

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до організації самостійної роботи,
проведення практичних занять,
виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань
із навчальної дисципліни

«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

Розділ «Динаміка»

(для студентів денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології, 185 – Нафтогазова інженерія та технології, 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, 263 – Цивільна безпека, 275 – Транспортні технології (за видами))

**Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2020**

Методичні рекомендації до організації самостійної роботи, проведення практичних занять, виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань з навчальної дисципліни «Теоретична механіка». Розділ «Динаміка» (для студентів денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології, 185 – Нафтогазова інженерія та технології, 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, 263 – Цивільна безпека, 275 – Транспортні технології (за видами)) / Харк. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад.: В. П. Шпачук, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 65 с.

Укладачі: д-р техн. наук В. П. Шпачук,
канд. техн. наук О. І. Рубаненко,
канд. техн. наук А. О. Гарбуз

Рецензент

О. О. Чупринін, кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної і будівельної механіки Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки, протокол № 1 від 29.08.19.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
1 ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ПРИ ПРЯМОЛІНІЙНОМУ РУХІ	5
1.1 Диференціальні рівняння руху точки і їх інтегрування	5
1.1.1 Приклад розв'язання задачі	6
1.2 Загальні теореми динаміки точки	8
1.2.1 Приклад розв'язання задачі.....	9
1.3 Варіанти задач до теми 1	11
2 ПРЯМОЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ	15
2.1 Вільні коливання	15
2.2 Вільні коливання при наявності сил опору (затухаючі коливання)	19
2.3 Вимушені коливання	20
2.3.1 Силове збудження коливань	20
2.3.2 Кінематичне збудження коливань	22
2.4 Вплив сили опору на вимушені коливання	23
2.5 Приклади розв'язання задач по дослідженню коливального руху матеріальної точки	25
2.6 Методика розв'язання і варіанти задач до теми 2	33
3 ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ	42
3.1 Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи ..	42
3.2 Загальне рівняння динаміки	44
3.3 Рівняння Лагранжа другого роду	45
3.4 Приклади розв'язання задач по дослідженню руху механічної системи	45
3.5 Завдання і варіанти задач до теми 3.....	57
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ	64

ВСТУП

Методичні рекомендації спрямовані на підвищення ефективності роботи студентів при спілкуванні з викладачем і в позааудиторний час.

Матеріали методичних вказівок також використовуються викладачами кафедри при проведенні самостійних, контрольних робіт, тестового контролю, захисту змістових модулів, при прийомі розрахунково-графічних робіт, заліків і комплектуванні задач в екзаменаційних білетах.

Методичні рекомендації містять тридцять варіантів задач за трьома темами розділу «Динаміка»: «Динаміка матеріальної точки при прямолінійному русі» (містить теми «Диференціальні рівняння руху точки і їх інтегрування», «Загальні теореми динаміки точки»), «Прямолінійні коливання матеріальної точки» і «Дослідження руху механічної системи з одним ступенем вільності» (містить теми «Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи», «Загальне рівняння динаміки» і «Рівняння Лагранжа другого роду»). Для кожної теми розібраний приклад розв'язання задачі.

Під час самостійного засвоєння теми студентам рекомендується закріпити знання теоретичного матеріалу, розібрати задачу і розв'язати ще кілька задач із запропонованих тридцяти варіантів (останні п'ять варіантів містять задачі підвищеної складності).

Використання методичних рекомендацій сприятиме засвоєнню методів теоретичної механіки – однієї з основних фундаментальних дисциплін у програмі бакалавра будь-якої спеціальності.

1 ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ПРИ ПРЯМОЛІНІЙНОМУ РУСІ

Для дослідження прямолінійного руху матеріальної точки при дії на неї постійних сил можна скористатися або основним законом динаміки точки (другим законом Ньютона), або загальними теоремами динаміки точки.

1.1 Диференціальні рівняння руху точки і їх інтегрування

Основний закон динаміки точки виглядає так:

$$m\bar{a} = \sum_k \bar{F}_k, \quad (1.1)$$

де m – маса точки; \bar{a} – вектор прискорення точки; \bar{F}_k – вектор k -ї сили, прикладеної до точки. При дослідженні прямолінійного руху точки у випадку, коли діючі сили розташовані в одній площині, векторне рівняння (1.1) потрібно спроектувати на осі декартової системи координат xOy :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum_k F_{kx}; \\ m\ddot{y} &= \sum_k F_{ky}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де \ddot{x}, \ddot{y} – проекції прискорення точки; F_{kx}, F_{ky} – проекції k -ї сили на осі Ox і Oy відповідно.

Якщо одну з осей, наприклад Ox , сумістити з прямою, по якій рухається точка, то її прискорення також буде спрямовано за цією прямою. Отже, проекція прискорення точки на вісь Oy $a_y = \ddot{y} = 0$ і рівняння (1.2) будуть мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum_k F_{kx}; \\ 0 &= \sum_k F_{ky}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Друге рівняння (1.3) є алгебраїчним і використовується для визначення нормальної складової реакції поверхні \bar{N} у випадку, коли за умовами задачі на точку діє сила тертя ковзання, обумовлена законом Кулона:

$$F_{mp} = f \cdot N, \quad (1.4)$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання.

Перше з рівнянь (1.3) являє собою диференціальне рівняння 2-го порядку. Для визначення рівняння руху точки $x(t)$ його потрібно проінтегрувати. При інтегруванні з'являються дві постійні інтегрування C_1 і C_2 , що визначаються за допомогою початкових умов: значень координати точки і її похідної (проекції швидкості) у деякий фіксований момент часу t_0 (звичайно при $t_0 = 0$):

$$x|_{t=0} = x_0; \quad \dot{x}|_{t=0} = V_{0x}, \quad (1.5)$$

де x_0, V_{0x} – початкове положення і початкова швидкість точки.

На підставі отриманого закону руху точки ведеться подальше розв'язання задачі в залежності від її постановки.

Методика розв'язання задачі

При визначенні характеристик руху точки на деякій ділянці AB розв'язання задачі рекомендується проводити відповідно до наступної методики.

1. Накреслити ділянку руху AB і зобразити матеріальну точку в вільному положенні (між точками A і B).

2. Показати задані сили і реакції в'язей, вважаючи точку вільною. Показати також ненульові вектори швидкостей початкової і/або кінцевої точок.

3. Вибрати систему координат. Систему координат зручно вибрати так, щоб початок координат збігався з початковою точкою ділянки A (при цьому буде $x_A = 0$), а вісь x була спрямована вздовж прямої AB у бік руху матеріальної точки.

4. Скласти диференціальне й алгебраїчне рівняння руху (1.3). Перетворити диференціальне рівняння до вигляду, зручному для інтегрування.

5. Проінтегрувати диференціальне рівняння руху точки.

6. Скласти початкові умови (1.5). За допомогою початкових умов (1.5) визначити постійні інтегрування C_1, C_2 . Записати рівняння руху точки $x(t)$ і вираз для проекції швидкості $\dot{x}(t)$ з урахуванням знайдених постійних інтегрування.

7. Скласти умови в кінцевій точці B ділянки:

$$x|_{t=\tau} = x_B; \quad \dot{x}|_{t=\tau} = V_{Bx}, \quad (1.6)$$

де τ – час руху матеріальної точки на ділянці AB ; x_B – координата точки B у обраній системі координат; V_{Bx} – проекція швидкості матеріальної точки на вісь Ox у кінцевій точці ділянки. Підставити умови (1.6) у вирази $x(t)$, $\dot{x}(t)$.

8. З отриманої системи двох алгебраїчних рівнянь визначити дві шукані величини.

1.1.1 Приклад розв'язання задачі

Приклад 1.1. Важка точка M піднімається по шорсткій похилій площині, що складає кут $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом. У початковий момент швидкість точки дорівнювала $V_0 = 15$ м/с. Коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,1$. Який шлях пройде точка до зупинки? За який час точка пройде цей шлях?

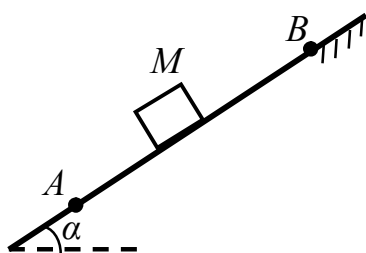


Рисунок 1.1.

Розв'язання

1. Намалюємо ділянку руху AB і зобразимо матеріальну точку M в довільному положенні (рис. 1.1).

2. Покажемо сили і реакції в'язей (рис. 1.2). На точку M будуть діяти: сила ваги \bar{P} ($P = mg$, де g – прискорення вільного падіння), нормальна реакція поверхні \bar{N} , сила тертя ковзання \bar{F}_{mp} ($F_{mp} = fN$), що спрямована у бік, протилежний руху точки. Покажемо також ненульовий вектор початкової швидкості $V_A = V_0 = 15$ м/с.

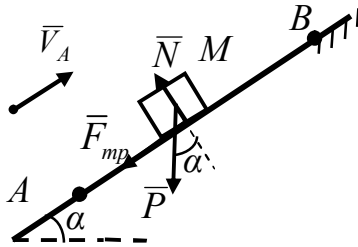


Рисунок 1.2

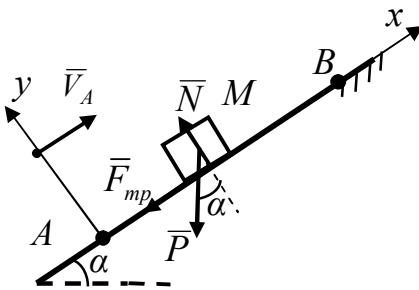


Рисунок 1.3

3. Зобразимо систему координат. Початок розмістимо у початкову точку ділянки A , а вісь x спрямуємо вздовж прямої AB у бік руху матеріальної точки (рис. 1.3).

4. Складемо рівняння (1.3):

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -P \sin \alpha - F_{mp}; \\ 0 = N - P \cos \alpha \Rightarrow N = P \cos \alpha. \end{cases} \quad (1.7)$$

Виразимо силу тертя, скориставшись другим рівнянням системи (1.7):

$$F_{mp} = fN = fP \cos \alpha = fmg \cos \alpha.$$

Тоді перше рівняння (1.7) набуде вигляду $m\ddot{x} = -mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha = -mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)$.

Скорочуючи обидві частини рівняння на m :

$$\ddot{x} = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha), \quad (1.8)$$

отримаємо диференціальне рівняння, зручне для інтегрування.

5. Враховуючи, що права частина диференціального рівняння $-g(\sin \alpha + f \cos \alpha) = const$, двічі візьмемо невизначені інтеграли за часом від обох частин рівняння (1.8). У результаті одержимо:

$$\begin{cases} \dot{x} = V_x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + C_1, \\ x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)\frac{t^2}{2} + C_1t + C_2, \end{cases} \quad (1.9)$$

де C_1, C_2 – постійні інтегрування.

6. Складемо початкові умови у точці A :

$$x|_{t=0} = 0; \quad \dot{x}|_{t=0} = V_A. \quad (1.10)$$

Підставимо початкові умови (1.10) у рівняння (1.9):

$$\begin{cases} V_A = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot 0 + C_1, \\ 0 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \frac{0}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \end{cases} \quad (1.11)$$

і визначимо постійні інтегрування:

$$C_1 = V_A; \quad C_2 = 0. \quad (1.12)$$

Запишемо рівняння руху точки $x(t)$ і вираз для проекції швидкості $\dot{x}(t)$ з урахуванням знайдених постійних інтегрування, підставивши (1.12) у (1.9):

$$\begin{cases} \dot{x} = V_x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot t + V_A, \\ x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + V_A t. \end{cases} \quad (1.13)$$

8. Складемо умови в кінцевій точці B ділянки AB :

$$x|_{t=\tau} = AB; \quad \dot{x}|_{t=\tau} = V_B = 0$$

і підставимо їх у рівняння (1.13)

$$\begin{cases} 0 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \tau + V_A \\ AB = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \frac{\tau^2}{2} + V_A \tau. \end{cases} \quad (1.14)$$

9. Розв'язавши систему алгебраїчних рівнянь (1.14), визначимо шукані величини τ і AB .

З першого рівняння (1.14)

$$\tau = \frac{V_A}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)} = \frac{15}{10 \cdot (0,5 + 0,1 \cdot 0,87)} = \frac{15}{5,87} = 2,5 \text{ (с)}.$$

З другого рівняння (1.14):

$$\begin{aligned} AB &= -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \frac{\tau^2}{2} + V_A \tau = -5,87 \cdot \frac{15^2}{2 \cdot 5,87^2} + 15 \cdot \frac{15}{5,87} = \\ &= \frac{15^2}{5,87} \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{15^2}{5,87 \cdot 2} = \frac{225}{11,74} = 20 \text{ (м)}. \end{aligned}$$

Відповідь. Точка до зупинки пройде шлях $AB = 20$ м за час $\tau = 2,5$ с.

1.2 Загальні теореми динаміки точки

Із загальних теорем динаміки точки для дослідження прямолінійного руху можна використовувати теореми про зміну кількості руху і зміну кінетичної енергії, записані в інтегральній формі:

$$m\bar{V}_1 - m\bar{V}_0 = \sum_k \bar{S}_k; \quad (1.15)$$

$$m \frac{V_1^2}{2} - m \frac{V_0^2}{2} = \sum_k A_k, \quad (1.16)$$

де \bar{V}_0, \bar{V}_1 – вектори швидкості в початковому і кінцевому положеннях; \bar{S}_k – імпульс k -ї сили; A_k – робота k -ї сили.

Імпульсом сили \bar{F} за проміжок часу $[0, \tau]$ називається векторна величина

$$\bar{S} = \int_0^{\tau} \bar{F} dt. \quad (1.17)$$

Якщо сила постійна за величиною і напрямком, то формула (1.17) спрощується:

$$\bar{S} = \int_0^{\tau} \bar{F} dt = \bar{F} \int_0^{\tau} dt = \bar{F} \tau. \quad (1.18)$$

Робота сили на переміщенні точки її прикладання з одного положення M_0 в інше M_1 , якщо сила постійна, а точка її прикладання переміщується прямолінійно, визначається за формулою:

$$A = \bar{F} \cdot \bar{r} = Fr \cos \gamma, \quad (1.19)$$

де $r = M_0M_1$ – переміщення точки; γ – кут між вектором сили \bar{F} і напрямком переміщення \bar{r} точки прикладання сили (рис. 1.4).

Враховуючи, що $F_r = F \cdot \cos \gamma$ є проекція сили на напрямок переміщення (рис. 1.5), роботу сили можна визначити таким способом:

$$A = F_r \cdot M_0M_1. \quad (1.20)$$

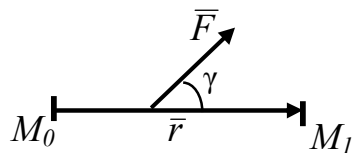


Рисунок 1.4

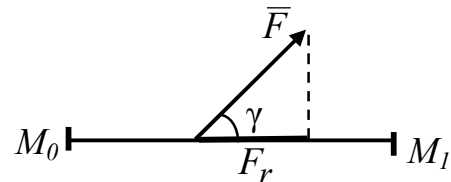


Рисунок 1.5

При розв'язанні задач векторне рівняння (1.15) потрібно проектувати на осі декартової системи координат Oxy :

$$\begin{aligned} mV_1 - mV_{0x} &= \sum_k S_{kx}, \\ mV_1 - mV_{0y} &= \sum_k S_{ky}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

де S_{kx} , S_{ky} – проекції імпульсу k -ї сили на осі Ox , Oy відповідно.

Методику розв'язання задач за допомогою загальних теорем динаміки розглянемо на наступному прикладі.

1.2.1 Приклад розв'язання задачі

Приклад 1.2. Умова задачі, схема руху точки і шукані величини співпадають з прикладом 1.1.

Розв'язання

Пункти 1, 2, 3 методик розв'язання задач в прикладах 1.1 і 1.2 співпадають. Тобто відповідно до п.п. 1÷3 намалюємо ділянку руху AB , зобразимо матеріальну точку в довільному положенні, виберемо систему координат Axy (її початок помістимо в початкову точку A ділянки, а вісь Ax

направимо уздовж прямої AB убік руху), покажемо сили і реакції в'язей, зобразимо вектори швидкості в точках A і B (рис. 1.3).

4. Складемо далі рівняння теорем про зміну кількості руху (1.21) і зміну кінетичної енергії (1.16). При цьому врахуємо, що швидкості $V_{Ay} = V_{Bx} = V_{By} = 0$. При визначенні проекцій імпульсів і робіт сил будемо використовувати формули (1.18) і (1.19):

В результаті отримаємо:

з рівнянь (1.21) –

$$\begin{cases} m \cdot 0 - m \cdot V_A = (-P \sin \alpha - F_{mp}) \cdot \tau, \\ m \cdot 0 - m \cdot 0 = (N - P \cos \alpha) \cdot \tau, \end{cases} \quad (1.22)$$

з рівняння (1.16) –

$$m \cdot \frac{0}{2} - m \frac{V_A^2}{2} = P \cdot AB \cdot \cos(90^\circ + \alpha) + F_{mp} \cdot AB \cdot \cos 180^\circ + N \cdot AB \cdot \cos 90^\circ,$$

або, враховуючи співвідношення і значення тригонометричних функцій $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$, $\cos 180^\circ = -1$, $\cos 90^\circ = 0$,

$$m \cdot \frac{0}{2} - m \frac{V_A^2}{2} = (-P \sin \alpha - F_{mp}) \cdot AB \quad (1.23)$$

Зауважимо, що праву частину рівняння (1.23) можна одержати, визначаючи роботи сил безпосередньо за формулою (1.20).

5. Розв'яжемо отриману систему алгебраїчних рівнянь (1.22), (1.23). З другого рівняння (1.22) одержимо

$$N = P \cdot \cos \alpha.$$

Тоді

$$F_{mp} = fN = fP \cos \alpha = fmg \cos \alpha \quad (1.24)$$

і перше рівняння (1.22) можна записати у вигляді:

$$-m \cdot V_A = -mg(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot \tau,$$

звідки

$$\tau = \frac{V_A}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)} = \frac{15}{10 \cdot (0,5 + 0,1 \cdot 0,87)} = \frac{15}{5,87} = 2,5 \text{ (с)}.$$

Підставляючи вирази для сили тертя (1.24) у рівняння (1.23), одержимо:

$$-m \cdot \frac{V_A^2}{2} = -mg(\sin \alpha + f \cos \alpha) \cdot AB,$$

остаточно

$$AB = \frac{V_A^2}{2g(\sin \alpha + f \cos \alpha)} = \frac{15^2}{2 \cdot 5,87} = \frac{225}{11,74} = 20 \text{ (м)}.$$

Відповідь. Точка до зупинки пройде шлях $AB = 20$ м за час $\tau = 2,5$ с.

1.3 Варіанти задач до теми 1

1. Тіло вагою $P = 50$ Н рухається вгору по похилій площині AB під дією постійної сили тяги F . Початкова швидкість тіла в точці A - $V_A = 0$. У точці B тіло має швидкість $V_B = 6$ м/с. Кут нахилу площини $\alpha = 30^\circ$, довжина пройденого шляху $AB = 40$ м. Визначити час руху на ділянці AB і величину сили тяги F .

2. Автомобіль рухається по горизонтальній прямолінійній ділянці шляху. При гальмуванні розвивається постійна сила опору, яка дорівнює $0,2$ ваги автомобіля. У момент початку гальмування швидкість автомобіля дорівнює 54 км/годину. Знайти час гальмування і гальмовий шлях.

3. Коефіцієнт тертя лиж об сніг при русі лижника по схилу гори вниз $f = 0,1$. Кут схилу 60° , а його довжина 100 м. Визначити час спуску і швидкість лижника наприкінці схилу, якщо на початку спуска вона дорівнювала нулю. Опором повітря зневажати.

4. Точка M рухається нагору по похилій площині, що складає з горизонтом кут $\alpha = 30^\circ$, починаючи свій рух з положення A зі швидкістю V_A . У точці B її швидкість дорівнює $V_B = 10$ м/с. Визначити початкову швидкість точки M і величину пройденого шляху, якщо час переміщення $\tau = 2$ с, а коефіцієнт тертя $f = 0,1$.

5. Снаряд вагою $P = 360$ Н вилетів з горизонтально розташованого дула гармати зі швидкістю 450 м/с. Довжина дула гармати дорівнює 2 м. Визначити значення сили тиску F_m газів на снаряд, вважаючи її постійною, при русі снаряда в дулі гармати. Скільки часу рухається снаряд у дулі гармати? У початковий момент снаряд знаходився в спокої. Силами опору руху зневажати.

6. Тіло рухається вниз по гладкій похилій площині, що утворює з горизонтом кут $\alpha = 60^\circ$. Знайти час руху тіла і швидкість наприкінці ділянки шляху довжиною 12 м, якщо швидкість на початку ділянки дорівнювала 2 м/с.

7. Важка точка M піднімається по гладкій похилій площині, що складає кут $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом, під дією постійної сили тяги $F = 300$ Н. У початковий момент швидкість точки дорівнювала 1 м/с. Визначити швидкість точки через 5 сек після початку руху, якщо вона пройшла за цей час шлях довжиною 50 м. Визначити також масу точки.

8. Дрезна рухається по горизонтальній прямолінійній ділянці дороги зі швидкістю 72 км/годину. У деякий момент двигун виключають. Вважаючи опір руху постійним і рівним $0,1$ ваги дрезини, визначити час і шлях, пройдений дрезиною від моменту вимикання двигуна до її зупинки.

9. Хлопчик з'їжджає на санках з гірки під кутом 60° до горизонту без початкової швидкості. Визначити швидкість санок через 4 с і шлях, пройдений за цей час, якщо коефіцієнт тертя санок об сніг при русі $f = 0,05$.

10. Тіло масою m піднімається по шорсткій похилій поверхні, коефіцієнт тертя якої $f = 0,1$ із точки A в точку B за час $\tau = 3$ с. Визначити довжину AB і початкову швидкість V_A , якщо $V_B = 10$ м/с і кут нахилу поверхні $\alpha = 30^{\circ}$.

11. Буєр (вітрильник) вагою $P = 2\ 000$ Н рухається прямолінійно по горизонтальній поверхні льоду під дією сили тиску вітру F_m . Коефіцієнт тертя буєра об лід $f = 0,1$. У початковий момент часу він мав швидкість V_A . Визначити величину швидкості V_B , якщо за час $\tau = 3$ с буєр пройшов відстань $AB = 45$ м і мав у точці B швидкість $V_B = 20$ м/с. Визначити також величину сили тиску F_m , вважаючи її постійною. Опором повітря зневажати.

12. Тіло M спускається по шорсткій площині, нахиленій до горизонту під кутом $\alpha = 60^{\circ}$. Коефіцієнт тертя тіла об площину $f = 0,2$. Через скільки годин швидкість тіла збільшиться від $V_A = 2$ м/с до $V_B = 10$ м/с? Чому дорівнює пройдений шлях AB ?

13. Лижник під'їжджає до нижньої точки A трампліна AB , нахиленого нагору стосовно горизонту під кутом $\alpha = 30^{\circ}$, зі швидкістю V_A . Який повинний бути коефіцієнт тертя лиж об сніг, якщо лижник, пройшовши за час $\tau = 1$ с шлях $AB = 10$ м, має в точці B швидкість $V_B = 18$ м/с? Чому дорівнює його швидкість у точці A ?

14. Потяг вагою $P = 2 \cdot 10^6$ Н рухається по прямолінійній горизонтальній ділянці шляху і у момент початку гальмування має швидкість 90 км/годину. Визначити силу гальмування, вважаючи її постійною, якщо потяг зупинився, пройшовши шлях 300 м. Знайти час руху.

15. Важка точка M починає свій рух з положення A вниз по гладкій похилій площині, що складає кут $\alpha = 30^{\circ}$ з горизонтом без початкової швидкості під дією постійної сили тяги $F = 24$ Н. Через 15 с точка здобуває швидкість $V_B = 12$ м/с. Визначити довжину ділянки AB і масу точки. Опором руху зневажати.

16. Тіло M внаслідок отриманого поштовху піднімається нагору по шорсткій похилій площині, що складає кут $\alpha = 60^{\circ}$ з горизонтом. Коефіцієнт тертя $f = 0,2$. За який час швидкість точки зменшиться від $V_A = 24$ м/с до $V_B = 12$ м/с? Чому дорівнює пройдений шлях?

17. Тверде тіло вагою $P = 400$ Н починає рухатися зі стану спокою по шорсткій горизонтальній площині під дією постійної сили $F = 2\ 000$ Н. Яку

швидкість придбає тіло через $\tau = 5$ с після початку руху, якщо коефіцієнт тертя $f = 0,1$? Чому дорівнює пройдений шлях?

18. Важка деталь сковзає вниз по гладкому лотку, маючи в початковий момент часу швидкість V_A . Під яким кутом до горизонтальної площини повинний розташовуватися лоток, щоб деталь за 2 с, пройшовши шлях $AB = 12$ м, придбала швидкість $V_B = 11$ м/с? Чому повинна дорівнювати початкова швидкість V_A ? Опором руху зневажати.

19. Потяг масою $m = 3 \cdot 10^5$ кг входить на підйом, кут нахилу якого до горизонту $\alpha = 0,05$ рад (при малих кутах можна вважати $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha = 1$). Через $\tau = 40$ сек після входу потяга на підйом його швидкість падає від $V_A = 20$ м/с до $V_B = 12$ м/с. Визначити сумарну силу гальмування, вважаючи її постійною, а також шлях AB , пройдений потягом за цей час.

20. Який повинний бути коефіцієнт тертя f коліс загальмованого автомобіля об дорогу, якщо при швидкості їзди $V_A = 90$ км/год він зупиняється через $\tau = 9$ сек після початку гальмування? Чому дорівнює пройдений шлях AB ? Опором повітря зневажати.

21. Вагон під час маневрів рухається з гірки, нахиленої під кутом $\alpha = 15^\circ$ до горизонту ($\sin 15^\circ \approx 0,26$). У верхній точці A він має швидкість $V_A = 4$ м/с. Сумарна сила опору руху складає 0,18 від ваги вагона. Визначити швидкість вагона в нижній точці B гірки, а також час руху τ на ділянці AB , якщо довжина $AB = 30$ м.

22. Мотоцикліст піднімається нагору по похилій поверхні AB , яка складає кут $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом, під дією постійної сили тяги F . Маса мотоцикліста разом з мотоциклом $m = 300$ кг. Визначити величину сили тяги F , а також початкову швидкість V_A , якщо мотоцикліст проїхав за $\tau = 5$ с відстань $AB = 75$ м і має в точці B швидкість $V_B = 10$ м/с. Опором руху зневажати.

23. Літак рухається по злітній смузі зі стану спокою під дією постійної сили тяги $F = 8 \cdot 10^4$ Н. Маса літака 10^4 кг. Визначити довжину розбігу AB , якщо злітна швидкість літака $V_B = 360$ км/ годину, а час розбігу $\tau = 20$ с. Визначити також величину сумарної сили опору руху F_0 , вважаючи її постійною.

24. У результаті отриманого поштовху цегла почала сковзати вниз з початковою швидкістю $V_A = 4$ м/с по нерухомій стрічці конвеєра, розташованій під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Який має бути коефіцієнт тертя ковзання цегли об стрічку конвеєра, якщо відомо, що пройшовши шлях $AB = 3,5$ м, цегла має швидкість $V_B = 3$ м/с? За який час τ цегла пройшла цей шлях?

25. Велосипедист, не обертаючи педалями, в'їжджає на підйом, що складає кут $\alpha = 15^\circ$ з горизонтом ($\sin 15^\circ \approx 0,26$), маючи в початковий момент часу швидкість 10 м/с. Визначити швидкість велосипедиста через 2 с і шлях, пройдений за цей час, якщо сила опору руху постійна і складає 0,1 ваги велосипедиста разом з велосипедом.

26. Тіло масою 10 кг, що рухалося по гладкій горизонтальній поверхні вправо, у деякій точці A має швидкість $V_A = 5$ м/с. З цього моменту на нього починає діяти постійна горизонтальна сила $F = 20$ Н, спрямована вліво. Визначити, через який проміжок часу τ тіло виявиться в іншій точці поверхні B , якщо відстань $AB = 6$ м. Визначити також швидкість V_B у цій точці. Опором руху зневажати (задача має три розв'язки).

27. Внаслідок отриманого поштовху тіло M починає сковзати вниз по похилій площині, що складає кут $\alpha = 30^\circ$ з горизонтом. Рух тіла по похилій площині відбувається в рідині, при цьому підйомна сила Архімеда F_a складає 0,4 від ваги тіла, а сила опору руху F_0 , постійна і складає 0,5 величини нормальної реакції N площини. Визначити початкову V_A і кінцеву V_B швидкості тіла, якщо ділянку $AB = 5$ м воно проходить за $\tau = 2,5$ с.

28. Вантаж масою $m = 2$ кг за допомогою троса піднімається вгору по негладкій похилій площині, розташованій під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Трос нахилений до площини, по якій рухається вантаж, під кутом $\beta = 45^\circ$. Визначити силу натягу троса F_H , вважаючи її постійною, якщо в початковий момент швидкість вантажу $V_A = 2$ м/с, а через $\tau = 5$ с у деякій точці B дорівнювала $V_B = 10,5$ м/с. Визначити також величину переміщення вантажу AB . Коефіцієнт тертя вантажу об похилу площину $f = 0,2$.

29. Матеріальна точка вагою 30 Н рухалася по горизонтальній прямій вліво зі швидкістю 6 м/с. До неї приклали постійну горизонтальну силу F , спрямовану вправо. Дія сили припинилася через 6 с, і тоді швидкість точки виявилася рівною 12 м/с і спрямованою вправо. Знайти величину сили F і шлях S , пройдений точкою за цей час. Опором руху зневажати.

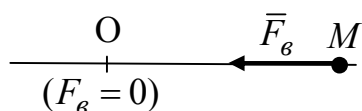
30. Тіло масою $m = 1$ кг рухалося вниз по похилій площині, що утворює кут $\alpha = 45^\circ$ з горизонтом. У деякій точці A , коли швидкість тіла дорівнювала $V_A = 14$ м/с, на нього почала діяти постійна сила $F = 10$ Н, розташована горизонтально і спрямована до площини. Чому повинний дорівнювати коефіцієнт тертя f , щоб тіло, пройшовши вниз по похилій площині відстань $AB = 70$ м, зупинилося. Визначити також час руху тіла на цій ділянці.

2 ПРЯМОЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Механічні рухи, які періодично повторюються, називаються *механічними коливаннями*. При цьому на матеріальну точку можуть діяти: відновлююча сила, сила опору руху та зовнішня збурююча сила. Розглянемо випадок, коли рух точки здійснюється по прямій, яка співпадає з сумісною лінією дії вказаних сил. Залежно від комбінації цих сил розрізняють *вільні, затухаючі та вимушені* коливання.

2.1 Вільні коливання

Існує клас сил, що називаються *відновлюючими*, модулі яких в лінійних задачах є пропорційними відхиленню точки від положення, де ці сили дорівнюють нулю, і напрямленими до цього положення:



$$F_g = c \cdot MO,$$

де c – коефіцієнт пропорційності.

Рисунок 2.1

Коливання, що відбуваються під дією тільки *відновлюючої* сили, називаються *вільними*.

Різновидом відновлюючої сили є сила пружності пружини, за допомогою якої моделюються пружні властивості реальних тіл. В лінійних задачах *сила пружності* відповідає закону Гука:

$$F_{np} = c \cdot \lambda, \quad (2.1)$$

де c – коефіцієнт жорсткості пружини, що показує, яку силу треба прикласти до кінця пружини для її деформації на одиницю довжини,

λ – деформація пружини (різниця між довжиною пружини у даному стані (розтягнутому або стиснутому) і недеформованому).

Постановка задачі. Розглянемо вертикальні коливання вантажу маси m , що підвішений до пружини жорсткістю c і здійснює поступальний рух. В такому випадку вантаж можна вважати матеріальною точкою маси m . Визначимо рівняння руху точки.

Методика розв'язання задачі

1. Зобразимо точку на розрахунковій схемі у довільному положенні (рис. 2.2). Для цього послідовно позначимо на схемі три характерних рівня:

рівень 1 – вільний кінець недеформованої пружини (в цьому положенні $F_{np} = 0$);

рівень 2 – положення статичної рівноваги точки, рух якої досліджується (це положення буде нижчим за рівень 1, оскільки при приєднанні точки до кінця недеформованої пружини остання буде у даному випадку розтягнутою під дією сили ваги точки).

Відстань між рівнями 1 (недеформованої пружини) і 2 (статичної рівноваги точки) називається *статичною деформацією* пружини і позначається δ_{cm} . В

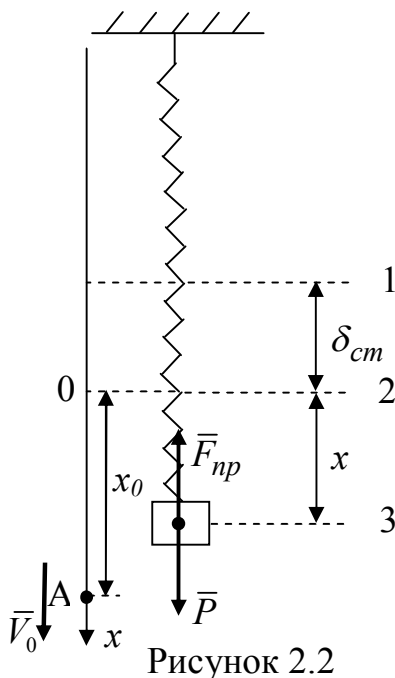


Рисунок 2.2

положенні рівноваги точки $\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0$, або $P - F_{np} = 0$. Остання рівність з урахуванням (2.1) і деформації пружини $\lambda = \delta_{cm}$ набуде вигляду

$$P - c \cdot \delta_{cm} = 0; \quad (2.2)$$

рівень 3 – довільне положення точки під час коливань (бажано рівень 3 зобразити так, щоб рівні 1, 2, 3 йшли на схемі послідовно).

2. У довільному положенні покажемо діючі на матеріальну точку сили, вважаючи її вільною. Це будуть сили ваги точки \bar{P} і пружності пружини \bar{F}_{np} (реакція пружини).

3. Виберемо систему координат. Початок системи координат бажано вибрати в положенні рівноваги точки (рівень 2), а вісь x направити у бік зростання цифр 1,2,3, що позначають характерні рівні на схемі. В такому разі довільне положення буде знаходитись в області додатних значень координати x .

4. Складемо диференціальне рівняння руху точки. Для цього спроектуємо основне рівняння динаміки

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_{np}$$

на вісь x :

$$m\ddot{x} = P - F_{np} = P - c(\delta_{cm} + x),$$

де $\lambda = \delta_{cm} + x$ – повна деформація пружини у довільному положенні. З урахуванням рівності (2.2) права частина останнього рівняння спроститься:

$$m\ddot{x} = P - c \cdot \delta_{cm} - cx = -cx.$$

Подальші перетворення диференціального рівняння виконуються у такій послідовності:

- шукаю функцію x і її похідні за часом перенести в ліву частину рівняння

$$m\ddot{x} + cx = 0,$$

- коефіцієнт перед вищою похідною зробити рівним одиниці (поділити усі доданки на масу m)

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0,$$

- ввести позначення: коефіцієнт перед шуканою функцією x позначити

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}. \quad (2.3)$$

Тоді диференціальне рівняння вільних коливань матеріальної точки набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.4)$$

5. Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (2.4) буде

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t, \quad (2.5)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування, які визначаються за допомогою початкових умов. Щоб скористатись початковими умовами, треба мати вираз для похідної за часом від координати x . Диференціюючи за часом рівняння (2.5), отримаємо:

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t. \quad (2.6)$$

6. Визначимо сталі інтегрування C_1, C_2 . Для цього складемо початкові умови. Припустимо, що матеріальна точка почала рухатись, маючи додатні значення початкової координати (точка А на розрахунковій схемі) і проекції швидкості:

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \dot{x}|_{t=0} = V_0. \quad (2.7)$$

Підставляючи початкові умови (2.7) у вирази функцій координати (2.5) і проекції швидкості (2.6), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення сталих інтегрування C_1, C_2 :

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0. \end{cases}$$

Звідки сталі інтегрування будуть

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{V_0}{\omega_0}.$$

Підставляючи сталі інтегрування у вираз (2.5), отримаємо

$$x = x_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t. \quad (2.8)$$

Рівняння (2.8) називається *рівнянням вільних коливань* матеріальної точки. Рівняння (2.5) або (2.8) можна подати у формі

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.9)$$

де $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\varphi_0 = \arctg \frac{C_1}{C_2}$ (або $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega_0^2}}$, $\varphi_0 = \arctg \frac{x_0 \cdot \omega_0}{V_0}$).

З формули (2.9) випливає, що параметр A є *амплітудою коливань* (найбільшим відхиленням точки від положення рівноваги), аргумент $\omega_0 t + \varphi_0$ називається *фазою коливань*, а величина φ_0 – *початковою фазою*. Параметр ω_0 , як коефіцієнт при часі t у формулі тригонометричної функції, має назву *колової частоти коливань* (або *власної частоти*). Колова частота визначає число коливань за проміжок часу 2π секунд і вимірюється у *рад/с* (або *1/с*). Слід зазначити, що в технічній літературі використовується і звичайна частота f (або інше позначення), яка визначає число коливань за 1 секунду, вимірюється в *Гц* (*Герц*) і зв'язана з коловою частотою співвідношенням $\omega_0 = 2\pi f$.

Залежність між *періодом* T_0 (проміжком часу, протягом якого відбувається повне коливання) і коловою частотою визначається з умови періодичності руху і має вигляд

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (2.10)$$

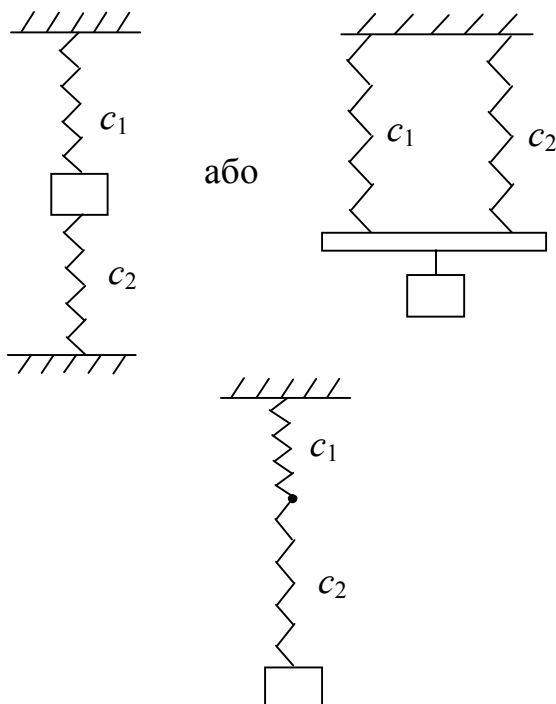
З аналізу формули (2.9) випливають *властивості вільних коливань*:

- вантаж (матеріальна точка) здійснює *гармонійний* коливальний рух;
- колова частота ω_0 і період T_0 , що визначаються формулами (2.3) і (2.10), від початкових умов не залежать, а визначаються параметрами системи (m , c) і є *власними динамічними характеристиками* коливальної системи;
- амплітуда A і початкова фаза φ_0 вільних коливань залежать від початкових умов.

Відмітимо, що розглянута механічна система відноситься до класу *консервативних систем*.

Еквівалентні перетворення при наявності декількох пружин

Пружини, які з'єднують вантаж з основою, можуть утворювати систему паралельно і послідовно з'єднаних пружних елементів. У цьому випадку подані на рисунках вихідні механічні схеми необхідно методом еквівалентних перетворень звести до розрахункової схеми з одним пружним елементом, який має еквівалентну жорсткість c_e (рис. 2.3).



Еквівалентна пружина на розрахунковій схемі при *паралельному* з'єднанні пружних елементів буде мати жорсткість

$$c_e = c_1 + c_2,$$

Еквівалентна пружина на розрахунковій схемі при *послідовному* з'єднанні пружних елементів буде мати жорсткість

$$c_e = c_1 \cdot c_2 / (c_1 + c_2).$$

Рисунок 2.3

При змішаному з'єднанні трьох і більше пружних елементів послідовно замінюються по два пружних елемента, доки не залишиться один з еквівалентною жорсткістю c_e .

2.2 Вільні коливання при наявності сил опору (затухаючі коливання)

При русі в середовищі (рідині) на матеріальну точку діє *сила опору* (*сила в'язкого тертя*), яку при малих швидкостях руху можна вважати прямо пропорційною швидкості точки і напрямленою в бік, протилежний швидкості: $\bar{R} = -b\bar{V}$, де b – коефіцієнт опору середовища. За допомогою сили опору моделюються в'язкі властивості реальних пружних тіл. Коливання, які відбуваються під дією відновлюючої сили і сили опору, називаються *затухаючими*.

Механічна система, що моделює в цьому випадку коливання вантажу, має такий же вигляд, як у §2.1, тільки додається сила опору (при зображенні сили опору вважаємо, що точка рухається в бік додатного напрямку осі x) (рис. 2.4). Умовні позначення на рисунках співпадають.

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки буде мати вигляд

$$m\ddot{x} = P - F_{np} - R$$

або $m\ddot{x} = P - c(\delta_{cm} + x) - b\dot{x}$,

або $m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$.

Розділимо усі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad 2h = \frac{b}{m}, \quad (2.11)$$

де h – коефіцієнт демпфірування коливань.

Тоді *диференціальне рівняння вільних коливань при наявності сили опору* набуде вигляду

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.12)$$

Характер руху вантажу істотним чином залежить від співвідношення h і ω_0 . Можливі наступні випадки.

1) Випадок *малого опору* ($h < \omega_0$). Рівняння коливання вантажу $x(t)$ і перша похідна за часом $\dot{x}(t)$ матимуть

відповідно вигляд

$$x = e^{-ht} (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t) = A \cdot e^{-ht} \sin(\omega_0^* t + \varphi_0), \quad (2.13)$$

$$\dot{x} = -he^{-ht} (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t) + e^{-ht} \omega_0^* (-C_1 \sin \omega_0^* t + C_2 \cos \omega_0^* t), \quad (2.14)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування, які визначаються за допомогою початкових умов і у загальному випадку (2.7) мають значення

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = (V_0 + hx_0) / \omega_0^*.$$

Інші параметри, що входять у формули (2.13), (2.14), будуть

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{(V_0 + hx_0)^2}{\omega_0^{*2}}}; \quad \varphi_0 = \arctg \frac{C_1}{C_2} = \arctg \frac{x_0 \cdot \omega_0^*}{V_0 + hx_0}; \quad \omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}.$$

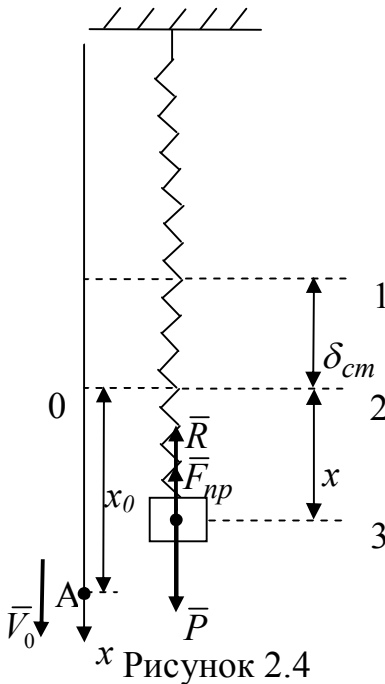


Рисунок 2.4

Співвідношення (2.13) називається *рівнянням затухаючих коливань*. При цьому амплітуда коливань Ae^{-ht} з часом спадає за експоненціальним законом до нуля. Величина ω_0^* є *коловою частотою затухаючих коливань* і пов'язана з умовним *періодом затухаючих коливань* T_0^* формулою

$$T_0^* = \frac{2\pi}{\omega_0^*}. \quad (2.15)$$

2) Випадок *великого опору* ($h > \omega_0$). Закон коливань вантажу буде мати вигляд

$$x = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}, \quad (2.16)$$

де
$$p_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}; \quad p_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2};$$

Це рівняння описує *аперіодичний затухаючий рух*. Координата x вантажу при $t \rightarrow 0$ монотонно зменшується, а вантаж наближається до положення статичної рівноваги.

3) *Граничний* випадок має місце при $h = \omega_0$. Тут закон руху вантажу буде

$$x = e^{-ht} (C_1 + C_2 \cdot t). \quad (2.17)$$

Розглянутий рух (2.17) також є *аперіодичним затухаючим*

Відзначимо, що розглянута механічна система відноситься до класу *дисипативних систем*.

2.3 Вимушені коливання

Коливання, що відбуваються під дією відновлюючої сили і збурювання, яке змінюється за часом, називаються *вимушеними*. Ці коливання виникають у разі безпосередньої дії на точку збурюючої сили (силове збудження коливань), при переміщенні точки кріплення пружини до основи (кінематичне збудження коливань), а також при взаємному зміщенні мас, які складають механічну систему, що з'єднана з основою пружною в'яззю.

2.3.1 Силове збудження коливань

Сила $Q(t)$, яка змінюється за часом по заданому закону, називається *збурюючою*. Розглянемо простіший, але практично важливий випадок, коли сила змінюється за гармонійним законом

$$Q = H \cdot \sin \omega_B t,$$

де H – амплітуда збурюючої сили; ω_B – її колова частота.

Механічна система, яка моделює в цьому випадку коливання вантажу, має такий же вигляд, як у §2.1, тільки додається збурююча сила (при зображенні сили вважаємо, що вона напрямлена в бік додатного напрямку осі x) (рис. 2.5). Умовні позначення на рисунках співпадають.

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки має вигляд

або
або

$$m\ddot{x} = P - F_{np} + Q,$$

$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ст} + x) + H \sin \omega_B t,$$

$$m\ddot{x} + cx = H \sin \omega_B t.$$

Розділимо усі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad h_B = \frac{H}{m}. \quad (2.18)$$

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = h_B \sin \omega_B t. \quad (2.19)$$

Рівняння (2.19) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (2.19) подамо у вигляді

$$x = x_1 + x_2,$$

де x_1 – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, x_2 – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

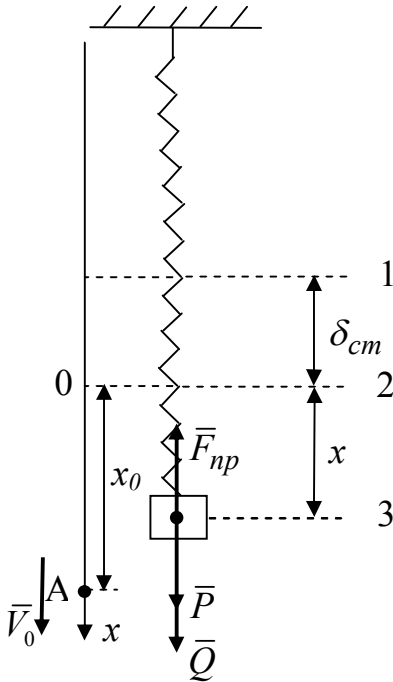


Рисунок 2.5

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд (2.5). При визначенні частинного розв'язку розглянемо три випадки:

$$\omega_B \neq \omega_0; \quad \omega_B \approx \omega_0; \quad \omega_B = \omega_0.$$

1) $\omega_B \neq \omega_0$ (частота збурюючої сили і власна частота різні).

В цьому випадку частинний розв'язок має вигляд

$$x_2 = \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \sin \omega_B t,$$

а рівняння коливання вантажу $x(t)$ і перша похідна за часом $\dot{x}(t)$ мають вигляд

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \sin \omega_B t, \quad (2.20)$$

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos \omega_B t. \quad (2.21)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування, які визначаються за допомогою початкових умов і у загальному випадку (2.7) мають значення

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{V_0}{\omega_0} - \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0 (\omega_0^2 - \omega_B^2)}.$$

Рівняння (2.20) називається *рівнянням вимушених коливань*. З аналізу формули (2.20) впливають *властивості вимушених коливань*:

- вимушені коливання є *бігармонійними* (двочастотними) – відбувається накладення вільних (власних) коливань механічної системи (перші два

доданки у формулі (2.20)) на чисто вимушені коливання з частотою збурюючої сили (останній доданок у формулі (2.20)). Особливістю таких коливань є те, що власні коливання збуджуються і при нульових початкових умовах. В реальних системах власні коливання за рахунок опору руху швидко затухають і залишаються чисто вимушені коливання;

- *колова частота чисто вимушених коливань* ω_B від параметрів системи і початкових умов не залежить, а визначається параметрами збурюючої сили;

- *амплітуда чисто вимушених коливань* $A_B = \left| \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right|$ також від початкових умов не залежить а визначається параметрами збурюючої сили (H, ω_B) і механічної системи (m, c).

2) $\omega_B \approx \omega_0$ (частота збурюючої сили і власна частота близькі за значенням).

Припустимо, що початкові умови нульові ($x_0 = 0, V_0 = 0$). Тоді, поклавши $\omega_B / \omega_0 \approx 1$, але $\omega_0^2 - \omega_B^2 \neq 0$ і $\omega_0 + \omega_B \approx 2\omega_B$, з виразу (2.20) отримаємо

$$x \approx \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot (\sin \omega_B t - \sin \omega_0 t) \approx 2 \cdot \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin\left(\frac{\omega_B - \omega_0}{2} \cdot t\right) \cdot \cos \omega_B t. \quad (2.22)$$

Такий рух називається *биттям* – коливальних рух, який відбувається з частотою ω_B збурюючої сили та амплітудою, що являється періодичною (з частотою $(\omega_B - \omega_0) / 2$) функцією часу.

3) $\omega_B = \omega_0$ (частота збурюючої сили і власна частота співпадають).

В цьому випадку частинний розв'язок має вигляд

$$x_2 = -\frac{h_B t}{2\omega_B} \cos \omega_B t,$$

і рівняння коливання вантажу $x(t)$ буде

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t - \frac{h_B}{2\omega_B} t \cdot \cos \omega_B t. \quad (2.23)$$

Як неважко помітити, амплітуда чисто вимушених коливань $\frac{h_B \cdot t}{2\omega_B}$ збільшується прямо пропорційно часу і при $t \rightarrow \infty$ необмежено зростає. Явище необмеженого зростання амплітуди вимушених коливань називається *резонансом*, а рівність $\omega_B = \omega_0$ – *умовою резонансу*. В реальних конструкціях явище резонансу може слугувати причиною їхнього руйнування.

2.3.2 Кінематичне збудження коливань

При кінематичному збудженні коливань заданий рух здійснює основа у точці прикріплення до нього кінця пружини за законом

$$\xi = a_\xi \cdot \sin \omega_B t,$$

де a_ξ – амплітуда переміщення основи, ω_B – її колова частота.

Механічна система, яка моделює в цьому випадку коливання вантажу, має такий же вигляд, як у §2.1, тільки додається переміщення основи пружини ξ (при зображенні переміщення вважаємо, що воно напрямлене в бік додатного напрямку осі x) (рис. 2.6). Умовні позначення на рисунках співпадають.

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки має вигляд

$$m\ddot{x} = P - F_{np},$$

або
$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ст} + x - \xi),$$

або
$$m\ddot{x} + cx = c \cdot a_\xi \cdot \sin \omega_B t.$$

Розділимо усі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad h_B = \frac{c \cdot a_\xi}{m}. \quad (2.24)$$

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань набуде вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = h_B \sin \omega_B t. \quad (2.25)$$

Диференціальне рівняння повністю співпадає з рівнянням (2.19).

Отже, властивості вимушених коливань при кінематичному збудженні будуть такими ж, як і при силовому.

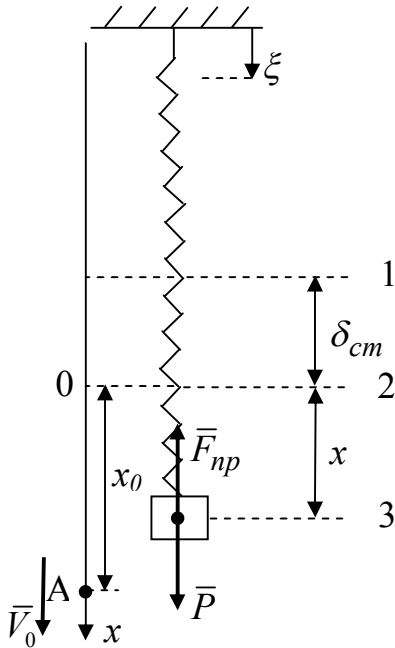


Рисунок 2.6

2.4 Вплив сили опору на вимушені коливання

Якщо на матеріальну точку, крім відновлюючої і збуджуючої сил, діє також і сила опору (див. §2.2), то диференціальне рівняння її руху матиме вигляд

$$m\ddot{x} = P - F_{np} - R + Q$$

або
$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ст} + x) - b\dot{x} + H \sin \omega_B t,$$

або
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = H \sin \omega_B t.$$

Розділимо усі доданки на m і введемо позначення

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad 2h = \frac{b}{m}, \quad h_B = \frac{H}{m}.$$

Тоді диференціальне рівняння вимушених коливань з урахуванням опору набуде вигляду

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = h_B \sin \omega_B t. \quad (2.26)$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (2.26) складається з суми розв'язків

$$x = x_1 + x_2,$$

де x_1 – загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння, x_2 – частинний розв’язок неоднорідного рівняння.

У випадку малого опору ($h < \omega_0$) рівняння вимушених коливань точки з урахуванням опору має вигляд

$$x = e^{-ht} (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t) + \frac{h_B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}} \sin(\omega_B t - \varphi_B), \quad (2.27)$$

де $\omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$, $\varphi_B = \arctg \frac{2h \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2}$, C_1, C_2 – сталі інтегрування, ω_0^* – колова частота затухаючих коливань, φ_B – зсув фази чисто вимушених коливань.

З аналізу формули (2.27) випливають *властивості вимушених коливань*:

- вимушені коливання є *двочастотними*: вони відбуваються одночасно як з частотою ω_0^* затухаючих коливань, так і з частотою ω_B чисто вимушених коливань. Наявність множника у першому доданку призводить до швидкого затухання коливального руху точки з частотою ω_0^* і далі відбуваються чисто вимушені коливання;
- *колова частота чисто вимушених коливань* ω_B від параметрів системи і початкових умов не залежить, а визначається параметрами збудуючої сили;
- *амплітуда чисто вимушених коливань* $A_B = h_B / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_B^2)^2 + 4h^2 \omega_B^2}$ і *зсув фази* φ_B є величинами постійними, не залежать від початкових умов, і визначаються параметрами системи і збудуючої сили;
- якщо значення частоти збудуючої сили дорівнює $\omega_B = \sqrt{\omega_0^2 - 2h^2}$, а параметри механічної систем задовольняють нерівності $0 < h / \omega_0 < 0,707$, де h / ω_0 – відносне демпфірування, то амплітуда вимушених коливань вантажу буде найбільшою:

$$A_{B\max} = h_B / (2h\omega_0^*);$$

- при ($\omega_B = \omega_0$) в системі настає явище *резонансу*. Однак, на відміну від консервативної системи (без урахування опору), амплітуда вимушених коливань вантажу в дисипативній системі (з урахуванням опору) необмежено не зростає, а приймає кінцеве значення, яке дорівнює

$$A_{B\text{рез}} = h_B / (2h\omega_0);$$

- якщо значення параметру відносного демпфірування лежать у діапазоні $0,707 \leq h / \omega_0 < 1$, то амплітуда вимушених коливань в зоні резонансу не має екстремуму і за будь-якої частоти збудуючої сили на перевищує статичне переміщення $x_{cm} = H / c$.

Таким чином, вплив сили опору на вимушені коливання виражається у зсуві фази вимушених коливань відносно фази збудуючої сили і зменшенні амплітуди коливань зі зростанням опору.

2.5 Приклади розв'язання задач по дослідженню коливального руху матеріальної точки

Приклад 2.1. Знайти рівняння коливального руху вантажу D по гладенькій похилій площині у напрямку осі x , що співпадає з віссю двох послідовно з'єднаних пружин (рис. 2.7).

Умова задачі. Система встановлених на пружинах вантажів D ($m_D = 20\text{кг}$) і E ($m_E = 10\text{ кг}$) знаходиться в положенні статичної рівноваги.

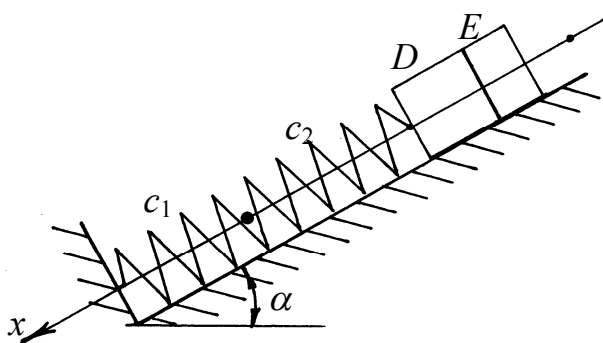


Рисунок 2.7

У момент часу $t = 0$ вантаж E знімають з вантажу D . Одночасно вантажу D надають початкову швидкість $V_0 = \dot{x}_0 = 0,1\text{ м/с}$ у напрямку позитивного відліку координати x . Коефіцієнти жорсткості пружин дорівнюють $c_1 = c_2 = 400\text{ Н/см}$. Кут $\alpha = 30^\circ$.

Розв'язання

Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом і подамо її на рисунку 2.8, де рівні 1, 2, 3, як у §2.1, визначають відповідно вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу D і його довільне положення під час коливань, точка A – положення вантажу D в момент початку коливань (положення рівноваги системи вантажів D і E), δ_{cm_D} – статична деформація пружини від вантажу D .

Знаходимо еквівалентну жорсткість c (див. рис. 2.3):

$$c = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} = \frac{400 \cdot 400}{400 + 400} = 200\text{ Н/см} = 2 \cdot 10^4\text{ Н/м}.$$

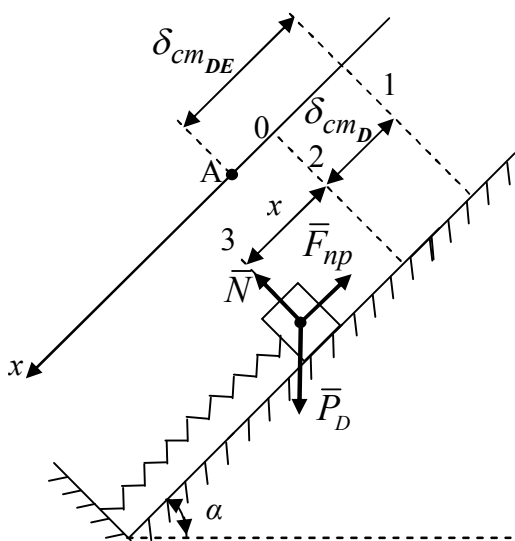


Рисунок 2.8

Складемо диференціальне рівняння руху точки і перетворимо його до стандартної форми, враховуючи, що в даній схемі в положенні статичної рівноваги вантажу D сила пружності \bar{F}_{np} пружини зрівноважує не всю силу ваги вантажу \bar{P}_D , а тільки її складову $P_{Dx} = P_D \cdot \sin \alpha$ у напрямку осі Ox , яка співпадає з віссю пружини. Отже,

$$\begin{aligned} m_D \ddot{x} &= P_{Dx} - F_{np} = P_D \cdot \sin \alpha - c(\delta_{cm_D} + x) = \\ &= P_D \cdot \sin \alpha - c\delta_{cm_D} - cx = -cx, \end{aligned}$$

або
$$m_D \ddot{x} + cx = 0,$$

або
$$\ddot{x} + \frac{c}{m_D} x = 0.$$

Позначимо $\omega_0^2 = \frac{c}{m_D}$. Тоді остаточно буде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Отримане рівняння має форму (2.4) диференціального рівняння вільних коливань. Його розв'язок – функція $x(t)$ і її перша похідна за часом $\dot{x}(t)$ мають вигляд (2.5), (2.6)

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t, \\ \dot{x} &= -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t. \end{aligned}$$

Для визначення сталих інтегрування C_1, C_2 складемо початкові умови (точка А на рис. 2.8): $x|_{t=0} = \delta_{cm_{DE}} - \delta_{cm_D} = \delta_{cm_E}$, $\dot{x}|_{t=0} = V_0$ і підставимо їх у функції $x(t)$ і $\dot{x}(t)$

$$\begin{cases} \delta_{cm_E} = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0. \end{cases}$$

Звідки, з урахуванням значень $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, сталі інтегрування будуть

$$C_1 = \delta_{cm_E}, \quad C_2 = \frac{V_0}{\omega_0}.$$

Підставляючи їх у функцію $x(t)$, отримаємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = \delta_{cm_E} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t.$$

Підрахуємо значення сталих параметрів:

- величина статичної деформації від вантажу E

$$\delta_{cm_E} = \frac{m_E g \cdot \sin \alpha}{c} \approx \frac{10 \cdot 10 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^4} = 0,25 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

- значення власної частоти

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{20}} = \sqrt{1000} \approx 31,6 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

$$\frac{V_0}{\omega_0} = \frac{0,1}{31,6} \approx 0,32 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Тоді рівняння руху вантажу буде:

$$x = 0,25 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 31,6t + 0,32 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 31,6t \text{ (м)}.$$

Перевірка. При $t=0$ одержимо $x|_{t=0} = 0,25 \cdot 10^{-2}$ м, що співпадає з величиною раніше визначеної початкової умови x_0 .

Відповідь. Вантаж здійснює вільні коливання за законом $x = 0,25 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 31,6t + 0,32 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 31,6t$ (м), з коловою частотою $31,6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Графік залежності координати x від часу t наведений на рисунку 2.9. Був обчислений період вільних коливань за формулою $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, який дорівнює 0,2 с. Крок за часом був обраний у 0,02 с. На графіку наведено три періоди коливань.

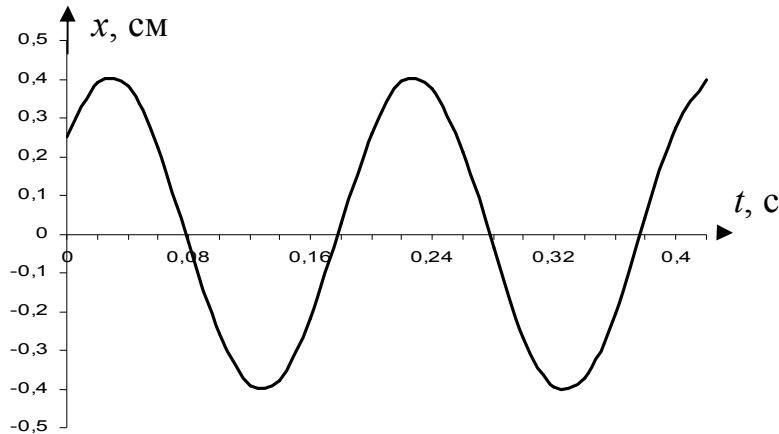


Рисунок 2.9

Приклад 2.2. Знайти рівняння коливального руху вантажу D (рис. 2.10), вважаючи його матеріальною точкою, у напрямку горизонтальної осі x . Брусок, який зв'язує пружину і демпфер, є невагомим. Рух бруска, який займає у стані спокою вертикальне положення, вважати поступальним.

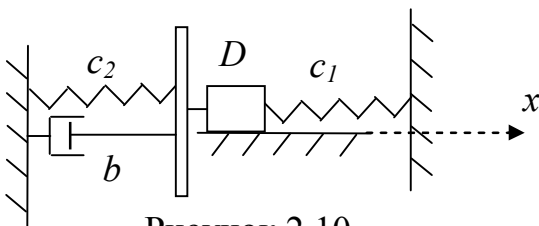


Рисунок 2.10

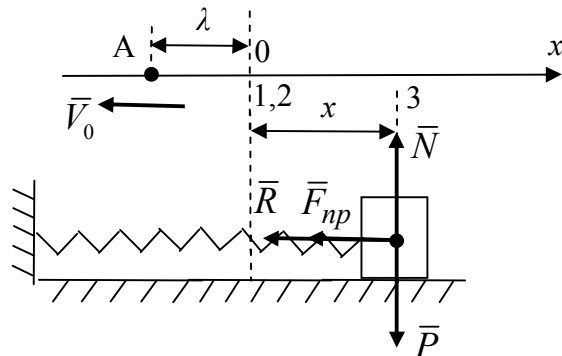


Рисунок 2.11

Умова задачі. Маса вантажу $m_D = 4$ кг. Коефіцієнти жорсткості двох пружин $c_1 = 2$ Н/см, $c_2 = 3$ Н/см, коефіцієнт опору демпфера $b = 16$ Н·с/м. Перед початком руху вантаж відхиляють на величину $\lambda = 3$ см у напрямку від'ємного відліку координати x , надаючи вантажу початкову швидкість $V_0 = 0,6$ м/с, спрямовану вліво.

Розв'язання

Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом і подамо її на рисунку 2.11, де рівні 1, 2, 3 визначають відповідно вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу D

(яке для горизонтальної пружини співпадає з рівнем 1; в цьому разі $\delta_{cm} = 0$) і його довільне положення під час коливань, точка A – положення вантажу D в момент початку коливань, \vec{V}_0 – вектор початкової швидкості, $\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{np}, \vec{R}$ – відповідно сила ваги вантажу, нормальна реакція поверхні, сила пружності пружини та сила опору.

Схема розташування вантажу поміж двома пружинами еквівалентна паралельному з'єднанню пружних елементів (див. рис. 2.3).

Знаходимо еквівалентну жорсткість c :

$$c = c_1 + c_2 = 2 + 3 = 5 \text{ Н/см} = 5 \cdot 10^2 \text{ Н/м.}$$

Складемо диференціальне рівняння руху точки:

$$m_D \ddot{x} = -F_{np} - R = -cx - b\dot{x},$$

і перетворимо його до стандартної форми:

$$m_D \ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0,$$

або

$$\ddot{x} + \frac{b}{m_D} \dot{x} + \frac{c}{m_D} x = 0.$$

Позначимо $\omega_0^2 = \frac{c}{m_D}$, $2h = \frac{b}{m}$, тоді буде

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Отримане рівняння має форму (2.12) диференціального рівняння вільних коливань при наявності опору. Підрахуємо значення власної частоти вільних

коливань:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^2}{4}} = \sqrt{125} \approx 11,2 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

та коефіцієнта демпфірування: $h = \frac{b}{2m} = \frac{16}{2 \cdot 4} = 2 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$

Зрівнюючи ці параметри, маємо $h < \omega_0$ – випадок малого опору. В цьому разі функція $x(t)$ і її перша похідна за часом $\dot{x}(t)$ мають вигляд (2.13), (2.14)

$$x = e^{-ht} \cdot (C_1 \cos \omega_0^* t + C_2 \sin \omega_0^* t),$$

$$\dot{x} = -h \cdot e^{-ht} \cdot (C_1 \cdot \cos \omega_0^* t + C_2 \cdot \sin \omega_0^* t) + e^{-ht} \cdot \omega_0^* \cdot (-C_1 \cdot \sin \omega_0^* t + C_2 \cdot \cos \omega_0^* t).$$

Для визначення сталих інтегрування C_1, C_2 складемо початкові умови (точка A на рис. 2.11):

$$x|_{t=0} = -\lambda, \quad \dot{x}|_{t=0} = -V_0$$

і підставимо їх у функції $x(t)$ і $\dot{x}(t)$

$$\begin{cases} -\lambda = e^0 \cdot (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0), \\ -V_0 = -h \cdot e^0 \cdot (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0) + e^0 \cdot \omega_0^* \cdot (-C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0). \end{cases}$$

Звідки, з урахуванням значень $e^0 = 1$, $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, сталі інтегрування будуть

$$C_1 = -\lambda, \quad C_2 = \frac{-V_0 - h\lambda}{\omega_0^*}.$$

Підставляючи їх у функцію $x(t)$, отримаємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = -e^{-ht} \cdot \left(\lambda \cdot \cos \omega_0^* t + \frac{V_0 + h\lambda}{\omega_0^*} \cdot \sin \omega_0^* t \right).$$

Підрахуємо значення постійних параметрів:

– значення власної частоти затухаючих коливань

$$\omega_0^* = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} = \sqrt{125 - 4} = \sqrt{121} = 11 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

– параметр

$$\frac{V_0 + h\lambda}{\omega_0^*} = \frac{0,6 + 2 \cdot 0,03}{11} = \frac{0,66}{11} \approx 0,06 \text{ м.}$$

Тоді рівняння руху вантажу буде таким:

$$x = -e^{-2t} \cdot (0,03 \cdot \cos 11t + 0,06 \cdot \sin 11t) \text{ (м)}.$$

Перевірка. При $t = 0$ одержимо $x|_{t=0} = -0,03$ м, що співпадає з величиною раніше визначеної початкової умови x_0 .

Відповідь. Вантаж здійснює затухаючі коливання за законом $x = -e^{-2t} \cdot (0,03 \cdot \cos 11t + 0,06 \cdot \sin 11t)$ (м), з коловою частотою $11 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Графік залежності координати x від часу t наведений на рисунку 2.12. Був обчислений період затухаючих коливань $T_0^* = \frac{2\pi}{\omega_0^*}$, який дорівнює 0,58 с. Крок за часом був обраний у 0,06 с. На графіку наведено три періоди коливань.

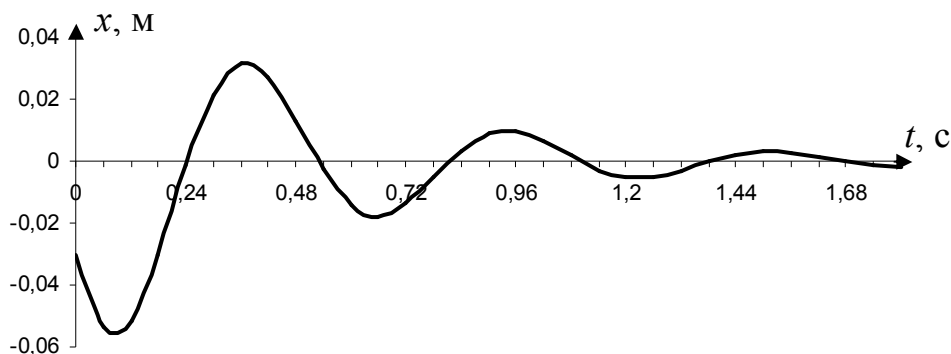


Рисунок 2.12

Приклад 2.3. Знайти рівняння коливального руху вантажу D у напрямку осі x з моменту дотику ним плити, вважаючи, що при подальшому русі вантаж від плити не відділяється. Плита, яка займає в стані спокою горизонтальне положення, є невагомою. Рухи плити та основи вважати поступальними (рис. 2.13).

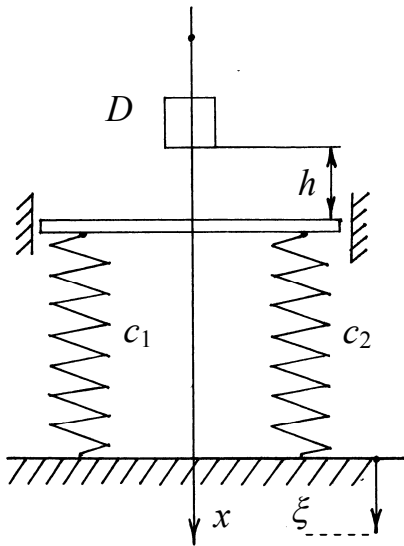


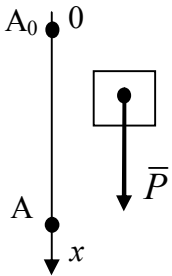
Рисунок 2.13

Умови задачі. Пролетівши без початкової швидкості відстань $h = 0,2$ м, вантаж D ($m_D = 20$ кг) з'єднується у момент часу $t = 0$ з плитою, яка зв'язує систему двох недеформованих паралельно закріплених пружин, що мають коефіцієнти жорсткості та опору $c_1 = 100$ Н/см, $c_2 = 200$ Н/см, $b_1 = b_2 = 0$. Одночасно основа починає здійснювати рух за законом

$$\xi = a_\xi \cdot \sin \omega_B t = 0,5 \cdot \sin 30t \text{ (см)}.$$

Розв'язання

Спочатку розглянемо допоміжну задачу про вільне падіння матеріальної точки (вантаж) з висоти $h = A_0A$ до моменту дотику з плитою.



Розрахункова схема цієї задачі наведена на рисунку 2.14. Диференціальне рівняння руху має вигляд: $m_D \ddot{x} = P$, або $m_D \ddot{x} = m_D g$, або $\ddot{x} = g$. Інтегруючи за часом обидві частини останнього рівняння, отримаємо

$$\begin{cases} \dot{x} = gt + C_1, \\ x = gt^2/2 + C_1t + C_2. \end{cases}$$

Рисунок 2.14

При нульових початкових умовах сталі інтегрування C_1, C_2 дорівнюють нулю.

Записуючи функції \dot{x}, x у кінцевій точці А відрізка руху A_0A , матимемо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} V_A = g\tau, \\ h = g\tau^2/2, \end{cases} \text{ звідки, виключаючи час руху на відріжку}$$

падіння τ , отримаємо розрахункову формулу для швидкості точки в момент дотику з плитою

$$V_A = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,2} = 2 \text{ (м/с)}.$$

Розглянемо основну задачу про коливання матеріальної точки (вантаж). Перетворимо вихідну механічну схему в розрахункову з одним пружним елементом і подамо її на рисунку 2.15, де рівні 1, 2, 3 визначають відповідно вільний кінець недеформованої пружини, положення статичної рівноваги вантажу і його довільне положення під час коливань, точка А – положення вантажу в момент дотику плити, $\delta_{ст}$ – статична деформація пружини під дією вантажу, $\bar{P}, \bar{F}_{пр}$ – відповідно сила ваги вантажу та сила пружності пружини, ξ – напрямок кінематичного збудження в

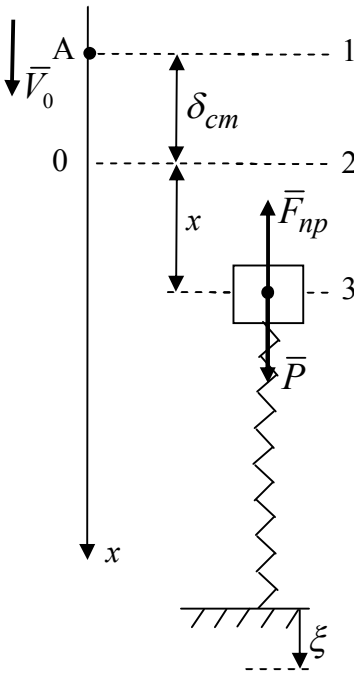


Рисунок 2.15

точці кріплення пружини до рухомої опори.

Знаходимо еквівалентну жорсткість c (див. рис. 2.3):

$$c = c_1 + c_2 = 100 + 200 = 300 \text{ Н/см} = 3 \cdot 10^4 \text{ Н/м.}$$

Складемо диференціальне рівняння руху точки:

$$m_D \ddot{x} = P - F_{np} = P - c(\delta_{cm} + x - \xi) = P - c\delta_{cm} - cx + c\xi = -cx + ca_\xi \sin \omega_B t,$$

і перетворимо його до стандартної форми:

$$m_D \ddot{x} + cx = ca_\xi \sin \omega_B t,$$

або

$$\ddot{x} + \frac{c}{m_D} x = \frac{ca_\xi}{m_D} \sin \omega_B t.$$

Позначимо $\omega_0^2 = \frac{c}{m_D}$, $h_B = \frac{c \cdot a_\xi}{m_D}$, тоді буде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = h_B \sin \omega_B t.$$

Отримане рівняння має форму (2.19) диференціального рівняння вимушених коливань. Його розв'язок – функція $x(t)$, і її перша похідна за часом $\dot{x}(t)$ мають вигляд (2.20), (2.21)

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t + \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t,$$

$$\dot{x} = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t + \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos \omega_B t.$$

Для визначення сталих інтегрування C_1, C_2 складемо початкові умови (точка А на рис. 2.18):

$$x|_{t=0} = -\delta_{cm}, \quad \dot{x}|_{t=0} = V_0$$

і підставимо їх у функції $x(t)$ і $\dot{x}(t)$

$$\begin{cases} -\delta_{cm} = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0 + \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin 0, \\ V_0 = -C_1 \cdot \omega_0 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \omega_0 \cdot \cos 0 + \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \cos 0. \end{cases}$$

Звідки, з урахуванням значень $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, сталі інтегрування будуть

$$C_1 = -\delta_{cm}, \quad C_2 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(V_0 - \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right).$$

Підставляючи їх у функцію $x(t)$, отримаємо рівняння руху вантажу у загальній формі

$$x = -\delta_{cm} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(V_0 - \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \right) \cdot \sin \omega_0 t + \frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} \cdot \sin \omega_B t.$$

Підрахуємо значення сталих параметрів:

– величина статичної деформації $\delta_{cr} = \frac{g \cdot m_D}{c} \approx \frac{10 \cdot 20}{3 \cdot 10^4} = 0,67 \cdot 10^{-2} \text{ м,}$

– значення власної частоти $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10^4}{20}} = 38,7 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$,

– параметри

$$h_B = \frac{c \cdot a_\xi}{m_D} = \frac{3 \cdot 10^4 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}}{20} = 7,5 \frac{\text{М}}{\text{с}^2},$$

$$\frac{h_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2} = \frac{7,5}{\frac{3 \cdot 10^4}{20} - 30^2} = \frac{7,5}{1500 - 900} = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$\frac{1}{\omega_0} \cdot (V_0 - \frac{h_B \cdot \omega_B}{\omega_0^2 - \omega_B^2}) = \frac{1}{38,7} \cdot (2 - \frac{7,5 \cdot 30}{\frac{3 \cdot 10^4}{20} - 30^2}) = \frac{1}{38,7} \cdot (2 - 0,375) = 4,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Тоді рівняння руху вантажу буде:

$$x = -0,67 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 38,7t + 4,2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 38,7t + 1,25 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 30t \text{ (м)}.$$

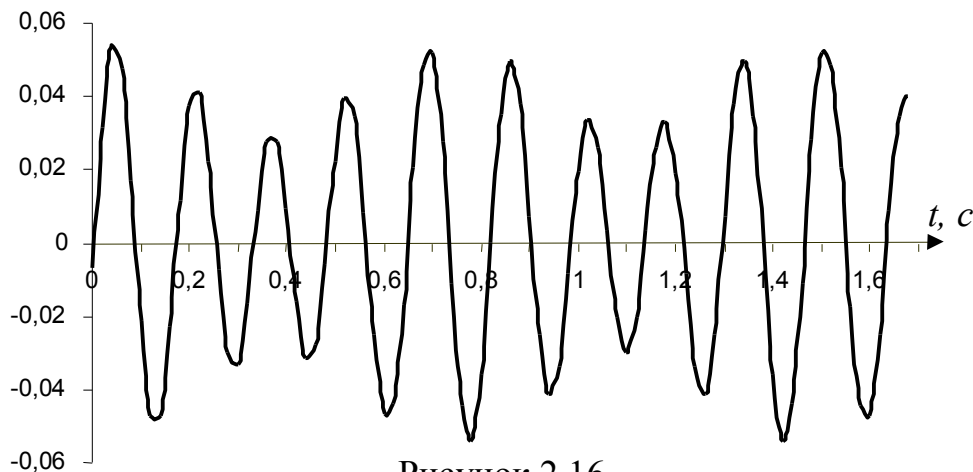


Рисунок 2.16

Перевірка. При $t=0$ одержимо $x|_{t=0} = -0,67 \cdot 10^{-2}$ м, що співпадає з величиною раніше визначеної початкової умови x_0 .

Відповідь. Вантаж здійснює вимушені коливання за законом $x = -0,67 \cdot 10^{-2} \cdot \cos 38,7t + 4,2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 38,7t + 1,25 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 30t$ (м), з коловими частотами 38,7 і $30 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Графік залежності координати x від часу t наведений рисунку 2.16. Для вибору кроку за аргументом у даному прикладі були розраховані періоди $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,16 \text{ с}$ і $T_B = \frac{2\pi}{\omega_B} = 0,21 \text{ с}$, що відповідають

частотам 38,7 і $30 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Для описання періоду достатньо 8 точок, тому був вибраний крок за часом у 0,02 с, що дозволив описати найменший з двох періодів – 0,16 с. Усього на графіку вимушених коливань бажано вивести 10-20 найменших періодів.

2.6 Методика розв'язання і варіанти задач до теми 2

Розв'язання задач завдання варто проводити в такій послідовності:

- визначити тип механічної системи, вид схеми з'єднання пружних елементів вихідної схеми, вид коливального руху вантажу, а також засіб збудження його коливань;
- перетворити (у випадку необхідності) вихідну схему в розрахункову з одним пружним елементом, показати на розрахунковій схемі вісь Ox , і напрямок кінематичного збудження ξ , силу ваги \bar{P} вантажу, сили пружності $\bar{F}_{пр}$ та опору \bar{R} пружини, положення статичної рівноваги вантажу (точка O на осі Ox), положення вантажу в момент початку ($t = 0$) руху (точки A на осі Ox), статичну деформацію $\delta_{ст}$ пружини під дією вантажу;
- розрахувати еквівалентну жорсткість c пружини, враховуючи вид схеми з'єднання пружних елементів вихідної схеми, і величину статичної деформації $\delta_{ст}$ пружини, визначити початкові умови x_0 і \dot{x}_0 для вантажу, знайти, враховуючи тип механічної системи, частоти ω_0 або ω_0^* (для дисипативної системи) вільних коливань вантажу, коефіцієнт демпфірування h системи;
- визначити закон руху вантажу у загальному вигляді (для цього використати формули розділу 2), розрахувати коефіцієнти та параметри закону руху для конкретної задачі завдання;
- результати розв'язання задач перевірити для моменту часу $t = 0$ і подати у вигляді відповіді.

Це узагальнена методика розв'язання задач теми 2. У кожному конкретному випадку етапи методики і перелік визначальних механічних і динамічних характеристик руху для системи і вантажу коректуються з урахуванням умов задачі.

Варіанти задач до теми 2

Варіанти 1–5. (рисунки на стор. 39, схеми 1–5). Знайти рівняння коливального руху вантажу D у напрямку осі Ox . Стержень, який з'єднує вантажі, і брусок, який з'єднує пружини, є невагомі. Рух бруска AB , який займає в стані спокою горизонтальне положення, вважати поступальним.

Варіант 1. Вантаж D прикріплений до бруска AB , підвішеному на двох однакових паралельних пружинах, коефіцієнт жорсткості та опору кожної з яких дорівнює $c = 3$ Н/см, $b = 6$ Н·с/м. У момент часу $t = 0$ до вантажу D , який знаходиться в стані рівноваги, підвищують вантаж E ($m_E = 1$ кг, $m_D = 2$ кг).

Варіант 2. У момент часу $t = 0$ стержень, який з'єднує вантажі D ($m_D = 1$ кг) і E ($m_E = 2$ кг) перерізають, а основа починає здійснювати рухи за

законом $\xi = 1,5 \sin 18t$ (см). Коефіцієнти жорсткості та опору пружин дорівнюють $c_1 = 12$ Н/см, $c_2 = 36$ Н/см, $b_1 = b_2 = 0$.

Варіант 3. У момент часу $t = 0$ до нерухомого вантажу D ($m_D = 0,8$ кг) підвішують вантаж E ($m_E = 1,2$ кг), надаючи системі вантажів D і E початкову швидкість $V_0 = 0,2$ м/с, спрямовану вниз. Коефіцієнт жорсткості та опору пружин дорівнює $c_1 = 10$ Н/см, $c_2 = 4$ Н/см, $c_3 = 6$ Н/см, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

Варіант 4. Система вантажів D і E прикріплена до бруска AB . Брусок зв'язує систему двох паралельно закріплених пружин. Статична деформація двох однакових з коефіцієнтом опору $b = 6$ Н/м пружин під спільною дією вантажів D ($m_D = 0,5$ кг) і E ($m_E = 1,5$ кг) дорівнює $\delta_{стDE} = 4$ см. У момент часу $t = 0$ стержень, який з'єднує вантажі, перерізають.

Варіант 5. У момент часу $t = 0$ до нерухомого вантажу D ($m_D = 1,6$ кг), закріпленому на пружині з коефіцієнтом жорсткості $c = 4$ Н/м та опору $b = 0$, підвішують вантаж E ($m_E = 2,4$ кг), а основа в точці B починає здійснювати рух за законом $\xi = 2 \sin 5t$ (см).

Варіанти 6-10 (рисунок на стор. 39, схеми 6–10). Знайти рівняння коливального руху вантажу по гладенькій похилій площині у напрямку осі Ox з моменту дотику вантажу пружини або бруска, вважаючи, що при подальшому русі вантаж від пружини не відділяється. Брусок, що з'єднує пружини, є невагомим. Рух бруска AB , який займає в стані покою перпендикулярне осі Ox положення, вважати поступальним.

Варіант 6. Здійснивши без початкової швидкості по похилій площині ($\alpha = 30^\circ$) відстань $S = 0,1$ м, вантаж D ($m_D = 4$ кг) з'єднується у моменту часу $t = 0$ з недеформованими послідовно з'єднаними пружинами, які мають коефіцієнти жорсткості та опору $c_1 = 48$ Н/см, $c_2 = 24$ Н/см, $b_1 = b_2 = 0$.

Варіант 7. У момент часу $t = 0$ вантаж ($m_D = 2$ кг) приєднують у точці A без початкової швидкості до системи недеформованих послідовно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору $c_1 = 12$ Н/см, $c_2 = 6$ Н/см, $b_1 = b_2 = 0$. Одночасно основа у точці B починає здійснювати рух вздовж похилої площини ($\alpha = 45^\circ$) за законом $\xi = 0,02 \sin 20t$ (м).

Варіант 8. У момент часу $t = 0$ вантаж D ($m_D = 1,5$ кг) приєднують в точці N до системи трьох недеформованих паралельно-послідовно закріплених брусом AB пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору $c_1 = 4$ Н/см, $c_2 = 6$ Н/см, $c_3 = 15$ Н/см, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Одночасно вантажу D надають

початкову швидкість $V_0 = 0,5$ м/с у напрямку позитивного відліку координати x .
Прийняти кут $\alpha = 45^\circ$.

Варіант 9. Вантаж D ($m_D = 1,2$ кг), здійснивши без початкової швидкості по похилій площині ($\alpha = 30^\circ$) відстань $S = 0,2$ м, з'єднується з недеформованою пружиною, яка має коефіцієнти жорсткості та опору $c = 4,8$ Н/см, $b = 0$. В той же момент часу основа в точці B починає здійснювати рух вздовж нахиленої площини за законом $\xi = 0,03 \sin 12t$ (м).

Варіант 10. У момент часу $t = 0$ вантаж D ($m_D = 1$ кг) без початкової швидкості приєднується до системи зв'язаних з брусом AB двох однакових паралельно закріплених недеформованих пружин, які мають кожна коефіцієнти жорсткості та опору $c = 1,5$ Н/см, $b = 4$ Нс/м. Прийняти кут $\alpha = 60^\circ$.

Варіанти 11-15 (рисунок на стор. 40, схеми 11–15). Вантаж D закріплений на кінці ідеального стержня. Інший кінець стержня закріплений у точці E на ідеальній шарнірно-нерухомій опорі. Система вантаж-стержень може здійснювати малі коливання навколо осі циліндричного шарніра нерухомої опори у площині креслення. Знайти рівняння коливального руху вантажу, вважаючи його матеріальною точкою, у напрямку горизонтальної осі Ox . Брусок AB , який зв'язує систему двох паралельних пружин, є невагомим. Рух бруска AB , який займає у стані спокою вертикальне положення, вважати поступальним. У стані рівноваги механічної системи розглядуваний стержень займає вертикальне положення, а пружини недеформовані.

Варіант 11. Вантаж D ($m_D = 2,4$ кг) з'єднаний з брусом AB . Коефіцієнти жорсткості та опору зв'язаної з брусом системи двох паралельно закріплених пружин $c_1 = 1$ Н/см, $c_2 = 1,4$ Н/см, $b_1 = b_2 = 3$ Нс/м. Перед початком руху вантаж відхиляють на величину $\lambda = 2$ см у напрямку позитивного відліку координати x і у момент часу $t = 0$ відпускають без початкової швидкості.

Варіант 12. У момент часу $t = 0$ вантаж D ($m_D = 3$ кг) утримується у стані, при якому пружина стиснута на величину $\lambda = 2$ см, відпускається без початкової швидкості. Коефіцієнти жорсткості та опору пружини $c = 9$ Н/см, $b = 0$. Одночасно основа у точці B починає здійснювати рух за законом $\xi = 1,2 \sin 8t$ (см).

Варіант 13. Вантажу D ($m_D = 1$ кг) у стані рівноваги, показаному на кресленні, надають початкову швидкість $V_0 = 0,5$ м/с у напрямку позитивного відліку координати x . Коефіцієнти жорсткості та опору трьох паралельно закріплених пружин $c_1 = 12$ Н/см, $c_2 = c_3 = c = 3$ Н/см, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

Варіант 14. Вантаж D ($m_D = 1,5$ кг) з положення рівноваги, показаному на кресленні, перед початком руху відхиляють на величину $\lambda = 2,5$ см у напрямку позитивного відліку координати x і відпускають у момент часу $t = 0$, надаючи вантажу початкову швидкість $V_0 = 0,4$ м/с, спрямовану вправо. Коефіцієнти жорсткості та опору пружин $c_1 = 4,4$ Н/см, $c_2 = 2$ Н/см, $c_3 = 8$ Н/см, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

Варіант 15. Вантаж D ($m_D = 1$ кг) утримується в стані рівноваги, показаному на кресленні, системою послідовно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору $c_1 = 4$ Н/см, $c_2 = 12$ Н/см, $b_1 = b_2 = 0$. У момент часу $t = 0$ основа в точці B починає здійснювати рух за законом $\xi = 1,8 \sin 12t$ (см).

Варіанти 16-20 (рисунки на стор. 40, схеми 16–20). Знайти рівняння коливального руху вантажу D у напрямку осі Ox . Брусок, який з'єднує пружини, є невагомим. Рух бруска AB , який займає в стані спокою горизонтальне положення, вважати поступальним. Вантажі D , E при сумісному русі один від одного не відділяються.

Варіант 16. У момент часу $t = 0$ на нерухомий вантаж D ($m_D = 10$ кг) установлюють зверху вантаж E ($m_E = 20$ кг), надаючи системі вантажів D та E початкову швидкість $V_0 = 0,4$ м/с у напрямку позитивного відліку координати x . Коефіцієнт жорсткості та опору системи зв'язаних з бруском AB трьох паралельно-послідовно закріплених пружин $c_1 = 200$ Н/см, $c_2 = 160$ Н/см, $c_3 = 140$ Н/см, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Початок відліку осі Ox сумістити з положенням статичної рівноваги системи вантажів D , E .

Варіант 17. Система встановлених на пружині вантажів D та E знаходиться у положенні статичної рівноваги. У момент часу $t = 0$ вантаж E знімають з вантажу D . Кругова частота вільних коливань системи вантажів D та E $\omega_{0,DE} = 20$ рад/с, відношення мас $m_D/m_E = 2/3$. Початок відліку осі Ox сумістити з положенням статичної рівноваги вантажу D .

Варіант 18. Вантаж D встановлений на бруску AB , який зв'язує систему двох однакових паралельно закріплених пружин. У момент часу $t = 0$ на нерухомий вантаж D ($m_D = 20$ кг) встановлюють зверху вантаж E ($m_E = 10$ кг). Статична деформація кожної з пружин з коефіцієнтом опору $b = 30\sqrt{3}$ Нс/м під дією вантажу D дорівнює $\delta_{стD} = 2$ см. Початок відліку осі Ox сумістити з положенням статичної рівноваги системи вантажів D , E .

Варіант 19. Система вантажів D ($m_D = 15$ кг) та E ($m_E = 25$ кг), встановлених на двох послідовно закріплених пружинах, які мають коефіцієнти

жорсткості та опору $c_1 = 250$ Н/см, $c_2 = 375$ Н/см, $b_1 = b_2 = 0$, знаходиться у положенні статичної рівноваги. У момент часу $t = 0$ вантаж E знімають з вантажу D . Одночасно основа у точці B починає здійснювати рух за законом $\xi = 0,5 \sin 30t$ (см).

Варіант 20. У момент часу $t = 0$ на закріпленій на пружині нерухомий вантаж D встановлюють зверху вантаж E , надаючи системі вантажів D та E початкову швидкість $V_0 = 0,3$ м/с у напрямку позитивного відліку координати x . Кругова частот вільних коливань вантажу D на пружині $\omega_{0D} = 24$ рад/с, відношення мас $m_E / m_D = 3$. Початок відліку осі Ox сумістити з положенням статичної рівноваги системи вантажів D та E .

Варіант 21-25 (рисунки на стор. 41, схеми 21–25). Знайти рівняння коливального руху вантажу D по гладенькій похилій площині у напрямку осі Ox . Брусок, який з'єднує пружини, є невагомим. Рух бруска AB , який займає у стані спокою перпендикулярне осі AB положення, вважати поступальним.

Варіант 21. У момент часу $t = 0$ вантаж D ($m_D = 2$ кг) приєднують у точках A і B до вільних кінців системи двох недеформованих паралельно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору $c_1 = 7$ Н/см, $c_2 = 3$ Н/см, $b_1 = b_2 = 0$. Одночасно вантажу D надають початкову швидкість $V_0 = 0,4$ м/с у напрямку позитивного відліку координати x . Прийняти кут $\alpha = 45^\circ$.

Варіант 22. Вантаж D у точці A прикріплений до пружини та утримується на похилій площині ($\alpha = 30^\circ$) у положенні рівноваги. При цьому статична деформація пружини $\delta_{ст} = 2$ см. У момент часу $t = 0$ основа у точці B починає здійснювати рух за законом $\xi = 0,01 \sin 10t$ (м).

Варіант 23. У момент часу $t = 0$ вантаж D ($m_D = 3$ кг), без початкової швидкості приєднують до бруска AB , який зв'язує систему двох недеформованих паралельно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору $c_1 = 2$ Н/см, $c_2 = 4$ Н/см, $b_1 = b_2 = 6$ Нс/м. Прийняти кут $\alpha = 60^\circ$.

Варіант 24. У момент часу $t = 0$ вантаж D ($m_D = 1$ кг) приєднують у точці A без початкової швидкості до системи двох недеформованих послідовно закріплених пружин, які мають коефіцієнти жорсткості та опору $c_1 = 12$ Н/см, $c_2 = 4$ Н/см, $b_1 = b_2 = 0$. Одночасно основа у точці B починає здійснювати рух вздовж похилої площини ($\alpha = 30^\circ$) за законом $\xi = 1,5 \sin 10t$ (см).

Варіант 25. Вантаж D ($m_D = 1,5$ кг) прикріплений до бруска AB , підвішеному на двох однакових паралельних пружинах. Статична деформація кожної з пружин з коефіцієнтом опору $b = 3$ Нс/м під дією вантажу D , який знаходиться на похилій площині ($\alpha = 30^\circ$), дорівнює $\delta_{cm} = 4,9$ см. У момент часу $t = 0$ вантажу D , який знаходиться в положенні рівноваги, надають початкову швидкість $V_0 = 0,3$ м/с у напрямку від'ємного відліку координати x .

Варіант 26-30 (рисунки на стор. 41, схеми 26–30). Знайти рівняння коливального руху вантажу D у напрямку осі Ox з моменту дотику ним до плити, вважаючи, що при подальшому русі вантаж від плити не відділяється. Плита, яка займає в стані спокою горизонтальне положення, є невагомою. Рух плити вважати поступальним.

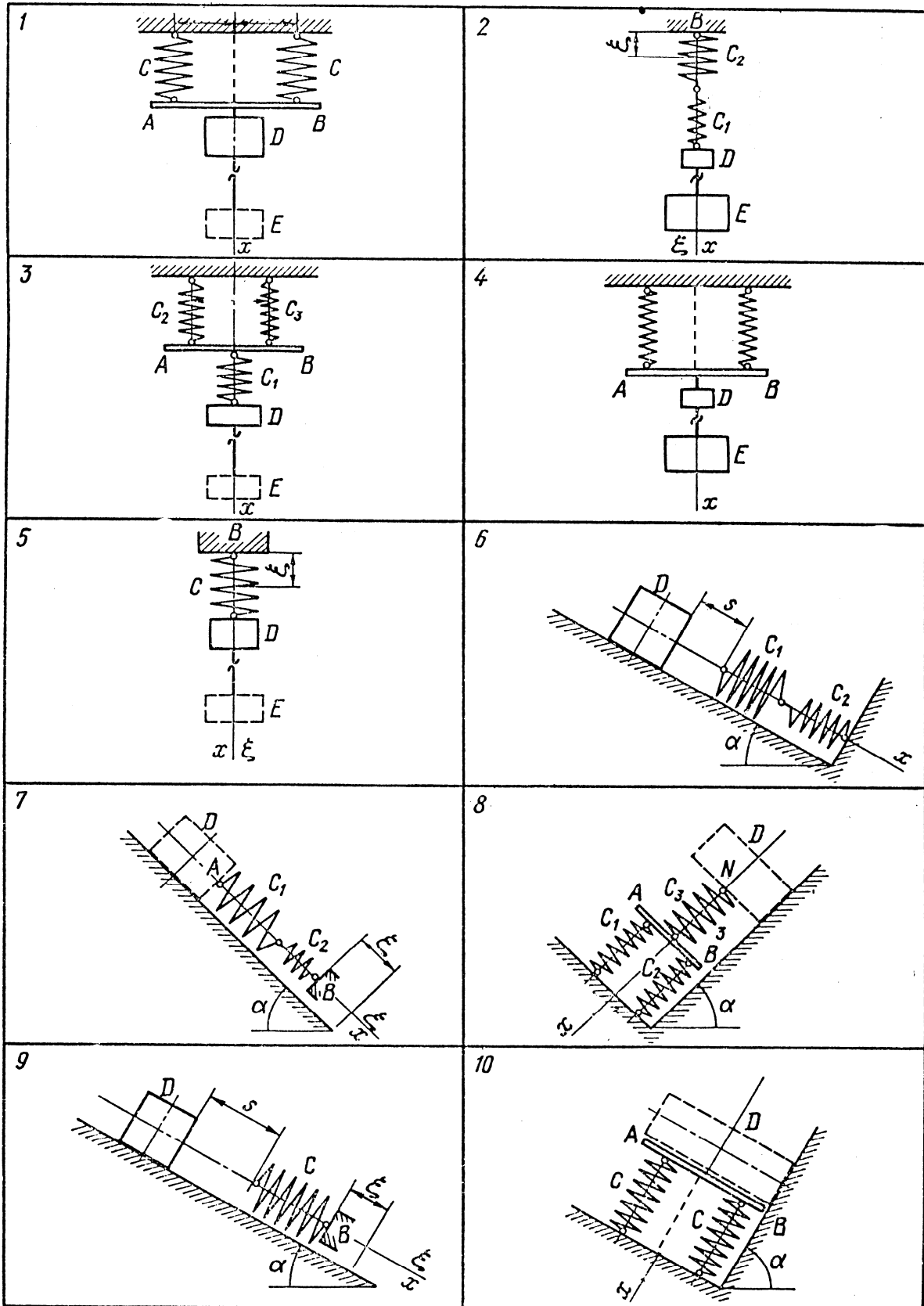
Варіант 26. Пролетівши вниз без початкової швидкості відстань $h = 0,1$ м, вантаж D ($m_D = 50$ кг) з'єднується в момент часу $t = 0$ з плитою, яка зв'язує систему двох недеформованих паралельно закріплених пружин, що мають коефіцієнти жорсткості та опору $c_1 = 600$ Н/см, $c_2 = 400$ Н/см, $b_1 = b_2 = 0$.

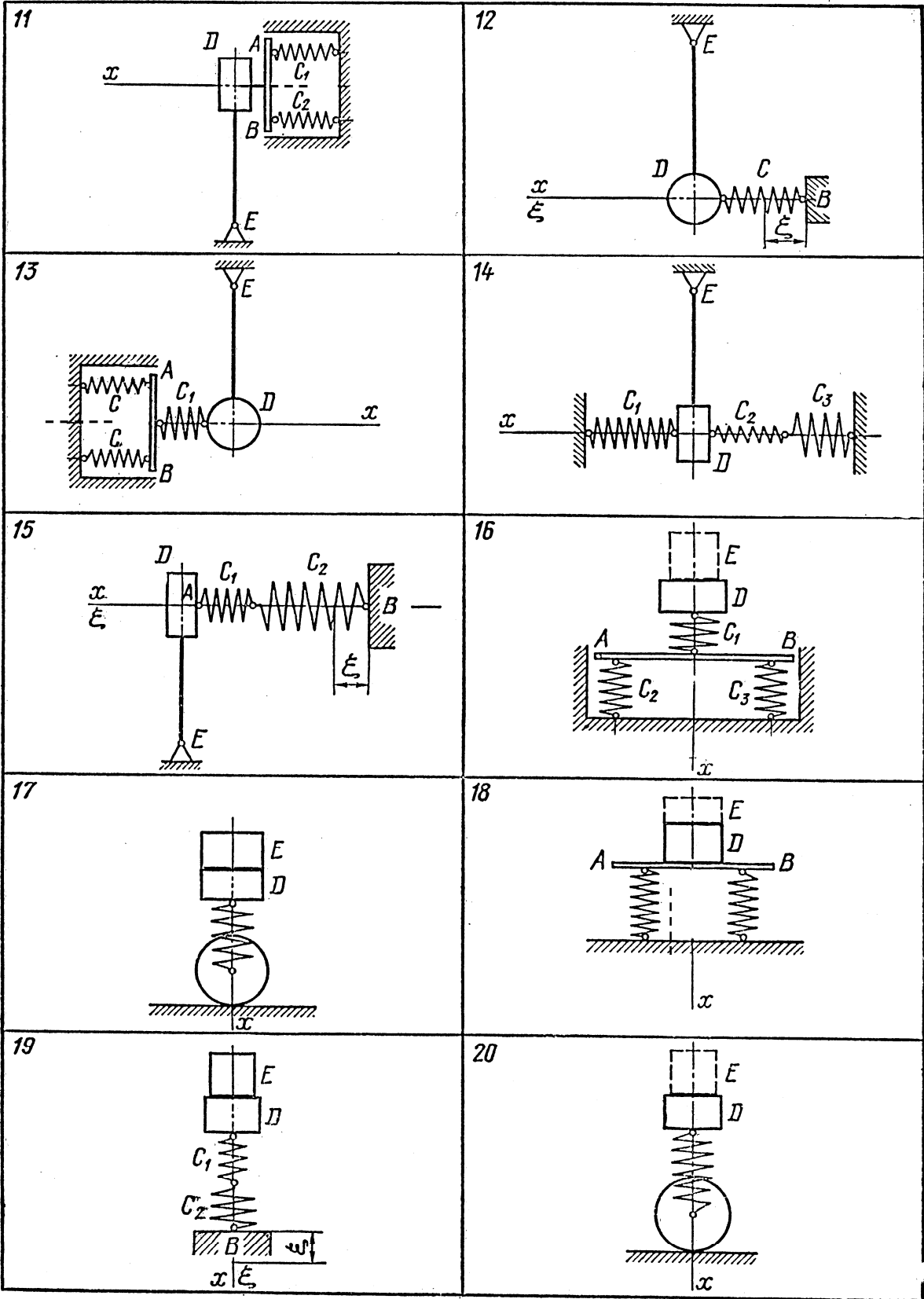
Варіант 27. У момент часу $t = 0$ вантаж D ($m_D = 40$ кг) встановлюють без початкової швидкості на плиту, яка зв'язує систему двох однакових паралельно закріплених недеформованих пружин, які мають кожна коефіцієнти жорсткості та опору $c = 130$ Н/см, $b = 200$ Нс/м.

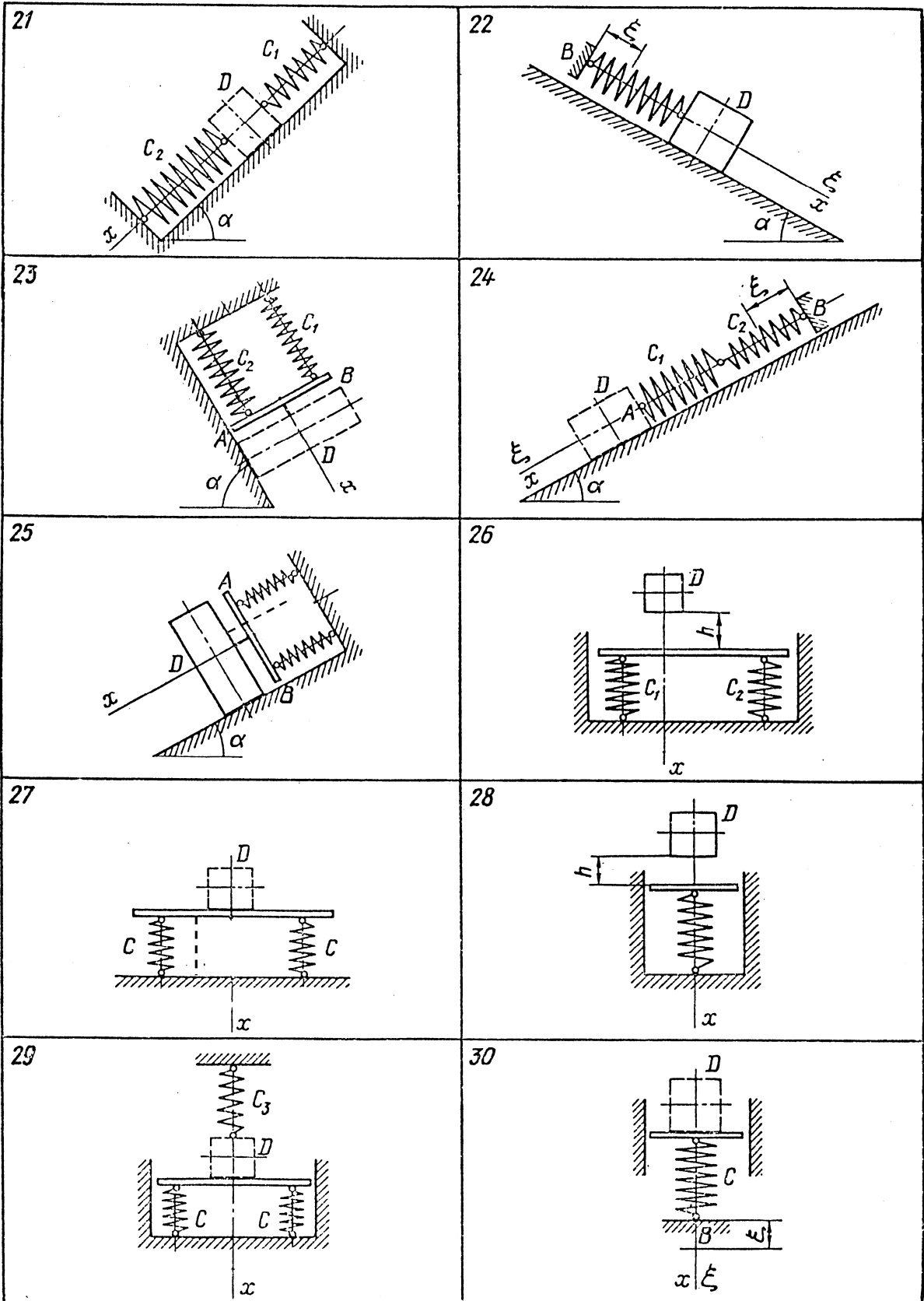
Варіант 28. Вантаж D без початкової швидкості падає на плиту з висоти $h = 5$ см. Плита закріплена на пружині, статична деформація якої під дією вантажу дорівнює $\delta_{cm} = 1$ см.

Варіант 29. Плита закріплена на двох однакових паралельних пружинах. У момент часу $t = 0$ вантаж D ($m_D = 200$ кг) встановлюють на плиту і приєднують до третьої, розташованої зверху вантажу пружини. Пружини мають коефіцієнти жорсткості та опору $c_1 = c_2 = c = 400$ Н/см, $c_3 = 200$ Н/см, $b_1 = b_2 = 0$. Одночасно вантажу надають початкову швидкість $V_0 = 0,6$ м/с, у напрямку позитивного відліку координати X . На момент початку руху вантажу система трьох пружин знаходиться в недеформованому стані.

Варіант 30. У момент часу $t = 0$ вантаж D ($m_D = 100$ кг) встановлюють без початкової швидкості на плиту, яка закріплена на пружині, що має коефіцієнти жорсткості та опору $c = 2000$ Н/см, $b = 0$. Одночасно основа у точці B починає здійснювати рух за законом $\xi = 0,5 \sin 20t$ (см).







3 ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ ВІЛЬНОСТІ

Для дослідження руху механічної системи з одним ступенем вільності застосовують, звичайно, теорему про зміну кінетичної енергії системи, загальне рівняння динаміки, а також рівняння Лагранжа другого роду.

Теорему про зміну кінетичної енергії системи в інтегральній формі зручно застосовувати для розв'язання задач, коли в число заданих і шуканих величин входять швидкості і переміщення точок механічної системи. Якщо потрібно скласти диференціальне рівняння руху механічної системи (чи визначити прискорення точок системи), то звичайно застосовують загальне рівняння динаміки або рівняння Лагранжа другого роду.

3.1 Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи

В інтегральній формі теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи має вигляд:

$$T_1 - T_0 = \sum_k A_k^e + \sum_k A_k^i, \quad (3.1)$$

де T_1, T_0 – кінетична енергія системи відповідно в кінцевому і початковому положеннях; $\sum_k A_k^e, \sum_k A_k^i$ – суми робіт відповідно зовнішніх і внутрішніх сил системи при переміщенні системи з початкового положення в кінцеве.

Для незмінних систем (наприклад, системи твердих тіл, зв'язаних гнучкими нерозтяжними нитками)

$$\sum_k A_k^i = 0 \quad (3.2)$$

і теорема приймає вигляд:

$$T_1 - T_0 = \sum_k A_k^e. \quad (3.3)$$

Кінетичною енергією системи називається скалярна величина, яка дорівнює сумі кінетичних енергій усіх точок механічної системи:

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k V_k^2. \quad (3.4)$$

Кінетична енергія твердого тіла визначається за формулами:

а) при поступальному русі:

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2, \quad (3.5)$$

де M – маса твердого тіла; V_c – швидкість центра мас тіла;

б) при обертальному русі тіла навколо нерухомої осі Oz :

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \quad (3.6)$$

де J_z – момент інерції тіла навколо осі обертання Oz ; ω – кутова швидкість тіла;

в) при плоскопаралельному русі:

$$T = \frac{1}{2}MV_c^2 + \frac{1}{2}I_{cz}\omega^2, \quad (3.7)$$

де M – маса твердого тіла; V_c – швидкість центра мас тіла; I_{cz} – момент інерції твердого тіла щодо осі Cz , яка проходить через центр мас C перпендикулярно до площини руху; ω – кутова швидкість тіла.

Моменти інерції деяких однорідних твердих тіл (рис. 3.1–3.3) щодо осі z , яка перпендикулярна до площини руху і проходить через центр мас тіла:

а) тонкий однорідний стержень

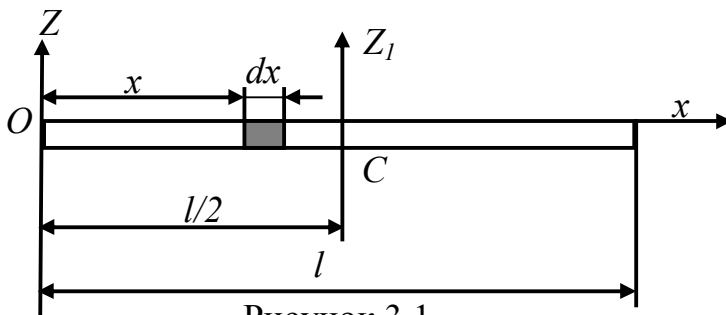


Рисунок 3.1

$$I_{cz} = \frac{Ml^2}{3}, \quad (3.8)$$

де l – довжина однорідного стержня.

$$I_{cz_1} = \frac{Ml^2}{12}, \quad (3.9)$$

б) суцільний круглий диск, циліндр:

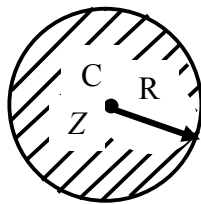


Рисунок 3.2

$$I_{cz} = \frac{MR^2}{2}, \quad (3.10)$$

де M , R – маса і радіус диска (циліндра);

г) якщо заданий радіус інерції i_z твердого тіла складної форми, то його момент інерції:

$$I_{cz} = Mi_z^2. \quad (3.12)$$

Робота постійної сили на прямолінійному переміщенні визначається по формулах (1.19) або (1.20).

Робота сили, прикладеної до тіла, що обертається, визначається по формулі

$$A_F = \int_0^\varphi M_z(\bar{F})d\varphi,$$

де $M_z(\bar{F}) = R \cdot F$ – момент сили щодо осі обертання;

φ – кінцеве значення кута повороту тіла.

в) кільце (маса тіла розподілена по його ободу):

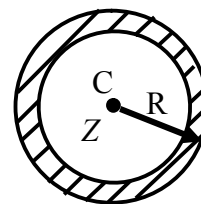


Рисунок 3.3

$$I_{cz} = MR^2; \quad (3.11)$$

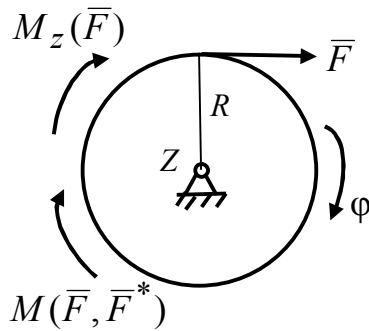


Рисунок 3.4

Якщо момент сил $M_z(\bar{F}) = const$, то формула приймає вигляд

$$A_F = \pm M_z(\bar{F}) \cdot \varphi. \quad (3.13)$$

У формулі (3.11) береться знак «+», якщо сила прагне повернути тіло в сторону зростання кута повороту (рис. 3.3), і знак «-», якщо навпаки.

Для роботи моменту $M(\bar{F}, \bar{F}^*)$ пари сил (рис. 3.4) отримаємо, враховуючи (3.12),

$$A_M = \pm M(\bar{F}, \bar{F}^*) \cdot \varphi \quad (3.14)$$

де знак «+» використовують якщо напрямки моменту і кута повороту тіла співпадають.

3.2 Загальне рівняння динаміки

Для механічних систем з ідеальними, стаціонарними, голономними й утримуючими в'язями загальне рівняння динаміки має вигляд:

$$\sum_k \delta A_k^a + \sum_k \delta A_k^{in} = 0, \quad (3.15)$$

де $\sum_k \delta A_k^a$ і $\sum_k \delta A_k^{in}$ – суми робіт відповідно активних сил та сил інерції на можливих переміщеннях точок прикладання цих сил.

При русі твердого тіла *сили інерції* приводяться:

а) при поступальному русі (рис. 3.5) – до сили інерції $\bar{F}^{in} = -M\bar{a}_c$, яка

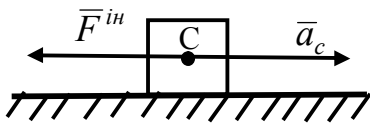


Рисунок 3.5

напрявлена протилежно до прискорення центра мас і дорівнює

$$F^{in} = M \cdot a_c, \quad (3.16)$$

де M – маса твердого тіла;

a_c – прискорення центра мас тіла,

б) при обертальному русі навколо нерухомої осі Cz , що проходить через центр мас тіла (рис. 3.6) – до пари сил інерції, момент M^{in} якої дорівнює

$$M^{in} = I_{cz} \varepsilon, \quad (3.17)$$

де J_{cz} – момент інерції твердого тіла навколо осі обертання; ε – кутове прискорення тіла.

Момент пари сил інерції завжди спрямований у бік, протилежний напрямку кутового прискорення ε ;

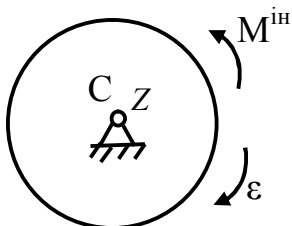


Рисунок 3.6

в) при плоскопаралельному русі (рис. 3.7) – до сили інерції $\bar{F}^{in} = -M\bar{a}_c$ і пари сил інерції M^{in} .

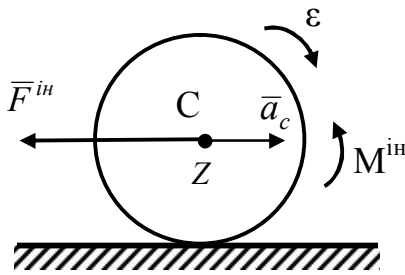


Рисунок 3.7

Пара сил інерції M^{in} дорівнює за модулем

$$M^{in} = I_{cz}\epsilon, \quad (3.18)$$

де I_{cz} – момент інерції твердого тіла навколо осі Cz , яка перпендикулярна до площини руху і проходить через центр мас C тіла; ϵ – кутове прискорення тіла.

Момент пари сил інерції спрямован у бік, протилежний напрямку кутового прискорення ϵ .

3.3 Рівняння Лагранжа другого роду

Для механічної системи з одним ступенем вільності, яка підпорядкована ідеальним, стаціонарним, голономним і утримуючим в'язям, рівняння Лагранжа другого роду має вигляд

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \quad (3.19)$$

де q – узагальнена координата; \dot{q} – узагальнена швидкість; T – кінетична енергія механічної системи, виражена через узагальнені координату і швидкість; Q – узагальнена сила.

Для обчислення узагальної сили Q потрібно надати механічній системі можливе переміщення δq , обчислити суму робіт активних сил на можливих переміщеннях точок прикладення цих сил, виразити всі можливі переміщення точок прикладення сил через узагальнене можливе переміщення δq і привести вираз для суми робіт активних сил до вигляду

$$\sum_k \delta A_k^a = Q \cdot \delta q \quad (3.20)$$

Узагальнена сила Q дорівнює коефіцієнту при δq у виразі (3.20).

3.4 Приклади розв'язання задач по дослідженню руху механічної системи

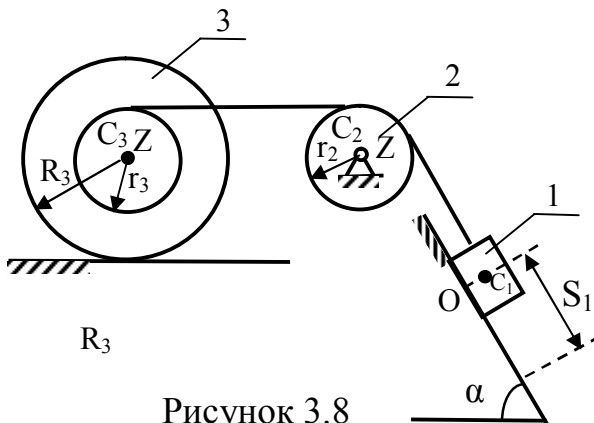


Рисунок 3.8

Приклад 3.1. На похилій площині, яка розташована під кутом $\alpha = 60^\circ$ до обрію, лежить вантаж 1 масою $M_1 = 4m$, який прикріплений до кінця ідеальної нерозтяжної нитки (рис. 3.8). Нитка перекинута через блок 2 масою $M_2 = 1,5m$ і наведена на барабан котушки 3 радіуса $r_3 = r$. При русі вантажу по похилій площині

вниз котушка 3 масою $M_3 = 20m$ і радіуса $R_3 = 3r$ котиться без ковзання по горизонтальній площині вправо. Радіус інерції котушки щодо осі, яка проходить через її центр мас C , дорівнює $i_{3z} = 4r$. Блок 2 вважати суцільним циліндром. Масою нитки знехтувати. Коефіцієнт тертя ковзання вантажу 1 $f = 0,2$. Коефіцієнт тертя кочення котушки 3 $\delta_k = 0,4$ см. У початковий момент система знаходилася в стані спокою. Радіус $r = 2$ см. Визначити швидкість вантажу 1 у момент часу, коли він переміститься на відстань 1 м.

Розв'язання

Для розрахунку швидкості вантажу застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи в інтегральній формі (3.1).

Методика розв'язання задачі наступна.

1. Проаналізуємо механічну систему, яка складається з вантажу 1, блоку 2 і котушки 3, зв'язаних ідеальною нерозтяжною ниткою. Механічна система, що розглядається, є незмінною і для неї справедлива рівність (3.2). Положення вантажу 1 на похилій площині визначимо віссю Ox_1 (рис. 3.9).

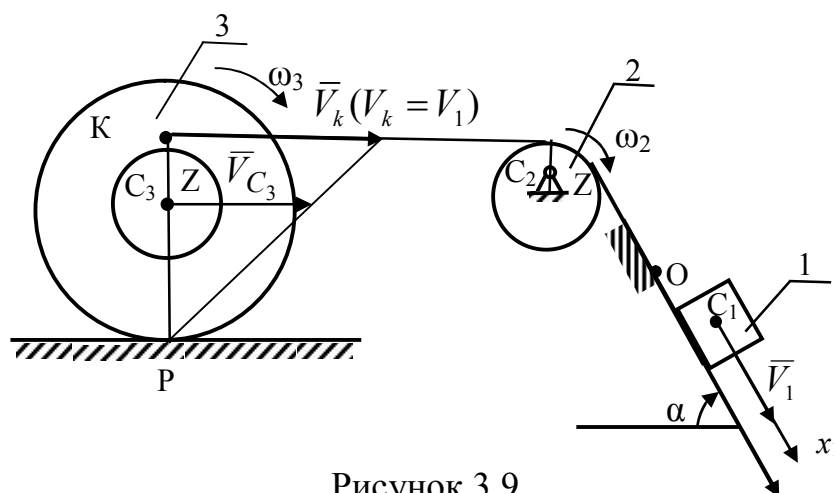


Рисунок 3.9

2. Визначимо і покажемо на схемі (рис. 3.9) лінійні і кутові швидкості тіл механічної системи з урахуванням видів їх руху.

Вантаж 1 рухається по похилій площині вниз поступально, тому швидкість \vec{V}_1 його центра мас C_1 спрямуємо донизу в напрямку осі Ox_1 .

Блок 2 виконує обертальний рух навколо осі C_2z . В зоні взаємодії нитки і блоку відсутнє проковзування, тому лінійна швидкість нитки на ободі 2 дорівнює швидкості вантажу 1, а кутова швидкість ω_2 визначається за формулою

$$\omega_2 = V_1 / r_2. \quad (3.21)$$

Стрілку кутової швидкості ω_2 направимо за ходом стрілки годинника. Котушка 3 здійснює плоскопаралельний рух. При коченні без ковзання миттєвий центр швидкостей (МЦШ) розташований у точці P торкання котушки

з горизонтальною площиною. Кутову швидкість ω_3 котушки і лінійну швидкість V_{C_3} її центра мас C_3 визначимо методом МЦШ:

$$\omega_3 = V_k / KP = V_1 / (R_3 + r_3) = V_1 / (3r + r) = V_1 / 4r, \quad (3.22)$$

$$V_{C_3} = \omega_3 \cdot CP = \omega_3 \cdot R_3 = 3V_1 / 4, \quad (3.23)$$

де враховано, що за величиною лінійна швидкість \bar{V}_k точки K дорівнює швидкості \bar{V}_1 вантажу 1. За напрямком вектор швидкості \bar{V}_k спрямуємо вправо, а стрілку кутової швидкості ω_3 – за ходом стрілки годинника.

3. Обчислимо кінетичну енергію механічної системи в початковому і кінцевому положеннях. При цьому усі лінійні і кутові швидкості, що входять у вирази для кінетичних енергій тіл системи, виразимо через лінійну швидкість \bar{V}_1 вантажу 1, відповідно до умови задачі (рис.3.9). Цю швидкість назовемо далі базовою швидкістю системи.

Так як у початковий момент система знаходилася в стані спокою, то $T_0 = 0$.

Кінетична енергія системи в кінцевому положенні дорівнює сумі кінетичних енергій тіл, що входять у систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (3.24)$$

Вантаж 1 рухається поступально, тому його кінетична енергія визначається за формулою (3.5):

$$T_1 = \frac{1}{2} M_1 V_1^2. \quad (3.25)$$

Блок 2 здійснює обертальний рух. Тоді, згідно (3.6), його кінетична енергія дорівнює

$$T_2 = \frac{1}{2} I_{z_2} \omega_2^2. \quad (3.26)$$

Перетворимо далі формулу (3.24) з урахуванням моменту інерції блоку і виразимо кутову швидкість блоку через базову швидкість \bar{V}_1 вантажу 1.

Так як блок 2 являє собою суцільний циліндр, то його момент інерції обчислимо по формулі (3.8):

$$I_{z_2} = \frac{1}{2} M_2 r_2^2. \quad (3.27)$$

Якщо підставити (3.27) у (3.26), одержимо:

$$T_2 = \frac{1}{2} I_{z_2} \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M_2 r_2^2 \cdot \frac{V_1^2}{r_2^2} = \frac{1}{4} M_2 V_1^2. \quad (3.28)$$

Котушка 3 здійснює плоскопаралельний рух і її кінетична енергія, згідно (3.7), дорівнює

$$T_3 = \frac{1}{2} M_3 V_{c_3}^2 + \frac{1}{2} I_{c_3z} \omega_3^2. \quad (3.29)$$

За умовою задачі відомий радіус інерції i_{3z} , тому момент інерції котушки визначаємо за формулою (3.10):

$$J_{c_{3z}} = M_3 i_{3z}^2 = M_3 \cdot 16 \cdot r^2. \quad (3.30)$$

Підставляючи (3.30) у (3.29), одержимо:

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{2} M_3 V_{c_3}^2 + \frac{1}{2} I_{zc} \omega_3^2 = \frac{1}{2} M_3 \cdot \frac{9}{16} V_1^2 + \\ &+ \frac{1}{2} M_3 \cdot 16 \cdot r^2 \cdot \frac{V_1^2}{16r^2} = \frac{9}{32} M_3 V_1^2 + \frac{1}{2} M_3 V_1^2 = \frac{25}{32} M_3 V_1^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Обчислимо кінетичну енергію системи в кінцевому положенні. Згідно з формулою (3.24)

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 = \frac{V_1^2}{32} (16M_1 + 8M_2 + 25M_3) = \\ &= \frac{V_1^2}{32} (16 \cdot 4m + 8 \cdot 1,5m + 25 \cdot 20m) = \\ &= \frac{V_1^2}{32} (64m + 12m + 500m) = \frac{576}{32} m V_1^2 = 18m V_1^2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

4. Покажемо зовнішні сили, прикладені до системи (рис. 3.10): $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ – сили ваги тіл 1, 2 і 3; \bar{N}_1, \bar{N}_3 – нормальні реакції опорних площин тіл, \bar{N}_2 – реакцію осі блоку 2; \bar{F}_{TP_1} – силу тертя ковзання вантажу 1; \bar{F}_{TP_3} – сила тертя катушки 3 в точці дотику з опорною площиною; M_{κ_3} – пара сил тертя качення катушки 3 ($M_{\kappa_3} = \delta_{\kappa} \cdot M_3$). Силу ваги \bar{P}_1 представимо у вигляді двох координатних складових: $\bar{P}_1 = \bar{P}_{11} + \bar{P}_{12}$. За величинами

$$\begin{aligned} P_{11} &= P_1 \cdot \sin \alpha; \quad P_{12} = P_1 \cdot \cos \alpha; \quad N_1 = P_{12} = P_1 \cdot \cos \alpha; \quad N_2 = P_2; \quad N_3 = P_3; \\ F_{TP_1} &= fN_1 = fP_1 \cos \alpha = fM_1 g \cos \alpha. \end{aligned}$$

5. Визначимо і покажемо на схемі (рис. 3.10) елементарні і кінцеві лінійні переміщення точок прикладання зовнішніх сил системи, а також кутові переміщення катушки 3:

- елементарне і кінцеве переміщення точок прикладання сил $\bar{P}_1, \bar{P}_{11}, \bar{P}_{12}, \bar{N}_1, \bar{F}_{TP_1}$ вантажу 1: $d\bar{x}_1$ (вантаж 1 рухається поступально, всі його точки мають однакові переміщення); $S_1 = \int_0^{s_1} dx_1$ (задане умовою задачі);
- елементарне переміщення точки прикладання сил \bar{P}_2 і \bar{N}_2 блоку 2 дорівнює нулю $d\bar{r}_{c_2} = 0$, тому що опора і вісь C_{2z} обертання блоку нерухомі;

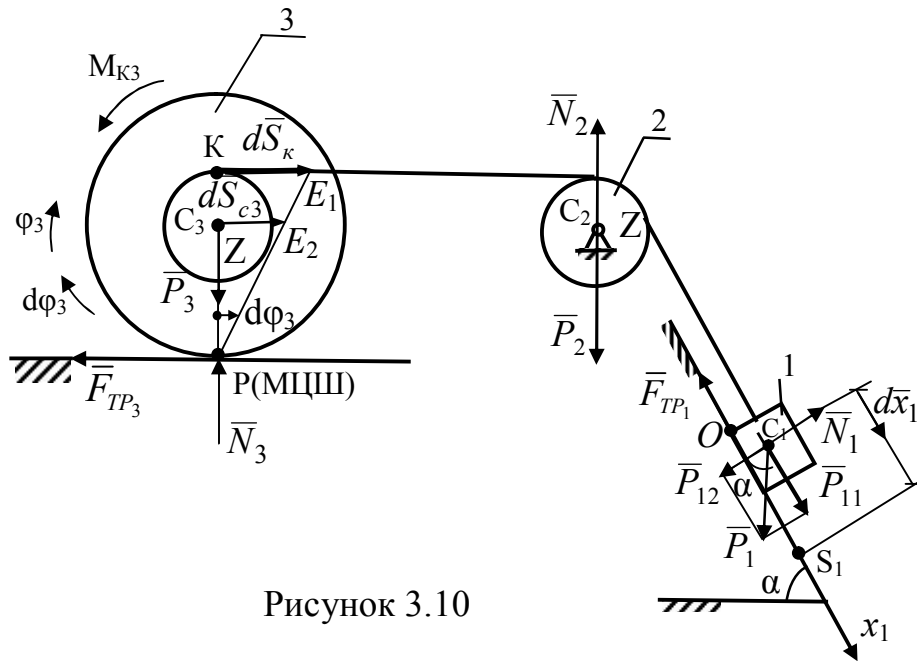


Рисунок 3.10

- елементарне переміщення точки прикладання сил \bar{N}_3 і \bar{F}_{TP_3} дорівнює нулю $d\bar{r}_p = 0$, так як точка P – миттєвий центр швидкостей котушки;
- елементарне лінійне переміщення точки прикладання сил ваги \bar{P}_3 котушки: $dS_{C_3} = 3dS_k / 4 = 3dx_1 / 4$ (з подібності трикутників PKE_1 і PC_3E_2);
- елементарне і кінцеве кутові переміщення котушки: $d\phi_3 = dS_k / KP = dx_1 / KP = dx_1 / 4r$ ($dS_k = dx_1$ так як нитка ідеальна і нерозтяжна; враховано також, що для нескінченно малих елементарних переміщень виконується $tg(d\phi_3) = d\phi_3$;

$$\phi_3 = \int_0^{\phi_3} d\phi_3 = \int_0^{S_1} \frac{dx_1}{4r} = S_1 / 4r.$$

6. Обчислимо суму робіт зовнішніх сил і моментів пар сил при переміщенні системи в кінцеве положення, скориставшись формулами (1.19), (1.20), (3.11), (3.12). При цьому всі лінійні переміщення і кути повороту потрібно виразити через те лінійне переміщення (чи кут повороту), що входить в умову задачі (у число заданих чи шуканих величин):

$$\sum_{\kappa} A_{\kappa}^e = A_{P_1} + A_{N_1} + A_{F_{TP_1}} + A_{P_2} + A_{N_2} + A_{P_3} + A_{N_3} + A_{F_{TP_3}} + A_{M_{K_3}}, \quad (3.33)$$

де $A_{P_1} = A_{P_{11}} + A_{P_{12}}$; $A_{P_{11}} = P_{11} \cdot S_1 = P_1 \cdot \sin \alpha \cdot S_1 = M_1 g S_1 \sin \alpha$;

$A_{F_{TP_1}} = -F_{TP_1} \cdot S_1 = -f M_1 g S_1 \cos \alpha$; $A_{M_{K_3}} = -M_{K_3} \phi_3 = -\delta_{\kappa} \cdot M_3 g S_1 / 4r$.

Елементарні роботи $d'A_{P_{12}} = \bar{P}_{12} \cdot d\bar{x}_1 = P_{12} \cdot dx_1 \cdot \cos 90^\circ = P_{12} \cdot dx_1 \cdot 0 = 0$,
 $d'A_{N_1} = \bar{N}_1 \cdot d\bar{x}_1 = N_1 \cdot dx_1 \cdot \cos 90^\circ = N_1 \cdot dx_1 \cdot 0 = 0$ (елементарне переміщення $d\bar{x}_1 \perp$ силам \bar{P}_{12} і \bar{N}_1), тому $A_{P_{12}} = 0$, та $A_{N_1} = 0$.

Елементарна робота $d'A_{p_3} = \bar{P}_3 \cdot d\bar{x}_1 = P_{12} \cdot d\bar{S}_{c3} \cdot \cos 90^\circ = P_3 \cdot dS_{c3} \cdot 0 = 0$ (елементарне переміщення $d\bar{S}_{c3} \perp$ силі \bar{P}_3), в результаті $A_{p_3} = 0$.

Елементарні роботи $d'A_{p_2} = \bar{P}_2 \cdot d\bar{r}_{c2} = \bar{P}_2 \cdot 0 = 0$ і $d'A_{N_2} = \bar{N}_2 \cdot d\bar{r}_{c2} = \bar{N}_2 \cdot 0 = 0$, відповідно $A_{p_2} = 0$, та $A_{N_2} = 0$.

Елементарні роботи $d'A_{N_3} = \bar{N}_3 \cdot d\bar{r}_p = \bar{N}_3 \cdot 0 = 0$, $d'A_{F_{TP_3}} = \bar{F}_{TP_3} \cdot d\bar{r}_p = \bar{F}_{TP_3} \cdot 0 = 0$, тому $A_{N_3} = 0$ та $A_{F_{TP_3}} = 0$

Згідно (3.33),

$$\begin{aligned} \sum A_k^e &= M_1 g S_1 \sin \alpha - f M_1 g S_1 \cos \alpha - \delta_\kappa \cdot M_3 g \frac{S_1}{4r} = \\ &= g S_1 \left[M_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{M_3 \delta_\kappa}{4r} \right] = \\ &= g S_1 \left[4m (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{20m \delta_\kappa}{4r} \right] = \\ &= mg S_1 \left[4(\sin \alpha - f \cos \alpha) - 5 \frac{\delta_\kappa}{r} \right] = \\ &= m \cdot 10 \cdot 1 \cdot \left[4 \cdot (0,87 - 0,2 \cdot 0,5) - 5 \cdot \frac{0,4}{2} \right] = 20,8m. \end{aligned} \quad (3.34)$$

7. Складемо формулу (3.3) теореми про зміну кінетичної енергії системи:

$$18mV_1^2 - 0 = 20,8m, \quad (3.35)$$

звідки отримаємо шукану швидкість вантажу

$$V_1 = \sqrt{\frac{20,8m}{18m}} \approx 1,08 \text{ (м/с)}.$$

Відповідь. Швидкість вантажу 1 у момент, коли він переміститься на відстань $S_1 = 1$ м, дорівнює $V_1 = 1,08$ м/с.

Приклад 3.2. Умова задачі та задана схема механічної системи співпадають з прикладом 3.1. Але шуканою величиною у даному прикладі є прискорення вантажу 1.

Розв'язання

Для визначення прискорення вантажу 1 застосуємо загальне рівняння динаміки (3.15).

Методика розв'язання задачі складається з наступних етапів.

1. Розглянемо механічну систему, яка складається з вантажу 1, блоку 2 і котушки 3, зв'язаних ідеальною нерозтяжною ниткою (рис. 3.8).

2. Покажемо активні сили, прикладені до системи: $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ – сили ваги тіл 1, 2 і 3; \bar{N}_1 – нормальна опорна реакція. Силу тертя ковзання \bar{F}_{TP1} вантажу 1

і пару сил опору коченню катушки 3 M_{K3} включимо теж до активних сил. Реакції ідеальних в'язей (силу натягу нитки, силу тертя ковзання катушки 3 по опорній поверхні, реакції нерухомої осі блоку 2, а також опорної поверхні катушки 3) на схемі не покажемо.

3. Визначимо і покажемо на схемі (рис. 3.11) лінійні і кутові прискорення тіл системи. Виразимо всі прискорення тіл через базове прискорення a_1 вантажу 1.

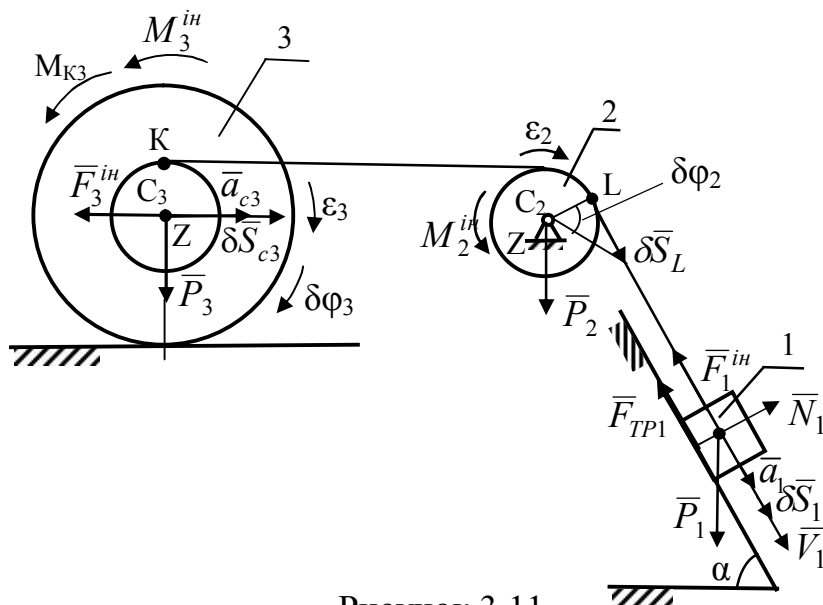


Рисунок 3.11

Диференціюючи за часом обидві частини залежностей (3.21), (3.22), (3.23)

і з огляду на те, що $\frac{d\omega_2}{dt} = \epsilon_2$; $\frac{d\omega_3}{dt} = \epsilon_3$; $\frac{dV_{c_3}}{dt} = a_{c_3}$; $\frac{dV_1}{dt} = a_1$, одержимо:

$$\epsilon_2 = \frac{a_1}{r_2}, \quad (3.36)$$

$$\epsilon_3 = \frac{a_1}{4r}, \quad (3.37)$$

$$a_{c_3} = \frac{3}{4} a_1. \quad (3.38)$$

Спрямуємо базове прискорення \bar{a}_1 вантажу 1 у бік його руху, тобто донизу. Тому, враховуючи вирази (3.36), (3.37), (3.38), дугові стрілки прискорень ϵ_2 і ϵ_3 покажемо за ходом стрілки годинника.

4. Приєднаємо до активних сил сили інерції тіл системи:

- силу інерції вантажу 1 (3.16):

$$F_1^{in} = M_1 a_1, \quad (3.39)$$

враховуючи, що вантаж 1 здійснює поступальний рух;

- момент сили інерції блоку 2 (3.15):

$$M_2^{in} = I_{C_2z} \epsilon_2, \quad (3.40)$$

тому що блок 2 здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі C_2z ;

- силу інерції і момент сил інерції котушки 3 (3.18), (3.19):

$$F_3^{in} = M_3 a_{C_3}, \quad (3.41)$$

$$M_3^{in} = I_{C_3} \varepsilon_3, \quad (3.42)$$

враховуючи, що котушка здійснює плоскопаралельний рух.

Сили інерції \bar{F}_1^{in} і \bar{F}_3^{in} вантажу 1 і котушки 3 спрямуємо у бік, протилежний їх власним прискоренням \bar{a}_1 і \bar{a}_{c_3} . Дугові стрілки моментів M_2^{in} і M_3^{in} сил інерції блоку 2 і котушки 3 покажемо проти ходу стрілки годинника, тобто у напрямках, протилежних стрілкам кутових прискорень ε_2 і ε_3 .

5. Визначимо і покажемо на схемі можливі лінійні та кутові переміщення тіл системи. У якості базового застосуємо лінійні переміщення $\delta\bar{S}_1$ вантажу 1. Спрямуємо вектор $\delta\bar{S}_1$ у бік вектора швидкості \bar{V}_1 вантажу 1. В цьому випадку, враховуючи властивості можливих та дійсних переміщень, а також рівності $\delta\bar{S}_L = \delta\bar{S}_1$, $tg(\delta\varphi_2) = \delta\varphi_2$, отримаємо

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta S_L}{r_2}, \quad (3.43)$$

$$\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{4r}, \quad (3.44)$$

$$\delta S_{C_3} = \frac{3}{4} \delta S_1. \quad (3.45)$$

6. Надамо системі можливе переміщення і складемо загальне рівняння динаміки (3.15):

$$P_1 \delta S_1 \sin \alpha - F_{TP1} \delta S_1 - M_{\kappa_3} \delta\varphi_3 - F_1^{in} \delta S_1 - \quad (3.46)$$

$$- M_2^{in} \delta\varphi_2 - F_3^{in} \delta S_{C_3} - M_3^{in} \delta\varphi_3 = 0.$$

В рівнянні (3.46) враховано, що можлива робота $\delta A_{P_2} = 0$, тому що її точка прикладання нерухома, а можливі роботи $\delta A_{N_1} = 0$ і $\delta A_{P_3} = 0$, тому що $\bar{N}_1 \perp \delta\bar{S}_1$, а $\bar{P}_3 \perp \delta\bar{S}_{C_3}$ відповідно.

Підставивши вирази для сил ваги $P_1 = M_1 g$, $P_3 = M_3 g$, сили тертя

$$F_{TP1} = fN_1 = fP_1 \cos \alpha = -fM_1 g \cos \alpha,$$

моменту пари сил опору коченню

$$M_{\kappa_3} = \delta_{\kappa} N_3 = \delta_{\kappa} P_3 = \delta_{\kappa} M_3 g,$$

сил інерції (3.39)–(3.42), моментів інерції (3.27), (3.30), а також співвідношення між прискореннями (3.36)–(3.38) і можливими переміщеннями (3.43)–(3.45) у загальне рівняння динаміки (3.46), одержимо

$$\begin{aligned}
& M_1 g \delta S_1 \sin \alpha - f M_1 g \cos \alpha \delta S_1 - \delta_\kappa M_3 g \frac{\delta S_1}{4r} - M_1 a_1 \delta S_1 - \\
& - \frac{1}{2} M_2 r_2^2 \frac{a_1}{r_2} \frac{\delta S_1}{r_2} - M_3 \frac{3}{4} a_1 \frac{3}{4} \delta S_1 - M_3 16 r^2 \frac{a_1}{4r} \frac{\delta S_1}{4r} = 0.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Згрупуємо доданки:

$$\begin{aligned}
& \left\{ g \left[M_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{\delta_\kappa M_3}{4r} \right] - \right. \\
& \left. - a_1 \left(M_1 + \frac{1}{2} M_2 + \frac{9}{16} M_3 + M_3 \right) \right\} \delta S_1 = 0.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Так як $\delta S_1 \neq 0$, то повинне виконуватися співвідношення

$$g \left[M_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{\delta_\kappa M_3}{4r} \right] - a_1 \left(M_1 + \frac{1}{2} M_2 + \frac{25}{16} M_3 \right) = 0. \tag{3.49}$$

З рівняння (3.49) визначимо шукане прискорення вантажу:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{g \left[M_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{\delta_\kappa M_3}{4r} \right]}{M_1 + \frac{1}{2} M_2 + \frac{25}{16} M_3} = \\
&= \frac{g \left[4m (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{20m \delta_\kappa}{4r} \right]}{4m + 0,75m + 31,25m} = \\
&= \frac{mg \left[4 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - 5 \frac{\delta_\kappa}{r} \right]}{36m} = \\
&= \frac{10 \cdot \left[4 \cdot (0,87 - 0,2 \cdot 0,5) - 5 \frac{0,4}{2} \right]}{36} = \frac{20,8}{36} = 0,58 \text{ (м/с}^2\text{)}.
\end{aligned}$$

Відповідь. Прискорення вантажу 1 дорівнює $a_1 = 0,58 \text{ м/с}^2$.

Приклад 3.3. Умова задачі та задана схема механічної системи співпадають з прикладом 3.1. Шукана величина – швидкість вантажу 1 через час $\tau = 5 \text{ с}$ після початку руху.

Розв'язання

Для визначення швидкості \bar{V}_1 вантажу 1 через час $\tau = 5 \text{ с}$ після початку руху складемо диференціальне рівняння руху механічної системи у вигляді рівняння Лагранжа другого роду (3.19).

Методика розв'язання задачі наступна.

1. Розглянемо механічну систему, що складається з вантажу 1, блоку 2 і котушки 3, зв'язаних ідеальною нерозтяжною ниткою (рис. 3.12). Механічна

система відноситься до системи з одним ступенем волі. Тому виберемо в якості узагальненої координати системи – переміщення вантажу 1 униз по похилій площині:

$$q = S_1.$$

Визначимо узагальнену швидкість вантажу 1:

$$\dot{q} = V_1 = \dot{S}_1.$$

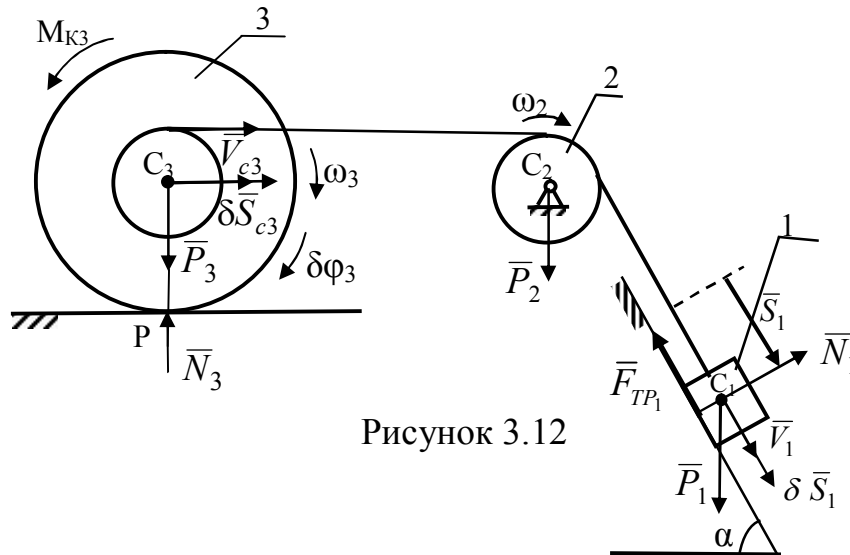


Рисунок 3.12

2. Зобразимо механічну систему в довільному положенні (рис. 3.12), вважаючи, що вантаж 1 рухається у бік зростання переміщення S_1 .

3. Покажемо активні сили, прикладені до системи: $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ - сили ваги тіл 1, 2, 3 тіл; \bar{N}_1, \bar{N}_3 - нормальні реакції опорних площин тіл. Силу тертя вантажу 1 \bar{F}_{TP_1} і пару сил опору коченню котушки 3 $M_{к_3}$ включимо також до активних сил. Реакції ідеальних в'язей на схемі не покажемо.

4. Визначимо і покажемо на схемі узагальнені можливі переміщення тіл системи. Для цього надамо системі можливе переміщення, при якому узагальнене переміщення вантажу 1 буде $\delta \bar{S}_1$. Спрямуємо його у бік позитивного відліку, тобто донизу. Величини і напрямки узагальнених можливих переміщень $\delta \bar{S}_{C_3}, \delta \varphi_3$ котушки 3 визначимо з урахуванням п.5 прикладу 3.2.

5. Покажемо далі на схемі узагальнені лінійні і кутові швидкості вантажу 1 (\bar{V}_1), блоку 2 (ω_2) і котушки 3 (\bar{V}_{C_3}, ω_3). Їх величини і напрямки визначимо враховуючи п.2 прикладу 3.1.

6. Обчислимо кінетичну енергію механічної системи в довільному положенні. При цьому усі лінійні і кутові швидкості, що входять у вирази для кінетичних енергій тіл системи, виразимо через узагальнену швидкість $\dot{q} = V_1$.

Кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій тіл, що входять у систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (3.50)$$

Вирази для T_1, T_2, T_3 визначаються за формулами (3.25), (3.28), (3.32) і (3.33). Остаточно, згідно (3.31), одержимо:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 18mV_1^2 = 18m\dot{S}_1^2. \quad (3.51)$$

7. Визначимо узагальнену силу Q . Для цього надамо механічній системі можливе переміщення, при якому узагальнене переміщення вантажу 1 буде $\delta q = \delta S_1$.

Обчислимо далі суму робіт активних сил на можливих переміщеннях точок їх прикладання (3.22):

$$\sum \delta A_k^a = \delta A_{P_1} + \delta A_{N_1} + \delta A_{TP_1} + \delta A_{P_2} + \delta A_{P_3} + \delta A_{N_3} + \delta A_{M_{K_3}}. \quad (3.52)$$

Для механічної системи, що розглядається, можливі роботи сили ваги \bar{P}_2 і реакції \bar{N}_3 дорівнюють $\delta A_{P_2} = 0, \delta A_{N_3} = 0$, тому що точки C_2 і P (миттєвий центр швидкостей котушки) їх прикладання нерухомі. Можливі роботи \bar{N}_1 і сили ваги \bar{P}_3 дорівнюють $\delta A_{N_1} = 0, \delta A_{P_3} = 0$, враховуючи, що можливі переміщення $\bar{\delta S}_1, \bar{\delta S}_{C_3}$ їх точок прикладання: $\bar{\delta S}_1 \perp \bar{N}_1$ і $\bar{\delta S}_{C_3} \perp \bar{P}_3$.

Тому одержимо

$$\sum \delta A_k^a = P_1 \delta S_1 \sin \alpha - F_{TP_1} \delta S_1 - M_{K_3} \delta \varphi_3. \quad (3.53)$$

Після перетворень, з урахуванням співвідношень (3.52), (3.53) матимемо

$$\begin{aligned} \sum \delta A_k^a &= M_1 g \delta S_1 \sin \alpha - f M_1 g \cos \alpha \delta S_1 - \delta M_3 g \frac{\delta S_1}{4r} = \\ & \left\{ g \left[M_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{\delta M_3}{4r} \right] \right\} \delta S_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Відповідно до (3.20), узагальнена сила Q дорівнюватиме коефіцієнту при δS_1 у виразі (3.54):

$$\begin{aligned} Q &= g \left[M_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{\delta_{\kappa} M_3}{4r} \right] = \\ &= mg \left[4(\sin \alpha - f \cos \alpha) - 5 \frac{\delta_{\kappa}}{r} \right] = \\ &= m \cdot 10 \cdot \left[4 \cdot (0,87 - 0,2 \cdot 0,5) - 5 \cdot \frac{0,4}{2} \right] = 20,8m. \end{aligned} \quad (3.55)$$

8. Складемо рівняння Лагранжа другого ряду (3.19), що для обраної узагальненої координати S_1 матиме вигляд

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial S_1} = Q.$$

Часткова похідна кінетичної енергії по узагальненій координаті S_1 дорівнює

$$\frac{\partial T}{\partial S_1} = 0, \quad (3.56)$$

тому що узагальнена координата S_1 у вираз (3.51) для кінетичної енергії явно не входить.

Часткова похідна кінетичної енергії (3.51) по узагальненій швидкості \dot{S}_1 :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} = 18m \cdot 2 \cdot \dot{S}_1 = 36m\dot{S}_1. \quad (3.57)$$

Повна похідна кінетичної енергії за часом від виразу (3.57) дорівнює:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_1} \right) = 36m\ddot{S}_1. \quad (3.58)$$

Підставимо (3.58), (3.56) і (3.55) у рівняння Лагранжа другого роду (3.19):

$$36m\ddot{S}_1 - 0 = 20,8m, \quad (3.59)$$

відкіля отримаємо

$$\ddot{S}_1 = \frac{20,8m}{36m} \approx 0,58. \quad (3.60)$$

Проінтегруємо далі один раз за часом вираз (3.58):

$$\dot{S}_1 = 0,58t + C_1, \quad (3.61)$$

де C_1 - постійна інтегрування, яку визначимо з початкової умови.

Так як механічна система в початковий момент знаходиться в спокої, то

$$V_1|_{t=0} = \dot{S}_1|_{t=0} = 0. \quad (3.62)$$

Підставляючи (3.62) у (3.61), одержимо:

$$0 = 0,58 \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0. \quad (3.63)$$

Тоді вираз для швидкості вантажу 1 (3.59) буде мати вигляд

$$V_1 = \dot{S}_1 = 0,58t. \quad (3.64)$$

Остаточно швидкість вантажу через час $\tau = 5$ с після початку руху:

$$V_1 = 0,58 \cdot 5 = 2,9 \text{ (м/с)}.$$

Відповідь. Швидкість V_1 вантажу 1 через час $\tau = 5$ с після початку його руху дорівнює $V_1 = 2,9$ м/с.

3.5 Завдання і варіанти задач до теми 3

У завданні прийняті наступні значення:

m_k – маса k -го тіла механічної системи;

R_k, r_k – радіуси великих і малих кіл k -го тіла;

i_{kz} – радіуси інерції k -го тіла щодо осі, що проходить через центр мас цього тіла перпендикулярно до площини креслення;

f – коефіцієнт тертя ковзання вантажу об шорстку поверхню;

δ_k – коефіцієнт тертя кочення тіла, що котиться по поверхні без ковзання;

M_0 – постійний момент опору руху.

Маси вантажів і деяких радіусів виражені у відносних одиницях, тобто через параметри m і r відповідно, які в результаті розв'язання задачі повинні скоротитися й у відповідь не увійдуть.

Опір руху враховується завданням або коефіцієнта тертя ковзання f , або коефіцієнта тертя кочення δ_k , або моменту опору M_0 . Якщо в умовах задачі задане значення одного з параметрів, які враховують опір, то варто вважати, що іншими параметрами опору можна знехтувати (наприклад, якщо заданий $f = 0,1$, то варто вважати, що $M_0 = 0, \delta_k = 0$).

Якщо маса якого-небудь тіла дорівнює нулю, то воно служить тільки для передачі руху від попереднього тіла до наступного і його сили інерції не враховуються.

Блоки і котки, радіуси інерції яких не задані, вважати суцільними однорідними циліндрами з найбільшими радіусами.

Нитки вважати ідеальними і нерозтяжними.

Механічна система починає рухатися зі стану спокою під дією сил ваги.

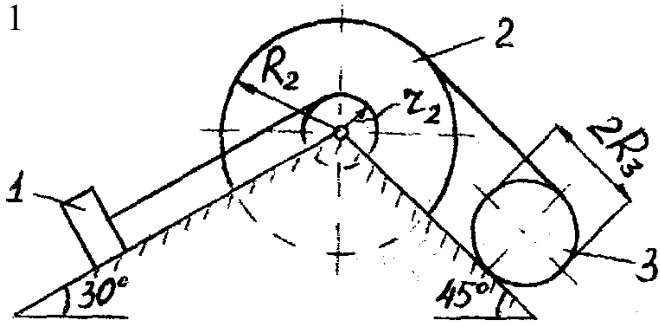
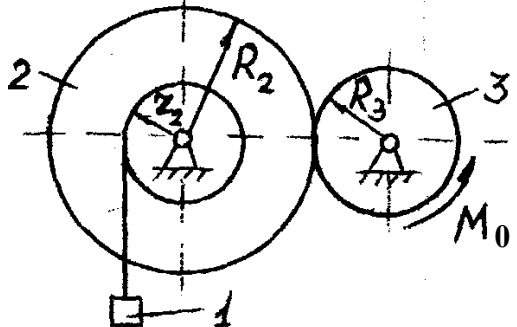
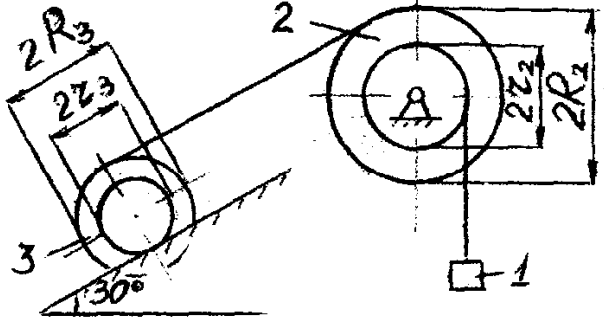
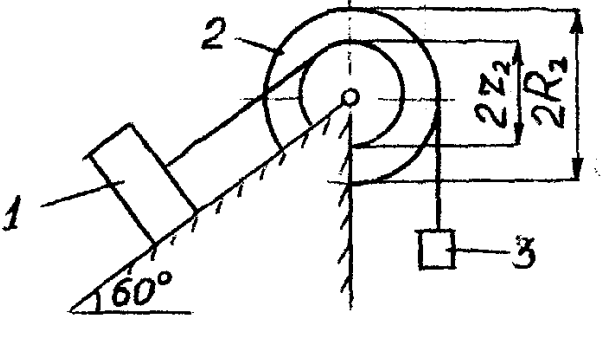
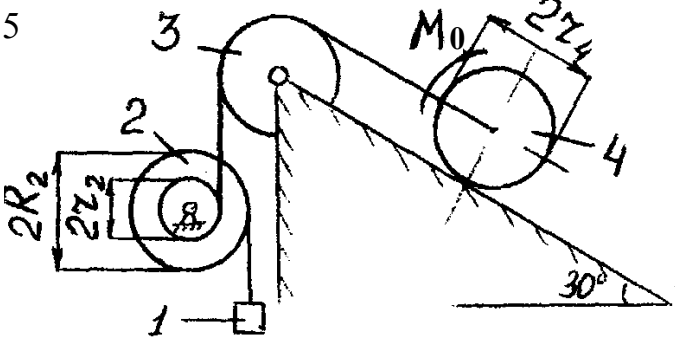
Визначити:

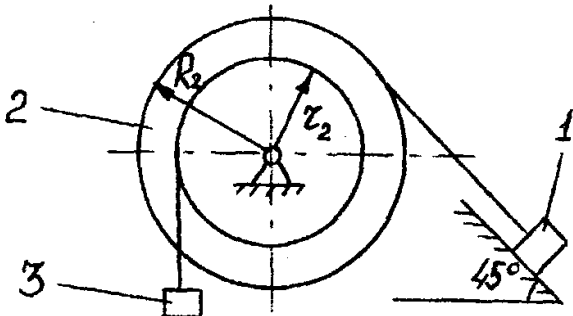
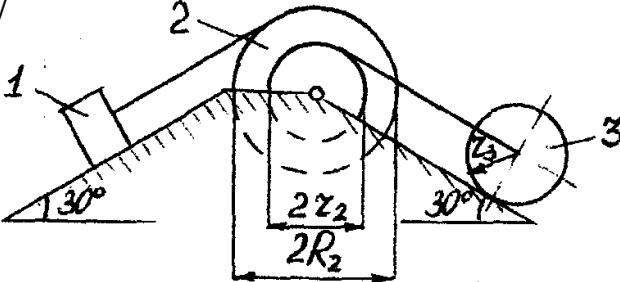
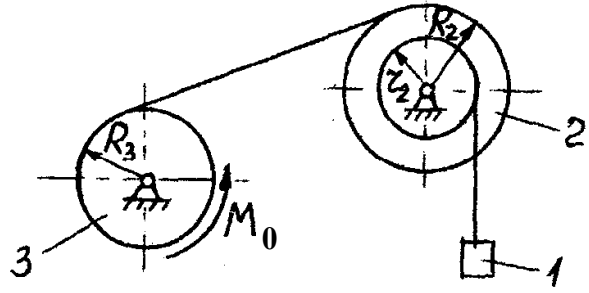
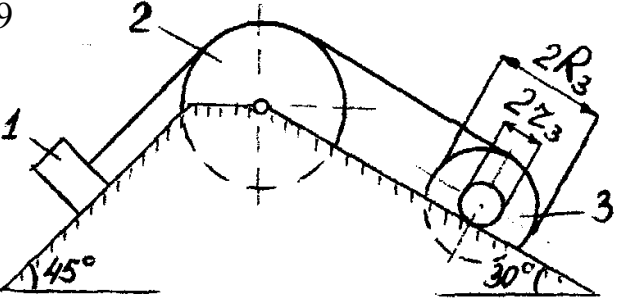
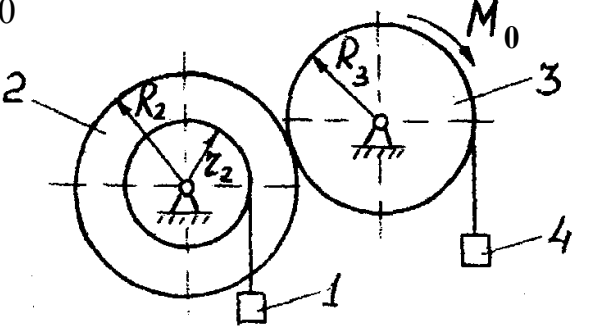
3.1 – швидкість \bar{V}_1 вантажу 1 у той момент, коли пройдений їм шлях дорівнює S_1 ;

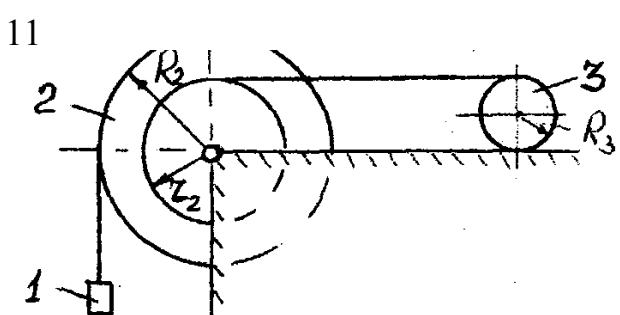
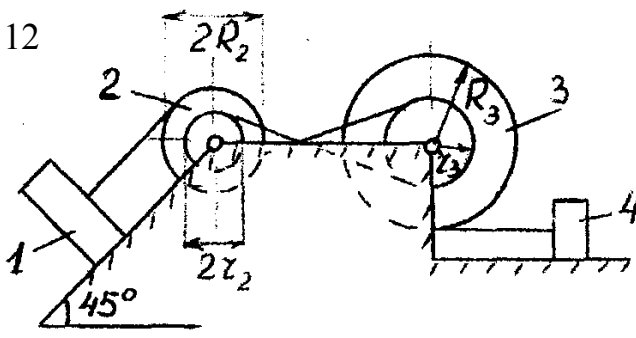
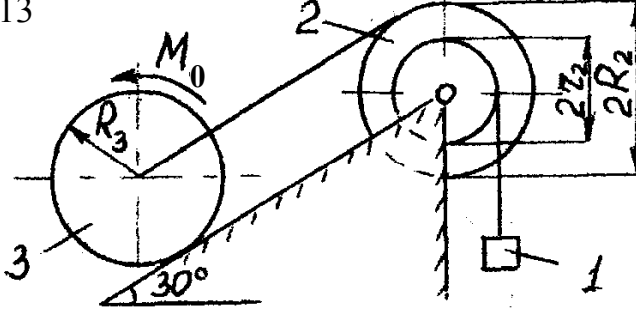
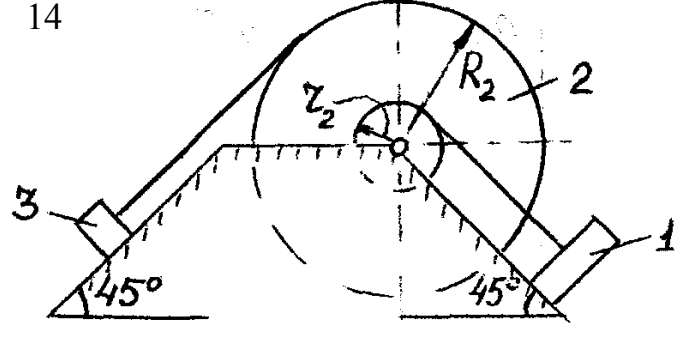
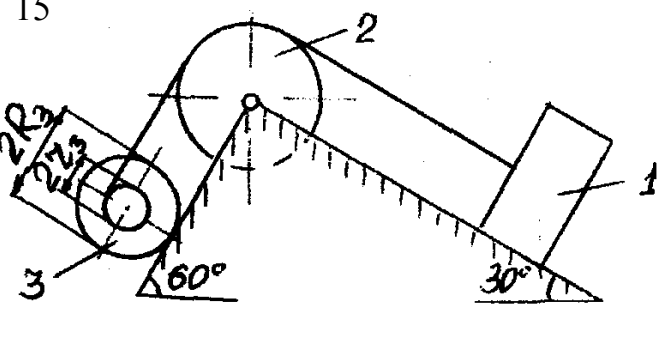
3.2 – прискорення \bar{a}_1 вантажу 1;

3.3 – швидкість вантажу 1 через час τ після початку руху.

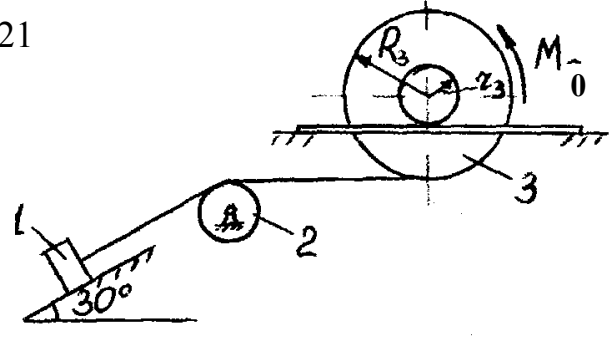
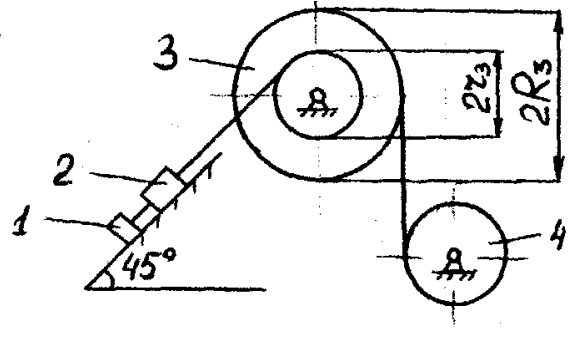
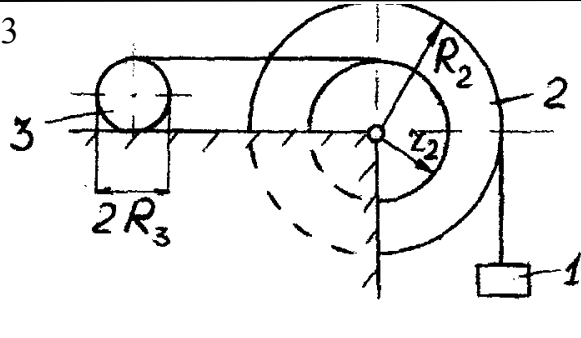
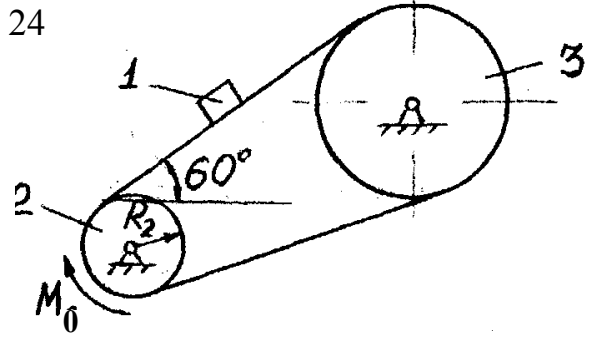
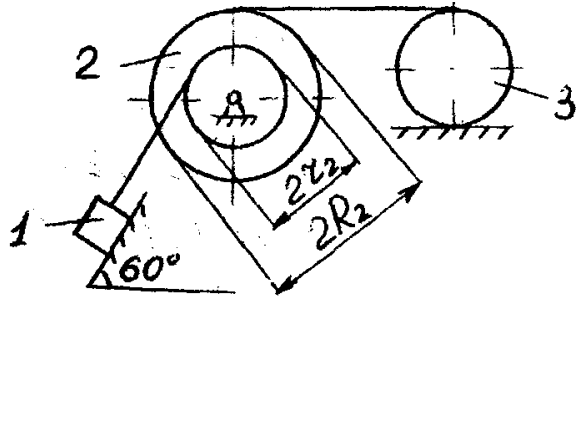
Варіанти задач до теми 3

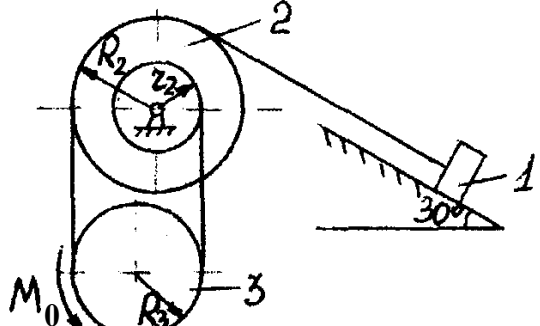
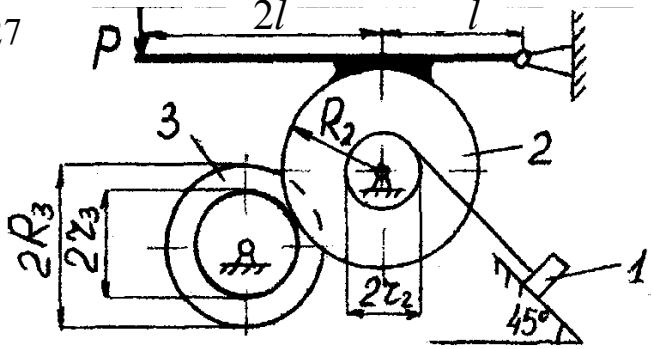
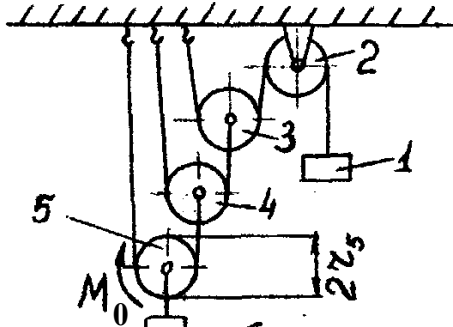
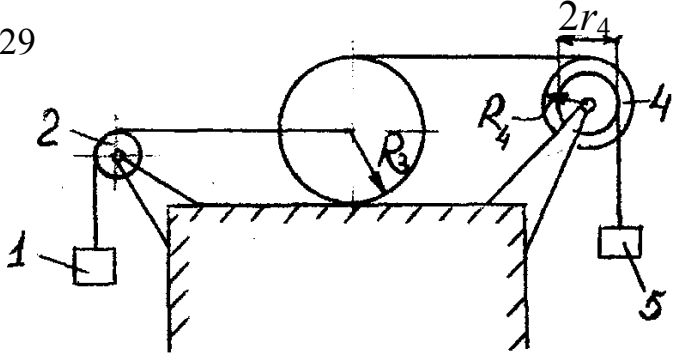
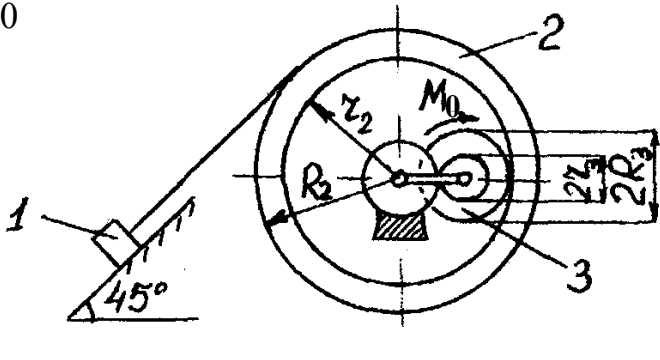
<p>1</p> 	<p>$m_1 = 4m; m_2 = 0; m_3 = m;$ $R_2 = 3r_2; R_3 = 20 \text{ см};$ $f = 0,1;$ $S_1 = 1 \text{ м}; \tau = 5 \text{ с.}$</p>
<p>2</p> 	<p>$m_1 = m; m_2 = 4m; m_3 = 2m;$ $i_{2z} = \frac{3}{2}r; r_2 = r; R_2 = 2r;$ $R_3 = 10 \text{ см};$ $M_0 = 0,5m_3g \text{ Н}\cdot\text{см};$ $S_1 = 2 \text{ м}; \tau = 3 \text{ с.}$</p>
<p>3</p> 	<p>$m_1 = 4m; m_2 = 0; m_3 = 2m;$ $i_{2z} = 3r; r_2 = r; R_2 = 4r;$ $i_{3z} = \frac{3}{4}r;$ $r_3 = 0,5r; R_3 = r; \delta_k = \frac{1}{8}r;$ $S_1 = 3,5 \text{ м}; \tau = 14 \text{ с.}$</p>
<p>4</p> 	<p>$m_1 = 5m; m_2 = 0,5m; m_3 = m;$ $i_{2z} = \sqrt{2}r; r_2 = r; R_2 = 2r;$ $f = 0,1;$ $S_1 = 1 \text{ м}; \tau = 2 \text{ с.}$</p>
<p>5</p> 	<p>$m_1 = 4m; m_2 = m_3 = 0;$ $m_4 = 2m;$ $R_2 = 3r_2; r_4 = 3 \text{ см};$ $M_0 = 0,5m_4g \text{ Н}\cdot\text{см};$ $S_1 = 13 \text{ м}; \tau = 2,6 \text{ с.}$</p>

<p>6</p> 	<p> $m_1 = 8m; m_2 = 4m; m_3 = 2m;$ $i_{2z} = 1,5r; r_2 = r; R_2 = 3r;$ $f = 0,2;$ $S_1 = 0,5 \text{ M}; \tau = 10 \text{ c.}$ </p>
<p>7</p> 	<p> $m_1 = 3m; m_2 = 0; m_3 = 3m;$ $r_2 = r; R_2 = 1,5r;$ $\delta_k = \frac{1}{17}r; r_3 = r;$ $S_1 = 2,5 \text{ M}; \tau = 5 \text{ c.}$ </p>
<p>8</p> 	<p> $m_1 = 2m; m_2 = 0; m_3 = 5m;$ $r_2 = 0,4r; R_2 = r;$ $R_3 = 5 \text{ cm};$ $M_0 = 0,5m_3g \text{ H}\cdot\text{cm};$ $S_1 = 1,4 \text{ M}; \tau = 7 \text{ c.}$ </p>
<p>9</p> 	<p> $m_1 = 10m; m_2 = 0; m_3 = 5m;$ $i_{3z} = \sqrt{2}r; r_3 = r; R_3 = 4r;$ $f = 0,1;$ $S_1 = 6 \text{ M}; \tau = 1 \text{ c.}$ </p>
<p>10</p> 	<p> $m_1 = 2m; m_2 = 0;$ $m_3 = m_4 = 0,5m;$ $r_2 = r; R_2 = 2r; R_3 = 4 \text{ cm};$ $M_0 = 0,4m_3g \text{ H}\cdot\text{cm};$ $S_1 = 2,5 \text{ M}; \tau = 5 \text{ c.}$ </p>

<p>11</p> 	<p>$m_1 = 3m; m_2 = 0; m_3 = 2m;$ $r_2 = r; R_2 = 2r; R_3 = 0,5r;$ $\delta_K = 0,1r;$ $S_1 = 3 \text{ M}; \tau = 3 \text{ c.}$</p>
<p>12</p> 	<p>$m_1 = 10m; m_2 = 0;$ $m_3 = 2m = m_4;$ $r_2 = r; R_2 = 2r; R_3 = 3r; r_3 = r;$ $i_{3z} = 2r; f = 0,1;$ $S_1 = 1,1 \text{ M}; \tau = 11 \text{ c.}$</p>
<p>13</p> 	<p>$m_1 = 2m; m_2 = 0; m_3 = \frac{3}{4}m;$ $R_2 = \frac{4}{3}r; R_3 = 4 \text{ cm};$ $M_0 = 0,4m_3g \text{ H}\cdot\text{cm};$ $S_1 = 7 \text{ M}; \tau = 4 \text{ c.}$</p>
<p>14</p> 	<p>$m_1 = 5m; m_2 = 2m; m_3 = m;$ $i_{2z} = 2r; r_2 = r; R_2 = 3r;$ $f = 0,1;$ $S_1 = 11 \text{ M}; \tau = 4 \text{ c.}$</p>
<p>15</p> 	<p>$m_1 = 2m; m_2 = 0; m_3 = 0,5m;$ $i_{3z} = 2r; r_3 = r; R_3 = 3r;$ $\delta_K = 0,05r;$ $S_1 = 1,1 \text{ M}; \tau = 4 \text{ c.}$</p>

<p>16</p>	<p> $m_1 = 2m; m_2 = 3m; m_3 = 4m;$ $i_{2z} = 2r; r_2 = r; R_2 = 3r;$ $r_3 = 4 \text{ cm};$ $M_0 = 0,6m_3g \text{ H}\cdot\text{cm};$ $S_1 = 2 \text{ м}; \tau = 2,3 \text{ с}.$ </p>
<p>17</p>	<p> $m_1 = 4m; m_2 = 0; m_3 = 3m;$ $r_2 = 2r; R_3 = 3r;$ $f = 0,1;$ $S_1 = 0,1 \text{ м}; \tau = 3 \text{ с}.$ </p>
<p>18</p>	<p> $m_1 = 0,5m; m_2 = m; m_3 = 2m;$ $R_2 = 10 \text{ cm}; i_{3z} = 1,5r; r_3 = r;$ $R_3 = 2r; M_0 = 0,5m_3g \text{ H}\cdot\text{cm};$ $S_1 = 10 \text{ м}; \tau = 5 \text{ с}.$ </p>
<p>19</p>	<p> $m_1 = 4m; m_2 = 0; m_3 = 2m;$ $r_2 = r; R_2 = 2r; i_{3z} = 1,5r;$ $r_3 = 0,5r; R_3 = 2r; \delta_k = 0,1r;$ $S_1 = 3,5 \text{ м}; \tau = 7 \text{ с}.$ </p>
<p>20</p>	<p> $m_1 = 6m; m_2 = 0; m_3 = 9m;$ $m_4 = 3m; R_2 = \frac{3}{2}r_2;$ $f = 0,05;$ $S_1 = 7 \text{ м}; \tau = 14 \text{ с}.$ </p>

<p>21</p> 	<p>$m_1 = 10m; m_2 = 0; m_3 = 4m;$ $R_3 = \frac{3}{2}r; r_3 = 0,5r; i_{3z} = r;$ $r = 2 \text{ cm}; M_0 = 0,5m_3g \text{ H}\cdot\text{cm};$ $S_1 = 3 \text{ M}; \tau = 3 \text{ c}.$</p>
<p>22</p> 	<p>$m_1 = 2m; m_2 = 4m = m_3;$ $m_4 = 0,5m;$ $R_2 = 2r; r_3 = r; i_{3z} = \frac{3}{2}r;$ $f = 0,08;$ $S_1 = 2 \text{ M}; \tau = 8 \text{ c}.$</p>
<p>23</p> 	<p>$m_1 = 12m; m_2 = 0; m_3 = 4m;$ $R_2 = 2r; r_2 = r; R_3 = \frac{1}{2}r;$ $\delta_k = \frac{1}{8}r;$ $S_1 = 1,1 \text{ M}; \tau = 9 \text{ c}.$</p>
<p>24</p> 	<p>$m_1 = 2m; m_2 = m; m_3 = 2m;$ $R_2 = 1 \text{ cm};$ $M_0 = 0,7m_2g \text{ H}\cdot\text{cm};$ $S_1 = 0,7 \text{ M}; \tau = 3,5 \text{ c}.$</p>
<p>25</p> 	<p>$m_1 = 2m; m_2 = 0; m_3 = 2m;$ $R_2 = 2r; r_2 = r;$ $f = 0,04;$ $S_1 = 4 \text{ M}; \tau = 8 \text{ c}.$</p>

<p>26</p> 	<p>$m_1 = m; m_2 = 0; m_3 = 3m;$ $R_2 = 3r_2; R_3 = 10 \text{ cm};$ $M_0 = 0,5m_3g \text{ H}\cdot\text{cm};$ $S_1 = 5 \text{ M}; \tau = 10 \text{ c.}$</p>
<p>27</p> 	<p>$m_1 = 6m; m_2 = m; m_3 = 8/9m;$ $R_2 = 3r; r_2 = r; i_{2z} = 2r;$ $R_3 = 2r; r_3 = r; i_{3z} = \frac{3}{2}r;$ $P = \frac{1}{3}m_2g \text{ H}; f = 0,15;$ $S_1 = 3,5 \text{ M}; \tau = 7 \text{ c.}$</p>
<p>28</p> 	<p>$m_1 = 4m; m_2 = m_3 = m_4 = 0;$ $m_5 = 12m; m_6 = 14m;$ $r_5 = 1 \text{ cm};$ $M_0 = 0,5m_5g \text{ H}\cdot\text{cm};$ $S_1 = 4,5 \text{ M}; \tau = 9 \text{ c.}$</p>
<p>29</p> 	<p>$m_1 = 4m; m_2 = m_4 = 0;$ $m_3 = 2m; m_5 = m;$ $R_3 = r; R_4 = 0,5r;$ $r_4 = \frac{1}{4}r; \delta_k = \frac{1}{8}r;$ $S_1 = 10 \text{ M}; \tau = 8 \text{ c.}$</p>
<p>30</p> 	<p>$m_1 = 10m; m_2 = 0; m_3 = 9m;$ $R_2 = \frac{3}{2}r_2; R_3 = 3r; r_3 = r;$ $i_{3z} = 2r; r = 1,2 \text{ cm};$ $M_0 = 0,4m_3g \text{ H}\cdot\text{cm};$ $S_1 = 5 \text{ M}; \tau = 9 \text{ c.}$</p>

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Теоретична механіка : підручник / І. В. Кузьо, В. П. Шпачук, Н. М. Ванькович та ін. – Харків : Фоліо, 2017. – 780 с.
2. Павловський М. А. Теоретична механіка : підручник / М. А. Павловський. – Київ : Техніка, 2002. – 512 с.
3. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – [18-е изд.]. – М : Высш. шк., 2010. – 416 с.
4. Теоретична механіка: навч.-метод. посібник і завдання для контрольних і самостійних робіт / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 146 с.
5. Шпачук В. П. Теоретична механіка. Динаміка: конспект лекцій для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за спеціальностями 192, 194, 141, 185, 263, 275 / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. : В. П. Шпачук, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 222 с.
7. Харківська державна наукова бібліотека імені В. Г. Короленка [Електронний ресурс]. – Режим доступу: www.korolenko.kharkov.com
8. Цифровий репозиторій ХНУМГ ім. О. М. Бекетова [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://eprints.kname.edu.ua>

Виробничо-практичне видання

Методичні рекомендації

до організації самостійної роботи,
проведення практичних занять,
виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань
із навчальної дисципліни

«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

Розділ «Динаміка»

(для студентів денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 194 – Гідротехнічне будівництво, водна інженерія та водні технології, 185 – Нафтогазова інженерія та технології, 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, 263 – Цивільна безпека, 275 – Транспортні технології (за видами))

Укладачі: **ШПАЧУК** Володимир Петрович,
РУБАНЕНКО Олександр Ігоревич,
ГАРБУЗ Алла Олегівна

Відповідальний за випуск *В. П. Шпачук*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Є. Г. Панова*

План 2019, поз. 173М

Підп. до друку 22.06.2020.	Формат 60 x 84/16.
Друк на ризографі.	Ум. друк. арк. 3,8.
Зам. №	Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.0.2017.