

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ**

до організації самостійної роботи  
і проведення практичних занять  
з навчальної дисципліни

**«ВИЩА МАТЕМАТИКА»**

*(для студентів 1 курсу денної форми навчання  
спеціальності 101 – Екологія)*

Модуль 1

**Харків**  
**ХНУМГ ім. О. М. Бекетова**  
**2020**

Методичні рекомендації до організації самостійної роботи і проведення практичних занять з дисципліни «Вища математика» (для студентів 1 курсу денної форми навчання спеціальності 101 – Екологія) Модуль 1 / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. Л. П. Вороновська. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 89 с.

Укладач канд. пед. наук Л. П. Вороновська

Рецензент

**Л. Б. Коваленко**, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувачка кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

*Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 5 від 25.12.2019.*

## ЗМІСТ

Розділ 1 Диференційне числення функцій однієї змінної.....	5
1.1 Похідна і диференціал функції.....	5
1.2 Похідна параметрично заданої функції.....	8
1.3 Похідна неявно заданої функції .....	9
1.4 Логарифмічне диференціювання.....	10
1.5 Правило Лопітала (розкриття невизначеностей виду $\left \frac{0}{0}\right $ та $\left \frac{\infty}{\infty}\right $ )...	12
1.6 Дослідження функції за допомогою похідної.....	14
1.6.1 Зростання і спадання функції.....	14
1.6.2 Максимум і мінімум функції.....	15
1.6.3 Опуклість графіка функції. Точки перегину.....	17
1.6.4 Асимптоти графіка функції.....	17
1.6.5 Повне дослідження функції.....	19
Розділ 2 Числові та степеневі ряди.....	22
2.1 Числові ряди.....	22
2.1.1 Ряди з додатними членами.....	24
2.1.2 Абсолютна та умовна збіжність знакозмінного ряду. Ознака збіжності знакозмінного ряду.....	27
2.2 Функціональні ряди.....	28
2.3 Ряди Тейлора та Маклорена.....	30
2.4 Застосування степеневих рядів.....	36
Розділ 3 Невизначений інтеграл.....	39
3.1 Поняття первісної функції і невизначеного інтеграла.....	39
3.2 Властивості невизначеного інтеграла.....	39
3.3 Безпосереднє інтегрування і метод розкладання.....	40
3.4 Інтегрування методом заміни змінної (метод підстановки).....	42
3.5 Метод інтегрування частинами.....	43
3.6 Інтегрування раціональних функцій.....	45
3.6.1 Інтегрування раціональних функцій, що містять квадратний тричлен.....	46
3.6.2 Інтегрування раціональних функцій.....	47
3.7 Інтегрування тригонометричних функцій.....	52
РОЗДІЛ 4    Визначений інтеграл.....	56
4.1 Поняття інтегральної суми і визначеного інтеграла.....	56
4.2 Формула Ньютона-Лейбніца.....	56
4.3 Властивості визначеного інтеграла.....	56
4.4 Заміна змінної у визначеному інтегралі.....	58
4.5 Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.....	59
4.6 Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії.....	60
4.6.1 Обчислення площі плоскої фігури.....	60
4.6.2 Обчислення довжини дуги плоскої кривої.....	64
РОЗДІЛ 5    Диференціальні рівняння.....	67

5.1 Диференційні рівняння першого порядку.....	67
5.1.1 Рівняння з відокремлюваними змінними.....	68
5.1.2 Однорідні диференційні рівняння першого порядку.....	70
5.1.3 Лінійні диференційні рівняння першого порядку.....	73
5.2 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку.....	76
5.2.1 Лінійні однорідні диференційні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.....	76
5.2.2 Лінійні неоднорідні диференційні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.....	78
Список рекомендованої літератури.....	86

# РОЗДІЛ 1 ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

## ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

### 1.1 Похідна і диференціал функції

Поняття похідної є одним з основних математичних понять. Похідну широко використовують при розв'язанні інженерних, економічних та управлінських задач, особливо при вивченні швидкості різних процесів.

*Похідною функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  називають границю (якщо вона існує) відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.*

Похідну функції  $f(x)$  позначають одним із символів:  $f'(x)$ ,  $y'(x)$ ,  $y'$ ,  $\frac{dy}{dx}$

Отже,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням*. Функція  $y = f(x)$ , яка має похідну в кожній точці інтервалу  $(a; b)$ , називається *диференційованою в цьому інтервалі*.

Значення похідної функції  $y = f(x)$  в точці  $x = x_0$  позначається  $f'(x_0)$  або  $y'(x_0)$ .

### Правила диференціювання

Нехай функції  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  – дві диференційовані в інтервалі  $(a, b)$  функції, тоді мають місце наступні правила:

1.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ;

2.  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ ;

3.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ ;

4.  $(c \cdot u)' = c \cdot u'$ ;

5.  $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot u'$ ;

6.  $(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$ .

### Таблиця похідних

$$1. (C)' = 0;$$

$$2. (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u';$$

$$2a. (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$$

$$2б. \left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-1}{u^2} \cdot u';$$

$$3. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$$

$$3a. (e^u)' = e^u \cdot u';$$

$$4. (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$$

$$4a. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$$

$$5. (\sin u)' = \cos u \cdot u';$$

$$6. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$7. (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$$

$$8. (\operatorname{ctg} u)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u';$$

$$9. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$10. (\arccos u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$11. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

$$12. (\operatorname{arcctg} u)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'.$$

*Приклад.* Знайти похідні від функцій:

$$a) y = 5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30, \quad б) y = \operatorname{tg} 3x^2,$$

$$в) y = \arccos \sqrt{5x^4 - 3}, \quad г) y = \cos 2x^3 \cdot (5x - 2)^{12},$$

$$д) y = \operatorname{arcctg}^5 x \cdot \log_5(x^2 + 2), \quad ж) y = \frac{(4x+2)^2}{e^{\sin x}}.$$

*Розв'язання.*

$$a) y = 5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30,$$

дана функція є сумою степеневих функцій і сталої величини. Похідні від степеневих функцій знаходимо за другою формулою в таблиці похідних, пам'ятаючи перше правило диференціювання, похідну сталої величини шукаємо за першою формулою в таблиці:

$$\begin{aligned} y' &= (5x^8 - 4x^{25} + 3x^5 - 20x^3 + 12x^2 + 7x - 30)' = \\ &= 40x^7 - 100x^{24} + 15x^4 - 60x^2 + 24x + 7. \end{aligned}$$

$$\text{б) } y = \operatorname{tg}3x^2, \quad y' = (\operatorname{tg}3x^2)' = \frac{1}{\cos^2 3x^2} \cdot (3x^2)' = \frac{1}{\cos^2 3x^2} \cdot 6x = \frac{6x}{\cos^2 3x^2};$$

у цьому випадку знаходили похідну, користуючись сьомою формулою таблиці похідних, де  $u = 3x^2$ ;

$$\text{в) } y = \arccos\sqrt{5x^4 - 3},$$

використовуючи десяту формулу таблиці похідних, де  $u = \sqrt{5x^4 - 3}$ . В свою чергу  $u = u(v)$ , де  $v = 5x^4 - 3$ . Отже, знаходимо:

$$\begin{aligned} y' &= (\arccos\sqrt{5x^4 - 3})' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\sqrt{5x^4 - 3})^2}} \cdot (\sqrt{5x^4 - 3})' = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{4 - 5x^4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x^4 - 3}} \cdot (5x^4 - 3)' = \frac{-10x^3}{\sqrt{4 - 5x^4} \cdot \sqrt{5x^4 - 3}}. \end{aligned}$$

$$\text{г) } y = \cos 2x^3 \cdot (5x - 2)^{12},$$

спочатку розкладемо похідну за другим правилом диференціювання, потім використаємо формули з таблиці похідних:

$$\begin{aligned} y' &= (\cos 2x^3)' \cdot (5x - 2)^{12} + \cos 2x^3 \cdot ((5x - 2)^{12})' = \\ &= -\sin 2x^3 \cdot (2x^3)' \cdot (5x - 2)^{12} + \cos 2x^3 \cdot 12(5x - 2)^{11} \cdot (5x - 2) = \\ &= -6x^2 \sin 2x^3 \cdot (5x - 2)^{12} + 60 \cos 2x^3 \cdot (5x - 2)^{11}. \end{aligned}$$

$$\text{д) } y = \operatorname{arcctg}^5 x \cdot \log_5(x^2 + 2),$$

знаходимо похідну також, як у прикладі е) :

$$\begin{aligned} y' &= (\operatorname{arcctg}^5 x)' \cdot \log_5(x^2 + 2) + \operatorname{arcctg}^5 x \cdot (\log_5(x^2 + 2))' = \\ &= 5 \operatorname{arcctg}^4 x (\operatorname{arcctg} x)' \log_5(x^2 + 2) + \operatorname{arcctg}^5 x \frac{1}{(x^2 + 2) \ln 5} (x^2 + 2)' = \\ &= \frac{-5 \operatorname{arcctg}^4 x \cdot \log_5(x^2 + 2)}{1 + x^2} + \frac{2x \cdot \operatorname{arcctg}^5 x}{(x^2 + 2) \ln 5}. \end{aligned}$$

$$\text{ж) } y = \frac{(4x + 2)^2}{e^{\sin x}},$$

в цьому прикладі спочатку використовуємо третє правило диференціювання, потім – формули з таблиці похідних:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{((4x + 2)^2)' \cdot e^{\sin x} - (4x + 2)^2 \cdot (e^{\sin x})'}{(e^{\sin x})^2} = \\ &= \frac{2(4x + 2)(4x + 2)' e^{\sin x} - (4x + 2)^2 e^{\sin x} (\sin x)'}{e^{2\sin x}} = \\ &= \frac{e^{\sin x} (8(4x + 2) - (4x + 2)^2 \cos x)}{e^{2\sin x}} = \frac{(4x + 2)(8 - (4x + 2)\cos x)}{e^{\sin x}} \end{aligned}$$

## 1.2 Похідна параметрично заданої функції

Нехай функцію задано у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}'$$

де  $\varphi(t)$  і  $\psi(t)$  – неперервні і диференційовані, коли параметр  $t \in (\alpha; \beta)$ . Нехай функція  $x = \varphi(t)$  має обернену  $t = t(x)$ , яка також диференційована (це означає, що у деякій точці  $t_0 \in (\alpha; \beta)$  похідна  $x'_t \neq 0$ ), тоді має місце формула

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (*)$$

*Приклад.* Знайти  $y'_x$ , якщо  $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$ .

*Розв'язання.* Знаходимо  $x'_t = (1 - t^2)' = -2t$  і  $y'_t = (t - t^3)' =$

$= 1 - 3t^2$ . Підставляючи знайдені вирази для  $x'_t$  і  $y'_t$  до формули (\*), дістанемо

$$y'_x = \frac{1 - 3t^2}{-2t} = \frac{3t^2 - 1}{2t}.$$



*Приклад.* Знайти  $y'_x$ , якщо  $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg}t \end{cases}$ .

*Розв'язання.* Маємо

$$x'_t = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Підставляючи знайдені вирази для  $x'_t$  і  $y'_t$  до формули (\*), дістанемо:

$$y'_x = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t^2}{2t} = \frac{t}{2}.$$

### 1.3 Похідна неявно заданої функції

Якщо функція задана рівнянням  $F(x, y) = 0$  (неявно), то для знаходження похідної від  $y$  по  $x$  необхідно: продиференціювати рівняння по  $x$ , вважаючи, що  $y$  є функцією від  $x$  (тобто  $(x)' = 1$ ,  $(y)' = y'$ ); отримане рівняння слід розв'язати відносно  $y'$ .

*Приклад.* Знайти  $y'_x$ , якщо  $y^2 - 3x^5 + 8x^2y^3 - 10 = 0$ .

*Розв'язання.* Диференціюємо функцію по  $x$ , вважаючи, що  $y$  є функцією від  $x$ :

$$2yy' - 15x^4 + 16xy^3 + 24x^2y^2y' = 0.$$

Розв'яжемо отримане рівняння відносно  $y'$ :

$$2yy' + 24x^2y^2y' = 15x^4 - 16xy^3, \quad y'(2y + 24x^2y^2) = 15x^4 - 16xy^3,$$

$$y' = \frac{15x^4 - 16xy^3}{2y + 24x^2y^2}.$$

*Приклад.* Знайти  $y'_x$ , якщо  $\sin 2x + \cos 3y = \sin^2 y + 1$ .

*Розв'язання.* Диференціюємо функцію по  $x$ , вважаючи, що  $y$  є функцією від  $x$ :

$$2\cos 2x - 3\sin 3y \cdot y' - 2\sin y \cdot \cos y \cdot y' = 0.$$

Розв'яжемо рівняння відносно  $y'$ :

$$y' \cdot (3\sin 3y + 2\sin y \cdot \cos y) = 2\cos 2x,$$

$$y' = \frac{2\cos 2x}{3\sin 3y + 2\sin y \cdot \cos y}.$$

#### 1.4 Логарифмічне диференціювання

1) Якщо функція  $y = f(x)$  являє собою добуток кількох множників, то перш ніж диференціювати її, можна прологарифмувати цю функцію.

*Приклад.* Знайти  $y'$ , якщо  $y = \frac{\sqrt[5]{\sin x \cdot \arctg^2 x}}{\sqrt[4]{\cos x}}$ .

*Розв'язання.* Прологарифмуємо обидві частини даного рівняння:

$$\ln y = \ln \left( \frac{\sqrt[5]{\sin x \cdot \arctg^2 x}}{\sqrt[4]{\cos x}} \right),$$

$$\ln y = \frac{1}{5} \ln \sin x + 2 \ln \arctg x - \frac{1}{4} \ln \cos x,$$

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності, пам'ятаючи, що  $(x)' = 1$ ,  $(y)' = y'$ :

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{2}{\arctg x} \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\operatorname{ctg} x}{5} + \frac{2}{\arctg x \cdot (1+x^2)} + \frac{\operatorname{tg} x}{4},$$

$$y' = y \cdot \left( \frac{\operatorname{ctgx}}{5} + \frac{2}{\operatorname{arctgx} \cdot (1+x^2)} + \frac{\operatorname{tgx}}{4} \right),$$

$$y' = \frac{\sqrt[5]{\sin x} \cdot \operatorname{arctg}^2 x}{\sqrt[4]{\cos x}} \cdot \left( \frac{\operatorname{ctgx}}{5} + \frac{2}{\operatorname{arctgx} \cdot (1+x^2)} + \frac{\operatorname{tgx}}{4} \right).$$

2) Похідна показниково-степеневі функції.

Функція  $y = (u(x))^{v(x)}$  називається *показниково-степеневі* функцією.

*Приклад.* Знайти  $y'$ , якщо  $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$ .

*Розв'язання.*  $\ln y = \ln(x^2 + 1)^{\sin x}$ ,  $\ln y = \sin x \cdot \ln(x^2 + 1)$ ,

Диференціюємо обидві частини останнього рівняння:

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln(x^2 + 1) + \sin x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Знаходимо  $y'$ :  $y' = y \cdot \left( \cos x \cdot \ln(x^2 + 1) + \sin x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \right)$ .

На місце  $y$  записуємо вихідну функцію:

$$y' = (x^2 + 1)^{\sin x} \cdot \left( \cos x \cdot \ln(x^2 + 1) + \sin x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \right).$$

Остаточно:

$$y' = (x^2 + 1)^{\sin x - 1} \cdot \left( (x^2 + 1) \cos x \cdot \ln(x^2 + 1) + 2x \sin x \right).$$

*Приклад.* Знайти  $y'$ , якщо  $y = (\operatorname{arctg} \sqrt{x})^{\ln(2x+1)}$ .

*Розв'язання.*  $\ln y = \ln(\operatorname{arctg} \sqrt{x})^{\ln(2x+1)}$ ,

$$\ln y = \ln(2x + 1) \cdot \ln(\operatorname{arctg} \sqrt{x}),$$

$$\frac{y'}{y} = (\ln(2x + 1))' \cdot \ln \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \ln(2x + 1) \cdot (\ln \operatorname{arctg} \sqrt{x})';$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{(2x+1)'}{2x+1} \cdot \ln \arctg \sqrt{x} + \ln(2x+1) \cdot \frac{(\arctg \sqrt{x})'}{\arctg \sqrt{x}},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{2x+1} \cdot \ln \arctg \sqrt{x} + \ln(2x+1) \cdot \frac{(\sqrt{x})'}{(1+x) \cdot \arctg \sqrt{x}},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2 \ln \arctg \sqrt{x}}{2x+1} + \frac{\ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x) \cdot \arctg \sqrt{x}},$$

$$y' = y \cdot \left( \frac{2 \ln \arctg \sqrt{x}}{2x+1} + \frac{\ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x) \cdot \arctg \sqrt{x}} \right),$$

$$y' = (\arctg \sqrt{x})^{\ln(2x+1)} \cdot \left( \frac{2 \ln \arctg \sqrt{x}}{2x+1} + \frac{\ln(2x+1)}{2\sqrt{x}(1+x) \cdot \arctg \sqrt{x}} \right).$$

### 1.5 Правило Лопіталя (розкриття невизначеностей виду $\left| \frac{0}{0} \right|$ та $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$ )

**Теорема (Правило Лопіталя).** Нехай функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  і неперервні і диференційовані в деякому околі точки  $x_0 = a$ , тобто  $0 < |x - a| < \varepsilon$ , причому  $\varphi'(x) \neq 0$ , тоді якщо існує скінчена або нескінчена границя відношення похідних  $f'(x)$  і  $\varphi'(x)$  при  $x \rightarrow a$ , то відношення функцій має ту ж границю, тобто:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left| \frac{0}{0} \right| \text{ або } \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження 1. Твердження теореми залишається в силі, якщо  $a = \infty$ , тобто:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left| \frac{0}{0} \right| \text{ або } \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження 2. Існування границі відношення похідних гарантує існування границі відношення функцій. Обернене твердження невірне, оскільки границя

відношення функцій може існувати при відсутності границі відношення похідних.

Зауваження 3. Якщо похідні  $f'(x)$  і  $\varphi'(x)$  будуть відповідати сформульованій теоремі, то можна гарантувати відношення других похідних і т.д.. Тобто, правило Лопіталя можна застосовувати послідовно декілька разів.

Зауваження 4. Інші невизначеності необхідно тотожно перетворювати до розглянутих:  $\left|\frac{0}{0}\right|$  або  $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ , щоб застосувати правило Лопіталя.

*Приклад.* Знайти границі функцій

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5+3x)}{2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{5+3x}}{2} = \frac{3}{10}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{5x}}{x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5e^{5x}}{2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{25e^{5x}}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$ ; (Застосували правило Лопіталя двічі)

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \ln x = |0 \cdot \infty| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-2/x^3} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} = 0;$$

(Виконали тотожне перетворення  $|0 \cdot \infty|$  до  $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ )

$$в) \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1) = |0 \cdot \infty| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{1/\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x-1}{-1/x \cdot (\ln x)^2} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot (\ln x)^2}{x-1} = \left|\frac{0}{0}\right| = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)^2 + \frac{2x \ln x}{x}}{1} = 0;$$
 (Виконали тотожне

перетворення і застосували правило Лопіталя двічі)

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = |\infty - \infty| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x} =$$

$$= \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2e^x + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x(2+x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2};$$

(Виконали тотожне перетворення і застосували правило Лопіталя двічі)

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x} = |0^0| = A,$$

функція є показниково-степенною, тому позначимо границю функції через  $A$ , та прологарифмуємо її:

$$\begin{aligned} \ln A &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \ln \arcsin x = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \ln \arcsin x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \arcsin x}{\operatorname{ctg} x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \end{aligned}$$

Отримали границю відношення функцій, до якої можна застосувати правило Лопіталя. Після його застосування маємо:

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{0}{1} = 0,$$

Далі скористалися еквівалентністю нескінченно малих.

Отже,  $\ln A = 0$  і тоді  $A = e^0 = 1$ .

## 1.6 Дослідження функції за допомогою похідної

Визначимо загальні правила дослідження функції, які дозволять зробити ескіз графіка функції.

### 1.6.1 Зростання і спадання функції

**Теорема.** Для того, щоб диференційована на проміжку  $(a; b)$  функція  $f(x)$  зростала (спадала) на цьому проміжку, необхідно і достатньо, щоб  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) при будь-якому  $x \in (a; b)$ .

*Приклад.* Знайти проміжки зростання і спадання функції  $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$ .

*Розв'язання.* Знайдемо область визначення функції:  $x \neq 4$ , тобто  $D(y) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$ . Знайдемо похідну цієї функції:

$$y' = \frac{(2x - 4)(x - 4) - (x^2 - 4x + 1)}{(x - 4)^2} = \frac{2x^2 - 8x - 4x + 16 - x^2 + 4x - 1}{(x - 4)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 8x + 15}{(x - 4)^2} = \frac{(x - 5)(x - 3)}{(x - 4)^2}; y' = 0; \frac{(x - 5)(x - 3)}{(x - 4)^2} = 0.$$

Відкілья знаходимо корені похідної:  $x = 5$  і  $x = 3$ . На рисунку 1 зображено інтервали зростання і спадання даної функції.

Знак  $y'$ :

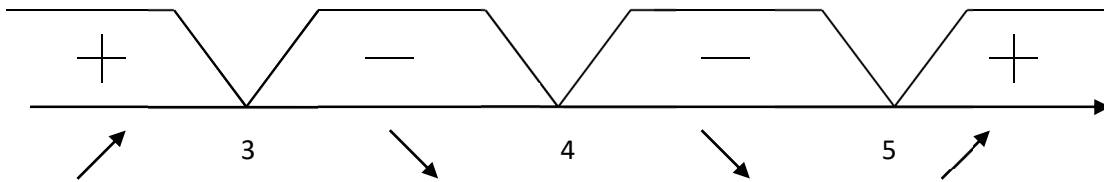


Рисунок 1

Зробимо висновок, що функція зростає, коли  $x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$ , функція спадає, коли  $x \in (3; 4) \cup (4; 5)$ .

### 1.6.2 Максимум і мінімум функції

Нехай функція  $y = f(x)$  визначена в точці  $x_0$  і її околі. Точка  $x_0$  називається *точкою максимуму (мінімуму) функції  $f(x)$* , якщо значення функції у точці  $x_0$  більше (менше) за її значення в усіх точках деякого околу точки  $x_0$ :  $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$  (або  $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ ), коли  $\Delta x > 0$  або  $\Delta x < 0$ .

Максимум і мінімум функції називають *екстремумами* або *екстремальними значеннями функції*.

**Теорема (необхідна умова існування екстремуму).** Якщо диференційована функція  $f(x)$  має у точці  $x_0$  максимум або мінімум, то необхідно, щоб її похідна в цій точці дорівнювала нулю або не існувала.

Зауважимо, що умова  $f'(x_0) = 0$  не є достатньою умовою існування екстремуму. Наприклад, для функції  $y = x^3$  її похідна  $y' = 3x^2$  дорівнює нулю при  $x = 0$ , але  $x = 0$  не є точкою екстремуму.

Значення аргументу, при яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними*.

**Теорема (достатня умова існування екстремуму).** Якщо при переході (зліва направо) через критичну точку  $x_0$  диференційованої в деякому околі цієї точки функції  $f(x)$  її похідна  $f'(x)$  змінює знак з плюса на мінус, то  $x_0$  – є точкою максимуму; якщо з мінуса на плюс, то  $x_0$  – є точкою мінімуму.

*Приклад.* Знайти критичні точки та проміжки зростання і спадання функції:  $y = x^3 - 3x$ .

*Розв'язання.* Нагадуємо, що будь – яке дослідження функції необхідно розпочинати з знаходження її області визначення. Тут  $D(y) = R$ .

Похідна цієї функції:  $y' = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$ ;  $f'(x) > 0$  при  $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ ;  $f'(x) < 0$  при  $x \in (-1; 1)$ .

При переході через точку  $x_0 = -1$  похідна функції змінює знак з «+» на «-», тобто в точці  $x_0 = -1$  знаходиться максимум функції. При переході через точку  $x_0 = 1$  похідна функції змінює знак з «-» на «+», в точці  $x_0 = 1$  знаходиться мінімум функції.

Отже, функція  $y = x^3 - 3x$  зростає на проміжках  $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$  і спадає на проміжку  $(-1; 1)$ . Максимум її знаходиться в точці  $x_0 = -1$ , мінімум – в точці  $x_0 = 1$ .



### 1.6.3 Опуклість графіка функції. Точки перегину

Нехай функція  $y = f(x)$  диференційована на проміжку  $(a; b)$ .

Графік функції  $f(x)$  називається *опуклим (угнутим)* на проміжку  $(a; b)$ , якщо усі точки кривої  $f(x)$  розташовані нижче (вище) точок дотичної, проведеної у будь – якій точці графіка на цьому проміжку.

Точку графіка функції  $f(x)$ , у якій змінюється напрямок опуклості, називають *точкою перегину*.

#### **Теорема (достатня умова існування точок перегину).**

Якщо друга похідна  $f''(x)$  при переході через точку  $x_0$ , в якій вона дорівнює нулю або не існує, змінює знак, то ця точка є точкою перегину.

*Приклад.* Дослідити функцію  $y = x^5 - 2x + 5$  на опуклість і знайти точки перегину.

*Розв'язання.* Область визначення  $D(y) = R$ . Знайдемо першу і другу похідні даної функції:  $y' = 5x^4 - 2$ ,  $y'' = 20x^3$ . Друга похідна дорівнює нулю  $y'' = 0$  при  $x = 0$ . Тому  $y'' > 0$  при  $x > 0$ ;  $y'' < 0$  при  $x < 0$ .

Отже, графік функції  $y = x^5 - 2x + 5$  є опуклим вгору на проміжку  $(-\infty; 0)$  і опуклим вниз на проміжку  $(0; \infty)$ . Точка  $(0; 5)$  є точкою перегину.

### 1.6.4 Асимптоти графіка функції

*Асимптотою графіка функції  $y = f(x)$*  називають пряму, відстань до якої від точки, яка лежить на кривій, прямує нуля, якщо ця точка рухається вздовж графіка функції до нескінченності.

Пряма  $x = a$  є *вертикальною асимптотою* графіка функції  $y = f(x)$ , якщо

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Рівняння похилої асимптоти будемо шукати у вигляді

$$y = kx + b, \text{ де } k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx).$$

Якщо хоча б одна з границь при знаходженні  $k$  і  $b$  не існує або дорівнює  $\infty$ , то похилих асимптот немає.

*Приклад.* Знайти асимптоти графіка функцій  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ .

*Розв'язання.* Область визначення  $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ .

Шукаємо вертикальні асимптоти графіка функції :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1}{0} = \infty;$$

звідси  $x = -1$  і  $x = 1$  є вертикальними асимптотами.

Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0.$$

Підставляючи  $k = 1$  і  $b = 0$  в рівняння  $y = kx + b$ , отримаємо:  $y = x$ , це шукана похила асимптота.

## 1.6.5 Повне дослідження функції

План дослідження функції:

1. знайти область визначення функції, її точки розриву й проміжки неперервності;
2. дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;
3. знайти точки перетину графіка функції з осями координат;
4. дослідити поведінку функції на нескінченності;
5. знайти інтервали монотонності та екстремуми функції;
6. знайти інтервали опуклості (угнутості) та точки перегину функції;
7. знайти асимптоти графіка функції;
8. побудувати ескіз графіка функції.

Порядок дослідження доцільно обирати згідно з особливостями даної функції.

*Приклад.* Дослідити функцію  $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$  та побудувати ескіз її графіка.

1. Область визначення:  $x \neq \pm 1$ ; тобто

$$D(y) \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty).$$

Прямі  $x = \pm 1$  служать вертикальними асимптотами, тому що

$$\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty.$$

2. Обчислимо  $y(-x) = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} = y(x)$ , тобто виконується

рівність  $y(-x) = y(x)$ , одже, функція парна і її графік симетричний відносно осі  $Oy$ .

3. Точка перетину з віссю  $Oy$ :  $x = 0$ ;  $y(0) = \frac{1+0^2}{1-0^2} = 1$ . Маємо точку  $A(0;1)$ . Точок перетину з віссю  $Ox$  нема. При  $y = 0$ , рівняння  $\frac{1+x^2}{1-x^2} = 0$  не має рішень.

4. Обчислюємо:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$ , тобто пряма  $y = -1$  служить горизонтальною асимптотою.

Знайдемо похилі асимптоти, які визначаються рівнянням

$$y = kx + b.$$

Знайдемо параметри  $k$  та  $b$ :

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x^2}{x(1-x^2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{1-3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{-6x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$$

Таким чином, отримали горизонтальну асимптоту:  $y = -1$ .

### 5. Інтервали монотонності та екстремуми.

Знайдемо  $y'(x)$ :

$$y'(x) = \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2};$$

$y'(x) = 0$ , якщо  $x = 0$  та  $y'(x)$  не існує, якщо  $x = \pm 1$  тобто критичною є тільки точка  $x = 0$ , оскільки точки  $x = \pm 1$  не належать області визначення функції.

Поведінку функції на інтервалах монотонності згідно знаку похідної показано на рисунку 2.

Визначимо знак  $y'(x)$ :

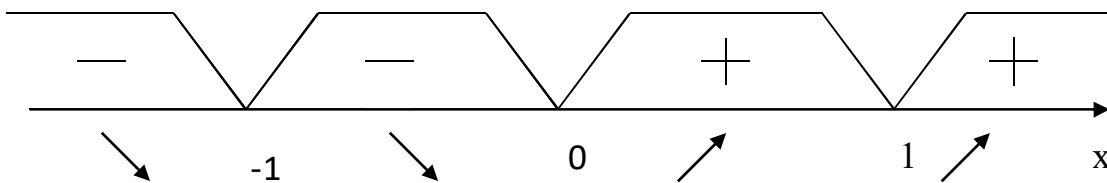


Рисунок 2

На інтервалах  $(-\infty, -1)$  та  $(-1, 0)$  функція спадає, оскільки тут  $y'(x) < 0$ .

На інтервалах  $(0, 1)$  та  $(1, \infty)$  функція зростає, оскільки тут  $y'(x) > 0$ .

Зміна знаку похідної при переході через точку  $x = 0$ , вказує на те, що точка  $B(0;1)$  є точкою екстремуму функції:  $y_{min} = y(0) = 1$ .

### 6. Інтервали опуклості і угнутості та точки перегину графіка функції.

Знайдемо другу похідну даної функції:

$$\begin{aligned} y''(x) &= (y'(x))' = \left( \frac{4x}{(1-x^2)^2} \right)' = \\ &= \frac{4(1-x^2)^2 - 4x \cdot 2 \cdot (1-x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}. \end{aligned}$$

Знак другої похідної і характер графіка функції на відповідних інтервалах приведені на рисунку 3.

Визначимо знак  $y''(x)$ :

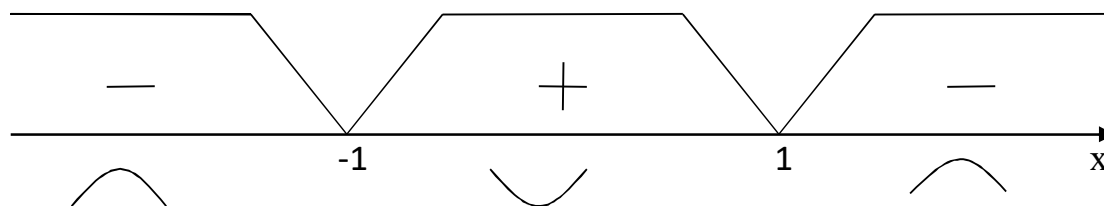


Рисунок 3

На інтервалах  $(-\infty, -1)$  та  $(1, \infty)$  графік функції опуклий, тому що тут  $y''(x) < 0$ . На інтервалі  $(-1, 1)$  графік функції угнутий, тому що тут  $y''(x) > 0$ . Точок перегину немає.

7. Асимптоти графіка функції знайдені у п.1 і п.4.

8. Побудуємо ескіз графіка, використовуючи отриману вище інформацію (рис. 4) функції:

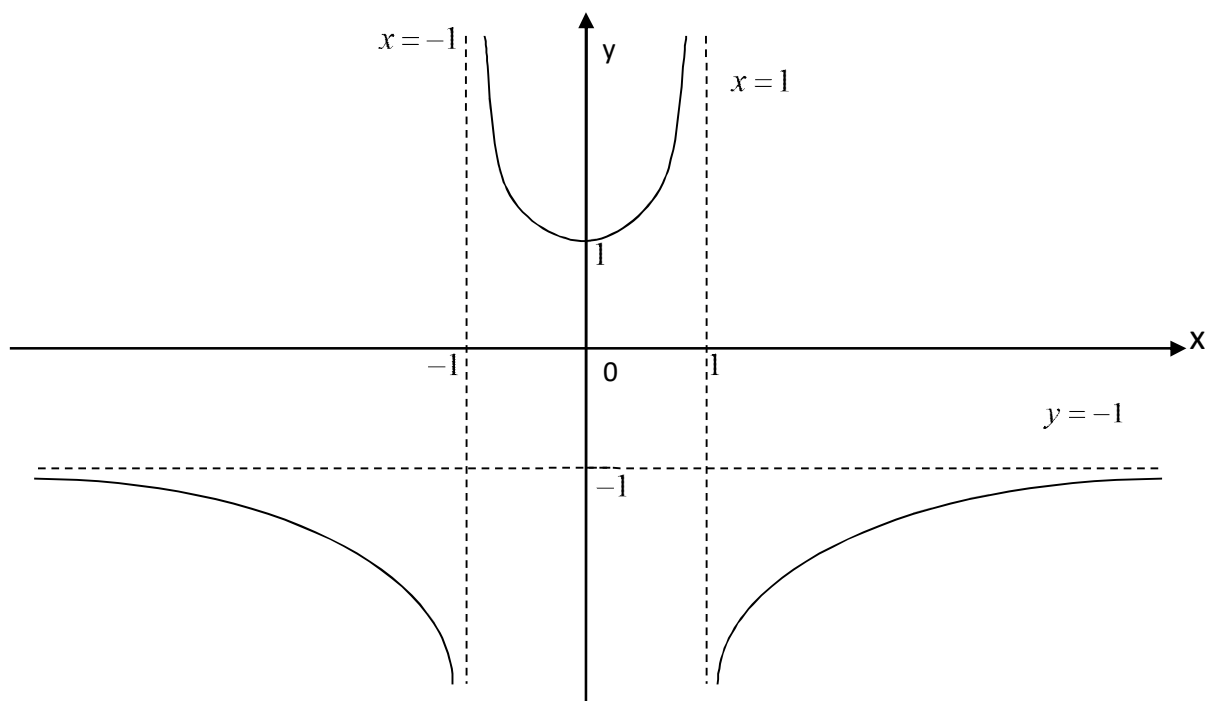


Рисунок 4

## РОЗДІЛ 2 ЧИСЛОВІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

### 2.1 Числові ряди

Рядом називають суму нескінченної множини елементів

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots, \quad (1)$$

які є членами нескінченної послідовності  $\{U_n\}$ .

Елементи  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n, \dots$  називають членами ряду.

Скорочено ряд позначають так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots.$$

Сума  $n$  перших членів ряду

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n. \quad (2)$$

називається *частковою сумою ряду*. Ряд називається *збіжним*, якщо існує скінченна границя послідовності його часткових сум:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Якщо границя послідовності часткових сум не існує або дорівнює нескінченності, то ряд називається *розбіжним*.

*Необхідна ознака збіжності ряду*: якщо ряд  $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$  збігається, то його загальний член  $U_n$  наближається до нуля, при нескінченному зростанні  $n$ , тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0. \quad (3)$$

Ця ознака не є достатньою.

*Приклад*. Знайти суму ряду та дослідити його на збіжність.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

*Розв'язання*. 1) Розкладемо даний раціональний дріб на суму найпростіших раціональних дробів, застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів. Потім послідовно розглянемо часткові суми даного ряду.

Розкладемо квадратний тричлен на лінійні множники:

$$4n^2 + 8n + 3 = 4n^2 + 8n + 4 - 4 + 3 = (2n + 2)^2 - 1 = (2n + 1)(2n + 3).$$

Тепер загальний член ряду представимо у вигляді:

$$U_n = \frac{2}{4n^2 + 8n + 3} = \frac{2}{(2n + 1)(2n + 3)}.$$

Розкладемо отриманий раціональний дріб на суму найпростіших раціональних дробів:

$$\frac{2}{(2n + 1)(2n + 3)} = \frac{A}{2n + 1} + \frac{B}{2n + 3};$$

$$2 = A(2n + 3) + B(2n + 1);$$

$$\text{при } n = -\frac{1}{2}, \text{ маємо: } 2 = 2A, \quad A = 1;$$

$$\text{при } n = -\frac{3}{2}, \text{ маємо: } 2 = -2B, \quad B = -1.$$

Тому маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n + 1} - \frac{1}{2n + 3} \right).$$

Розглянемо часткові суми даного ряду.

$$S_1 = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} - \frac{1}{2 \cdot 1 + 3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5};$$

$$S_2 = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} - \frac{1}{2 \cdot 1 + 3} + \frac{1}{2 \cdot 2 + 1} - \frac{1}{2 \cdot 2 + 3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7};$$

$$S_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{2 \cdot 3 + 1} - \frac{1}{2 \cdot 3 + 3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9};$$

...

$$S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n + 1} + \frac{1}{2n + 1} - \frac{1}{2n + 3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n + 3}.$$

Для знаходження суми  $S$  даного ряду, перейдемо до границі:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2n + 3} \right) = \frac{1}{3}.$$

Отже, можемо зробити висновок, що ряд збігається.

2) Формула суми нескінченно спадаючої геометричної прогресії:

$$S = \frac{b_1}{1 - q},$$

де  $b_1$  - перший член нескінченно спадаючої геометричної прогресії, а  $q$  - її знаменник.

Представимо ряд у вигляді:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{3 \cdot 2^4} + \dots = \\ &= \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \right). \end{aligned}$$

Знаменник  $q = 1/2$ , а перший член  $b_1=1$ . Сума дорівнює:

$$S = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1 - 1/2} \right) = \frac{2}{3}.$$

Отже, можемо зробити висновок, що ряд збігається.

### 2.1.1 Ряди з додатними членами

Для числових рядів з додатними членами ( $U_n > 0$ ), при дослідженні на збіжність, використовують наступні достатні ознаки збіжності:

*Ознака порівняння.* Якщо ряд з додатними членами

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots \tag{4}$$

порівняти з іншим рядом з додатними членами

$$V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n + \dots \tag{5}$$

збіжність або розбіжність котрого відома, і якщо починаючи з деякого номера  $n$  виконується умова:

- 1)  $U_n \leq V_n$  і ряд (5) збігається, то і ряд (4) також збігається;
- 2)  $U_n \geq V_n$  і ряд (5) розбігається, то і ряд (4) також розбігається.

При використанні цієї ознаки, в якості еталонного ряду часто використовують нескінченну геометричну прогресію

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad q > 0,$$



яка при  $q < 1$  збігається, а при  $q \geq 1$  розбігається, або узагальнений гармонійний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

який при  $p > 1$  збігається і розбігається при  $p \leq 1$ .

*Ознака Д'Аламбера.* Якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = C,$$

то при  $C < 1$  ряд збігається, а при  $C > 1$  розбігається, а при  $C = 1$  питання про збіжність залишається без відповіді.

*Радикальна ознака Коші.* Якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = C,$$

то при  $C < 1$  ряд збігається, при  $C > 1$  розбігається, а при  $C = 1$  питання про збіжність залишається без відповіді.

*Інтегральна ознака Коші.* Ряд з додатними членами  $U_n = f(n)$  збігається або розбігається, якщо збігається або розбігається відповідний невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(x) dx, \text{ де } f(x) \text{ — неперервно спадаюча функція.}$$

*Приклад.* Дослідити збіжність ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 7n + 4}; \quad 2) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n^2 + 1}{4n^2 + 5} \right)^n; \quad 4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

*Розв'язання.*

1) Порівняємо цей ряд з узагальненим гармонійним рядом. В якості еталонного ряду обираємо  $V_n = \frac{1}{n^2}$ , так як  $p = 2$ , то цей ряд є збіжним. Виконаємо порівняння  $U_n$  з  $V_n$ :

$$\frac{1}{n^2 + 7n + 4} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Отже, згідно ознаки порівняння, даний ряд є збіжним.

2) Знаючи  $n$ -ий член ряду, знаходимо наступний  $(n+1)$ -й член:

$$U_n = \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}; \quad U_{n+1} = \frac{7^{3(n+1)}}{(2(n+1)-5)!} = \frac{7^{3n} \cdot 7^3}{(2n-3)!} =$$

$$= \frac{7^{3n} \cdot 7^3}{(2n-5)! \cdot (2n-4) \cdot (2n-3)}.$$

Знайдемо границю відношення  $U_{n+1}$  до  $U_n$  при необмеженому зростанні  $n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{3n} \cdot 7^3 \cdot (2n-5)!}{(2n-5)! \cdot (2n-4) \cdot (2n-3) \cdot 7^{3n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^3}{(2n-4) \cdot (2n-3)} = 0.$$

$C = 0 < 1$ , тому робимо висновок, що даний ряд збігається.

3) За радикальною ознакою Коші необхідно знайти границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n^2+1}{4n^2+5}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+1}{4n^2+5} = \frac{3}{4}.$$

$$C = \frac{3}{4} < 1 - \text{ряд збігається.}$$

4) Замінімо у заданому виразі загального члену ряду  $U_n = f(n)$  номер  $n$  неперервною змінною  $x$  і переконаємося, що функція  $f(x)$  є неперервною і спадаючою на нескінченному інтервалі зміни  $x$ . Потім знаходимо невласний інтеграл від функції  $f(x)$  з нескінченною верхньою границею.

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}; \quad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_2^N \frac{dx}{x \ln^2 x} = \left[ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \\ t_H = \ln 2; t_B = \infty \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^N \frac{dt}{t^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t}\right) \Big|_{\ln 2}^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Big|_{\ln 2}^N = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Інтеграл збігається, тому збігається і ряд.

## 2.1.2 Абсолютна та умовна збіжність знакозмінного ряду.

### Ознака збіжності знакозмінного ряду

Знакозмінний ряд ( з членами різних знаків)

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots$$

називається *абсолютно* збіжним, якщо збігається ряд, складений з абсолютних значень його членів

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n| = |U_1| + |U_2| + |U_3| + \dots$$

Ряд, знаки членів котрого строго чергуються

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots + (-1)^{n+1}U_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}U_n, \quad (U_n > 0)$$

збігається, якщо його члени зменшуються за абсолютним значенням, тобто  $U_1 > U_2 > U_3 >$

... і загальний член ряду на нескінченност прямує до нуля:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0. \text{ (ознака Лейбніца).}$$

*Приклад.* Дослідити збіжність знакозмінного ряду.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

*Розв'язання.*

1)  $U_n = \frac{1}{2n-1}$ . Досліджуємо загальний член ряду за ознакою Лейбніца:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0,$$

отже даний ряд збігається. Для того щоб установити збігається ряд абсолютно чи умовно, дослідимо ряд, складений з абсолютних значень членів даного ряду. Застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \ln(2x-1) \Big|_1^N = \frac{1}{2} (\lim_{N \rightarrow \infty} \ln(2N-1) - 1) = \infty,$$

невласний інтеграл розбігається, тому можемо зробити висновок, що ряд збігається умовно.

2)  $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$ . Дослідимо загальний член ряду за ознакою Лейбніца:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$ , ряд збігається. Застосуємо інтегральну ознаку Коші для з'ясування абсолютної збіжності:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{x^2+x} = \\ &= \left[ x^2+x = x^2+x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right| \Big|_1^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Big|_1^N = \\ &= \ln \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{N+1} \right) - \ln \frac{1}{2} = \ln 1 + \ln 2 = \ln 2. \end{aligned}$$

Інтеграл збігається, а отже ряд збігається абсолютно.

## 2.2 Функціональні ряди

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + \dots$ , члени якого є функціями від змінної  $x$ , називається *функціональним*. При різних значеннях  $x$  функціональний ряд перетворюється в числовий, який може бути збіжним або розбіжним.

*Сукупність значень  $x$ , при яких функціональний ряд збігається, називається областю збіжності.*

З усіх функціональних рядів найпростішими і найпоширенішими є степеневі ряди виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

або більш загального виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$$

Для визначення області збіжності функціонального ряду, як правило, спочатку використовують ознаку Д'Аламбера, а потім ті значення  $x$ , для яких ця ознака не відповідає на питання збіжності ряду ( $C = 1$ ), досліджуються окремо.

*Приклад.* Визначити інтервали збіжності степеневих рядів:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n-1} \sqrt{n+1}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{3n}}{n^2}.$$

*Розв'язання.*

1) За відомим загальним членом ряду  $U_n$ , знайдемо  $U_{n+1}$ :

$$U_n = \frac{x^n}{2^{n-1} \sqrt{n+1}}; \quad U_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{2^n \sqrt{n+2}}.$$

Далі, за ознакою Д'Аламбера, знаходимо границю

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} 2^{n-1} \sqrt{n+1}}{2^n \sqrt{n+2} x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{2} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \right| = \\ &= \frac{|x|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{|x|}{2}. \end{aligned}$$

З'ясуємо, при яких значеннях  $x$  ця границя буде менше одиниці, тобто

$$\frac{|x|}{2} < 1; \quad -1 < \frac{x}{2} < 1; \quad -2 < x < 2.$$

Згідно ознаки Д'Аламбера, при будь-якому значенні  $x$  із знайденого інтервалу даний ряд збігається абсолютно, а при  $|x| > 2$  розбігається. Граничні точки  $x = \pm 2$  досліджуємо окремо.

При  $x = -2$  отримуємо числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2)^n}{2^{n-1} \sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n 2^n}{2^{n-1} \sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}},$$

який розбігається, що випливає із ознаки порівняння його з узагальненим гармонійним рядом.

При  $x = 2$  отримуємо знакозмінний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2^{n-1} \sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{\sqrt{n+1}},$$

котрий збігається за ознакою Лейбніца:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}} = 0$  і не збігається абсолютно за ознакою порівняння (див. вище), а отже збігається умовно.

Отже, інтервал збіжності даного степеневого ряду є напіввідкритий інтервал:  $-2 < x \leq 2$ .

$$2) U_n = \frac{(x+5)^{3n}}{n^2}; U_{n+1} = \frac{(x+5)^{3n+3}}{(n+1)^2};$$

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+5)^{3n+3} n^2}{(n+1)^2 (x+5)^{3n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+5)^3 n^2}{(n+1)^2} \right| = \\ &= |x+5|^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 = |x+5|^3. \end{aligned}$$

Визначимо, при яких значеннях  $x$  ряд збігається:

$$|x+5|^3 < 1; |x+5| < 1; -1 < x+5 < 1; -6 < x < -4.$$

Граничні точки інтервалу досліджуємо окремо.

При  $x = -6$  отримуємо знакозмінний числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ , який збігається абсолютно за ознакою Лейбніца.

При  $x = -4$  отримуємо числовий ряд з додатними членами  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Згідно з ознакою порівняння ряд збігається.

Інтервал збіжності ряду:  $-6 \leq x \leq -4$ .

### 2.3 Ряди Тейлора та Маклорена

Рядом Тейлора для функції  $f(x)$  в околі точки  $a$  називається степеневий ряд відносно двочлена  $x - a$  виду

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots \quad (T)$$

При  $a = 0$  ряд Тейлора є степеневий ряд відносно незалежної змінної  $x$ , який називається рядом Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (M)$$

Розкладання деяких елементарних функцій в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty, \infty) ; \quad (6)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (-\infty, \infty) ; \quad (7)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty, \infty) ; \quad (8)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots \\ \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1,1) ; \quad (9)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1,1] ; \quad (10a)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \quad [-1,1) ; \quad (10b)$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad (-1,1) ; \quad (11)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots \\ \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad [-1,1] ; \quad (12)$$

Для того, щоб розкласти дану функцію в ряд Тейлора необхідно:

1) написати ряд Тейлора для даної функції, тобто обчислити значення цієї функції та її похідних при  $x = a$  і підставити отримані значення в загальний вираз ряду Тейлора (Т);

2) дослідимо отриманий ряд на збіжність та знайти інтервал збіжності.

*Приклад.* Розкласти функції в ряд Тейлора:

$$1) f(x) = \frac{1}{2x-1}, \text{ при } a = 2; \quad 2) f(x) = \ln(3x-1), \text{ при } a = 1.$$

*Розв'язання.*

1) Знайдемо похідні та обчислимо їх значення при  $x = a$ :

$$f(x) = \frac{1}{2x-1}, \quad f(2) = \frac{1}{3};$$

$$f'(x) = \frac{(-1)}{(2x-1)^2} \cdot 2, \quad f'(2) = \frac{(-1) \cdot 2}{3^2};$$

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{(-1)}{(2x-1)^4} \cdot 2(2x-1) \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 2^2}{(2x-1)^3},$$

$$f''(2) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 2^2}{3^3} = \frac{2! \cdot 2^2}{3^3};$$

$$f^{(3)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot \frac{(-1)}{(2x-1)^6} \cdot 3(2x-1)^2 \cdot 2 = \frac{(-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3}{(2x-1)^4},$$

$$f^{(3)}(2) = \frac{(-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3}{3^4} = \frac{(-1) \cdot 3! \cdot 2^3}{3^4};$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot 2^n}{(2x-1)^{n+1}}, \quad f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot 2^n}{3^{n+1}},$$

.....

Підставляючи отримані значення в ряд Тейлора (Т), отримаємо:

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{1! \cdot 2}{1! \cdot 3^2} (x-2) + \frac{2! \cdot 2^2}{2! \cdot 3^3} (x-2)^2 - \frac{3! \cdot 2^3}{3! \cdot 3^4} (x-2)^3 + \dots +$$

$$+ \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot 2^n}{n! \cdot 3^{n+1}} (x-2)^n + \dots =$$



$$= \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{2}{3}(x-2) + \frac{2^2}{3^2}(x-2)^2 - \frac{2^3}{3^3}(x-2)^3 + \dots + \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{3^n}(x-2)^n + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot (x-2)^n}{3^n}.$$

Досліджуємо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$U_n = \frac{2^n \cdot (x-2)^n}{3^n}; \quad U_{n+1} = \frac{2^{n+1} \cdot (x-2)^{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2 \cdot 2^n \cdot (x-2)^n \cdot (x-2)}{3 \cdot 3^n};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2 \cdot 2^n \cdot (x-2)^n \cdot (x-2) \cdot 3^n}{3 \cdot 3^n \cdot 2^n \cdot (x-2)^n} \right| = \frac{2}{3} |x-2|.$$

Визначимо, при яких значеннях  $x$  ряд збігається:

$$\frac{2}{3} |x-2| < 1; \quad -1 < \frac{2}{3}(x-2) < 1; \quad -\frac{3}{2} < x-2 < \frac{3}{2}; \quad \frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}.$$

Граничні точки цього інтервалу дослідимо окремо.

При  $x = \frac{1}{2}$  отримаємо ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot (-1)^n \cdot 3^n}{3^n \cdot 2^n} =$   
 $= \sum_{n=0}^{\infty} 1$  – ряд розбігається.

При  $x = \frac{7}{2}$  отримаємо ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  – ряд розбігається.

Інтервал збіжності ряду:  $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$ .

$$2) f(x) = \ln(4x-1), \quad f(1) = \ln 3;$$

$$f'(x) = \frac{1}{4x-1} \cdot 4, \quad f'(1) = \frac{1 \cdot 4}{3};$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(4x-1)^2} \cdot 4^2, \quad f''(1) = \frac{-1 \cdot 4^2}{3^2};$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot (4x-1)}{(4x-1)^4} \cdot 4^3 = \frac{2! \cdot 4^3}{(4x-1)^3}, \quad f^{(3)}(1) = \frac{2! \cdot 4^3}{3^3};$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot 4^n}{(4x-1)^n}, \quad f^n(1) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot 4^n}{3^n};$$

.....

Підставимо отримані значення в ряд Тейлора (Т)

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln 3 + \frac{4}{3}(x-1) - \frac{1! \cdot 4^2}{2! \cdot 3^2}(x-1)^2 + \frac{2! \cdot 4^3}{3! \cdot 3^3}(x-1)^3 + \dots \\ &+ \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot 4^n}{n! \cdot 3^n}(x-1)^n + \dots = \\ &= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot 4^n}{n! \cdot 3^n}(x-1)^n = \\ &= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4^n}{n \cdot 3^n}(x-1)^n. \end{aligned}$$

Дослідимо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{4^n \cdot (x-1)^n}{n \cdot 3^n}; \quad U_{n+1} = \frac{4^{n+1} \cdot (x-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4^{n+1} \cdot (x-1)^{n+1} \cdot n \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot (n+1) \cdot 4^n \cdot (x-1)^n} \right| = \\ &= \frac{4}{3} |x-1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{4}{3} |x-1| \end{aligned}$$

Визначимо, при яких значеннях  $x$  ряд збігається:

$$\frac{4}{3} |x-1| < 1; \quad -1 < \frac{4}{3}(x-1) < 1; \quad \frac{1}{4} < x < \frac{7}{4}.$$

При  $x = \frac{1}{4}$ , отримуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \text{ряд збігається умовно}$$

за ознакою Лейбніця (див. вище).

При  $x = \frac{7}{4}$ , отримуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{ряд розбігається (див. вище)}.$$

Область збіжності ряду:  $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right)$ .

*Приклад.* Розкласти функції в ряд Маклорена, з'ясувати області збіжності отриманих рядів:

$$1) f(x) = e^{3x}; \quad 2) f(x) = x \cdot \sin 2x.$$

*Розв'язання.*

1) Розкладання функції  $e^{3x}$  в ряд Маклорена легко отримати, замінивши у формулі (1)  $x$  на  $3x$ :

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \dots + \frac{(3x)^n}{n!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$$

Досліджуємо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$U_n = \frac{3^n x^n}{n!}, \quad U_{n+1} = \frac{3^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{3x \cdot 3^n x^n}{n! (n+1)}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3x \cdot 3^n \cdot x^n \cdot n!}{n! \cdot (n+1) \cdot 3^n \cdot x^n} \right| = |3x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = |3x| \cdot 0 = 0,$$

даний ряд збігається при  $x \in (-\infty, \infty)$ .

2) розкладемо  $\sin 2x$  за формулою (2):

$$\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$x \cdot \sin 2x = x \left( 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+1)!}$$

Досліджуємо збіжність отриманого ряду за ознакою Д'Аламбера:

$$U_n = \frac{2^{2n+1}x^{2n+2}}{(2n+1)!}, \quad U_{n+1} = \frac{2^{2n+3}x^{2n+4}}{(2n+3)!} = \frac{2^{2n+3}x^{2n+4}}{(2n+1)! \cdot (2n+2) \cdot (2n+3)}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{2n+3}x^{2n+4} \cdot (2n+1)!}{(2n+1)! \cdot (2n+2) \cdot (2n+3) \cdot 2^{2n+1}x^{2n+2}} \right| = \\ &= 4x^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0, \end{aligned}$$

отже, даний ряд збігається при  $x \in (-\infty, \infty)$ .

## 2.4 Застосування степеневих рядів

Степеневі ряди застосовують до наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів, розв'язання диференціальних рівнянь.

*Приклад.* Обчислити наближено зазначену величину з точністю до  $\alpha$ , використавши розклад в степеневий ряд відповідно підібраної функції.

$$1) \sqrt[3]{500}, \alpha = 0,001; \quad 2) \ln 7, \alpha = 0,0001.$$

*Розв'язання.* 1) Наближене обчислення зазначеної функції виконується за допомогою біноміального ряду.

Представимо дане число у вигляді, до якого можливо застосувати біноміальний ряд:

$$\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{1000 \cdot \frac{1}{2}} = 10 \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 10 \sqrt[3]{1 - \frac{1}{2}} = 10 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

В біноміальний ряд підставимо замість  $x$  величину  $(-1/2)$ ,  $m = 1/3$ .

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots \\ &\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \\ &+ \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)}{4!}\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{3}-3\right)\left(\frac{1}{3}-4\right)}{5!}\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \end{aligned}$$

$$+ \dots = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{5}{648} - \frac{5}{1944} - \frac{11}{11644} - \dots = 1 - 0,1666666 - 0,0277777 - \\ - 0,007716 - 0,002572 - 0,0009446 - \dots \approx 0,79396.$$

$$\sqrt[3]{500} \approx 10 \cdot 0,79396 \approx 7,9396.$$

$$2) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1,1];$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \quad [-1,1)$$

Аргумент функції не задовольняє умові  $x \in (-1,1)$ , тому скористаємося наступною формулою:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right); \quad x \neq 1.$$

$$\frac{1+x}{1-x} = 7; \quad 7(1-x) = 1+x; \quad 8x = 6; \quad x = \frac{3}{4} = 0,75.$$

$$\ln 7 = \ln \frac{1+0,75}{1-0,75} = 2 \left( 0,75 + \frac{0,75^3}{3} + \frac{0,75^5}{5} + \frac{0,75^7}{7} + \dots \right) = \\ = 2(0,75 + 0,140625 + 0,04746 + 0,019069 + \dots) = 1,914308.$$

*Приклад.* Обчислити визначений інтеграл з точністю  $\alpha = 0,0001$ .

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx$$

*Розв'язання.* Даний інтеграл не можливо обчислити в елементарних функціях. Тому підінтегральну функцію необхідно розкласти в степеневий ряд і перевірити, чи належать границі інтегрування області збіжності цього ряду, якщо так, то наближенне обчислення інтегралу можливе.

Розкладемо функцію  $y = \sin(x^2)$  в степеневий ряд за формулою:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

замінивши в ній  $x$  на  $x^2$ . Отримаємо

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \dots$$

Знайдемо область збіжності отриманого степеневого ряду, застосовуючи ознаку Д'Аламбера.

$$U_n = \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}; U_{n+1} = \frac{x^{4n+6}}{(2n+3)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{4n+6}(2n+1)!}{(2n+3)!x^{4n+2}} \right| = x^4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = x^4 \cdot 0 = 0.$$

Область збіжності  $(-\infty, \infty)$ . Відрізок  $[0,1]$  належить області збіжності. Таким чином,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin(x^2) dx &= \int_0^1 \left( x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots \right) dx = \\ &= \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \dots \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \frac{1}{15 \cdot 7!} + \dots = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \dots \end{aligned}$$

Отримали знаковмінний числовий ряд. Остаток ряду не перевищує першого із відкиданих членів. У даному випадку достатньо взяти перші два члена, а

$$R_3 < \frac{1}{1320} < 8 \cdot 10^{-4}.$$

Тобто, вказана точність буде дотримуватись. Тому

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} \approx 0,3095.$$

## РОЗДІЛ 3 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

### 3.1 Поняття первісної функції і невизначеного інтеграла

Відомо, що однією з основних задач диференційного числення є задача знаходження похідної або диференціала даної функції.

За означенням, первісною функцією для функції  $f(x)$ , визначеної на проміжку  $(a; b)$ , називають функцію  $F(x)$ , яка визначена на тому самому проміжку і задовольняє умові

$$F'(x) = f(x) \text{ або } dF(x) = f(x)dx.$$

Сукупність всіх первісних функції  $f(x)$ , де  $x \in (a; b)$ , називається невизначеним інтегралом від функції  $f(x)$  на цьому проміжку:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

### 3.2 Властивості невизначеного інтеграла

1.  $(\int f(x)dx)' = f(x)$ ,
2.  $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$ ,
3.  $\int dF(x) = F(x) + C$ ,
4.  $\int Cf(x) = C \int f(x)dx$ , де  $C - \text{const} \neq 0$ ,
5.  $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$ ,
6.  $\int f(u)du = F(u) + C$ , де  $u = \varphi(x)$ - диференційовна функція від незалежної змінної  $x$ .
7.  $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$ .

## Таблиця основних інтегралів

$$1) \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1, \alpha \in \mathbb{R}, \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C, \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C,$$

$$2) \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C,$$

$$3) \int a^u = \frac{a^u}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1, \quad \int e^u du = e^u + C,$$

$$4) \int \sin u \cdot du = -\cos u + C,$$

$$5) \int \cos u \cdot du = \sin u + C,$$

$$6) \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C,$$

$$7) \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C,$$

$$8) \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C, a \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

$$9) \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C, a \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

$$10) \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C, |a| > |u|, a \neq 0,$$

$$11) \int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}} = \ln|u + \sqrt{u^2+A}| + C,$$

Зауважимо, що тут  $\alpha, A$  і  $a$  - сталі,  $u$  - незалежна змінна або будь-яка диференційована функція від незалежної змінної.

### 3.3 Безпосереднє інтегрування і метод розкладання

Під безпосереднім інтегруванням розуміють пряме використання таблиці інтегралів.

Метод розкладу ґрунтується на застосуванні властивостей 4 і 5 невизначеного інтегралу. Тут слід також мати на увазі, що даний інтеграл може



бути зведений до одного або кількох табличних інтегралів після елементарних тотожних перетворень над підінтегральною функцією.

*Приклад.* Знайти: 1)  $\int (8x^7 - 3x^2 + 3x + 10)dx$ ; 2)  $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}}$ ;

$$3) \int \cos(4x - 5) dx; 4) \int \frac{dx}{5x^2 - 1}$$

*Розв'язання.*

1) Скориставшись властивостями 4 і 5 невизначеного інтеграла, будемо мати

$$\begin{aligned} \int (8x^7 - 3x^2 + 3x + 10)dx &= \int 8x^7 dx - \int 3x^2 dx + \int 3x dx + \int 10 dx = \\ &= 8 \int x^7 dx - 3 \int x^2 dx + 3 \int x dx + 10 \int dx = \\ &= x^8 - x^3 + \frac{3x^2}{2} + 10x + C. \end{aligned}$$

Відзначимо, що додавати довільну сталу після знаходження кожного інтеграла не слід. Досить всі довільні сталі підсумувати і результат, позначений однією буквою  $C$ , записати вкінці, тобто після того, як усі інтеграли будуть знайдені.

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}} &= \int \frac{dx}{(2-5x)^{\frac{1}{5}}} = \int (2-5x)^{-\frac{1}{5}} dx = \frac{(2-5x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5} \cdot (-5)} + C = \\ &= -\frac{\sqrt[5]{(2-5x)^4}}{4} + C. \end{aligned}$$

У цьому прикладі ми скористались властивістю (7)

$$3) \int \cos(4x - 5) dx = \frac{1}{4} \sin(4x - 5) + C.$$

$$4) \int \frac{dx}{5x^2 - 1} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \ln \left| \frac{x - \frac{1}{\sqrt{5}}}{x + \frac{1}{\sqrt{5}}} \right| + C = \frac{\sqrt{5}}{10} \ln \left| \frac{\sqrt{5}x - 1}{\sqrt{5}x + 1} \right| + C.$$

### 3.4 Інтегрування методом заміни змінної (метод підстановки)

Приклад. Знайти 1)  $\int \frac{e^{\arctg 2x}}{1+4x^2} dx$ ; 2)  $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}+7}}$ ; 3)  $\int 7\sin^3 x \cos x dx$ .

Розв'язання. 1) Заданий інтеграл можна подати у вигляді:

$$\int \frac{e^{\arctg 2x}}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{\arctg 2x} \cdot \frac{2}{1+4x^2} dx = \left. \begin{array}{l} u = \arctg 2x \\ du = \frac{2}{1+4x^2} dx \\ \frac{du}{2} = \frac{1}{1+4x^2} dx \end{array} \right| =$$

$$= \int e^u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} e^{\arctg 2x} + C.$$

Заміну змінної розміщуємо після інтеграла у вертикальних дужках.

$$2) \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}+7}} = \frac{1}{6} \int \frac{6x^5 dx}{\sqrt{(x^6)^2+7}} = \left. \frac{1}{6} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}} \right|_{dt = 6x^5 dx} =$$

$$= \frac{1}{6} \ln |t + \sqrt{t^2+7}| + C.$$

Повертаючись до початкової змінної, маємо:

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}+7}} = \frac{1}{6} \ln |x^6 + \sqrt{x^{12}+7}| + C.$$

$$3) \int 4\sin^3 x \cos x dx = 4 \int (\sin x)^3 \cos x dx = \left. \int u^3 du \right|_{u = \sin x, du = \cos x dx} =$$

$$= 4 \int u^3 du = 4 \cdot \frac{u^4}{4} + C = (\sin x)^4 + C;$$

Останній вираз отримали після тригонометричних перетворень.

Приклад. Знайти  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ .

Розв'язання. Маємо,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} &= \left| \begin{array}{l} x+1 = t^2 \\ x = t^2 - 1 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2 \int \frac{t}{t+1} dt = 2 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = \\ &= 2 \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2t - 2\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x+1} - 2\ln|\sqrt{x+1}+1| + C.\end{aligned}$$

### 3.5 Метод інтегрування частинами

Як вже відзначалося раніше, цей метод, як і метод підстановки, який був щойно розібраний, належить до числа основних методів інтегрування.

Якщо  $u(x)$  і  $v(x)$  - диференційовні функції від  $x$ , то має місце формула

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du,$$

яка називається формулою інтегрування частинами, а метод інтегрування, що ґрунтується на застосуванні цієї формули, методом інтегрування частинами.

Отже, методом інтегрування частинами обчислюються інтеграли типу:

$$1. \int P_n(x) \cdot \begin{array}{l} \sin(ax+b) \\ \cos(ax+b) \\ tg(ax+b) \\ ctg(ax+b) \end{array} \cdot dx, \quad (u = P_n(x));$$

Зрозуміло, що береться одна з тригонометричних функцій.

$$2. \int P_n(x) a^x dx, \quad (u = P_n(x));$$

$$3. \int \log_a(ax+b) dx, \quad (u = \log_a(ax+b));$$

$$4. \int P_n(x) \log_a(ax+b) dx; \quad (u = \log_a(ax+b));$$

$$5. \int \begin{matrix} \arcsin(ax+b) \\ \arccos(ax+b) \\ \operatorname{arctg}(ax+b) \\ \operatorname{arcctg}(ax+b) \end{matrix} \cdot dx; \quad \left( u = \begin{matrix} \arcsin(ax+b) \\ \arccos(ax+b) \\ \operatorname{arctg}(ax+b) \\ \operatorname{arcctg}(ax+b) \end{matrix} \right);$$

$$6. \int P_n(x) \cdot \begin{matrix} \arcsin(ax+b) \\ \arccos(ax+b) \\ \operatorname{arctg}(ax+b) \\ \operatorname{arcctg}(ax+b) \end{matrix} \cdot dx; \quad \left( u = \begin{matrix} \arcsin(ax+b) \\ \arccos(ax+b) \\ \operatorname{arctg}(ax+b) \\ \operatorname{arcctg}(ax+b) \end{matrix} \right);$$

і багато-багато інших...

### Зразки розв'язання прикладів

*Приклад.* Знайти 1)  $\int x^2 \sin 3x dx$ ; 2)  $\int x^3 \ln x dx$ ; 3)  $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$ .

*Розв'язання.* 1) Інтегруємо частинами :

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin 3x dx &= \left| \begin{matrix} u = x^2, & du = 2x dx \\ dv = \sin 3x dx, & v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{matrix} \right| = \\ &= -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x - \int \left( -\frac{1}{3} \cos 3x \right) 2x dx = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{3} \int x \cos 3x dx. \end{aligned}$$

Проміжні обчислення розташовуємо між вертикальних дужок. До останнього інтеграла застосовуємо формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} \int x \cos 3x dx &= \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = \cos 3x dx, & v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x dx = \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x. \end{aligned}$$

Таким чином, остаточно будемо мати

$$\int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x \right) + C =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{9}x \sin 3x + \frac{2}{27} \cos 3x + C.$$

2) Тут  $u = \ln x$ ,  $dv = x^3 dx$ , одержимо

$$\int x^3 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^3 dx, \quad v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \end{array} \right| = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{16} \cdot x^4 + C.$$

$$3) \int x \cdot \arctg x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arctg x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x dx, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot \arctg x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \left( x^2 \cdot \arctg x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \right) = \frac{1}{2} \left( x^2 \cdot \arctg x - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( x^2 \cdot \arctg x - \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( x^2 \cdot \arctg x - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \right) = \frac{1}{2} (x^2 \cdot \arctg x - x + \arctg x) + C.$$

### 3.6 Інтегрування раціональних функцій

Нагадаємо, що раціональною функцією називається функція виду

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

де  $P_n(x)$  і  $Q_m(x)$  - алгебраїчні многочлени ступеня  $n$  та  $m$  з дійсними коефіцієнтами, які не мають спільних коренів, причому  $Q_m(x) \neq 0$ .

Раціональний дріб  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  називається правильним, якщо степінь многочлена  $P_n(x)$  менший, ніж степінь многочлена  $Q_m(x)$ , тобто якщо  $n < m$  і неправильним раціональним дробом в протилежному випадку, тобто якщо  $n \geq m$ .

Неправильний раціональний дріб  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$  ( $n \geq m$ ) можна завжди подати у вигляді

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

де  $T(x)$  - ціла раціональна функція (многочлен) і  $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$  ( $k < m$ ) - правильний раціональний дріб.

### 3.6.1 Інтегрування раціональних функцій, що містять квадратний тричлен

*Приклад.* Знайти  $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 10}$ .

*Розв'язання.* Маємо інтеграл від елементарного дробу. Виділивши повний квадрат із квадратного тричлена  $4x^2 + 4x + 10$ , одержимо табличний інтеграл (17). Дійсно

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 10} &= \int \frac{dx}{(2x + 1)^2 + 9} = \left| \begin{array}{l} u = 2x + 1 \\ du = 2dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{(2x + 1)^2 + 9} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{u}{3} + C = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{3} + C. \end{aligned}$$

*Приклад.* Знайти  $\int \frac{3x-4}{4x^2-3x+1} dx$ .

*Розв'язання.* Як і в попередньому прикладі, маємо також інтеграл від елементарного дробу, але порівнявши ступінь чисельника і знаменника маємо:  $U = 4x^2 - 3x + 1; dU = (8x - 3)dx$ .

Доповнимо чисельник до виду отриманого  $dU$

$$3x - 4 = \frac{3}{8} \left( 8x - 3 + 3 - \frac{32}{3} \right) = \frac{3}{8} (8x - 3) - \frac{23}{24}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{3x - 4}{4x^2 - 3x + 1} dx &= \int \frac{\frac{3}{8}(8x - 3) - \frac{23}{24}}{4x^2 - 3x + 1} dx = \frac{3}{8} \int \frac{8x - 3}{4x^2 - 3x + 1} dx - \\ &- \frac{23}{24} \int \frac{dx}{4x^2 - 3x + 1} = \frac{3}{8} \ln|4x^2 - 3x + 1| - \frac{23}{96} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}} = \\ &= \frac{3}{8} \ln|4x^2 - 3x + 1| - \frac{23}{96} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{1}{4} - \frac{9}{64}} = \frac{3}{8} \ln|4x^2 - 3x + 1| - \\ &- \frac{23}{96} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{7}{64}} = \frac{3}{8} \ln|4x^2 - 3x + 1| - \frac{23}{96} \cdot \frac{1}{2 \frac{\sqrt{7}}{8}} \ln \left| \frac{x - \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{7}}{8}}{x - \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{7}}{8}} \right| + C = \\ &= \frac{3}{8} \ln|4x^2 - 3x + 1| - \frac{23}{24\sqrt{7}} \ln \left| \frac{8x - 3 - \sqrt{7}}{8x - 3 + \sqrt{7}} \right| + C. \end{aligned}$$

### 3.6.2 Інтегрування раціональних функцій

**I тип. Корені знаменника дійсні і різні.**

*Приклад.* Знайти  $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$ .

*Розв'язання.* Підінтегральний дріб неправильний, бо степінь многочлена чисельника більший, ніж степінь знаменника. Тому виділимо спочатку цілу частину, поділивши многочлен чисельника на многочлен знаменника

$$\begin{array}{r} x^5 + x^4 - 8 \\ \hline x^3 - 4x^3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x^3 - 4x \\ \hline x^2 + x + 4 \end{array} \right. \text{ (ціла частина)}$$

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 - 8 \\ \hline 4x^3 - 16x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 4x^2 - 8 \\ \hline 4x^3 - 16x \end{array}$$

$$4x^2 + 16x - 8 \text{ (остача).}$$

Далі подамо підінтегральний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу, тобто

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx &= \int \left( x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \int \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} dx. \end{aligned}$$

В інтегралі, який залишився, підінтегральний дріб (правильний і нескоротний) розкладемо на елементарні дроби. Оскільки знаменник дробу  $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$  має три прості корені:  $x = 0, x = 2$  і  $x = -2$ , то його можна подати у вигляді суми трьох дробів першого типу, тобто

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо

$$x^2 + 4x - 2 = A(x - 2)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 2)$$

або



$$x^2 + 4x - 2 = (A + B + C)x^2 + (2B - 2C)x - 4A.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $x$  в обох частинах одержаної тотожності, одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів  $A, B, C$ :

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A + B + C = 1, \\ x & 2B - 2C = 4, \\ x^0 & -4A = -2. \end{array}$$

Розв'язавши цю систему, находимо  $A = \frac{1}{2}, B = \frac{5}{4}, C = -\frac{3}{4}$ .

Слід визначити, що тут коефіцієнти  $A, B$  і  $C$  простіше було б знайти способом підстановки в тотожність частинних значень  $x$ , в якості яких доцільно взяти корені знаменника, тобто

$$x^2 + 4x - 2 = A(x - 2)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 2)$$

$$\begin{array}{l|l} x = 0 & -2 = -4A, \\ x = 2 & 10 = 8B, \\ x = -2 & -6 = 8C, \end{array}$$

звідки  $A = \frac{1}{2}, B = \frac{5}{4}, C = -\frac{3}{4}$ .

Таким чином,

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x - 2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x + 2},$$

а шуканий інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \int \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x - 2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x + 2} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \int \frac{dx}{x} + 5 \int \frac{dx}{x - 2} - 3 \int \frac{dx}{x + 2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x - 2| - 3\ln|x + 2| + C.$$

**II тип. Корені знаменника дійсні, але серед них є кратні.**

*Приклад.* Знайти  $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x)} dx$ .

*Розв'язання.* Переконуємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи, що

$$\begin{aligned} (x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x) &= x(x-1)(x^2 - 4x + 3) = x(x-1)(x-1)(x-3) = \\ &= x(x-1)^2(x-3) \end{aligned}$$

має чотири корені, з яких два  $x = 0$  і  $x = 3$  є простими, а  $x = 1$  – двократний, подамо дріб у вигляді суми чотирьох елементарних дробів:

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x(x-1)^2(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів  $A, B, C, D$ :

$$x^2 - 2x + 3 = A(x-3)(x-1)^2 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-3) + Dx(x-1)(x-3).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{l|l} x = 0 & 3 = -3A, \\ x = 3 & 6 = 12B, \\ x = 1 & 2 = -2C, \\ x^3 & 0 = A + B + D. \end{array}$$

Звідси:  $A = -1, B = \frac{1}{2}, C = -1, D = \frac{1}{2}$ ,

отже,

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x(x-1)^2(x-3)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1},$$

а шуканий інтеграл

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x)} dx = \int \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} \right) dx =$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-3| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln|x-1| + C.$$

### III тип. Серед коренів знаменника є комплексні.

*Приклад.* Знайти  $\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$ .

*Розв'язання.* Переконаємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи, що  $x^2 - 2x + 10 = 0$ ,  $D = 4 - 40 = -36 < 0$ , маємо

$$\frac{4x - 10}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 10}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів  $A, B, C$ :

$$4x - 10 = A(x^2 - 2x + 10) + (Bx + C)(x + 2).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{l|l} x = -2 & -18 = 18A, \\ x^2 & 0 = A + B, \\ x^0 & -10 = 10A + 2C, \end{array}$$

звідки:  $A = -1, B = 1, C = 0$ , отже,

$$\frac{4x - 10}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} = -\frac{1}{x + 2} + \frac{x}{x^2 - 2x + 10}.$$

Маємо,

$$\int \frac{4x - 10}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} dx = \int \left( -\frac{1}{x + 2} + \frac{x}{x^2 - 2x + 10} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 2x + 10} dx = -\ln|x| + \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2 + 2}{x^2 - 2x + 10} dx = \\
&= -\ln|x| + \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 10} dx + \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 10} = \\
&= -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 10| + \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 9} = \\
&= -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 10| + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x - 1}{3} + C.
\end{aligned}$$

### 3.7 Інтегрування тригонометричних функцій

#### I. Інтеграли виду $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ .

1) Якщо  $m$  і  $n$  - цілі числа і принаймні одне з цих чисел є непарним додатним числом, наприклад  $m = 2k + 1$ , то

$$\begin{aligned}
\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx &= \int \sin^{2k+1} x \cdot \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \cdot \sin x \cdot \cos^n x dx = \\
&= \int (\sin^2 x)^k \cdot \cos^n x \cdot \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \cdot \cos^n x \cdot \sin x dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = -\int (1 - t^2)^k \cdot t^n \cdot dt.
\end{aligned}$$

Якщо ж непарним буде число  $n = 2p + 1 > 0$ , то треба застосувати підстановку  $t = \sin x$ .

2) Якщо обидва показники  $m$  і  $n$  - парні невід'ємні числа (зокрема один з них може бути рівним нулю), то доцільно застосувати формули зниження степеню:

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2x), \\
\cos^2 x &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2x).
\end{aligned}$$

3) Якщо обидва показники – парні, причому принаймні один із них від’ємний, то потрібно виконати заміну  $tgx = t$  або  $ctgx = t$ . Тоді:  $x = arctgt$  ( $x = arcctgt$ ),  $dx = \frac{dt}{t^2+1}$  ( $dx = -\frac{dt}{t^2+1}$ ).

**II. Інтеграли виду  $\int sinax \cdot cosbxdx$ ,  $\int cosax \cdot cosbxdx$ ,  $\int sinax \cdot sinbxdx$ .**

Щоб знайти ці інтеграли, треба перейти від добутку тригонометричних функцій до суми за відомими формулами:

$$\begin{aligned} sinax \cdot cosbx &= \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x), \\ cosax \cdot cosbx &= \frac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x), \\ sinax \cdot sinbx &= \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x). \end{aligned}$$

**III. Інтеграли виду  $\int R(sin x, cos x)dx$ ,** де  $R$  – раціональна функція від  $sin x$  і  $cos x$ . За допомогою так званої універсальної тригонометричної підстановки  $tg \frac{x}{2} = t$  ( $-\pi < x < \pi$ ) інтеграл зводиться до інтегралу від раціональної функції. При цьому

$$\begin{aligned} sinx &= \frac{2t}{1+t^2}, & cosx &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x &= 2arctgt, & dx &= \frac{2dt}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що іноді замість підстановки  $tg \frac{x}{2} = t$  вигідніше зробити підстановку  $ctg \frac{x}{2} = t$ .

Слід також визначити, що в силу своєї універсальності підстанова  $tg \frac{x}{2} = t$  часто приводить до занадто громіздких викладок, що ускладнює знаходження інтеграла. Тому в окремих випадках доцільно застосовувати інші підстановки, які також раціоналізують інтеграл. Наприклад:

1) Якщо виконується рівність  $R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$ , то застосуємо підстановку  $\cos x = t$ .

2) Якщо виконується рівність  $R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$ , то застосуємо підстановку  $\sin x = t$ .

3) Якщо виконується рівність  $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$ , то застосуємо підстановку  $\operatorname{tg} x = t$  (або  $\operatorname{ctg} x = t$ ), при цьому, якщо  $\operatorname{tg} x = t$ , то

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

*Приклад.* Знайти  $\int \cos^4 x \cdot \sin^5 x dx$ .

*Розв'язання.* Тут  $m = 5, n = 4$ . Враховуючи, що  $m$  непарне, одержимо

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \cdot \sin^5 x dx &= \int \cos^4 x \cdot \sin^4 x \cdot \sin x dx = \int \cos^4 x \cdot (\sin^2 x)^2 \cdot \sin x dx = \\ &= \int \cos^4 x \cdot (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = - \int t^4 (1 - t^2)^2 dt = \\ &= - \int t^4 (1 - 2t^2 + t^4) dt = \int (2t^6 - t^4 - t^8) dt = \frac{2t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^9}{9} + C = \\ &= \frac{2\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^9 x}{9} + C. \end{aligned}$$

*Приклад.* Знайти  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ .

*Розв'язання.* Тут  $m = 2, n = -4 < 0$  і парне, тому

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

*Приклад.* Знайти  $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} dx$ .

*Розв'язання.* Тут  $m = -\frac{4}{3}$ ,  $n = 3 > 0$  і непарне, тому

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} \cdot \cos x dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \cdot \cos x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1 - t^2}{t^{2/3}} \cdot dt = \int t^{-2/3} dt - \int t^{4/3} dt = 3t^{1/3} - \frac{3t^{7/3}}{7} + C = \\ &= 3t^{1/3} \left( 1 - \frac{t^2}{7} \right) + C = 3\sin^{1/3} x \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{7} \right) + C. \end{aligned}$$

*Приклад.* Знайти  $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx$ .

*Розв'язання.* В нашому прикладі  $m = 4$ ,  $n = 2$  обидва додатні і парні, тобто маємо

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx &= \int \sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cdot (\sin x \cdot \cos x)^2 dx = \\ &= \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \cdot \frac{1}{4} \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \cos 2x \cdot \sin^2 2x dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \cdot d(\sin 2x) = \\ &= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{1}{16} \cdot \frac{\sin^3 2x}{3} + C = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \end{aligned}$$

## РОЗДІЛ 4 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

### 4.1 Поняття інтегральної суми і визначеного інтеграла

Границя інтегральної суми, тобто

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_k \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{k=1}^n f(\theta_k) \Delta x_k$$

якщо вона існує і не залежить від способу розбиття відрізка  $[a, b]$  на часткові, ні від вибору на них точок  $\theta_k$ , називається визначеним інтегралом функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  і позначається символом

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Число  $a$  називають нижньою межею інтегрування, число  $b$  – верхньою межею інтегрування.

### 4.2 Формула Ньютона-Лейбніца

Якщо функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$  і  $F(x)$  - будь-яка первісна для  $f(x)$  на цьому відрізку, то має місце формула

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

### 4.3 Властивості визначеного інтеграла

1. За означенням

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$



2. За означенням

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. Якщо  $f(x)$  – інтегровна функція на відрізку  $[a, b]$  і  $c$  – стала, то на цьому відрізку інтегровна і функція  $c \cdot f(x)$ , причому

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx,$$

тобто сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла.

4. Якщо  $f_1(x)$  і  $f_2(x)$  - інтегровні функції на відрізку  $[a, b]$ , то на цьому відрізку інтегровні і функції  $f_1(x) \pm f_2(x)$ , причому

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

5. Якщо  $f(x)$  – інтегровна функція на відрізку  $[a, b]$  і  $f(x) \geq 0$  для  $x \in [a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

6. Якщо функція  $f(x)$  інтегровна на відрізку  $[a, b]$  і  $a < c < b$ , то ця функція інтегровна і на відрізках  $[a, c]$  і  $[c, b]$ , причому

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Зауважимо, що має місце й обернене твердження. Цю властивість називають адитивною властивістю визначеного інтеграла.

Приклад. Обчислити 1)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(10+2x)^4}$ ; 2)  $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$ ; 3).

Розв'язання. Скориставшись формулою Ньютона-Лейбніца, одержимо:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(10+2x)^4} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (10+2x)^{-4} \cdot 2dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(10+2x)^{-3}}{-3} \Big|_{-1}^1 = \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(10+2x)^3} \Big|_{-1}^1 = -\frac{1}{6} \cdot \left( \frac{1}{(10+2)^3} - \frac{1}{(10-2)^3} \right) = -\frac{1}{6} \cdot \left( \frac{1}{1728} - \frac{1}{512} \right) = \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{8-27}{13824} = \frac{19}{82944}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} &= \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \arcsin \frac{x-2}{3} \Big|_2^5 = \\ &= \arcsin \frac{5-2}{3} - \arcsin \frac{2-2}{3} = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

#### 4.4 Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$  і  $x = \varphi(t)$  – функція неперервна зі своєю похідною першого порядку на відрізку  $[\alpha, \beta]$ , причому  $a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) \leq \varphi(\beta) = b$  для  $\alpha \leq t \leq \beta$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Цю формулу називають формулою заміни змінної для визначеного інтеграла.

Приклад. Обчислити 1)  $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ ; 2)  $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$ .

Розв'язання. 1) Зробимо заміну змінної:

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left| \begin{array}{l} t = 1 + \ln x, dt = \frac{dx}{x} \\ e^3: t_B = 1 + \ln e^3 = 1 + 3 = 4 \\ 1: t_H = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1 \end{array} \right| = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} \Big|_1^4 =$$

$$= 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2(2 - 1) = 2.$$

2) Зробимо заміну змінної:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 - 1 = t^2 \\ 2x dx = 2t dt \\ x dx = t dt \\ 1 - 1 = t^2, t_H = 0 \\ 4 - 1 = t^2, t_B = \sqrt{3} \end{array} \right| = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \cdot x dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} dt = \int_0^{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = (t - \arctg t) \Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{3} - \arctg \sqrt{3} + \arctg 0 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

#### 4.5 Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Якщо функції  $u(x)$  і  $v(x)$  неперервні разом із своїми похідними першого порядку на відрізку  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

Цю формулу називають формулою інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

Застосування цієї формули мало чим відрізняється від застосування відповідної формули для невизначеного інтеграла. Тому обмежимося розв'язанням кількох прикладів.

Приклад. Обчислити: 1)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx$ ; 2)  $\int_1^2 \frac{\ln x dx}{x^5}$ .

Розв'язання.

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos x dx, \quad v = \sin x \end{array} \right| = (x \cdot \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} - 0 + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$2) \int_1^2 \frac{\ln x dx}{x^5} = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x^5}, \quad v = -\frac{1}{4x^4} \end{array} \right| = \left( -\frac{\ln x}{4x^4} \right) \Big|_1^2 - \int_1^2 \left( -\frac{1}{4x^4} \right) \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= -\frac{\ln 2}{64} + \frac{1}{4} \cdot \int_1^2 \frac{dx}{x^5} = -\frac{\ln 2}{64} - \frac{1}{16x^4} \Big|_1^2 = -\frac{\ln 2}{64} - \frac{1}{256} + \frac{1}{16} = \frac{15 - 2\ln 2}{256}.$$

## 4.6 Застосування визначеного інтеграла до задач геометрії

### 4.6.1 Обчислення площі плоскої фігури

Якщо необхідно обчислити площу області, обмеженої кривими  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ ,  $x = a$  і  $x = b$ , при умові  $f_2(x) \geq f_1(x)$  (рис. 6).

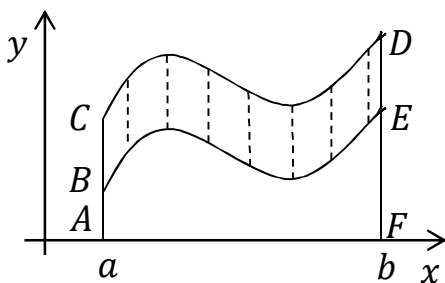


Рисунок 6

Знайдемо площу, як різницю площин двох криволінійних трапецій:

$$S = S_{ACDF} - S_{ABEF};$$

$$S_{ACDF} = \int_a^b f_2(x) dx,$$

$$S_{ABEF} = \int_a^b f_1(x) dx; \quad S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx,$$

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

*Приклад.* Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої кривими

$$y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$$

*Розв'язання.* 1. Нанесемо на координатну площину лінії  $y = x^2$  та  $y = \sqrt{x}$  (рис. 7).

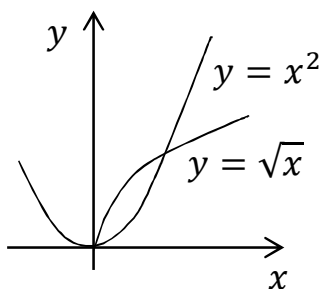


Рисунок 7

2. Знайдемо межі інтегрування, для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}; \quad x^2 = \sqrt{x}; \quad x^4 = x;$$

$$x^4 - x = 0; \quad x(x^3 - 1) = 0;$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

1. Знайдемо площу фігури:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left( \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ од. кв.}$$

*Приклад.* Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої віссю  $Ox$  та лініями  $y = (x + 2)^2$  та  $y = 4 - x$ .

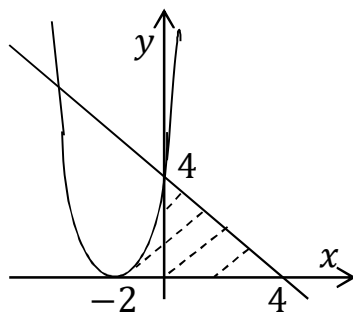


Рисунок 8

*Розв'язання.* 1. Область, обмежена віссю  $Ox$  та лініями  $y = (x + 2)^2$  та  $y = 4 - x$  складна  $D = D_1 + D_2$  (рис. 8) тому площу знаходимо, як суму площин  $S = S_1 + S_2$ .

2. Знайдемо межі інтегрування, для цього обчислимо точки перетину параболи і прямої з віссю  $Ox$  та точку перетину параболи і прямої:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = (x + 2)^2 \end{cases}, \quad x = -2.$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 4 - x' \end{cases} \quad x = 4; \quad \begin{cases} y = (x + 2)^2 \\ y = 4 - x \end{cases}, \quad (x + 2)^2 = 4 - x, \\ x^2 + 5x = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -5; \quad x_1 \in [-2; 4].$$

3. Знайдемо площу фігури:

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = \int_{-2}^0 (x + 2)^2 dx + \int_0^4 (4 - x) dx = \\ &= \frac{(x + 2)^3}{3} \Big|_{-2}^0 - \frac{(4 - x)^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{8}{3} - 0 - 0 + 8 = \frac{32}{3} \text{ од. кв.} \end{aligned}$$

2. Випадок, коли лінії, що обмежують фігуру, задані параметрично.

Нехай рівняння  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  визначає деяку функцію  $y = f(x)$  на відрізку  $[a, b]$ ,  $x(\alpha) = a$ ,  $x(\beta) = b$ , тому  $\alpha \leq t \leq \beta$ .

Отже,

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx,$$

виконаємо заміну  $y = y(t)$ ,  $dx = x'(t)dt$ , остаточно маємо

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt \right|$$

*Приклад.* Обчислити площу області, обмеженої еліпсом

$$\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases}.$$

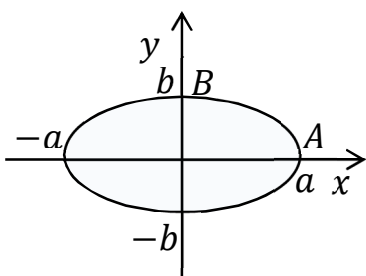


Рисунок 9

*Розв'язання.* 1. Обчислимо площу частини еліпса, що знаходиться у першому квадранті. Знайдемо межі інтегрування з урахуванням додатного напрямку руху (проти годинникової стрілки) (рис. 9).

При  $A(a, 0)$ :  $x = acost$ ,  $acost = a$ ,

$$cost = 1, \quad t = 0.$$

При  $B(0, b)$ :  $x = acost$ ,  $acost = 0$ ,  $cost = 0$ ,  $t = \frac{\pi}{2}$ .

2. Обчислимо площу  $S_1$ . З урахуванням, що  $dx = -a \sin t dt$ , маємо:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin t (-a \sin t) dt = -ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \\ &= -\frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = -\frac{ab}{2} \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\frac{ab}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi - 0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right) = -\frac{ab\pi}{4}; \end{aligned}$$

$$S = 4|S_1| = ab\pi \text{ од. кв.}$$

### 3. Випадок полярної системи координат

Площа криволінійного сектора, тобто плоскої фігури, яка обмежена неперервною лінією  $\rho = \rho(\varphi)$  і двома радіус – векторами  $\varphi = \alpha$  і  $\varphi = \beta$  визначається за формулою:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

*Приклад.* Обчислити площу фігури, яка обмежена лемніскатою Бернуллі  $\rho = 2\sqrt{2\cos 2\varphi}$ .

*Розв'язання.* Якщо полярний кут змінюється від 0 до  $\pi/4$ , то радіус – вектор описує область, площа якої дорівнює чверті шуканої площі. Отже,

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 8\cos 2\varphi d\varphi = 16 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = 8 \text{ (од}^2\text{)}.$$

## 4.6.2 Обчислення довжини дуги плоскої кривої

### 1. Випадок прямокутних координат

Нехай в прямокутних координатах дана плоска крива АВ, рівняння якої  $y = f(x)$ , де  $a \leq x \leq b$  (рис.10)

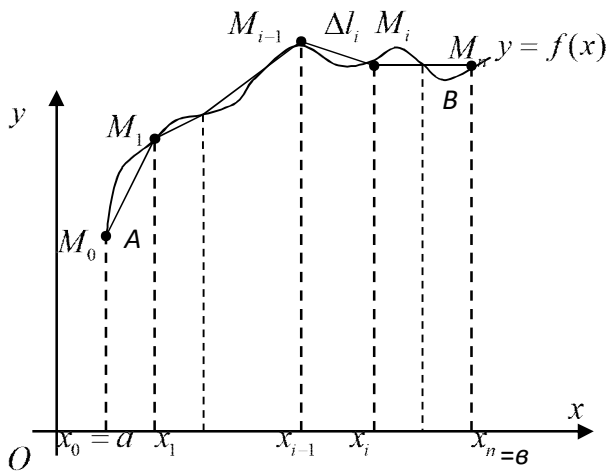


Рисунок 10

Під довжиною дуги кривої АВ розуміють границю, до якої прямує довжина ламаної, що вписана в цю дугу, коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля.

Нехай функція  $y = f(x)$  та її похідна неперервні на відрізку  $[a; b]$  Тоді довжина дуги кривої  $y = f(x)$  дорівнює

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

або у скороченому вигляді  $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$  .

*Приклад.* Обчислити довжину дуги кривої  $y = \ln\left(\frac{5x}{2}\right)$ , якщо  $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$ .

*Розв'язання.* Довжина дуги:

$$l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{5x} \cdot \frac{5}{2}\right)^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx =$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx = \left. \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \\ t_B = \operatorname{arctg} \sqrt{8} \\ t_H = \frac{\pi}{3} \end{array} \right| = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\operatorname{arctg} \sqrt{8}} \frac{\cos t}{\cos t \cdot \sin t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} =$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{8}} \frac{\sin t dt}{\sin^2 t \cos^2 t} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{8}} \frac{d(\cos t) dt}{(\cos^2 t - 1) \cos^2 t} = \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{8}} \left( \frac{1}{\cos^2 t - 1} - \frac{1}{\cos^2 t} \right) d(\cos t) dt = \left( \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos t - 1}{\cos t + 1} \right| + \frac{1}{\cos t} \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{8}} =
\end{aligned}$$

Звернемо увагу на те, що  $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}$ , тобто  $\cos(\operatorname{arctg}\sqrt{8}) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}\sqrt{8})}} = \frac{1}{3}$ , одержимо:

$$l = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1} \right| + 3 - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 1} \right| - 2 = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + 1 \text{ (од.)}.$$

## 2. Випадок параметричного задання кривої

Розглянемо дугу  $L_{AB}$  гладкої плоскої лінії, що задана параметрично  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , де функції  $x = x(t)$  і  $y = y(t)$  – неперервні разом зі своїми похідними, причому функція  $x = x(t)$  – монотонно зростаюча,  $\varphi(\alpha) = a$  і  $\varphi(\beta) = b$ .

**Довжина дуги плоскої кривої, що задана параметрично**, визначається за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

*Приклад.* Обчислити довжину дуги лінії  $x = 3\cos t$ ,  $y = 3\sin t$ ,  $t \in [0; 2\pi]$ .

*Розв'язання.*  $x' = -3\sin t$ ,  $y' = 3\cos t$ , отже:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t} dt = 3 \int_0^{2\pi} dt = 3t \Big|_0^{2\pi} = 6\pi.$$

## 3. Випадок полярної системи координат

Нехай дуга  $L_{AB}$  задана в полярних координатах рівнянням  $\rho = \rho(\varphi)$ ,  $\alpha \leq$

$\varphi \leq \beta$ , де функція  $\rho(\varphi)$  неперервна разом зі своєю похідною  $\rho'(\varphi)$  на відрізку  $[\alpha; \beta]$ , причому точкам  $A$  і  $B$  відповідають значення  $\alpha$  і  $\beta$ . Тоді довжина дуги  $L_{AB}$  обчислюється за формулою:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$

*Приклад.* Знайти довжину кардіоїди  $\rho = 6(1 + \sin\varphi)$ .

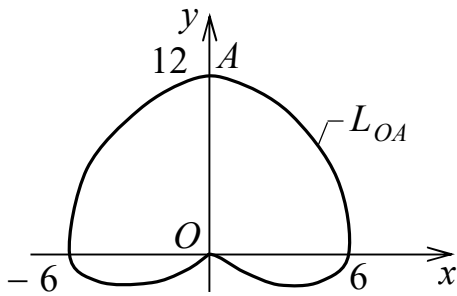


Рисунок 11

*Розв'язання.* Кардіоїда – замкнена лінія, що зображена на рис.11. Вона симетрична відносно осі  $Oy$ . Тому її довжину  $l$  можна знайти, подвоївши довжину  $l_1$  її правої частини  $L_{OA}$ , що розташована в четвертій та першій чвертях і при цьому  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Проведемо обчислення:  $\rho' = -6\cos\varphi$ ;

$$\begin{aligned} \rho^2 + (\rho')^2 &= (6(1 + \sin\varphi))^2 + (6\cos\varphi)^2 = \\ &= 36(1 + 2\sin\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 36(2 + 2\sin\varphi) = \\ &= 72(1 + \sin\varphi); \end{aligned}$$

$$l_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{72(1 + \sin\varphi)} d\varphi = 6\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin\varphi} \cdot \frac{\sqrt{1 - \sin\varphi}}{\sqrt{1 - \sin\varphi}} d\varphi =$$

$$= 6\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}}{\sqrt{1 - \sin\varphi}} d\varphi = 6\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos^2\varphi}}{\sqrt{1 - \sin\varphi}} d\varphi =$$

$$= 6\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - \sin\varphi}} d\varphi = \left. \begin{array}{l} u = 1 - \sin\varphi; \\ du = -\cos\varphi d\varphi; \\ u_H = 2; u_B = 0 \end{array} \right| = -6\sqrt{2} \int_2^0 \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= 6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{u} \Big|_0^2 = 24; \quad l = 2l_1 = 48 \text{ (од.)}.$$

## РОЗДІЛ 5 ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ

*Диференційним рівнянням* називається рівняння, яке містить незалежну змінну, невідому функцію та її похідні (або її диференціали).

*Порядком* диференційного рівняння називається найвищий порядок похідної, яка входить у рівняння. Якщо шукана функція залежить від однієї змінної, то диференційне рівняння *звичайне*. Загальний вигляд такого рівняння  $n$  – го порядку

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

### 5.1 Диференційні рівняння першого порядку

*Звичайне диференційне рівняння першого порядку* має вигляд

$$f(x, y, y') = 0. \quad (2)$$

Задача полягає у знаходженні невідомої функції, а процес визначення цієї функції називається розв'язанням, або інтегруванням диференційного рівняння.

Розв'язком, або інтегралом диференційного рівняння називається будь-яка диференційована на деякому інтервалі  $x \in (a, b)$  функція  $y = \varphi(x)$ , яка задовольняє цьому рівнянню, тобто така, що після підстановки її у рівняння маємо:

$$\varphi'(x) = F[x, \varphi(x)].$$

*Загальним розв'язком* диференційного рівняння називаються відношення виду

$$\Phi(x, y, C) = 0, \text{ або } \Phi(x, y) = C, \quad \text{де } C = \text{const} \quad (3)$$

*Частинним розв'язком* диференційного рівняння називається такий розв'язок, який одержуємо з загального розв'язку (3) при деякому значенні довільної сталої  $C$ . Довільна стала  $C$  визначається з початкових умов. Число довільних сталих повинно відповідати порядку диференційного рівняння.

Задача пошуку розв'язку диференційного рівняння, що задовольняє початковим умовам  $y = y_0$  при  $x = x_0$  називається *задачею Коші*.

Розглянемо деякі диференціальні рівняння першого порядку.

### 5.1.1 Рівняння з відокремлюваними змінними

Це найпростіший тип диференційних рівнянь першого порядку, але дуже важливий.

Нехай маємо диференційне рівняння першого порядку  $F(x, y, y') = 0$ , яке після розв'язання його відносно похідної  $y'$  набуває виду

$$f(x, y) + \varphi(x, y)y' = 0$$

Згадаємо, що  $y' = \frac{dy}{dx}$ , тому це рівняння можна записати у вигляді:

$$f(x, y)dx + \varphi(x, y)dy = 0.$$

Якщо  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ , а  $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ , то маємо

$$f_1(x)f_2(y)dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)dy = 0. \quad (4)$$

Рівняння (4) називається диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Відокремлення змінних виконується шляхом ділення рівняння (4) на добуток  $\varphi_1(x) f_2(y) \neq 0$ . Рівняння (5) приймає вигляд:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)} dy = 0, \quad (5)$$

а його загальний інтеграл записується так:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)} dy = C.$$

Слід розглядати випадок, коли рішення рівняння  $\varphi_1(x)f_2(y) = 0$  не належить до загального розв'язку. Ці рішення називаються особливими.

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xyy' = 1 - x^2$$

*Розв'язання.* Представимо  $y'$  як  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

Маємо:

$$xy \frac{dy}{dx} = 1 - x^2, \quad xy \frac{dy}{dx} - (1 - x^2) = 0$$

Приведемо рівняння до виду (6). Для цього помножимо рівняння на дріб  $\frac{dx}{x}$ , де  $x \neq 0$  та отримаємо

$$ydy - \frac{1 - x^2}{x} dx = 0.$$

Запишемо загальний інтеграл:  $\int ydy - \int \frac{1 - x^2}{x} dx = C$ .

Маємо:  $\frac{y^2}{2} - \ln x + \frac{x^2}{2} = C$  або  $y^2 + x^2 - \ln x^2 = 2C$  – загальний розв'язок

диференційного рівняння. Зауважимо, що цей розв'язок має сенс, коли  $x > 0$ .

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y - xy' = 1 + x^2y'.$$

*Розв'язання.* Запишемо рівняння у вигляді:  $y - xy' - 1 - x^2y' = 0$ ;

$$y - 1 - (x + x^2)y' = 0.$$

Представимо  $y'$  як  $y' = \frac{dy}{dx}$ . Отримаємо:  $(y - 1)dx - (x + x^2)dy = 0$ .

Приведемо останнє рівняння до виду (6). Поділимо його на

$(x + x^2)(y - 1) \neq 0$  і будемо мати рівняння:

$$\frac{dx}{x+x^2} - \frac{dy}{y-1} = 0.$$

Запишемо загальний інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x+x^2} - \int \frac{dy}{y-1} = C.$$

Загальний розв'язок диференційного рівняння після інтегрування має вигляд:

$$\ln \frac{x}{x+1} - \ln(y-1) = C \text{ або } y = \frac{Cx}{x+1} + 1.$$

### 5.1.2 Однорідні диференційні рівняння першого порядку

Якщо рівняння виду  $y' = F(x, y)$  або  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  не змінюються при заміні  $x$  на  $kx$ ,  $y$  на  $ky$  і відповідно  $dx$  на  $kdx$ , а  $dy$  на  $kdy$ ,  $y'$  на  $y'$  то вони називаються *однорідними*. Для рішення використовують *підстановку*:

$$y = U \cdot x$$

де  $U(x)$  – нова функція, яка перетворює однорідне рівняння в рівняння з відокремлюваними змінними. Диференціюємо підстановку:

$$y' = U'x + U,$$

Після того, як нове рівняння буде проінтегроване, необхідно  $U$  замінити на  $\frac{y}{x}$ .

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

*Розв'язання.* Спочатку зробимо перевірку на однорідність. Зробимо заміну  $x$  на  $kx$ ,  $y$  на  $ky$ , а  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{kdy}{kdx} = y'$ , маємо:

$$kxy' - ky = \sqrt{k^2x^2 + k^2y^2};$$

$$k(xy' - y) = \sqrt{k^2(x^2 + y^2)};$$

$$k(xy' - y) = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Після ділення обох частин рівняння на  $k$  ми отримаємо початкове рівняння, саме це і вказує, що дане рівняння – однорідне, тому використаємо наведену вище підстановку (7) та її похідну (8) і отримуємо рівняння:

$$x(U'x + U) - Ux = \sqrt{x^2 + x^2U^2};$$

$$x(U'x + U - U) = x\sqrt{1 + U^2},$$

розділимо обидві частини рівняння на  $x \neq 0$ , маємо:  $U'x = \sqrt{1 + U^2}$  - це рівняння з відокремлюваними змінними; оскільки  $U' = \frac{dU}{dx}$ , то отримаємо рівняння виду:

$$\frac{dU}{dx}x = \sqrt{1 + U^2};$$

$$xdU - \sqrt{1 + U^2}dx = 0.$$

Розділимо обидві частини рівняння на вираз  $x\sqrt{1 + U^2} \neq 0$  :

$$\frac{dU}{\sqrt{1 + U^2}} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння, отримуємо загальний інтеграл:

$$\int \frac{dU}{\sqrt{1 + U^2}} - \int \frac{dx}{x} = C,$$

$$\ln \left| U + \sqrt{1 + U^2} \right| - \ln x = \ln C.$$

Загальний розв'язок диференційного рівняння має вид:

$$U + \sqrt{1 + U^2} = Cx.$$

Так, як  $U = \frac{y}{x}$ , то маємо:  $\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx$ . Після тотожних

перетворень отримуємо загальний розв'язок:  $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$ .

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0.$$

*Розв'язання.* Виконаємо перевірку на однорідність, використовуючи заміни:  $x$  на  $kx$ ,  $y$  на  $ky$  і відповідно  $dx$  на  $kdy$ , а  $dy$  на  $kdy$ . Маємо:

$$(k^2y^2 - 3k^2x^2)kdy + 2kxkykdx = 0,$$

$$k^3(y^2 - 3x^2)dy + 2k^3xydx = 0.$$

Поділимо весь вираз на  $k^3$  і отримаємо початкове рівняння, отже це рівняння однорідне. Для використання підстановки необхідно розділити рівняння на  $dx$ , в результаті отримаємо:

$$(y^2 - 3x^2)y' + 2xy = 0.$$

Після відповідних підстановок матимемо:

$$(U^2x^2 - 3x^2)(U'x + U) + 2x^2U = 0,$$

$$U'x + U = \frac{-2U}{U^2 - 3}; \quad U'x = \frac{-2U}{U^2 - 3} - U; \quad U'x = \frac{U - U^3}{U^2 - 3}.$$

Заміною  $U' = \frac{dU}{dx}$ , отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:



$$\frac{dU}{dx} x = \frac{U - U^3}{U^2 - 3}; \quad \frac{U^2 - 3}{U - U^3} dU = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{U^2 - 3}{U - U^3} dU - \int \frac{dx}{x} = C.$$

Виконавши інтегрування, маємо загальне рішення:

$$-3 \ln U + \ln(1 + U) - \ln(1 - U) = \ln C + \ln x.$$

Використовуючи властивості логарифмічних функцій отримаємо:

$$\frac{U + 1}{U^3(1 - U)} = Cx.$$

Виконаємо зворотну підстановку  $U = \frac{y}{x}$  і рішення буде мати

вигляд:

$$\frac{\frac{y}{x} + 1}{\frac{y^3}{x^3} \left(1 - \frac{y}{x}\right)} = Cx,$$

після виконання тотожних перетворень, остаточно маємо:

$$\frac{(y + x)x^2}{y^3(x - y)} = C.$$

### 5.1.3 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо його можна записати у вигляді

$$y' + p(x)y = g(x),$$

де  $p(x)$  і  $g(x)$  - задані функції, шукана функція  $y$  і її похідна  $y'$  входять в рівняння в першій степені.

Функції  $p(x)$  і  $g(x)$  передбачаються неперервними в проміжку  $(a, b)$ , в якому шукається розв'язок лінійного диференціального рівняння.

Загальний розв'язок лінійного диференційного рівняння шукають підстановкою за методом Бернуллі, яка має вигляд добутку двох функцій:

$$y = U \cdot V,$$

де  $U(x), V(x)$  – нові невідомі функції, причому  $U(x) \neq 0$  довільна,  $V(x)$  – підбирають такою, щоб виконувалась умова  $V' + p(x)V = 0$ .

Похідна від добутку двох функцій:

$$y' = U'V + UV'$$

Алгоритм розв'язування лінійних диференціальних рівнянь першого порядку розглянемо на прикладах.

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

*Розв'язання.* Використовуючи підстановку та її похідну, рівняння запишемо у вигляді:

$$U'V + UV' + 2xUV = xe^{-x^2},$$

$$U'V + U(V' + 2xV) = xe^{-x^2}.$$

За умовою знаходження функції  $V(x)$ , другий доданок останнього рівняння дорівнює нулю, тобто:

$$V' + 2xV = 0,$$

а перший доданок буде дорівнювати функції  $g(x)$ , яка стоїть праворуч, тобто:

$$U'V = xe^{-x^2}.$$

Розв'яжемо рівняння:  $V' + 2xV = 0$ ;

$$V' = -2xV; \quad \frac{dV}{dx} = -2xV; \quad \frac{dV}{V} = -2xdx; \quad \ln V = -x^2; \quad V = e^{-x^2}.$$

Вважаємо, що довільна стала тут дорівнює нулю.

Тепер розв'яжемо друге рівняння, але попередньо підставимо в нього знайдену функцію  $V = e^{-x^2}$ :

$$U'e^{-x^2} = xe^{-x^2}; \quad U' = x; \quad \frac{dU}{dx} = x; \quad dU = xdx; \quad U = \frac{x^2}{2} + C.$$

Знайдені функції записуємо у вигляді добутку і отримаємо загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot e^{-x^2}.$$

*Приклад.* Розв'язати задачу Коші для рівняння:

$$y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{sec} x; \quad y|_{x=0} = 0.$$

*Розв'язання.* Використаємо розглянутий вище (приклад 6) алгоритм і в результаті отримаємо:

$$U'V + UV' - UV \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x},$$

$$U'V + U(V' - V \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Розв'яжемо рівняння:  $V' - V \operatorname{tg} x = 0$ ;

$$V' = V \operatorname{tg} x; \quad \frac{dV}{dx} = V \operatorname{tg} x; \quad \frac{dV}{V} = \operatorname{tg} x dx; \quad \ln V = -\ln |\cos x|; \quad \ln V = \ln \frac{1}{\cos x};$$

$$V = \frac{1}{\cos x}.$$

Тепер розв'яжемо рівняння  $U'V = \frac{1}{\cos x}$ , підставимо в нього знайдене  $V = \frac{1}{\cos x}$ :

$$U' \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}; \quad U' = 1; \quad dU = dx; \quad U = x + C.$$

Знайдені функції дають загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y = (x + C) \frac{1}{\cos x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок рівняння, використовуючи задані початкові умови, тобто розв'яжемо задачу Коші:

$(0 + C) \frac{1}{\cos 0} = 0$ ;  $C = 0$ ; тому частинне рішення буде мати вигляд:

$$y = \frac{x}{\cos x}.$$

Лінійними рівняння можуть бути, як відносно  $y$ , так і відносно  $x$ .

## 5.2 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

**Визначення.** Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння першого ступеня (лінійне) відносно шуканої функції та її похідної.

### *Лінійні ДР другого порядку*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (*)$$

де  $p(x)$  і  $q(x)$  – коефіцієнти;  $f(x)$  – права частина рівняння.

### 5.2.1 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійні однорідні диференціальні рівняння (ДР) другого порядку зі сталими коефіцієнтами мають вигляд:

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0,$$

де  $a_1$  і  $a_2$  сталі.

Частинний розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді

$$y = e^{kx},$$

де  $k$  - деяке число. Диференціюючи цю функцію двічі і підставляючи отримані значення в рівняння отримаємо:

$$k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_2 e^{kx} = 0,$$

$$e^{kx}(k^2 + a_1 k + a_2) = 0, \text{ або}$$

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \quad (e^{kx} \neq 0).$$

Рівняння  $k^2 + a_1k + a_2 = 0$  називається *характеристичним рівнянням* ДР (для його запису достатньо в початковому рівнянні замінити  $y''$ ,  $y'$  і  $y$  відповідно на  $k^2$ ,  $k$  і  $1$ ).

При розв'язанні характеристичного рівняння можливі три випадки:

**Випадок 1.** Корені  $k_1$  і  $k_2$  дійсні та різні:  $D > 0$ ,  $k_1 \neq k_2$ .

В цьому випадку загальне рішення рівняння має вид:

$$\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}.$$

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок ДР  $y'' + 5y' + 6y = 0$ .

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 + 5k + 6 = 0;$$

$$D = 25 - 24 = 1;$$

$$k_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2}; k_1 = -2; k_2 = -3.$$

Загальний розв'язок даного ДР:  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$ .

**Випадок 2.** Корені  $k_1$  і  $k_2$  рівняння дійсні та рівні:  $D = 0$ ,

$$k_1 = k_2 = k.$$

В цьому випадку загальний розв'язок рівняння має вид:

$$\boxed{y = e^{kx}(C_1 x + C_2)}.$$

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок ДР  $y'' - 8y' + 16 = 0$ .

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 8k + 16 = 0;$$

$$D = 64 - 64 = 0;$$

$$k_1 = k_2 = \frac{8}{2} = 4.$$

Загальний розв'язок даного ДР:  $y = e^{4x}(C_1 x + C_2)$ .

**Випадок 3.** Корені  $k_1$  і  $k_2$  рівняння комплексні, нагадаємо, що  $i^2 = -1$ :  
 $D < 0$ ,  $x_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ . У цьому випадку загальне рішення рівняння має вид:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок ДР  $y'' - 4y' + 13y = 0$ .

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 4k + 13 = 0;$$

$$D = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36;$$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i; \quad \alpha = 2, \quad \beta = 3.$$

Загальний розв'язок даного ДР:  $y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ .

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок ДР  $y'' + 25y = 0$ .

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння даного ДР має вид:

$$k^2 + 25 = 0;$$

$$k^2 = -25; \quad k_{1,2} = \pm 5i; \quad \beta = 5.$$

Загальний розв'язок даного ДР:  $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$ .

### 5.2.2 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Рівняння виду:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y = y_0 + \bar{y},$$

де  $y_0$  – загальний розв'язок однорідного рівняння, а  $\bar{y}$  – частинне рішення нелінійного ДР, яке залежить від виду правої частини  $f(x)$ .

Розглянемо декілька типів  $f(x)$ :

**Випадок 1.**  $f(x) = P_n(x)$ ,

де  $P_n(x)$ - многочлен  $n$ -ї степені.

а) корені характеристичного рівняння  $k_1 \neq 0$  і  $k_2 \neq 0$ , тоді частинний розв'язок нелінійного ДР має вигляд:

$$\bar{y} = B_0x^n + B_1x^{n-1} + \dots + B_n,$$

$\bar{y}$  многочлен степені  $n$ , а  $B_0, B_1, \dots, B_n$  - невідомі, які знаходимо за методом невизначених коефіцієнтів.

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3.$$

*Розв'язання.* Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 6k + 9 = 0;$$

$$D = 36 - 36 = 0;$$

$$k_{1,2} = 3.$$

Маємо загальний розв'язок однорідного ДР:  $y_0 = e^{3x}(C_1x + C_2)$ .

Права частина:  $f(x) = 2x^2 - x + 3$  -многочлен другої степені, тому

$$\bar{y} = B_0x^2 + B_1x + B_2.$$

Знайдемо  $\bar{y}'$  та  $\bar{y}''$  і підставимо в дане рівняння отримані значення відповідно замість  $y'', y'$  та  $y$ .

$$\bar{y}' = 2B_0x + B_1;$$

$$\bar{y}'' = 2B_0.$$

$$2B_0 - 6(2B_0x + B_1) + 9(B_0x^2 + B_1x + B_2) = 2x^2 - x + 3;$$

$$2B_0 - 12B_1x - 6B_2 + 9B_0x^2 + 9B_1x + 9B_2 = 2x^2 - x + 3.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти  $B_0, B_1$  і  $B_2$  за методом невизначених коефіцієнтів. Порівнюємо коефіцієнти при однакових степенях  $x$ :

$$x^2 | 9B_0 = 2, \quad B_0 = \frac{2}{9}.$$

$$x | -12B_0 + 9B_1 = -1; \quad -12 \cdot \frac{2}{9} + 9B_1 = -1; \quad 9B_1 = -1 + \frac{8}{3}; \quad 9B_1 = \frac{5}{3};$$

$$B_1 = \frac{5}{27}.$$

$$x^0 | 2B_0 - 6B_1 + 9B_2 = 3; \quad 2 \cdot \frac{2}{9} - 6 \cdot \frac{5}{27} + 9B_2 = 3; \quad \frac{4}{9} - \frac{10}{9} + 9B_2 = 3;$$

$$9B_2 = 3 + \frac{2}{3}; \quad 9B_2 = \frac{11}{3}; \quad B_2 = \frac{11}{27}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\bar{y} = \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

Розв'язок неоднорідного ДР:  $y = y_0 + \bar{y}$ , тобто

$$y = e^{3x}(C_1x + C_2) + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

б) корені характеристичного рівняння  $k_1 = 0$  і  $k_2 \neq 0$ , тоді

$$\bar{y} = (B_0x^n + B_1x^{n-1} + \dots + B_n) \cdot x,$$

де  $B_0, B_1, \dots, B_n$  - невідомі коефіцієнти.

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1.$$

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння має вид:

$$2k^2 + 5k = 0;$$

$$k(2k + 5) = 0;$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = -\frac{5}{2}.$$

Отже, маємо загальне рішення однорідного ДР:  $y_0 = C_1 + C_2e^{-\frac{5x}{2}}$ .

Права частина  $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$  - степінь многочлена друга і  $k_1 = 0, k_2 \neq 0$ , тому

$$\bar{y} = (B_0x^2 + B_1x + B_2) \cdot x = B_0x^3 + B_1x^2 + B_2x;$$

$$\bar{y}' = 3B_0x^2 + 2B_1x + B_2;$$

$$\bar{y}'' = 6B_0x + 2B_1.$$

Підставимо отримані значення  $\bar{y}''$ ,  $\bar{y}'$  та  $\bar{y}$  в початкове рівняння:

$$2(6B_0x + 2B_1) + 5(3B_0x^2 + 2B_1x + B_2) = 5x^2 - 2x - 1;$$

$$12B_0x + 4B_1 + 15B_0x^2 + 10B_1x + 5B_2 = 5x^2 - 2x - 1.$$



Знайдемо коефіцієнти  $B_0, B_1$  і  $B_2$ , як у попередньому прикладі:

$$x^2 | 15B_0 = 5; \quad B_0 = \frac{1}{3}.$$

$$x | 12B_0 + 10B_1 = -2; \quad 12 \cdot \frac{1}{3} + 10B_1 = -2; \quad 10B_1 = -6; \quad B_1 = -\frac{3}{5}.$$

$$x^0 | 4B_1 + 5B_2 = -1; \quad 4 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 5B_2 = -1; \quad 5B_2 = -1 + \frac{12}{5}; \quad 5B_2 = \frac{7}{5};$$

$$B_2 = \frac{7}{25}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\bar{y} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Рішення диференційного рівняння:  $y = y_0 + \bar{y}$ , тобто

$$y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5x}{2}} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

**Випадок 2.**  $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$ ,

де  $e^{\alpha x}$  - показникова функція, а  $P^n(x)$ - многочлен  $n$ -ї степені;

а) корені характеристичного рівняння  $k_1 \neq \alpha$  і  $k_2 \neq \alpha$ , тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\bar{y} = e^{\alpha x} (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n).$$

*Приклад.* Розв'язати задачу Коші для диференційного рівняння

$$y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3); \quad y(0) = 2, y'(0) = 2.$$

*Розв'язання.* Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 2k = 0;$$

$$k(k - 2) = 0;$$

$$k_1 = 0 \text{ і } k_2 = 2.$$

Загальне рішення однорідного ДР:  $y_0 = C_1 + C_2 e^{2x}$ .

Права частина рівняння:  $f(x) = e^x(x^2 + x - 3)$ . Тут  $\alpha = 1$ ,  $k_1 \neq \alpha$  і  $k_2 \neq \alpha$  тому:

$$\bar{y} = e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2);$$

$$\begin{aligned}\bar{y}' &= e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2) + e^x(2B_0x + B_1) = \\ &= e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2 + 2B_0x + B_1);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{y}'' &= e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2 + 2B_0x + B_1) + e^x(2B_0x + B_1 + 2B_0) = \\ &= e^x(B_0x^2 + B_1x + B_2 + 4B_0x + 2B_1 + 2B_0).\end{aligned}$$

Підставимо отримані значення  $\bar{y}''$ ,  $\bar{y}'$  та  $\bar{y}$  в початкове рівняння:

$$\begin{aligned}B_0x^2 + B_1x + B_2 + 4B_0x + 2B_1 + 2B_0 - 2(B_0x^2 + B_1x + B_2 + 2B_0x + B_1) &= \\ = x^2 + x - 3;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_0x^2 + B_1x + B_2 + 4B_0x + 2B_1 + 2B_0 - 2B_0x^2 - 2B_1x - 2B_2 - 4B_0x - 2B_1 &= \\ = x^2 + x - 3;\end{aligned}$$

$$-B_0x^2 - B_1x - B_2 + 2B_0 = x^2 + x - 3.$$

Знайдемо коефіцієнти:

$$x^2 | - B_0 = 1; \quad B_0 = -1.$$

$$x | - B_1 = 1; \quad B_1 = -1$$

$$x^0 | - B_2 + 2B_0 = -3; \quad -B_2 - 2 = -3; \quad -B_2 = -1; \quad B_2 = 1.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\bar{y} = e^x(-x^2 - x + 1).$$

Розв'язок диференційного рівняння:  $y = y_0 + \bar{y}$ , тобто

$$y = C_1 + C_2e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1).$$

Знайдемо частинний розв'язок даного ДР, підстановкою початкових умов в у та  $y'$ :

$$y' = 2C_2e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1) + e^x(-2x - 1).$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 2 \\ 2C_2 + 1 - 1 = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

Задача Коші для даного диференційного рівняння має вид:

$$y = e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1).$$

б) корені характеристичного рівняння  $k_1 = \alpha$  і  $k_2 \neq \alpha$ , тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\bar{y} = e^{\alpha x} (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n) \cdot x.$$

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(3 - 4x).$$

*Розв'язання.* Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 3k + 2 = 0;$$

$$D = 9 - 8 = 1;$$

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}; k_1 = 2; k_2 = 1.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР:  $y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$ .

Права частина рівняння:  $f(x) = e^{2x}(3 - 4x)$ . Тут  $\alpha = 2$ ,  $k_1 = \alpha$ ,  $k_2 \neq \alpha$ .

Тому  $\bar{y}$  має вигляд:  $\bar{y} = e^{2x}(B_0 x + B_1) \cdot x = e^{2x}(B_0 x^2 + B_1 x)$ ;

$$\bar{y}' = 2e^{2x}(B_0 x^2 + B_1 x) + e^{2x}(2B_0 x + B_1) = e^{2x}(2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1);$$

$$\begin{aligned} \bar{y}'' &= 2e^{2x}(2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1) + e^{2x}(4B_0 x + 2B_1 + 2B_0) = \\ &= e^{2x}(4B_0 x^2 + 4B_1 x + 8B_0 x + 2B_0 + 4B_1). \end{aligned}$$

Підставимо отримані значення  $\bar{y}''$ ,  $\bar{y}'$  та  $\bar{y}$  в початкове рівняння:

$$\begin{aligned} 4B_0 x^2 + 4B_1 x + 8B_0 x + 2B_0 + 4B_1 - 3(2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1) + \\ + 2(B_0 x^2 + B_1 x) = 3 - 4x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4B_0 x^2 + 4B_1 x + 8B_0 x + 2B_0 + 4B_1 - 6B_0 x^2 - 6B_1 x - 6B_0 x - 3B_1 + \\ + 2B_0 x^2 + 2B_1 x = 3 - 4x; \end{aligned}$$

$$2B_0 x + 2B_0 + B_1 = 3 - 4x.$$

Знайдемо коефіцієнти:

$$x \mid 2B_0 = -4; \quad B_0 = -2.$$

$$x^0 \mid 2B_0 + B_1 = 3; \quad -4 + B_1 = 3; \quad B_1 = 7.$$

Отже, маємо частинний розв'язок:

$$\bar{y} = e^{2x}(-2x^2 + 7x).$$

Розв'язок рівняння має вид:  $y = y_0 + \bar{y}$ , тобто

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + e^{2x}(-2x^2 + 7x).$$

в) корені характеристичного рівняння  $k_1 = \alpha$  і  $k_2 = \alpha$ , тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\bar{y} = e^{\alpha x}(B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_n) \cdot x^2.$$

**Випадок 3.**  $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$ ,

де  $a$  і  $b$  - сталі.

а) корені характеристичного рівняння  $k_{1,2} \neq \pm \beta i$ , тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\boxed{\bar{y} = A \cos \beta x + B \sin \beta x},$$

де  $A$  і  $B$  - невідомі коефіцієнти.

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' + 4y' + 13 = 5 \sin 2x.$$

*Розв'язання.* Характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 + 4k + 13 = 0;$$

$$D = 16 - 52 = -36;$$

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР:  $y_0 = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ .

Права частина рівняння:  $f(x) = 5 \sin 2x$ ,  $k_{1,2} \neq \pm 2i$ .

$$\bar{y} = A \cos 2x + B \sin 2x;$$

$$\bar{y}' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x;$$

$$\bar{y}'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

Підставимо отримані значення  $\bar{y}''$ ,  $\bar{y}'$  та  $\bar{y}$  в дане рівняння:

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 4(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + \\ + 13(A \cos 2x + B \sin 2x) = 5 \sin 2x;$$

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 8A \sin 2x + 8B \cos 2x + \\ + 13A \cos 2x + 13B \sin 2x = 5 \sin 2x.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти. Для цього порівняємо коефіцієнти при  $\sin 2x$  та  $\cos 2x$ :

$$\sin 2x | -4B - 8A + 13B = 5;$$

$$\cos 2x | -4A + 8B + 13A = 0.$$

Отримали систему рівнянь, яку розв'яжемо за правилом

Крамера: 
$$\begin{cases} -8A + 9B = 5; \\ 9A + 8B = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -8 & 9 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -64 - 81 = -145,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = -45.$$

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{40}{145} = -\frac{8}{29}, \quad B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{45}{145} = \frac{9}{29}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\bar{y} = -\frac{8}{29} \cos 2x + \frac{9}{29} \sin 2x.$$

Розв'язком неоднорідного диференційного рівняння є:  $y = y_0 + \bar{y}$ , тобто

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \frac{8}{29} \cos 2x + \frac{9}{29} \sin 2x.$$

б) корені характеристичного рівняння  $k_{1,2} = \pm \beta i$ , тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\bar{y} = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \cdot x.$$

*Приклад.* Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' + y = \cos x.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 + 1 = 0;$$

$$k^2 = -1;$$

$$k_{1,2} = \pm i.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР:  $y_0 = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ .

Права частина рівняння:  $f(x) = \cos x$ ,  $k_{1,2} = \pm \beta i$ , тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\bar{y} = (A \sin x + B \cos x) \cdot x;$$

$$\bar{y}' = (A \cos x - B \sin x) \cdot x + A \sin x + B \cos x;$$

$$\bar{y}'' = (-A \sin x - B \cos x) \cdot x + A \cos x - B \sin x + A \cos x - B \sin x.$$

Підставимо отримані значення  $\bar{y}''$ ,  $\bar{y}'$  та  $\bar{y}$  у початкове рівняння:

$$-(A \sin x + B \cos x) \cdot x + 2A \cos x - 2B \sin x + (A \sin x + B \cos x) \cdot x = \cos x;$$

$$2A \cos x - 2B \sin x = \cos x.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти, що відповідають  $\sin x$  та  $\cos x$ :

$$\cos x | 2A = 1, \quad A = \frac{1}{2}.$$

$$\sin x | 2B = 0, \quad B = 0.$$

Отже, знайшли частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\bar{y} = \frac{1}{2} x \sin x.$$

Розв'язком даного диференційного рівняння є  $y = y_0 + \bar{y}$ :

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

**Випадок 4.**  $f(x) = e^{\alpha x}(a \cos \beta x + b \sin \beta x)$ ,

а) корені характеристичного рівняння  $k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$ , тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\boxed{\bar{y} = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)}.$$

**Приклад.** Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДУ

$$y'' - 7y' + 6y = 2e^{2x} \cos x.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 7k + 6 = 0;$$

$$D = 49 - 24 = 25;$$

$$k_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2}; \quad k_1 = 6; \quad k_2 = 1.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР:  $y_0 = C_1 e^{6x} + C_2 e^x$ .

Права частина рівняння:  $f(x) = 2e^{2x} \cos x$ ,  $k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ , тому частинний розв'язок неоднорідного ДР шукаємо у вигляді:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= e^{2x}(A \sin x + B \cos x); \\ \bar{y}' &= 2e^{2x}(A \sin x + B \cos x) + e^{2x}(A \cos x - B \sin x) = \\ &= e^{2x}(2A \sin x + 2B \cos x + A \cos x - B \sin x); \\ \bar{y}'' &= 2e^{2x}(2A \sin x + 2B \cos x + A \cos x - B \sin x) + \\ &+ e^{2x}(2A \cos x - 2B \sin x - A \sin x - B \cos x) = \\ &= e^{2x}(4A \sin x + 4B \cos x + 2A \cos x - 2B \sin x + \\ &+ 2A \cos x - 2B \sin x - A \sin x - B \cos x).\end{aligned}$$

Підставимо отримані значення  $\bar{y}''$ ,  $\bar{y}'$  та  $\bar{y}$  в дане рівняння:

$$\begin{aligned}4A \sin x + 4B \cos x + 2A \cos x - 2B \sin x + 2A \cos x - \\ - 2B \sin x - A \sin x - B \cos x - 7(2A \sin x + 2B \cos x + A \cos x - B \sin x) \\ + 6(A \sin x + B \cos x) = \cos x;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4A \sin x + 4B \cos x + 2A \cos x - 2B \sin x + 2A \cos x - \\ - 2B \sin x - A \sin x - B \cos x - 14A \sin x - 14B \cos x - 7A \cos x + \\ + 7B \sin x + 6A \sin x + 6B \cos x = \cos x;\end{aligned}$$

Визначимо невідомі коефіцієнти, що відповідають  $\sin x$  та  $\cos x$ :

$$\cos x | 4B + 2A + 2A - B - 14B - 7A + 6B = 1,$$

$$\sin x | 4A - 2B - 2B - A - 14A + 7B + 6A = 0,$$

Розв'яжемо отриману систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} -3A - 5B = 1; \\ -5A + 3B = 0; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 25 = -34;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{3}{34};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 5 = 5, \quad B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{5}{34}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\bar{y} = e^{2x} \left( -\frac{3}{34} \sin x - \frac{5}{34} \cos x \right) = -e^{2x} \left( \frac{3}{34} \sin x + \frac{5}{34} \cos x \right).$$

Розв'язком даного диференційного рівняння є  $y = y_0 + \bar{y}$ :

$$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x - e^{2x} \left( \frac{3}{34} \sin x + \frac{5}{34} \cos x \right).$$

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2006. – 736 с.
2. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн. / За ред. Г.Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003. – Кн. 1 : Основні розділи. – 400 с. – Кн. 2 – Спеціальні розділи. – 368 с.
3. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : АСТ, 2014. – Ч. 1 – 303 с., Ч. 2 – 415 с.
4. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2003. – 648 с.
5. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов. – М. : Физматлит, 2005. – 240 с.
6. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 1 / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський – Харків : ХНУМГ, 2015. – 255 с.
7. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецьк : Сталкер, 2003. – 495 с.
8. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 2011. Т. 1. – 430 с.; Т. 2. – 580 с.
9. Розендорн Э. Р. Теория поверхностей / Э. Р. Розендорн. – М. : Физматлит, 2006. – 304 с.
10. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005.–270 с.



*Виробничо-практичне видання*

Методичні рекомендації  
до організації самостійної роботи і проведення практичних занять  
з навчальної дисципліни

**«ВИЩА МАТЕМАТИКА»**

(для студентів 1 курсу денної форми навчання  
спеціальності 101 – Екологія)  
Модуль 1

Укладач **ВОРОНОВСЬКА** Лариса Петрівна

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*  
*За авторською редакцією*  
Комп'ютерне верстання *Л. П. Вороновська*

План 2017, поз. 140 М

---

Підп. до друку 06.03.2020. Формат 60×84/16.  
Друк на ризографі. Ум. друк арк. 5,17.  
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач  
Харківський національний університет  
міського господарства імені О.М. Бекетова,  
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.  
Електронна адреса: [rectorat@kname.edu.ua](mailto:rectorat@kname.edu.ua)  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК № 5328 від 11.04.2017.