

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

О. О. Чупринін, В. О. Пушня

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 1–3 курсів денної і заочної форм навчання за спеціальностями 275 – Транспортні технології (за видами) та 206 – Садово-паркове господарство)

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2020

Чупринін О. О. Технічна механіка: конспект лекцій для студентів 1–3 курсів денної і заочної форм навчання за спеціальностями 275 – Транспортні технології (за видами) та 206 – Садово-паркове господарство / О. О. Чупринін, В. О. Пушня ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 81 с.

Автори:

канд. техн. наук, доц. О. О. Чупринін,
канд. техн. наук, доц. В. О. Пушня

Рецензент:

Н. В. Серeda, кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної і будівельної механіки Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

*Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол № 1 від 26.08.2020.*

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1 СТАТИКА	6
1.1 Головні поняття	6
1.2 Методика розв'язання задач на рівновагу системи тіл	10
2 КІНЕМАТИКА	15
2.1 Головні поняття	15
2.2 Кінематика точки	15
2.3 Кінематика твердого тіла	18
2.4 Передача обертального руху	20
3 ДИНАМІКА	23
3.1 Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки	23
3.2 Дві задачі динаміки	24
3.3 Прямолінійні коливання матеріальної точки	24
3.4 Динаміка механічної системи і твердого тіла	26
3.5 Диференціальне рівняння обертання твердого тіла	27
4 ОСНОВІ РОЗРАХУНКІВ НА МІЦНІСТЬ	28
4.1 Головні гіпотези	28
4.2 Класифікація елементів конструкцій	28
4.3 Зовнішні навантаження	29
4.4 Внутрішні зусилля	29
4.5 Напруження	31
5 ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ	33
5.1 Відомості про будівельні матеріали	33
5.2 Експериментальні дослідження властивостей матеріалів	34
5.3 Коефіцієнт поперечної деформації	37
5.4 Методи розрахунків конструкцій на міцність	38
6 РОЗТЯГ І СТИСК	41
6.1 Поздовжня сила	41
6.2 Напруження в стержнях при розтягу-стиску	42
6.3 Деформації і переміщення	45
7 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ	48
7.1 Площа перерізу	48
7.2 Статичні моменти перерізу	48
7.3 Моменти інерції перерізу	50
8 ЗГИН БАЛОК	55
8.1 Внутрішні зусилля при згині	56
8.2 Напруження і деформації при згині	62
8.3 Внутрішні зусилля в рамах	69

9 ЗСУВ І КРУЧЕННЯ	71
9.1 Чистий зсув	71
9.2 Розрахунок на зріз	71
9.3 Кручення стержнів із круглим поперечним перерізом	72
9.4 Внутрішні зусилля при крученні. Крутний момент	73
9.5 Напруження і деформації при крученні	74
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	80

ВСТУП

Різноманітні конструкції, машини й механізми використовуються в техніки. Здебільшого вони складаються з аналогічних деталей і вузлів. Звідси випливає, що використовуються ті самі методи аналізу, розрахунку й проектування їх. Рішення цих задач розглядає «Технічна механіка».

У цілому курс технічної механіки має метою дати студентам загально технічну підготовку, тобто закласти фундамент для успішного навчання й подальшої праці.

Технічна механіка вивчає інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість елементів конструкцій та споруд, їх взаємодію між собою та іншими конструкціями. А також стан рівновагі та законі руху конструкцій та їх елементів.

Розрахунки на міцність полягають у визначенні, чи буде конструкція протистояти зовнішнім впливам, чи зруйнується під дією цих навантажень.

Метою розрахунків на жорсткість є визначення таких розмірів елементів конструкцій, при яких зміна розмірів і форми не перевищує заданих величин, що визначаються з умов експлуатації.

Для того, щоб конструкція цілком відповідала вимогам міцності та жорсткості, а отже була надійна в експлуатації, треба надати її елементам найбільш раціональної форми і, знаючи властивості матеріалів, з яких вона виготовляється, визначити відповідні розміри залежно від навантаження та його характеру. При проведенні розрахунків необхідно сполучити розглянуті вище характеристики з дешевиною, що є наслідком економії матеріалу.

1 СТАТИКА

1.1 Головні поняття

Абсолютно тверде тіло – матеріальне тіло, в якому відстань між будь-якими двома точками не змінюється.

Матеріальна точка – найпростіша модель матеріального тіла, розмірами якого при умовах даної задачі можна знехтувати.

Вільне тіло – це таке тіло, на переміщення якого не накладені обмеження.

Сила – це величина, що є мірою механічної взаємодії двох тіл. Сила – векторна величина, яка визначається модулем, лінією дії, напрямком дії та точкою прикладення.

Лінія дії сили – лінія уздовж якої напрямлена сила.

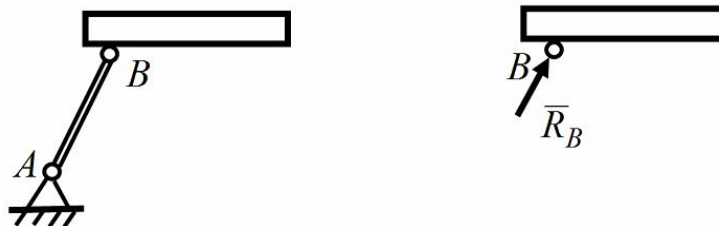
Зрівноважена система сил – система сил, під дією якої тверде тіло знаходиться у стані рівноваги.

В'язі – це тіла, що обмежують рух даного тіла.

Реакція в'язі – це сила, з якою в'язь діє на тіло, рух якого вона обмежує.

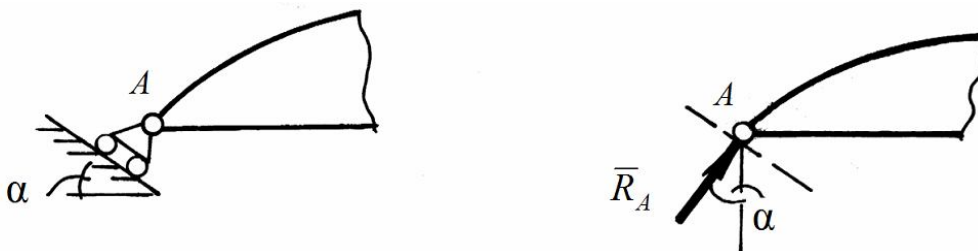
Розглянемо види в'язей і напрям їх реакції:

1. Ідеальний стержень



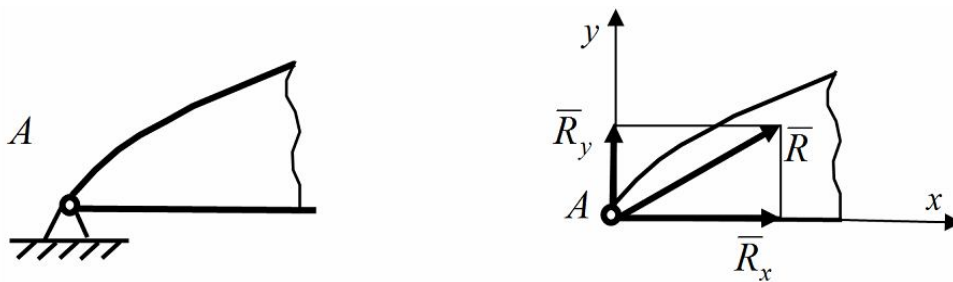
Так називається тонкий невагомий стержень, закріплений двома шарнірами на його кінцях. Такий стержень працює тільки на розтяг або на стиск, якщо в проміжних точках на нього не діють ніякі сили. Реакція ідеального стержня напрямлена по осі стержня.

2. Рухомий шарнір



Реакція такої в'язі спрямована перпендикулярно до опорних площин, на яких знаходяться котки.

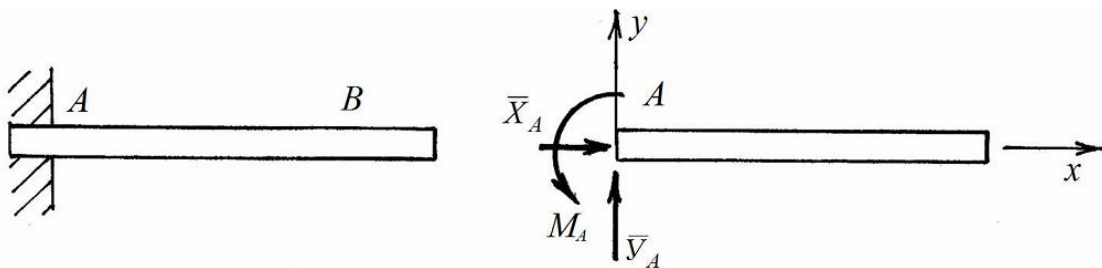
3. Нерухомий шарнір



Реакція нерухомого шарніра може мати довільний напрям залежно від сил, прикладених до тіла. Тому реакцію \bar{R} нерухомого шарніра показують у вигляді двох взаємно перпендикулярних складових, напрямлених звичайно вздовж координатних осей:

$$\bar{R} = \bar{R}_x + \bar{R}_y; R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

4. Жорстке зацмлення (нерухоме закріплення)



Балка AB одним своїм кінцем жорстко закріплена в стіні, а другий її кінець служить опорою для конструкції. Якщо на балку діють сили, то в закріпленні виникають реакції, що складаються із сили \bar{R}_A яку зображують у вигляді двох взаємно перпендикулярних складових $\bar{R}_A = \bar{X}_A + \bar{Y}_A$ і пари сил з моментом M_A .

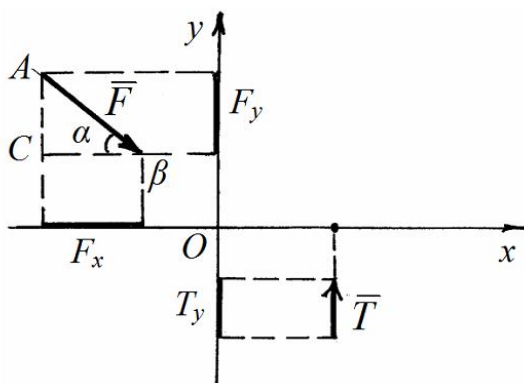


Рисунок 1.1

Проекція сили на вісь – алгебраїчна величина, що дорівнює довжині відрізка між проєкціями початку і кінця сили на цю вісь. Проекція має знак «+», якщо вектор сили нахилений у бік додатного напрямку осі, і знак «-» – якщо в бік від'ємного напрямку.

Величина проєкції сили визначається розв'язанням трикутника ABC , який утворюється початковою силою і лініями, паралельними осям координат (рис. 1.1).

Якщо сила перпендикулярна до осі, то її проекція на цю вісь дорівнює нулю.

$$\begin{aligned} \text{Тому } F_x &= F \cdot \cos \alpha, & F_y &= -F \cdot \sin \alpha, \\ T_x &= 0, & T_y &= T. \end{aligned}$$

Якщо сила знаходиться у просторі, то її проекції визначаються так: $F_x = F_{xy} \cdot \cos \beta = F \cos \alpha \cos \beta$,
 $F_y = F_{xy} \cdot \sin \beta = F \cos \alpha \sin \beta$,
 $F_z = F \sin \alpha$ (рис. 1.2).

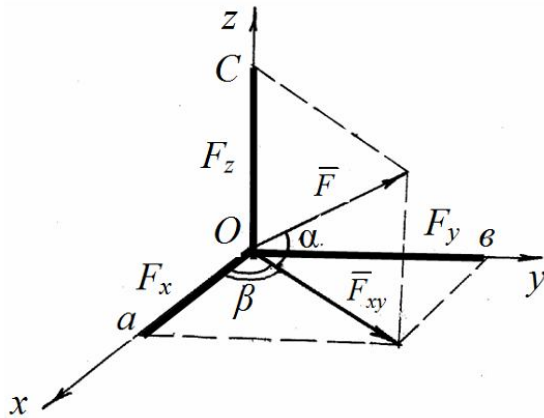
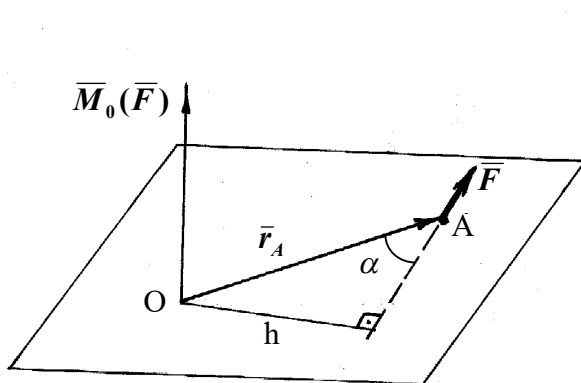


Рисунок 1.2

Момент сили.



Плечем h сили \vec{F} відносно точки O називається довжина перпендикуляру, проведеного з точки до лінії дії сили (рис. 1.3).

Модуль моменту
 $M_0(\vec{F}) = F \cdot r_A \cdot \sin \alpha = F \cdot h$.

Рисунок 1.3

Правило визначення алгебраїчного моменту сили \vec{F} відносно точки (рис. 1.4):

1. Провести лінію дії сили (пряма DE).
2. З вибраної точки O провести перпендикуляр на лінію дії сили (його довжина h – плече сили).
3. Скласти добуток модуля сили на плече ($F \cdot h$).

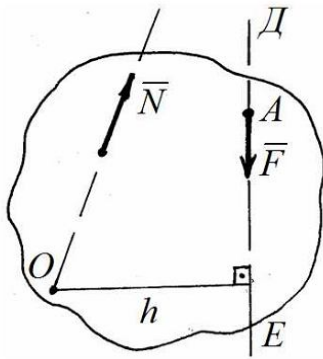


Рисунок 1.4

4. Взяти знак «+», якщо сила прагне обернути плече відносно точки проти руху годинникової стрілки, і знак «-» – якщо за стрілкою годинника: $M_0(\bar{F}) = \pm F \cdot h$.

Алгебраїчний момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через цю точку. Тоді плече $h=0$, а момент $M_0(\bar{N}) = F \cdot 0 = 0$.

Моментом сили відносно осі z називається проекція на цю вісь вектора моменту сили відносно точки, що лежить на осі:

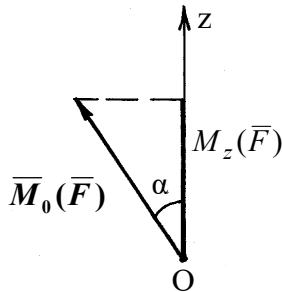


Рисунок 1.5

$$M_z(F) = [M_0(F)]_z = M_0(F) \cdot \cos \alpha.$$

Момент сили відносно осі характеризує обертальну дію сили навколо даної осі (рис. 1.5).

Правило визначення моменту сили \bar{F} відносно осі z (рис. 1.6):

1. Провести площину, перпендикулярну до осі z і знайти точку O перетину осі з площиною.

2. Провести площину, перпендикулярну до осі z і знайти точку O перетину осі з площиною.

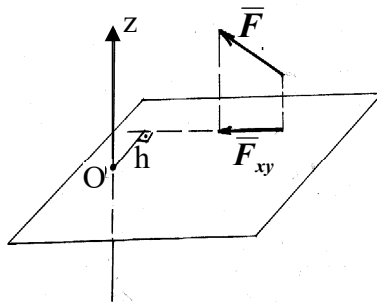


Рисунок 1.6

3. Спроекувати силу на проведену площину (вектор \bar{F}_{xy} – проекція сили \bar{F} на площину).

4. Знайти момент отриманої сили \bar{F}_{xy} відносно точки перетину осі з площиною O_{xy} : $M_0(\bar{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h$. Взяти знак «+», якщо з додатного кінця осі z видно, що проекція сили \bar{F}_{xy} прагне обернути площину навколо осі проти руху годинникової стрілки, і знак «-» – якщо за стрілкою годинника.

5. Момент сили \vec{F} відносно осі z визначити як

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h.$$

Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо:

- сила паралельна осі (в цьому випадку проекція сили на площину $F_{xy} = 0$);
- лінія дії сили перетинає вісь (при цьому плече $h = 0$).

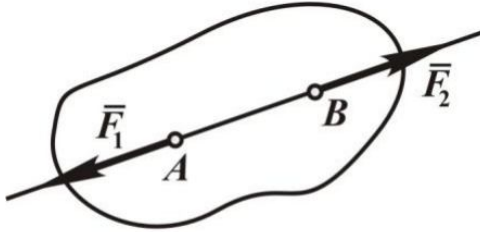


Рисунок 1.7

Дві сили, що діють на вільне абсолютно тверде тіло, зрівноважені тоді і тільки тоді, коли вони рівні за величиною, протилежні за напрямом і діють уздовж однієї прямої: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Приєднання і відкидання взаємно зрівноваженої системи не порушує рівновагу абсолютно твердого тіла (рис. 1.7).

Дія сили на абсолютно тверде тіло не змінюється, якщо перенести силу уздовж лінії дії в іншу точку тіла.

Система двох сил, прикладених в одній точці під деяким кутом одна до одної, має рівнодійну, яка за своєю величиною і напрямом дорівнює діагоналі паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах.

Сили взаємодії двох тіл завжди рівні за величиною і діють по одній прямій у протилежних напрямках.

Невільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо в'язі замінити їх реакціями.

Принцип затвердіння: рівновага zdeформованого тіла не порушиться, якщо тіло вважати абсолютно твердим.

1.2 Методика розв'язання задач на рівновагу системи тіл

Якщо конструкція складається з кількох твердих тіл, з'єднаних між собою за допомогою в'язів (складена конструкція), то можна розв'язати задачу одним з двох способів:

- розглянути рівновагу всієї конструкції і додатково рівновагу одного або кількох окремих твердих тіл, що складають конструкцію;
- початкову конструкцію відразу розчленити на окремі тверді тіла і розглянути рівновагу кожного з них окремо.

Теорема про рівнодійну системи збіжних сил:

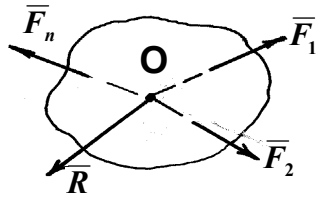


Рисунок 1.8

Система збіжних сил має рівнодійну, що дорівнює геометричній (векторній) сумі цих сил і прикладена в точці перетину їх ліній дій (рис. 1.8).

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i.$$

Головний вектор системи сил – вектор \bar{F} , який дорівнює геометричній сумі всіх сил системи:

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i. \quad (1.1)$$

Величина головного вектора визначається за формулою

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

де F_x, F_y, F_z – проєкції головного вектора на осі координат:

$$F_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad F_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad F_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}.$$

Напрямок головного вектора визначається напрямними косинусами:

$$\cos(\widehat{x, \bar{F}}) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(\widehat{y, \bar{F}}) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(\widehat{z, \bar{F}}) = \frac{F_z}{F}.$$

Головний момент системи сил відносно точки O – вектор \bar{M}_0 , який дорівнює геометричній сумі моментів сил системи відносно тієї ж точки:

Величина головного моменту M_0 відносно деякого центра зведення O дорівнює:

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}, \quad (1.2)$$

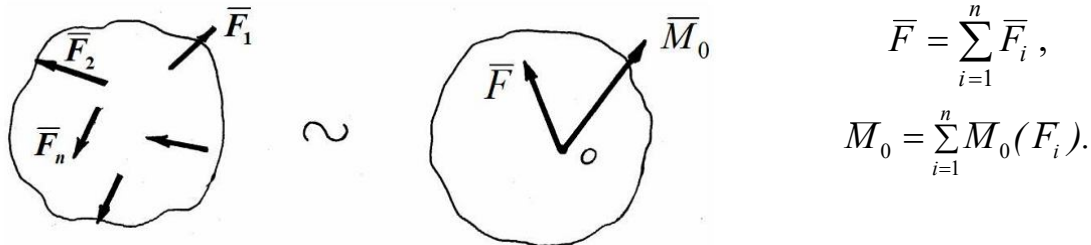
де M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} – проєкції головного моменту на осі координат, рівні алгебраїчним суммам моментів усіх сил відносно осей x, y, z , що проходять через центр зведення O :

$$M_{0x} = \sum_{i=1}^n M_x(\bar{F}_i); \quad M_{0y} = \sum_{i=1}^n M_y(\bar{F}_i); \quad M_{0z} = \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i).$$

Напрямок головного моменту \bar{M}_0 визначається за формулами

$$\cos(\widehat{x, \bar{M}_0}) = \frac{M_{0x}}{M_0}; \quad \cos(\widehat{y, \bar{M}_0}) = \frac{M_{0y}}{M_0}; \quad \cos(\widehat{z, \bar{M}_0}) = \frac{M_{0z}}{M_0}.$$

Теорема про зведення довільної системи сил (основна теорема статички): Довільну систему сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, можна звести: до сили \bar{F} , яка дорівнює головному вектору цієї системи сил і прикладена у довільному центрі зведення O , і до пари сил, момент якої \bar{M}_0 дорівнює головному моменту системи сил відносно центра зведення (рис. 1.9):



$$\bar{F} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i,$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^n M_0(F_i).$$

Рисунок 1.9

Система збіжних сил – це така система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці. Тут точка O – точка збігу сил.

Умови рівноваги системи збіжних сил:

Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна системи сил дорівнювала нулю (геометричні умови):

$$\bar{R} = 0, \tag{1.3}$$

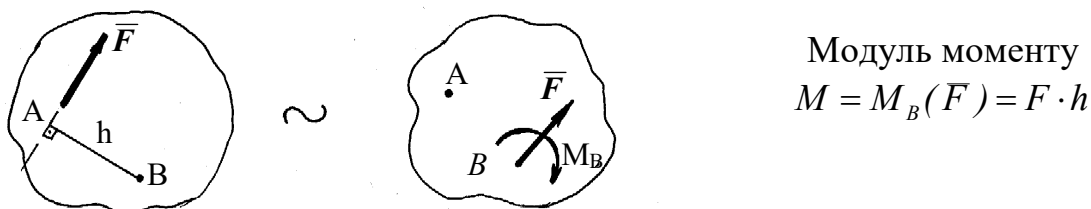
або сума проєкцій цих сил на осі координат дорівнювала нулю (аналітичні умови):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0.$$

Якщо всі сили системи збіжних сил розташовані в площині, наприклад XOY , то для їх рівноваги повинно бути

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0.$$

Не змінюючи механічного стану абсолютно твердого тіла, силу можна перенести паралельно її початковому напрямку в іншу довільну точку тіла, додаючи при цьому пару сил, момент M якої дорівнює моменту початкової сили відносно точки перенесення (рис. 1.10):



Модуль моменту

$$M = M_B(F) = F \cdot h$$

Рисунок 1.10

Довільна просторова система сил.

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи дорівнювали нулю (геометричні умови):

$$\bar{F} = 0; \quad \bar{M}_0 = 0, \quad (1.4)$$

або суми проекцій усіх сил на кожен з трьох координатних осей і суми їх моментів відносно цих осей дорівнювали нулю (аналітичні умови):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0; & \sum_{i=1}^n M_x(F_i) &= 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} &= 0; & \sum_{i=1}^n M_y(F_i) &= 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} &= 0; & \sum_{i=1}^n M_z(F_i) &= 0. \end{aligned}$$

Довільна плоска система сил.

Плоска система сил – це така система сил, лінії дій яких розміщені в одній площині (рис. 1.11).

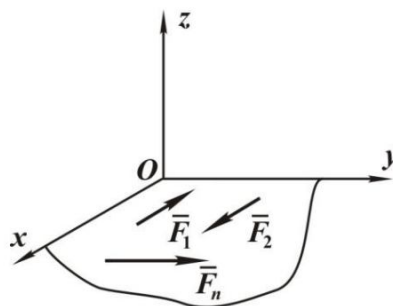


Рисунок 1.11

Ця система сил зводиться відносно центра зведення до сили \bar{F} , яка дорівнює головному вектору системи сил і прикладена у довільному центрі зведення, і до пари сил, момент якої \bar{M}_0 дорівнює головному моменту системи відносно центра O .

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i, \quad \bar{M}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{M}_0(F_i).$$

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи дорівнювали нулю (геометричні умови):

$$\bar{F} = 0; \quad \bar{M}_0 = 0,$$

або алгебраїчна сума проекцій усіх сил на дві взаємно перпендикулярні осі і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки на площині дорівнювали нулю (аналітичні умови):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_0(\bar{F}_i) = 0.$$

Відзначимо, що кількість рівнянь рівноваги плоскої системи сил у загальному випадку дорівнює трьом. Ці рівняння можна подати ще у двох формах, а саме:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0.$$

(при цьому вісь Ox не повинна бути перпендикулярною до прямої AB) або

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = 0$$

(при цьому точки A , B і C не повинні лежати на одній прямій).

Плоска система паралельних сил

Система паралельних сил – це така система сил, лінії дії яких паралельні між собою.

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій усіх сил на вісь, паралельну силам, і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки на площині дорівнювали нулю:

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_0(\vec{F}_i) = 0, \quad (1.5)$$

(якщо всі сили паралельні до осі Oy).

2 КІНЕМАТИКА

2.1 Головні поняття

Механічний рух – це зміна зі спливанням часу положення одного тіла відносно іншого (відносно тіла відліку).

Система відліку – сукупність системи координат, яка жорстко зв'язана з тілом відліку, і годинника, за яким відлічується час.

Основна задача кінематики – за законом руху даного тіла визначити кінематичні характеристики цього руху, тобто траєкторії різних точок тіла, їх швидкості та прискорення.

2.2 Кінематика точки

Траєкторія точки – неперервна лінія, яку описує рухома точка відносно даної системи відліку.

Для задання руху точки і визначення її кінематичних характеристик можна застосувати один з трьох способів: векторний, координатний та натуральний.

Векторний спосіб

В даному випадку $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – закон руху (рівняння руху точки у векторній формі), де \vec{r} – радіус-вектор точки (вектор, проведений із нерухомої точки O до розглядуваної, рис. 2.1). Швидкість точки – векторна величина, яка визначається:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (2.1)$$

- 1) дорівнює першій похідній радіуса-вектора точки за часом;
- 2) напрямлена по дотичній до траєкторії точки у бік її руху;
- 3) характеризує бистроту зміни положення точки за часом;

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad (2.2)$$

або $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$ – прискорення точки – векторна величина, яка:

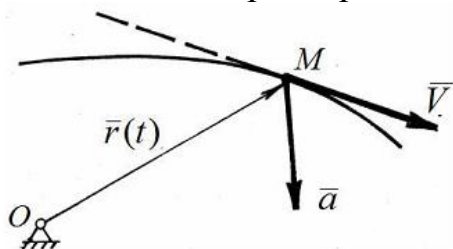


Рисунок 2.1

- 1) дорівнює першій (другій) похідній швидкості (радіуса-вектора) точки за часом;
- 2) напрямлена у бік угнутості траєкторії точки;
- 3) характеризує бистроту зміни швидкості точки за часом.

Координатний спосіб.

При даному способі задання руху $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$ – закон руху (рівняння руху точки у координатній формі), де x, y, z – декартові координати точки;

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \text{ – швидкість точки,}$$

де $\vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z$ – координатні складові швидкості точки; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти осей координат.

Модуль (величина) швидкості:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (2.3)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \text{ – проекції вектора швидкості}$$

на осі координат;

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \text{ – прискорення точки,}$$

де $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ – координатні складові прискорення точки.

Модуль (величина) прискорення точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.4)$$

$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$; $a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$; $a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$ – проекції вектора прискорення на осі координат.

У випадку плоскої траєкторії рисунок може бути, наприклад, як зображено на рисунку 2.2:

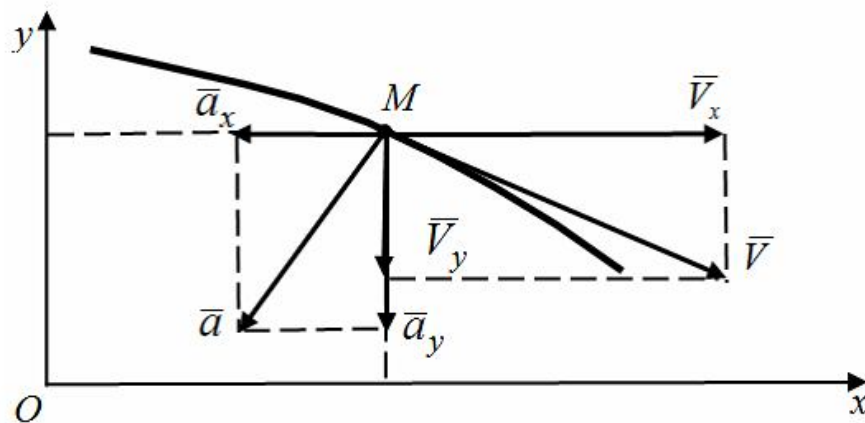
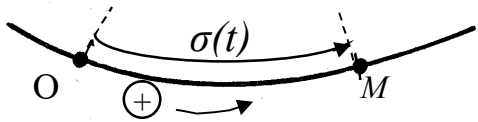


Рисунок 2.2

Натуральний спосіб.

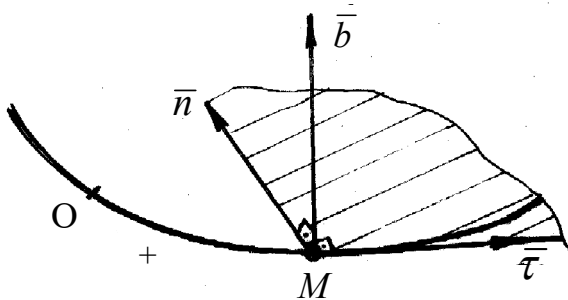
При натуральному способі задання руху відомі:

- траєкторія руху точки;
- початок і напрямок відліку руху точки;
- $\sigma = \sigma(t)$ – закон руху (рівняння руху точки в натуральній формі);



де σ – дугова координата (криволінійна координата, яка відлічується уздовж траєкторії).

При натуральному способі застосовується натуральна система координат: вісь *дотичної* τ – напрямлена по дотичній до траєкторії у даній точці в бік додатного напрямку відліку дугової координати; вісь *головної нормалі* n лежить у стичній площині і напрямлена перпендикулярно до дотичної у бік угнутості траєкторії; вісь *бінормалі* b – доповнює систему координат



до просторової, тобто перпендикулярна площині $\tau \wedge n$, так що її орт дорівнює $\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}$, де $\bar{\tau}, \bar{n}$ – орти дотичної та головної нормалі;
 $\bar{v} = \bar{v}_\tau = v_\tau \cdot \bar{\tau}$ – швидкість точки;

\bar{v}_τ – складова швидкості точки уздовж дотичної (завжди збігається з вектором швидкості);

$v_\tau = \dot{\sigma}$ – проекція швидкості \bar{v} точки на вісь дотичної;

$v = |v_\tau|$ – модуль (величина) швидкості;

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n = \dot{a}_\tau \cdot \bar{\tau} + a_n \cdot \bar{n} \text{ – прискорення точки,}$$

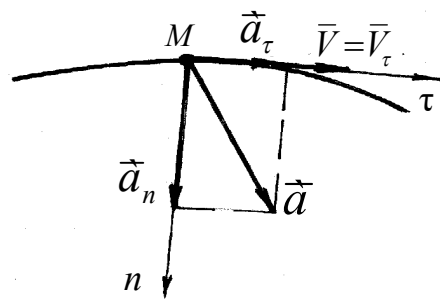
де \bar{a}_τ, \bar{a}_n – складові прискорення точки уздовж осей τ і n ;

$a_\tau = \dot{v}_\tau = \ddot{\sigma}$ – проекція прискорення точки на вісь дотичної (називається *дотичним прискоренням*), характеризує бистроту зміни модуля швидкості точки за часом;

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \text{ – проекція прискорення точки на вісь головної нормалі,}$$

де ρ – радіус кривизни траєкторії у даній точці (називається *нормальним прискоренням*) характеризує бистроту зміни напрямку вектора швидкості точки за часом;

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \text{ – модуль (величина) прискорення.}$$



Зв'язок між натуральним і координатним способами задання руху:

$$\dot{a}_\tau = \frac{V_x a_\delta + V_y a_y + V_z a_z}{V}; \quad (2.5)$$

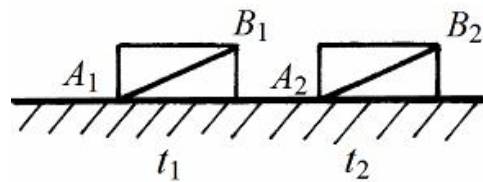
$$\dot{a}_n = \sqrt{\frac{(V_x a_y - V_y a_x)^2 + (V_z a_x - V_x a_z)^2 + (V_y a_z - V_z a_y)^2}{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}; \quad (2.6)$$

$$\rho = \frac{\bar{V}^2}{a_n} = \frac{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}{a_n}. \quad (2.6)$$

2.3 Кінематика твердого тіла

Поступальний рух твердого тіла.

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається паралельною самій собі.



Наприклад, коли тіло ковзає по прямолінійній поверхні, траєкторії точок – прямі лінії.

Теорема про траєкторії, швидкості й прискорення точок твердого тіла при поступальному русі:

Тому поступальний рух твердого тіла можна визначити, вивчивши рух тільки однієї його точки (здебільшого це центр мас).

Обертання твердого тіла.

Обертанням навколо нерухомої осі називається такий рух твердого тіла, при якому будь-які дві точки цього тіла залишаються під час руху нерухожими (рис. 2.3).

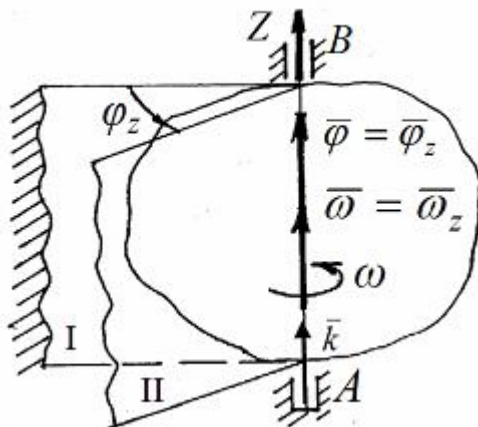


Рисунок 2.3

Пряма, що проходить через ці нерухомі точки, називається *віссю обертання*.

На рисунку:

I – нерухома площина,

II – площина, яка жорстко скріплена з тілом і обертається разом з ним.

Двогранний кут між площинами I і II – φ_z – називається *кутом повороту* тіла. $\varphi_z = \varphi(t)$ закон обертання (рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої осі z). Вимірюється кут у радіанах: $[\varphi] = \text{рад}$.

$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$ – вектор кутової швидкості, напрямлений уздовж осі обертання z у той бік, звідки обертання тіла видно проти стрілки годинника, характеризує швидкість зміни кута повороту тіла (на рисунках його часто зображують у вигляді стрілки, яка показує напрям обертання);

$\vec{\omega} = \omega_z \cdot \vec{k}$, де \vec{k} – орт осі z ;

$\omega_z = \dot{\varphi}_z$ – проекція кутової швидкості на вісь обертання z ;

$\omega = |\omega_z|$ – модуль (величина) кутової швидкості.

Кутова швидкість вимірюється у радіанах за секунду: $[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}$.

$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}}$ – вектор кутового прискорення, напрямлений уздовж осі обертання, характеризує швидкість зміни кутової швидкості за часом;

$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_z \cdot \vec{k}$,

$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}_z$ – проекція кутового прискорення на вісь обертання;

$\varepsilon = |\varepsilon_z|$ – модуль (величина) кутового прискорення.

Кутове прискорення вимірюється у радіанах за секунду в квадраті: $[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = \text{с}^{-2}$.

Плоскопаралельний рух твердого тіла.

Плоскопаралельним називають такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла рухаються у площинах, паралельних деякій нерухомій площині. Вивчення плоскопаралельного руху можна звести до вивчення руху плоскої фігури в її площині, або відрізка прямої цієї фігури. Положення фігури в даний момент часу визначається координатами довільної її точки A , яку називають полюсом, і кутом φ повороту фігури навколо полюса (рис. 2.4).

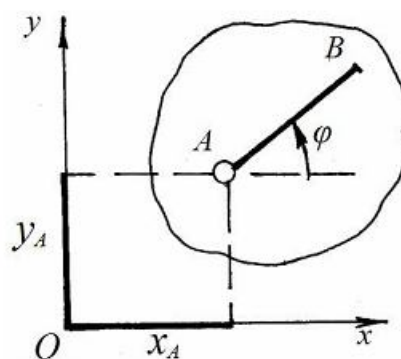


Рисунок 2.4

Рівняння руху плоскої фігури виглядають так:

$$x_A = f_1(t); \quad y_A = f_2(t); \quad \varphi = \varphi(t)$$

де A – точка, яку обрано як полюс.

Перші два рівняння характеризують поступальний рух фігури, при якому всі точки фігури рухаються так само, як і полюс, а третє – обертальний рух навколо полюса.

Кутова швидкість і кутове прискорення обертального руху фігури не залежать від вибору полюса.

Теорема про швидкості точок плоскої фігури:

Лінійна швидкість будь-якої точки М фігури при її плоскому русі дорівнює геометричній сумі швидкості \bar{v}_A полюса А і швидкості \bar{v}_{MA} точки М в її обертальному русі навколо полюса:

$$V_M = V_A + V_{MA}.$$

При цьому $V_{MA} = \omega \cdot MA$,

де ω – кутова швидкість фігури; а швидкість $V_{MA} \perp MA$.

Теорема про проекції швидкостей двох точок плоскої фігури: При плоскому русі фігури проекції швидкостей кінців А і В відрізка АВ на його напрям рівні між собою (рис. 2.4):

$$\text{Пр}_{AB}(v_A) = \text{Пр}_{AB}(v_B),$$

$$\text{або } v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta,$$

де α і β – кути між \bar{v}_A і \bar{v}_B і напрямом відрізка АВ відповідно.

Плоский рух тіла у даний момент часу можна розглядати як обертальний рух навколо миттєвого центра обертання, або миттєвого центра швидкостей (МЦШ).

Миттєвий центр швидкостей – це точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

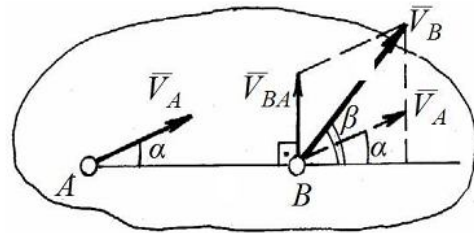


Рисунок 2.5

2.4 Передача обертального руху

Перетворення обертальних рухів широко розповсюджене в техніці й виконується за допомогою зубчастих, пасових, ланцюгових, фрикційних або других передач. Якщо осі передачі паралельні чи перетинаються, то обертання можна передати за допомогою зубчастих, пасових або фрикційних передач. При цьому зчеплення може бути як зовнішнім, так і внутрішнім. При передачі обертання від одного тіла до іншого перше тіло називають ведучим або провідним, а друге – веденим. Основою для кінематичного розрахунку цих передач (рис. 2.6) є припущення, що в системі немає ковзання, зазорів між зубцями коліс, а паси, ланцюги тощо не деформуються, тобто, швидкості на ободах коліс, що сполучаються, однакові.

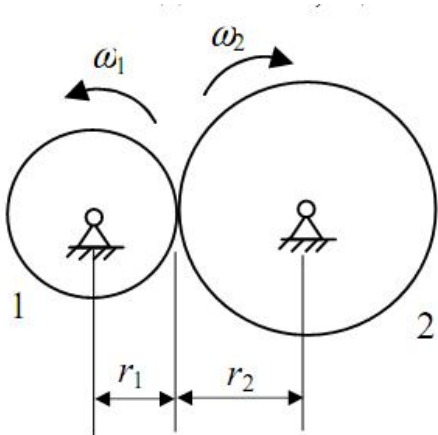


Рисунок 2.6

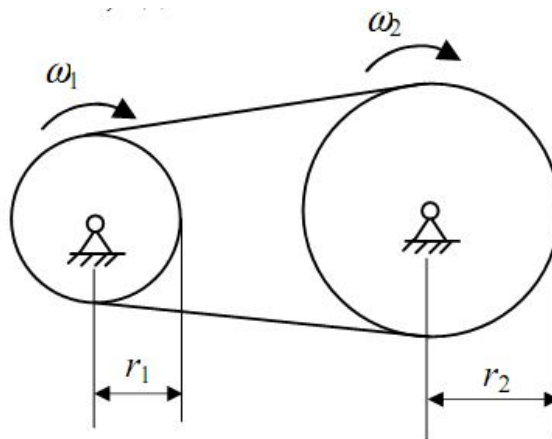


Рисунок 2.7

Тут для зубчастої передачі

$$v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

$$\text{або } \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2.$$

$$\text{Звідси } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Отже, кутові швидкості зубчастих, фрикційних, пасових та ланцюгових передач обернено пропорційні радіусам коліс.

Відношення кутової швидкості ведучого колеса до кутової швидкості веденого колеса називають передатним числом u .

Якщо врахувати, що число зубців пропорційно довжинам окружностей, а значить і радіусам або діаметрам d , то передатне число можна визначити через відповідне відношення радіусів, діаметрів або число зубців z :

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (2.7)$$

Передатне число складного механізму (рис. 2.8):

$$u_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = u_{12} \cdot u_{23}. \quad (2.8)$$

Тут передатні числа окремих передач

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{r_1} = \frac{D_2}{d_1} = \frac{Z_2}{z_1},$$

$$u_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{r_2} = \frac{D_3}{d_2} = \frac{Z_3}{z_2}$$

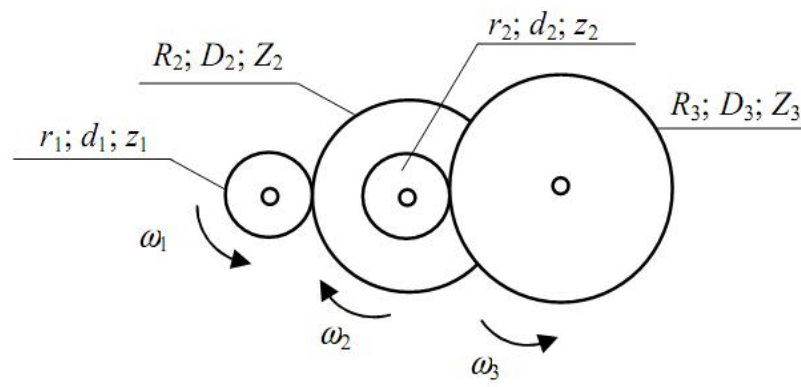


Рисунок 2.8

3 ДИНАМІКА

Динаміка – розділ механіки, що вивчає механічний рух матеріальних об'єктів (матеріальної точки, системи матеріальних точок, твердого тіла) під дією прикладених до них сил та з урахуванням їх мас.

Класична динаміка базується на законах Ньютона. Розглянемо їх.

Перший (закон інерції): ізольована матеріальна точка перебуває в стані спокою або прямолінійного рівномірного руху доти, доки вплив зовнішніх сил не виведе її з цього стану.

Другий (основний закон динаміки): сила, що діє на матеріальну точку, надає їй прискорення, яке пропорційне величині сили і має напрям сили: $m\bar{a} = \bar{F}$.

Третій (закон рівності дії та протидії): дві матеріальні точки взаємодіють між собою з силами, рівними за величиною і протилежними за напрямом: $F = -F'$.

Четвертий закон динаміки (закон незалежності дії сил): якщо на матеріальну точку одночасно діють декілька сил, то прискорення, одержуване точкою, дорівнює геометричній сумі прискорень, які точка одержує від кожної сили зокрема.

3.1 Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Основне рівняння динаміки: $m\bar{a} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$ – можна записати у вигляді диференціального рівняння (*векторна форма*):

$$m\ddot{\bar{r}} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i, \quad (3.1)$$

де m – маса точки;

\bar{r} – радіус-вектор точки, який є функцією часу.

Дане рівняння можна подати у вигляді проєкцій на три осі декартових координат x, y, z (*алгебраїчна форма*):

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad m\ddot{y} = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad m\ddot{z} = \sum_{i=1}^n F_{iz}, \quad (3.2)$$

де $\sum_{i=1}^n F_{ix}$, $\sum_{i=1}^n F_{iy}$, $\sum_{i=1}^n F_{iz}$ – алгебраїчні суми проєкції всіх сил, що діють на точку, на координатні осі.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки в *натуральній формі*:

$$m \frac{dv_\tau}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{i\tau}; \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum_{i=1}^n F_{in}; \quad 0 = \sum_{i=1}^n F_{ib}, \quad (3.3)$$

де v_τ – проекція швидкості на дотичну; ρ – радіус кривизни траєкторії в даній точці; $\sum_{i=1}^n F_{i\tau}$, $\sum_{i=1}^n F_{in}$, $\sum_{i=1}^n F_{ib}$ – алгебраїчні суми проекцій сил, що діють на точку, на натуральні осі τ, n, b . Цими рівняннями зручно користуватися, коли точка рухається, наприклад, по колу.

3.2 Дві задачі динаміки

Перша або пряма задача динаміки точки – рух точки, а також її маса, відомі. Треба знайти силу, яка діє на точку.

Друга або обернена задача динаміки точки – відомі сили, що діють на точку, її маса, а також початкові умови руху. Треба визначити закон руху точки.

Розв'язання першої задачі – знаходження сили за даним законом руху матеріальної точки зводиться до знаходження прискорення точки.

Розв'язання другої задачі – знаходження закону руху матеріальної точки за даними силами пов'язане з інтегруванням диференціальних рівнянь руху. Загальний розв'язок цих рівнянь визначає координати точки як функції часу і сталих інтегрування.

Початкові умови – величини, що визначають положення точки (її координати) і проекції вектора швидкості на осі координат у деякий фіксований момент часу t_0 (звичайно $t_0=0$): $x|_{t=0} = x_0$, $y|_{t=0} = y_0$, $z|_{t=0} = z_0$, $\dot{x}|_{t=0} = V_{0x}$, $\dot{y}|_{t=0} = V_{0y}$, $\dot{z}|_{t=0} = V_{0z}$.

3.3 Прямолінійні коливання матеріальної точки

Механічні рухи, які періодично повторюються, називаються механічними коливаннями. При цьому на матеріальну точку можуть діяти поновлюючі сили (сили, що намагаються повернути точку в положення рівноваги), сила опору руху, яка залежить від швидкості точки, та зовнішня збурююча сила. Рух точки здійснюється по прямій, співпадаючої з сумісною лінією дії вказаних сил.

Залежно від комбінації цих сил розрізняють наступні види коливального руху.

Вільні коливання, які відбуваються під дією тільки поновлюючої сили, величина якої пропорційна відхиленню матеріальної точки від положення її статичної рівноваги.

Механічна схема, яка моделює вільні прямолінійні коливання вантажу (матеріальної точки) масою m у напрямку осі Ox показана на рис., де 1 – вантаж; 2 – пружина; 3 – нерухома основа. Тут: l_0 – довжина недеформованої пружини; $\delta_{ст}$ – статична деформація пружини під дією вантажу; x – поточна координата вантажу відносно положення

статичної рівноваги при його русі; \bar{P} – сила ваги ($P = m \cdot g$); $F_{np}(x)$ – сила пружності пружини, яка є різновидністю поновлюючої сили $F_{np} = -c \cdot \Delta$, де $\Delta = \delta_{ct} + x$ – повна деформація пружини; c – коефіцієнт жорсткості (пружності) пружини; точка O – положення статичної рівноваги (рис. 3.1).

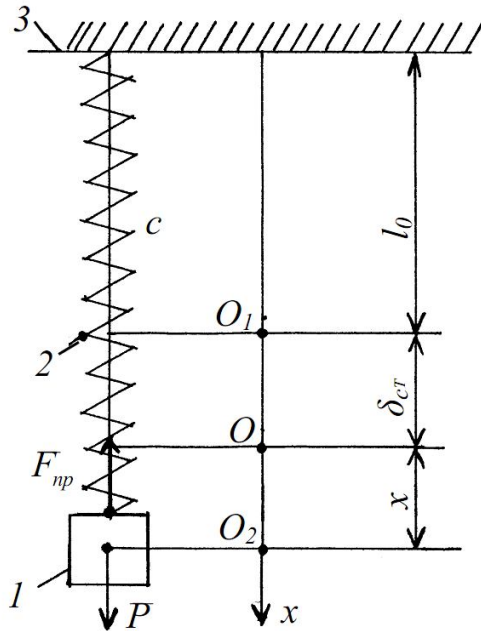


Рисунок 3.1

вантажу (початок відліку координати x); точка O_1 – положення вільного кінця недеформованої пружини; точка O_2 – поточне положення вантажу на осі Ox . Основне рівняння динаміки вантажу має вигляд:

$$m\bar{a} = P + F_{np} \quad (3.4)$$

або

$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_{ct} + x), \quad (2)$$

де \bar{a}, \ddot{x} – прискорення вантажу.

У положенні статичної рівноваги вантаж 1 нерухомий, координата $x = 0$, а сила ваги ($P = m \cdot g$) зрівноважується силою пружності пружини, яка дорівнює $c \cdot \delta_{ct}$.

Тому диференціальні рівняння руху вантажу приймають вигляд

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

або

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.5)$$

де $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ – кругова (циклічна, власна) частота коливань вантажу (матеріальної точки).

Закон коливань вантажу в цьому випадку буде

$$x = C_1 \cdot \cos \omega_0 t + C_2 \cdot \sin \omega_0 t = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3.6)$$

де $C_1 = x_0$, $C_2 = \dot{x}_0 / \omega_0$ – постійні інтегрування; x_0, \dot{x}_0 – початкові умови (початкове положення і початкова швидкість вантажу на момент розгляду

руху, тобто при $t = 0$); $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}$, $\varphi_0 = \arctg \frac{C_1}{C_2} = \arctg \frac{x_0 \cdot \omega_0}{\dot{x}_0}$ –

амплітуда і початкова фаза коливань точки.

У відповідності з (4) вантаж (матеріальна точка) здійснює гармонічний коливальний рух. Розглянута на рисунку механічна система називається консервативною.

3.4 Динаміка механічної системи і твердого тіла

Механічною системою (матеріальною системою) називається сукупність матеріальних точок, положення і рух кожної з яких залежать від положення і руху інших.

Сили, що діють на механічну систему, поділяються на зовнішні й внутрішні.

Зовнішні сили \bar{F}^e – це сили взаємодії точок механічної системи з тілами, що не належать даній системі.

Внутрішні сили \bar{F}^i – це сили взаємодії між точками механічної системи.

Властивості внутрішніх сил:

- 1) Головний вектор внутрішніх сил системи дорівнює нулю: $\bar{F}^i = 0$.
- 2) Головний момент внутрішніх сил системи відносно будь-якої точки дорівнює нулю: $\bar{M}_0(\bar{F}^i) = 0$.

Маса механічної системи дорівнює сумі мас усіх точок системи:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

Центром мас механічної системи називається геометрична точка, радіус-вектор якої визначається за формулою

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Координати центра мас визначаються за формулами

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

За визначенням центр мас є геометричною (а не матеріальною) точкою. Центр ваги системи збігається з центром мас.

Центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил системи:

$$M\bar{a}_c = \bar{F}^e$$

Диференціальні рівняння руху центра мас у проекціях на осі декартової системи координат:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^n F_{ix}^e; \quad M\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^n F_{iy}^e; \quad M\ddot{z}_C = \sum_{i=1}^n F_{iz}^e.$$

Ці рівняння є також диференціальними рівняннями поступального руху абсолютно твердого тіла. Внутрішні сили не входять в ці рівняння і безпосередньо не впливають на рух центра мас механічної системи. У змінюваній системі внутрішні сили викликають рух точок системи, змінюють їх взаємне розташування, не змінюючи положення центра мас.

У ряді випадків внутрішні сили є причиною появи зовнішніх сил, які викликають рух центра мас. Наприклад, в колісних транспортних засобах (трамвай, тролейбус, автомобіль та ін.) внутрішні сили двигуна впливають на їх рух через сили тертя між ведучими колесами та опорною поверхнею (рейками, шляхом).

3.5 Диференціальне рівняння обертання твердого тіла

Диференціальне рівняння обертання твердого тіла відносно нерухомої осі Oz :

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_{i=1}^n M_z(\bar{F}_i^e),$$

де J_z – момент інерції твердого тіла відносно осі z ; ω – кутова швидкість тіла навколо цієї осі x ; $M_z(\bar{F}_i^e)$ – момент i -тої зовнішньої сили відносно осі Oz .

Аналогічно можливо описати обертання і відносно будь-якої іншої осі.

Моменти інерції механічної системи твердого тіла.

Моментом інерції системи відносно осі (осьовий момент інерції) називається сума добутків мас точок системи на квадрати їх відстаней від осі:

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2.$$

Момент інерції твердого тіла:

$$J_z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n h_{iz}^2 \Delta m_i = \int_{(m)} h_z^2 dm,$$

де $h_{iz}(h_z)$ – відстань від осі частинки тіла масою $\Delta m_i(dm)$; x, y, z – координати частини тіла.

Осьові моменти інерції тіла:

$$J_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm; \quad J_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm; \quad J_z = \int_{(m)} (y^2 + x^2) dm.$$

4 ОСНОВІ РОЗРАХУНКІВ НА МІЦНІСТЬ

4.1 Головні гіпотези

При дослідженні деформування конструкцій прийнято використовувати ряд припущень, що істотно спрощують проведення розрахунків. Ці припущення, як показують експерименти, можна використовувати при рішенні більшості практичних задач.

Приведемо основні гіпотези.

1. Матеріал конструкції є однорідним і суцільним.

Ця гіпотеза затверджує, що властивості матеріалу не залежать від розмірів і форми конструкції й однакові у всіх її точках. Дане допущення дозволяє не враховувати дискретну структуру матеріалу і розглядати нескінченно малий елемент конструкції (точку тіла).

2. Матеріал конструкції ізотропний.

Ця передумова припускає, що властивості матеріалу однакові у всіх напрямках. Дана гіпотеза використовується при рішенні більшості задач опору матеріалів.

3. Матеріал конструкції ідеально пружний.

Ідеальна пружність – це властивість матеріалу цілком відновлювати форму і розміри конструкції після того, як були усунуті причини, що викликали її деформування. Деформування ідеально пружних тіл залежить тільки від навантажень, і не залежить від того, у якій послідовності вони прикладені.

4. Деформації в точці прямо пропорційні напруженням в даній точці.

5. Результат впливу на конструкцію системи навантажень дорівнює сумі результатів впливу кожного навантаження окремо.

6. Принцип Сен-Венана. Відповідно до нього, результат дії навантажень, прикладених до малої області тіла, швидко убуває в міру видалення від цієї області

4.2 Класифікація елементів конструкцій

У будівельних конструкціях об'єкти за геометричними характеристиками прийнято розподіляти на ряд типів:

Фундаменти (масиви) – тіла, у яких усі габаритні розміри одного порядку.

Пластини (плити) – тіла плоскої форми, у яких два габаритні розміри (довжина та ширина) великі в порівнянні з третім (товщиною).

Оболонки – тіла, обмежені криволінійними поверхнями, які розташовані на близькій відстані одна від одної.

Стержень (брус), прямолінійний, криволінійний – тіло, у якого два габаритні розміри малі в порівнянні з третім (довжиною).

Серед прямолінійних стержнів розрізняють балки, стійки, колони, осі, вали. Криволінійні стержні – це арки, колісні ободи, вантажнопідйомні гаки та ін.

4.3 Зовнішні навантаження

Навантаження, що діють на конструкцію, є стосовно неї зовнішніми силами. Ці навантаження, прикладені до елементів конструкції, і розподілені деяким чином на ділянках її поверхні. Їх можна поділити на:

1. Зосереджені сили (F [кН]), моменти (M [кНм]).
2. Розподілені сили (q [кН/м]) та моменти (m [кНм/м]).

Крім того, навантаження можна розділити на постійні (які діють в усі часи існування конструкції) і тимчасові, діючі тільки визначений проміжок часу.

За характером впливу навантаження можна розділити на статичні і динамічні. Статичні, навантажують конструкцію поступово, під час експлуатації вони не змінюються або змінюються повільно. У цьому випадку всі її елементи знаходяться в рівновазі, а сили інерції відсутні чи ними можна знехтувати.

Якщо прискорення різних частин тіла істотно і силами інерції не можна знехтувати (зміна навантажень, a , отже, і швидкості елементів за невеликий період часу), то в цьому випадку вважається, що прикладені динамічні навантаження.

Опори та опорні реакції. Реакції в'язів належать до зовнішніх, що діють на елементи конструкції і визначаються з умови рівноваги конструкції або її окремих елементів. Усі реакції вважаються прикладеними у центрі ваги опорного перерізу [1, 3].

4.4 Внутрішні зусилля

Зовнішнє навантаження викликає появу внутрішніх сил у елементах конструкції. Під внутрішніми силами ми будемо мати на увазі сили взаємодії між окремими елементами конструкції чи їхніми частинами. При цьому будемо вважати, що до навантаження тіла вони були відсутні. Внутрішні сили прийнято визначати методом перерізів.

Розглянемо рівновагу деякого елемента конструкції, на який діє система зовнішніх сил. Умовно розсічемо елемент поперечним перерізом. Сили взаємодії частин елемента будуть рівні за величиною і протилежні за напрямом. При цьому для кожної окремої частини тіла, що також повинні знаходитися в рівновазі, вони є зовнішніми, а для всього елемента – внутрішніми.

Зовнішні навантаження, які діють на частину елемента урівноважуються внутрішніми силами в перерізі. Зведемо систему

внутрішніх сил до головного вектора $\bar{R} (N_x, Q_y, Q_z)$ й головного моменту $\bar{M} (M_x = M_{кр}, M_y, M_z)$ (рис. 4.1).

Таким чином, взаємодія будь-яких двох частин елементів конструкції цілком визначаються шістьма складовими, котрі називаються внутрішніми силовими факторами:

- N_x – подовжня сила;
- Q_y, Q_z – поперечні сили;
- $M_{кр}$ – момент, що крутить;
- M_y, M_z – згинальні моменти.

По аналогії розрізняють види навантаження.

Розтяг-стиск виникає, у випадку, коли з усіх внутрішніх силових факторів ненульовою буде тільки подовжня сила. Згин прямої балки відбувається в тому випадку, коли на неї діють зосереджені моменти чи зовнішні сили, перпендикулярні осі балки. У цьому випадку з усіх внутрішніх силових факторів в перерізі виникає тільки згинальний момент й поперечна сила. Кручення виникає при дії на вал зовнішніх сил, які утворюють момент, що крутить щодо осі вала. У цьому випадку з усіх внутрішніх силових факторів в перерізі буде тільки момент, що крутить. Деформація зсуву виникає, коли зовнішні сили зміщають два рівнобіжних плоских перетини відносно один одного при незмінній відстані між ними. У цьому випадку у внутрішніх перерізах виникають тільки поперечні сили.

У результаті одночасної дії на брус системи зовнішніх сил, окремі компоненти якої, викликають різні види деформування, загальна картина деформування буде більш складна, чим розглянуті вище прості види – розтяг і стиск, згин, крутіння і зсув.

Багато елементів конструкцій, розрахункова схема, яких відповідає прямолінійному брусу, піддаються спільному впливу сил, що викликають різні види деформування: згин і розтяг-стиск, згин і крутіння, і інші сполучення розглянутих вище видів деформування. У цьому випадку при розрахунках розділяють різні види зовнішніх навантажень і розв'язують ці задачі окремо. Загальне рішення буде суперпозицією рішень окремих задач.

Внутрішні сили і моменти в різних перерізах того самого елемента конструкції в загальному випадку будуть різні. Як змінюються внутрішні силові фактори уздовж стержня прийнято показувати епюрами – графіками, вісь абсцис, якого відповідає з осі стержня, а ординати відповідають величині силових факторів. Ці графіки будують за визначеними правилами:

1. Вісь епюри вибирають таким чином, щоб вона була рівнобіжна чи збігалася з віссю стержня.

2. Ординати відкладають у відповідному масштабі від осі епюри по перпендикуляру.

3. Штрихують епюри, лініями, перпендикулярними до осі.
4. Крім того, в поле епюри в колі ставлять відповідний знак зусилля.

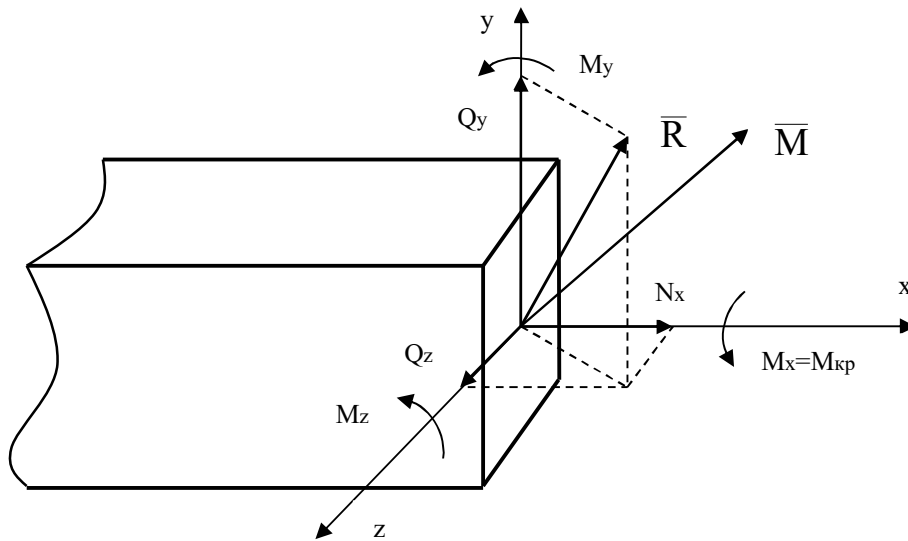


Рисунок 4.1

4.5 Напруження

Зовнішні зосереджені навантаження в дійсності не існують, а являють собою деяку ідеалізацію реального розподіленого навантаження. Аналогічно зосереджені внутрішні силові фактори, що характеризують взаємодію між окремими частинами конструкції, є статичним еквівалентом внутрішніх сил, розподілених по площі перерізу.

Прикладені до тіла зовнішні сили викликають появу в тілі внутрішніх сил. У загальному випадку на кожній грані систему сил можна звести до головного вектора (ΔR – рівнодіюча внутрішніх сил на деякій площадці перерізу ΔA) і головного моменту. При досить малих розмірах цих граней, значення головного моменту буде близько до нуля, а середнє напруження:

$$p_{\text{cp}} = \frac{\Delta R}{\Delta A}$$

Більш зручним у практичному використанні є представлення взаємодії між частинами тіла через напруження в такий спосіб:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}, \quad (4.1)$$

Таким чином, напруженням наголошується внутрішня сила, яка віднесена до одиниці площі у даній точці перерізу. Вони вимірюються в одиницях сили, ділених на одиниці довжини у другому ступені ($[кН/см^2]$).

Цю рівнодіючу можна розкласти на дві складові: нормальну ΔN і дотичну ΔQ . По цих складових визначають нормальні й дотичні напруження:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}; \quad \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}, \quad (4.2)$$

де $\Delta Q = \sqrt{Q_y^2 + Q_z^2}$ – сумарна поперечна сила. Нормальні й дотичні напруження являють собою проекції повного напруження на нормаль і площину площадки відповідно. Повне напруження:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (4.3)$$

5 ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ

5.1 Відомості про будівельні матеріали

До основних матеріалів, із яких виготовляються будівельні конструкції, відносяться сталь, алюміній і його сплави, залізобетон, деревина, пластмаси та ін.

Сталлю називають сплав заліза з вуглецем і головними додачами марганцю, кремнію (вуглецева сталь). Для поліпшення її властивостей сталь легують додаючи хрому, нікелю, міді, молібдену, титану, ванадію, цирконію (легована сталь). Шкідливими домішками є сіра і фосфор.

Будівельні сталі застосовують переважно у вигляді прокатних профілів, листів; арматурні – у вигляді стержнів або дроту, одержуваного волочінням.

Алюміній і сплави відіграють другорядну роль і застосовуються в тих випадках, коли це економічно доцільно або неможливо застосування сталі. Алюміній легше за сталь майже в 3 рази, міцність його сплавів мало їй поступається, але модуль пружності також майже в 3 рази менше, що визначає велику його деформативність у конструкціях. Для будівельних конструкцій застосовують сплави алюмінію з міддю, із марганцем, магнієм, сплави з додачами цинку і міді.

Залізобетон – комплексний матеріал, що вдало сполучає два різнорідних матеріали: сталь і бетон. Тривала і надійна спільна робота сталі і бетону забезпечується їхніми фізико-механічними властивостями, а також виконанням правил сполучення цих матеріалів (при конструюванні залізобетонних елементів).

Бетон добре опирається стисканню і набагато гірше – розтягу. Тому у всіх залізобетонних конструкціях розтягнуті, а іноді і стиснуті від навантаження зони бетону посилюють сталлю, яка добре опирається розтягу-стиску.

Деревина – найдавніший будівельний матеріал. У головних елементах будівельних конструкцій використовують хвойну деревину, тому що вона містить менше дефектів, ніж листяна деревина, а також містить смоли, що чинить кращий опір зволоженню і загниванню. З хвойної деревини найбільш часто використають соснову деревину. Серед листяних порід виділяється дубова деревина, що має підвищену міцність і стійкість проти загнивання, але більшу вартість.

Пластмаси. Конструкційні пластмаси використовують у складі елементів несучих і огорожуючих конструкцій. З найбільш міцних склопластиків виконують елементи несучих конструкцій. Прозорі склопластики застосовують в елементах огорожуючих конструкцій будівель. Надлегкі пінопласти використовують у середніх прошарках легких покриттів і стін.

5.2 Експериментальні дослідження властивостей матеріалів

Щоб мати можливість судити про міцність конструкцій при навантаженні, потрібно вивчити головні властивості застосовуваних матеріалів і їхнє поведіння при збільшенні навантаження аж до руйнування. Для цього зразки матеріалу випробують у лабораторії на спеціальних машинах.

Металеві зразки для випробування на розтяг виготовляють у вигляді стержнів круглого або прямокутного перерізу. Круглі зразки мають на кінцях стовщення (головки), а плоскі – поширення. Цими кінцями зразки закладають у захвати випробувальної машини, після чого розтягують. Для одержання порівняльних результатів випробувань даного матеріалу, зроблених на різноманітних зразках, необхідно, щоб зразки мали певні співвідношення розмірів. Ці співвідношення і самі розміри встановлені стандартом (ДСТУ 1497-84).

Найбільш часто використовується циліндричний стандартний нормальний зразок (рис. 5.1). Діаметр перерізу d_0 такого зразка може бути взятий від 3 до 25 мм.

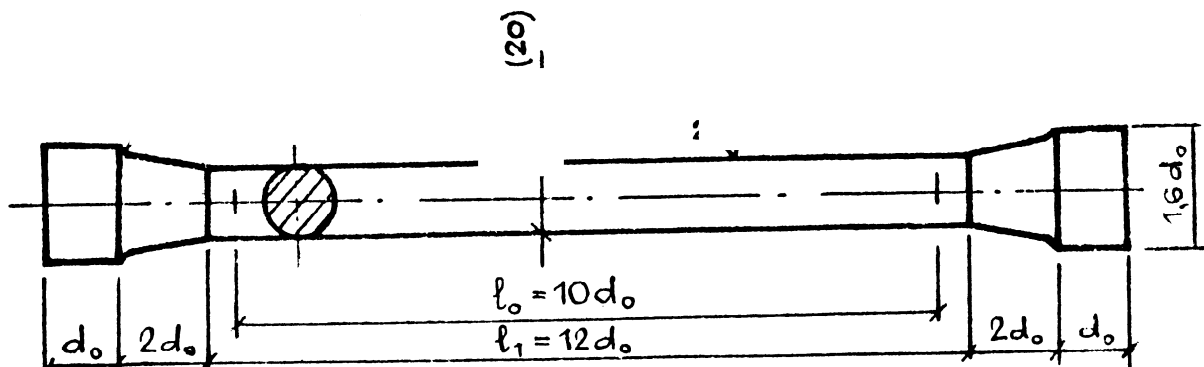


Рисунок 5.1

Розрахункову довжину l_0 на зразках помічають рисками. Ця довжина повинна бути меншою, ніж відстань між кінцівками, щоб виключити вплив способу прикладання зовнішніх сил і концентрації напружень в місцях зміни перерізу. Зона цього впливу на підставі принципу Сен-Венана не перевищує меншого розміру перерізу [3].

Особливості поведінки зразка при випробуванні на розтяг наочно ілюструються діаграмою розтягу – графіком залежності між навантаженням F та абсолютним подовженням Δl . Для маловуглецевої сталі вона має вигляд, наведений на рисунку 5.2.

На цій діаграмі можна відокремити три ділянки: лінійна АВ; горизонтальна CD й нелінійна DHG.

На ділянці АВ подовження Δl пропорційне навантаженню F , тобто дійсний закон Гука [3] так, що однаковим приростам ΔF навантаження відповідають однакові прирости Δl подовження зразка. Величина $F_{\text{пц}}$ визначає навантаження, що відповідає межі пропорційності. Дуже близьке до нього значення $F_{\text{пр}}$, яке визначає межу пружної роботи матеріалу, тобто відсутні деформації пластичності.

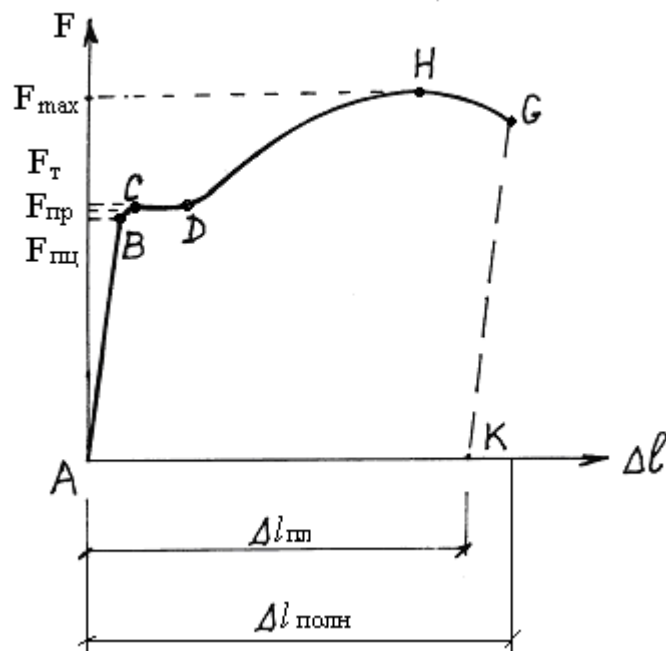


Рисунок 5.2

На ділянці CD подовження Δl зростають при незмінному навантаженні. Таке явище, характерне для пластичних матеріалів, називається текучістю. Текучість – критичний стан матеріалу, при якому підвищується температура, змінюється електропровідність, магнітні властивості. F_T – навантаження, що відповідає межі текучості матеріалу.

Коли зона текучості минає, навантаження знову зростає до найбільшого навантаження F_{max} , після чого стрімко падає до миті розриву зразка (точки G). Падіння навантаження після досягнення F_{max} обумовлене тим, що в цей час на зразку утворюється місцеве звуження – так звана шийка (рис. 5.3). У результаті цього несуча здатність зразка знижується. На рисунку 5.3 d – діаметр шийки.

Діаграма розтягу будується для даного зразка і її масштаб залежить від розмірів останнього. Потім на основі цієї діаграми будують діаграму напружень. Залежність між напруженнями:

$$\sigma = \frac{F}{A_0}, \quad (5.1)$$

де A_0 – площа поперечного перерізу зразка, і відносним подовженням

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (5.2)$$

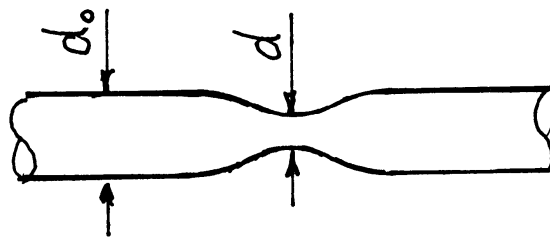


Рисунок 5.3

Ця діаграма напружень є характеристикою матеріалу безвідносно до розмірів зразка (рис. 2.4). Вона містить, декілька характерних точок:

$\sigma_{\text{пц}} = \frac{F_{\text{пц}}}{A_0}$ – межа пропорційності (напруження, при якому порушується лінійна залежність між силою і деформацією);

$\sigma_{\text{пр}} = \frac{F_{\text{пр}}}{A_0}$ – межа пружності (напруження, при якому з'являються деформації пластичності);

$\sigma_{\text{T}} = \frac{F_{\text{T}}}{A_0}$ – межа текучості (напруження, яки відповідають зоні текучості);

$\sigma_{\text{max}} = \frac{F_{\text{max}}}{A_0}$ – межа міцності (напруження, яки відповідають найбільшому навантаженню).

Модуль пружності E , що характеризує пружні якості матеріалу, та справедливий коли напруження менше ніж межа пропорційності, визначають з формули для абсолютного подовження:

$$E = \frac{F l_0}{A_0 \Delta l}, \quad (5.3)$$

де F – навантаження в межах пропорційності;
 l_0 – база вимірювального приладу;
 Δl – подовження бази, що відповідає навантаженню F .

Замість абсолютного значення F для визначення модуля пружності можна взяти приріст навантаження ΔF , а також приріст подовження $\delta \Delta l$:

$$E = \frac{\Delta F \cdot l}{A_0 \delta \Delta l}. \quad (5.4)$$

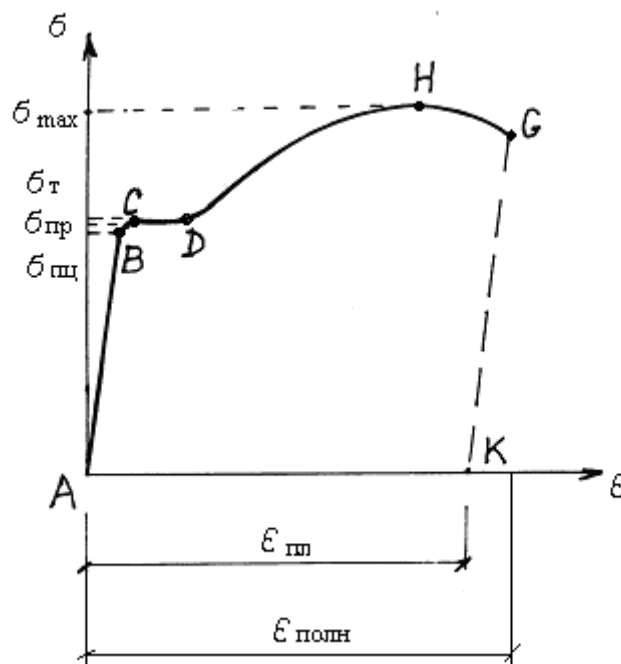


Рисунок 5.4

5.3 Коефіцієнт поперечної деформації

Для розтягу використовують плоский сталевий зразок у вигляді смужки прямокутного перерізу. Щоб виключити вплив напруженого стану у місцях затиску зразка на показання тензометрів, вважають, що його довжина повинна у чотири-п'ять разів перевищувати ширину

Експериментально доведено, що при одночасному розтягу (стиску) сталевого стержня останній змінює свої розміри як у поздовжньому, так і в поперечному напрямках. При розтягу поздовжні його розміри збільшуються, а поперечні – зменшуються. Здатність матеріалу до деформування характеризується відносними деформаціями:

поздовжньою $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$

та поперечною $\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b_0}$,

де $\Delta l = l_1 - l_0$ – абсолютна поздовжня деформація, що визначається як різниця між довжиною l_1 стержня при її навантаженні і первісною довжиною l_0 ;

$\Delta b = b_1 - b_0$ – абсолютна поперечна деформація, що визначається як різниця між шириною b_1 стержня при дії навантаження та первісною шириною b_0 .

Модуль частки, одержаної поділенням відносної поздовжньої на відносну поперечну деформацію, називається коефіцієнтом поперечної деформації або коефіцієнтом Пуассона:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (5.5)$$

Коефіцієнт Пуассона залежить виключно від пружних властивостей матеріалу і постійний для нього в межах лінійної пружності. Модуль пружності та коефіцієнт Пуассона цілком характеризують пружні властивості матеріалу.

5.4 Методи розрахунків конструкцій на міцність

Визначення напружень у конструкціях є основою розрахунків на міцність. При конструюванні розміри елементів конструкції повинні бути такими, щоб під дією зовнішніх навантажень вона не руйнувалася, при цьому в більшості випадків не слід допускати появи необоротних деформацій.

При деформуванні матеріалів, коли напруження не перевищують деяку величину, що називається границею пружності і позначається $\sigma_{пр}$, при розвантаженні тіло повністю відновлює свою форму та розміри (остаточні деформації не перевищують 0.02%). Необоротні деформації з'являються при деформуванні, коли напруження досягають деякої величини, що називається границею текучості і позначається σ_T – це таке напруження, при якому деформування тіла здійснюється при незмінному зусиллі. Руйнування настає в момент досягнення напруженнями свого максимального значення, що називається тимчасовим опором і позначається σ_{max} . Для того щоб конструкції працювали надійно, напруження не повинні перевищувати небезпечних величин.

При деформуванні пластичних матеріалів небезпечним напруженням вважається границя текучості, для крихких – тимчасовий опір. Для крихкого матеріалу в момент руйнування деформації можуть бути невеликими. Але ці напруження не можуть бути прийняті як допустимі.

Для того, щоб конструкції експлуатувалися в безпечних умовах, величина напруження повинна бути зменшена деяким чином. Для цього вводиться коефіцієнт запасу в такий спосіб: $[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}$, де $[\sigma]$ – допустимі напруження, тобто максимальні напруження, які можна допустити при розрахунку конструкції, σ_0 – небезпечні напруження, n – коефіцієнт запасу міцності.

Небезпечні напруження (границя текучості чи тимчасовий опір) визначається опитним шляхом і є характеристикою матеріалу. Величина коефіцієнта запасу залежить від багатьох факторів – матеріалу, умов експлуатації, призначення конструкції.

Таким чином, умовою міцності елементів конструкції при розрахунках буде наступне співвідношення:

$$\sigma \leq [\sigma], \quad (5.6)$$

де σ – напруження, що виникає в елементах конструкції.

Незначне перевищення максимальних напружень над тими, що допускаються (до 5%), не небезпечно [3].

Аналогічно вводиться умова міцності і для дотичних напружень, що виникають у конструкції:

$$\tau \leq [\tau], \quad (5.7)$$

де τ – дотичне напруження, що виникає в елементах конструкції.

Небезпечні напруження, як нормальні, так і дотичні, визначаються експериментальним шляхом, для цього досліджується розтяг-стиск і чистий зсув стержнів відповідно. Ці величини для різних матеріалів приводяться в довідниках. Як правило, для більшості конструкційних матеріалів спостерігається співвідношення

$$[\tau] = (0.5 \div 0.6)[\sigma].$$

Цей метод поки залишається головним при розрахунку механічних вузлів і елементів будівельних конструкцій. Умова міцності визначається:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (5.8)$$

де σ_{\max} – найбільше напруження, що виникає в одній з точок небезпечного перерізу конструкції й визначається розрахунком;

$[\sigma]$ – допустиме для даного матеріалу напруження, отримане на підставі експериментальних досліджень, з урахуванням коефіцієнту запасу.

Значення коефіцієнта запасу залежить від матеріалу, призначення споруди, характеру дії навантаження та інших умов експлуатації. Він встановлюється нормами проектування. Головними чинниками, що

впливають на вибір його значення, є: відповідність механічних властивостей матеріалу конструкції й окремо випробуваних зразків; урахування конкретних умов роботи конструкції; ступень точності методу розрахунку та завдання зовнішнього навантаження; довговічність та відповідальність проектованої споруди.

Для будівельних сталей значення коефіцієнту запасу міцності приймається $n = 1,4 - 1,6$, для крихких – $n = 2,5 - 3,5$, для деревини – $n = 3,5 - 6$.

6 РОЗТЯГ І СТИСК

Центральним розтягом-стиском називається такий вид напружено-деформованого стану, коли в поперечному перерізі бруса виникає тільки подовжня (розтягуюча або стискаюча) сила, а всі інші силові фактори відсутні.

6.1 Поздовжня сила

Розглянемо деформування стержнів силою F , дія якої збігається з його віссю. На рисунку 6.1 зображені прямі стержні, закріплені з одного боку, а з іншої навантажені силою спрямованою уздовж осі.

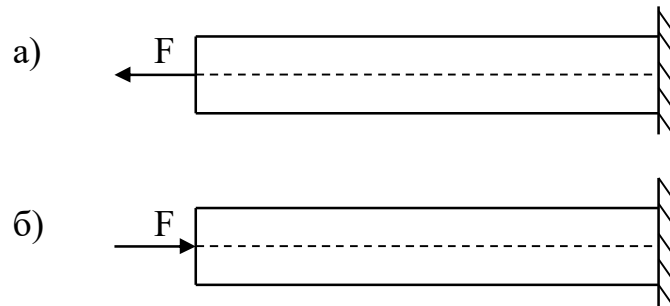


Рисунок 6.1

В усіх поперечних перерізах стержня виникають тільки поздовжні сили – що розтягують (рис. 6.1, а) чи стискають (рис. 6.1, б) його. Будемо вважати поздовжні сили, що розтягують – додатними, а що стискають – від’ємні. Поздовжні сили відповідно до загального правила визначення внутрішніх зусиль, знаходять методом перерізів. Наприклад, розглянемо стержень, наведений на рисунку 6.2, а. Визначимо поздовжню силу N_1 в перерізі I-I стержня. Для цього розглянемо статичну рівновагу лівої відсіченої частини стержня, наведеної на рисунку 6.3.

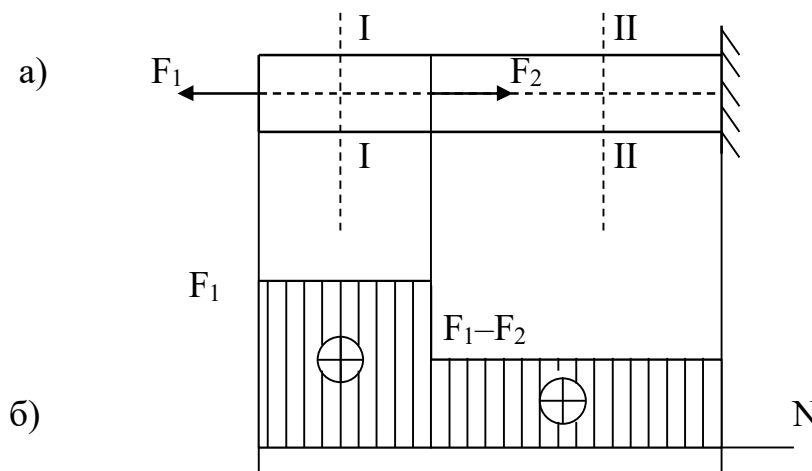


Рисунок 6.2

Напрямок внутрішніх сил показується в припущенні, що вони є додатними, тобто що розтягують. Якщо в результаті розрахунків внутрішня сила додатна, стержень розтягується, від'ємна – стискається.

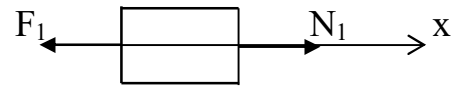


Рисунок 6.3

$$\sum F_x = -F_1 + N_1 = 0,$$

звідси:

$$N_1 = F_1.$$

Для визначення внутрішнього зусилля у перерізі II–II стержня розглянемо статичну рівновагу лівої відсіченої частини:

$$\sum F_x = -F_1 + F_2 + N_2 = 0,$$

звідси:

$$N_2 = F_1 - F_2.$$

На рисунку 6.2, б наведена еюра подовжньої сили N , побудована відповідно до загальних правил побудови еюр внутрішніх силових факторів (епюри побудовані в припущенні, що $F_1 > F_2$).

У перерізі, де уздовж осі прикладена зосереджена сила, значення подовжньої сили буде мінятися стрибкоподібно. Якщо на ділянці стержня не має зовнішніх сил, подовжня сила незмінюватиметься.

6.2 Напруження в стержнях при розтягу-стиску

При розрахунках на міцність крім внутрішніх сил, що діють у перерізі необхідно визначати і напруження в різних точках перерізу.

Подовжня сила, що виникає в поперечному перерізі стержня, є рівнодіючої внутрішніх нормальних сил, що діють на елементарних площадках, розподілених по площі перерізу. Вона зв'язана з нормальними напруженнями співвідношенням (4.4). Для визначення напружень у кожній точці необхідно знати закон розподілу напружень по перерізу стержня.

При спостереженні деформування стержня, навантаженого подовжніми силами, відзначено, що якщо нанести на його поверхню лінії, перпендикулярні осі, то ці лінії після додатка навантаження переміщуються паралельно первісному положенню, залишаються прямими і перпендикулярними осі стержня. Якщо припустити, що аналогічна картина спостерігається й усередині перерізу, то можна зробити висновок, що поперечний переріз стержня, плоский до деформування, залишається плоским і після нього, переміщуючись поступально уздовж осі стержня. Це припущення називається «гіпотезою плоских перерізів». Якщо

розглядати деформування стержнів у припущенні про однорідність матеріалу, то можна зробити висновок, що однаковим подовженням відповідають однакові напруження. Таким чином, напруження в поперечних перерізах усіх волокон рівні між собою і, отже, у всіх точках поперечного перерізу стержня.

Тому що величина напруження в поперечному перерізі не змінюється, то в співвідношенні (4.4) напруження можна винести з-під знака інтегрування:

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A, \quad (6.1)$$

відкіля (рис. 6.4):

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (6.2)$$

де A – площа поперечного перерізу стержня.

Аналогічним чином визначають напруження і при стиску, при цьому вони, так само як і подовжня сила мають від’ємну величину.

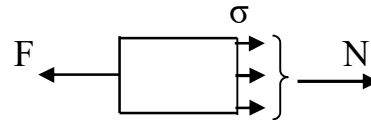


Рисунок 6.4

Таким чином, у поперечних перерізах стержня при центральному розтязі чи стиску виникають рівномірно розподілені нормальні напруження, рівні відношенню подовжньої сили до площі поперечного перерізу стержня.

При цьому необхідно мати на увазі, що співвідношення (6.2) справедливе тільки для тих перерізів, що досить вилучені від місць прикладення зосереджених навантажень. Це впливає з принципу Сен-Венана. У близь цих місць розподіл напружень носить складний характер і його опис вимагає більш точних методів досліджень.

Визначимо тепер величини напружень, що виникають у похилих перерізах стержнів при розтягу-стиску. Розглянемо стержень, на котрий діють протилежно спрямовані сили, що розтягують. Проведемо переріз I-I під кутом α до поперечного перерізу, як показано на рисунку 3.5, а, тобто поворот проти годинної стрілки від напрямку сили до нормалі n перерізу.

Розглянемо рівновагу правої частини (рис. 3.5, б). Напрямок вектора напружень буде збігатися з напрямком дії сили, що розтягує, а його результуюча буде дорівнювати F . Так як, внутрішні силові фактори рівномірно розподіляються по перерізу, то абсолютна величина вектора напружень дорівнює:

$$p = \frac{F}{A_\alpha},$$

де A_α – площа перерізу I-I.

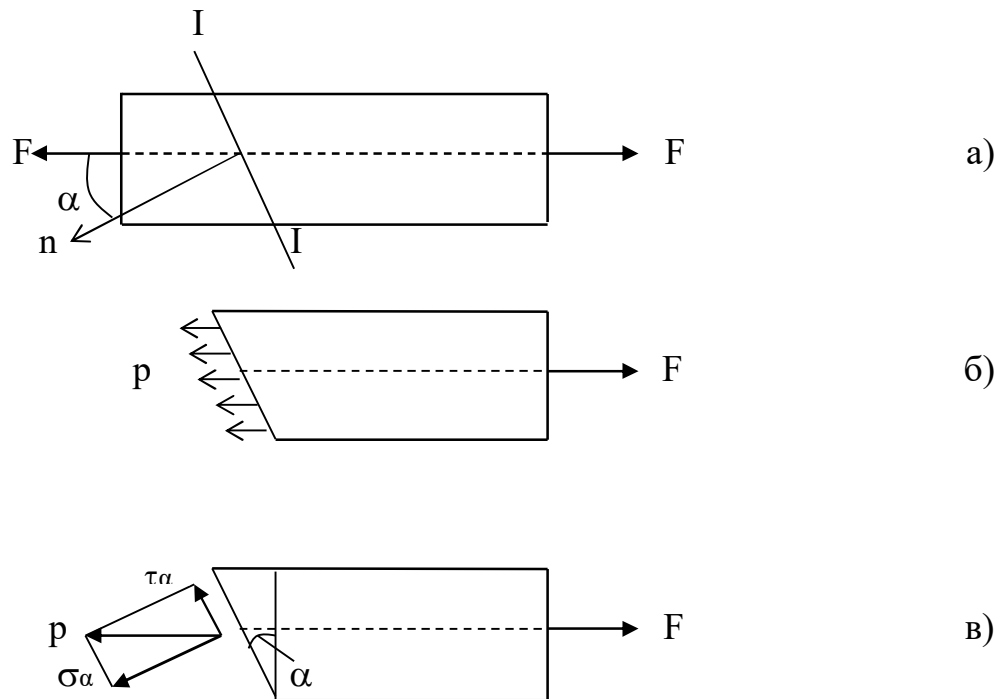


Рисунок 6.5

Нормальні напруження у поперечному перерізі знайдемо зі співвідношення (6.2):

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0},$$

де A_0 – площа поперечного перерізу.

Площа похилого перерізу

$$A_0 = \frac{A}{\cos \alpha},$$

тоді:

$$p = \frac{F}{A_\alpha} = \frac{F \cos \alpha}{A} = \sigma_0 \cos \alpha.$$

Вектор напружень являє собою рівнодіючу внутрішніх сил на елементарній площадці похилого переріз площею ΔA_1 . Цю рівнодіючу можна розкласти на дві складові: нормальну і дотичну, як показано на рисунку 6.5, в. Ці складові є нормальними і дотичними напруженнями:

$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha, \quad (6.3)$$

$$\tau_\alpha = p \sin \alpha = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha. \quad (6.4)$$

Дотичне напруження вважається позитивним, якщо його напрямок збігається з напрямком нормалі, поверненої на 90° по годинній стрілці.

Таким чином, при розтязі стержня подовжньою силою в ньому виникають одночасно нормальні і дотичні напруження і відповідні їм лінійні і кутові деформації. Вони будуть змінюватися в залежності від кута нахилу перерізу. Визначимо максимальні значення компонентів напружень. З виразу (6.3) випливає, що максимальне значення нормального напруження досягається при $\alpha = 0^\circ$ і дорівнює: $\sigma_{\alpha \max} = \sigma_0$.

При цьому, дотичні напруження в поперечному перерізі дорівнюють нулю, тому що, згідно (6.4): $\tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 0 = 0$.

Максимальне по абсолютній величині значення дотичних напружень буде на площадках, нахилених під кутом 45° до поперечного перерізу, і дорівнюють половині максимального нормального напруження:

$$\tau_{\alpha \max} = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 90^\circ = \frac{\sigma_0}{2}. \quad (6.5)$$

Нормальні напруження в цих перетинах також, згідно (6.3), будуть дорівнюють половині максимального нормального напруження:

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha = \sigma_0 \cos^2 45^\circ = \sigma_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\sigma_0}{2}. \quad (6.6)$$

В поздовжніх перерізах (при $\alpha = 90^\circ$) напруження відсутні.

6.3 Деформації і переміщення

При навантаженні тіла деформуються, тобто змінюють свою форму і розміри. Розглянемо деформацію стержня постійного поперечного перерізу (рис. 6.6) під дією розтягу силою F .

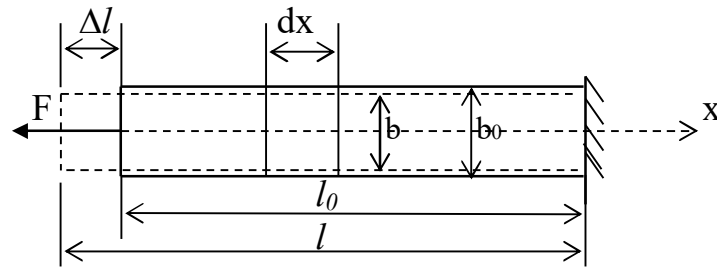


Рисунок 6.6

Під дією сили F стержень подовжиться на величину Δl , що називається абсолютним подовженням. Досвіди показують, що поки навантаження на стержень не досягає визначеної межі (напруження не досягнуть межі пропорційності, що є характеристикою матеріалу), абсолютна деформація прямо пропорційна силі, що розтягує F , довжині стержня l і обернено пропорційна площі поперечного перерізу A :

$$\Delta l = \frac{F l}{EA}, \quad (6.7)$$

де E – коефіцієнт пропорційності, що є характеристикою матеріалу.

Цей коефіцієнт називається модулем пружності чи модулем Юнга. А сама формула (6.7) зветься «закон Гука».

Це співвідношення можна перетворити в відносних величинах:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (6.8)$$

де $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ – відносна лінійна деформація.

Співвідношення (6.7) і (6.8) можна використовувати для перебування абсолютної та відносної подовжньої деформації тільки в тому випадку, якщо поперечна сила в стержні і площа перетину уздовж його постійні. При подовжнім навантаженні розподілена по довжині стержня подовжня сила змінюється. Крім того, стержень може бути виконаний таким чином, що площа його поперечного перерізу буде мінатися. У такому випадку будемо вважати, що стержень складається з нескінченної кількості елементарних ділянок довжиною dx (рис. 6.6). Тому що на таких ділянках сила і площа перерізу міняється нескінченно мало, те до них можна застосувати закон Гука (6.8) у вигляді

$$\Delta dx = \frac{N dx}{EA},$$

де N – поздовжня внутрішня сила на ділянці dx .

Повна деформація стержня довжиною l буде (якщо вважати, що він виконаний з ізотропного матеріалу) сумі подовжень усіх нескінченно малих елементарних ділянок:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_l \frac{N dx}{A}. \quad (6.9)$$

Переміщення всіх точок перерізу при розтязі-стиску уздовж осі, відповідно до гіпотези плоских перерізів, будуть однакові і дорівнюють абсолютній зміні довжини ділянки стержня між цим перерізом і закріпленим кінцем. Це називається подовжнім переміщенням і позначається U . Переміщення вважається позитивними, якщо воно по напрямку збігається з віссю x і негативним, якщо воно відбувається в протилежному напрямку.

Подовжнє навантаження стержнів, крім подовжніх деформацій, викликає і поперечні деформації. Співвідношення між ними є постійними для кожного матеріалу. При розтязі поперечні розміри зменшуються, при стиску – збільшуються, як показано на рисунку 6.6.

Крім того, у наслідок зміни температури в елементах конструкцій з'являються *температурні деформації*.

Температура впливає лише на лінійні розміри тіла, при цьому його форма остається незмінною, тобто можна вважати, що кутові деформації відсутні.

Лінійна деформація змінюється, згідно з експериментальними даними за формулою

$$\varepsilon = \alpha \Delta t, \quad (6.10)$$

де α – коефіцієнт лінійного поширення матеріалу,

$\Delta t = t - t_0$ – зміна температури відносно тієї, при якій споруда була змонтована (t_0).

7 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

При навантаженні конструкції істотну роль у розрахунках на міцність, жорсткість і стійкість грають геометричні розміри і форма поперечних перерізів елементів конструкцій. Розглянемо деякі геометричні характеристики перерізів, найбільш часто використовувані при рішенні задач. Геометричні характеристики перерізів простої форми можна визначити за спеціальними формулами. Крім того, характеристики профілів стандартного прокату (куточки, двотаври, швелери) наведені в спеціальних таблицях, названих сортаментами (див. додатки).

7.1 Площа перерізу

Площа є найпростішою характеристикою поперечного перерізу. Якщо представити переріз, що складається з незліченної кількості елементарних площадок dA , тоді площа всього перерізу можна визначити співвідношенням (рис. 7.1):

$$A = \int_A dA. \quad (7.1)$$

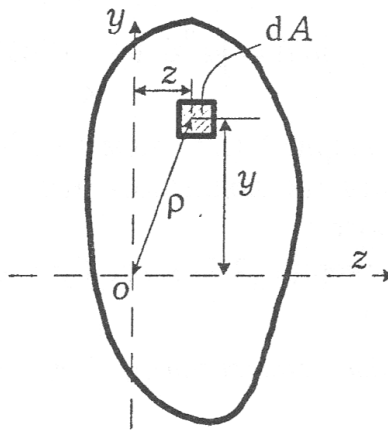


Рисунок 7.1

Властивості площі перерізу:

- 1) площа перерізу завжди додатна;
- 2) площа складеного перерізу дорівнює сумі площ фігур її складових;
- 3) площа перерізу не залежить від системи координат.

7.2 Статичні моменти перерізу

Статичним моментом перерізу відносно деякої осі називається узятая по всій його площі сума добутків елементарних площадок на відстані від цієї осі, наприклад, у площині yz :

$$S_z = \int_A y dA;$$

$$S_y = \int_A z dA,$$
(7.2)

де y і z – відстані до осей z і y відповідно (рис. 7.1).

Для складного перерізу, що складає з n частин, вирази (7.5) можна представити у вигляді:

$$S_z = \int_A y dA = \sum_{i=1}^n S_z^i;$$

$$S_y = \int_A z dA = \sum_{i=1}^n S_y^i,$$
(7.3)

де S_z^i, S_y^i – статичні моменти i -тої частини перерізу відносно осей z і y відповідно.

Таким чином, статичний момент складного перерізу щодо якої-небудь осі дорівнює сумі статичних моментів усіх частин цього перерізу відносно цієї осі.

Залежність між статичними моментами перерізу щодо двох рівнобіжних осей (розташованих на відстані a друг від друга). Вираз статичних моментів щодо цих осей можна представити у вигляді (7.2):

$$S_z = \int_A y dA;$$

$$S_{z_1} = \int_A y_1 dA,$$
(7.4)

відкіля:

$$S_{z_1} = \int_A (y - a) dA = \int_A y dA - \int_A a dA = S_z - aA.$$

Остаточно можна записати:

$$S_{z_1} = S_z - aA. \quad (7.5)$$

Аналогічно, можна розглянути дві рівнобіжні осі y і y_1 , розташовані на відстані b одна від одної. У цьому випадку одержимо наступний вираз:

$$S_{y_1} = S_y - bA. \quad (7.6)$$

Використовуючи співвідношення (7.5) і (7.6) можна знайти положення осей z_C і осі y_C , щодо яких статичні моменти дорівнюють нулю:

$$S_z - y_C A = 0 ; S_y - z_C A = 0$$

або

$$y_c = S_z / A ; z_c = S_y / A . \quad (7.7)$$

Точка перетинання таких осей називається центром ваги перерізу. Осі, що проходять через центр ваги, називаються центральними осями. Щодо будь-якої центральної осі статичний момент дорівнює нулю.

Якщо переріз складається з декількох фігур, то

$$S_z = \sum_{i=1}^n y_c^i A_i ; S_y = \sum_{i=1}^n z_c^i A_i , \quad (7.8)$$

де y_c^i і z_c^i – відстань до відповідних осей від центра ваги перерізу;

A_i – площа i -тої частини перерізу. Однак треба пам'ятати, що при використанні формул (7.8) необхідно враховувати знаки координат центрів ваги окремих частин цього перерізу.

Статичні моменти перерізу має наступні властивості:

1) Крім того, він може дорівнювати нулю, якщо вісь проходить через центр ваги;

2) статичний момент складеного перерізу дорівнює сумі статичних моментів фігур її складових щодо відповідної осі;

3) статичний момент може бути як додатним, так і від'ємним. Статичний момент перерізу буде мінятися при зміні системи координат.

7.3 Моменти інерції перерізу

Осьовим, чи екваторіальним моментом інерції перерізу відносно деякої осі називають взятую по всій його площі суму добутків елементарних площадок на квадрат відстані від цієї осі. Так, моменти інерції довільної фігури щодо осей zy (рис. 7.1):

$$I_z = \int_A y^2 dA ; \quad (7.9)$$
$$I_y = \int_A z^2 dA ,$$

де y і z – відстані до осей z і y відповідно.

Осьовий момент інерції складеного перерізу щодо будь-якої осі дорівнює сумі відповідних моментів інерції всіх частин цього перерізу відносно цієї осі.

Полярним моментом інерції перерізу відносно деякої точки (як правило, начало координат – перетинання осей y і z) називають узятую по всій його площі суму добутків елементарних площадок на квадрат відстані від цієї точки:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA, \quad (7.10)$$

де ρ – відстані до відповідної точки (рис. 7.1).

Порівнюючи співвідношення (7.9) і (7.10) можна установити, що сума осьових моментів інерції будь-якого перерізу щодо двох перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції щодо точки їхнього перетинання.

Дійсно, відстань від будь-якої крапки перерізу до початку координат можна визначити як:

$$\rho^2 = y^2 + z^2.$$

Отже

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA$$

або

$$I_\rho = I_y + I_z. \quad (7.11)$$

Співвідношення (4.11) справедливе для будь-яких двох взаємно перпендикулярних осей, отже при всіх можливих поворотах осей відносно початку координат, сума осьових моментів інерції залишається величиною постійною і дорівнює полярному моменту інерції.

Відцентровим моментом інерції перерізу щодо двох взаємно перпендикулярних осей називають взятую по всій його площі суму добутків елементарних площадок на відстані до цих осей. Так, у площині yz :

$$I_{yz} = \int_A zy dA, \quad (7.12)$$

де y і z – відстані до осей z і y відповідно.

У залежності від положення осей відцентровий момент інерції може бути додатним, від'ємним, або дорівнювати нулю. Осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, називаються головними осями інерції. Головні осі, що проходять через центр ваги, називаються головними центральними осями. Якщо хоча б одна з осей є віссю симетрії перерізу, то ці осі є головними.

При визначенні моментів інерції фігур, що мають просту геометричну форму, можна користатися методом безпосереднього інтегрування виразів (7.9), (7.10) і (7.12).

Осі, що проходять через центр ваги перерізу, називаються центральними осями, а моменти інерції відносно цих осей називаються центральними моментами інерції. Розглянемо взаємозв'язок моментів інерції перерізу відносно центральних осей, і деяких інших, рівнобіжних їм.

Допустимо, що для якого-небудь перерізу осі y , z є центральний, відносно якої момент інерції I_y , I_z відомі. Потрібно визначити момент

інерції перерізу відносно осей y_1, z_1 , рівнобіжних центральним, віддалених на відстані a та b (рис. 7.2). За визначенням, моменти інерції, щодо обох осей, знаходять в такий спосіб:

$$I_y = \int_A z^2 dA; \quad I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA, \quad (7.13)$$

Відстань від усіх елементарних площадок до осей y_1, z_1 буде: $y_1 = y+a, z_1 = z+b$ (рис. 7.2). Із співвідношень (7.13) одержимо:

$$I_{z_1} = \int_A (y+a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA.$$

Перший доданок цього виразу є центральним моментом інерції I_z . Другий доданок дорівнює нулю, тому що інтеграл, який у нього входить, є статичним моментом перерізу відносно осі, що проходить через центр ваги (7.10). Третій доданок дорівнює добутку квадрата відстані між осями і площі перетину. Отже, можна записати:

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A. \quad (7.14)$$

Аналогічно для іншої осі:

$$I_{y_1} = I_y + b^2 A, \quad (7.15)$$

Таким саме способом можна одержати співвідношення для відцентрового моменту інерції:

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} + abA. \quad (7.16)$$

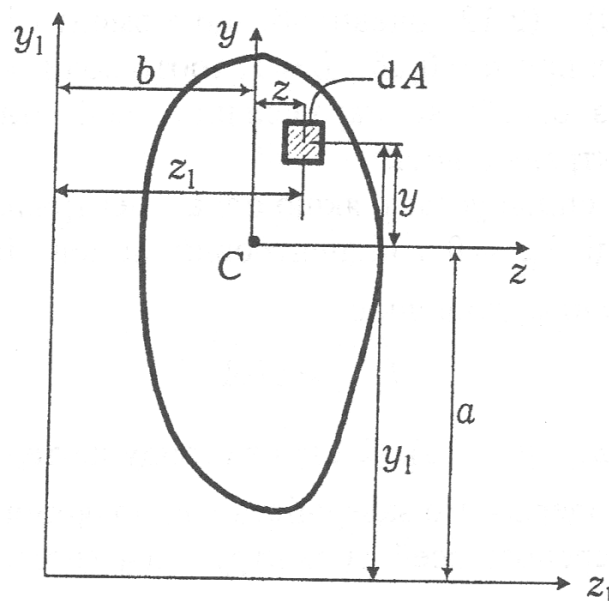


Рисунок 7.2

Розглянемо зміни моментів інерції при повороті осей (рис. 7.3).

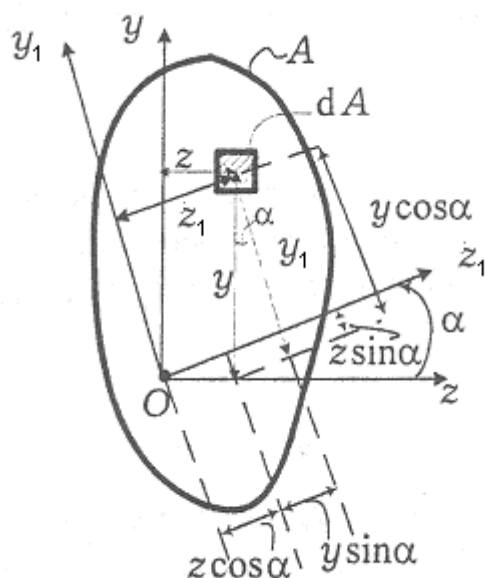


Рисунок 7.3

Ці співвідношення можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned}
 I_{y_1} &= I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha; \\
 I_{z_1} &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha; \\
 I_{z_1 y_1} &= I_{yz} \cos 2\alpha - \frac{1}{2}(I_y - I_z) \sin 2\alpha.
 \end{aligned}
 \tag{7.18}$$

Вони дозволяють установити, як змінюються величини моментів інерції перерізу при повороті осей на деякий кут α . Для деяких значень цього кута осьові моменти інерції будуть досягати максимуму чи мінімуму.

Зі співвідношення (7.11) випливає, що коли осьовий момент інерції відносно деякої осі є максимальним, то осьовий момент інерції щодо перпендикулярної осі є мінімальним, тому що сума осьових моментів щодо двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції.

Для знаходження такого кута повороту осей, при якому значення осьових моментів інерції будуть екстремальними, досліджують функцію I_z на екстремум по α . Тоді щодо кута α_0 :

$$\operatorname{tg}2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}. \quad (7.20)$$

Отримане рівняння (7.20) значення кута α_0 визначає положення головних осей. Якщо кут α додатний, то систему координат треба повернути проти годинникової стрілки, щоб вона співпала з головними осями, якщо від'ємний – по годинникової стрілці.

Для визначення головних моментів інерції I_{\max} і I_{\min} розглянемо вираз (7.20), і, використовуючи тригонометричні перетворення, одержимо:

$$\begin{aligned} I_u = I_{\max} &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2} \right); \\ I_v = I_{\min} &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2} \right), \end{aligned} \quad (7.21)$$

де u і v – головні центральні осі, щодо яких момент інерції перерізу максимальний і мінімальний відповідно.

Головні осі інерції можна одержати для будь-якої точки, взятої у площині перерізу. Але у практичних розрахунках використовуються тільки осі, що проходять через центр ваги перерізу. Такі осі називаються головними центральними осями інерції, а моменти відносно їх головними центральними моментами інерції.

Моменти інерції перерізу мають такі властивості:

1) осьові й полярні моменти інерції перерізів завжди додатні, відцентровий момент може бути як додатним, від'ємним, а відносно головних осей він дорівнює нулю;

2) моменти інерції складеного перерізу дорівнюють сумі моментів інерції фігур його складових;

3) осьові, полярні і відцентрові моменти інерції залежать від системи координат.

8 ЗГИН БАЛОК

Згин балок, пов'язаний з виникненням у поперечних перерізах згинальних моментів – моментів, щодо осі, розташованої у площині поперечного перерізу, що проходить через його центр ваги. Ці моменти діють у площині, перпендикулярній поперечному перерізу балки.

У залежності від напрямку згинаючого моменту розрізняють прямий і косий згини. Прямий згин виникає у випадку, коли дії згинальних навантажень збігається з однією із головних осей інерції. Тоді і згинальний момент у поперечному перерізі діє в площині, що проходить через одну з головних центральних осей інерції. На рисунку 8.1 показаний випадок навантаження бруса, коли зовнішні сили розташовані у площині ux , що збігається з головною віссю перерізу u . Деформації згину в цьому випадку відбуватися в площині дії моменту.

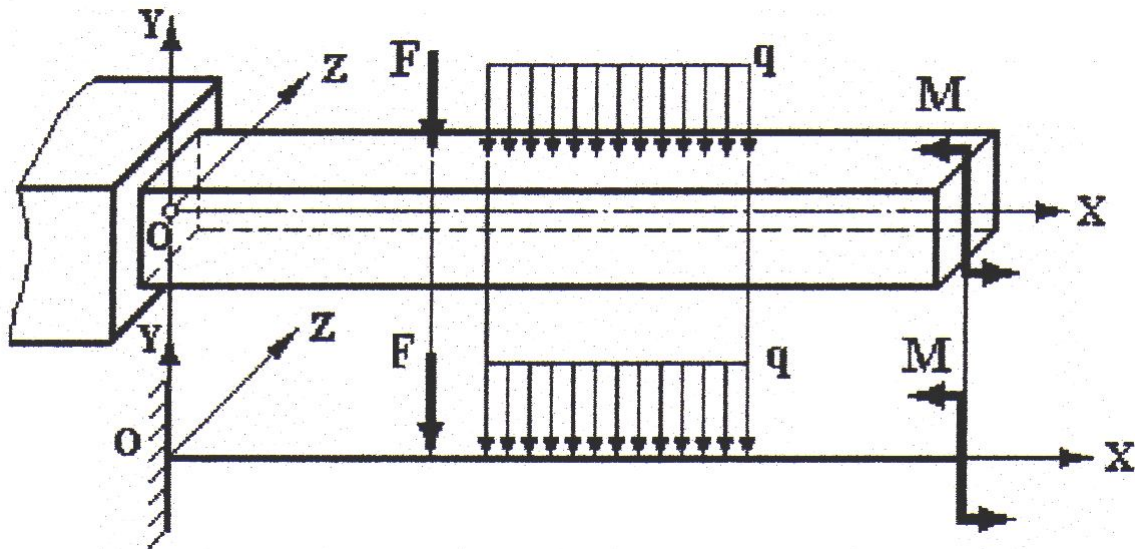


Рисунок 8.1

Якщо площина дії згинальних моментів не збігається з жодною з головних осей, то таке деформування називається косим згином. У таких випадках усі зовнішні навантаження (сили і моменти) розкладають на дві складові, таким чином косий згин розкладається на два прямих поперечних згину.

Якщо при згині в поперечному перерізі балки діє тільки згинальний момент, то таке деформування називається чистий згин. Коли крім згинаючого моменту в поперечному перерізі діє ще і поперечна сила, тоді такий вид деформування називається поперечний згин. Коли усі поперечні перерізи деякої ділянки балки знаходяться в стані чистого згину, тоді вся ця ділянка перебуває у стані чистого згину.

8.1 Внутрішні зусилля при згині

Зовнішні навантаження, що діють на елементи конструкції, викликають появу в ньому внутрішніх зусиль. При дії на брус зовнішніх навантажень, розташованих в одній площині (наприклад, xu , якщо вісь x збігається з віссю бруса), що проходить через вісь бруса, у кожному поперечному перерізі виникають внутрішні зусилля, що діють у тій же площині: подовжня сила, поперечна сила і згинальний момент.

Коли в перерізі виникає подовжня сила, тоді необхідно окремо розглядати дві задачі: розтяг-стиск і згин бруса, а потім одержати суперпозицію двох рішень. У такий само спосіб необхідно розглядати розв'язання двох окремих задач і у випадку, коли зовнішні сили діють у площині, що не містить у собі головні осі.

Надалі ми будемо розглядати задачу прямого згину. У цьому випадку в площині перерізу балки будуть наступні внутрішні зусилля: поперечна сила, що діє в площині перерізу ($Q = Q_y$) і проходить через його центр ваги і згинальний момент, перпендикулярний до поперечного переріза $M = M_z$, де z – вісь, щодо якої діє момент.

Згинальний момент M в поперечному перерізі бруса (рис. 8.2) вважається додатним, якщо на лівому торці правої частини балки він спрямований по годинниковій стрілці, а на правому торці лівої частини – проти годинниковій стрілки (або можна казати, що додатний момент є такий, котрий згинає балку нагору), як показано на рисунку 8.2. При додатному згинальному моменті верхні волокна будуть стискуватися, нижні – розтягуватися.

При від'ємному згинальному моменті верхні волокна розтягуються, нижні – стискаються.

Поперечна сила Q позитивна, коли на правому торці лівої частини бруса вона спрямована зверху вниз, на лівому торці правої частини – знизу догори, як показано на рисунку. Додатна поперечна сила прагне завжди обернути відсічену частину балки проти годинниковій стрілки відносно центру ваги перерізу.

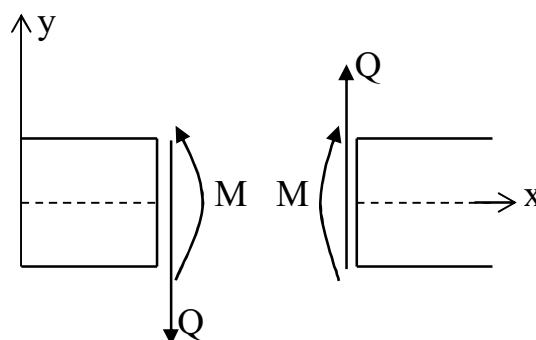


Рисунок 8.2

Згинальний момент і поперечна сила, що діють у перерізі, зв'язані з напруженнями, що виникають у ньому (1.4):

$$Q = \int_A \tau_y dA;$$

$$M = \int_A \sigma_z y dA.$$
(8.1)

Для того щоб визначити проєкції на будь-яку вісь внутрішніх силових факторів у перерізі, необхідно, як показано в п. 4.2, скористатися методом перерізів.

Проаналізуємо внутрішні силові фактори в поперечному перерізі балки при прямому поперечному згині, сформулюємо основні правила визначення сил і моментів при згині.

Розглянемо консольний брус із затисненим правим торцем та навантажений силами F_1 і F_2 (рис. 8.3). Нехай $F_1 > F_2$.

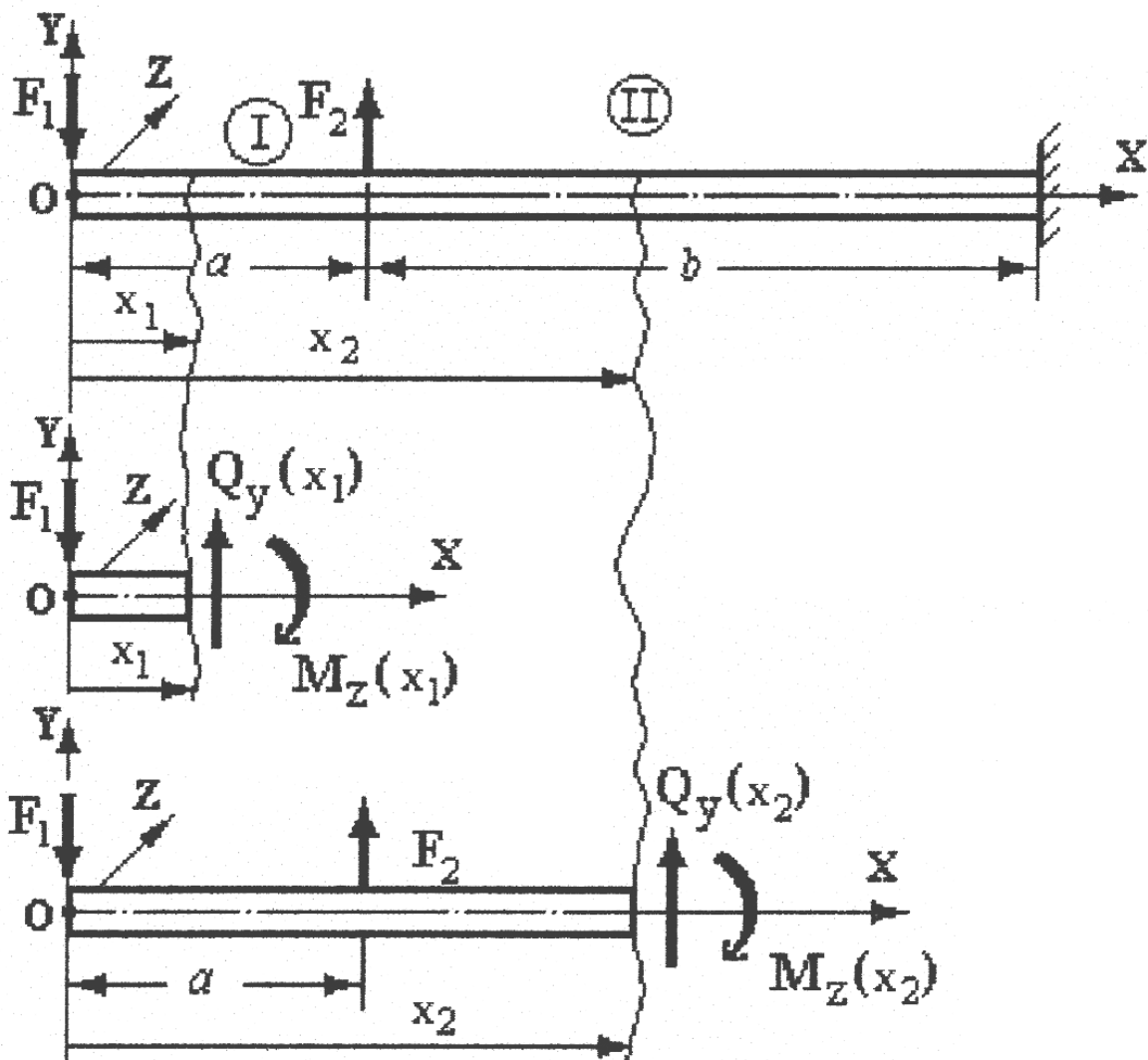


Рисунок 8.3

Згідно з методом виберемо переріз на першій і другій ділянках, покажемо відсічені частини, замінимо дію відкинутих частин на залишену внутрішніми силовими факторами Q_y і M_z . З умов статички (суми проєкцій сил на вісь y і суми моментів щодо осі x , що проходить через центр ваги розглянутого перерізу) визначимо їхні значення:

1-а ділянка.

$$\begin{aligned} \sum F_i = -F_1 + Q_y(x_1) = 0, \text{ звідки} & \quad Q_y(x_1) = F_1; \\ \sum M_i = F_1 x_1 - M_z(x_1) = 0, \text{ звідки} & \quad M_z(x_1) = F_1 x_1. \end{aligned}$$

2-а ділянка.

$$\begin{aligned} \sum F_i = -F_1 + F_2 + Q_y(x_2) = 0, \text{ звідки} & \quad Q_y(x_2) = F_1 - F_2; \\ \sum M_i = F_1 x_2 - F_2(x_2 - a) - M_z(x_2) = 0, \text{ звідки} & \quad M_z(x_2) = F_1 x_2 - F_2(x_2 - a); \end{aligned}$$

З цього методу випливає, що для визначення внутрішніх зусиль у перерізі, необхідно просумувати усі зовнішні сили та моменти, що діють на одну з частин, розташованих праворуч чи ліворуч від перерізу.

Використовуючи такі уявлення, сформулюємо наступні правила для визначення поперечної сили й згинального моменту при згині.

Поперечна сила $Q = Q_y(x)$ за величиною і знаком дорівнює сумі проєкцій усіх зовнішніх сил, прикладених до лівої частини балки, на головну центральну вісь y площині згину, проведену в розглянутому перерізі, чи сумі проєкцій на ту ж вісь, взяту зі зворотним знаком, усіх зовнішніх сил, прикладених до правої частини балки. При цьому проєкції вважаються позитивними, якщо сили спрямовані по осі (догори):

$$Q = \sum_{\text{лев}} F_y = - \sum_{\text{прав}} F_y. \quad (8.2)$$

Правило знаків. Поперечна сила вважається додатною, якщо обертає розглянуту відсічену частину балки щодо центра ваги перерізу за годинниковою стрілкою, і від'ємною – якщо проти годинникової стрілки (рис. 8.4).

Згинальний момент $M = M_z(x)$ щодо головної центральної осі z поперечного перерізу за величиною і знаком дорівнює сумі моментів щодо цієї осі від усіх зовнішніх навантажень, прикладених до лівої частини балки, чи сумі моментів щодо тієї ж осі, взятої зі зворотним знаком, усіх моментів від зовнішніх навантажень, прикладених до правої частини. Моменти від зовнішніх навантажень додатними, якщо вони діють проти годинникової стрілки:

$$M = - \sum_{\text{лев}} M_z = \sum_{\text{прав}} M_z. \quad (8.3)$$

Правило знаків. Згинальний момент вважається додатним, якщо відсічена частина згинається опуклістю вниз (стиснуте волокно вгорі,

розтягнуте вниз), та від'ємним – якщо навпаки. Таким чином, еюра згинальних моментів будується з боку розтягнутого волокна (рис. 8.4). При визначенні внутрішніх зусиль моменти і проєкції сил необхідно визначати від усіх зовнішніх сил, прикладених до балки по одну сторону від розглянутого поперечного переріза. У число цих сил треба включати і реакції опор, що виникають у закріплених точках перерізів. Ці реакції знаходяться з рівнянь рівноваги всієї балки з урахуванням усіх діючих на неї навантажень.

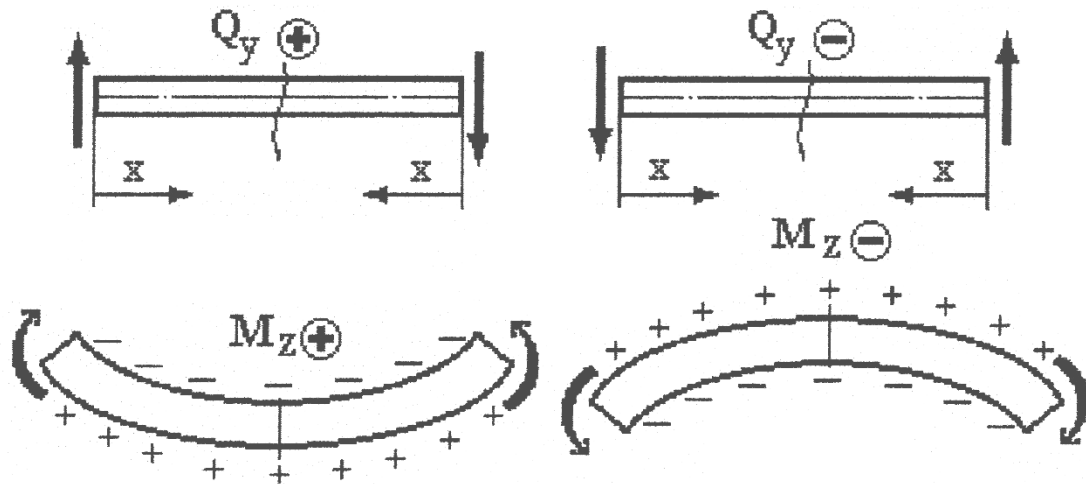


Рисунок 8.4

Балки, в яких загальне число реакцій більше числа рівнянь рівноваги, називаються статично невизначеними. Для таких балок реакції опор визначаються зі спільного розв'язання рівнянь рівноваги і рівнянь спільності деформацій, що описують умови деформування балок.

Величина внутрішніх зусиль у перерізах залежить від того, які і яким чином, прикладені навантаження, що діють на балку.

Для того щоб визначити ці залежності між зовнішніми навантаженнями і внутрішніми зусиллями, розглянемо балку, що знаходиться під дією деякої системи сил.

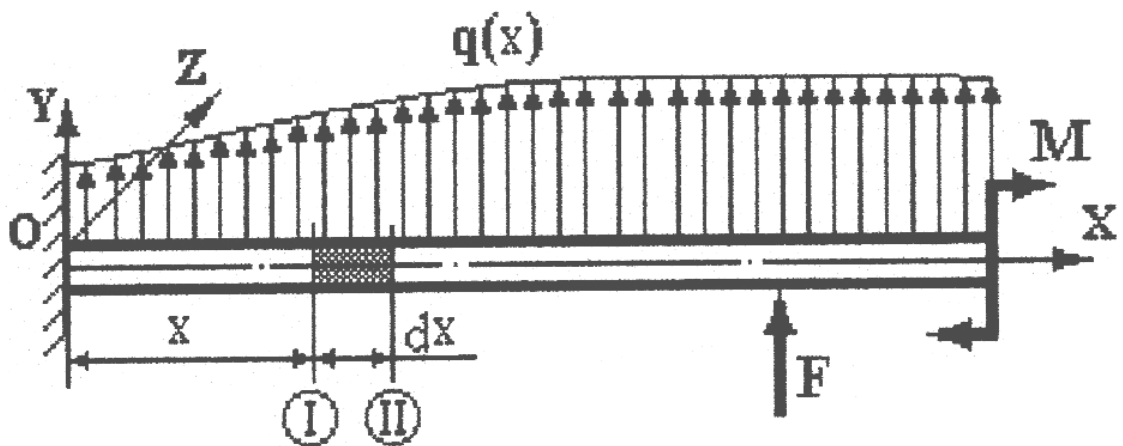


Рисунок 8.5

Вимелемо елементарну ділянку балки довжиною dx (рис. 8.6), на яку діє тільки розподілене навантаження інтенсивністю q , що діє перпендикулярно до осі балки, й внутрішні зусилля. Розглянемо її рівновагу, на лівий торець цього елемента діють деякі внутрішні зусилля M і Q , на правий $M+dM$ і $Q+dQ$, де dM і dQ – збільшення величин внутрішніх силових факторів на ділянці dx .

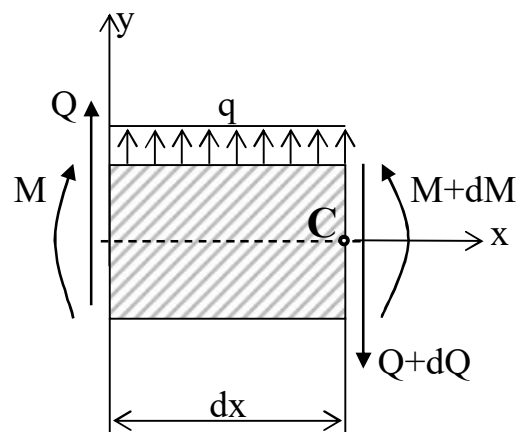


Рисунок 8.6

Цей елемент, як і вся балка в цілому, повинен знаходитися в рівновазі:

$$\sum F_y = Q + qdx - (Q + dQ) = 0 \Rightarrow qdx - dQ = 0,$$

відкіля:

$$\frac{dQ}{dx} = q. \quad (8.4)$$

Таким чином, похідна від поперечної сили по довжині дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження.

Тепер складемо рівняння рівноваги елемента щодо центра ваги перерізу (точка С) правого торця елемента:

$$\sum M_c = M + Qdx + qdx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0,$$

або:
$$Qdx + qdx \frac{dx}{2} - dM = 0.$$

Так як додатак $qdx \frac{dx}{2}$ має другий порядок мализни, на відміну від інших додатків, що мають перший порядок мализни, ним можна знехтувати: $Qdx - dM = 0$, або:

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (8.5)$$

Таким чином, похідна від згинаючого моменту за довжиною дорівнює поперечній силі.

Підставляючи вираз (8.5) у залежність (8.4) одержуємо зв'язок другої похідної від згинального моменту за довжиною і інтенсивності розподіленого навантаження:

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}. \quad (8.6)$$

Співвідношення (8.4)–(8.6), справедливі в тому випадку, якщо вісь абсцис спрямована в праву сторону.

При розрахунках балок на згин необхідно знати розподіл внутрішніх зусиль у поперечних перерізах по її довжині. Цей розподіл прийнятий показувати у виді епюр. Епюри при згині будуються за загальними правилами аналогічно епюрам подовжньої сили при розтягу–стиску. Кожна ордината епюри М чи Q являє собою величину згинаючого моменту чи поперечної сили у відповідному перерізі балки. При побудові епюри сил прийнято додатні значення сили відкладати догори від осі епюри, а від'ємні – відповідно донизу. При побудові епюри згинальних моментів, навпаки – додатні значення відкладаються вниз, від'ємні – нагору.

Вид епюр поперечної сили і згинаючого моменту залежить від виду зовнішнього навантаження. Аналізуючи залежності (8.2)–(8.6) можна зробити наступні висновки, які можна використовувати при побудові й перевірці епюр:

1. У перерізі, до якого до балки прикладена зосереджена сила, значення поперечної сили Q зміниться стрибкоподібно на величину прикладеної сили. Коли зосереджена сила спрямована нагору, на епюрі Q є скачок догори, а коли сила спрямована вниз – скачок униз.

2. Якщо до балки прикладений зосереджений момент, значення згинаючого моменту M зміниться стрибкоподібно на величину прикладеного моменту. Коли зосереджений момент спрямований проти годинникової стрілки, на епюрі M мається скачок догори, а коли момент спрямований за годинникової стрілки – скачок униз.

3. Тангенс кута між дотичною до лінії, що обмежує епюру моментів M і віссю епюри, дорівнює поперечній силі Q .

4. На ділянках балки, на яких поперечна сила додатна, згинальний момент зростає, а де вона від'ємна – убуває.

5. Чим більше по абсолютній величині значення поперечної сили, тим крутіше лінія, що обмежує епюру згинальних моментів.

6. На ділянці балки, де поперечна сила має постійне значення, епюра моментів обмежена прямою лінією.

7. Якщо в деякому перерізі балки епюра поперечної сили не має стрибка, то лінії, що обмежують епюру моментів із двох сторін, сполучаються без перелому, тобто мають у точці сполучення загальну дотичну.

8. Якщо в деякому перерізі балки епюра поперечної сили має стрибок, то лінії, що обмежують епюру моментів із двох сторін мають точку перелому, тобто не мають у точці сполучення загальної дотичної.

9. На ділянках, де діє зовнішнє розподілене навантаження, згинальний момент досягає максимуму чи мінімуму в перерізах балки, де поперечна сила дорівнює нулю (дотична до лінії, що обмежує епюру моменту, при цьому в розглянутому перерізі буде рівнобіжна осі епюри).

10. На ділянках, де діє розподілене навантаження, поперечні сили змінюються за довжиною балки по прямій, а епюри моментів обмежені кривою лінією.

11. На ділянках, де розподілене навантаження відсутнє, поперечні сили постійні, а епюри моментів змінюються за лінійним законом.

8.2 Напруження і деформації при згині

Розглянемо нормальні напруження, що виникають при чистому плоскому згині в поперечному перерізі балки. З усіх внутрішніх зусиль, що можуть виникати в перерізах, ненульовим буде тільки згинальний момент, щодо осі, перпендикулярної осі балки. Цей момент буде зв'язаний з нормальними напруженнями співвідношенням (8.1).

Розглянемо, як деформується балка в умовах чистого згину. Досвіди дослідження деформацій при згині балок, показують, що:

- 1) подовжні лінії викривляються по дузі кола;
- 2) поперечні лінії залишаються прямими і при цьому не змінюють свою довжину;
- 3) контури поперечних перерізів балки залишаються плоскими;

4) лінії контурів перерізів скрізь перетинаються під прямим кутом.

На підставі цих спостережень, можна зробити висновок, що при чистому згині поперечні перерізи балки залишаються плоскими і повертаються так, що залишаються нормальними до вигнутої осі балки (рис. 8.7). Таким чином, при згині, як і при розтязі-стиску, справедлива гіпотеза плоских перерізів, що має назву „гіпотези Бернуллі”.

Дослідження деформування балок в умовах згину показує, що при навантаженні балки від’ємним згинальними моментами верхні волокна балки подовжуються, нижні – коротшають, додатнім – навпаки. При цьому можна знайти волокна, довжина яких залишається незмінною. Сукупність таких волокон утворить деякий шар, що називається нейтральним. Кожен поперечний переріз перетинається з нейтральним шаром по прямій, що називається нейтральною лінією перерізу.

При плоскому згині нейтральний шар виявляється перпендикулярним до силової площини, отже, нейтральна лінія перпендикулярна до силової лінії у перерізі, при цьому вона перетинає центр ваги перерізу. Таким чином, нейтральна лінія збігається з головною центральною віссю перерізу і називається нейтральною віссю.

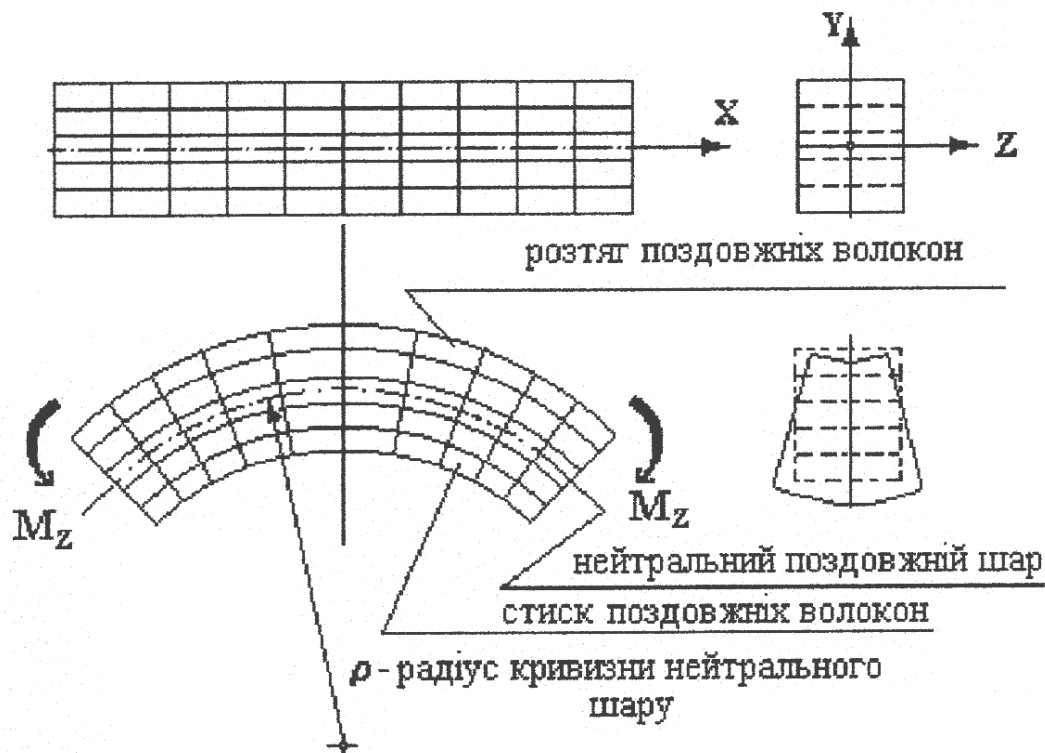


Рисунок 8.7

Використовуємо гіпотезу плоских перерізів для визначення нормальних напружень при чистому згині (рис. 8.8). Для цього виділимо елемент, обмежений двома поперечними перерізами, на відстані dx

(рис. 5.9,а). Торцеві перерізи при деформуванні залишаються плоскими і при цьому повернуться на деякий кут $d\varphi$ (рис. 8.9, б).

Прямолінійний відрізок нейтрального шару A_0B_0 перетворюється в дугу A_1B_1 з радіусом ρ , при цьому він не змінить своєї довжини. Волокно AB , що знаходиться на відстані y від нейтрального шару перейде в дугу A_2B_2 радіуса $\rho+y$, при цьому він змінить свою довжину. Відносне подовження цього волокна буде

$$\varepsilon = \frac{A_2B_2 - AB}{AB}.$$

З урахуванням того, що

$$\begin{aligned} A_2B_2 &= (\rho + y)d\varphi; \\ AB = A_0B_0 &= dx = \rho d\varphi, \end{aligned}$$

і скоротивши на $d\varphi$, одержуємо вираз для знаходження відносної деформації волокна на відстані y від нейтрального шару:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}.$$

Тепер розглянемо, в якому напруженому стані знаходиться досліджуване волокно AB . У поперечних перерізах немає дотичних напружень, тому що при чистому згині відсутня поперечна сила. З урахуванням парності дотичних напружень їх немає й у перерізах, рівнобіжних осі балки. Нормальні напруження в перерізах, рівнобіжних осі балки, так само дорівнюють нулю, тому що, відповідно до гіпотези плоских перерізів, лінійні деформації у перпендикулярному осі напрямку відсутні. Таким чином, волокно AB знаходиться в лінійному напруженому стані (розтяг-стиск). У цьому випадку напруження і відносні деформації зв'язані між собою за законом Гука (6.9): $\sigma = \varepsilon E$. У результаті чого, замінивши в цьому співвідношенні відносну деформацію, відповідно до отриманої залежності, маємо:

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y. \quad (8.7)$$

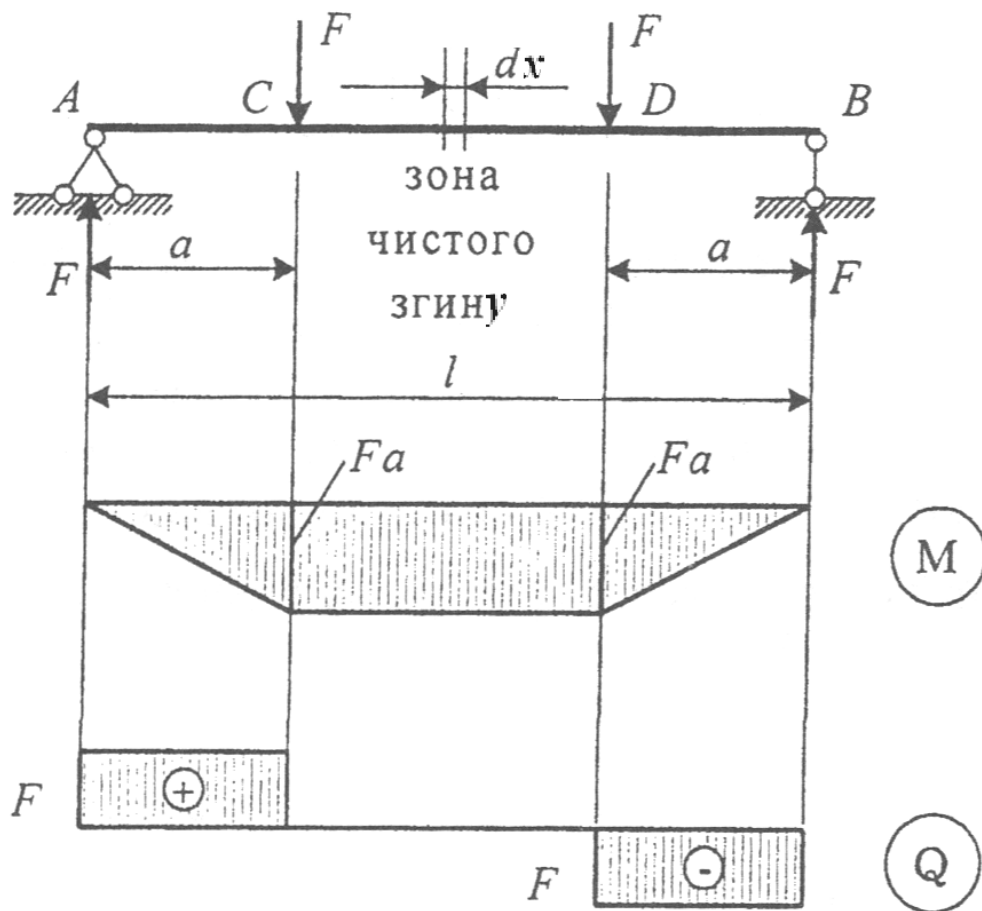


Рисунок 8.8

Підставляючи отриману залежність (8.7) у друге рівняння співвідношення (8.1) і з огляду на те, що модуль пружності й кривина нейтральної осі постійні в розглянутому перерізі і їх можна винести за знак інтеграла, одержуємо:

$$\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M.$$

Так як відповідно до виразу (7.9) інтеграл $\int_A y^2 dA$ являє собою момент інерції перерізу щодо нейтральної осі (осі z) попереднє співвідношення можна представити у вигляді:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}. \quad (8.8)$$

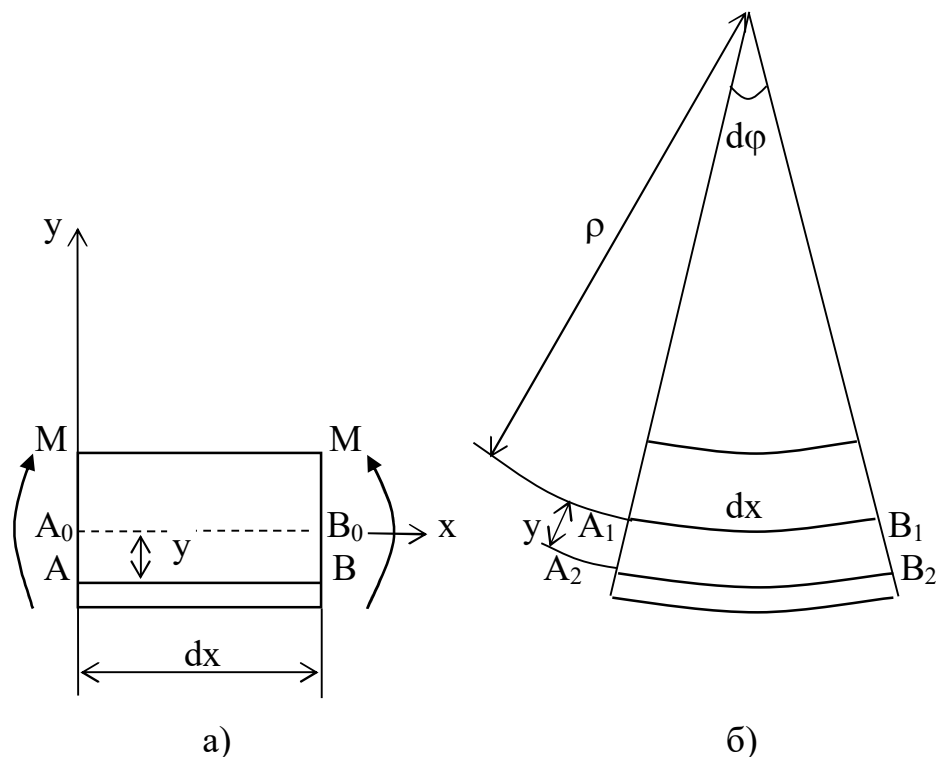


Рисунок 8.9

Отриманий вираз зв'язує між собою кривину осі балки і згинальний момент, що діє в перерізі. Аналізуючи (8.8), можна зробити висновок, якщо балка виготовлена з однорідного матеріалу, і має постійний поперечний переріз, то при чистому згині вісь її викривляється по дузі кола. При цьому кривина і згинальний момент прямо пропорційні, а величина EI_z називається жорсткістю при згині.

Підставимо (8.8) в (8.7) і одержимо:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z}. \quad (8.9)$$

Ця формула дозволяє знаходити нормальні напруження при чистому згині в будь-якій точці перерізу. У випадку прямого згину, коли деформування відбувається у площині головних центральних осей, індекс z в осьовому моменті інерції перерізу часто опускають.

Отримане співвідношення між нормальними напруженнями і згинальними моментами дозволяє зробити висновок, що яку б форму і розміри не мав поперечний переріз, напруження в точках, що знаходяться на нейтральній осі ($y = 0$), дорівнюють нулю. Величина нормального напруження лінійно зростає в міру віддалення від нейтральної осі. При

цьому напруження не змінюються по ширині перерізу. Отже, максимальна і мінімальна величина нормальних напружень для будь-яких перерізів, що мають горизонтальну вісь симетрії, буде збігатися з точністю до знака.

У розрахунках на міцність мають значення найбільші за абсолютною величиною значення напружень, які виникають у волокнах, найбільш віддалених від нейтральної осі:

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot y_{\max}}{I},$$

де y_{\max} - відстань від нейтральної осі до найбільш віддалених точок перерізу.

З урахуванням (5.8), одержуємо умову міцності при чистому згині:

$$W_z \geq \frac{M}{[\sigma]},$$

де $[\sigma]$ – допустимі напруження;

W_z – осьовий момент опору при згині щодо головної центральної осі – нейтральної осі при згині, який визначається відносно головних центральних осей і дорівнює відношенню осьового моменту інерції до відстані від цієї осі до максимально віддаленої від точки перерізу:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}},$$

У випадку прямого згину індекс z в моменті опору перерізу часто опускають.

З урахуванням цього умову міцності для балки при згині можна записати у вигляді

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}, \quad (8.10)$$

де M_{\max} – максимальний згинальний момент, що виникає в балці під дією зовнішніх навантажень.

Усі формули для визначення відносних деформацій і нормальних напружень, наведені вище (8.7)–(8.10) отримані для чистого прямого згину балок. Практика показує, що при поперечному згині балок, коли в перерізі крім згинаючого моменту діє ще і поперечна сила, можна користатися формулами, отриманими для чистого згину. При цьому погрішність виявляється несуттєвою. Крім того, напруження, що обумовлені наявністю поперечної сили, можна досліджувати окремо.

При поперечному згині, крім нормальних напружень у поперечних перерізах балки виникають також і дотичні напруження. Якщо поперечний

згин є *прямим*, то згинальний момент діє в площині, що збігається з однієї з головних площин балки. Поперечна сила при цьому, як правило, рівнобіжна площині дії згинаючого моменту, і проходить через центр ваги цього перерізу.

Поперечна сила зв'язана з дотичними напруженнями, що виникають у цьому перерізі, і визначається співвідношенням (4.4). У цьому випадку, дотичні напруження в поперечному перерізі балки при прямому згині (коли вважати, що всі зовнішні навантаження рівнобіжні осі y) мають один напрямок з поперечною силою і їх прийнято позначати без індексу, що позначає напрямок. Передбачається, що дотичні напруження по всій ширині перерізу в горизонтальному напрямку, рівнобіжному осі z , однакові, а їхня величина змінюється тільки за висотою перерізу і дорівнює, згідно с формулою Журавського [3]:

$$\tau = \frac{QS^*}{Ib}. \quad (8.11)$$

де Q – поперечна сила, що виникає в розглянутому поперечному перерізі балки;

S^* – статичний момент щодо нейтральної осі частини перерізу, розташованого вище або нижче лінії, що проходить через точку, у якій визначаються дотичні напруження;

I – момент інерції всього поперечного перерізу щодо нейтральної осі;

b – ширина поперечного перерізу на тому рівні, де визначаються напруження.

Приведена формула Журавського (8.11), отримана їм у припущенні, що переріз являє собою вузький прямокутник (при $\frac{h}{b} > 2$, де h – висота прямокутника, а b – його ширина), однак, як показує практика, її можна використовувати для будь-яких перерізів, крім тих місць у перерізі, де є вузькі прямокутники, розташовані перпендикулярно напрямку дії поперечної сили. Знак дотичних напружень у перерізі збігається зі знаком поперечної сили.

Максимальні дотичні напруження відповідно до отриманого співвідношення (8.11) будуть у точках, розташованих на нейтральній осі балки. Це твердження справедливе для всіх поперечних перерізів, крім, тих, в яких у районі нейтральної осі спостерігається різке збільшення ширини. Таким чином вираз для максимальних дотичних напружень має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{I} \left(\frac{S^*}{b} \right)_{\max}.$$

З урахуванням (5.9), одержуємо умову міцності при прямому поперечному згині балок по дотичних напруженнях для балки, в якій виникає поперечна сила Q :

$$\frac{Q_{\max}}{I} \left(\frac{S^*}{b} \right)_{\max} \leq [\tau], \quad (8.12)$$

де $[\tau]$ – допустимі дотичні напруження;

Q_{\max} – максимальне значення поперечної сили, що діє в поперечних перерізах балки.

Формули для визначення дотичних напружень і підбору перерізу (8.11) і (8.12) отримані для прямого поперечного згину балок.

У точках поперечного перерізу балки, найбільш віддалених від нейтральної осі, дотичні напруження дорівнюють нулю. У цих точках відповідно нормальні напруження досягають максимального значення (8.9). А в точках, де нормальні напруження дорівнюють нулю (8.9), відповідно дотичні напруження досягають максимальної величини (8.11). Отже, перевірка на міцність по нормальних і дотичних напруженнях при згині балок варто проводити окремо. При цьому в переважній більшості задач нормальні напруження істотно вище дотичних, тому основною формулою для розрахунків балок на міцність буде співвідношення (8.10).

8.3 Внутрішні зусилля в рамах

Стержнева система, елементи котрої (стійки – вертикальні і ригелі – горизонтальні) у всіх або деяких вузлах жорстко сполучені між собою, називаються *рамою*. Вісь таких систем являє собою ламану лінію. Якщо ламана лінія рами лежить в одній площині. То її називають *плоскою*. Будемо розглядати плоскі рами, навантажені в її площині. Тоді внутрішні зусилля, які виникають в якому-небудь перерізі, можна звести до трьох величин: згинального моменту M , поперечної сили Q і подовжніх зусиль N .

Визначення поперечної сили в даному випадку розширюється, тому що у ламаного бруса сили не завжди перпендикулярні до осі. Отже поперечною силою будемо вважати проекцію всіх сил, прикладених до лівої або правої частини бруса, на нормаль до осі бруса в тому перерізі, для якого визначається поперечна сила.

Подовжньою силою будемо вважати проекцію всіх сил, прикладених до лівої або правої частини бруса, на дотичну до його осі.

Поняття “зліва”, “справа”, “донизу” й “вверх” при розгляді вертикальних елементів системи залежить від спостерігача. В опорі матеріалів, як правило, прийнято спостерігати з середини контуру, який утворює рама. Тоді правило знаків для згинальних моментів і поперечних сил залишається таким же як і при згині балок (рис. 8.1).

Поздовжня сила, як і при розтягу-стиску стержнів, вважається додатною, якщо вона викликає розтяг стержня у перерізі, що розглядається, і від'ємною, якщо вона викликає стиск.

Крім перевірок з використанням диференціальних залежностей, при згині рам, необхідно ще перевірити рівновагу вузлів рами, тобто частин рами, отриманих проведенням перерізів, розташованих на нескінченно малих відстанях від точки з'єднання стержнів і окремих її частин.

9 ЗСУВ І КРУЧЕННЯ

9.1 Чистий зсув

У розрахунках деяких елементів конструкцій зустрічається вид навантаження, коли в перерізах діють тільки дотичні напруження. Такий напружений стан називається *чистим зсувом*. Він характеризується зміною спочатку прямих кутів – кутовою деформацією чи відносним зсувом.

Кутові деформації є наслідком дотичних напружень і зв'язані з ними функціональними залежностями. У межах пружності між відносним зсувом і дотичними напруженнями (рис. 9.1), що діють по гранях елемента, існує лінійна залежність. Ця залежність називається законом Гука при зсуві [3]:

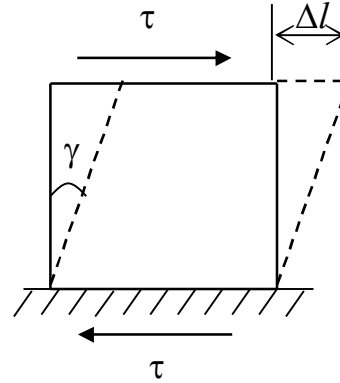


Рисунок 9.1

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (9.1)$$

де G – модуль пружності другого роду (модуль пружності при зсуві). Він визначається дослідним шляхом і є характеристикою матеріалу;
 γ – кутова деформація.

Співвідношення (6.1) можна подати у вигляді

$$\tau = G\gamma. \quad (9.2)$$

Для ізотропних матеріалів між модулем пружності при зсуві і модулем пружності при розтягу-стиску існує зв'язок виду:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

де E – модуль пружності при розтягу-стиску;
 μ – коефіцієнт Пуассона.

9.2 Розрахунок на зріз

Деформації зсуву в тілах спостерігаються в тих випадках, коли з усіх внутрішніх силових факторів, що діють у перерізі, ненульовими є тільки поперечні сили. На практиці зсув в чистому виді одержати важко, як правило, деформації зсуву супроводжуються іншими видами деформацій – стиском чи згином [1, 3].

З достатнім ступенем наближення деформація зсуву практично може бути отримана у випадку, коли на брус із протилежних сторін на близькій

відстані друг від друга діють дві рівні сили, перпендикулярні його осі і спрямовані в протилежні сторони, як показано на рисунку 9.2. Руйнування брусу при такому типі навантаження називається зрізом.

Розглянемо внутрішні силові фактори, напруження і деформації, що виникають при навантаженні бруса в такий спосіб. У даному випадку з усіх внутрішніх факторів у розглянутому перерізі I-I ненульовим буде тільки поперечна сила Q_y , що відповідно до методу перерізів дорівнює всім силам у відкинутій частині. Надалі не будемо вказувати індекс при силі, що показує, в якому напрямку вона діє: $Q = F$.

Припустимо, що величина дотичних напружень у поперечному перерізі не змінюється, тоді:

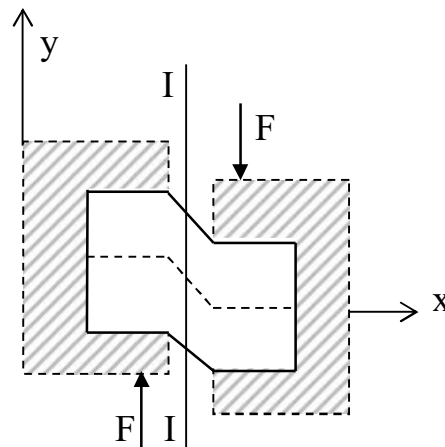


Рисунок 9.2

$$Q = \int_A \tau dA = \tau \int_A dA = \tau A, \quad (9.3)$$

відкіля:

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{F}{A}. \quad (9.4)$$

На практиці припущенням про рівномірність розподілу дотичних напружень користуються при розрахунках на зріз болтів, заклепувальних з'єднань, шпонок і інших деталей.

9.3 Кручення стержнів із круглим поперечним перерізом

Крученням називається такий вид деформування, при якому з усіх внутрішніх силових факторів ненульовим є тільки момент що крутить, $M_{кр}$. Кручення прямого бруса відбувається при навантаженні його зовнішніми крутними моментами, площина дії яких перпендикулярна до подовжньої осі бруса. Бруси, що працюють на кручення, звичайно називають валами, осями [1, 3].

Розглянемо круглий брус АВ, жорстко закріплений у площини MN, до вільного кінця якого прикладена пара сил, яка лежить у площині, перпендикулярній до осі бруса (рис. 9.3).

Ця пара сил створює момент $M_{кр} = Fa$, що скручує брус. Досвід показує, що при закрученні на невеликий кут у межах пропорційності матеріалу діаметр бруса і його довжина не змінюються, вісь залишається

прямою, а поперечний переріз плоским. Зміна форми відмічається твірними ab стержня, що із прямих ліній стають гвинтовими bb' (рис. 9.3). Тобто при крученні відбувається зсув поперечних перерізів бруса, кожний поперечний переріз повертається навколо осі x як жорсткий тонкий диск.

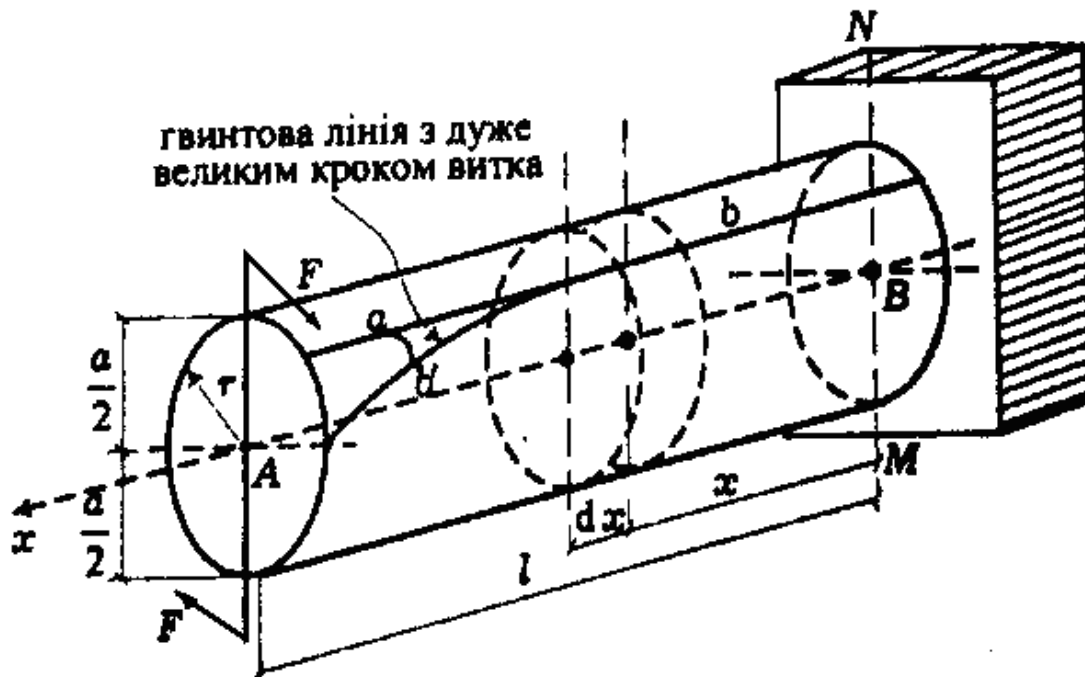


Рисунок 9.3

9.4 Внутрішні зусилля при крученні. Крутний момент

Внутрішні крутні моменти в поперечних перерізах валу визначаються методом перерізів з умови рівноваги відсіченої частини вала:

$$\sum M_x = 0.$$

Крутний момент у довільному поперечному перерізі валу дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, що скручують (включаючи і реакції закріплення), прикладених до нього по одну сторону від розглянутого перерізу.

У найпростішому випадку, коли вал, навантажений по краях тільки двома зовнішніми моментами, що рівні один одному за величиною і зворотними з напрямком, крутний момент у будь-якому поперечному перерізі вала за величиною дорівнює цим зовнішнім моментам.

У більш складних випадках, коли до вала прикладені кілька зовнішніх моментів, крутні моменти у поперечних перерізах будуть неоднакові на різних ділянках вала.

При розрахунках на міцність і жорсткість знак моменту, що крутить, не має особливого значення, однак для зручності прийняте наступне правило знаків: крутний момент, вважається додатним, якщо при погляді в торець відсіченої частини вала, зовнішній момент представляється спрямованим по годинниковій стрілці. Додатні і від'ємні напрямки моменту, що крутить, показані на рисунку 9.4.

Зміну крутних моментів по довжині вала зручно представляти за допомогою епюр моментів, які будуються згідно загальним правилам.

При побудові епюр моментів варто мати на увазі, що в перерізі, у якому на вал діє зовнішній зосереджений момент, ордината епюри міняється стрибкоподібно на величину, рівну значенню цього моменту.

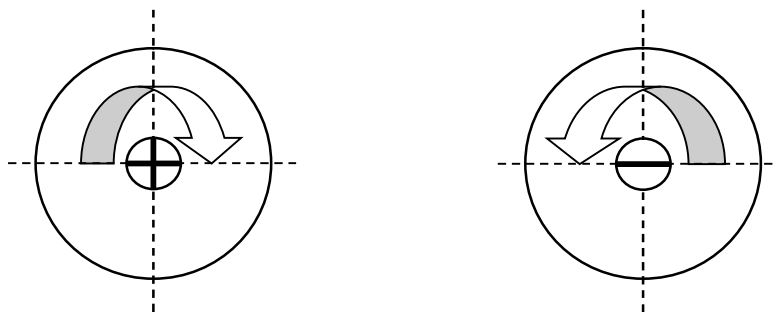


Рисунок 9.4

Якщо прямий вал знаходиться у стані спокою чи рівномірного обертання, то алгебраїчна сума всіх зовнішніх моментів, прикладених до нього дорівнює нулю.

9.5 Напруження і деформації при крученні

Для того, щоб визначити напруження, які виникають у поперечних перерізах вала, розглянемо внутрішні зусилля, що виникають у цих перерізах при крученні. З усіх силових факторів ненульовим виявляється тільки крутний момент, відповідно до співвідношень (4.4), який можна визначити в такий спосіб, якщо сполучити систему координат з центром ваги перерізу:

$$M_{кр} = \int_A (\tau_z y - \tau_y z) dA = \int_A \tau \rho dA; \quad (9.8)$$

де τ – дотичне напруження, що діє на елементарній площадці dA , напрямком якого є перпендикулярним до прямої, проведеної до цієї площадки від центра ваги перерізу, як показано на рисунку 9.5;

ρ – відстань від центра перерізу до елементарної площадки dA .

Для того щоб з'ясувати геометричну картину деформування

круглого вала при крученні, на його поверхню наносять сітку, що складається з ліній, рівнобіжних осі і ліній, що представляють рівнобіжні кола. При дії моменту, що скручує, твірні циліндра переходять у гвинтові лінії, з великим шагом; рівнобіжні кола не викривляються і відстань між ними не міняється; радіуси, проведені на торцях бруса, після деформування залишаються прямими. Припускаючи це приходимо до гіпотези плоских перерізів:

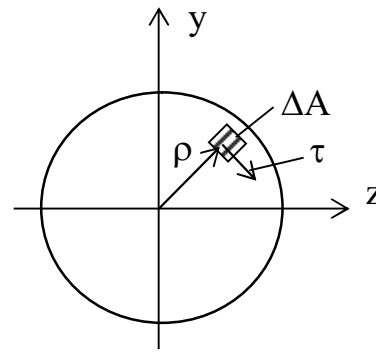


Рисунок 9.5

1) поперечні перерізи вала, плоскі й перпендикулярні до його осі до деформування, залишаються плоскими і перпендикулярними до осі і після деформування, вони тільки повертаються на деякі кути навколо неї;

2) радіуси поперечних перерізів не викривляються і зберігають свою довжину;

3) відстані уздовж осі вала між поперечними перерізами у процесі деформування не змінюються.

Ці припущення справедливі (як показує практика і більш точні дослідження деформування) для брусів, що мають суцільний круглий чи кільцевий поперечний переріз.

Розглянемо деякий вал, навантажений моментом, що скручує, $M_{\text{скр}}$. Виділимо деяку ділянку вала (рис. 9.6), яка наведена на рисунку 6.3, довжиною dx . Припустимо, кут повороту перерізу I-I, щодо нерухомої системи координат, буде φ , а кут повороту перерізу II-II, розташованого на відстані dx буде $\varphi+d\varphi$. Таким чином, кут закручування розглянутої ділянки буде $d\varphi$.

Розглянемо деформування прямокутного елемента $AB'D'C$, виділеного в поверхні вала, як показано на рисунку. Так як радіуси залишаються прямими, то відрізок $O'B'$ повернеться в площині поперечного перерізу на кут закручування $d\varphi$ і займе положення $O'B$, а твірна AB' займе нове положення AB під кутом γ , аналогічно, твірна CD' займе положення CD .

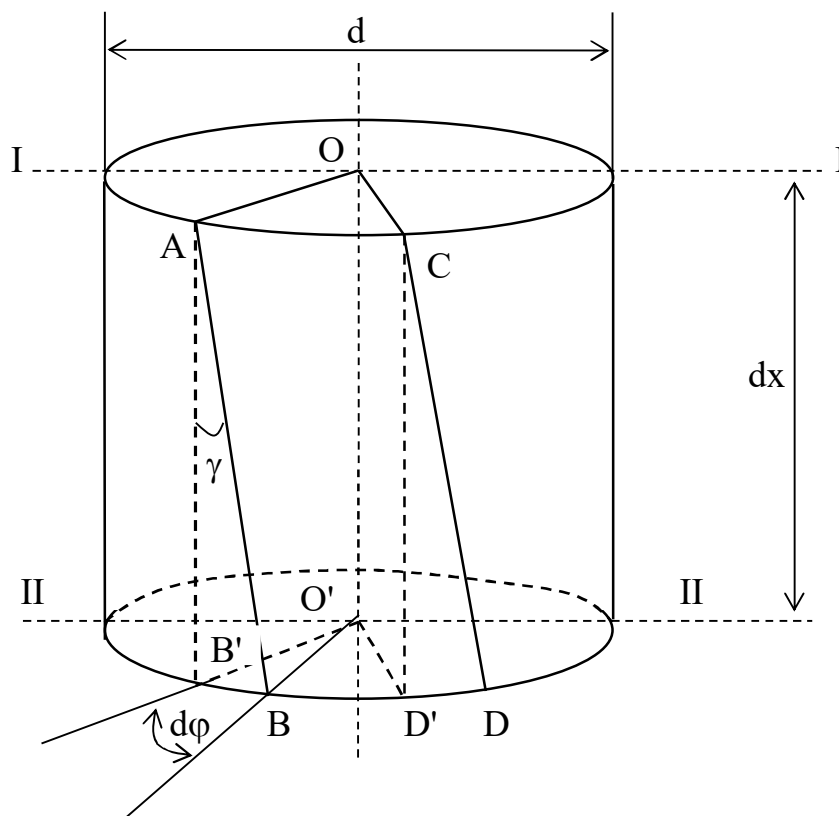


Рисунок 9.6

Так як довжина цих відрізків не змінюється, деформування прямокутного елемента $AB'D'C$ полягає в зміні спочатку прямих кутів на величину γ , як наведено на рисунку 9.7, а кутові деформації є наслідком дотичних напружень. Таким чином, розглянутий елемент знаходиться в умовах чистого зсуву і на його гранях діють дотичні напруження τ .

З урахуванням цього кут γ є кутом зсуву і, з урахуванням його малості, дорівнює:

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma = \frac{B'B}{AB'}$$

Оскільки що $AB' = dx$, а $B'B = R d\phi$, кут зсуву на поверхні вала дорівнює:

$$\gamma = \vartheta R, \quad (9.9)$$

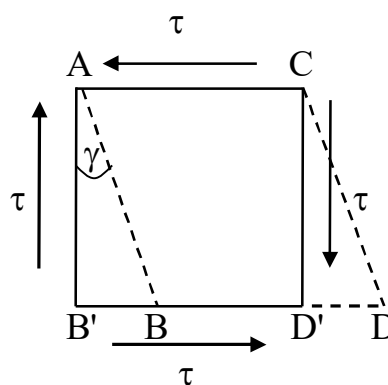


Рисунок 9.7

де $\vartheta = \frac{d\varphi}{dx}$ – відносний, чи погонний кут закручування;

$R = \frac{d}{2}$ – радіус зовнішнього кола.

Аналогічно можна виділити такий само елемент усередині вала на довільній циліндричній поверхні радіуса ρ . У цьому випадку кут зсуву буде дорівнювати:

$$\gamma = \vartheta \rho. \quad (9.10)$$

Так як розглянутий елемент усередині вала на циліндричній поверхні радіусом ρ знаходиться у стані чистого зсуву, то співвідношення (6.10), з обліком (6.2) можна подати у вигляді:

$$\tau = G\vartheta\rho. \quad (9.11)$$

Зі співвідношень (6.10) і (6.11) випливає, що кути зсуву і дотичні напруження в поперечному перерізі змінюються за лінійним законом прямо пропорційно відстані від центра ваги перетину (рис. 6.8). Максимальні дотичні напруження будуть на зовнішній поверхні вала, де $\rho=R$:

$$\tau_{\max} = G\vartheta R. \quad (9.12)$$

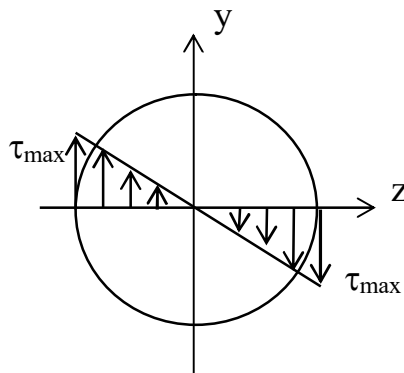


Рисунок 9.8

Для того, щоб зв'язати внутрішні зусилля, що виникають у валу і його деформації, підставимо співвідношення (9.11) у (9.8) і з обліком (7.10):

$$M_{кр} = \int_A \tau \rho dA = G\vartheta \int_A \rho^2 dA = G\vartheta I_p, \quad (9.13)$$

де I_p – полярний момент інерції розглянутого перерізу.

Зі співвідношення (9.13) можна одержати формулу для визначення відносного кута закручування вала:

$$\vartheta = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_{\rho}}, \quad (9.14)$$

де GI_{ρ} – жорсткість вала при крученні.

Використовуючи вираз (9.14), можна визначити кут закручування φ двох перерізів, розташованих на відстані l відносно один одного:

$$\varphi = \int_0^l \vartheta dx = \int_0^l \frac{M_{\text{кр}}}{GI_{\rho}} dx. \quad (9.15)$$

Якщо в межах розглянутої ділянки, крутні моменти і жорсткість не змінюється уздовж вала, то можна записати:

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{GI_{\rho}}. \quad (9.16)$$

Ця формула встановлює лінійний зв'язок між внутрішнім зусиллям при крученні (крутним моментом) і деформацією (кут закручування) і називається *законом Гука при крученні*. Формула справедлива у випадку, коли дотичні напруження не перевершують межі пружності.

Для визначення дотичних напружень у точках перерізу на відстані ρ від центра ваги підставимо у формулу (6.11) вираження відносного кута закручування (9.14):

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}} \rho}{I_{\rho}}. \quad (9.17)$$

Максимальне дотичне напруження, що діє на зовнішній поверхні вала, буде відповідно (9.12):

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр}} R}{I_{\rho}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}, \quad (9.18)$$

де R – радіус круглого перерізу чи радіус зовнішнього кола кільцевого перерізу;

W_{ρ} – момент опору при крученні.

Момент опору при крученні дорівнює відношенню полярного моменту інерції до максимально вилученої від центру ваги точки перерізу ρ_{max} :

$$W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{\rho_{\text{max}}}, \quad (9.19)$$

Для круглого перерізу:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Для кільцевого перерізу, із внутрішнім діаметром d і зовнішнім D буде дорівнює:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4),$$

де $\alpha = \frac{d}{D}$.

З умови міцності найбільші дотичні напруження, що виникають, не повинні перевищувати допустимих напружень (5.9):

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (9.20)$$

При розрахунку на міцність по заданих навантаженнях і геометричних характеристиках вала по формулі (9.18) визначаються найбільші дотичні напруження і порівнюються з допустимими (9.19). При цьому найбільші дотичні напруження визначаються в небезпечному перерізі, в якому крутний момент найбільший по абсолютній величині. Для визначення небезпечного перерізу зручно будувати епюру крутних моментів.

При підборі поперечного перерізу по заданому навантаженню із умови міцності визначається необхідна величина полярного моменту опору:

$$W_p = \frac{|M_{\text{кр}}|_{\max}}{[\tau]}, \quad (9.21)$$

де $|M_{\text{кр}}|$ – максимальне по абсолютній величині значення крутного моменту.

Розрахунок вала на жорсткість полягає в тім, щоб у ньому не виникали деформації більше припустимих, котрі визначаються умовами експлуатації.

Умова жорсткості вала при крутінні має вигляд

$$\vartheta_{\max} \leq [\vartheta], \quad (9.22)$$

де ϑ_{\max} – найбільший відносний кут закручування, що визначається за формулою (6.14);

$[\vartheta]$ – відносний кут закручування, що допускається (для різних елементів конструкцій $[\vartheta] = (0.2-5) \cdot 10^{-4}$ радіан на 1 см довжини).

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Конспект лекцій з курсу «Технічна механіка» (для студентів 2 курсу денної та заочної форм навчання бакалаврів напряму підготовки 6.070101 – Транспортні технології (за видами транспорту) / В. П. Шпачук, В. О. Пушня; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2012. – 113 с.

2. Теоретична механіка : навч.-метод. посібник і завдання для контрольних і самостійних робіт / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 146 с.

3. Опір матеріалів: конспект лекцій для студентів 1–2 курсів денної та заочної форм навчання за спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології / В. П. Шпачук, О. О. Чупринін, Н. В. Середа, В. О. Склярів; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – Частина 1. Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при базових навантаженнях – 115 с.

4. Опір матеріалів: конспект лекцій / За заг. ред. В. П. Шпачука; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2014. – Ч. 2. Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при складних навантаженнях – 109 с.

Навчальне видання

ЧУПРИНІН Олександр Олексійович,
ПУШНЯ Валентин Олександрович

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для студентів 1–3 курсів денної і заочної форм навчання
за спеціальностями 275 – Транспортні технології (за видами)
та 206 – Садово-паркове господарство)*

Відповідальний за випуск *А. О. Гарбуз*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2020, поз. 76 Л.

Підп. до друку 12.03.2020. Формат 60 × 84/16.

Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 4,7.

Тираж 50 пр. Зам. № .

Видавець і виготовлювач :

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.

Електронна адреса : rektorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи :

ДК № 5328 від 11.04.2017.