МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНЕ ЗАВДАННЯ
з дисципліни
«ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА (ВИЩА МАТЕМАТИКА)»
(для студентів-бакалаврів денної форми навчання спеціальності 073 – Менеджмент)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2020

Розрахунково-графічне завдання з дисципліни «Вища та прикладна математика (Вища математика)» (для студентів-бакалаврів денної форми навчання спеціальності 073 - Менеджмент / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 34 с.

Укладач: Л. Б. Коваленко

Рецензент: Л. П. Вороновська, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 9 від 5 березня 2020 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Розрахунково-графічне завдання для студентів-бакалаврів денної форми навчання спеціальності 073 - Менеджмент призначено для засвоєння основних математичних понять та методів розв'язання задач під час самостійної роботи студентів, що вивчають курс «Вища та прикладна математика (Вища математика)». Представлені у роботі завдання мають фахове спрямування та наочно ілюструють практичне застосування методів лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу у розв'язанні прикладних задач.

Навчально-методичний комплекс дисципліни «Вища та прикладна математика (Вища математика)» для студентів спеціальності 073 – Менеджмент, що включає підручник, навчальний посібник з необхідним теоретичним матеріалом, довідниками та завданнями для практичних занять та самостійної роботи студентів, дозволяє якісно підготуватися до виконання розрахунково-графічного завдання.

Розрахунково-графічне завдання необхідно оформляти на стандартних аркушах паперу формату А4 (розмір 210 х 297 мм). Писати треба лише з одного боку аркушу. Приклад оформлення титульного аркушу представлений у додатках. Після виконання роботи її необхідно зброшурувати та здати викладачеві.

Термін виконання роботи визначається викладачем.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ
ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОГО ЗАВДАННЯ

1. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Обсяг виробництва та вартість виробленої продукції в регіонах

№ варіанта	A	B
1	$\begin{pmatrix}255 & 380 & 495\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7 & 5 & 1 & 5\\ 9 & 6 & 3 & 10\\ 2 & 2 & 9 & 4\end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix}645 & 225 & 300\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7 & 5 & 3 & 3\\ 4 & 9 & 5 & 2\\ 2 & 6 & 5 & 3\end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix}310 & 405 & 290\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}12 & 13 & 9 & 10\\ 5 & 8 & 7 & 8\\ 6 & 4 & 8 & 7\end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix}305 & 440 & 195\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8 & 2 & 6 & 2\\ 3 & 5 & 7 & 6\\ 9 & 9 & 1 & 5\end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix}420 & 190 & 375\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7 & 6 & 3 & 8\\ 5 & 8 & 2 & 6\\ 4 & 9 & 5 & 7\end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix}775 & 800 & 285\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 8 & 5 & 7\\ 3 & 5 & 8 & 5\\ 1 & 6 & 9 & 9\end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix}690 & 180 & 375\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 1 & 7 & 5\\ 2 & 8 & 4 & 2\\ 5 & 3 & 9 & 5\end{pmatrix}$

8	$\begin{pmatrix} 740 & 195 & 550 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 290 & 435 & 630 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 8 & 4 \\ 3 & 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 710 & 215 & 540 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

2. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i–го товару на виробництво одиниці продукції j–го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P (табл. 1.2).

Таблиця 1.2 – Норми затрат ресурсів при виробництві продукції та їхня вартість

№ варіанта	A	X	P
1	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 9 \\ 1 & 7 & 8 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 180 \\ 930 \\ 225 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 35 & 85 & 90 & 110 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 420 \\ 190 \\ 555 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 120 & 35 & 75 & 80 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 9 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 270 \\ 315 \\ 440 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 80 & 210 & 45 & 75 \end{pmatrix}$

4	$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \\ 8 & 8 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 325 \\ 905 \\ 440 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 95 & 120 & 75 & 30 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 6 \\ 9 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 710 \\ 255 \\ 305 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 55 & 70 & 125 & 30 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 530 \\ 115 \\ 245 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 40 & 95 & 65 & 130 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 485 \\ 810 \\ 315 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 205 & 65 & 50 & 70 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 8 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 870 \\ 355 \\ 410 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 & 80 & 215 & 75 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 7 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 290 \\ 950 \\ 335 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 115 & 75 & 80 & 20 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 555 \\ 325 \\ 480 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 555 \\ 325 \\ 480 \end{pmatrix}$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

3. В таблиці наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях) (табл. 1.3).

Таблиця 1.3 – Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей

№ вар	Галузь		Споживання		Кінцева продукція
			Галузь 1	Галузь 2	
1	Виробництво	Галузь 1	0,3	0,25	200
		Галузь 2	0,4	0,15	400
2	Виробництво	Галузь 1	0,3	0,45	500
		Галузь 2	0,2	0,35	300
3	Виробництво	Галузь 1	0,4	0,15	200
		Галузь 2	0,1	0,35	100
4	Виробництво	Галузь 1	0,3	0,45	200
		Галузь 2	0,1	0,55	300
5	Виробництво	Галузь 1	0,35	0,2	600
		Галузь 2	0,25	0,1	300
6	Виробництво	Галузь 1	0,5	0,15	400
		Галузь 2	0,1	0,35	300
7	Виробництво	Галузь 1	0,35	0,4	300
		Галузь 2	0,25	0,2	100
8	Виробництво	Галузь 1	0,35	0,2	400
		Галузь 2	0,25	0,5	200

9	Виробництво	Галузь 1	0,3	0,35	300
		Галузь 2	0,4	0,15	200
10	Виробництво	Галузь 1	0,2	0,45	200
		Галузь 2	0,4	0,25	100

Знайти:

1) плановані об’єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний об’єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на *n* %, а другої – на *m* % (табл. 1.4).

Таблиця 1.4 – Показники збільшення кінцевого споживання продукції двох галузей

№ варіанта	*n* %	*m* %
1	5	20
2	15	15
3	10	25
4	25	5
5	5	15
6	10	5
7	25	10
8	10	15
9	20	10
10	30	5

4. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = C(x)$ (грош. одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їх значення при $x = x_0$ (табл. 1.5).

Таблиця 1.5 – Функція витрат виробництва продукції

№ варіанта	$y = C(x)$	$x = x_0$
1	$y = 2{,}8x^3 - 0{,}2x^2 + 6x + 352$	15
2	$y = 1{,}5x^3 - 0{,}4x^2 + 9x + 283$	30
3	$y = 3{,}2x^3 - 0{,}1x^2 + 7x + 427$	22
4	$y = 1{,}1x^3 - 0{,}7x^2 + 13x + 522$	45
5	$y = 20x - 0{,}05x^3$	10
6	$y = x^3 - 0{,}4x^2 + 96x$	15
7	$y = 3{,}4x^3 + 1{,}1x^2 - 7x + 284$	25
8	$y = \sqrt{x^2 - x + 7} - 1$	2
9	$y = 350x - 0{,}02x^3$	10
10	$y = 3{,}1x^3 - 0{,}4x^2 + 7x + 116$	25

5. Об’єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u = u(t)$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни при $t = t_0$ (табл. 1.6).

Таблиця 1.6 – Залежність об’єму виробництва продукції від часу

№ варіанта	$u = u(t)$	$t = t_0$
1	$u(t) = -1{,}8t^3 + 10t^2 + 3t + 650$	3
2	$u(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 8t + 2150$	12
3	$u(t) = \frac{9}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 4t + 238$	6

4	$u(t) = \frac{11}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t + 7560$	9
5	$u(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 17t + 6320$	12
6	$u(t) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 11t + 7310$	9
7	$u(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 22t + 9710$	9
8	$u(t) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 13t + 277$	0
9	$u(t) = \frac{58}{3}t^3 - t^2 + 11t + 975$	3
10	$u(t) = \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 5t + 1760$	6

6. Функція споживання деякої країни має вигляд $y = C(x)$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає $x = x_0$ млрд. грош. од. (табл. 1.7).

Таблиця 1.7 – Функція споживання деякої країни

№ варіанта	$y = C(x)$	$x = x_0$
1	$C(x) = 19 + 1{,}5x^3 + 0{,}38x^{\frac{5}{2}}$	225
2	$C(x) = 38 + 1{,}7x^2 + \frac{0{,}63}{\sqrt[3]{x^2}}$	125
3	$C(x) = 14 + 1{,}8x^3 + 0{,}75x^{\frac{2}{3}}$	27
4	$C(x) = 1000x - \frac{2}{3}x^3$	15
5	$C(x) = 19 + 1{,}4x^3 + \frac{0{,}84}{\sqrt[3]{x}}$	125

6	$C(x) = 81 + 1{,}3x^2 + \frac{0{,}42}{\sqrt{x^3}}$	64
7	$C(x) = 31 + 2{,}5x^3 + 0{,}18x\sqrt{x}$	81
8	$C(x) = 37 + 1{,}2x^2 + \frac{0{,}72}{\sqrt{x}}$	36
9	$C(x) = 33 + 2{,}1x^3 + 0{,}15x^{\frac{5}{3}}$	64
10	$C(x) = 47 + 1{,}3x^2 + \frac{0{,}36}{x\sqrt{x}}$	81

7. Відомі функції попиту q і пропозиції s, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції (табл. 1.8).

Таблиця 1.8 – Функції попиту та пропозиції

№ варіанта	q	s
1	$q = \frac{10p + 19}{p + 4}$	$s = p + 4$
2	$q = \frac{9p + 48}{p + 4}$	$s = p + 9$
3	$q = \frac{11p + 50}{p + 2}$	$s = p + 10$
4	$q = \frac{9p + 27}{p + 2}$	$s = p + 3$
5	$q = \frac{14p + 17}{p + 2}$	$s = p + 4$
6	$q = \frac{8p + 46}{p + 9}$	$s = p + 2$
7	$q = \frac{3p + 18}{p + 6}$	$s = p + 1$

8	$q = \dfrac{12p + 24}{p + 1}$	$s = p + 9$
9	$q = \dfrac{9p + 52}{p + 8}$	$s = p + 5$
10	$q = \dfrac{9p + 41}{p + 7}$	$s = p + 3$

8. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 та максимальний прибуток за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = p_0$ за одиницю товару і відома функція витрат $y = C(x)$ (табл. 1.9).

Таблиця 1.9 – Функція витрат та ціна реалізованого товару

№ варіанта	$y = C(x)$	$p = p_0$
1	$C(x) = 8 + 3x + x^3$	30
2	$C(x) = 10 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4}$	10,5
3	$C(x) = 13 + 2x + x^3$	14
4	$C(x) = 8 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^3}{8}$	6,5
5	$C(x) = 10 + x + \dfrac{1}{3}x\sqrt{x}$	8
6	$C(x) = 14 + 11x + 2x^3$	35
7	$C(x) = \dfrac{3}{4} + 7x + \dfrac{2}{3}x^3$	25
8	$C(x) = 35 + 4x + \dfrac{3}{2}x^2 + x^3$	64
9	$C(x) = 28 + 21x - \dfrac{5}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$	45
10	$C(x) = 68 + 7x + 2x^3$	31

9. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, при цьому функція витрат має вигляд $y = C(x)$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p = p_0$ (табл. 1.10). На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки при цьому збільшаться середні витрати?

Таблиця 1.10 – Функція витрат та ціна реалізованого товару

№ варіанта	$y = C(x)$	$p = p_0$
1	$C(x) = 45 + 14x + 5x^2$	94
2	$C(x) = 25 + 17x + x^2$	39
3	$C(x) = 24 + 9x + 6x^2$	81
4	$C(x) = 63 + 4x + 7x^2$	116
5	$C(x) = 98 + 11x + 2x^2$	47
6	$C(x) = 80 + 16x + 5x^2$	106
7	$C(x) = 25 + 19x + x^2$	35
8	$C(x) = 72 + 15x + 2x^2$	59
9	$C(x) = 128 + 25x + 2x^2$	81
10	$C(x) = 36 + 22x + 9x^2$	148

10. Визначити об’єм випуску продукції за перші t годин праці при продуктивності $f = f(t)$ (табл. 1.11).

Таблиця 1.11. – Функціональна залежність продуктивності праці

№ варіанта	$f = f(t)$	t
1	$f(t) = 32{,}47e^{-0{,}25t}$	4
2	$f(t) = -0{,}0042t^2 + 0{,}035t + 27{,}4$	5
3	$f(t) = 54{,}23e^{-\frac{t}{6}}$	6
4	$f(t) = -0{,}0031t^3 + 0{,}028t^2 + 35{,}48$	3
5	$f(t) = 73{,}15e^{-\frac{t}{7}}$	7
6	$f(t) = -0{,}00037t^2 + 0{,}074t + 17{,}88$	4
7	$f(t) = 17{,}88e^{-0{,}2t}$	5
8	$f(t) = -0{,}0054t^2 - 0{,}027t + 73{,}12$	2
9	$f(t) = 31{,}24e^{-0{,}2t}$	5
10	$f(t) = -0{,}0047t^2 + 0{,}012t + 71{,}12$	77

11. Знайти об’єм виробленої підприємством продукції за t_0 років, якщо функція Кобба-Дугласа $f(t) = a_0A^{\alpha}(t)L^{\beta}(t)K^{\gamma}(t)$ має вигляд (табл. 1.12).

Таблиця 1.12 - Величини затрат природних ресурсів, праці і капіталу

№	$A(t)$	$L(t)$	$K(t)$	a_0	α	β	γ	t_0
1	$e^{0{,}25t}$	$(t-1)^4$	$(3t-2)^3$	5	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	5
2	$e^{0{,}5t}$	$(2t+3)^3$	$(t-4)^4$	2	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	7
3	$e^{0{,}5t}$	$(5t+1)^3$	$(t-8)^2$	6	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	4

4	$e^{0,2t}$	$(6t+2)^3$	$(t+1)^4$	3	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	8
5	$e^{0,1t}$	$(5t-4)^4$	$(t+3)^2$	7	10	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	5
6	$e^{0,5t}$	$(t-5)^4$	$(t+2)^3$	9	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	6
7	$e^{0,1t}$	$(7t+1)^5$	$(t+4)^2$	4	10	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	7
8	$e^{0,25t}$	$(t+5)^5$	$(2t-5)^2$	9	4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	3
9	$e^{0,5t}$	$(5t-3)^4$	$(t+4)^2$	7	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	5
10	$e^{0,2t}$	$(t+6)^5$	$(3t+1)^2$	10	5	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	6

12. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд (табл. 1.13).

Таблиця 1.13 – Функції попиту та пропозиції

№ варіанта	Функції попиту	Функції пропозиції
1	$p = 180 - x^2$	$p = 25x + 30$
2	$p = 120 - x^2$	$p = 8x + 15$
3	$p = 380 - x^2$	$p = 31x + 20$
4	$p = 250 - x^2$	$p = 9x + 30$
5	$p = 400 - x^2$	$p = 18x + 340$
6	$p = 350 - x^2$	$p = 32x + 30$
7	$p = 340 - x^2$	$p = 5x + 40$
8	$p = 410 - x^2$	$p = 30x + 10$
9	$p = 190 - x^2$	$p = 18x + 15$
10	$p = 300 - x^2$	$p = 21x + 30$

13. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = y(x)$ (табл. 1.14), де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k

Таблиця 1.14 – Крива Лоренца

№	$y = y(x)$	№	$y = y(x)$
1	$y = \dfrac{x}{6 - 5x}$	6	$y = \dfrac{2x}{4 - 2x}$
2	$y = \dfrac{3x}{5 - 2x}$	7	$y = \dfrac{3x}{8 - 5x}$
3	$y = \dfrac{3x}{8 - 5x}$	8	$y = \dfrac{6x}{15 - 9x}$
4	$y = \dfrac{x}{8 - 7x}$	9	$y = \dfrac{2x}{7 - 5x}$
5	$y = \dfrac{2x}{9 - 7x}$	10	$y = \dfrac{3x}{9 - 6x}$

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТА

1. Підприємство виробляє три типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в чотирьох регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею B:

$$A = (130 \quad 225 \quad 480), \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 8 \\ 4 & 9 & 11 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти C - матрицю виручки по регіонах.

Розв'язання:

Матрицю виручки по регіонах обчислимо за формулою:

$$C = A \cdot B = (130 \quad 225 \quad 480) \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 8 \\ 4 & 9 & 11 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= (1040 + 1100 + 1440 \quad 910 + 2025 + 2400 \quad 520 + 2475 + 3360 \quad 1040 + 1650 + 2400) =$$

$$= (3580 \quad 5335 \quad 6355 \quad 5090).$$

З отриманого результату бачимо, що, наприклад, в першому регіоні виручка складає 3580, в другому – 5335, в третьому – 6355, а в четвертому - 5090 грошових одиниць.

2. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i–го товару на виробництво одиниці продукції j–го типу задані матрицею A. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X, а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 210 \\ 195 \\ 330 \end{pmatrix}, \quad P = (50 \quad 60 \quad 125 \quad 40).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

Розв'язання:

а) матриця повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період знаходиться за формулою $S = A \cdot X$:

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ 195 \\ 330 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 630 + 1560 + 1650 \\ 840 + 390 + 2310 \\ 1260 + 780 + 1650 \\ 420 + 1365 + 990 \end{pmatrix};$$

$$S = \begin{pmatrix} 3840 \\ 3540 \\ 3690 \\ 2775 \end{pmatrix}.$$

б) повну вартість усіх витрачених ресурсів зможемо знайти за формулою $C = P \cdot A \cdot X = P \cdot S$:

$$C = (50 \quad 60 \quad 125 \quad 40) \cdot \begin{pmatrix} 3840 \\ 3540 \\ 3690 \\ 2775 \end{pmatrix} =$$

$$= (192000 + 212400 + 461250 + 111000) = (976650).$$

Отже, повна вартість витрачених ресурсів складає 976650 грошових одиниць.

3. В таблиці наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 3.1 – Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях)

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,3	0,25	400
	Галузь 2	0,2	0,15	100

Знайти:

1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 5 %, а другої – на 10 %.

Розв'язання:

1) Запишемо матрицю коефіцієнтів прямих витрат A і вектор кінцевої продукції Y:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}25 \\ 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи є матриця A продуктивною. Всі елементи матриці A додатні, сума елементів в кожному стовпці не перевищує одиниці. Отже, матриця продуктивна.

Щоб знайти матрицю повних витрат $S = (E - A)^{-1}$, знайдемо спочатку матрицю $E - A$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}25 \\ 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}25 \\ -0{,}2 & 0{,}85 \end{pmatrix}.$$

Алгоритм знаходження оберненої матриці нам добре відомий:

$$det(E-A)=\begin{vmatrix} 0,7 & -0,25 \\ -0,2 & 0,85 \end{vmatrix}=0,595-0,05=0,545;$$

$$(E-A)^T=\begin{pmatrix} 0,7 & -0,2 \\ -0,25 & 0,85 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T=0,85; \quad A_{12}^T=0,25; \quad A_{21}^T=0,2; \quad A_{22}^T=0,7.$$

Остаточно маємо матрицю повних витрат

$$S=\frac{1}{0,545}\begin{pmatrix} 0,85 & 0,25 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1,56 & 0,46 \\ 0,37 & 1,28 \end{pmatrix}.$$

Вектор валового продукту X обчислимо за формулою $X=S\cdot Y$:

$$X=S\cdot Y=\begin{pmatrix} 1,56 & 0,46 \\ 0,37 & 1,28 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 400 \\ 100 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 624+46 \\ 148+128 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 670 \\ 176 \end{pmatrix},$$

Отже, валовий продукт першої галузі складає 670 одиниць, а другої – 176.

Міжгалузеві поставки зможемо обчислити за формулою $x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j$:

$$x_{11}=a_{11}\cdot x_1=0,3\cdot 670=201;$$

$$x_{12}=a_{12}\cdot x_2=0,25\cdot 176=44;$$

$$x_{21}=a_{21}\cdot x_1=0,2\cdot 670=134;$$

$$x_{22}=a_{22}\cdot x_2=0,15\cdot 176=26,4.$$

Обчислимо витрати продукції всіх галузей на виробництво:

- першої галузі

$$x_{11} + x_{21} = 201 + 134 = 335;$$

- другої галузі

$$x_{12} + x_{22} = 44 + 26{,}4 = 70{,}4.$$

Чиста продукція галузі дорівнює різниці між валовою продукцією цієї галузі і витратами продукції всіх галузей на виробництво цієї галузі:

- першої галузі: $670 - 335 = 335$;
- другої галузі: $176 - 70{,}4 = 105{,}6$.

Всі отримані результати зведемо в таблицю:

Таблиця 3.2 – Плановані об’єми валової продукції галузей, чиста продукцію галузей

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Галузь</th><th colspan="2">Споживання</th><th rowspan="2">Кінцева продукція</th><th rowspan="2">Валова продукція</th></tr>
<tr><th>Галузь 1</th><th>Галузь 2</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Виробництво</td><td>Галузь 1</td><td>201</td><td>44</td><td>400</td><td>670</td></tr>
<tr><td>Галузь2</td><td>134</td><td>26,4</td><td>100</td><td>176</td></tr>
<tr><td colspan="2">Чиста продукція</td><td>335</td><td>105,8</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Валова продукція</td><td>670</td><td>176</td><td></td><td></td></tr>
</table>

2) Вектор кінцевого споживання Y обчислимо з урахуванням того, що кінцеве споживання першої галузі збільшиться на 5 %, а другої – на 10 %:

$$Y = \begin{pmatrix} 400 \cdot 1{,}05 \\ 100 \cdot 1{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 420 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

Вектор валового випуску X, який при відомій матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y, знайдемо за формулою (1.32):

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1{,}56 & 0{,}46 \\ 0{,}37 & 1{,}28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 420 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 655{,}2 + 50{,}6 \\ 155{,}4 + 140{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 705{,}8 \\ 296{,}2 \end{pmatrix}$$

Отже, випуск в першій галузі треба збільшити до 705,8 умовних грошових одиниць, а в другий – до 296,2.

4. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 2{,}1x^3 + 0{,}4x^2 - 15x + 284$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їх значення при $x = 20$.

Розв'язання. Середні витрати визначаються за формулою

$$y_1 = \frac{C(x)}{x},$$

а граничні витрати як

$$y' = C'(x).$$

Знайдемо їх

$$y_1 = \frac{C(x)}{x} = \frac{2{,}1x^3 + 0{,}4x^2 - 15x + 284}{x} = 2{,}1x^2 + 0{,}4x - 15 + \frac{284}{x},$$

$$y' = C'(x) = 6{,}3x^2 + 0{,}8x^2 - 15;$$

і обчислимо їх значення $x = 20$:

$$y_1(20) = 2{,}1 \cdot 400 + 0{,}4 \cdot 20 - 15 + \frac{284}{20} =$$
$$= 840 + 8 - 15 + 14{,}2 = 847{,}2;$$
$$y'(20) = 6{,}3 \cdot 400 + 0{,}8 \cdot 20 - 15 = 2520 + 16 - 15 = 2521.$$

З отриманих результатів можемо зробити висновок, що на даному рівні виробництва (кількості продукції, що випускається) середні витрати на виробництво однієї одиниці продукції складають 847,2 грошових одиниць, а збільшення об'єму на одну одиницю продукції буде коштувати фірмі 2521 грошових одиниці.

5. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{7}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 8t + 2150$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни в другому кварталі $(t = 6)$.

Розв'язання. За визначенням:

- продуктивність праці – похідна від об'єму виробництва: $z(t) = u'(t)$;
- швидкість зміни продуктивності праці – похідна від продуктивності праці:$v_z = z'(t)$;
- темп зміни продуктивності праці – логарифмічна похідна від продуктивності праці:$T_z = \frac{z'(t)}{z(t)}$.

Знайдемо похідні:

$$z(t) = u'(t) = 7t^2 - 5t + 8;$$
$$v_z = z'(t) = 14t - 5;$$
$$T_z = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{14t-5}{7t^2-5t+8}.$$

Обчислимо їх значення в другому кварталі $(t = 6)$:

$z(6) = 7 \cdot 36 - 5 \cdot 6 + 8 = 230$ (од./міс.);
$v_z(6) = 14 \cdot 6 - 5 = 79$ (од./$міс.^2$);
$T_z(6) = \frac{79}{230}$ (од./міс.).

6. Функція споживання деякої країни має вигляд $C(x) = 27 + 1{,}7x + 0{,}8x^2\sqrt{x}$, де x - сукупний національний дохід (грош. од.). Знайти: а) граничну прихильність до споживання; б) граничну прихильність до збереження, якщо національний доход складає 25 млрд. грош. од.

*Розв'язання. Н*аціональний доход обчислюється за формулою $x = C(x) + S(x)$. Звідси функція збереження є

$$S(x) = x - C(x).$$

Знайдемо граничну прихильність до споживання

$$C'(x) = 1{,}7 + 0{,}8 \cdot \frac{5}{2} x\sqrt{x} = 1{,}7 + 0{,}2x\sqrt{x}.$$

та її значення

$$C'(25) = 1{,}7 + 0{,}2 \cdot 25\sqrt{25} = 26{,}7 \text{ (млрд. грош. од.).}$$

Гранична прихильність до збереження

$$S'(x) = 1 - C'(x) = 1 - 1{,}7 - 0{,}2x\sqrt{x} = -0{,}7 - 0{,}2x\sqrt{x},$$

а її значення

$$S'(25) = -0{,}7 - 0{,}2 \cdot 25 \cdot \sqrt{25} = -25{,}7 \text{ (млрд. грош.од.).}$$

7. Відомі функції попиту $q = \frac{11p+17}{p+1}$ і пропозиції $s = p + 7$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

Розв'язання.

а) Рівноважна ціна визначається з умови $q = s$, тобто

$$\frac{11p+17}{p+1} = p + 7;$$

$11p + 17 = p^2 + 8p + 7;$
$p^2 - 3p - 10 = 0;$
$p_1 = -2$ (не має сенсу);
$p_2 = 5.$
Отже, рівноважна ціна $p = 5$ (грош.од.).

б) Знайдемо еластичність за попитом

$$E_p(q) = \frac{p}{q} \cdot q_p' = \frac{p(p+1)}{11p+17} \cdot \frac{11(p+1) - (11p+17) \cdot 1}{(p+1)^2} = -\frac{6p}{(11p+17)(p+1)}$$

і за пропозицією

$E_p(s) = \frac{p}{s} \cdot s_p' = \frac{p}{p+7} \cdot 1 = \frac{p}{p+7}$.

Для рівноважної ціни $p = 5$:

$E_p(q)\big|_{p=5} = -\frac{30}{72 \cdot 6} = -\frac{5}{72} = -0{,}069;$

$E_p(s)\big|_{p=5} = \frac{5}{12} = 0{,}42.$

Враховуючи, що отримані значення еластичності (за абсолютним значенням) не перевищують одиниці, то попит і пропозиція даного товару при рівноважній (ринковій) ціні нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту і пропозиції.

8. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 та прибуток за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 52$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 12 + 4x + x^3$.

Розв'язання: Прибуток визначається як

$P(x) = D(x) - C(x) = 52x - 12 - 4x - x^3 = 48x - 12 - x^3$,

де $D(x) = p \cdot x = 52x$.

Оптимальне значення випуску – значення, при якому прибуток є найбільшим. Розв'яжемо задачу про найбільше значення функції. Знайдемо похідну:

$$P'(x) = 48 - 3x^2.$$

Розв'яжемо рівняння $P'(x) = 0$. Тобто $48 - 3x^2 = 0$. Критичні точки: $x_{1,2} = \pm 4$. За умовою задачи зрозуміло, що мають сенс лише додатні значення, отже $x_0 = 4$. В цій точці функція набуває максимуму (за результатами дослідження знаків похідної), тому оптимальне значення випуску дорівнює $x_0 = 4$.

Обчислимо максимальне значення прибутку – це величина прибутку при оптимальному значенні випуску:

$$P(4) = 48 \cdot 4 - 12 - 4^3 = 116 \text{ (грош. одиниць).}$$

9. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, при цьому функція витрат має вигляд $C(x) = 24 + 10x + 6x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p = 46$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки при цьому збільшаться середні витрати?

Розв'язання: функція середніх витрат виробництва має вигляд

$$A(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{24}{x} + 10 + 6x.$$

Знайдемо мінімальне значення цієї функції:

$$A'(x) = -\frac{24}{x^2} + 6; \qquad A'(x) = 0; \qquad \frac{-24+6x^2}{x^2} = 0;$$

$$x^2 = 4; \quad x = \pm 2.$$

За умовою задачі зрозуміло, що мають сенс лише додатні значення, отже $x_0 = 2$. Граничні витрати:

$$M(x) = C'(x) = 10 + 12x.$$

Відомо, що прибуток визначається як:

$$P(x) = D(x) - C(x) = 46x - C(x).$$

Продиференціюємо даний вираз:

$$P'(x) = 46 - C'(x) = 46 - M(x) = 46 - 10 - 12x = 36 - 12x.$$

Знайдемо критичну точку:

$$P'(x) = 0; \quad 36 - 12x = 0; \quad x = 3.$$

Отже, оптимальне значення кількості товару $x_{\text{опт.}} = 3$. З цього прямує, що необхідно збільшити виробництво на 1 одиницю ($\Delta x = x_{\text{опт.}} - x_0$).

З'ясуємо середні витрати виробництва

$$A(2) = \frac{24}{2} + 10 + 6 \cdot 2 = 34;$$

$$A(3) = \frac{24}{3} + 10 + 6 \cdot 3 = 40;$$

$$\Delta A = 40 - 34 = 6.$$

Отже, середні витрати зміняться на 6 грошових одиниць.

10. Визначити об'єм випуску продукції за перші дві години праці при продуктивності $f(t) = -0{,}0042t^2 + 0{,}022t + +11{,}5$, де t - час у годинах.

Розв'язання. Знайдемо об'єм $Q(t_1, t_2)$ продукції, виробленої за проміжок часу $[t_1, t_2]$ за формулою:

$$Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} (-0{,}0042t^2 + 0{,}022t + 11{,}5)dt =$$

$$= (-0{,}0014t^3 + 0{,}011t^2 + 11{,}5t)\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Обчислимо об'єм продукції, вироблений за перші дві години праці:

$$Q(0{,}2) = -0{,}0014 \cdot 2^3 + 0{,}011 \cdot 2^2 + 11{,}5 \cdot 2 =$$

$$= -0{,}0112 + 0{,}044 + 23 = 23{,}0328 \text{ (од.)}.$$

11. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 5 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0,5}$, $L(t) = (t-4)^3$, $K(t) = (t+2)^4$, $a_0 = 12$, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{1}{4}$.

Розв'язання. Нагадаємо, що об'єм продукції $Q(t_1, t_2)$, яка вироблена за проміжок часу $[t_1, t_2]$, обчислюється за формулою:

$$Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

На продуктивність виробництва продукції може впливати багато різних факторів. Можливість урахування цих факторів, пов'язана з використанням функцій ***Кобба-Дугласа***. В такому випадку функція $f(t)$ є добутком трьох множників:

$$f(t) = a_0 A^{\alpha}(t) L^{\beta}(t) K^{\gamma}(t),$$

де $A(t)$, $L(t)$, $K(t)$ - величини затрат природних ресурсів, праці і капіталу (відповідно), a_0, α, β, γ - коефіцієнти. Підставимо $A(t)$, $L(t)$, $K(t)$, коефіцієнти a_0, α, β, γ в формулу, маємо:

$$Q(0;5) = 12\int_0^5 e^t (t-4)(t+2)dt =$$

$$= 12\int_0^5 e^t(t^2 - 2t - 8)dt = \begin{bmatrix} u = t^2 - 2t - 8 \\ dv = e^t dt \\ du = (2t-2)dt \\ v = e^t \end{bmatrix} =$$

$$= 12\left(e^t(t^2 - 2t - 8)\Big|_0^5 - \int_0^5 e^t(2t-2)dt\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} u = 2t - 2 \\ dv = e^t dt \\ du = 2dt \\ v = e^t \end{bmatrix} = 12(e^5(25 - 10 - 8) + 8 -$$

$$-e^t(2t-2)\Big|_0^5 + 2\int_0^5 e^t dt\right) = 12(7e^5 + 8 -$$

$$-e^5(10-2)-2+2e^t\Big|_0^5\Big) = 12(6-e^5+2e^5-2) =$$

$$= 12(e^5+4).$$

12. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 380 - x^2, \quad p = 18x + 20.$$

Розв'язання. Знайдемо точку ринкової рівноваги (x_0, p_0) з розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} p = 380 - x^2 \\ p = 18x + 20 \end{cases}; \qquad \begin{aligned} &380 - x^2 = 18x + 20; \\ &x^2 + 18x - 360 = 0; \\ &\left[\begin{aligned} &x_1 = 12 \\ &x_2 = -30 \text{ (не має сенсу)} \end{aligned}\right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = 12; \quad p_0 = 380 - 12^2 = 380 - 144 = 236.$$

Отже, точка ринкової рівноваги $x_0 = 12$, $p_0 = 236$, а дохід від реалізації товару x_0 за рівноважною ціною дорівнює добутку $x_0 \cdot p_0 = 12 \cdot 236 = 2832$.

Знайдемо виграш користувачів (6.44):

$$C = \int_0^{12}(380 - x^2)dx - 12 \cdot 236 = \left(380x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{12} - 2832 =$$

$$= 4560 - 576 - 2832 = 1152 \text{ (грош. од.)}.$$

Знайдемо виграш постачальників (6.45):

$$P = 12 \cdot 236 - \int_0^{12}(18x + 20)dx = 2832 - (9x^2 + 20x)\Big|_0^{12} =$$

$$= 2832 - 1296 - 240 = 1296 \text{ (грош. од.)}.$$

13. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = \frac{x}{6-5x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k.

Розв'язання. Коефіцієнт Джині k дорівнює відношенню площі фігури OAB і площі трикутника OAC (6.43):

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}.$$

Площа трикутника дорівнює

$$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5 \text{ (од}^2\text{)}.$$

а площу фігури OAB знайдемо за формулою (6.30):

$$S_{OAB} = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]dx = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{6-5x}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{5}\frac{(6-5x)-6}{6-5x}\right) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{5} - \frac{6}{5}\frac{1}{6-5x}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{5}x + \frac{6}{25}\ln|6-5x|\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{6}{25}\ln 1 - \frac{6}{25}\ln 6 =$$

$$= \frac{7}{10} - \frac{6}{25}\ln 6 \approx 0{,}27 \text{ (од}^2\text{)}.$$

Отже, коефіцієнт Джині дорівнює

$$k = \frac{0{,}27}{0{,}5} = 0{,}54.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Коваленко Л. Б. Вища математика для менеджерів : навч. посібник / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 341 с.
2. Коваленко Л. Б. Вища математика для менеджерів : навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 291 с.
3. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики для менеджерів : навч. посібник / Л. Б. Коваленко. – Харків : ХНАМГ, 2010. – 424 с.
4. Коваленко Л. Б. Методичні рекомендації та контрольні роботи з дисципліни «Вища математика» [для студентів 1 курсу заочної форми навчання спеціальностей 073 – Менеджмент, 241 – Готельно-ресторанна справа, 242 – Туризм] / Л. Б. Коваленко, Г. А. Кузнецова, С. М. Мордовцев, А. В. Якунін – Харків : ХНУМГ імені О. М. Бекетова, 2019. – 155 с.
5. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики для менеджерів : навч. посібник, видання 2-ге, доповнене, перероблене / Л. Б. Коваленко – Харків : ХНУМГ імені О. М. Бекетова, 2020. – 471 с.
6. Высшая математика для экономистов / Под редакцией Н.Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2007. – 479 с.
7. Ганич Д. І. Російсько-український, українсько-російський словник / Д. І. Ганич, И. С. Олійник. – Київ: А.С.К., 1996. – 550 с.

ДОДАТОК

Приклад оформлення титульного аркуша

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНЕ ЗАВДАННЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Виконан: студент ___ курсу
факультету ______
групи ___________
____
(П. І. Б.)

Перевірив: ___________________

Виробничо-практичне видання

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНЕ ЗАВДАННЯ
з дисципліни
«ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА (ВИЩА МАТЕМАТИКА)»

(для студентів-бакалаврів денної форми навчання
спеціальності 073 – Менеджмент)

Укладач: **КОВАЛЕНКО** Людмила Борисівна

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
За авторською редакцією
Комп’ютерне верстання *Л. Б. Коваленко*

План 2020, поз. 123 М
Підп. до друку 03.08.2020. Формат 60×84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 2,0
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.