнього θ. Для першого результату вимірювання отримаємо:

$$\delta_1 = \varepsilon_1 - \bar{\theta} = 6 - (-0{,}4) = 6{,}4.$$

Таблиця 5.6 – Результати розрахунків

№	εі, см	δ, см	δ^2, см²
1	+6	6,4	40,96
2	–8	-7,6	57,76
3	–4	-3,6	12,96
4	–13	-12,6	158,76
5	+7	7,4	54,76
6	+2	2,4	5,76
7	0	0,4	0,16
8	+5	5,4	29,16
9	+4	4,4	19,36
10	–3	-2,6	6,76
Σ	-4	0	386,4

Визначимо середнє квадратичне відхилення m

$$m = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{386,4}{10-1}} = 6,552.$$

Оцінимо надійність СКП за формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{6,552}{\sqrt{2(10-1)}} = 1,544.$$

Перевіримо значущість θ, для чого висунемо нульову гіпотезу, тобто гіпотезу про її незначущість H_0: θ = 0. Скористаємось критерієм Стьюдента

$$\Delta_{пр\bar{\theta}} = \frac{t_q \cdot m}{\sqrt{n}} < \left|\bar{\theta}\right|,$$

де $\Delta_{пр\bar{\theta}}$ – граничне значення $\bar{\theta}$, зумовлене впливом випадкових факторів;

t_q – значення критерію Стьюдента.

Обчислимо $\Delta_{\text{пр}\bar{\theta}}$. Для рівня значущості α = 0,05 та кількості ступенів свободи ν = n – 1=10 – 1= 9 визначимо $t_q = 2,26$. Отже,

$$\Delta_{\text{пр}\bar{\theta}} = \frac{t_q \cdot m}{\sqrt{n}} = \frac{2,26 \cdot 6,552}{\sqrt{10}} = 4,683,$$

отримаємо:

$$\Delta_{\text{пр}\bar{\theta}} = 4,68 > \left|\bar{\theta}\right| = -0,4.$$

Оскільки виконується нерівність виду $\left|\bar{\theta}\right| < \Delta_{\text{пр}\bar{\theta}}$, потрібно визнати, що θ сформовано випадковими факторами, і систематичні погрішності в даному ряду відсутні, що дозволяє заключити, що має місце нульова гіпотеза H_0: θ = 0 і значення $\bar{\theta} = -0,4$ є незначущим і зумовлене виключно випадковими факторами.

Задача 5.7

Знайти довірчий інтервал для оцінки середнього досліджуваної величини X. Нехай зроблено n незалежних дослідів та визначені спроможні й незміщені оцінки параметрів m_x та σ_x^2.

Розв'язання

Нехай $m_x = 10$, $\sigma_x^2 = 4$, $n = 40$. Задаємо значення довірчої імовірності $\beta = 0,95$. Тоді можна записати

$$P\{(m_x^* - l) < m_x < (m_x^* + l)\} = 0,95.$$

Скористаємося тим, що випадкова величина m_x^* є функцією n незалежних випадкових величин x_i. Тоді відповідно до центральної граничної теореми щільність розподілу випадкової величини m_x^* практично буде підпорядковуватися нормальному законові розподілу із параметрами

$$M[m_x^*] = m_x = 10, \; D[m_x^*] = \frac{\sigma_x^2}{n} = \frac{4}{40} = 0,1.$$

Для нормального закону розподілу імовірність влучення випадкової величини на інтервал значень визначають за допомогою інтегралу імовірностей

$$P\{(m_x^* - l) \le m_x \le (m_x^* + l)\} = \left[\Phi\left(\frac{m_x^* + l - m_x}{\sqrt{\sigma_x}}\right) - \Phi\left(\frac{m_x^* - l - m_x}{\sqrt{\sigma_x}}\right)\right] =$$

$$= \left[\Phi\left(\frac{l}{\sqrt{\sigma_x}}\right) - \Phi\left(\frac{-l}{\sqrt{\sigma_x}}\right)\right] = 2\Phi\left(\frac{l}{\sqrt{\sigma_x}}\right) = \beta.$$

Підставимо значення:

$$\Phi\left(\frac{l}{\sqrt{0,32}}\right) = 0,475; \qquad \frac{l}{0,453} = 1,4,$$

звідки $l = 1,4 \cdot 0,453 = 0,634$.

Отже, з імовірністю 0,95 інтервал (9,366; 10,634) накриває середнє арифметичне випадкової величини X.

Задача 5.8

Результати вимірювання значень випадкових величин X та Y наведені в таблиці 5.7.

Таблиця 5.7 – Результати вимірювань

Номер досліду	x_i	y_i
1	4	0,041
2	8	0,05
3	10	0,081
4	14	0,104
5	16	0,12

Продовження таблиці 5.7

Номер досліду	**x_i**	**y_i**
6	20	0,139
7	19	0,154
8	23	0,18
9	26	0,208
10	30	0,241
11	31	0,25
12	36	0,269
13	37	0,301

Визначити точкові та інтервальні оцінки числових характеристик системи випадкових величин X та Y, а також імовірність того, що середня арифметична випадкової величини X відрізняється від її математичного сподівання не більше, чим на 1.

Розв'язання

Проміжні розрахунки будемо зводити в таблицю 5.4. Спочатку визначимо точкові значення оцінок середніх:

$$m_y^* = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{2{,}138}{13} = 0{,}164;$$

$$m_x^* = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{274}{13} = 21{,}1.$$

Таблиця 5.8 – Проміжні розрахунки

Номер досліду	x_i	y_i	$x_i - m_x^*$	$\overset{o}{x}^2$	$\overset{o}{y}^2$	$\overset{o}{y}^2$	$\overset{o}{x}_i\overset{o}{y}_i$
1	4	0,041	-17,1	292,41	-0,123	0,0151	2,103
2	8	0,05	-13,1	171,61	-0,114	0,0130	1,493
3	10	0,081	-11,1	123,21	-0,083	0,0069	0,921
4	14	0,104	-7,1	50,41	-0,06	0,0036	0,426
5	16	0,12	-5,1	26,01	-0,044	0,0019	0,224
6	20	0,139	-1,1	1,21	-0,025	0,0006	0,028
7	19	0,154	-2,1	4,41	-0,01	0,0001	0,021
8	23	0,18	1,9	3,61	0,016	0,0003	0,030
9	26	0,208	4,9	24,01	0,044	0,0019	0,216
10	30	0,241	8,9	79,21	0,077	0,0059	0,685
11	31	0,25	9,9	98,01	0,086	0,0074	0,851
12	36	0,269	14,9	222,01	0,105	0,0110	1,565
13	37	0,301	15,9	252,81	0,137	0,0188	2,178
Сума	Σx_i=274	Σy_i=2,138		$\sum \overset{o}{x}_i^2$		$\sum \overset{o}{y}_i^2$	$\sum \overset{o}{x}_i \overset{o}{y}_i$

Знайдемо точкові значення незміщених оцінок дисперсій:

$$D_y^* = \frac{\sum_1^{13}(y_i - m_y^*)^2}{13-1} = \frac{\sum_1^{13}\overset{o}{y}^2}{12} = \frac{0{,}0866}{12} = 0{,}0072;$$

$$D_x^* = \frac{\sum_1^{13}(x_i - m_x^*)^2}{13-1} = \frac{\sum_1^{13}\overset{o}{x}^2}{12} = \frac{1348{,}93}{12} = 112{,}41.$$

Визначимо оцінки середніх квадратичних відхилень:

$$\sigma_y^* = \sqrt{0{,}0072} = 0{,}085; \quad \sigma_x^* = \sqrt{112{,}41} = 10{,}6.$$

Знайдемо оцінку кореляційного моменту за формулою:

$$K_{\text{xy}}^* = \frac{\sum_1^{13}\overset{o}{x}\overset{o}{y}}{13-1} = \frac{10{,}742}{12} = 0{,}895$$

та коефіцієнту кореляції за формулою:

$$r_{\text{xy}}^* = \frac{K_{xy}^*}{\sigma_y^* * \sigma_x^*} = \frac{0{,}895}{0{,}085 \cdot 10{,}6} = 0{,}994.$$

Для визначення імовірності того, що помилка від заміни істинної середньої випадкової величини X її оцінкою не перевершить 1, побудуємо довірчий інтервал з межами 21,1 ± 1 та знайдемо імовірність того, що цей інтервал накриває істинну середню випадкової величини X (довірчу імовірність β).

Скористаємося тим, що величина m_x^* є функцією суми n = 13 незалежних однаково розподілених випадкових величин x_i і, відповідно до центральної граничної теореми, при досить великому n її закон розподілу близький до нормального (а в нашому випадку ми провадили вимірювання, що завжди дає помилку, розподілену за нормальним законом). Будемо виходити з того, що величина m_x^* розподілена за нормальним законом з характеристиками:

$$M[m_x^*] = m_x = 21{,}1;$$

$$\sigma[m_x^*] = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}} = \frac{10{,}6}{\sqrt{13}} = 2{,}94.$$

Виразимо шукану імовірність β за допомогою интегралу імовірностей:

$$P\{|m_x^* - m_x| < l\} = \beta = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma_{m_x^*}}\right),$$

звідки дістанемо

$$2\Phi\left(\frac{1}{2{,}94}\right) = \beta; \ \beta = 2\Phi(0{,}34) = 0{,}266.$$

Отримане значення імовірності дуже мале, тобто подія, яка полягає в тому, що помилка від заміни істинної середньої m_x її оцінкою не перевершить 1, практично неможлива. Задаємося довірчою імовірністю β = 0,95 та визначимо межі відповідного довірчого інтервалу. Для цього запишемо вираз імовірності β

$$2\Phi\left(\frac{l}{2{,}94}\right) = \beta = 0{,}95; \ \Phi\left(\frac{l}{2{,}94}\right) = 0{,}95/2 = 0{,}475,$$

звідки, користуючись таблицею значень інтегралу імовірностей, одержимо

$$\frac{l}{2{,}94} = 1{,}96.$$

Таким чином, l= 1,96 · 2,94 = 5,76. З імовірністю 0,95 інтервал (15,34; 26,86) накриває генеральну середню випадкової величини Х. Помилка становить 27,3 %, тобто занадто велика. Для зменшення помилки треба збільшити кількість вимірювань.

Побудуємо довірчий інтервал для оцінки дисперсії випадкової величини Х. Закон розподілу оцінки дисперсії також наближається до нормального. Один з параметрів розподілу – математичне сподівання оцінки дисперсії

$$M[D^*_x] = \sigma^2_x.$$

Дисперсію оцінки дисперсії D^*_x обчислимо за формулою:

$$D[D_x^*] = \frac{1}{n}\mu_4 - \frac{n-3}{n(n-1)}\sigma_x^2,$$

де μ_4 – центральний момент випадкової величини Х четвертого порядку. Його оцінку обчислюють за формулою

$$\mu_4^* = \frac{1}{n}\sum_i (x_i - m_x^*)^4.$$

Але справа в тому, що за обмеженої кількості дослідів моменти високого порядку визначаються з великими помилками, тому якщо величина Х розподілена за нормальним законом, то μ_4 можна обчислити через дисперсію:

$$\mu_4 = 3 * \sigma_x^2.$$

Отримаємо:

$$D[D_x^*] = \frac{3}{n}\sigma_x^2 - \frac{n-3}{n(n-1)}\sigma_x^2 = \frac{3}{13}(114{,}041)^2 - \frac{13-3}{13(13-1)}(114{,}041)^2 = 2106,$$

звідси

$$\sigma[D_x^*] = \sqrt{2106} = 45{,}9.$$

Визначимо довірчий інтервал для оцінки дисперсії, задавшись імовірністю β = 0,9.

Користуючись тим, що D^*_x розподілена нормально, виразимо імовірність β за допомогою интегралу імовірностей:

$$P\{|D_x^* - D_x| < l\} = \beta = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma[D_x^*]}\right), \text{ звідки дістанемо } \Phi\left(\frac{l}{45{,}9}\right) = 0{,}45,$$

$$\frac{l}{45{,}9} = 1{,}64, \qquad l = 1{,}64 \cdot 45{,}9 = 75{,}26.$$

Отже, з імовірністю 0,9 дисперсія Х лежить в інтервалі 112,41 ± 75,26. Помилка становить 67 % – дуже велика.

Задача 5.9

У попередній задачі результати обчислення показали, що для зменшення довірчого інтервалу (15,34; 26,86), який з довірчою імовірністю 0,95 накриває істинну середню випадкової величини Х, необхідно збільшити кількість вимірювань. Визначимо, якою має бути кількість вимірювань n, щоб помилка від заміни істинної середньої випадкової величини X її оцінкою $m_x^* = 21{,}1$ не перевершувала 1 з імовірністю β = 0,95.

Розв'язання

Виразимо довірчу імовірність β за допомогою интеграла імовірностей:

$$P\{|m_x^* - m_x| < l\} = \beta = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma[m_x^*]}\right),$$

звідки дістанемо, підставивши l=1 і β =0,95,

$$\Phi\left(\frac{1}{\sigma[m_x^*]}\right) = 0{,}475,$$

тоді $\frac{1}{\sigma[m_x^*]} = 1{,}96$, звідки $\sigma[m_x^*] = \frac{1}{1{,}96} = 0{,}510$. Відомо, що середнє квадратичне відхилення оцінки середньої $\sigma[m_x^*] = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}}$. Знайдемо необхідну кількість вимірювань n у такий спосіб:

$$n = \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma[m_x^*]}\right)^2 = \left(\frac{10{,}6^2}{0{,}510}\right)^2 = 432.$$

Отже, для досягнення необхідної точності оцінки середньої замість 13 дослідів треба зробити 432 вимірювання випадкової величини X.

Задача 5.10

Результати вимірювання значень випадкових величин U та I наведені в таблиці 5.9.

Таблиця 5.9 – Вихідні дані

Номер досліду	**I_i**	**U_i**	**Номер досліду**	**I_i**	**U_i**
1	-18	-30	11	4	-8
2	-16	-32	12	6	22
3	-14	-10	13	8	-2
4	-12	-8	14	10	10
5	-10	-15	15	12	3
6	-8	10	16	14	18
7	-6	5	17	16	55
8	-4	2	18	18	28
9	-2	3	19	20	22
10	2	8	20	22	62

Знайти оцінки числових характеристик системи випадкових величин U та I і визначити 80-відсотковий довірчий інтервал для вибіркових середніх.

Розв'язання

Для розв'язання задачі скористаємося статистичними функціями Microsoft Excel. Незміщені спроможні оцінки середніх визначимо за допомогою функції СРЗНАЧ. Функція СРЗНАЧ повертає середнє арифметичне своїх аргументів. Синтаксис функції = СРЗНАЧ(число1, число2,...), де число1, число2, – це від 1 до 30 аргументів, для яких обчислюється середнє. Як аргумент функції вкажемо для випадкової величини I масив комірок B2:B21, для випадкової величини U – масив комірок C2:C21 (рис. 5.3) і отримаємо

$$m_I^* = \frac{\sum i_i}{n} = 2{,}1; \qquad m_U^* = \frac{\sum u_i}{n} = 7{,}15.$$

Для обчислення оцінок дисперсій скористаємося функцією ДИСП. Функція ДИСП оцінює дисперсію за вибіркою. Синтаксис функції = ДИСП(число1;число2; ...), де число1, число2, ... – це від 1 до 30 числових аргументів. Припускаємо, що аргументи є тільки вибіркою з генеральної сукупності. Якщо дані становлять всю генеральну сукупність, для обчислення дисперсії слід використовувати іншу функцію. Функція ДИСП використовує наступну формулу:

$$D_x^* = \frac{n\sum_1^n {x_i}^2 - (\sum_1^n x_i)^2}{n(n-1)}.$$

Як аргумент функції вкажемо для випадкової величини I масив комірок B2:B21, для випадкової величини U – масив комірок C2:C21 (рис. 5.4) і отримаємо

$$D_I^* = \frac{n\sum_1^{20} i_i^2 - (\sum_1^{20} i_i)^2}{n(n-1)} = 161{,}88; \qquad D_u^* = \frac{n\sum_1^{20} u_i^2 - (\sum_1^{20} u_i)^2}{n(n-1)} = 558{,}66.$$

	A	B	C	D	E
1	Номер досліду	Ii	Ui		
2	1	-18	-30	Вибіркова середня I =	=СРЗНАЧ(B2:B21)
3	2	-16	-32	Вибіркова середня U =	=СРЗНАЧ(C2:C21)
4	3	-14	-10	Вибіркова дисперсія I =	=ДИСП(B2:B21)
5	4	-12	-8	Вибіркова дисперсія U =	=ДИСП(C2:C21)
6	5	-10	-15	Середнє квадратичне відхилення I =	=СТАНДОТКЛОН(B2:B21)
7	6	-8	10	Середнє квадратичне відхилення U =	=СТАНДОТКЛОН(C2:C21)
8	7	-6	5	Кореляційний момент Kiu =	=КОВАР(B2:B21;C2:C21)
9	8	-4	2	Коефіцієнт кореляції r_{iu} =	=КОРРЕЛ(B2:B21;C2:C21)
10	9	-2	3		
11	10	2	8		
12	11	4	-8	довірчий інтервал для вибіркової середньої I	=ДОВЕРИТ(0,2;E6;20)
13	12	6	22		
14	13	8	-2	довірчий інтервал для вибіркової середньої U	=ДОВЕРИТ(0,2;E7;20)
15	14	10	10		=E2-E12
16	15	12	3	межі довірчого інтервалу для вибіркової середньої I	=E2+E12
17	16	14	18		
18	17	16	55		=E3-E14
19	18	18	28	межі довірчого інтервалу для вибіркової середньої U	=E3+E14
20	19	20	22		
21	20	22	62		
22					

Рисунок 5.4 – Обчислення кореляційного моменту

Для обчислення середніх квадратичних відхилень є кілька статистичних функцій. Скористаємося функцією СТАНДОТКЛОН. Функція СТАНДОТКЛОН оцінює стандартне відхилення за вибіркою, тобто передбачає, що аргументи є тільки вибіркою з генеральної сукупності. Якщо дані являють всю генеральну сукупність, то стандартне відхилення необхідно обчислювати за допомогою іншої функції. Стандартне відхилення обчислюється з використанням «незміщеного» методу, функція СТАНДОТКЛОН використовує наступну формулу:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n\sum_1^{20} x_i - (\sum x_i)^2}{n(n-1)}}.$$

Дамо посилання на масиви B2:B21 і C2:C21 та отримаємо

$$\sigma_I^* = 12{,}72, \qquad \sigma_U^* = 23{,}64.$$

Кореляційний момент (коваріацію) розрахуємо з використанням функції КОВАР. Функція КОВАР повертає коваріацію, тобто середнє добутків відхилень для кожної пари точок даних. Коваріація використовується для визначення зв'язку між двома множинами даних. Синтаксис функції = КОВАР(масив1; масив2), де масив1 – це перший масив або інтервал даних, масив2 – це другий масив або інтервал даних. Якщо масив1 і масив2 мають різну кількість даних, то КОВАР повертає значення помилки #Н/Д. Якщо масив1, або масив2 порожні, то КОВАР повертає значення помилки #ДЕЛ/0!.

Коваріація визначається в такий спосіб:

$$Cov(X,Y) = \frac{\sum_1^{20}(x_i - m_x^*)(y_i - m_y^*)}{n},$$

обчислимо кореляційний момент (рис. 5.4):

$$K_{\text{iu}} = Cov(I,U) = 234{,}49.$$

Для обчислення коефіцієнта кореляції скористаємось функцією КОРРЕЛ. Функція КОРРЕЛ повертає коефіцієнт кореляції між інтервалами комірок масив1 і масив2. Синтаксис: = КОРРЕЛ(масив1;масив2), де масив1 і масив2 – це комірки інтервалів значень. Аргументи мають бути числами або іменами, масивами або посиланнями, що містять числа. Якщо масив1 і масив2 мають різну кількість точок даних, то функція КОРРЕЛ повертає значення помилки #Н/Д. Якщо масив1 або масив2 порожній, або якщо σ (стандартне відхилення) їхніх значень дорівнює нулю, то функція КОРРЕЛ повертає значення помилки #ДЕЛ/0!. Рівняння для коефіцієнта кореляції має такий вигляд:

$$r_{iu} = \frac{Cov(I,U)}{\sigma_i \sigma_u} = 0{,}82.$$

Тепер визначимо довірчий інтервал для m_I^* і m_U^* при β = 0,8. Скористаємось функцією ДОВЕРИТ. Функція ДОВЕРИТ повертає довірчий інтервал для середньої генеральної сукупності (рис. 5.5).

	A	B	C	D	E	F
1	Номер досліду	Ii	Ui			
2	1	-18	-30	Вибіркова середня I =	2,1	
3	2	-16	-32	Вибіркова середня U =	7,15	
4	3	-14	-10	Вибіркова дисперсія I =	161,88	
5	4	-12	-8	Вибіркова дисперсія U =	558,66	
6	5	-10	-15	Середнє квадратичне відхі	12,72	
7	6	-8	10	Середнє квадратичне відхі	23,64	
8	7	-6	5	Кореляційний момент Kiu	234,49	
9	8	-4	2	Коефіцієнт кореляції r_{iu} =	0,82	
10	9	-2	3			
11	10	2	8	довірчий інтервал для		
12	11	4	-8	вибіркової середньої I	3,65	
13	12	6	22	довірчий інтервал для		
14	13	8	-2	вибіркової середньої U	6,77	
15	14	10	10	межі довірчого інтервалу	-1,55	
16	15	12	3	для вибіркової середньої I	5,75	
17	16	14	18			
18	17	16	55	межі довірчого інтервалу	0,38	
19	18	18	28	для вибіркової середньої	13,92	
20	19	20	22			
21	20	22	62			

Рисунок 5.5 – Визначення меж довірчого інтервалу

Синтаксис функції = ДОВЕРИТ (альфа;станд_откл;размер), де альфа – рівень значущості, використовуваний для обчислення рівня надійності; станд_откл – стандартне відхилення генеральної сукупності для інтервалу даних, передбачається відомим; размер – це розмір вибірки. Якщо будь-який з аргументів не є числом, то функція ДОВЕРИТ повертає значення помилки #ЗНАЧ!. Якщо альфа ≤ 0 або альфа ≥ 1, то функція ДОВЕРИТ повертає значення помилки #ЧИСЛО!. Якщо станд_откл ≤ 0, то функція ДОВЕРИТ повертає значення помилки #ЧИСЛО!. Якщо розмір не ціле число, то воно усікається до цілого. Якщо розмір < 1, то функція ДОВЕРИТ повертає значення помилки #ЧИСЛО!

Дістанемо значення 80-процентних довірчих інтервалів:

для I $\qquad l_i = 3{,}65$;

для U $\qquad l_u = 6{,}77$.

Тоді межі довірчих інтервалів

для I

$$m^*_{I_1} = 2{,}1 - 3{,}65 = -1{,}55;\quad m^*_{I_2} = 2{,}1 + 3{,}65 = 5{,}75;$$

для U

$$m^*_{U_1} = 7{,}15 - 6{,}77 = 0{,}38;\quad m^*_{U_2} = 7{,}15 + 6{,}77 = 13{,}92.$$

Результати розрахунків наведені на рисунку 5.5.

Практичне заняття 6
РЕГРЕСІЙНО-КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Мета – сформувати вміння на підставі статистичних даних будувати рівняння регресії та визначати його параметри за методом найменших квадратів, а також оцінювати ступінь лінійного зв'язку між залежними величинами.

Основні відомості

Кореляційний аналіз ґрунтується на використанні рівняння регресії.

Регресією Y на X називають умовне математичне сподівання випадкової величини Y за умови, що X прийняла значення x_i. Лінію, що з'єднує точки $\overline{y}_i$, називають лінією регресії.

Для апроксимації лінії регресії аналітичним виразом використовують рівняння регресії $\overline{y}_x = \varphi(x)$. Вибір вигляду залежності $\overline{y}_x = \varphi(x)$ можна здійснити з теоретичних міркувань, або графічно за допомогою поля кореляції. На практиці найчастіше використовують лінійне рівняння регресії $Y = \rho_{yx} X + b$. Коефіцієнт при змінній X ρ_{yx} називають коефіцієнтом регресії.

Для визначення параметрів залежності $\overline{y}_x = \varphi(x)$, зокрема значень параметрів ρ_{yx} та b, застосовують метод найменших квадратів (МНК). Цей метод дозволяє при відомому класі апроксимуючої залежності $\overline{y}_x = \varphi(x)$ так вибрати значення її параметрів, щоб ця залежність щонайкраще відображала дані спостережень. При використанні МНК вимога найкращого узгодження апроксимуючої кривої $\overline{y}_x = \varphi(x)$ із дослідними даними збігається до того, щоб сума квадратів відхилень цієї кривої від експериментальних точок оберталася на мінімум

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{ip})^2 \to min, \qquad (6.1)$$

де y_i – значення залежної величини Y, отримані в результаті спостережень;

y_{ip} – розрахункові значення залежної величини Y, отримані на підставі аналітичного виразу кривої, що згладжує $\overline{y}_x = \varphi(x)$.

З огляду на те, що $y_{ip} = \varphi(x_i)$, вираз (6.1) можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i)]^2 \to min. \qquad (6.2)$$

Невідомі параметри шуканої залежності визначають, записавши її не тільки як функцію аргументу x, але й як функцію невідомих параметрів a_j, $j = \overline{1,m}$

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \varphi(x_i, \mathrm{a}_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_m)]^2 \to min, \qquad (6.3)$$

де m – число шуканих параметрів.

Візьмемо часткові похідні від виразу (6.3) за параметрами a_j і, дорівнявши їх до нуля, дістанемо систему m + 1 нормальних рівнянь з m + 1 невідомими, розв'язання якої дає шукані параметри a_j, що задовольняють умові (6.3):

$$-2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \varphi(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_m)\right]\frac{\partial\varphi}{\partial a_j} = 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Розв'язання отриманої системи нормальних рівнянь залежить від конкретного вигляду залежності $\overline{y}_x = \varphi(x)$.

Отримаємо для лінійного рівняння регресії

$$Y = \rho_{yx} X + b \qquad (6.4)$$

методом найменших квадратів вираз для коефіцієнта регресії ρ_{yx} і вільного члена b. Для цього підставимо у (6.3) вираз (6.4) і дістанемо:

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - \rho_{yx}x_i - b]^2 \to min.$$

Для відшукання мінімуму візьмемо похідні за параметрами ρ_{yx} та b і, дорівнявши їх до нуля, одержимо систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{n}[y_i - \rho_{yx}x_i - b]\cdot x_i = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{n}[y_i - \rho_{yx}x_i - b] = 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (6.5)$$

з якої в результаті перетворень маємо:

$$\left.\begin{aligned} \rho_{yx}\cdot\sum x_i^2 + b\cdot\sum x_i = \sum x_i y_i \\ \rho_{yx}\cdot\sum x_i + nb = \sum y_i \end{aligned}\right\}. \qquad (6.6)$$

Виразимо ρ_{yx} і b

$$\rho_{yx} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}; \qquad (6.7)$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 * \sum y_i - \sum x_i * \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \qquad (6.8)$$

Оцінку коефіцієнта кореляції застосовують для оцінювання тісноти лінійної кореляційної залежності, його визначають за формулою

$$r_B = \rho\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \qquad (6.9)$$

Коефіцієнт кореляції $r_в$ дозволяє оцінити величину лінійного зв'язку між двома випадковими величинами X та Y. Вибірковий коефіцієнт кореляції приймає значення від –1 до +1. Якщо $r_в = 0$, то лінійний зв'язок відсутній, чим ближче значення $|r_в|$ до одиниці, тим тісніше зв'язок, при $|r_в| = 1$ зв’язок стає функціональним.

Задача 6.1

У результаті досліду отримані експериментальні дані, що наведені у таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 – Експериментальні дані

x_i	1	2	3
y_i	1	3	4

Потрібно визначити параметри лінійної та квадратичної залежностей для X та Y.

Розв'язання

Нанесемо на координатну площину точки з координатами (x_i,y_i) (рис. 6.1).

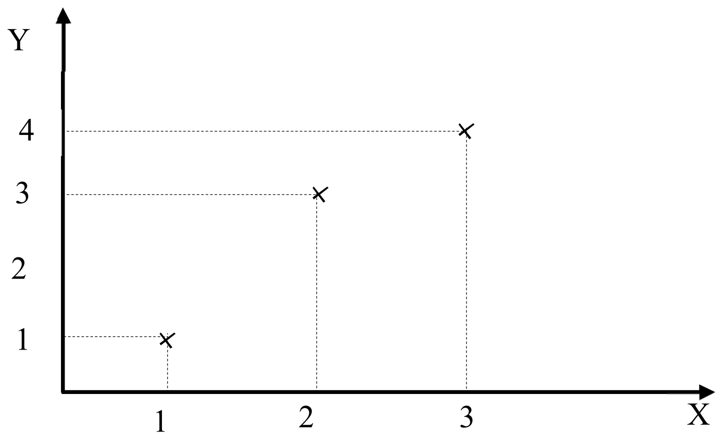


Рисунок 6.1 – Побудова поля кореляції

Із графіка видно, що точки не лежать на одній прямій, та що із зростанням X Y має тенденцію до зростання. Обчислимо два варіанти:

а) нехай шукана залежність – лінійна, отже має вигляд:

$$y = a_0 + a_1x,$$

запишемо її як функцію параметрів $f = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1x_i)^2 \rightarrow min$ та візьмемо часткові похідні за параметрами a_1 і a_0 і дорівняємо їх до нуля:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a_0} = \left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1x_i)^2\right]' = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial a_1} = \left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1x_i)^2\right]' = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial a_0} = 2\cdot\Sigma(y_i - a_0 - a_1x_i)\cdot(-1) = 0\\ \frac{\partial f}{\partial a_1} = 2\cdot\Sigma(y_i - a_0 - a_1x_i)\cdot(-1) = 0\end{aligned}\right\}$$

виконаємо перетворення:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma a_0 + \Sigma a_1 x_i &= \Sigma y_i\\ \Sigma a_0 x_i + \Sigma a_1 x_i^2 &= \Sigma y_i x_i\end{aligned}\right\},$$

або

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{n}a_0 + a_1\Sigma x_i &= \Sigma y_i\\ a_0\Sigma x_i + a_1\Sigma x_i^2 &= \Sigma y_i x_i\end{aligned}\right\}.$$

Підставимо числові значення: n = 3; $\Sigma x_i = 6$; $\Sigma x_i^2 = 14$; $\Sigma y_i = 8$; $\Sigma y_i\, x_i = 19$ та обчислимо параметри.

$$\left.\begin{aligned}a_0 + 6a_1 &= 8\\ 6a_0 + 14a_1 &= 19\end{aligned}\right\};$$

$$\left.\begin{aligned}a_0 &= -\tfrac{1}{3}\\ a_1 &= \tfrac{3}{2}\end{aligned}\right\}.$$

Отже, шукана залежність має вигляд:

$$y = -1/3 + 1{,}5\ x.$$

Отримана лінійна залежність є найбільш імовірною з лінійних залежностей.

Протабулюємо її у таблиці 6.2 та побудуємо графік (рис. 6.2)

Таблиця 6.2 – Табуляція значень лінійної залежності

x_i	1	2	3
y_i	1	3	4
$y_i^т$	1,17	2,67	4,17

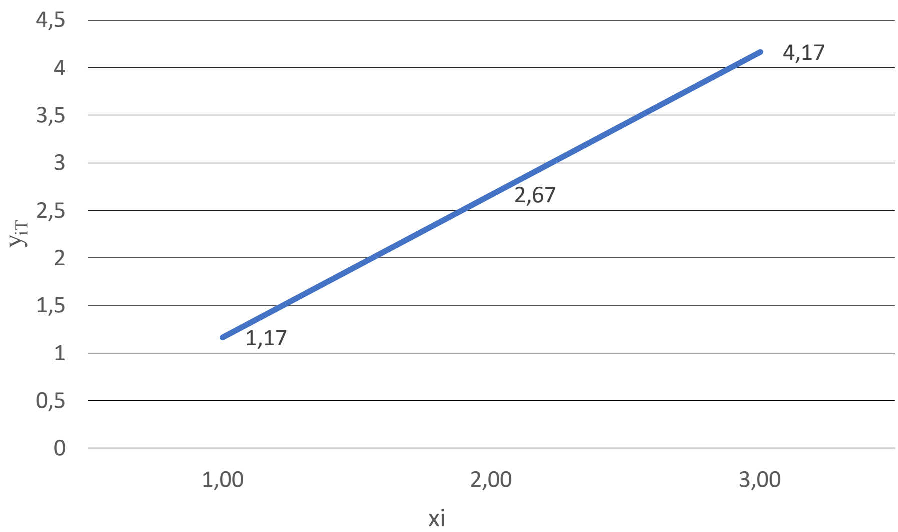


Рисунок 6.2 – Лінійна залежність y = –1/3 + 1,5x

б) нехай шукана залежність – квадратична: $Y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, запишемо її як функцію параметрів $\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)^2 \rightarrow min$, візьмемо часткові похідні та дорівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} 2 \cdot \Sigma(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) \cdot (-1) = 0 \\ 2 \cdot \Sigma(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) \cdot (-x_i) = 0 \\ 2 \cdot \Sigma(y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2) \cdot (-x_i^2) = 0, \end{cases}$$

виконаємо перетворення:

$$\begin{cases} \Sigma y_i - \Sigma a_0 - \Sigma a_1x_i - \Sigma a_2x_i^2 = 0 \\ \Sigma y_i\, x_i - \Sigma\, a_0\, x_i - \Sigma a_1x_i^2 - \Sigma a_2x_i^3 = 0 \\ \Sigma y_i\, x_i^2 - \Sigma a_0\, x_i^2 - \Sigma a_1x_i^3 - \Sigma a_2x_i^4 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} na_0 + a_1\Sigma x_i + a_2\Sigma x_i^2 = \Sigma y_i \\ a_0\, \Sigma x_i + a_1\Sigma x_i^2 + a_2\Sigma x_i^3 = \Sigma y_i\, x_i \\ a_0\, \Sigma x_i^2 + a_1\Sigma x_i^3 + a_2\Sigma x_i^4 = \Sigma y_i\, x_i^2. \end{cases}$$

Підставимо значення: $n = 3$; $\Sigma x_i = 6$; $\Sigma x_i^2 = 14$; $\Sigma y_i = 8$; $\Sigma y_i\, x_i = 19$; $\Sigma x_i^3 = 36$; $\Sigma x_i^4 = 98$; $\Sigma y_i\, x_i^2 = 49$ та обчислимо шукані параметри

$$\begin{cases} 3a_0 + 6\, a_1 + 14a_2 = 8 \\ 6a_0 + 14a_1 + 36a_2 = 19 \\ 14a_0 + 36a_1 + 98a_2 = 49, \end{cases}$$

звідки $a_2 = –0,091$; $a_1 = 1,273$; $a_0 = 0,0455$.

Отже, найбільш імовірна квадратична залежність має вигляд

$$y = 0,0455 + 1,273x – 0,091x^2.$$

Протабулюємо її, збільшивши для наочності число точок у таблиці 6.3.

Таблиця 6.3 – Табуляція значень квадратичної залежності

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i^T	0,05	1,23	2,23	3,05	3,68	4,14

Отримаємо графік, наведений на рисунку 6.3.

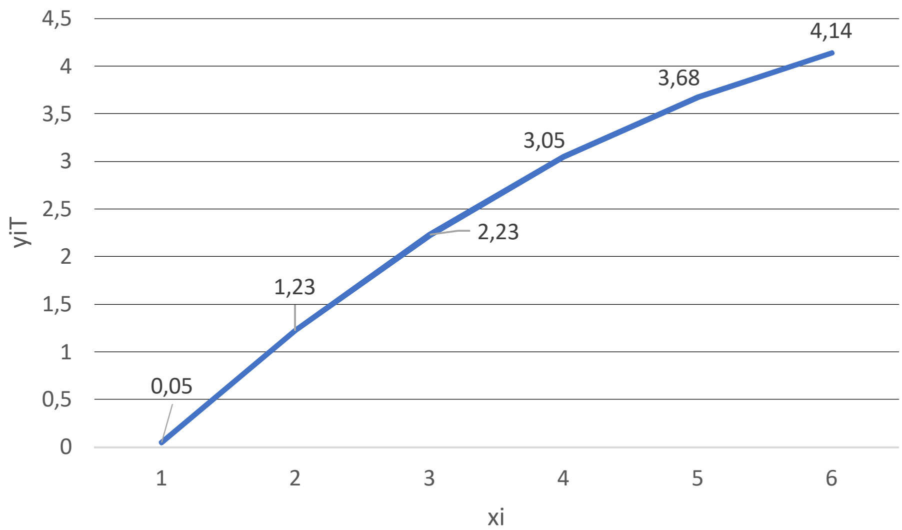


Рисунок 6.3 – Квадратична залежність $y = 0{,}0455 + 1{,}273x - 0{,}091x^2$

Задача 6.2

Визначити параметри лінійної регресії для системи випадкових величин X та Y, результати вимірювання яких наведені в прикладі 5.4. Таблиця 6.4 містить вихідні дані.

Таблиця 6.4 – Вихідні дані

Номер досліду	x_i	y_i
1	4	0,041
2	8	0,05
3	10	0,081
4	14	0,104
5	16	0,12
6	20	0,139
7	19	0,154
8	23	0,18
9	26	0,208
10	30	0,241

Продовження таблиці 6.4

Номер досліду	x_i	y_i
11	31	0,25
12	36	0,269
13	37	0,301

Розв'язання

Побудуємо поле кореляції (рис. 6.4). Очевидно, що статистичні дані добре згладжуються лінійною залежністю.

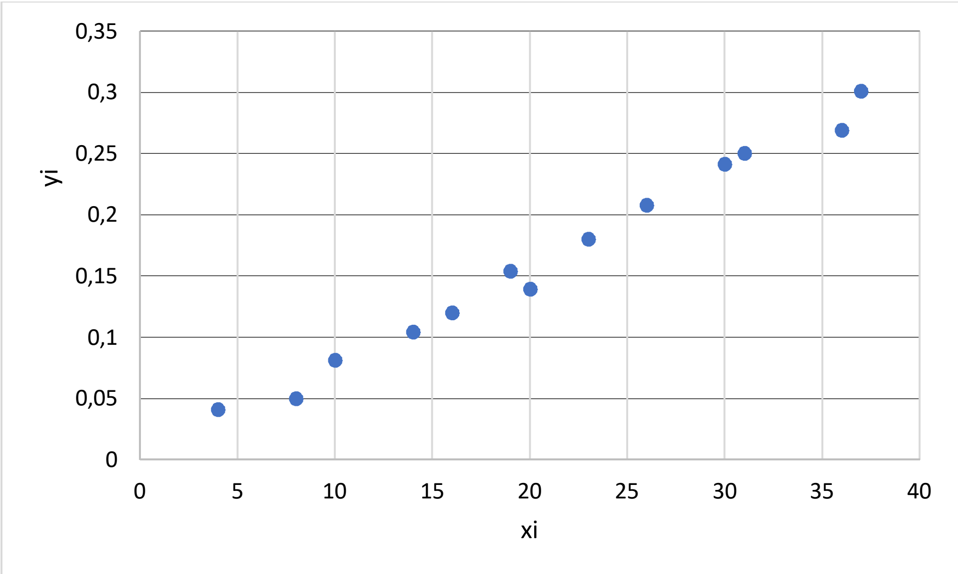


Рисунок 6.4 − Побудова поля кореляції

Визначимо параметри лінійної залежності між X та Y, проміжні обчислення зробимо в таблиці 6.5.

Таблиця 6.5 − Результати проміжних обчислень

Номер досліду	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	4	0,041	16	0,164
2	8	0,05	64	0,4
3	10	0,081	100	0,81
4	14	0,104	196	1,456
5	16	0,12	256	1,92
6	20	0,139	400	2,78
7	19	0,154	361	2,926
8	23	0,18	529	4,14
9	26	0,208	676	5,408
10	30	0,241	900	7,23
11	31	0,25	961	7,75

Продовження таблиці 6.5

Номер досліду	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
12	36	0,269	1296	9,684
13	37	0,301	1369	11,137
Сума	$\Sigma x_i = 274$	$\Sigma y_i = 2{,}138$	$\Sigma x_i^2 = 7124$	$\Sigma x_i \cdot y_i = 55{,}805$

Дістанемо

$$\rho_{yx} = \frac{n\sum x_iy_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{13 \cdot 55{,}08 - 274 \cdot 2{,}138}{13 \cdot 7124 - 274^2} = 0{,}00796;$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_iy_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{7124 \cdot 2{,}138 - 274 \cdot 55{,}8}{13 \cdot 7124 - 274^2} = -0{,}0034.$$

Таким чином, шукана залежність має вигляд

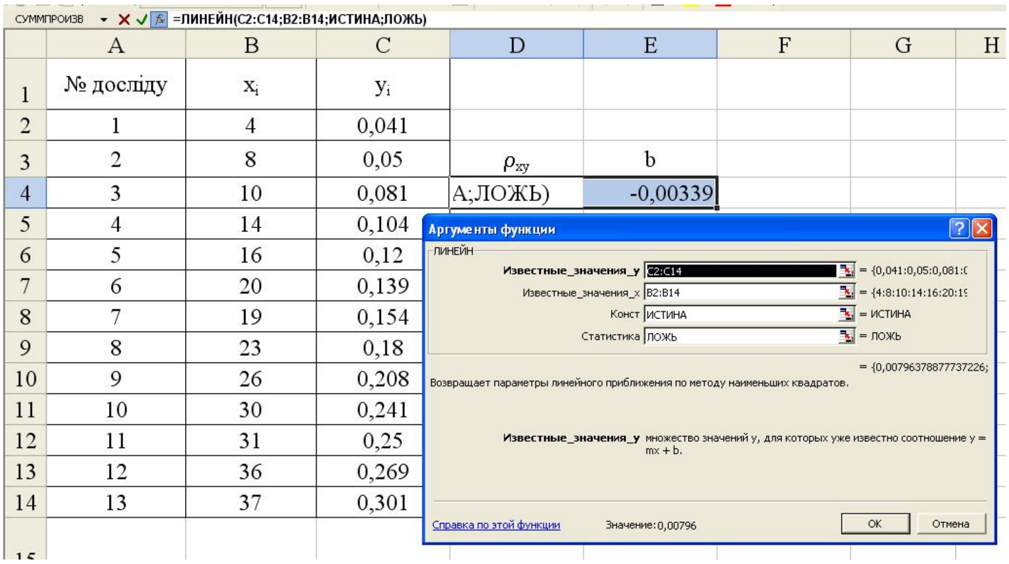
$$y = 0{,}00796x - 0{,}0034.$$

Для визначення параметрів лінійної залежності між X і Y можна скористатися функціями Microsoft Excel. Визначимо коефіцієнти ρ_{yx} і b за допомогою функції ЛИНЕЙН. Функція ЛИНЕЙН розраховує статистику для ряду із застосуванням методу найменших квадратів, щоб обчислити пряму лінію, яка щонайкраще апроксимує наявні дані. Функція повертає масив, який описує отриману пряму. Оскільки повертається масив значень, функція має задаватися у вигляді формули масиву. Синтаксис функції:

=ЛИНЕЙН(известные_значения_y;известные_значения_x;конст;статистика),

де Известные_значення_y − множина значень y; Известные_значения_x − необов'язкова множина значень x, якщо Известные_значення_x опущені, то передбачається, що це масив {1;2;3;...} такого ж розміру, як і Известные_значення_y; Конст − логічне значення, що вказує, чи потрібно, щоб константа b дорівнювала 0. Якщо Конст має значення ИСТИНА або опущена, то b обчислюється звичайним способом. Якщо аргумент Конст має значення ЛОЖЬ, то b вважається рівним 0; Статистика - логічне значення, що вказує, чи потрібно повернути додаткову статистику по регресії.

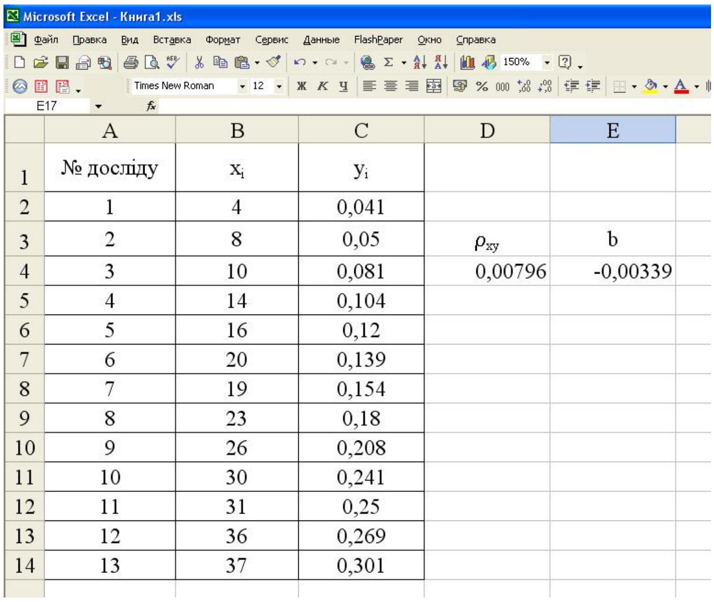
Оскільки функція повертає масив, виділимо в аркуші Excel дві комірки, в яких розмістяться параметри ρ_{yx} і b (рис. 6.5). Як аргумент Известные_значення_y вкажемо діапазон C2:C14, як аргумент Известные_значення_x − діапазон B2:B14. Щоб отримати ненульове значення b, в аргумент Конст введемо слово ИСТИНА. Оскільки нам не потрібні інші дані, в аргумент Статистика введемо слово ЛОЖЬ.



	A	B	C	D	E
1	№ досліду	x_i	y_i		
2	1	4	0,041		
3	2	8	0,05	ρ_{xy}	b
4	3	10	0,081	А;ЛОЖЬ)	-0,00339
5	4	14	0,104		
6	5	16	0,12		
7	6	20	0,139		
8	7	19	0,154		
9	8	23	0,18		
10	9	26	0,208		
11	10	30	0,241		
12	11	31	0,25		
13	12	36	0,269		
14	13	37	0,301		

Рисунок 6.5 − Введення аргументів функції ЛИНЕЙН

Для завершення введення функції скористаємось командою масиву: натискання функціональної клавіші F2, а потім комбінації клавіш Ctrl+Shift+Enter. Результат наведено на рисунку 6.6.



	A	B	C	D	E
1	№ досліду	x_i	y_i		
2	1	4	0,041		
3	2	8	0,05	ρ_{xy}	b
4	3	10	0,081	0,00796	-0,00339
5	4	14	0,104		
6	5	16	0,12		
7	6	20	0,139		
8	7	19	0,154		
9	8	23	0,18		
10	9	26	0,208		
11	10	30	0,241		
12	11	31	0,25		
13	12	36	0,269		
14	13	37	0,301		

Рисунок 6.6 – Визначення параметрів ρ_{yx} і b
з використанням функції ЛИНЕЙН

Побудуємо графік отриманої залежності y = 0,00796x – 0,0034 (рис. 6.7).

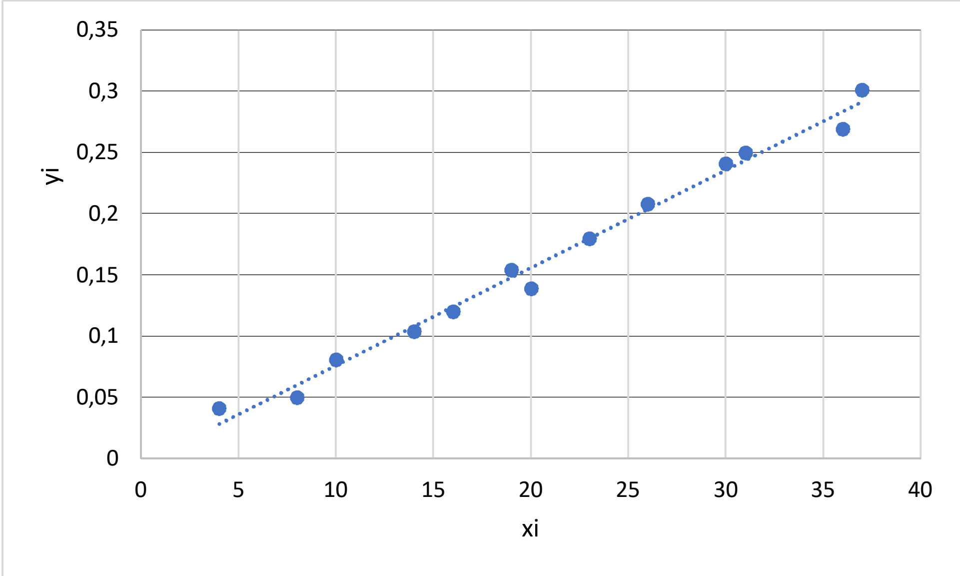


Рисунок 6.7 – Графік залежності y = 0,00796x – 0,0034

Задача 6.3

Визначити значення коефіцієнта кореляції системи випадкових величин X та Y із задачі 6.2.

Розв'язання

У попередній задачі для системи випадкових величин X та Y була визначена лінійна кореляційна залежність. Скористаємось параметрами цієї залежності та визначимо коефіцієнт кореляції за формулою (6.9), розрахувавши попередньо середні квадратичні відхилення σ_x та σ_y (рис. 6.8):

$$\sigma_x = 10{,}6;\ \sigma_y = 0{,}085;$$

$$r_{вxy} = \rho \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0{,}00796\frac{10{,}6}{0{,}085} = 0{,}994.$$

F10 =E4*E7/F7

	A	B	C	D	E	F
1	№ досліду	x_i	y_i			
2	1	4	0,041	0,0285		
3	2	8	0,05	0,0603	ρ_{xy}	b
4	3	10	0,081	0,0762	0,00796	-0,00339
5	4	14	0,104	0,1081		
6	5	16	0,12	0,1240	σ_x	σ_y
7	6	20	0,139	0,1559	10,602	0,085
8	7	19	0,154	0,1479		
9	8	23	0,18	0,1798		
10	9	26	0,208	0,2037	r_{xy}=	0,994023
11	10	30	0,241	0,2355		
12	11	31	0,25	0,2435		
13	12	36	0,269	0,2833		
14	13	37	0,301	0,2913		

Рисунок 6.8 – Розрахунок коефіцієнта кореляції

Значення коефіцієнта кореляції $r_{xy} = 0,994$ вказує на те, що між X та Y є тісний лінійний зв'язок. Дійсно, з рисунку 6.7 видно, що розкид статистичних значень Y відносно прямої лінії, яка згладжує залежність, неістотний.

Задача 6.4

Визначити значення коефіцієнта кореляції системи випадкових величин I та U із задачі 5.6.

Розв'язання

У попередній задачі для системи випадкових величин I та U була визначена лінійна кореляційна залежність. Розрахуємо середні квадратичні відхилення σ_i та σ_u і визначимо коефіцієнт кореляції за формулою (6.9), (рис. 6.9):

$$\sigma_i = 12,72;\ \sigma_u = 23,64;$$

$$r_{\text{в}iu} = \rho \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_u} = 1,525\,\frac{12,72}{23,64} = 0,821.$$

G14 =G7*F12/G12

	A	B	C	D	E	F	G
1	Номер досліду	Ii	Ui				
2	1	-18	-30	-23,4967			
3	2	-16	-32	-20,4472			
4	3	-14	-10	-17,3978			
5	4	-12	-8	-14,3484			
6	5	-10	-15	-11,299			
7	6	-8	10	-8,24956		ρ_{yu}	1,525
8	7	-6	5	-5,20014			
9	8	-4	2	-2,15073		b	3,948
10	9	-2	3	0,898693			
11	10	2	8	6,997529		σ_i	σ_u
12	11	4	-8	10,04695		12,72	23,64
13	12	6	22	13,09637			
14	13	8	-2	16,14578		r_{iu}=	0,821
15	14	10	10	19,1952			
16	15	12	3	22,24462			
17	16	14	18	25,29404			
18	17	16	55	28,34346			
19	18	18	28	31,39287			
20	19	20	22	34,44229			
21	20	22	62	37,49171			

Рисунок 6.9 − Розрахунок коефіцієнта кореляції для задачі 5.6

Отже, між I та U існує тісний лінійний зв'язок.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2 «ОСОБЛИВОСТІ ОБРОБКИ ВИМІРЮВАНЬ У ПЛАНОВИХ І ВИСОТНИХ ГЕОДЕЗИЧНИХ МЕРЕЖАХ»

Практичне заняття 7
ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ФУНКЦІЙ ВИМІРЯНИХ ВЕЛИЧИН

Мета − формування навичок з розв'язання задач визначення середньої квадратичної похибки функції безпосередньо виміряних величин.

Основні відомості

Під час непрямих вимірювань шукане значення певної величини отримують шляхом використання значень безпосередньо виміряних величин. Оскільки значення безпосередньо виміряних величин містять похибки, виникає завдання з оцінювання імовірнісних характеристик погрішностей значень їхніх функцій, зокрема, середньої квадратичної похибки певної функції виміряних величин.

У загальному випадку середню квадратичну похибку функції у визначають співвідношенням

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2}, \tag{7.1}$$

де $\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2$ – часткові похідні функції у;

m_i − середні квадратичні похибки безпосередньо виміряних величин.

Задача 7.1

В трикутника виміряні два кути β_1 та β_2 із середніми квадратичними похибками $m_{\beta_1} = 5''$; $m_{\beta_2} = 3''$. Знайти m_{β_3}.

Розв'язання

Складемо функцію $f = \beta_3 = 180° - \beta_1 - \beta_2$ та скористаємось виразом (7.1)

$$m_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \beta_1}\right)^2 m_{\beta_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_2}\right)^2 m_{\beta_2}^2},$$

далі визначимо похідні

$$\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \beta_1}\right)' = (180° - \beta_1 - \beta_2)' = 0 - 1 - 0 = 1;$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \beta_2}\right)' = (180° - \beta_1 - \beta_2)' = 0 - 1 - 0 = 1.$$

Маємо:

$$m_f = \sqrt{1^2 m_{\beta_1}^2 + 1^2 m_{\beta_2}^2} = \sqrt{m_{\beta_1}^2 + m_{\beta_2}^2}.$$

Обидві частини останнього виразу зведемо у квадрат, отримаємо

$$m_f^2 = m_{\beta_1}^2 + m_{\beta_2}^2.$$

Зауважимо, що у випадку, коли функція безпосередньо виміряних величин є лінійною, тобто має вигляд:

$$y = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \cdots + C_n x_n,$$

її середню квадратичну похибку m_y визначають наступним чином:

$$m_y^2 = C_1^2 \cdot m_1^2 + C_2^2 \cdot m_2^2 + \cdots + C_n^2 \cdot m_n^2, \qquad (7.2)$$

де C_i – коефіцієнти при безпосередньо виміряних змінних x_i.

Формула (7.2) є частковим випадком формули (7.1).

Треба зауважити, що лінійним вважають вираз, який являє собою суму доданків, причому доданки не є нелінійними функціями, зокрема змінними у будь-якому ступені, та не є добутками змінних. Також зауважимо, що у цьому випадку часткові похідні $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ функції y дорівнюють коефіцієнтам при змінних x_i C_i , які далі за формулою (7.1) піднесені у квадрат та помножені на m_i^2.

Отже, продовжимо розв'язання задачі та отримаємо

$$\beta_3 = m_f = \sqrt{m_{\beta_1}^2 + m_{\beta_2}^2} = \sqrt{(5'')^2 + (3'')^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} = 5{,}8''.$$

Задача 7.2

Кут, обчислений як середнє з його n значень. Знайти середню квадратичну похибку отриманого значення кута, якщо похибка одного виміру дорівнює m.

Розв'язання

Оскільки середнє низки значень обчислюють за виразом

$$y = \frac{[x_i]}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

маємо лінійну функцію, де коефіцієнтами при x_i є $\frac{1}{n}$ і можна скористатися формулою (7.2)

$$m_y^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m^2 = \frac{nm^2}{n^2} = \frac{m^2}{n},$$

звідки

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{n}}\ .$$

Задача 7.3

Знайти середні квадратичні похибки приростів координат, що обчислюють у геодезії за формулами $\Delta x = S \cdot \cos\alpha$ та $\Delta y = S \cdot \sin\alpha$, якщо довжина лінії S = 127,00 м, дирекційний кут $\alpha = 32°00'$, а похибки m_S = 0,03 м, та m_α= 1,5'.

Розв'язання

Для визначення середньої квадратичної похибки прирощення координати $\Delta x = S \cdot \cos\alpha$ скористаємось формулою (8.1)

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2}$$

та обчислимо часткові похідні функції $\Delta x = S \cdot \cos\alpha$

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial S} = (S \cdot \cos\alpha)' = cos\alpha;$$

(нагадаємо правило диференціювання $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, *якщо с постійна, (cosα)' = −sinα, (sinα)' =cosα);*

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial \alpha} = (S \cdot \cos\alpha)' = -S \cdot \sin\alpha.$$

Визначені похідні підставимо до формули, отримаємо

$$m_{\Delta x} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta x}{\partial S}\right)^2 m_S^2 + \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2} =$$

$$= \sqrt{cos^2\alpha \cdot m_S^2 + S^2 \cdot sin^2\alpha \cdot m_\alpha^2} =$$

потрібно врахувати, що m_α = 1,5' слід попередньо виразити у радіанах: 1 градус = π/180 = 0,017453 рад, 1 хвилина = 0,017/60 = 0,000291 рад, 1,5 хвилини = 0,000291 · 1,5 = 0,000436 рад.

$$= \sqrt{0{,}848^2 \cdot 0{,}03^2 + 127^2 \cdot 0{,}53^2 \cdot m_\alpha^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}719 \cdot 9 \cdot 10^{-4} + 16129 \cdot 0{,}281 \cdot 0{,}000436^2} =$$

$$= \sqrt{6{,}47 \cdot 10^{-4} + 8{,}62 \cdot 10^{-4}} = \sqrt{0{,}0151} = 0{,}039 \text{ м.}$$

Аналогічно визначимо середню квадратичну похибку прирощення координати $\Delta y = S \cdot \sin\alpha$. Обчислимо часткові похідні функції $\Delta y = S \cdot \sin\alpha$

$$\frac{\partial \Delta y}{\partial S} = (S \cdot \sin\alpha)' = sin\alpha;$$

(нагадаємо правило диференціювання $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, *якщо с постійна, (cosα)' = −sinα, (sinα)' = cosα);*

$$\frac{\partial \Delta y}{\partial \alpha} = (S \cdot \sin\alpha)' = -S \cdot cos\alpha.$$

Визначені похідні підставимо до формули, отримаємо

$$m_{\Delta Y} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta y}{\partial S}\right)^2 m_S^2 + \left(\frac{\partial \Delta y}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2} =$$

$$= \sqrt{sin^2\alpha \cdot m_S^2 + S^2 \cdot cos^2\alpha \cdot m_\alpha^2} =$$

потрібно врахувати, що m_α = 1,5' слід попередньо виразити у радіанах: 1 градус = π/180 = 0,017453 рад, 1 хвилина = 0,017/60 = = 0,000291 рад, 1,5 хвилини = 0,000291 · 1,5 = 0,000436 рад

$$= \sqrt{0{,}53^2 \cdot 0{,}03^2 + 127^2 \cdot 0{,}848^2 \cdot 0{,}000436^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}281 \cdot 9 \cdot 10^{-4} + 16129 \cdot 0{,}719 \cdot 1{,}9 \cdot 10^{-7}} =$$

$$= \sqrt{2{,}53 \cdot 10^{-4} + 22{,}08 \cdot 10^{-4}} = \sqrt{0{,}00246} = 0{,}0496 \text{ м.}$$

Отже, отримали результат: $m_{\Delta x} = 0{,}04$ м; $m_{\Delta Y} = 0{,}05$ м.

Задача 7.4

Довжина лінії d = 120,0 м, середня квадратична похибка виміру становить m_d = 0,1 м. Дирекційний кут лінії α = 60°00', середня квадратична похибка виміру дирекційного кута m_α = 1,5'. Обчислити прирощення координат ΔX, ΔY та їхні середні квадратичні похибки $m_{\Delta X}$ та $m_{\Delta Y}$.

Розв’язання

Користуючись рисунком 7.1, виразимо прирощення координат ΔX та ΔY через безпосередньо виміряні величини - лінію d та дирекційний кут α, отримаємо:

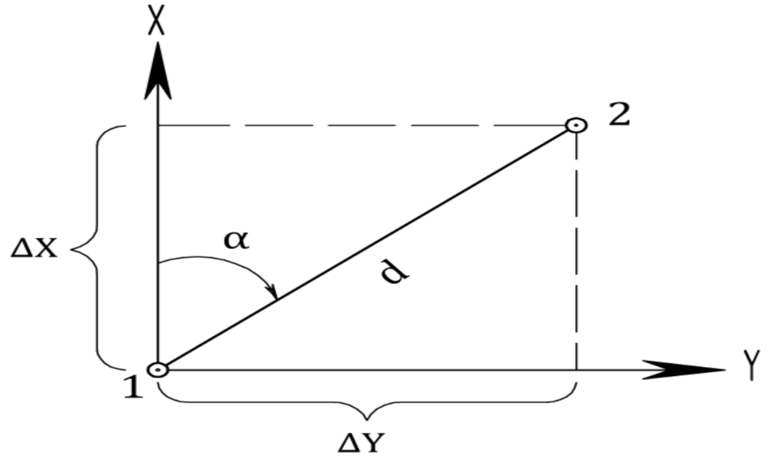


Рисунок 7.1 – Геометричне подання задачі

$$\Delta X = d \cdot \cos\alpha;$$

$$\Delta Y = d \cdot \sin\alpha. \qquad (7.3)$$

Підставимо до виразів прирощень координат числові значення та обчислимо їхні значення:

$$\Delta X = 120 \cdot \cos 60^{o}00' = 60{,}0 \text{ м};$$

$$\Delta Y = 120 \cdot \sin 60^{o}00' = 103{,}9 \text{ м}.$$

Для визначення середньої квадратичної похибки функцій ΔX та ΔY скористаємось формулою (7.1), попередньо визначивши часткові похідні функцій ΔX та ΔY з виразів (7.3).

Відповідно до формул диференціювання:

$(cu)' = cu'$, де c – постійна, та (cosα)’ = –sinα та (sinα)’ = cosα отримаємо:

часткова похідна функції ΔX = d · cosα за змінною d дорівнює

$$\frac{\partial \Delta X}{\partial d} = \frac{\partial \mathrm{d}*\cos\alpha}{\partial d} = 1 \cdot \cos\alpha = \cos\alpha;$$

часткова похідна функції ΔX =d · cosα за змінною α дорівнює

$$\frac{\partial \Delta X}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathrm{d}\cdot\cos\alpha}{\partial \alpha} = d \cdot (\cos\alpha)' = d \cdot (-\sin\alpha) = -d \cdot \sin\alpha\ ;$$

часткова похідна функції ΔY = d · sinα за змінною d дорівнює

$$\frac{\partial \Delta Y}{\partial d} = \frac{\partial \mathrm{d}\cdot\sin\alpha}{\partial d} = 1 \cdot \sin\alpha = \sin\alpha;$$

часткова похідна функції ΔY =d · cosα за змінною α дорівнює

$$\frac{\partial \Delta Y}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathrm{d}\cdot\sin\alpha}{\partial \alpha} = d \cdot (\sin\alpha)' = d \cdot cos\alpha.$$

Визначимо числові значення отриманих часткових похідних:

$$\frac{\partial \Delta X}{\partial d} = \cos\alpha = cos\ 60°00' = 0{,}5;$$

$$\frac{\partial \Delta X}{\partial \alpha} = -d \cdot \sin\alpha = -120 \cdot \sin 60°00' = -120 \cdot 0{,}866 = -103{,}92 \text{ м};$$

$$\frac{\partial \Delta Y}{\partial d} = \sin\alpha = 0{,}866;$$

$$\frac{\partial \Delta Y}{\partial \alpha} = d \cdot \cos\alpha = 120 \cdot \cos 60°00' = 120 \cdot 0{,}5 = 60{,}00 \text{ м}.$$

Обчислимо середні квадратичні похибки $m_{\Delta X}$ та $m_{\Delta Y}$ прирощень координат ΔX та ΔY за формулою (7.1), але попередньо переведемо похибку m_{α} з хвилин у радіани:

$$1° = \frac{2\pi}{360} = 0{,}0174 \text{ рад};$$

$$1{,}5' = \frac{0{,}0174}{60'} \cdot 1{,}5' = 0{,}000436 \text{ рад},$$

тоді маємо:

$$m_{\Delta X} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta X}{\partial d}\right)^2 m_{\Delta X}^2 + \left(\frac{\partial \Delta X}{\partial \alpha}\right)^2 m_{\Delta X}^2} = \sqrt{(0{,}5)^2 \cdot 0{,}1^2 + (103{,}92)^2 0{,}000436^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}0025 + 0{,}0021} = \sqrt{0{,}004554} = 0{,}0675 \text{ м};$$

$$m_{\Delta Y} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta Y}{\partial d}\right)^2 m_{\Delta Y}^2 + \left(\frac{\partial \Delta Y}{\partial \alpha}\right)^2 m_{\Delta Y}^2} = \sqrt{(0{,}866)^2 \cdot 0{,}1^2 + (60{,}00)^2 m_{\Delta Y}^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}0075 + 0{,}000685} = \sqrt{0{,}008185} = 0{,}0905 \text{ м}.$$

Отже, середні квадратичні похибки прирощень координат ΔX та ΔY дорівнюють

$$m_{\Delta X} = 0{,}0675 \text{ м};$$
$$m_{\Delta Y} = 0{,}0905 \text{ м}.$$

Задача 7.5

Шляхом проведення вимірювань отримані наступні результати (рис. 7.2): перевищення h_{AB} = 12,6 м, довжина проекції лінії АВ d_{AB} = 468 м, оцінки їхньої точності, тобто середні квадратичні похибки становлять відповідно m_h = 0,1 м, m_d = 0,5 м. Визначити середню квадратичну похибку ухилу лінії АВ.

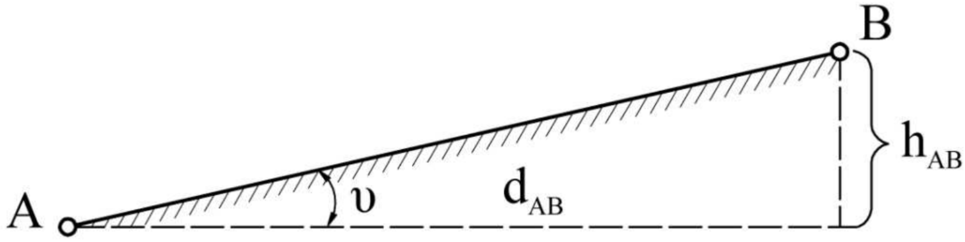


Рисунок 7.2 – Геометричне подання ухилу

Розв’язання

Використовуючи рекомендовану послідовність оцінювання точності функції виміряних величин, запишемо функцію виміру ухилу, як відому з геометрії, та введемо позначення y = tgα $= \frac{h_{AB}}{d_{AB}}$. Підставимо чисельні значення та обчислимо y = $y = \frac{h_{AB}}{d_{AB}} = \frac{12{,}6}{468}$ = 0,027.

Оскільки похибки вимірювань відомі, скористаємось формулою (7.1) та визначимо середню квадратичну похибку функції y.

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2},$$

де $\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2$ – часткові похідні функції y;

m_i – середні квадратичні похибки безпосередньо виміряних величин.

Запишемо:

$$m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial h_{AB}}\right)^2 m_{h_{AB}}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial d_{AB}}\right)^2 m_{d_{AB}}^2}.$$

Далі визначимо частинні похідні функції $y = \frac{h_{AB}}{d_{AB}}$ за змінними h_{AB} і d_{AB}. Продиференціюємо функцію у за змінною h_{AB}, вважаючи d_{AB} незмінною, отримаємо

$$\left(\frac{\partial y}{\partial h_{AB}}\right) = \left(\frac{h_{AB}}{d_{AB}}\right)' = \frac{1}{d_{AB}} = \frac{1}{468} = 0{,}00213 \text{ 1/м}.$$

Продиференціюємо функцію у за змінною d_{AB}, вважаючи h_{AB} незмінною та скориставшись формулою похідної $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, отримаємо

$$\left(\frac{\partial y}{\partial d_{AB}}\right) = \left(\frac{h_{AB}}{d_{AB}}\right)' = -\frac{h_{AB}}{(d_{AB})^2} = -\frac{12{,}6}{468^2} = -0{,}000057 \text{ 1/м}.$$

Підставимо числові значення у формулу та обчислимо середньоквадратичну похибку ухилу:

$$m_y = \sqrt{(0{,}00213)^2 * 0{,}1^2 + (0{,}000057)^2 * 0{,}5^2} = 0{,}000216.$$

Мала величина m_y свідчить про точне визначення ухилу заданої лінії.

Практичне заняття 8
МАТЕМАТИЧНЕ ОПРАЦЮВАННЯ РІВНОТОЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ ОДНІЄЇ ВЕЛИЧИНИ

Мета – формування навичок з практичного застосування формул математичного опрацювання рівноточних вимірювань однієї величини та засвоєння підходу до визначення найбільш надійного або найімовірнішого значення вимірюваної величини та оцінювання точності вимірювання.

Основні відомості

Як рівноточні розуміють вимірювання, що проведені у одних і тих самих умовах, тобто фактори, що впливають на результати вимірювання одні й ті самі.

Найбільш надійним значенням вимірюваної величини X вважають просту арифметичну середину результатів вимірювань, що визначається за формулою:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{[x]}{n}, \quad (8.1)$$

де [x] – сума результатів вимірювань;

n – кількість вимірювань.

Але під час розв’язання практичних задач замість простої арифметичної середини результатів вимірювань $\bar{X}$ для обчислення відхилень виміряних значень δ_i використовують умовний нуль, за який зазвичай обирають найменше значення ряду результатів вимірювань X_0. Отже обчислення відхилень виконують за формулою:

$$\delta_i = x_i - X_0, \tag{8.2}$$

тоді просту арифметичну середину результатів вимірювань обчислюють за формулою:

$$\bar{X} = X_0 + \frac{[\delta]}{n}. \tag{8.3}$$

Результат обчислення простої арифметичної середини $\overline{X}$ має містити більше на два знаки після коми, чим результати вимірювань x_i . Це дозволяє запобігти накопиченню похибок заокруглення. Заокруглюючи отримане значення $\overline{X}$, залишають кількість десяткових знаків на один більше, ніж у результатах вимірювань x_i. Отже, отримане значення X' за рахунок заокруглення є дещо зміщеним щодо $\overline{X}$ та відрізняється від $\overline{X}$ на певну малу величину (похибку заокруглення) β:

$$\beta = X' - \overline{X}, \tag{8.4}$$

де X' - заокруглене значення простої арифметичної середини.

Точність отриманої арифметичної середини результатів вимірювань визначають можливим розкидом значень, тобто середнім квадратичним відхиленням (ряду вимірювань x_i). Якщо середнє квадратичне (СКП) відхилення визначається із статистичних даних, використовують формулу:

$$m = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}}, \tag{8.5}$$

де $[V^2]$ – сума квадратів відхилень виміряного значення від $\bar{X}$, яку обчислюють за формулою

$$[V^2] = [\delta^2] - \frac{[\delta]^2}{n}. \tag{8.6}$$

Для контроля правильності обчислень виконують обчислення поправок v_i, які внаслідок заокруглень є зміщеними на похибку заокруглення β, так само, як і проста арифметична середина X'. Поправки обчислюють як відхилення значень ряду вимірювань x_i від заокругленого значення простої арифметичної середини X', тобто

$$v_i = x_i - X'. \tag{8.7}$$

Контроль правильності обчислень ґрунтується на тій властивості простої арифметичної середини, що сума найімовірніших поправок дорівнює нулю, але у нашому випадку, оскільки поправки зміщені на похибку заокруглення β, має виконуватись рівність

$$[v] = n \cdot \beta. \tag{8.8}$$

Надійність результату вимірювань оцінюють шляхом визначення середньої квадратичної похибки m_m середньої квадратичної похибки m (СКП СКП). Для цього застосовують формулу

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \tag{8.9}$$

Також обчислюють середнє квадратичне відхилення простої арифметичної середини (СКП $\overline{X}$), що у $\sqrt{n}$ разів є меншим за середнє квадратичне відхилення варіаційного ряду вимірювань:

$$m_{\overline{X}} = \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{8.10}$$

Задача 8.1

Горизонтальний кут виміряний теодолітом 2Т5. Кількість повторних рівноточних вимірювань становить n =9. Отримані результати 110°08'38,2"; 110°08'43,9"; 110°08'33,1"; 110°08'40,6"; 110°08'43,7"; 110°08'36,3"; 110°08'39,1"; 110°08'36,5"; 110°08'39,2".

Виконати математичне опрацювання результатів вимірювань.

Розв'язання

1. Обчислимо відхилення δ_i за формулою (8.2), причому за умовний нуль приймемо найменший з результатів вимірювань, який дорівнює X_0 = = 110°08'33,1". Для першого результату вимірювання отримаємо:

$$\delta_1 = x_1 - X_0 = 110°08'38{,}2'' - 110°08'33{,}1'' = 5{,}1 \text{ сек.}$$

Усі результати обчислень заносимо у таблицю 8.1.

Таблиця 8.1 – Результати розрахунків

№	Горизонтальний кут x_i	δ, сек	δ^2, $сек^2$	v, сек	v^2, $сек^2$
1	2	3	4	5	6
1	110°08'38,2"	5,1	26,01	–0,76	0,5776
2	110°08'43,9"	10,8	116,64	4,94	24,4036
3	110°08'33,1"	0	0	–5,86	34,3396
4	110°08'40,6"	7,5	56,25	1,64	2,6896
5	110°08'43,7"	10,6	112,36	4,74	22,4676
6	110°08'36,3"	3,2	10,24	–2,66	7,0756

Продовження таблиці 8.1

№	Горизонтальний кут x_i	δ, сек	δ^2, $сек^2$	v, сек	v^2, $сек^2$
7	110°08'39,1"	6	36	0,14	0,0196
8	110°08'36,5"	3,4	11,56	–2,46	6,0516
9	110°08'39,2"	6,1	37,21	0,24	0,0576
Σ		52,7	406,27	–0,04	97,6824

2. Обчислимо просту арифметичну середину результатів вимірювань за формулою (8.3)

$$\bar{X} = \mathrm{X}_0 + \frac{[\delta]}{n} = 110°\ 08'33{,}1'' + \frac{52{,}7}{9} = 110°\ 08'38{,}956''$$

та заокруглимо її до 2 знаків

$$\mathrm{X}' = 110°\ 08'38{,}96''$$

і обчислимо похибку заокруглення

$$\beta = 110°\ 08'38{,}96'' - 110°\ 08'38{,}956'' = 0{,}004''.$$

3. Для оцінювання точності вимірювань обчислюємо зміщені поправки v_i за формулою (8.7). Для першого результату вимірювання отримаємо:

$$v_1 = x_1 - \mathrm{X}' = 110°\ 08'38.2'' - 110°\ 08'38{,}96'' = -0{,}76''.$$

Перевіримо, чи виконується рівність (9.8)

$$[v] = n \cdot \beta;\ [v] = -0{,}04'';\quad n \cdot \beta = 9 \cdot 0{,}004'' = 0{,}036'' \approx 0{,}04''.$$

Отже, рівність (9.8) виконується за абсолютним значенням та із заокругленням результату.

Далі обчислюємо суму квадратів v_i та порівнюємо результат обчислення з із значенням, обчисленим за формулою (9.6):

$$[V^2] = 97{,}6824; \qquad [V^2] = [\delta^2] - \frac{[\delta]^2}{n} = 406{,}27^2 - \frac{52{,}7^2}{9} = 97{,}6822.$$

Отже, перевірка точності показує позитивний результат, що дозволяє як найбільш надійне значення вимірюваної величини прийняти

$$\mathrm{X}' = 110°\ 08'38{,}96''.$$

4. Визначимо точність отриманої арифметичної середини результатів вимірювань за формулою (8.5), тобто середнє квадратичне відхилення варіаційного ряду вимірювань:

$$m = \sqrt{\frac{[\mathrm{V}^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{97{,}682}{9-1}} = 3{,}49'',$$

отже отримали

$$\mathrm{X}' = 110°\ 08'38{,}96'' \pm 3{,}49''.$$

Але, оскільки за правилом трьох сигм нормально розподілена випадкова похибка не перевищує 3m, або 3m = 3 · 3,49’’ = 10,48’’, маємо граничну похибку:

$$\mathrm{X}' = 110°\ 08'38{,}96'' \pm 10{,}48''.$$

5. Оскільки отримане значення простої арифметичної середини є випадковою величиною, вона має власне середнє квадратичне відхилення (СКП $\bar{X}$), що у $\sqrt{n}$ разів менше за середнє квадратичне відхилення варіаційного ряду вимірювань, обчислимо його за формулою (8.10):

$$m_{\bar{X}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}49''}{\sqrt{9}} = 1{,}165''.$$

Отже, $X' = 110°\ 08'38{,}96'' \pm 1{,}165''$.

6. Оцінимо надійність результату вимірювань, для чого визначимо середню квадратичну похибку m_m середньої квадратичної похибки m (СКП СКП) за формулою (8.9):

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{3{,}49''}{\sqrt{2(9-1)}} = 0{,}87''.$$

Отримані результати дозволяють заключити, що значення горизонтального кута $X' = 110°\ 08'38{,}96''$ є точним та надійним.

Задача 8.2

Кількість повторних рівноточних вимірювань горизонтального кута дорівнює n = 12. Отримані результати вимірювань:

57°23'44"; 57°23'40"; 57°23'43"; 57°23'45"; 57°23'46"; 57°23'43"; 57°23'48"; 57°23'45"; 57°23'48"; 57°23'46"; 57°23'47"; 57°23'41".

Виконати математичне опрацювання результатів вимірювань.

Розв'язання

1. Обчислимо відхилення δ_i за формулою (8.2), причому за умовний нуль приймемо найменший з результатів вимірювань, який дорівнює X_0= =57°23'40". Для першого результату вимірювання отримаємо:

$$\delta_1 = x_1 - X_0 = 57°23'44'' - 57°23'40'' = 4 \text{ сек.}$$

Решту розрахунків виконуємо аналогічно та заносимо у таблицю 8.2.

Таблиця 8.2 – Результати розрахунків

№	Горизонтальний кут x_i	δ, сек	δ^2, сек^2	v, сек	v^2, сек^2
1	2	3	4	5	6
1	57°23'44"	4	16	-0,70	0,490
2	57°23'40"	0	0	-4,70	22,090
3	57°23'43"	3	9	-1,70	2,890
4	57°23'45"	5	25	0,30	0,090
5	57°23'46"	6	36	1,30	1,690
6	57°23'43"	3	9	-1,70	2,890
7	57°23'48"	8	64	3,30	10,890

Продовження таблиці 8.2

№	Горизонтальний кут x_i	δ, сек	δ^2, сек^2	v, сек	v^2, сек^2
8	57°23'45"	5	25	0,30	0,090
9	57°23'48"	8	64	3,30	10,890
10	57°23'46"	6	36	1,30	1,690
11	57°23'47"	7	49	2,30	5,290
12	57°23'41"	1	1	-3,70	13,690
Σ		56	334	-0,4	72,680

2. Обчислимо просту арифметичну середину результатів вимірювань за формулою (8.3), залишивши на 2 знаки більше, ніж у результатах вимірювань

$$\bar{X} = \mathrm{X}_0 + \frac{[\delta]}{n} = 57°23'40'' + \frac{56}{12} = 57°23'44{,}67''$$

та заокруглимо її до 1 знаку після коми

$\mathrm{X}' = 57°23'44{,}7''$

і обчислимо похибку заокруглення

$$\beta = 57°23'44{,}7'' - 57°23'44{,}67'' = 0{,}03''.$$

3. Для оцінювання точності вимірювань обчислюємо зміщені поправки v_i за формулою (9.7). Для першого результату вимірювання отримаємо:

$$v_1 = x_1 - \mathrm{X}' = 57°23'44'' - 57°23'44{,}7'' = -0{,}7''.$$

Перевіримо, чи виконується рівність (8.8)

$$[v] = n \cdot \beta; [v] = -0{,}4''; \quad n \cdot \beta = 12 \cdot 0{,}03'' = 0{,}36'' \approx 0{,}4''.$$

Отже, рівність (8.8) виконується за абсолютним значенням та із заокругленням результату.

Далі обчислюємо суму квадратів v_i та порівнюємо результат обчислення із значенням, обчисленим за формулою (8.6):

$$[V^2] = 72{,}68; \qquad [V^2] = [\delta^2] - \frac{[\delta]^2}{n} = 334 - \frac{56^2}{12} = 72{,}67.$$

Отже, перевірка точності показує позитивний результат, що дозволяє як найбільш надійне значення вимірюваної величини прийняти

$$\mathrm{X}' = 57°23'44{,}7''.$$

4. Визначимо точність отриманої арифметичної середини результатів вимірювань за формулою (8.5), тобто середнє квадратичне відхилення варіаційного ряду вимірювань:

$$m = \sqrt{\frac{[\mathrm{V}^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{72{,}68}{12-1}} = 2{,}57'',$$

отже отримали

$$\mathrm{X}' = 57°23'44{,}7'' \pm 2{,}57''.$$

Але, оскільки за правилом трьох сигм нормально розподілена випадкова похибка не перевищує 3m, або 3m = 3 · 2,57'' = 7,71'', маємо граничну похибку:

$$X' = 57°23'44{,}7'' \pm 7{,}71''.$$

5. Оскільки отримане значення простої арифметичної середини є випадковою величиною, вона має власне середнє квадратичне відхилення (СКП $\bar{X}$), що у $\sqrt{n}$ разів є меншим за середнє квадратичне відхилення варіаційного ряду вимірювань, обчислимо його за формулою (8.10):

$$m_{\bar{X}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}57''}{\sqrt{12}} = 0{,}742''.$$

Отже, $X' = 57°23'44{,}7'' \pm 0{,}7''$.

6. Оцінимо надійність результату вимірювань, для чого визначимо середню квадратичну похибку m_m середньої квадратичної похибки m (СКП СКП) за формулою (8.9):

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{2{,}57''}{\sqrt{2(12-1)}} = 0{,}55''.$$

Отримані результати дозволяють заключити, що значення горизонтального кута $X' = 57°23'45''$ є точним та надійним.

Задача 8.3

Під час дослідження полярного планіметра проведено 12 вимірювань площини ділянки. Результати вимірювань наведено у таблиці 8.3. Обчислити середнє значення та його середню квадратичну похибку, а також m та m_m.

Таблиця 8.3 – Вихідні дані

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Площина, см^2	41,0	41,1	40,8	41,0	40,5	40,9	40,4	41,0	41,2	40,6	40,7	41,3

Розв'язання

1. За умовний нуль приймаємо як найменший з результатів вимірювань $S_0 = 40{,}4$ см^2. Обчислимо відхилення δ_i за формулою (8.2). Для першого результату вимірювання отримаємо:

$$\delta_1 = s_1 - S_0 = 41{,}0 - 40{,}4 = 0{,}6 \text{ см}^2.$$

Таблиця 8.4 – Результати розрахунків

№	Площина, см^2	δ, см^2	δ^2, см^4	v, см^2	v^2, см^4
1	41	0,6	0,36	0,12	0,014
2	41,1	0,7	0,49	0,22	0,048
3	40,8	0,4	0,16	-0,08	0,006

Продовження таблиці 8.4

№	Площина, $см^2$	δ, $см^2$	δ^2, $см^4$	v, $см^2$	v^2, $см^4$
4	41	0,6	0,36	0,12	0,014
5	40,5	0,1	0,01	-0,38	0,144
6	40,9	0,5	0,25	0,02	0,000
7	40,4	0	0	-0,48	0,230
8	41	0,6	0,36	0,12	0,014
9	41,2	0,8	0,64	0,32	0,102
10	40,6	0,2	0,04	-0,28	0,078
11	40,7	0,3	0,09	-0,18	0,032
12	41,3	0,9	0,81	0,42	0,176
Σ		5,7	3,57	-0,06	0,858

2. Обчислимо просту арифметичну середину результатів вимірювань за формулою (8.3)

$$\bar{S} = S_0 + \frac{[\delta]}{n} = 40{,}4 + \frac{5{,}7}{12} = 40{,}875 \text{ см}^2$$

та заокруглимо її до 2 знаків:

$$S' = 40{,}88 \text{ см}^2$$

і обчислимо похибку заокруглення:

$$\beta = S' - \bar{S} = 40{,}88 - 40{,}875 = 0{,}005 \text{ см}^2.$$

3. Для оцінювання точності вимірювань обчислюємо зміщені поправки v_i за формулою (8.7). Для першого результату вимірювання отримаємо:

$$v_1 = s_1 - S' = 41{,}0 - 40{,}88 = 0{,}12 \text{ см}^2.$$

Перевіримо, чи виконується рівність (8.8)

$$[v] = n \cdot \beta; \; [v] = -0{,}06 \text{ см}^2; \quad n \cdot \beta = 12 \cdot 0{,}005 = 0{,}06 \text{ см}^2.$$

Отже, рівність (8.8) виконується.

Далі обчислюємо суму квадратів v_i та порівнюємо результат обчислення з із значенням, обчисленим за формулою (8.6):

$$[V^2] = 0{,}858; \qquad [V^2] = [\delta^2] - \frac{[\delta]^2}{n} = 3{,}57 - \frac{5{,}7^2}{12} = 0{,}862.$$

Отже, перевірка точності показує позитивний результат, що дозволяє як найбільш надійне значення вимірюваної величини прийняти

$$S' = 40{,}88 \text{ см}^2.$$

4. Визначимо середнє квадратичне відхилення варіаційного ряду вимірювань:

$$m = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}86}{12-1}} = 0{,}078 \text{ см}^2.$$

5. Визначимо середнє квадратичне відхилення арифметичної середини (СКП $\bar{S}$), що у $\sqrt{n}$ разів менше за середнє квадратичне відхилення варіаційного ряду вимірювань, обчислимо його за формулою (9.10):

$$m_{\bar{S}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}078}{\sqrt{12}} = 0{,}023 \text{ см}^2.$$

6. Визначимо середню квадратичну похибку m_m середньої квадратичної похибки m (СКП СКП) за формулою (9.9) (надійність результату вимірювань):

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{0{,}023}{\sqrt{2(12-1)}} = 0{,}005 \text{ см}^2.$$

Практичне заняття 9
МАТЕМАТИЧНЕ ОПРАЦЮВАННЯ НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ ОДНІЄЇ ВЕЛИЧИНИ

Мета – формування навичок практичного застосування формул математичного опрацювання нерівноточних вимірювань однієї величини; засвоєння методу визначення найбільш надійного або наймовірнішого значення вимірюваної величини та оцінювання точності вимірювань.

Основні відомості

Нерівноточними називають вимірювання, дисперсії яких не дорівнюють одна одній. У цьому випадку дисперсію визначають за формулою:

$$\sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_i}, \quad (9.1)$$

де $\sigma_0^2 = c$ – постійна для усіх вимірів величина, яку обирають довільно;

p_i - ваги вимірювань.

З формули (9.1) випливає, що

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \quad (9.2)$$

тобто вага є величиною, що зворотно пропорційна дисперсії. Якщо прийняти $p_i = 1$, отримаємо $\sigma_0^2 = \sigma_i^2$, отже σ_0^2 – дисперсія виміру, вагу якого прийнято за одиницю, її називають дисперсією одиниці ваги.

Зрозуміло, що коли дисперсії σ_i^2 невідомі, вагу обчислюють, використовуючи оцінку m_i^2 за формулою:

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}, \quad (9.3)$$

де m_i – середня квадратична похибка i-го виміру;

μ – похибка одиниці ваги, що введена замість σ_0^2 як її оцінка.

Задача опрацювання нерівноточних вимірювань наступна. В результаті повторних нерівноточних вимірювань однієї величини X, істинне значення якої є невідомим, отриманий ряд результатів

$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$

із середніми квадратичними похибками

$$m_1,\ m_2,\ \dots,\ m_n.$$

Необхідно обчислити найбільш надійне значення вимірюваної величини X, обчислити середні квадратичні похибки одиниці ваги і загальної арифметичної середини результатів вимірювань. Оцінити їхню надійність.

Перед усім обчислюють ваги p_i результатів нерівноточних вимірювань за формулою

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}, \qquad (9.4)$$

де m_i – середня квадратична похибка результату вимірювання;

c – коефіцієнт пропорційності, який може набувати довільних значень.

Коефіцієнт c обирають таким чином, щоб значення ваг були близькими до одиниці, наприклад, використовуючи формулу:

$$c = \frac{m_{max-1}^2 + m_{min+1}^2}{2}, \qquad (9.5)$$

де m_{max-1}^2 – друга за величиною найбільша середня квадратична похибка;

m_{min+1}^2 – друга за величиною найменша середня квадратична похибка.

Далі обчислюють наймовірніше значення вимірюваної величини, якою є загальна арифметична середина результатів вимірювань, за формулою

$$X = \frac{[px]}{[p]}, \qquad (9.6)$$

де x_i – результат і-го вимірювання;

p_i – вага і-го результату вимірювання.

Якщо кількість вимірювань n є достатньо великою, то замість формули (10.6) на практиці застосовують зручнішу формулу

$$X = X_0 + \frac{[p\delta]}{[p]}, \qquad (9.6)$$

де X_0 – найменше значення з отриманих результатів, тобто умовний нуль;

δ_i – відхилення від умовного нуля, обчислення яких виконують за формулою:

$$\delta_i = x_i - X_0.$$

Щоб не накопичувати похибки заокруглення, загальну арифметичну середину X обчислюють з кількістю десяткових знаків, що на три перевищує кількість десяткових знаків в результатах вимірювань x_i. Далі це значення заокруглюють, залишаючи таку саму кількість десяткових знаків, як і у результатах вимірювань. В результаті отримують дещо зміщене значення X', яке відрізняється від X на малу величину β, обчислену за формулою

$$\beta = X' - \overline{X}, \qquad (9.7)$$

де X′ - заокруглене значення простої арифметичної середини.

Далі обчислюють відхилення результатів вимірювань x_i від загальної арифметичної середини X′, тобто поправки, за формулою:

$$v_i = x_i - X' \,. \qquad (9.8).$$

Оскільки поправки v_i обчислюють з використанням заокругленого на величину β значення загальної арифметичної середини, то замість найімовірніших поправок отримують їхні зміщені значення, що відрізняються від найімовірніших також на величину β. Тому для контроля обчислення поправок застосовують рівність

$$[pv] = [p] \cdot \beta. \qquad (9.9)$$

Далі суму квадратів відхилень виміряного значення від $\bar{X}$, $[p\mathrm{V}^2]$ обчислюють за формулою:

$$[pV^2] = [p\delta^2] - \frac{[p\delta]^2}{[p]}. \qquad (9.10)$$

Та визначають емпіричну середню квадратичну похибку одиниці ваги за формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}. \qquad (9.11)$$

Оскільки емпірична середня квадратична похибка одиниці ваги, що обчислена за формулою (10.11), є величиною наближеною, то необхідно оцінити її надійність. Для цього обчислюють середню квадратичну похибку середньої квадратичної похибки за формулою:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}. \qquad (9.12)$$

Визначають середню квадратичну похибку загальної арифметичної середини за формулою:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}. \qquad (9.13)$$

Надійність середньої квадратичної похибки арифметичної середини M оцінюють за формулою

$$m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}}. \qquad (9.14)$$

Задача 9.1

Виконано 13 серій вимірювань довжини лінії світлодалекоміром. В кожній серії виконано різну кількість прийомів. Середнє значення довжини лінії x_i в кожній серії та її середня квадратична похибка m_i наведені в таблиці 9.1. Виконати математичне опрацювання результатів нерівноточних вимірювань та оцінити їхню надійність.

Таблиця 9.1 – Вихідні дані

№	x_i, м	m_i, мм	№	x_i, м	m_i, мм
1	251,035	3,2	8	251,051	4,7
2	251,035	4,2	9	251,037	4,9
3	251,06	0,6	10	251,052	3,1
4	251,033	1,6	11	251,043	0,6
5	251,045	1,5	12	251,049	2,7
6	251,043	2,4	12	251,046	1,2
7	251,044	1,8			

Розв'язання

Для обчислення ваги p_i результатів нерівноточних вимірювань за формулою (9.4) потрібно визначитися із коефіцієнтом пропорційності с. Для його обчислення скористаємось формулою (9.5):

$$c = \frac{m_{max-1}^2 + m_{min+1}^2}{2}.$$

Нехай $m_{max-1} = 4{,}7$, а $m_{min+1} = 0{,}6$, отримаємо

$$c = \frac{4{,}7^2 \ + 1{,}2^2}{2} = \frac{22{,}09 + 1{,}44}{2} = \frac{23{,}53}{2} \approx 12.$$

Подальші розрахунки заносимо до таблиці 9.2.

Таблиця 9.2 – Результати розрахунків

№	x_i, м	m_i, мм	p	δ, мм	pδ	$p\delta^2$	v, мм	pv	pv^2
1	251,035	3,2	1,2	2	2,4	4,8	–14	–16,8	235,2
2	251,035	4,2	0,7	2	1,4	2,8	–14	–9,8	137,2
3	251,06	0,6	33,3	27	899,1	24275,7	11	366,3	4029,3
4	251,033	1,6	4,7	0	0,0	0,0	–16	–75,2	1203,2
5	251,045	1,5	5,3	12	63,6	763,2	–4	–21,2	84,8
6	251,043	2,4	2,1	10	21,0	210,0	–6	–12,6	75,6
7	251,044	1,8	3,7	11	40,7	447,7	–5	–18,5	92,5
8	251,051	4,7	0,5	18	9,0	162,0	2	1,0	2,0
9	251,037	4,9	0,5	4	2,0	8,0	–12	–6,0	72,0
10	251,052	3,1	1,2	19	22,8	433,2	3	3,6	10,8
11	251,043	0,6	33,3	10	333,0	3330,0	–6	–199,8	1198,8
12	251,049	2,7	1,6	16	25,6	409,6	0	0,0	0,0
13	251,046	1,2	8,3	13	107,9	1402,7	–3	–24,9	74,7
Σ			96,4		1528,5	31449,7		–13,9	7216,1

За формулою (9.4) $p_i = \frac{c}{m_i^2}$ обчислюємо ваги вимірювань p_i. Значення ваг заокруглюємо до 0,1.

Наступним кроком обчислимо різниці $\delta_i = x_i - X_0$, для чого як умовний нуль виберемо найменше значення $X_0 = 252{,}033$ м. Значення δ_i, подаємо у міліметрах.

Далі обчислюємо добутки pδ, результати обчислень заокруглюємо до 0,1, та добутки $p\delta^2$.

Скориставшись формулою (9.6), обчислимо найімовірніше значення вимірюваної довжини лінії, причому pδ переведемо у метри. Результат заокруглимо до 0,001 мм.

$$X = X_0 + \frac{[p\delta]}{[p]} = 252{,}033 + \frac{1528{,}5}{96{,}4*1000} = 251{,}048856.$$

Найімовірніше значення вимірюваної довжини лінії заокруглимо до 1 мм та визначимо похибку заокруглення за формулою (9.7)

$$\beta = \mathrm{X}' - \overline{\mathrm{X}} = 251{,}049\ -\ 251{,}048856\ = -0{,}000144\text{ м } = -0{,}144\text{ мм}.$$

Для контролю точності вимірювань обчислимо зміщені поправки за формулою (9.8):

$$v_i = x_i - \mathrm{X}'.$$

Далі обчислюємо добутки pv та pv^2, результати заокруглюємо до 0,1 і виконуємо контроль розрахунків шляхом підстановки отриманих результатів у рівність (9.9):

$$[pv] = -13{,}9; \quad [p] \cdot \beta = 96{,}4 \cdot (-0{,}144) = -13{,}9.$$

Далі суму квадратів відхилень виміряного значення від $\bar{X}$, $[p\mathrm{V}^2]$ обчислюємо двічі - у таблиці та за формулою (9.10), отримаємо:

$$[pV^2] = 7216{,}1; \qquad [p\delta^2] - \frac{[p\delta]^2}{[p]} = 31449{,}7 - \frac{1528{,}5^2}{96{,}4} = 7214{,}1.$$

Далі з урахуванням двох отриманих значень $[pV^2]$, двічі обчислюємо значення емпіричної середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулою (9.11):

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{7216{,}1}{13-1}} = 24{,}52\text{ мм, або } \mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{7214{,}1}{13-1}} = 24{,}5\text{ мм}.$$

Отже, результати збігаються.

Обчислимо середню квадратичну похибку загальної арифметичної середини за формулою (9.13)

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{24{,}5}{\sqrt{96{,}4}} = 2{,}5\text{ мм}.$$

Визначимо оцінку надійності величини μ за формулою (9.12):

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{24{,}5}{\sqrt{2(13-1)}} = 5{,}0\text{ мм}.$$

Надійність середньої квадратичної похибки арифметичної середини M оцінимо за формулою (9.14):

$$m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{5{,}0}{\sqrt{96{,}4}} = 0{,}51\text{ мм}.$$

Отримали остаточну довжину вимірюваної лінії X = 251,049 м ± 2,5 мм.

Задача 9.2

Виконати математичне опрацювання вимірювань, що наведені в таблиці 9.3. У таблиці надані середні значення одного й того самого кута x_i, що виміряний різною кількістю прийомів n_i. Для обчислень доцільно скористатися формулою $p_i = \frac{n_i}{3}$.

Таблиця 9.3 – Вихідні дані

№	1	2	3	4	5	6
x_i, м	89°47'16"	89°47'9"	89°47'6"	89°47'10"	89°47'23"	89°47'8"
n_i	6	18	3	15	6	12

Розв'язання

Скористаємося рекомендованою формулою $p_i = \frac{n_i}{3}$ та обчислимо вагу середніх квадратичних похибок p_i. Значення ваги заокруглюємо до 0,1 та результати розрахунку заносимо у таблицю 9.4.

Таблиця 9.4 – Результати розрахунків

№	x, м	n	p	δ, сек	pδ, сек	$p\delta^2$, $сек^2$	v, сек	pv, сек	pv^2, $сек^2$
1	89° 47' 16"	6	2,0	10	20	200	6	12	72
2	89° 47' 9"	18	6,0	3	18	54	–1	–6	6
3	89° 47' 6"	3	1,0	0	0	0	–4	–4	16
4	89° 47' 10"	15	5,0	4	20	80	0	0	0
5	89° 47' 13"	6	2,0	7	14	98	3	6	18
6	89° 47' 8"	12	4,0	2	8	16	–2	–8	16
Σ			20,0		80	448		0	128

Далі обчислимо різниці $\delta_i = x_i - X_0$, для чого як умовний нуль виберемо найменше значення $X_0 = 89°\,47'\,6''$. Значення δ_i, подаємо у секундах.

Далі обчислюємо добутки pδ та добутки $p\delta^2$, результати обчислень заокруглюємо до 0,1.

Скориставшись формулою (9.6), обчислимо найімовірніше значення вимірюваної довжини лінії. Результат заокруглимо до 0,1 сек.

$$X = X_0 + \frac{[p\delta]}{[p]} = 89°\,47'6'' + \frac{80''}{20} = 89°\,47'\,6'' + 4'' = 89°\,47'\,10{,}0'';$$

$$X' = 89°\,47'\,10{,}0''.$$

Визначимо похибку заокруглення за формулою (9.7):

$$\beta = \mathrm{X}' - \overline{\mathrm{X}} = 89°\,47'\,10'' - 89°\,47'\,10{,}0'' = 0 \text{ сек.}$$

Для контролю точності вимірювань обчислимо зміщені поправки за формулою (9.8):

$$v_i = x_i - \mathrm{X}'.$$

Далі обчислюємо добутки pv та pv^2, результати заокруглюємо до 0,1 і виконуємо контроль розрахунків шляхом підстановки отриманих результатів у рівність (9.9):

$$[pv] = 0; \quad [p] \cdot \beta = 20 \cdot 0 = 0.$$

Далі суму квадратів відхилень виміряного значення від $\bar{X}$, $[p\mathrm{V}^2]$ обчислюємо двічі – у таблиці та за формулою (9.10), отримаємо:

$$[pV^2] = 128; \qquad [p\delta^2] - \frac{[p\delta]^2}{[p]} = 448 - \frac{80^2}{20} = 128.$$

Далі з урахуванням двох отриманих значень $[pV^2]$ обчислюємо значення емпіричної середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулою (9.11):

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{128}{6-1}} = 5{,}1''.$$

Обчислимо середню квадратичну похибку загальної арифметичної середини за формулою (9.13):

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{5{,}1}{\sqrt{20}} = 1{,}1''\,.$$

Визначимо оцінку надійності величини μ за формулою (9.12)

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{5{,}1}{\sqrt{2(6-1)}} = 1{,}6''\,.$$

Надійність середньої квадратичної похибки арифметичної середини M оцінимо за формулою (9.14):

$$m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{1{,}6}{\sqrt{20}} = 0{,}36''\,.$$

Остаточно величина вимірюваного кута X = 89° 47' 10″ ± 1,1″.

Задача 9.3

Відзнаку H точки місцевості отримано за 6 нівелірними лініями. Провести повну математичну обробку результатів вимірювань за вихідними даними, що наведені в таблиці 9.5.

Таблиця 9.5 – Вихідні дані

№	1	2	3	4	5	6
H, м	196,529	196,522	196,517	196,532	196,530	196,520
m_h, мм	6,3	8,4	9,1	4,3	5,2	7,5

Розв’язання

Першим кроком потрібно обчислити вагу середніх квадратичних похибок p_i за формулою (9.4):

$$p_i = \frac{c}{m_i^2},$$

де m_i – середня квадратична похибка результату вимірювання;

c – коефіцієнт пропорційності, який може набувати довільних значень.

Задаємо коефіцієнт пропорційності c = 10 та виконуємо обчислення, результати яких заокруглюємо до 0,1 та заносимо у таблицю 9.6.

Таблиця 9.6 – Результати розрахунків

№	H, м	m_h, мм	p_i	δ, мм	pδ, мм	$p\delta^2$, $мм^2$	v, мм	pv, мм	pv^2, $мм^2$
1	196,529	6,3	0,25	12	3,00	36,0	1,0	0,25	0,3
2	196,522	8,4	0,14	5	0,70	3,5	–6,0	–0,84	5,0
3	196,517	9,1	0,12	0	0,00	0,0	–11,0	–1,32	14,5
4	196,532	4,3	0,54	15	8,10	121,5	4,0	2,16	8,6
5	196,530	5,2	0,37	13	4,81	62,5	2,0	0,74	1,5
6	196,520	7,5	0,18	3	0,54	1,6	–8,0	–1,44	11,5
Σ			1,60		17,15	225,1		–0,45	41,4

За умовний нуль беремо щонайменше значення $H_0 = 196{,}517$ м та обчислюємо різниці $\delta_i = h_i - H_0$. Значення δ_i, подаємо у міліметрах, заокруглюючи їх до цілих.

Далі обчислюємо добутки pδ та добутки $p\delta^2$, результати обчислень заокруглюємо до 0,01.

Скориставшись формулою (9.6), обчислимо найімовірніше значення відзнаки H. Результат заокруглимо до 0,1 мм.

$$H = H_0 + \frac{[p\delta]}{[p]} = 196{,}517 + \frac{17{,}15}{1{,}6} = 196{,}517\text{м} + 0{,}01072\text{м} = 196{,}5277 \text{ м.}$$

Заокруглимо отримане значення до 1 мм, $H' = 196{,}528$ м.

Визначимо похибку заокруглення за формулою (9.7)

$$\beta = H' - H = 196{,}528 - 196{,}5277 = 0{,}0003\text{м} = 0{,}3 \text{ мм.}$$

Далі для контролю точності вимірювань обчислимо зміщені поправки за формулою (9.8):

$$v_i = h_i - H'.$$

Далі обчислюємо добутки pv та pv^2, результати заокруглюємо до 0,1 і виконуємо контроль розрахунків шляхом підстановки отриманих результатів у рівність (9.9)

$$[pv] = -0{,}45; \quad [p] \cdot \beta = 1{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}48.$$

Далі суму квадратів відхилень виміряного значення від $\overline{H}$ $[pV^2]$ обчислюємо двічі – у таблиці та за формулою (9.10), отримаємо:

$$[pV^2] = 41{,}4; \qquad [p\delta^2] - \frac{[p\delta]^2}{[p]} = 225{,}1 - \frac{17{,}15^2}{1{,}6} = 41{,}27.$$

Далі з урахуванням двох отриманих значень $[pV^2]$ обчислюємо значення емпіричної середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулою (9.11):

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{41{,}4}{6-1}} = 2{,}88 \text{ мм}; \quad \mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{41{,}27}{6-1}} = 2{,}88 \text{ мм}.$$

Обчислимо середню квадратичну похибку загальної арифметичної середини за формулою (9.13)

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{2{,}88}{\sqrt{1{,}6}} = 2{,}27 \text{ мм}.$$

Визначимо оцінку надійності величини μ за формулою (9.12)

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{2{,}88}{\sqrt{2(6-1)}} = 0{,}91 \text{ мм}.$$

Надійність середньої квадратичної похибки арифметичної середини M оцінимо за формулою (9.14):

$$m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{0{,}91}{\sqrt{1{,}6}} = 0{,}72 \text{ мм}.$$

Відзнака H точки місцевості становить H = 196,528 м ± 2,27 мм.

Задача 9.4

Географічна широта однієї з точок земної поверхні визначена з 8 серій спостережень вісім разів, в результаті чого обчислені прості арифметичні середини φ_i та їхні середні квадратичні похибки m_i. Визначити остаточне значення широти (загальну арифметичну середину). Вихідні дані наведено у таблиці 9.7.

Таблиця 9.7 – Вихідні дані

№	**φ_i**	**m_i**	**№**	**φ_i**	**m_i**
1	15°45'36,18"	0,25	5	15°45'35,78"	0,28
2	15°45'36,53"	0,21	6	15°45'35,96"	0,23
3	15°45'36,49"	0,31	7	15°45'36,02"	0,35
4	15°45'35,27"	0,19	8	15°45'35,81"	0,15

Розв’язання

Обчислимо вагу середніх квадратичних похибок p_i за формулою (9.4), причому за c візьмемо одне із значень середніх квадратичних похибок m_i = 0,28, тоді

$$p_i = \frac{(0,28)^2}{m_i^2}.$$

Результати обчислень заокруглюємо до 0,1 та заносимо у таблицю 9.8.

Таблиця 9.8 – Результати розрахунків

№	φ_i	m_i, сек	p_i	δ, сек	pδ, сек	$p\delta^2$, $сек^2$	v, сек	pv, сек	pv^2, $сек^2$
1	15°45'36,18"	0,25	1,25	0,91	1,14	1,00	0,20	0,25	0,05
2	15°45'36,53"	0,21	1,78	1,26	2,24	2,82	0,53	0,94	0,50
3	15°45'36,49"	0,31	0,82	1,22	1,00	1,22	0,49	0,40	0,20
4	15°45'35,27"	0,19	2,17	0,00	0,00	0,00	–0,73	–1,58	1,15
5	15°45'35,78"	0,28	1,00	0,51	0,51	0,26	–0,22	–0,22	0,05
6	15°45'35,96"	0,23	1,48	0,69	1,02	0,70	–0,04	–0,06	0,00
7	15°45'36,02"	0,35	0,64	0,75	0,48	0,36	0,02	0,01	0,00
8	15°45'35,81"	0,15	3,48	0,54	1,88	1,02	–0,19	–0,66	0,13
Σ			12,62		8,27	7,38		–0,92	2,10

За умовний нуль беремо щонайменше значення $\varphi_0 = 15°\,45'\,35{,}27''$ та обчислюємо різниці $\delta_i = \varphi_i - \varphi_0$. Значення δ_i, подаємо у секундах, заокруглюючи їх до 0,01″.

Далі обчислюємо добутки pδ та добутки $p\delta^2$, результати обчислень заокруглюємо до 0,01.

Скориставшись формулою (9.6), обчислимо найімовірніше значення географічної широти φ. Результат заокруглимо до 0,1″.

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{[p\delta]}{[p]} = 15°\,45'\,35{,}27'' + \frac{8{,}27}{12{,}62} = 15°\,45'\,35{,}27'' + 0{,}655'' = 15°\,45'\,35{,}925''.$$

Заокруглимо отримане значення до 1″, $\varphi' = 15°\,45'\,36''$.

Визначимо похибку заокруглення за формулою (9.7):

$$\beta = \varphi' - \varphi = 15°\,45'\,36'' - 15°\,45'\,35{,}925'' = 0{,}075''.$$

Далі для виконання контролю точності обчислень визначимо зміщені поправки за формулою (9.8):

$$v_i = \varphi_i - \varphi'.$$

Далі обчислюємо добутки pv та pv^2, результати заокруглюємо до 0,01 і виконуємо контроль розрахунків шляхом підстановки отриманих результатів у рівність (9.9)

$$[pv] = -0{,}92''; \quad [p] \cdot \beta = 12{,}62 * 0{,}075'' = 0{,}95''.$$

Далі суму квадратів відхилень виміряного значення від φ $[pV^2]$ обчислюємо двічі - у таблиці та за формулою (9.10), отримаємо:

$$[pV^2] = 2{,}1; \qquad [p\delta^2] - \frac{[p\delta]^2}{[p]} = 7{,}38 - \frac{8{,}27^2}{12{,}62} = 1{,}96.$$

Далі з урахуванням двох отриманих значень $[pV^2]$ обчислюємо значення емпіричної середньої квадратичної похибки одиниці ваги за формулою (9.11):

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{2,1}{8-1}} = 0,55'';\quad \mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{1,96}{8-1}} = 0,53''.$$

Обчислимо середню квадратичну похибку загальної арифметичної середини за формулою (9.13)

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{0,55}{\sqrt{12,62}} = 0,15''.$$

Визначимо оцінку надійності величини μ за формулою (9.12)

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{0,55}{\sqrt{2(8-1)}} = 0,15''.$$

Надійність середньої квадратичної похибки арифметичної середини M оцінимо за формулою (9.14):

$$m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{0,15}{\sqrt{12,62}} = 0,04''.$$

Географічна широта досліджуваної точки земної поверхні дорівнює φ = 15° 45′ 36″ ± 0,15″.

Практичне заняття 10
ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ЗА РІЗНИЦЯМИ ПОДВІЙНИХ ВИМІРІВ

Мета – формування навичок з математичних підходів до практичного опрацювання подвійних рівноточних та нерівноточних вимірів та особливостей оцінювання точності подвійних вимірів.

Основні відомості

В геодезичній практиці доволі точно можна отримувати шукані величини, якщо вимірювати кожну з них двічі. Наприклад, горизонтальний кут вимірюють теодолітом за положенням вертикального круга «КП» і положенням вертикального круга «КЛ», довжину лінії вимірюють в прямому і зворотному напрямах і т. д. Задовільно оцінити точність кожного вимірювання в одній такій парі неможливо, але якщо за двома повторними вимірюваннями отримано певну кількість значень вимірюваної величини, то оцінювання точності за спеціальними методами дозволяє виявити, зокрема, систематичні похибки.

Рівноточні подвійні виміри

Якщо маємо подвійні рівноточні виміри n величин

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n,$$

то для кожної пари подвійних вимірювань складаємо різницю

$$d_i = x_i - x_i', \tag{10.1}$$

де x_i та x_i' – результати двох вимірювань одного об'єкту вимірювання.

Ряд подвійних вимірів вважають рівноточним, якщо вимірювання в парах, і пари між собою є рівноточними.

Нагадаємо, що похибка виміру містить дві складові – випадкову та систематичну і що математичне сподівання випадкової складової дорівнює нулю. Якщо припустити, що систематичні похибки подвійних рівноточних вимірювань близькі за значеннями, то у результатах обчислення різниць d_i систематичний вплив в певному ступені компенсований. Систематичні похибки в різницях подвійних вимірювань d_i називають залишковими.

За відсутності систематичних похибок різниці d_i можна вважати як випадкові похибки, тому їхні середні квадратичні похибки визначають за формулами

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}; \tag{10.2}$$

$$m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \tag{10.3}$$

Для середнього значення $x_{i\ \text{ср}} = \frac{x_i + x_i'}{2}$ маємо:

$$m_{x_{i\ \text{ср}}} = \frac{m_d}{2} = \frac{m_x}{\sqrt{2}}. \tag{10.4}$$

На наявність в d_i систематичної похибки вказує істотне відхилення від нуля величини

$$\theta_d = \frac{[d]}{n}, \tag{10.5}$$

в цьому випадку можна обчислити різниці

$$d_i' = d_i - \theta \tag{10.6}$$

та оцінити відхилення d від арифметичної середини за формулою:

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}. \tag{10.7}$$

Для перевірки значущості залишкових систематичних похибок у різницях подвійних вимірювань d як критерій значущості застосовують виконання нерівності

$$|[d]| \geq 2{,}5\,\frac{[|d|]}{\sqrt{n}}, \tag{10.8}$$

де n – кількість пар подвійних вимірювань.

Якщо нерівність (10.8) не виконується, то залишкові систематичні похибки в різницях подвійних вимірювань вважають незначущими, отже ними можна знехтувати. В протилежному випадку обчислюють величину середньої систематичної похибки θ_d в різницях подвійних вимірювань за формулою (10.5) та вилучають її із різниць подвійних вимірювань $d' = d - \theta_d$. Середню квадратичну похибку в такому разі обчислюють за формулою (11.7)

Оцінити надійність величин, отриманих на підставі виразів (10.4) – (10.6) при відносно невеликій кількості вимірювань n можна за формулами

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} \tag{10.9}$$

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}} \tag{10.10}$$

Нерівноточні подвійні виміри

Подвійні нерівноточні виміри мають місце у випадках, коли виміри всередині пари рівноточні, а пари одна з одною є нерівноточними, тобто виміри попарно рівноточні. Така ситуація виникає, наприклад, під час порівняння результатів подвійного нівелювання в ходах різної довжини.

За результатами подвійних нерівноточних вимірювань необхідно виконати аналіз різниць та оцінити їхню точність.

Для подвійних нерівноточних вимірювань виконується співвідношення $m_i' = m_i'' \neq m_j' = m_j''$, відповідно пари відрізняються одна від одної вагою, тобто вага кожної пари різна, але

$$p_{xi} = p_{x_i'}. \tag{10.11}$$

Якщо різниці подвійних вимірювань $d_i = x_i - x'_i$, то зворотна вага різниці

$$\frac{1}{p_{di}} = \frac{1}{p_{x_i}} + \frac{1}{p_{x_i'}} = \frac{2}{p_{x_i}}, \qquad \text{тоді } p_{di} = \frac{p_{x_i}}{2} = \frac{p_i}{2}. \tag{10.12}$$

За відсутності систематичних похибок отримаємо похибку одиниці ваги:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}\,. \tag{10.13}$$

Середні квадратичні похибки середніх значень $x_{i\text{ср}} = \frac{x_i + x'_i}{2}$ дорівнюють

$$m_{x_{i\text{ср}}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}\,. \tag{10.14}$$

Якщо різниці d_i містять систематичні похибки, то

$$\theta = \frac{[pd]}{[p]}\,, \tag{10.15}$$

помітно відрізняються від нуля. В цьому випадку

$$\mu = \sqrt{\frac{[d'^2 p]}{2(n-1)}}\,, \tag{10.16}$$

де $d'_i = d_d - \theta$.

Критерієм наявності систематичної похибки θ є невиконання нерівності

$$|[p_d \cdot d]| \leq 2{,}5 \cdot \frac{[|p_d \cdot d|]}{\sqrt{[p_d]}}. \quad (10.17)$$

Під час опрацювання подвійних нерівноточних вимірювань бажано додержуватися наступної послідовності.

1. Обчислити вагу p_i перевищення кожного нівелірного ходу за формулою

$$p_i = \frac{1}{L_i}, \quad (10.18)$$

де L_i – довжина нівелірного ходу, км.

2. Обчислити суму різниць d_i перевищень прямого і зворотного ходу і суму довжин нівелірних ходів L_i.

3. Визначити величину коефіцієнта систематичного впливу за формулою

$$\lambda = \frac{[d]}{[L]}. \quad (10.19)$$

4. Обчислити добуток λL_i. Сума цих добутків має дорівнювати сумі різниць d_i, тобто

$$[d] = [\lambda L]. \quad (10.20)$$

5. Обчислити різниці

$$d'_i = d_i - \lambda \cdot L_i. \quad (10.21)$$

6. Обчислити середню квадратичну похибку одиниці ваги за формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}}. \quad (10.22)$$

7. Оцінити надійність величини, отриманої на підставі (11.10). Це можна зробити за формулою

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (10.23)$$

8. Обчислити середню квадратичну похибку кожного нівелірного ходу за формулою

$$m_i = \mu \cdot \sqrt{L_i}. \quad (10.24)$$

9. Обчислити середню квадратичну похибку середнього перевищення в нівелірному ході за формулою

$$M_i = \frac{m_i}{\sqrt{2}}. \quad (10.25)$$

Задача 10.1

В таблиці 10.1 наведені результати нівелювання (перевищення у метрах) між точками за двох положень нівеліра. Обчислити середні квадратичні похибки одного виміру з середнього та з подвійних вимірювань.

Таблиця 10.1 – Вихідні дані

Номер перевищення	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1-й стан X_i, м	1,273	0,987	1,069	0,542	0,768	0,895	1,166	1,304	1,198	0,484
2-й стан X_i', м	1,270	0,988	1,065	0,542	0,766	0,891	1,167	1,302	1,194	0,481

Розв'язання

Для кожної пари подвійних вимірювань складаємо різницю d_i за формулою (10.1)

$$d_i = x_i - x_i',$$

де x_i та x_i' – результати двох вимірювань одного перевищення.

Результати розрахунків занесемо у таблицю 10.2.

Таблиця 10.2 – Результати розрахунків

Номер перевищення	1-й стан x_i, м	2-й стан x_i', м	d_i, мм	d_i', мм	$d_i'^2$, мм^2
1	2	3	4	5	6
1	1,273	1,270	3	1,0	1
2	0,987	0,988	–1	–3,0	9
3	1,069	1,065	4	2,0	4
4	0,542	0,542	0	–2,0	4
5	0,768	0,766	2	0,0	0
6	0,895	0,891	4	2,0	4
7	1,166	1,167	–1	–3,0	9
8	1,304	1,302	2	0,0	0
9	1,198	1,194	4	2,0	4
10	0,484	0,481	3	1,0	1
S			20	0,0	36,0

Перед усім для виявлення систематичної похибки перевіримо виконання нерівності (10.8)

$$|[d]| = 24\ ; \qquad 2{,}5\frac{[|d|]}{\sqrt{n}} = 2{,}5 \cdot \frac{24}{\sqrt{10}} = 18{,}97\ ,$$

$$24 > 18{,}97\ ,$$

отже, нерівність виконується, що вказує на потребу перевірити значущість систематичної похибки.

Для цього обчислимо систематичну похибку θ_d за формулою (10.5):

$$\theta_d = \frac{[d]}{n} = \frac{20}{10} = 2 \text{ мм}$$

та обчислимо різниці d_i' за формулою (11.6)

$$d_i' = d_i - \theta.$$

Оцінимо відхилення d від арифметичної середини за формулою (10.7):

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{36}{10-1}} = 2 \text{ мм}.$$

Середня квадратична похибка перевищення при одному положенні нівеліра за формулою (10.3) становить

$$m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1{,}41 \text{ мм}.$$

Середню квадратичну похибку перевищення, що отримана як середнє з результатів нівелювання при двох положеннях приладу визначимо за формулою (10.4):

$$m_{x_{i\,\text{ср}}} = \frac{m_\text{x}}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}41}{\sqrt{2}} = 1 \text{ мм}.$$

Задача 10.2

В таблиці 10.3 наведені результати першого та другого суміщень штрихів оптичного теодоліта. Визначити середню квадратичну похибку суміщення штрихів та середню квадратичну похибку отриманих середніх значень за результатами подвійних наведень штрихів оптичного теодоліта.

Таблиця 10.3 – Вихідні дані

Номер перевищ.	**1-ше суміщення Xi**	**2-ге суміщення X'i, сек**	**№ перевищ.**	**1-ше суміщення Xi**	**2-ге суміщення X'i, сек**
1	0°17'23,4"	21,1"	7	180°42'18,8"	18,2"
2	30°08'14,6"	13,1"	8	210°16'24,0"	25,6"
3	60°33'49,5"	50,6"	9	240°25'41,3"	40,3"
4	90°44'03,7"	5,4"	10	270°37'33,4"	32,3"
5	120°56'20,9"	21,9"	11	300°09'21,6"	22,8"
6	150°29'53,2"	51,5"	12	330°51'54,0"	55,9"

Розв’язання

Обчислюємо різниці d_i в кожній парі подвійних рівноточних вимірювань за формулою (10.1) та визначаємо їхню суму. Результати виражаємо в міліметрах та заносимо до таблиці 10.4 (колонка 4).

$$d_i = x_i - x_i'.$$

Таблиця 10.4 – Результати розрахунків

Номер суміщення	**1-ше суміщення x_i, сек**	**2-ге суміщення x'_i, сек**	**d_i, сек**	**d_i', сек**	**$d_i'^2$, сек^2**
1	2	3	4	5	6
1	0° 17' 23,4"	21,1"	2,3	2,33	5,43
2	30 08 14,6"	13,1"	1,5	1,53	2,34
3	60 33 49,5"	50,6"	–1,1	–1,07	1,14
4	90 44 03,7"	5,4"	–1,7	–1,67	2,79
5	120 56 20,9"	21,9"	–1,0	–0,97	0,94
6	150 29 53,2"	51,5"	1,7	1,73	2,99
7	180° 42' 18,8"	18,2"	0,6	0,63	0,40
8	210 16 24,0"	25,6"	–1,6	–1,57	2,46
9	240 25 41,3"	40,3"	1,0	1,03	1,06
10	270 37 33,4"	32,3"	1,1	1,13	1,28
11	300 09 21,6"	22,8"	–1,2	–1,17	1,37
12	330 51 54,0"	55,9"	–1,9	–1,87	3,50
Σ			–0,3	0,06	25,70

Для виявлення систематичної похибки перевіримо виконання нерівності (10.8)

$$|[d]| = 16{,}7'' ; \qquad 2{,}5\frac{[|d|]}{\sqrt{n}} = 2{,}5 \cdot \frac{16{,}7}{\sqrt{12}} = 12{,}05'' ,$$

$$16{,}7'' > 12{,}05'' ,$$

отже, нерівність виконується, тому перевіряти значущість систематичної похибки не потрібно.

Але спробуємо обчислити θ_d за формулою (10.5)

$$\theta_d = \frac{[d]}{n} = \frac{-0{,}3}{11} = -0{,}03''$$

та обчислимо d’ за формулою (10.6)

$$d_i' = d_i - \theta.$$

Контролем обчислень різниць d_i' слугує рівність

$$|[d']| = 0,$$

яка повинна виконуватись в межах похибки заокруглення. Результати вимірювань в даному прикладі отримані з точністю $0{,}1''$. При обчисленні середньої систематичної похибки θ_d ми залишаємо на один десятковий знак більше, ніж у вихідних даних. Тому гранична похибка заокруглення величини θ_d становить $\pm 0{,}05''$, а рівність $|[d']| = 0$ в даному випадку повинна виконуватись в межах

$$|[d']| \leq 0{,}05'' \cdot n .$$

Підставивши відповідні числові значення, отримаємо

$$0{,}3'' \ \leq 0{,}05'' \cdot 12 = 0{,}6''.$$

Якщо нерівність виконується, далі обчислюємо значення d'^2 з точністю $0{,}01''$.

Середню квадратичну похибку окремого результату суміщення штрихів оптичного теодоліта обчислюємо за формулою (10.3)

$$m_{x_i} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{25{,}7}{2(12-1)}} = 1{,}08''.$$

Обчислюємо середню квадратичну похибку середньої величини суміщення штрихів в кожній парі подвійних вимірювань за формулою (10.4)

$$M = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}08}{\sqrt{2}} = 0{,}76''.$$

Оцінюємо надійність величин, отриманих на підставі виразів (10.4) – (10.6). При відносно невеликій кількості вимірювань n це можна зробити за формулами (10.9) та (10.10):

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} = \frac{1{,}08}{\sqrt{2\cdot 12}} = 0{,}22'';$$

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}} = \frac{0{,}76}{\sqrt{2\cdot 12}} = 0{,}156''.$$

Задача 10.3

Наведені результати рівноточних вимірювань довжин ліній світлодалекоміром (табл. 10.5). Кожна лінія виміряна двічі. Виконати оцінювання точності подвійних рівноточних вимірювань.

Таблиця 10.5 – Вихідні дані

№	1-ше	2-ге	№	1-ше	2-ге
1	451,259	451,264	8	377,504	377,513
2	357,437	357,434	9	407,643	407,665
3	495,557	495,562	10	334,896	334,901
4	424,053	424,061	11	225,038	225,037
5	396,236	396,243	12	390,858	390,858
6	241,971	241,979	13	316,733	316,729
7	340,614	340,625	14	361,279	361,285

Розв'язання

Обчислюємо різниці d_i в кожній парі подвійних рівноточних вимірювань за формулою (10.1)

$$d_i = x_i - x'_i,$$

та знаходимо їхню суму. Результати виражаємо в міліметрах у таблиці 10.6.

Таблиця 10.6 – Результати обчислень

№	Довжина ліній		d_i	d_i'	$d_i'^2$
	l_i'	l_i''			
1	2	3	4	5	6
1	451,259	451,264	–5	0,6	0,36
2	357,437	357,434	3	8,6	73,96
3	495,557	495,562	–5	0,6	0,36
4	424,053	424,061	–8	–2,4	5,76
5	396,236	396,243	–7	–1,4	1,96
6	241,971	241,979	–8	–2,4	5,76
7	340,614	340,625	–11	–5,4	29,16
8	377,504	377,513	–9	–3,4	11,56
9	407,643	407,665	–22	–16,4	268,96
10	334,896	334,901	–5	0,6	0,36
11	225,038	225,037	1	6,6	43,56
12	390,858	390,858	0	5,6	31,36
13	316,733	316,729	4	9,6	92,16
14	361,279	361,285	–6	–0,4	0,16
Σ			–78	0,4	565,44

Зіставляємо нерівність (10.8), яка є критерієм значущості систематичної похибки в різницях подвійних вимірювань

$$|[d]| = 78;\ \geq 2{,}5\frac{[|d|]}{\sqrt{n}} = 2{,}5 \cdot \frac{94}{\sqrt{14}} = 62{,}8\ ,$$

$$78 \geq 62.8.$$

Оскільки нерівність виконується, приходимо до висновку, що різниці d_i містять залишкову систематичну похибку, яку необхідно врахувати під час виконання оцінювання точності.

В такому випадку, визначаємо величину середньої систематичної похибки θ_d за формулою (10.5)

$$\theta_d = \frac{[d]}{n} = \frac{-78}{14} = -5{,}57 \text{ мм},$$

і вилучаємо її із різниць d_i, тобто обчислюємо величини d_i' за формулою (10.6)

$$d_i' = d_i - \theta.$$

Результати заокруглюємо до 0,1 мм, підраховуємо їхню суму.

Контролем обчислень різниць d_i' слугує рівність

$$|[d']| = 0,$$

яка повинна виконуватись в межах похибки заокруглення. Результати вимірювань довжин ліній в даному прикладі отримані з точністю 1 мм. При обчисленні середньої систематичної похибки θ_d ми залишаємо на один десятковий знак більше, ніж у вихідних даних. Тому гранична похибка заокруглення величини θ_d становить ±0,05 мм, а рівність $|[d']| = 0$ в даному випадку повинна виконуватись в межах

$$|[d']| \leq 0{,}05 \cdot n.$$

Підставивши відповідні числові значення, отримаємо

$$0{,}4 \leq 0{,}7.$$

Якщо нерівність виконується, далі обчислюємо значення d'^2 з точністю 0,01 мм^2 та обчислюємо їхню суму.

Середню квадратичну похибку окремого результату вимірювання обчислюємо за формулою (10.7):

$$m = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{565{,}44}{2(14-1)}} = 4{,}7 \text{ мм},$$

де $d' = d - \theta_d$.

Обчислюємо середню квадратичну похибку середньої довжини лінії в кожній парі подвійних вимірювань за формулою (10.4)

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{4{,}7}{\sqrt{2}} = 3{,}3 \text{ мм.} – \text{ето mx}$$

Оцінюємо надійність величин m та M за формулами (10.9) і (10.10) відповідно

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} = \frac{4{,}7}{\sqrt{2 \cdot 14}} = 0{,}88 \text{ мм};$$

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}} = \frac{3{,}3}{\sqrt{2 \cdot 14}} = 0{,}62 \text{ мм}.$$

Задача 10.4

У таблиці 10.7 наведені різниці d_i подвійних вимірювань певних величин і ваги вимірювань. Виконати оцінювання точності.

Розв'язання

Таблиця 10.7 – Розрахунки

№	Різниці d_i	Ваги вимірювань p_i	d^2	pd^2	pd_i	$m_{x_{i\text{ср}}}$
1	2,4	1,10	5,8	6,4	2,64	1,17
2	–6,2	0,28	38,4	10,8	–1,736	2,31
3	–2,2	0,62	4,8	3,0	–1,364	1,55
4	1,3	0,32	1,7	0,5	0,416	2,16
5	–0,6	0,27	0,4	0,1	–0,162	2,35
6	2,1	0,71	4,4	3,1	1,491	1,45
7	–4,0	0,43	16,0	6,9	–1,72	1,87

Продовження таблиці 10.7

№	Різниці d_i	Ваги вимірювань p_i	d^2	pd^2	pd_i	$m_{x_{i\text{ср}}}$
8	1,4	0,45	2,0	0,9	0,63	1,82
9	7,5	0,48	56,3	27,0	3,6	1,77
10	–1,3	0,53	1,7	0,9	–0,689	1,68
S	0,4	5,2	131,5	59,6	3,106	1,81

Обчислимо систематичну похибку за формулою (10.15):

$$\theta = \frac{[pd]}{[p]} = \frac{3{,}06}{5{,}2} = 0{,}60 \ .$$

Оскільки θ≈0, то приймаємо гіпотезу про відсутність систематичних похибок. Тому середня квадратична похибка одиниці ваги за формулою (10.13) становить

$$\mu = \sqrt{\frac{59{,}6}{2*10}} = 1{,}73.$$

Середні квадратичні похибки середніх значень $x_{i\text{ср}} = \frac{x_i + x'_i}{2}$ обчислені за формулою (10.14) дорівнюють, зокрема для першого перевищення

$$m_{x_{i\text{ср}}} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}} = \frac{1{,}73}{\sqrt{2 \cdot 1{,}1}} = 1{,}17.$$

Решта значень наведена у таблиці 10.7.

Задача 10.5

Прокладено 17 ходів нівелювання III класу. Нівелювання виконано в прямому і зворотному напрямках. Довжина нівелірного ходу і різниці перевищень прямого і зворотного ходу наведені в таблиці 10.8. Необхідно виконати оцінювання точності нівелірних ходів.

Розв'язання

Обчислюємо вагу перевищення кожного нівелірного ходу за формулою (10.18), результати заокруглюємо до 0,01 і заносимо до таблиці 10.8, зокрема, для першого нівелірного хода $p_i = \frac{1}{L_i} = \frac{1}{3{,}4} = 0{,}29$.

Визначимо суму різниць $[d_i]$ і суму довжин нівелірних ходів $[L_i]$ та обчислимо величину коефіцієнта систематичного впливу λ за формулою (10.19)

Таблиця 10.8 – Результати вимірювань в нівелірних ходах

№	d_i	L_i	λL_i	d_i'	$d_i'^2$	p_i	pd'^2	m_i	M_i
1	70,5	3,4	0,66	69,84	4877,63	0,29	1414,51	29,1	20,6
2	17,4	8,3	1,62	15,78	249,01	0,12	29,88	45,5	32,2
3	–50,4	6,9	1,35	–51,75	2678,06	0,14	374,93	41,5	29,3
4	33,7	4,0	0,78	32,92	1083,73	0,25	270,93	31,6	22,3
5	45,5	2,6	0,51	44,99	2024,10	0,38	769,16	25,5	18,0
6	–44,1	7,2	1,40	–45,50	2070,25	0,14	289,84	42,4	30,0
7	–48,1	7,2	1,40	–49,50	2450,25	0,14	343,04	42,4	30,0
8	6,9	3,8	0,74	6,16	37,95	0,26	9,87	30,8	21,8
9	–38,9	2,8	0,55	–39,45	1556,30	0,36	560,27	26,4	18,7
10	–18,4	1,8	0,35	–18,75	351,56	0,56	196,87	21,2	15,0
11	–57,3	3,1	0,60	–57,90	3352,41	0,32	1072,77	27,8	19,7
12	–50,0	5,8	1,13	–51,13	2614,28	0,17	444,43	38,0	26,9
13	66,7	7,3	1,42	65,28	4261,48	0,14	596,61	42,7	30,2
14	54,9	3,0	0,59	54,31	2949,58	0,33	973,36	27,4	19,4
15	–24,4	1,9	0,37	–24,77	613,55	0,53	325,18	21,8	15,4
16	11,1	5,6	1,09	10,01	100,20	0,18	18,04	37,4	26,4
17	40,5	5,4	1,05	39,45	1556,30	0,19	295,70	36,7	26,0
S	15,6	80,1	15,61	–0,01			7985,39		

$$\lambda = \frac{[d]}{[L]} = \frac{15{,}6}{80{,}1} 0{,}195.$$

Обчислимо добутки λL_i, результати заокруглюємо до 0,01, та перевіримо виконання рівності (10.20)

$$[d] = 15{,}6;\ [\lambda L]. = 15{,}61.$$

Обчислимо з точністю 0,01 різниці d_i' за формулою (10.21), а також значення d'^2_i та добутки pd'^2 та визначимо суму добутків pd'^2 , $d'_i = d_i - \lambda \cdot L_i$.

Визначимо середню квадратичну похибку одиниці ваги за формулою (10.22):

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{7985{,}39}{2(17-1)}} = 15{,}8$$

та оцінимо її надійність за формулою (12.13)

$$m_\mu = \frac{15{,}8}{\sqrt{2(17-1)}} = 2{,}8.$$

За формулою (10.24) обчислимо середні квадратичні похибки кожного нівелірного хода:

$$m_i = \mu \cdot \sqrt{L_i} = 15{,}8 \cdot \sqrt{3{,}4} = 29{,}1$$

та визначимо середні квадратичні похибки середнього перевищення в кожному нівелірному ході за формулою (10.25)

$$M_i = \frac{m_i}{\sqrt{2}} = \frac{29{,}1}{\sqrt{2}} = 20{,}6.$$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3 «СПОСІБ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ»

Практичне заняття 11
ПАРАМЕТРИЧНИЙ МЕТОД ЗРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ПОБУДОВ

Мета – закріплення теоретичних положень методу найменших квадратів, формування навичок зрівнювання геодезичних мереж параметричним методом.

Основні відомості

Сутність задач зрівнювання ілюструє наступний простий приклад. Якщо виміряти три кути плоского трикутника, то теоретично їхня сума має скласти 180°. Но оскільки результати вимірювань містять похибки, сума вимірювань кутів трикутника може істотно відрізнятися від 180°. В результаті виникає задача визначення поправок до виміряних величин, що мінімізують сумарну похибку вимірювань, яка називається нев'язкою. Така задача в геодезії називається зрівнюванням виміряних величин.

Процедура зрівнювання являє собою сукупність математичних операцій, реалізація якої дає поправки до виміряних значень величин. Зрівнювання виконують за методом найменших квадратів, відповідно до якого виміряні величини отримують поправки v_i, що задовольняють умові $[pv^2] = min$, де p_i – вага виміру. Доведено, що цей метод призводить до найкращих оцінок шуканих невідомих.

Існують два основних способи зрівнювання: параметричний і корелатний. Перший спосіб передбачає безпосереднє отримання зрівнюваних значень шуканих величин - параметрів шляхом рішення системи нормальних рівнянь, а в другому способі – спочатку отримують допоміжні множники – так звані корелати, а потім шукані величини та їхні функції. Дані способи зрівнювання призводять до однакових результатів, але мають різну складність під час розв'язання тієї самої задачі.

Нехай виміряні n величин, істинні значення яких X_i. Результати вимірювань цих величин x_i отримані із вагами p_i. Відомо, що виміряні величини пов'язані одна з одною співвідношеннями

$$\left.\begin{matrix} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ \varphi_r(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{matrix}\right\} . \qquad (11.1)$$

Система (11.1) містить r незалежних рівнянь. Число рівнянь в системі (11.1) $r < n$, тобто менше числа виміряних величин n, для яких потрібно визначити поправки. Така система є невизначеною, оскільки припускає нескінченну множину рішень. Рівняння (11.1) називають умовними рівняннями. Причому, кожен новий додатковий вимір породжує умовне рівняння.

Умовним рівнянням називають будь-яке математичне співвідношення, що пов'язує істинні значення вимірюваних величин.

Отримані результати вимірювань перед усім перевіряють, наскільки вони задовольняють умовним рівнянням (11.1). Після підстановки виміряних значень величин система умовних рівнянь набуває наступний вигляд:

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_1(x_1,\dots,x_n)=W_1\\ \varphi_2(x_1,\dots,x_n)=W_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_r(x_1,\dots,x_n)=W_n\end{array}\right\},\qquad(11.2)$$

де w_i – нев'язки.

Головною задачею, яка має бути вирішена при зрівнюванні є усунення усіх нев'язок w_i, для чого слід виправити результати вимірювань, тобто знайти для них поправки.

Виправлені результати вимірювань позначають

$$x_i' = x_i + v_i,$$

де v_i – шукані поправки.

Якщо у (11.2) підставити виправлені результати вимірювань, отримаємо:

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_1(x_1+v_1,\dots,x_n+v_n)=0\\ \varphi_2(x_1+v_1,\dots,x_n+v_n)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_r(x_1+v_1,\dots,x_n+v_n)=0\end{array}\right\}.\qquad(11.3)$$

Мета зрівнювання – знаходження таких поправок v_i до виміряних значень x_i, які усунули б нев'язки w_i.

Запишемо математичний вираз принципу найменших квадратів – це вимога, щоб

$$[\mathrm{pv}^2] = \min.$$

Із врахуванням того, що шукана поправка v являє собою різницю зрівнюваного та виміряного значень $v_i = x - x_i$, підставимо її до виразу мінімуму суми квадратів відхилень

$$\sum \mathrm{p}_i(x-x_i)^2 = \min$$

та позначимо цей вираз f(x):

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{p}_i(x-x_i)^2 = \min.$$

Отже, нам потрібно знайти такі зрівнювані значення x, за яких f(x) буде мінімальною.

Відомо, що функція має екстремуми у точках, де її похідні дорівнюють нулю, тобто

$$\frac{df(x)}{dx} = 0,$$

або запишемо

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} 2p_i(x - x_i) \quad = 0.$$

Сутність параметричного способу зрівнювання полягає у наступному. Зазвичай рівнянь, які пов'язують вимірювані величини (11.1), менше за число самих виміряних величин, r < n. Проте, для визначення n невідомих потрібно n і рівнянь, тому кількість рівнянь у системі додають шляхом введення певних параметрів t, що пов'язані із вимірюваними величинами та не пов'язані одна з одною. Оскільки необхідно додати k = n-r рівнянь, то і таких параметрів додають k.

Обравши параметри t, складають параметричні рівняння зв'язку

$$X_i = f_i(t_1, \dots, t_k),\ \ j = \overline{1, k}, i = \overline{1, n}\ , \tag{11.4}$$

де t_j – параметри;

X_i – виміряні величини.

Як результат розв'язання системи рівнянь ми бажаємо отримати поправки до вимірюваних значень

$$x_i' = x_i + v_i, \tag{11.5}$$

де x_i' – зрівняне значення;

v_i – поправки до виміряних значень x_i, що отримані із зрівнювання.

Позначимо t_j зрівнювані значення необхідних невідомих (параметрів) та запишемо систему (11.4) у наступному вигляді

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k),\ \ j = \overline{1, k}, i = \overline{1, n}\ , \tag{11.6}$$

звідки виразимо поправки v_i:

$$v_i = f_i(t_1, \dots, t_k) - x_i,\ \ j = \overline{1, k}, i = \overline{1, n}\ , \tag{11.7}$$

це дозволяє записати вимогу мінімуму суми добутків ваг на поправки із врахуванням (11.7) наступним чином:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\{f_i(t_1, \dots, t_k) - x_i\}^2 = \min\ , \tag{11.8}$$

або компактніше

$$F(t_1, \dots, t_k) = \min\ . \tag{11.9}$$

Проведені перетворення дозволили від задачі на умовний екстремум перейти шляхом введення параметрів t до задачі на абсолютний (безумовний) екстремум. Залишається, узявши часткові похідні F за параметрами t_j, звести їх до системи k рівнянь:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j} = 0, \quad j = \overline{1, k}\ . \tag{11.10}$$

Зауважимо, що в більшості задач вираз $f_i(t_1, \dots, t_k)$ є нелінійним, що істотно утруднює розв'язання. Тому функцію (11.6) $x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k)$ лінеаризують (приводять до лінійного вигляду) шляхом розкладання у ряд Тейлора.

Нагадаємо, що будь-який вираз є лінійним (графіком лінійного виразу є пряма лінія), якщо він не містить змінних у ступенях, або добутки змінних, або іншого виду нелінійних складових (рис. 11.1).

Для лінеаризації функції $f_i(t_1, \dots, t_k)$ використовують формулу розкладання Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + R_n(x).$$

Зауважимо, що розкладання функції у ряд Тейлора є справедливим тільки для оточення певної точки, в якої відомі значення $t_j^0, \quad \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{k}}$.

Тому вводять поправки до параметрів t_j:

$$t_j = t_j^0 + \tau_j, \quad \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{k}},$$

де τ_j – поправка до t_j.

Підставимо їх до рівності для v_i (11.7) та отримаємо

$$v_i = f_i(t_1^0 + \tau_1, \dots, t_k^0 + \tau_k) - x_i, \quad (11.11)$$

де $j = \overline{1, k}, i = \overline{1, n}$.

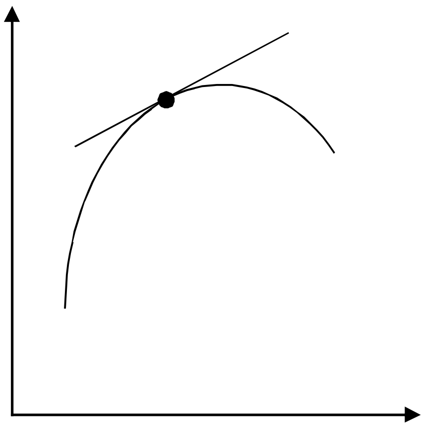


Рисунок 11.1 – Сутність лінеаризації

Розкладання в ряд Тейлора передбачає визначення часткових похідних виразу (11.9), запишемо результат лінеаризації (11.9), це є важливим, оскільки з'являться нові коефіцієнти a_{ij} та нові змінні τ_j:

$$v_i = f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 \tau_1 + \dots + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 \tau_k - x_i,$$

де $j = \overline{1, k}, i = \overline{1, n}$, (11.12)

слід врахувати, що $f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) \approx x_i$.

Коефіцієнти (11.12), що стоять при τ_j, позначимо буквами a_{ik}, а вільний член рівняння позначимо l_i.

$$\left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 = a_{i1}; \dots; \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 = a_{ik} \,. \quad (11.13)$$

$$f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) - x_i = x_i^0 - x_i = l_i \,. \quad (11.14)$$

Скориставшись прийнятими позначеннями, запишемо систему (11.7) для поправок v_i як залежності від поправок параметрів Т:

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i, \quad j = \overline{1, k}, i = \overline{1, n} \,. \quad (11.15)$$

Система (11.15) є системою параметричних рівнянь поправок (тобто поправки v_i виражені через поправки параметрів Т). Зауважимо також, що коефіцієнти a_{ij} отримані у процесі розкладання в ряд Тейлора і є наближеними числовими значеннями похідних. Таким чином, нами отримано систему параметричних рівнянь поправок, рівняння якої є лінійними.

Закінчивши лінеаризацію виразу v_i (11.7), повернемось до рішення задачі на знаходження мінімуму суми квадратів відхилень та запишемо вимогу мінімуму суми добутків ваг на поправки із врахуванням (11.15):

$$[pv^2] = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot (a_{i1} \cdot \tau_1 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i)^2 = F(\tau_1, \dots, \tau_k) = \min . \qquad (11.16)$$

Зауважимо, що скобка у квадраті – це v_i у квадраті.

Нагадаємо, що функція має точки екстремуму при значеннях змінних, які обертають її часткові похідні на нуль, а нам потрібний мінімум функції F.

Візьмемо часткову похідну функції F за змінною τ_1 та дорівняємо її до нуля:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_1} = 2p_1 \cdot v_1 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \tau_1} + 2p_2 \cdot v_2 \cdot \frac{\partial v_2}{\partial \tau_1} + 2p_3 \cdot v_3 \cdot \frac{\partial v_3}{\partial \tau_1} + \dots + 2p_n \cdot v_n \cdot \frac{\partial v_n}{\partial \tau_1} = 0 \ (11.17).$$

Рівність виразу (11.17) нулю дозволяє скоротити 2. З виразу (11.15) видно, що часткові похідні v_i дорівнюють коефіцієнтам a_{i1}:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau_1} = a_{11}; \ \dots \frac{\partial v_2}{\partial \tau_1} = a_{21}; \cdot \dots ; \ \frac{\partial v_n}{\partial \tau_1} = a_{n1},$$

тому можна записати $\frac{\partial F}{\partial \tau_1}$ наступним чином:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_1} = p_1 \cdot v_1 \cdot a_{11} + p_2 \cdot v_2 \cdot a_{21} + 2p_3 \cdot v_3 \cdot a_{31} + \dots + 2p_n \cdot v_n \cdot a_{n1} = 0,$$

або

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_1} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot v_i \cdot a_{i1} = 0, \qquad \text{або} \qquad [\,pva_1] = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_2} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot v_i \cdot a_{i2} = 0, \qquad \text{або} \qquad [\,pva_2] = 0;$$

…………………………………………………………….

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_k} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot v_i \cdot a_{ik} = 0, \qquad \text{або} \qquad [\,pva_k] = 0.$$

Отже, отримана система k рівнянь, що виражають часткові похідні F:

$$\left.\begin{array}{c} [\,pva_1] = 0 \\ [\,pva_2] = 0 \\ \dots\dots\dots\dots.. \\ [\,pva_k] = 0 \end{array}\right\}. \qquad (11.18)$$

Звернемося тепер до складання системи нормальних рівнянь. Для цього повернемось до розгорнутого запису $[\,pa_1v]$:

$$[\,pa_1v] = p_1a_{11}v_1 + p_2a_{21}v_2 + \dots + p_na_{n1}v_n = ,$$

тепер замість v_i підставимо їхні праві частини з (11.15):

$$= p_1a_{11}\,(a_{11}\tau_1 + \dots + a_{1k}\tau_k + l_1) + p_2a_{21}\,(a_{21}\tau_1 + \dots +$$

$$+ a_{2k}\tau_k + l_2) + \dots + p_na_{n1}\,(a_{n1}\tau_1 + \dots + a_{nk}\tau_k + l_n) =$$

$$= p_1a_{11}\,a_{11}\tau_1 + \dots + p_1a_{11}a_{1k}\tau_k + p_1a_{11}l_1 + p_2a_{21}\,a_{21}\tau_1 + \dots +$$

$$+p_2a_{21}a_{2k}\tau_k + p_2a_{21}l_2 + \dots + p_na_{n1}a_{nk}\tau_k + p_na_{n1}l_n =$$
$$= \tau_1(p_1a_{11}\,a_{11} + p_2a_{21}a_{21} \dots + p_na_{n1}a_{n1}) + \dots +$$
$$+\tau_k(p_1a_{11}\,a_{1k} + p_2a_{21}a_{2k} \dots + p_na_{n1}a_{nk}) + l_i(p_1a_{11} + p_2a_{21} + \dots + p_na_{n1}) =$$
$$= [pa_1\,a_1]\tau_1 + \dots + [pa_1\,a_k]\tau_k + [pa_1]l_i.$$

Зробивши аналогічні підстановки і призведши подібні в решті рівнянь, отримаємо систему нормальних рівнянь, в якої k рівнянь і k невідомих τ_j:

$$\begin{gathered}[pa_1\,a_1]\tau_1 + [pa_1\,a_2]\tau_2 \dots + [pa_1\,a_k]\tau_k + [pa_1 l] = 0\\ [pa_1\,a_2]\tau_1 + [pa_2\,a_2]\tau_2 \dots + [pa_2\,a_k]\tau_k + [pa_2 l] = 0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ [pa_1\,a_k]\tau_1 + [pa_2\,a_k]\tau_2 \dots + [pa_k\,a_k]\tau_k + [pa_k l] = 0.\end{gathered} \qquad (11.19)$$

Розв’язавши систему нормальних рівнянь, отримаємо поправки параметрів τ_j, а потім поправки v_i.

Для контроля обчислень використовують рівняння (11.6):

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k), \;\; j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n}\,.$$

Порядок розв’язання задач параметричним методом наступний.

Перед усім, необхідно усе виміри призвести до зручних одиниць вимірювань. Для обчислення ваг обирають постійний коефіцієнт так, щоб усі p_i були близькими до одиниці.

Параметри t_j обирають так, щоб через них виражалися усі виміряні величини та щоб вони були незалежними один від одного. Такими параметрами можуть бути як виміряні, так і невиміряні величини.

1. Усі виміряні величини виражають функціями (11.6):

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \dots, t_k), \;\; j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n}\,,$$

де $x_i' = x_i + v_i$ – зрівнюване значення;

v_i – поправки до виміряних значень x_i, отримані із зрівнювання.

2. Знаходять наближені значення параметрів t_j^0, причому, число їхніх десяткових знаків має дорівнювати числу десяткових знаків їхніх зрівнюваних значень. Беруть похідні та визначають коефіцієнти і вільні члени виразу (11.15)

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i, \quad j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n}\,,$$

розмірності t мають бути такими, щоб коефіцієнти рівнянь поправок були близькими до одиниці.

3. Складають систему нормальних рівнянь (11.19)

$$\begin{gathered}[pa_1\,a_1]\tau_1 + [pa_1\,a_2]\tau_2 \dots + [pa_1\,a_k]\tau_k + [pa_1 l] = 0\\ [pa_1\,a_2]\tau_1 + [pa_2\,a_2]\tau_2 \dots + [pa_2\,a_k]\tau_k + [pa_2 l] = 0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ [pa_1\,a_k]\tau_1 + [pa_2\,a_k]\tau_2 \dots + [pa_k\,a_k]\tau_k + [pa_k l] = 0,\end{gathered}$$

в результаті розв’язання якої отримаємо поправки параметрів τ_j, а потім поправки v_i.

4. Обчислюють поправки до зрівнюваних значень виміряних величин v_i, використовуючи вираз (11.15).

5. Контролюють результати розрахунків, для чого перевіряють виконання рівностей (11.6)

$$x_i + v_i = f_i(t_1, \ldots, t_k), \;\; j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n} \,.$$

Задача 11.1

У трикутнику, в якому відомі координати пункту А, сторона с та її дирекційний кут α_{AB}, рівноточно виміряні кути X_1, X_2, X_3 для визначення розташування вершини С (рис. 11.2) і отримані результати вимірювань x_1, x_2, x_3.

Розв'язання

Для рішення трикутника з відомою стороною необхідно мати два кути. Оскільки виміряні три кути, які пов'язані рівнянням

$$x_1' + x_2' + x_3' = 180^0,$$

виникає задача зрівнювання, для розв'язання якої маємо одно рівняння зв'язку і три невідомих, для яких потрібно обчислити поправки v_i, тобто число змінних n = 3, число рівнянь r = 1.

Для обчислення 3 невідомих потрібно мати 3 незалежних рівняння, отже потрібно ввести k = n – r = 3 – 1 = 2 параметра.

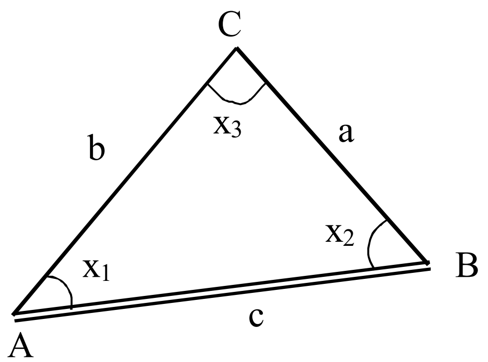


Рисунок 11.2 – Вимірюваний трикутник

1. Виберемо параметри t, їхня кількість повинна дорівнювати k = 2. Як такі параметри приймаємо дирекційні кути напрямів АС і ВС, тобто:

$$\alpha_{AC} = t_1;$$

$$\alpha_{BC} = t_2.$$

Дирекційні кути α_{AC} і α_{BC} не залежать один від одного.

Усі змінні x_i, що виміряні, виразимо через параметри t_1 і t_2:

$x_1' = \alpha_{AB} - t_1$ – дирекційний кут АВ (відомий) мінус дирекційний кут напряму АС;

$x_2' = t_2 - \alpha_{AB} \pm 180^0$ – дирекційний кут ВС мінус дирекційний кут АВ (відомий) і плюс-мінус 180^0;

$x_3' = t_1 - t_2$.

Або маємо систему умовних рівнянь:

$$\left.\begin{array}{c} x_1' = \alpha_{AB} - t_1 \\ x_2' = t_2 - \alpha_{AB} \pm 180^0 \\ x_3' = t_1 - t_2 \end{array}\right\}.$$

2. З отриманої системи рівнянь визначимо наближені значення параметрів t_j^0, для чого підставимо виміряні значення x_i:

$$t_1^0 = \alpha_{AB} - x_1;$$

$$t_2^0 = \alpha_{AB} \pm 180^0 - x_2.$$

Обчислимо коефіцієнти a_{ij} і вільні члени l_i рівнянь поправок з (11.13) та (11.14)

$$\left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 = a_{i1}; \dots ; \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 = a_{ik} .$$

$$f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) - x_i = x_i^0 - x_i = l_i \ .$$

– для першого рівняння отримаємо:

$$\left(\frac{\partial x_1'}{\partial t_1}\right)_0 = (\alpha_{AB} - t_1)' = -1 = a_{11};$$

$$\left(\frac{\partial x_1'}{\partial t_2}\right)_0 = (\alpha_{AB} - t_1)' = 0 = a_{12};$$

$$l_1 = \alpha_{AB} - t_1^0 - x_1 = \alpha_{AB} - \alpha_{AB} + x_1 - x_1 = 0 \ ;$$

– для другого рівняння

$$a_{21} = \left(\frac{\partial x_2'}{\partial t_1}\right)_0 = (t_2 - \alpha_{AB} \pm 180^0)' = 0;$$

$$a_{22} = \left(\frac{\partial x_2'}{\partial t_2}\right)_0 = (t_2 - \alpha_{AB} \pm 180^0)' = 1;$$

$$l_2 = t_2^0 - \alpha_{AB} \pm 180^0 - x_2 = \alpha_{AB} \pm 180^0 + x_2 - \alpha_{AB} \pm 180^0 - x_2 = 0 \ ;$$

для третього рівняння

$$a_{31} = \left(\frac{\partial x_3'}{\partial t_1}\right)_0 = (t_1 - t_2)' = 1;$$

$$a_{32} = \left(\frac{\partial x_3'}{\partial t_2}\right)_0 = (t_1 - t_2)' = -1;$$

$$l_3 = f_3 - x_3 = t_1^0 - t_2^0 - x_3 = \alpha_{AB} \pm 180^0 + x_2 - \alpha_{AB} \pm 180^0 - x_2 = 0 \ .$$

3. Тепер складемо систему нормальних рівнянь. Для цього потрібно перед усім визначити коефіцієнти і вільні члени рівнянь системи. Тому запишемо параметричні рівняння поправок (11.15)

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i, \quad j = \overline{1,k}, i = \overline{1,n} \ .$$

$$v_1 = -\tau_1;$$

$$v_2 = \tau_2;$$

$$v_3 = \tau_1 - \tau_1 = W.$$

Обчислимо коефіцієнти і вільні члени нормальних рівнянь, кількість яких дорівнює 2:

$$[a_1a_1] = 2;\ [a_1a_2] = -1;\ [a_1l_1] = W;\ \ [a_2a_2] = 2;\ [a_2l_1] = +W;$$

і запишемо систему нормальних рівнянь:

$$2\tau_1 - \tau_2 - W = 0;$$
$$-\tau_1 - 2\tau_2 + W = 0.$$

Додаємо рівняння одно до одного та отримаємо:

$$\tau_1 + \tau_2 = 0,$$

звідки $\tau_2 = -\tau_1$.

Тепер, додаємо до першого нормального рівняння вираз $\tau_1 + \tau_2 = 0$, отримаємо

$$\begin{array}{r} 2\tau_1 - \tau_2 - W = 0 \\ \tau_1 + \ \ \tau_2 \qquad = 0 \\ \hline 3\tau_1 \qquad - W = 0 \end{array},$$

звідки

$$\tau_1 = \frac{W}{3}$$

і, враховуючи $\tau_2 = -\tau_1$, маємо $\tau_2 = -\frac{W}{3}$.

Тепер підставимо τ_1 і τ_2 до рівняння поправок v_i,

$$v_1 = -\frac{W}{3};$$
$$v_2 = -\frac{W}{3};$$
$$v_3 = \frac{W}{3} - \left(-\frac{W}{3}\right) - W = \frac{2W}{3} - \frac{3W}{3} = -\frac{W}{3}.$$

Таким чином, нев’язка трикутника у випадку рівноточних вимірювань повинна бути розподілена на три кути трикутника нарівно із протилежним знаком.

Задача 11.2

Вирішити попередню задачу 11.1, вважаючи, що вимірювання нерівноточні і ваги вимірювань відповідно дорівнюють p_1, p_2, p_3.

Розв’язання

Рівняння поправок будуть такими самими, як і в попередній задачі, але під час складання системи нормальних рівнянь потрібно врахувати ваги вимірювань.

Отримаємо

$v_1 = -\tau_1$ із вагою p_1;

$v_2 = +\tau_1$ із вагою p_2;

$$v_3 = +\tau_1 - \tau_2 - W \text{ із вагою } p_3.$$

Коефіцієнти нормальних рівнянь будуть наступними:

$$[pa_1a_1] = (p_1 + p_3);$$
$$[pa_1l] = -p_3W;$$
$$[pa_2a_2] = (p_2 + p_3);$$
$$[pa_2l] = +p_3W.$$

Напишемо систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}(p_1 + p_3)\tau_1 - p_3\tau_2 - p_3W = 0\\ -p_3\tau_1 + (p_2{+}p_3)\tau_2 + p_3W = 0\end{aligned}\right\}.$$

Додаємо рівняння одне до одного та отримаємо

$$p_1\tau_1 + p_2\tau_2 = 0,$$

звідки

$$\tau_2 = -\frac{p_1}{p_2}\tau_1.$$

Розділимо перше рівняння на p_3 та підставимо до нього вираз для τ_2:

$$\left(\frac{p_1}{p_3} + 1\right)\tau_1 - \tau_2 - W = \left(\frac{p_1}{p_3} + 1\right)\tau_1 + \frac{p_1}{p_2}\tau_1 - W =$$
$$= \left(\frac{p_1}{p_1} + \frac{p_1}{p_2} + \frac{p_1}{p_3}\right)\tau_1 - W = 0.$$

Введемо позначення:

$$\frac{1}{p_1} = q_1; \quad \frac{1}{p_2} = q_2; \quad \frac{1}{p_3} = q_3;$$
$$q_1 + q_2 + q_3 = \sum q;$$

величини q називають зворотними вагами.

Тепер отримаємо

$$\frac{\sum q}{p_1}\tau_1 = W,$$

звідки,

$$\tau_1 = \frac{q_1}{\sum q}W,$$

а тоді

$$\tau_2 = -\frac{q_2}{q_1}\cdot\frac{q_1}{\sum q}W.$$

Обчислимо поправки та кути

$$v_1 = -\frac{q_1}{\sum q}W;$$
$$v_2 = -\frac{q_2}{\sum q}W;$$
$$v_3 = -\frac{q_3}{\sum q}W,$$

тобто поправки у кути трикутника за нерівноточних вимірів розподіляються пропорційно зворотним вагам вимірювань.

Задача 11.3

Виміряні три кути X_1, X_2, X_3, що утворені трьома напрямками (рис. 11.3), і отримані результати вимірювань x_1 із вагою p_1, x_2 із вагою p_2 та x_3 із вагою p_3. Визначити взаємне розташування трьох напрямів.

Розв'язання

Для визначення взаємного розташування трьох напрямів необхідно знати два кути. Тому як необхідні невідомі (параметри t) виберемо кути $t_1 = x_1'$ і $t_2 = x_2'$. Параметричні рівняння зв'язку мають вигляд:

$$x_1' = t_1;$$
$$x_2' = t_2;$$
$$x_3' = t_1 + t_2.$$

Наближені значення t_j приймаємо рівними їхнім виміряним значенням

$$t_1^0 = x_1;$$
$$t_2^0 = x_2.$$

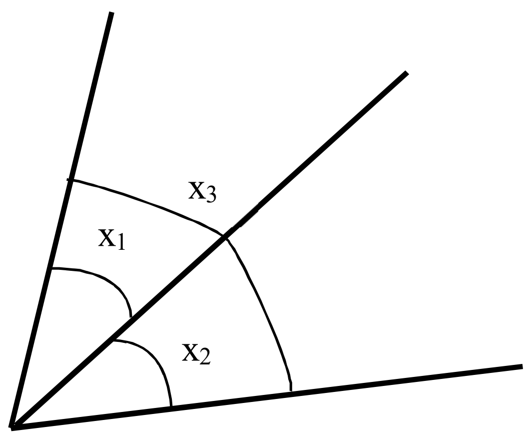


Рисунок 11.3 – Розташування трьох напрямів

Обчислимо коефіцієнти та вільні члени рівнянь поправок із (11.13) та (11.14)

$$\left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_1}\right)_0 = a_{i1}; \dots; \left(\frac{\partial x_i'}{\partial t_k}\right)_0 = a_{ik}\ .$$

$$f_i(t_1^0, \dots, t_k^0) - x_i = x_i^0 - x_i = l_i\ .$$

отримаємо

$$l_1 = t_1^0 - x_1 = 0;$$
$$l_2 = t_2^0 - x_2 = 0;$$
$$l_3 = t_1^0 + t_2^0 - x_3 = x_1 + x_2 - x_3.$$

Запишемо рівняння поправок

$v_1 = +\tau_1$ з вагою p_1;

$v_2 = +\tau_2$ з вагою p_2;

$v_3 = +\tau_1 + \tau_2 + l_3$ з вагою p_3.

З врахуванням ваг отримаємо нормальні рівняння

$$\left.\begin{aligned}(p_1 + p_3)\tau_1 + p_3\tau_2 + p_3 l_3 = 0\\ p_3\tau_1 + (p_2 + p_3)\tau_2 + p_3 l_3 = 0\end{aligned}\right\}.$$

Віднімемо друге рівняння від першого

$$p_1\tau_1 - p_2\tau_2 = 0,$$

звідки

$$\tau_2 = \frac{p_1}{p_2}\tau_1.$$

Розділимо перше нормальне рівняння на p_3, підставимо вираз для τ_2 та отримаємо

$$\left(\frac{p_1}{p_3}+1\right)\tau_1+\tau_2+l_3=\left(\frac{p_1}{p_3}+1\right)\tau_1+\frac{p_1}{p_2}\tau_1+l_3=0.$$

Після перетворень отримаємо

$$\left(\frac{p_1}{p_1}+\frac{p_1}{p_2}+\frac{p_1}{p_3}\right)\tau_1+l_3=0.$$

Введемо зворотні ваги $\frac{1}{p_1}=q_1;\ \ \frac{1}{p_2}=q_2;\ \ \ \frac{1}{p_3}=q_3$, отримаємо

$$\tau_1=\frac{-q_1}{\sum q}l_3;$$

$$\tau_2=-\frac{q_2}{q_1}\cdot\frac{q_1}{\sum q}l_3=-\frac{q_2}{\sum q}l_3;$$

і, нарешті, визначимо поправки до результатів вимірювань

$$v_1=-\frac{q_1}{\sum q}l_3;$$

$$v_2=-\frac{q_2}{\sum q}l_3;$$

$$v_3=+\frac{q_3}{\sum q}l_3,$$

де $l_3=x_1+x_2-x_3$.

Задача 11.4

В трикутнику дана сторона AB = c = 1000 м, та виміряні решті дві сторони і три кути. Потрібно знайти зрівнювані значення виміряних величин (рис. 11.4).

Розв'язання

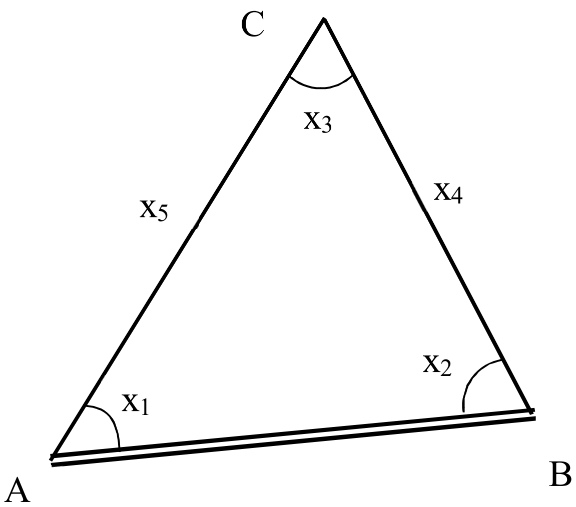


Рисунок 11.4 – Виміряний трикутник

Кути виміряні із середньою квадратичною похибкою m = 10′′.

Середні квадратичні похибки вимірювання сторін відповідають співвідношенню

$$m_i^{\text{см}}=\frac{s_i^{\text{см}}}{30000}+2\text{ см}.$$

Отримані результати вимірювань:

x_1=46°25′13′′;

x_2=68°01′25′′;

x_3=65°33′07′′;

x_4=795,881 м;

x_5=1018,660 м.

Обчислимо середні квадратичні похибки вимірювання сторін

$$m_4^{\text{см}} = \frac{79588 \text{ см}}{30000} + 2 \text{ см} = 4{,}6 \text{ см};$$

$$m_5^{\text{см}} = \frac{101866 \text{ см}}{30000} + 2 \text{ см} = 5{,}4 \text{ см}.$$

Ваги обчислимо за формулою:

$$p_i = \left(\frac{10}{m_i}\right)^2,$$

тоді ваги кутів будуть:

$p_1 = p_2 = p_3 = 1\frac{1}{('')^2}$ (тут розмірність – одиниця на секунду у квадраті).

Виразимо середні квадратичні похибки сторін у сантиметрах та отримаємо

$$p_4 = \left(\frac{10}{4{,}6 \text{ см}}\right)^2 = 4{,}7\ \frac{1}{(\text{см})^2};$$

$$p_5 = \left(\frac{10}{5{,}4 \text{ см}}\right)^2 = 3{,}4\ \frac{1}{(\text{см})^2}.$$

Виражати середні квадратичні похибки сторін не у сантиметрах, а в інших одиницях, недоцільно, оскільки ваги при цьому будуть або дуже малі, або, навпаки, дуже великі.

Помітимо, що у подальших обчисленнях усі лінійні величини мають виражатися також у сантиметрах.

Як параметри найзручніше обрати два кути X_1 та X_2 (для рішення трикутника, в якому відома одна сторона, необхідно мати дві виміряні величини).

Покладемо

$$t_1 = x_1';$$
$$t_2 = x_2'.$$

Далі виразимо усі виміряні величини як функції параметрів

$$x_1' = t_1;$$
$$x_2' = t_2;$$
$$x_3' = 180° - t_1 - t_2;$$
$$x_4' = c\frac{\sin t_1}{sin(180° - t_1 - t_2)} = c\frac{\sin x_1'}{\sin x_3'};$$
$$x_5' = c\frac{\sin t_2}{sin(180° - t_1 - t_2)} = c\frac{\sin x_2'}{\sin x_3'}.$$

Тепер обчислимо наближені значення невідомих. Для їхнього уточнення спочатку визначимо нев’язку трикутника, а потім розподілимо її із протилежним знаком на три кути трикутника (таблиця 11.1).

Нев’язка становить

180° – 46°25′13″ – 68°01′25″ – 65°33′07″ = 180° – 179°59′45″ = 15″.

Таблиця 11.1 – Результати розрахунків

Кут	Результат вимірювання	Поправка (допоміжна)	Виправлений кут
X_1 X_2 X_3	46°25′13″ 68°01′25″ 65°33′07″	+5″ +5″ +5″	46°25′18″ 68°01′30″ 65°33′12″
Σ W	179°59′45″ –15	+15″	180°00′00″

Тепер приймемо $t_1^0 = 46°25'18''$, $t_2^0 = 68°01'30''$, звідки

$$180° - t_1^0 - t_2^0 = 65°33'12''.$$

Далі обчислимо вільні члени усіх рівнянь поправок та коефіцієнти останніх двох рівнянь (коефіцієнти решти рівнянь є очевидними) у відповідності із формулами (11.13) та (11.14)

$$l_1 = 180° - t_1^0 - x_1 = 46°25'18'' – 46°25'13'' = +5'';$$

$$l_2 = t_2^0 - x_2 = 68°01'30'' – 68°01'25'' = +5'';$$

$$l_3 = 180° - t_1^0 - t_2^0 - x_3 = 65°33'12'' – 65°33'07'' = +5'';$$

$$l_4^{\text{см}} = 100000\frac{\sin 46°25'18''}{\sin 65°33'12''} - 79588{,}1 = 79577{,}6 - 79588{,}1 = -10{,}5 \text{ см};$$

$$l_5^{\text{см}} = 100000\frac{\sin 68°01'30''}{\sin 65°33'12''} - 101866{,}0 = 101867{,}5 - 101866{,}0 = +1{,}5 \text{ см};$$

$$\frac{\partial x_4'}{\partial t_1} = c\frac{\cos t_1 \cdot \sin(t_1+t_2) - \sin t_1 \cdot \cos(t_1+t_2)}{\sin^2(t_1+t_2)} =$$

$$= c\frac{\sin t_2}{\sin^2 x_3'} = c\frac{\sin x_2'}{sin\, x_3'} \cdot \frac{1}{sin\, x_3'} = \frac{x_5'}{sin\, x_3'}.$$

$$\frac{\partial x_4'}{\partial t_2} = c\frac{-sin\, t_1 \cdot \cos(t_1+t_2)}{\sin^2 x_3'} = c\frac{sin\, t_1 \cdot \cos(180° - t_1 - t_2)}{\sin^2 x_3'} =$$

$$= c\frac{\sin x_1'}{sin\, x_3'} \cdot \frac{\cos x_3'}{sin\, x_3'} = \frac{x_1'}{\operatorname{tg} x_3'}.$$

$$\frac{\partial x_5'}{\partial t_1} = c\frac{-sin\, t_2 \cdot \cos(t_1+t_2)}{\sin^2 x_3'} = c\frac{\sin x_2'}{sin\, x_3'} \cdot \frac{\cos x_3'}{sin\, x_3'} = \frac{x_5'}{\operatorname{tg} x_3'}$$

$$\frac{\partial x_5'}{\partial t_2} = c\frac{cos\, t_2 \cdot \sin(t_1+t_2) - \sin t_2 \cdot cos(t_1+t_2)}{\sin^2 x_3'} =$$

$$= c\frac{\sin t_1}{sin\, x_3'} \cdot \frac{1}{sin\, x_3'} = \frac{x_4'}{\sin x_3'}.$$

Напишемо тепер одно з рівнянь поправок для лінійних вимірювань

$$v_4^{\text{см}} = \left(\frac{\partial x_4'}{\partial t_1}\right)_0 \cdot \tau_1 + \left(\frac{\partial x_4'}{\partial t_2}\right)_0 \cdot \tau_2 + l_4^{\text{см}}.$$

Оскільки диференціювання виконується за кутовими аргументами, що виражені тільки у радіанній мірі, а поправки τ практично виражаються у секундах, то останнє рівняння слід записати так:

$$v_4^{\text{см}} = \left(\frac{\partial x_4'}{\partial t_1}\right)_0 \cdot \frac{\tau''}{\rho''} + \left(\frac{\partial x_4'}{\partial t_2}\right)_0 \cdot \frac{\tau''}{\rho''} + l_4^{\text{см}}.$$

Тепер отримаємо при поправках τ'' наступні коефіцієнти поправок для лінійних вимірювань:

$$a_{41} = \frac{x_5^{\text{см}}}{\rho''} cosec\, x_3 = \frac{101866}{206265} cosec\, 65°33' = +0{,}54;$$
$$a_{42} = \frac{x_4^{\text{см}}}{\rho''} ctg\, x_3 = \frac{79588}{206265} ctg\, 65°33' = +0{,}18;$$
$$a_{51} = \frac{x_5^{\text{см}}}{\rho''} ctg\, x_3 = \frac{101866}{206265} ctg\, 65°33' = +0{,}22;$$
$$a_{52} = \frac{x_4^{\text{см}}}{\rho''} cosec\, x_3 = \frac{79588}{206265} cosec\, 65°33' = +0{,}42.$$

Напишемо нормальні рівняння:

$$\left.\begin{aligned} 3{,}54\,\tau_1 + 1{,}77\,\tau_2 - 25{,}54 = 0 \\ 1{,}77\,\tau_1 + 2{,}75\,\tau_2 - 6{,}78 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Для розв’язання отриманої системи скористаємось табличним процесором MS Excel. Формула для обчислення коренів має вигляд

=МУМНОЖ(МОБР(A2:B3);D2:D3),

де (A2:B3) – матриця А (матриця коефіцієнтів при змінних);

МОБР(A2:B3) – функція обернення матриці коефіцієнтів при змінних – перший аргумент функції МУМНОЖ;

D2:D3 – матриця вільних членів, передбачається, що вони знаходяться у правих частинах рівнянь системи після знаку рівності – другий аргумент функції МУМНОЖ.

Для розв’язання системи рівнянь в таблицю MS Excel слід внести масив коефіцієнтів рівнянь, виділити комірки, в яких буде розміщено розв’язок (у нас B5:B6) та натиснути комбінацію клавіш ctrl+shift+enter (рис. 11.5)

Для контроля правильності обчислень підставимо отримані значення τ_1 і τ_2 у систему нормальних рівнянь:

$$(3{,}54 + 1{,}77)\,\tau_1 + (1{,}77 + 2{,}75)\,\tau_2 - (25{,}54 + 6{,}78) = 0;$$
$$5{,}31 * 8{,}8206 + 4{,}52 * (-3{,}212) - 32{,}32 = 0,$$

звідки зрозуміло, що отримані значення $\tau_1 = 8{,}8206$ і $\tau_2 = -3{,}212$ задовольняють системі нормальних рівнянь.

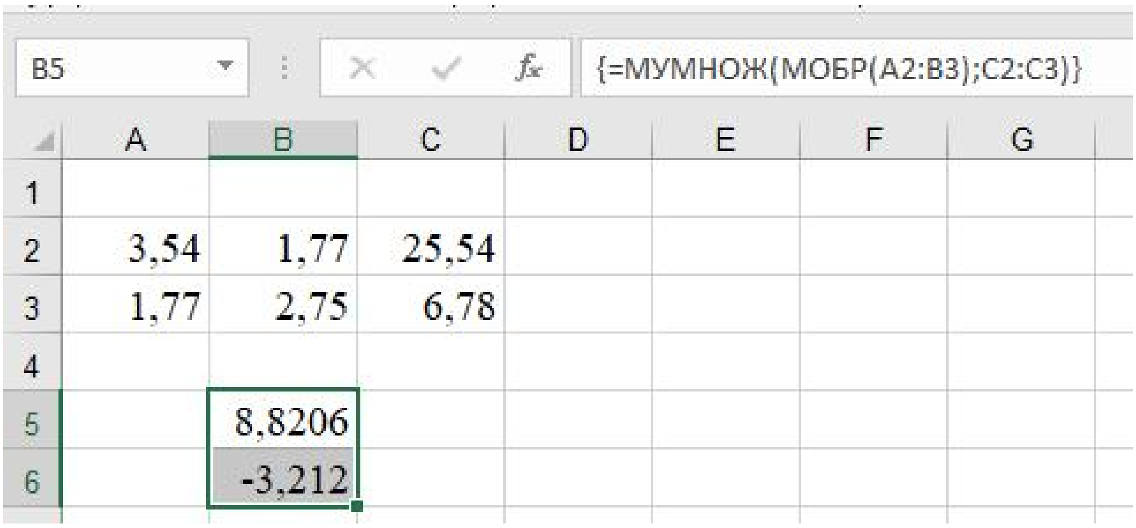


Рисунок 11.5 – Розв'язок системи нормальних рівнянь

Практичне заняття 12
КОРЕЛАТНИЙ МЕТОД ЗРІВНЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ПОБУДОВ

Мета – закріплення теоретичних положень методу найменших квадратів, формування навичок із складання умовних рівнянь, нормальних рівнянь корелат та зрівнювання геодезичних мереж корелатним методом.

Основні відомості

Сутність зрівнювання корелатним способом полягає у тому, що задачу знаходження мінімуму функції $[pv^2]$ розв'язують методом Лагранжа, для чого вводять допоміжні множники Лагранжа для незалежних умовних рівнянь.

Нехай виміряні n величин $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n}$, що пов'язані одна з одною незалежними умовними рівняннями

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) = 0 \\ \varphi_2(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ \varphi_\mathrm{r}(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}) = 0 \end{aligned}\right\} . \qquad (12.1)$$

Рівняння (12.1) завжди треба подавати так, щоб у правих частинах стояли нулі.

Нехай для величин X_i отримані результати вимірювань x_1, x_2, …, x_n з вагами відповідно p_1, p_2,…, p_n.

Оскільки всі вимірювання x_i містять похибки вимірів, то при їхній підстановці у ліві частини умовних рівнянь в правих їхніх частинах, як правило, виходять не нулі, а нев'язкі W_j, що є істинними похибками функцій φ_1, φ_2, …, φ_r.

Відповідні рівності мають вигляд

$$\varphi_j(x_1,\ x_2,\dots,x_n) = W_j, \qquad (j = \overline{1,r})\ . \qquad (12.2)$$

Під час зрівнювання, перед усім, ставлять вимогу усунення усіх нев’язок. Тому виправлені результаті вимірювань мають задовольнити рівності

$$\varphi_j(x_1 + v_1,\dots,x_n + v_n) = 0, \qquad (j = \overline{1,r})\ . \qquad (12.3)$$

Як відомо, з усієї множини можливих рішень невизначеної системи (12.3) обирають те, за якого $[pv^2]$ приймає найменше значення.

В математичному сенсі поставлену задачу формулюють наступним чином:

$$[pv^2] = min,$$

за умови, що змінні v_1, v_2,…, v_n пов’язані одна з одною рівняннями (12.3). Цю задачу на умовний екстремум у корелатному способі розв’язують за правилами Лагранжа за допомогою невизначених множників умовних рівнянь.

Зауважимо, що в параметричному способі ця сама задача на умовний екстремум розв’язується за допомогою допоміжних незалежних змінних, які дозволяють перейти від пошуку умовного екстремуму до пошуку безумовного екстремуму.

Для системи (12.3) функція Лагранжа матиме вигляд

$$\Phi(v_1,\dots,v_n) = pv^2 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_r\varphi_r,$$

де $\varphi_j = \varphi_j(x_1 + v_1,\dots,x_n + v_n) = 0, (j = \overline{1,r})$ та $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_r\varphi_r = 0$.

Введення r невизначених множників $\lambda_1,\ \lambda_2,\dots,\lambda_r$ дозволяє розглядати функцію Лагранжа як функцію незалежних змінних. Тоді шукані значення поправок v_i мають задовольняти рівності виду

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_i} = 0 \qquad (i = \overline{1,n}). \qquad (12.4)$$

Приєднавши до рівностей (12.4) рівності (12.3), отримуємо n + r рівнянь із n + r невідомими (поправками v_1, v_2,…, v_n та невизначеними множниками $\lambda_1,\ \lambda_2,\dots,\lambda_r$).

Такою є схема розв’язання задачі.

У випадку, коли умовні рівняння є нелінійними, задача стає практично нерозв’язуваною. Проте, нелінійну функцію можна лінеаризувати шляхом її розкладання у ряд Тейлора. Отже, рівності (12.4) розкладають у ряд Тейлора та, скориставшись тим, що поправки v завжди малі, нехтують членами розкладання порядку вище за перший або другий.

Для функцій φ_i можна записати:

$$\varphi_j(x_1 + v_1,\dots,x_n + v_n) = \varphi_j(x_1,\dots,x_n) + \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_1}\right)_0 v_1 + \cdots + \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_n}\right)_0 v_n.$$

Позначимо

$$\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)_0 = a_{ij} \qquad (12.5)$$

та отримаємо (12.2) у вигляді:

$$a_{1j}v_1 + \cdots + a_{nj}v_n + W_j = 0.$$

Або у вигляді системи

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}v_1 + \cdots + a_{n1}v_n + W_1 = 0 \\ a_{12}v_1 + \cdots + a_{n2}v_n + W_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ a_{1r}v_1 + \cdots + a_{nr}v_n + W_r = 0 \end{array}\right\}, \qquad (12.6)$$

а також у вигляді скороченого запису

$$\left.\begin{array}{r} [a_1v] + W_1 = 0 \\ [a_2v] + W_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ [a_rv] + W_r = 0 \end{array}\right\}. \qquad (12.7)$$

Рівності (12.6) і (12.7) називають умовними рівняннями поправок. Нев'язкі W_j є вільними членами цих рівнянь.

Якщо умовні рівняння є лінійними, то їх розкладання у ряд Тейлора не потрібне.

Тепер задача сформулюється наступним чином. Треба знайти мінімум функції $[pv^2]$, якщо змінні v пов'язані одна з одною рівняннями (12.6).

Для зручності обчислень множники Лагранжа позначають наступним чином:

$$\lambda_1 = -2k_1,\ \lambda_2 = -2k_2\ ,\ \ldots,\ \lambda_r = -2k_r\ .$$

Множники $k_1, k_2\ , \ldots, k_r$ називають корелатами.

Функція Лагранжа тепер має вигляд:

$$\Phi(v_1, \ldots, v_n) = [pv^2] - 2k_1([a_1v] + W_1) - \cdots - 2k_r([a_rv] + W_r)\ .$$

Далі напишемо її похідну

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_i} = 2p_iv_i - 2k_1a_{i1} - 2k_2a_{i2} - \cdots - 2k_ra_{ir} = 0,$$

звідки отримаємо

$$v_i = q_ia_{i1}k_1 + q_ia_{i2}k_2 + \cdots + q_ia_{ir}k_r, \qquad (12.8)$$

де qi – зворотні ваги $q_i = \frac{1}{p_i}$.

Або v_i можна виразити інакше:

$$v_i = \frac{a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \cdots + a_{ir}k_r}{p_i}\ . \qquad (12.9)$$

Рівності (12.8) і (12.9) називають корелатними рівняннями поправок. З цих рівностей можна визначити шукані поправки v_i за відомими корелатами k_j.

Визначимо корелати. Напишемо систему (12.8)

$$v_i = q_ia_{i1}k_1 + q_ia_{i2}k_2 + \cdots + q_ia_{ir}k_r$$

і, помножуючи усі рівності одну за одною на $a_{i1},\ a_{i2}, \ldots, a_{ir}$ та кожен раз додаючи їх, отримаємо

$$\left.\begin{array}{c}[a_1v] = [qa_1a_1]k_1 + [qa_1a_2]k_2 + \cdots + [qa_1a_r]k_r \\ [a_2v] = [qa_1a_2]k_1 + [qa_2a_2]k_2 + \cdots + [qa_2a_r]k_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ [a_rv] = [qa_1a_r]k_1 + [qa_2a_r]k_2 + \cdots + [qa_ra_r]k_r\end{array}\right\}, \qquad (12.10)$$

враховуючи тепер рівності (12.7), отримуємо

$$\left.\begin{array}{c}[qa_1a_1]k_1 + [qa_1a_2]k_2 + \cdots + [qa_1a_r]k_r + W_1 = 0 \\ [qa_1a_2]k_1 + [qa_2a_2]k_2 + \cdots + [qa_2a_r]k_r + W_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ [qa_1a_r]k_1 + [qa_2a_r]k_2 + \cdots + [qa_ra_r]k_r + Wr = 0\end{array}\right\}. \qquad (12.11)$$

Очевидно, що система (12.11) являє собою систему нормальних рівнянь корелат, у якій число рівнянь r дорівнює числу невідомих. Отримавши розв’язок цієї системи, з рівностей (12.9) визначають шукані поправки та результати вимірів.

Порядок розв’язання задачі зрівнювання корелатним способом наступний.

1. Встановлюють систему результатів вимірів $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ та їхні ваги p_1, $p_2, \ldots, p_n$, так само, як і в параметричному способі.

2. Вибирають і складають умовні рівняння (12.1). Необхідно, щоб умовні рівняння задовольняли наступним вимогам:

– рівняння мають бути незалежними, тобто жодне з них не має бути наслідком іншого;

– число умовних рівнянь має дорівнювати r = n – k.

3. За формулами (12.2) і (12.5) обчислюють вільні члени і коефіцієнти умовних рівнянь поправок. Одночасно, як і при складанні параметричних рівнянь поправок, необхідно привести коефіцієнти і поправки в умовних рівняннях до величин одного порядку, вводячи відповідні розмірності для функцій φ.

4. Обчислюють коефіцієнти нормальних рівнянь корелат.

5. Розв’язують нормальні рівняння, в результаті чого отримують корелати k.

6. Обчислюють поправки v за формулами (12.9).

7. Обчислюють зрівнювані значення вимірюваних величин $x_i' = x_i + v_i$, після чого виконують контрольні обчислення, які полягають у підстановці зрівнюваних значень до умовних рівнянь (12.3).

Задача 12.1

В трикутнику, в якому відомі координати пункту А, сторона c та її дирекційний кут α_{AB}, рівноточно виміряні кути X_1, X_2, X_3 для визначення розташування вершини С (рис. 11.2) і отримані результати вимірювань x_1, x_2, x_3. Потрібно знайти зрівнювані значення кутів.

Розв'язання

1. Для вирішення трикутника з відомою стороною необхідно мати два кути. Оскільки виміряні три кути, що пов'язані рівнянням

$$X_1 + X_2 + X_3 = 180^0,$$

виникає задача зрівнювання, для розв'язання якої є один надлишковий вимір. Зауважимо, що *кожний новий додатковий вимір породжує умовне рівняння*.

Умовним рівнянням називають будь-яке математичне співвідношення, що пов'язує істинні значення вимірюваних величин.

Оскільки усі виміри x_i містять похибки вимірів, то за їхньої підстановці до лівої частини рівняння зв'язку у правій його частині буде не нуль, а нев'язка w. Перепишемо рівність відповідно до (12.2)

$$x_1 + x_2 + x_3 - 180^0 = w_1.$$

Виправлені результати вимірів мають задовольняти рівностям (12.3)

$$\varphi_1(x_1 + v_1 + x_2 + v_2 + \ x_3 + v_3) = 0, \quad (j = \overline{1,r}) \ .$$

2. Складемо умовне рівняння поправок у вигляді (12.6)

$$a_{1j}v_1 + \cdots + a_{nj}v_n + w_j = 0,$$

або

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0,$$

його можна подати в виде скороченого запису (12.7)

$$[v] + w = 0.$$

Отримана рівність – умовне рівняння поправок, а нев'язка w є його вільним членом.

Задача сформулюється наступним чином. Треба знайти мінімум функції $[pv^2]$, за умови, що змінні v_i пов'язані одна з одною умовним рівнянням поправок.

Нагадаємо, що множники Лагранжа позначають наступним чином:

$$\lambda_1 = -2k_1, \lambda_2 = -2k_2 \,, \dots, \lambda_r = -2k_r \,,$$

де $k_1, k_2 \,, \dots, k_r$ називають корелатами.

Запишемо функцію Лагранжа:

$$\Phi(v_1, \dots, v_n) = [pv^2] - 2k_1([a_1 v] + W_1) - \cdots - 2k_r([a_r v] + W_r) \,,$$

або

$$\Phi(v_1, v_2, v_3) = [v^2] - 2k([v] + W).$$

Візьмемо часткові похідні від функції Лагранжа за v_i до дорівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_1} = 2v_1 - 2k = 0;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_2} = 2v_2 - 2k = 0;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_3} = 2v_3 - 2k = 0.$$

Скоротивши вираз на 2 та виразивши v_i, отримаємо

$$v_1 = k; \quad v_2 = k; \quad v_3 = k.$$

Додаємо одно до одного отримані рівняння почленно та дістанемо:

$$v_1 + v_2 + v_3 = 3k = -w.$$

або

$$3k = -w,$$

звідки

$$k = -\frac{W}{3}.$$

4. Поправки визначимо за формулою (12.8), враховуючи, що $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 1$ та виміри є рівноточними:

$$v_1 = -\frac{W}{3};$$
$$v_2 = -\frac{W}{3};$$
$$v_3 = -\frac{W}{3}.$$

Отримали такий самий результат, як в параметричному способі (задача 11.1).

На практиці не проходять весь алгоритм отримання корелат, починаючи від складання функції Лагранжа, а використовують систему нормальних рівнянь (12.11) як формулу. Для цього визначають її складові – зворотні ваги q_j, коефіцієнти a_{ij} та нев'язкі w_j.

Повернемося до нашої задачі. По-перше, оскільки ми маємо один додатковий вимір, то він породжує одно умовне рівняння, тобто r = 1, і нев'язка одна, вона дорівнює w. Відповідно у системі нормальних рівнянь має бути одно рівняння, в якому одна складова, тобто одно невідоме (одна корелата)

$$[qa_1a_1]k_1 + W_1 = 0.$$

Усі коефіцієнти умовного рівняння поправок дорівнюють одиниці

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$$

Відкривши дужку та підставивши значення змінних, отримаємо:

$$(q_1 \cdot a_{11} \cdot a_{11} + q_2 \cdot a_{12} \cdot a_{12} + q_3 \cdot a_{13} \cdot a_{13})\, k_1 + W_1 = 0,$$
$$(1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1)k + W = 0,$$
$$(1 + 1 + 1)k + W = 0,$$
$$3k + W = 0,$$

або $$3k = -W \quad \text{і} \quad k = -\frac{W}{3}.$$

Далі, отримавши корелату, визначаємо поправки:

$$v_1 = -\frac{W}{3};$$

$$v_2 = -\frac{W}{3};$$
$$v_3 = -\frac{W}{3},$$
а потім обчислюємо зрівнювані значення кутів x_1' , x_2' , x_3' та обов'язково перевіряємо, з якою точністю їхня сума відповідає 180°.

Задача 12.2

Вирішимо попередню задачу, вважаючи, що виміри нерівноточні і ваги вимірів відповідно дорівнюють p_1, p_2, p_3.

Розв'язання

Умовне рівняння поправок буде таким самим, як і в попередній задачі, але під час складання системи нормальних рівнянням слід врахувати ваги вимірів, тобто зворотні ваги q_1, q_2, q_3.

Отримаємо з урахуванням, що $[qa_1a_1] = q_1 + q_2 + q_3$:
$$(q_1 + q_2 + q_3)k + W = 0,$$
звідки
$$k = -\frac{W}{q_1+q_2+q_3} = -\frac{W}{\sum q}.$$
Поправки визначимо за формулами (12.8), (12.9):
$$v_1 = -\frac{q_1}{\sum q}W;$$
$$v_2 = -\frac{q_2}{\sum q}W;$$
$$v_3 = -\frac{q_3}{\sum q}W.$$
Результати обчислень також збігаються із результатом розв'язання задачі 11.2 за параметричним методом.

Задача 12.3

Виміряно три кути X_1, X_2, X_3, що утворені трьома напрямами (рис. 11.3), та отримані результати вимірів x_1 із вагою p_1, x_2 із вагою p_2 та x_3 із вагою p_3. Визначити взаємне розташування трьох напрямів.

Розв'язання

Для визначення взаємного розташування трьох напрямів необхідно знати два кути. Оскільки є один додатковий вимір, виникає задача зрівнювання. Умовне рівняння запишемо у вигляді
$$X_1 + X_2 - X_3 = 0.$$
Вільний член дорівнює

$$w = x_1 + x_2 - x_3.$$

Умовне рівняння поправок

$$v_1 + v_2 - v_3 + w = 0.$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$\Phi(v_1, v_2, v_3) = [pv^2] - 2k([av] + W).$$

Візьмемо часткові похідні від функції Лагранжа за v_i та дорівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_1} = 2p_1v_1 - 2ka_1 = 0;$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_2} = 2p_2v_2 - 2ka_2 = 0;$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial v_3} = 2p_3v_3 - 2ka_3 = 0.$$

Скоротимо вирази на 2, та виразивши v_i, отримаємо

$$v_1 = \frac{ka_1}{p_1}; \quad v_2 = \frac{ka_2}{p_2}; \quad v_3 = k\frac{ka_3}{p_3}.$$

Додаємо отримані рівняння одно до одного почленно та дістанемо:

$$v_1 + v_2 - v_3 = (q_1a_1 + q_2a_2 + q_3a_3)k = -w.$$

або, оскільки $a_1 = a_2 = a_3 = 1$,

$$(q_1 + q_2 + q_3)k = -w,$$

звідки

$$k = -\frac{w}{\sum q}.$$

Визначимо поправки до результатів вимірювань:

$$v_1 = -\frac{q_1}{\sum q}w;$$
$$v_2 = -\frac{q_2}{\sum q}w;$$
$$v_3 = -\frac{q_3}{\sum q}w.$$

Результати такі самі, як і в задачі 11.3, де застосований параметричний метод розв'язання.

Тепер вирішимо задачу, склавши систему нормальних рівнянь (12.11). Оскільки є один додатковий вимір, він породжує одне умовне рівняння, тобто r = 1, і нев'язка одна, вона дорівнює w. Відповідно у системі нормальних рівнянь має бути одне рівняння, в якому один доданок, тобто одне невідоме (одна корелата).

Відомі складові нормального рівняння – зворотні ваги q_j, коефіцієнти a_{ij} та одна нев'язка w.

Коефіцієнти умовного рівняння поправок дорівнюють одиниці

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1.$$

У системі нормальних рівнянь має бути одно рівняння, в якому один доданок:

$$[qa_1a_1]k_1 + W_1 = 0.$$

Відкривши дужку та підставивши значення змінних, отримаємо:

$$(q_1 \cdot a_{11} \cdot a_{11} + q_2 \cdot a_{12} \cdot a_{12} + q_3 \cdot a_{13} \cdot a_{13})\, k_1 + W_1 = 0,$$

$$(q_1 \cdot 1 \cdot 1 + q_2 \cdot 1 \cdot 1 + q_3 \cdot 1 \cdot 1)k + W = 0,$$

$$(q_1 + q_2 + q_3)k = -W,$$

або

$$k = -\frac{w}{\sum q}.$$

Отримавши корелату, знаходимо поправки

$$v_1 = -\frac{q_1}{\sum q} w;$$

$$v_2 = -\frac{q_2}{\sum q} w;$$

$$v_3 = -\frac{q_3}{\sum q} w.$$

Далі обчислюємо зрівнювані значення кутів x_1' , x_2' , x_3' та перевіряємо точність виконання умови $X_1 + X_2 - X_3 = 0$.

Задача 12.4

На рисунку 12.1 подано систему нівелірних ходів, що спираються на три марки, висоти яких отримані з нівелювання більш високого класу. В таблиці 12.1 наведені виміряні значення перевищень за ходами та довжини ходів.

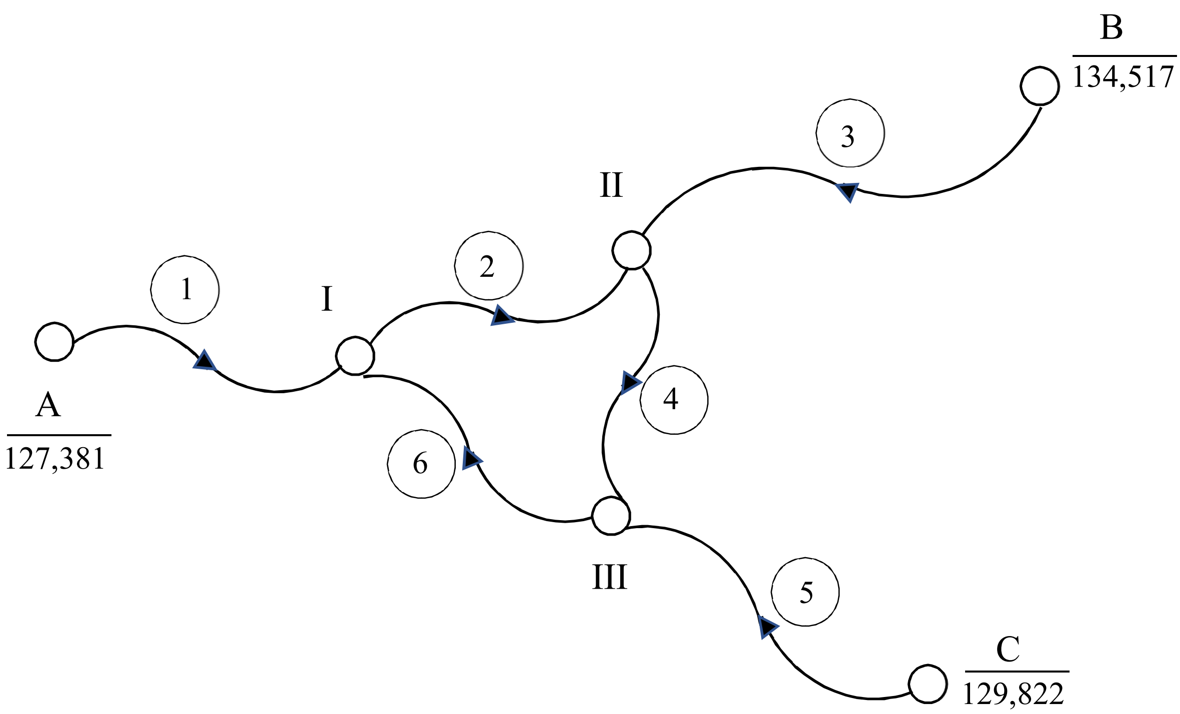


Рисунок 12.1 – Система нівелірних ходів

Таблиця 12.1 – Вихідні дані

№ ходу	Виміряне перевищення h, м	Довжина ходу L, км
1	+4,881	4,7
2	–4,132	6,2
3	–6,427	9,1
4	+2,588	5,3
5	+0,883	6,3
6	+1,611	8,6

Знайти зрівнювані значення висот реперів I, II, III та СКП перевищення, що отримане за ходом довжиною у 1 км.

Розв'язання

1. Складемо незалежні умовні рівняння.

Число незалежних умовних рівнянь визначається співвідношенням

$$r = n - k,$$

де r – число незалежних умовних рівнянь;

n – число виміряних величин;

k – число величин, що треба визначити.

В нашому випадку n = 6, k = 3, отже, r = 3. Таким чином, сформуємо три незалежних умовних рівняння у вигляді:

$$h_1 + h_2 - h_3 - (H_B - H_A) = 0;$$

$$h_1 - h_5 - h_6 - (H_C - H_A) = 0;$$

$$h_3 + h_4 - h_5 - (H_C - H_B) = 0.$$

2. Обчислимо нев'язки умовних рівнянь.

Підставимо до умовних рівнянь замість істинних значень результати вимірів та отримаємо

$$w_1 = +4{,}881 - 4{,}132 + 6{,}427 - 134{,}517 + 127{,}381 = +\,0{,}040 \text{ м};$$

$$w_2 = +4{,}881 - 0{,}883 - 1{,}611 - 129{,}822 + 127{,}381 = -\,0{,}054 \text{ м};$$

$$w_3 = -\,6{,}427 + 2{,}588 - 0{,}883 - 129{,}822 + 134{,}\,517 = -\,0{,}027 \text{ м}.$$

Краще подати усі нев'язки у міліметрах, тобто

$w_1 = +\,40$ мм, $w_2 = -\,54$ мм и $w_3 = -\,27$ мм.

3. Складемо умовне рівняння поправок:

$$v_1 + v_2 - v_3 - 40 = 0;$$

$$v_1 - v_5 - v_6 + 54 = 0;$$

$$v_3 + v_4 - v_5 + 27 = 0.$$

4. Розрахуємо зворотні ваги результатів вимірювань.

Ваги обчислимо за формулою $p_i = \frac{k}{L_i}$, де L_i – довжина і-го ходу.

Зворотні ваги відповідно визначимо за формулою $q_i = \frac{L_i}{k}$. Прийнявши k = 1, отримаємо $q_1 = 4{,}7$; $q_2 = 6{,}2$; $q_3 = 9{,}1$; $q_4 = 5{,}3$; $q_5 = 6{,}3$; $q_6 = 8{,}6$.

5. Складемо нормальні рівняння корелат.

Оскільки ми маємо три додаткових виміри, які породжують три умовних рівняння, то відповідно у системі нормальних рівнянь має бути три рівняння, в яких три корелати. Отже, у загальному вигляді система нормальних рівнянь відповідно до (12.11) має вигляд:

$$\left.\begin{aligned} &[qa_1a_1]k_1 + [qa_1a_2]k_2 + \cdots + [qa_1a_r]k_r + w_1 = 0 \\ &[qa_1a_2]k_1 + [qa_2a_2]k_2 + \cdots + [qa_2a_r]k_r + w_2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ &[qa_1a_r]k_1 + [qa_2a_r]k_2 + \cdots + [qa_ra_r]k_r + wr = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Тепер, скориставшись системою (12.11) як формулою, визначимо параметри системи нормальних рівнянь. Такі параметри як ваги q_i та нев'язки w_i, ми вже визначили. Обчислимо коефіцієнти системи.

Звернемо увагу, що у Гаусових сумах мають стояти 6 доданків відповідно до загальної кількості вимірів n = 6. Тоді відповідно до форми першого нормального рівняння коефіцієнт при корелаті k_1 дорівнює

$$[qa_1a_1] = q_1a_{11}a_{11} + q_2a_{12}a_{12} + q_3a_{13}a_{13} + q_4a_{14}a_{14} + q_5a_{15}a_{15} + q_6a_{16}a_{16} =$$
$$= 4{,}7 \cdot 1 \cdot 1 + 6{,}2 \cdot 1 \cdot 1 + 9{,}1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 5{,}3 \cdot 0 \cdot 0 + 6{,}3 \cdot 0 \cdot 0 + 8{,}6 \cdot 0 \cdot 0 =$$
$$= 4{,}7 + 6{,}2 + 9{,}1 = 20{,}0;$$

при корелаті k_2

$$[qa_1a_2] = q_1a_{11}a_{21} + q_2a_{12}a_{22} + q_3a_{13}a_{23} + q_4a_{14}a_{24} + q_5a_{15}a_{25} + q_6a_{16}a_{26} =$$
$$= 4{,}7 \cdot 1 \cdot 1 + 6{,}2 \cdot 1 \cdot 1 + 9{,}1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 5{,}3 \cdot 0 \cdot 0 + 6{,}3 \cdot 0 \cdot 0 + 8{,}6 \cdot 0 \cdot 0 =$$
$$= 4{,}7 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 4{,}7;$$

при корелаті k_3

$$[qa_1a_3] = q_1a_{11}a_{31} + q_2a_{12}a_{32} + q_3a_{13}a_{33} + q_4a_{12}a_{32} + q_5a_{12}a_{32} + q_6a_{12}a_{32} =$$
$$= 4{,}7 \cdot 1 \cdot 0 + 6{,}2 \cdot 1 \cdot 0 + 9{,}1 \cdot (-1) \cdot 1 + 5{,}3 \cdot 0 \cdot 1 + 6{,}3 \cdot 0 \cdot 1 + 8{,}6 \cdot 0 \cdot 0 =$$
$$= 0 + 0 - 9{,}1 + 0 + 0 + 0 = -9{,}1.$$

В другому рівнянні коефіцієнт при корелаті k_1 дорівнює

$$[qa_1a_2] = q_1a_{11}a_{21} + q_2a_{12}a_{22} + q_3a_{13}a_{23} + q_4a_{14}a_{24} + q_5a_{15}a_{25} + q_6a_{16}a_{26} =$$
$$= 4{,}7 \cdot 1 \cdot 1 + 6{,}2 \cdot 1 \cdot 0 + 9{,}1 \cdot (-1) \cdot 0 + 5{,}3 \cdot 0 \cdot 0 + 6{,}3 \cdot 0 \cdot (-1) + 8{,}6 \cdot 0 \cdot (-1) =$$
$$= 4{,}7 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 4{,}7;$$

при корелаті k_2

$$[qa_2a_2] = q_1a_{21}a_{21} + q_2a_{22}a_{22} + q_3a_{23}a_{23} + q_4a_{24}a_{24} + q_5a_{25}a_{25} + q_6a_{26}a_{26} =$$
$$= 4{,}7 \cdot 1 \cdot 1 + 6{,}2 \cdot 0 \cdot 0 + 9{,}1 \cdot 0 \cdot 0 + 5{,}3 \cdot 0 \cdot 0 + 6{,}3 \cdot (-1) \cdot (-1) + 8{,}6 \cdot (-1) \cdot (-1) =$$
$$= 4{,}7 + 0 + 0 + 0 + 6{,}3 + 8{,}6 = 19{,}6;$$

та при корелаті k_3

$$[qa_2a_3] = q_1a_{21}a_{31} + q_2a_{22}a_{32} + q_3a_{23}a_{33} + q_4a_{24}a_{34} + q_5a_{25}a_{35} + q_6a_{26}a_{36} =$$
$$= 4{,}7 \cdot 1 \cdot 0 + 6{,}2 \cdot 0 \cdot 0 + 9{,}1 \cdot 0 \cdot 1 + 5{,}3 \cdot 0 \cdot 1 + 6{,}3 \cdot (-1) \cdot (-1) + 8{,}6 \cdot (-1) \cdot 0 =$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 6{,}3 + 0 = 6{,}3.$$

У третьому рівнянні коефіцієнт при кореляті k_1 дорівнює

$$[qa_1a_3] = q_1a_{11}a_{31} + q_2a_{12}a_{32} + q_3a_{13}a_{33} + q_4a_{14}a_{34} + q_5a_{15}a_{35} + q_6a_{16}a_{36} =$$
$$= 4{,}7 \cdot 1 \cdot 0 + 6{,}2 \cdot 1 \cdot 0 + 9{,}1 \cdot -1 \cdot 1 + 5{,}3 \cdot 0 \cdot 1 + 6{,}3 \cdot 0 \cdot (-1) + 8{,}6 \cdot 0 \cdot 0 =$$
$$= 0 + 0 – 9{,}1 + 0 + 0 + 0 = –9{,}1;$$

при кореляті k_2

$$[qa_2a_3] = q_1a_{21}a_{31} + q_2a_{22}a_{32} + q_3a_{23}a_{33} + q_4a_{24}a_{34} + q_5a_{25}a_{35} + q_6a_{26}a_{36} =$$
$$= 4{,}7 \cdot 1 \cdot 0 + 6{,}2 \cdot 0 \cdot 0 + 9{,}1 \cdot 0 \cdot 1 + 5{,}3 \cdot 0 \cdot 1 + 6{,}3 \cdot (-1) \cdot (-1) + 8{,}6 \cdot (-1) \cdot 0 =$$
$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 6{,}3 + 0 = 6{,}3;$$

при кореляті k_3

$$[qa_3a_3] = q_1a_{31}a_{31} + q_2a_{32}a_{32} + q_3a_{33}a_{33} + q_4a_{34}a_{34} + q_5a_{35}a_{35} + q_6a_{36}a_{36} =$$
$$= 4{,}7 \cdot 0 \cdot 0 + 6{,}2 \cdot 0 \cdot 0 + 9{,}1 \cdot 1 \cdot 1 + 5{,}3 \cdot 1 \cdot 1 + 6{,}3 \cdot (-1) \cdot (-1) + 8{,}6 \cdot 0 \cdot 0 =$$
$$= 0 + 0 + 9{,}1 + 5{,}3 + 6{,}3 + 0 = 20{,}7.$$

Для зручності запишемо результати розрахунків у таблицю 12.2.

Таблиця 12.2 – Розрахунок параметрів системи нормальних рівнянь

q	Номер виміру	a_1	a_2	a_3	qa_1a_1	qa_1a_2	qa_1a_3	qa_1a_2	qa_2a_2	qa_2a_3	qa_1a_3	qa_2a_3	qa_3a_3
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4,7	1	1	1	0	4,7	4,7	0	4,7	4,7	0	0	0	0
6,2	2	1			6,2	0	0	0	0	0	0	0	0
9,1	3	-1		1	9,1	0	-9,1	0	0	0	-9,1	0	9,1
5,3	4			1	0	0	0	0	0	0	0	0	5,3
6,3	5		-1	-1	0	0	0	0	6,3	6,3	0	6,3	6,3
8,6	6		-1		0	0	0	0	8,6	0	0	0	0
	[ ]	1	-1	1	20	4,7	-9,1	4,7	19,6	6,3	-9,1	6,3	20,7

Нормальні рівняння корелат мають вигляд:

$$+20{,}0k_1 + 4{,}7k_2 – 9{,}1k_3 - 40 = 0;$$
$$+ 4{,}7k_1 + 19{,}6k_2 + 6{,}3k_3 + 54 = 0;$$
$$– 9{,}1k_1 + 6{,}3k_2 + 20{,}7k_3 + 27 = 0.$$

6. Розв’яжемо систему нормальних рівнянь корелат.

Розв’язання системи нормальних рівнянь виконаємо за допомогою формули Excel (рис. 12.2).

Отже, в результаті розв’язання нормальних рівнянь отримали наступні значення корелат $k_1 = –3{,}695$; $k_2 = +4{,}149$; $k_3 = –1{,}582$.

7. Обчислимо поправки до результатів вимірів.

Обчислення поправок виконаємо відповідно до формули (12.8):

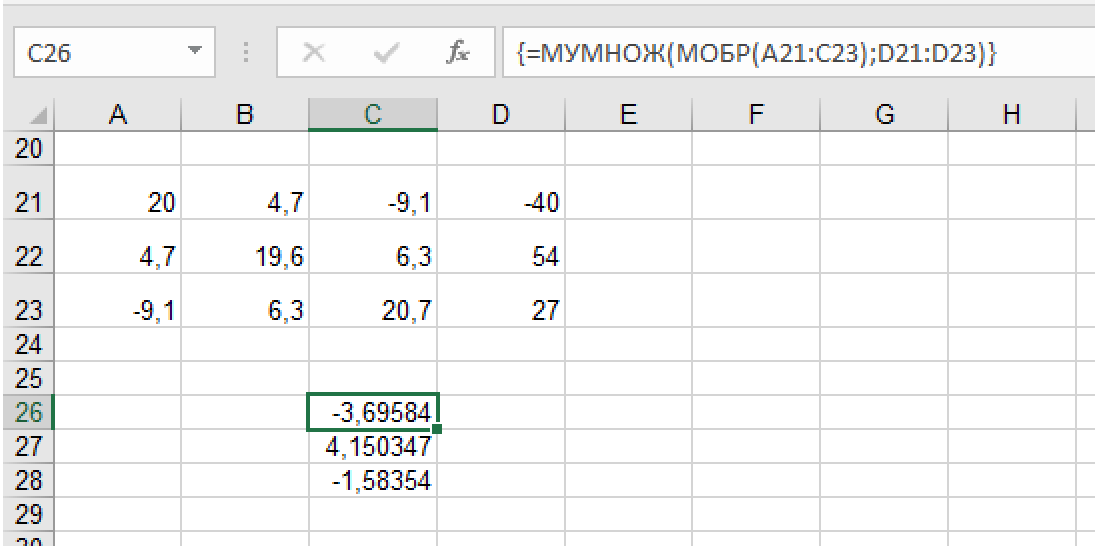
$$v_i = q_i\,(a_{1i}k_1 + a_{2i}k_2 + a_{3i}k_3).$$

Отримаємо значення v_1:

$$v_1 = q_1 a_{11} k_1 + q_1 a_{21} k_2 + q_1 a_{31} k_3 =$$

$$= 4{,}7 \cdot 1 \cdot (-3{,}6958) + 4{,}7 \cdot 1 \cdot 4{,}15 + 4{,}7 \cdot 0 \cdot (-1{,}5835) =$$

$$=4{,}7 \cdot 1 \cdot (-3{,}6958)+4{,}7 \cdot 1 \cdot 4{,}15+0=2{,}136.$$



C26 | {=МУМНОЖ(МОБР(A21:C23);D21:D23)}

	A	B	C	D	E	F	G	H
20								
21	20	4,7	-9,1	-40				
22	4,7	19,6	6,3	54				
23	-9,1	6,3	20,7	27				
24								
25								
26			-3,69584					
27			4,150347					
28			-1,58354					
29								

Рисунок 12.2 – Розв'язання системи нормальних рівнянь корелат

Аналогічно обчислимо решті значення v_i в таблиці 12.3, скориставшись абсолютними посиланнями Excel на значення k_j.

Таблиця 12.3 – Розрахунок поправок v_i

q	№ виміру	a_1	a_2	a_3	k_1	k_2	k_3	v_i
4,7	1	1	1	0	–3,695	4,150	–1,583	2,136
6,2	2	1						–22,914
9,1	3	–1		1				19,222
5,3	4			1				–8,393
6,3	5		–1	–1				–16,171
8,6	6		–1					–35,693

Таким чином, поправки отримали значення: v_1 = +2,13 мм; v_2 = –22,91 мм; v_3 = +19,23 мм; v_4 = – 8,39 мм; v_5 = – 16,17 мм; v_6 = – 35,68 мм.

Отримані поправки мають задовольняти умовним рівнянням поправок:

$$v_1 + v_2 - v_3 - 40 = 0;$$

+ 2,13 – 22,91 – 19,23 = – 40,01 мм (w_1 = + 40 мм);

$$v_1 - v_5 - v_6 + 54 = 0;$$

+2,13 + 16,17 + 35,68 = + 53,98 мм (w_2 = – 54 мм);

$$v_3 + v_4 - v_5 + 27 = 0;$$

+19,23 – 8,39 +16,17 = + 27,01 мм (w_3 = – 27 мм).

8. Обчислимо зрівнювані значення виміряних величин за формулою:

$$h'_i = h_i + v_i,$$

отримаємо

$$h'_1 = h_1 + v_1 = 4{,}881 + 0{,}00213 = 4{,}883;$$
$$h'_2 = h_2 + v_2 =- 4{,}132 - 0{,}0229 = -4{,}155;$$
$$h'_3 = h_3 + v_3 =- 6{,}427 + 0{,}01923 = 6{,}408;$$
$$h'_4 = h_4 + v_4 = 2{,}588 - 0{,}00839 = 2{,}580;$$
$$h'_5 = h_5 + v_5 = 0{,}883 - 0{,}01617 = 0{,}867;$$
$$h'_6 = h_6 + v_6 = 1{,}611 - 0{,}03568 = 1{,}575,$$

або, скориставшись Excel, отримаємо таблицю 12.4.

Таблиця 12.4 – Розрахунок зрівнюваних значень вимірюваних величин h'_i

v_i, мм	h_i, м	h'_i, м
2,13	4,881	4,883
–22,91	–4,132	–4,155
19,22	–6,427	–6,408
–8,39	2,588	2,580
–16,17	0,883	0,867
–35,69	1,611	1,575

Зрівнювані значення виміряних величин h'_i мають задовольняти вихідним умовним рівнянням:

$$h_1 + h_2 - h_3 - (H_B - H_A) = 0;$$
$$h_1 - h_5 - h_6 - (H_C - H_A) = 0;$$
$$h_3 + h_4 - h_5 - (H_C - H_B) = 0;$$

+4,883 – 4,155 + 6,408 – 134,517 +127,381 =0;

+4,883 – 0,867 – 1,575 – 129,822 +127,381 =0;

– 6,408 + 2,580 – 0,867 –129,822 + 134,517 =0.

9. Визначимо зрівнювані значення висот точок I, II, III, використовуючи зрівнювані значення виміряних величин:

$H_I = H_A + h_1$ = 127,381 + 4,883 = 132,264 м;

$H_{II} = H_B - h_3$ = 134,517 – 6,408 = 128,109 м;

$H_{III} = H_C + h_5$ = 129,822 + 0,867 = 130,689 м.

10. Обчислимо середньоквадратичну погрішність одиниці ваги.

Обчислення СКП одиниці ваги виконаємо за формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}},$$

де значення $[pv^2]$ отримаємо з використанням зворотних ваг:

$$[pv^2] = \left[\frac{v^2}{q}\right] = 329{,}196.$$

Тоді $\mu = \sqrt{\frac{329}{3}} = 10{,}5$ мм ≈ 10 мм.

Визначимо СКП одиниці ваги:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2r}} = \frac{10{,}5}{\sqrt{2*3}} = 4{,}2 \text{ мм.}$$

Оскільки зворотні ваги розраховані за формулою $q_i = L_i$, то μ у даному випадку характеризує точність визначення перевищення за ходом довжиною 1 км.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Метешкін К. О. Математична обробка геодезичних вимірів : навч. посібник / К. О. Метешкін, Д. В. Шаульський ; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2012. – 176 с.

2. Метешкін К. О. Практикум з математичної обробки геодезичних вимірів : навч. посібник / К. О. Метешкін, Д. В. Шаульський ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ, 2014. – 100 с.

3. Математична обробка геодезичних вимірів : дистанційний курс [Електронний ресурс] / К. О. Метешкін, О. О. Воронков ; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Режим доступу: https://cdo.kname.edu.ua/course/view.php?id=219.

4. Гмурман В. Э. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Э. Гмурман. – М. : Высш. школа, 1977. – 498 с.

5. Гмурман В. Э. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Э. Гмурман. – М. : Высш. школа, 1975. – 330 с.

6. Воронков О. О. Теорія імовірностей і математична статистика : навч. посіб. / О. О. Воронков, А. Є. Ачкасов, В. Т. Плакіда. – Харків : ХНАМГ, 2008. – 249 с.

7. Беликов А. Б. Математическая обработка результатов геодезических измерений : учебное пособие / А. Б. Беликов, В .В. Симонян. – М. : НИУ МГСУ, 2016. – 432 с.

8. Большаков В. Д. Теория математической обработки геодезических измерений : учебник / В. Д. Большаков, П. А. Гайдаев. – 2-е изд. – М. : Недра, 1977. – 367 с.

9. Большаков В. Д. Теория математической обработки геодезических измерений : Практикум / В. Д. Большаков, Ю. И. Маркузе. – 2-е изд. – М. : Недра, 1977. – 345 с.

ДОДАТОК А

Похідні деяких функцій

Правила диференціювання

$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$(cu)' = cu'$, де $\mathrm{c} = \mathrm{const}$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Похідна складної функції

Якщо y = f(g(x) та існують похідні f'_g та g'_x, то $y'_x = f'_g \cdot g'_x$, наприклад

$$\left(\sqrt{\sin x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}};$$

$$(\ln \sin x)' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{cos\, x}{\sin x} = ctg\ x;$$

Похідні простих функцій

$c' = 0$, де $\mathrm{c} = \mathrm{const}$	$(x)' = 1$	$(x^a)' = ax^{a-1}$
$(\sin x)' = cos\, x$	$(\mathrm{t}g\, x)' = \frac{1}{cos^2 x}$	$(\mathrm{a}rcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$(\cos x)' = -sin\, x$	$(\mathrm{ct}g\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{a}rccos\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$(\mathrm{l}n\, x)' = \frac{1}{x}$	$(\mathrm{l}og_a\, x)' = \frac{1}{xlna}$	$(\mathrm{a}rctg\, x)' = \frac{1}{1 + x^2}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\mathrm{a}rcctg\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

ДОДАТОК Б

Розкладання деяких функцій у нескінчений ряд

Функцію f(x) часто розкладають у певний нескінчений ряд тому, що:

а) послідовність часткових сум (або середніх арифметичних) цього ряду може надавати корисні для обчислень наближення функції f(x);

б) опис операцій над функцією f(x) може бути простішим.

Ряд Тейлора. Якщо f(x) – дійсна функція, що має на інтервалі a ≤ x < b n-ю похідну $f^{(n)}$(x), то

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + R_n(x),$$

де $R_n(x)$ – залишковий член формули.

Функція	Формула
Натуральний логарифм	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)} =$ $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)}$, для усіх –1 < x < 1
Квадратний корінь	$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)n!^2 4^n} x^n$ для усіх
Тригонометричні функції	
Синус	$sin\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, x∈C
Косинус	$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, x∈C
Тангенс	$tg\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1}$, для усіх $\lvert x \rvert < \frac{\pi}{2}$, де B_{2n} – числа Бернуллі
Арксинус	$arcsin\, x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$, для усі|x| ≤ 1x
Арккосинус	$arccos\, x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$ для усіх |x| ≤ 1
Арктангенс	$arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$, для усіх |x| ≤ 1

Виробничо-практичне видання

Методичні рекомендації

до проведення практичних занять
із навчальної дисципліни

«МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ»

(для бакалаврів спеціальності 193 − Геодезія та землеустрій)

Укладач **ВОРОНКОВ** Олексій Олександрович

Відповідальний за випуск *С. Г. Нестеренко*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *О. О. Воронков*

План 2020, поз. 15М

Підп. до друку 03.06.2020 р. Формат 60 х 84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 4,43.
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.