

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

Я. В. ЩЕРБАК, К. Я. ІВАКІНА

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ
ЕЛЕКТРОМЕХАНОТРОННИХ СИСТЕМ**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

**Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2019**

УДК 681.5(075.8)

Щ60

Автори:

Щербак Яків Васильович, доктор технічних наук професор кафедри автоматизованих електромеханічних систем Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»;

Івакіна Катерина Яківна, кандидат технічних наук старший викладач кафедри систем електропостачання та електроспоживання міст Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рецензенти:

М. Л. Лисиченко, доктор технічних наук, професор Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка;

Ю. М. Кутовий, кандидат технічних наук, професор Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»

*Рекомендовано до друку Вченою радою
Харківського національного університету міського господарства
імені О. М. Бекетова, протокол № 12 від 06 липня 2018 р.*

Щербак Я. В.

Щ60 Основи теорії автоматичного регулювання електромеханотронних систем : навч. посібник / Я. В. Щербак, К. Я. Івакіна ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 222 с.

ISBN 978-966-695-489-6

У навчальному посібнику висвітлено засади теорії та методи аналізу й синтезу автоматичних електромеханотронних систем. Приведений матеріал містить широке коло питань з теорії лінійних неперервних та імпульсних систем автоматичного регулювання. Розглянуто моделювання динамічних ланок і автоматичних систем з перетворювачами електроенергії.

Призначено для студентів спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка, електромеханіка, а також інших електротехнічних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів та наукових співробітників і інженерів.

УДК 681.5(075.8)

ISBN 978-966-695-489-6

© Я. В. Щербак, К. Я. Івакіна, 2019

© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1 ПРИНЦИПИ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ.....	7
1.1 Короткий історичний нарис розвитку автоматики.....	7
1.2 Поняття про автоматичне регулювання.....	9
1.3 Класифікація автоматичних систем.....	13
1.3.1 Класифікація САР за призначенням.....	13
1.3.2 Класифікація САР за способом діяннн на об'єкт регулювання.....	14
1.3.3 Класифікація САР за величиною похибки.....	14
1.3.4 Класифікація САР по характеру керуючого діяннн.....	16
1.3.5 Класифікація за характером передавальних сигналів.....	18
1.4 Закони регулювання.....	25
1.5 Типові діяннн в системах автоматичного регулювання. Основні задачі теорії автоматичного керування.....	28
1.6 Лінеаризація нелінійних рівнянь системи автоматичного регулювання.....	32
Питання та завдання для самоперевірки.....	37
2 ДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ.....	38
2.1 Диференційні рівняння динамічних ланок системи автоматичного регулювання.....	38
2.1.1 Пропорційна ланка.....	38
2.1.2 Диференційна ланка.....	38
2.1.3 Інтегрувальна ланка.....	39
2.1.4 Аперіодична ланка.....	40
2.1.5 Диференційна ланка з уповільненням.....	42
2.1.6 Ізодромна ланка.....	43
2.1.7 Коливальна ланка.....	43
2.1.8 Консервативна ланка.....	45
2.2 Диференційні рівняння замкнутої системи.....	45
2.3 Перетворення Лапласа.....	46
2.3.1 Загальні відомості про перетворення Лапласа.....	46
2.3.2 Теорема перетворення Лапласа.....	48
2.4 Операційний метод розв'язання диференційних рівнянь.....	54
2.5 Передавальні функції динамічних ланок.....	55
2.5.1 Визначення передавальної функції.....	55
2.5.2 Передавальні функції елементарних ланок.....	56
2.5.3 Запис передавальної функції динамічної ланки по її електричній схемі.....	58
2.6 Реалізація передавальних функцій динамічних ланок на операційному підсилювачі.....	59
2.6.1 Загальні відомості про операційний підсилювач.....	59
2.6.2 Інвертувальна ланка на операційному підсилювачі.....	60

2.6.3	Неінвертувальна ланка на операційному підсилювачу.....	61
2.6.4	Реалізація на операційному підсилювачі передавальних функцій типових динамічних ланок.....	62
2.7	Структурні схеми систем автоматичного регулювання.....	67
2.7.1	Визначення структурної схем.....	67
2.7.2	Правила перетворення структурних схем.....	68
2.7.3	Запис передавальної функції замкненої системи.....	70
2.8	Часові характеристики динамічних ланок.....	71
2.8.1	Визначення часових характеристик.....	71
2.8.2	Перехідна функція динамічної ланки.....	71
2.8.3	Функція ваги динамічної ланки.....	74
2.9	Частотні характеристики динамічних ланок.....	76
2.9.1	Визначення частотних характеристик.....	76
2.9.2	Амплітудно-частотна характеристика.....	78
2.9.3	Фазо-частотна характеристика.....	78
2.9.4	Амплітудно-фазочастотна характеристика.....	80
2.9.5	Логарифмічні частотні характеристики.....	80
2.9.6	Асимптотична логарифмічна амплітудно-частотна характеристика.....	82
2.9.7	Частотні характеристики типових динамічних ланок.....	84
2.9.8	Частотні характеристики немінімально-фазової ланки.....	93
2.9.9	Частотні характеристики динамічної ланки із запізненням.....	95
	Питання та завдання для самоперевірки.....	97
3	СТІЙКІСТЬ ТА ЯКІСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ.....	98
3.1	Стійкість систем автоматичного регулювання.....	98
3.1.1	Визначення стійкості.....	98
3.1.2	Умова стійкості системи автоматичного регулювання.....	100
3.1.3	Критерій стійкості Рауса – Гурвіця.....	102
3.1.4	Критерій стійкості Найквіста.....	106
3.1.5	Критерій стійкості Михайлова.....	108
3.2	Критерії якості систем автоматичного регулювання.....	110
3.2.1	Основні показники якості.....	110
3.2.2	Критерії точності.....	112
3.2.3	Запас стійкості та швидкодія.....	115
3.2.4	Оцінка якості перехідних процесів за логарифмічною амплітудно-частотною характеристикою.....	117
3.2.5	Корекція системи автоматичного регулювання.....	119
	Питання та завдання для самоперевірки.....	127
4	ІМПУЛЬСНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ.....	128
4.1	Визначення імпульсної системи.....	128
4.1.1	Види імпульсної модуляції. Параметри імпульсного елемента.....	128

4.1.2 Дискретний фільтр.....	134
4.1.3 Екстрополятори.....	134
4.2 Математичний опис імпульсної системи.....	135
4.2.1 Пряме Z -перетворення.....	135
4.2.2 Властивості Z -перетворення.....	137
4.2.3 Реакція приведеної неперервної частини на послідовність δ -функцій.....	139
4.2.4 Передавальна функція імпульсної системи.....	141
4.2.5 Модифіковане Z -перетворення.....	147
4.2.6 Зворотне Z -перетворення.....	152
4.3 Стійкість і якість імпульсних систем автоматичного регулювання.....	154
4.3.1 Визначення стійкості імпульсної системи.....	154
4.3.2 Відображення уявної осі p -площини на z -площину.....	155
4.3.3 Відображення лівої половини p -площини на z -площину.....	155
4.3.4 Аналітична перевірка стійкості.....	156
4.3.5 Оцінка якості імпульсних систем.....	158
4.3.6 Процес кінцевої тривалості.....	159
Питання та завдання для самоперевірки.....	166
5 АВТОМАТИЗОВАНІ ЕЛЕКТРОМЕХАНОТРОННІ СИСТЕМИ.....	167
5.1 Принципи автоматизації електромеханотронних систем.....	167
5.2 Моделювання динамічних ланок електромеханотронних систем.....	169
5.2.1 Загальні положення моделювання динамічних ланок у MATLAB.....	169
5.2.2 Моделювання пропорційної ланки.....	171
5.2.3 Моделювання інтегрувальної ланки.....	178
5.2.4 Моделювання аперіодичної ланки.....	180
5.2.5 Моделювання ізодромної ланки.....	183
5.2.6 Динамічна ланка із сповільненням.....	185
5.2.7 Моделювання немініміально-фазової динамічної ланки.....	187
5.2.8 Моделювання коливальної динамічної ланки.....	191
5.3 Динаміка системи автоматичного регулювання вихідної напруги перетворювача електричної енергії з ШІМ.....	193
5.3.1 Система автоматичного регулювання з неперервною моделлю перетворювача.....	193
5.3.2 Аналіз динамічних характеристик системи автоматичного регулювання струму збудження двигуна постійного струму...	200
5.3.3 Система автоматичного регулювання з імпульсною моделлю перетворювача.....	214
Питання та завдання для самоперевірки.....	219
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	221

ВСТУП

Сучасний технічний рівень у промисловості і транспорті характеризується вдосконалюванням застарілих технологічних процесів та повсюдного впровадження нових високоефективних технологій. Це передбачає широке впровадження автоматичних засобів автоматизації, що базуються на новій елементній базі.

Особливістю автоматичної як наукової дисципліни є спільність математичного опису і практичне застосування закономірностей у системах різноманітного фізичного походження – механічних, пневматичних, гідравлічних, електричних, електронних тощо. У наслідок цього знання основ теорії автоматичного керування необхідне для інженерно-технічним працівникам переважної більшості спеціальностей. Робота будь-яких автоматичних систем – від найпростіших до найскладніших базується на тих самих основних принципах. Чітке усвідомлення їхньої сутності і знання основ теорії автоматичного керування – необхідною умовою для правильного розуміння принципу дії, особливостей побудови й експлуатації будь-яких автоматичних пристроїв. Даний підхід покладено в основу побудови навчального посібника.

Посібник «Основи теорії автоматичного регулювання електромеханотронних систем» включає у собі розділи із лінійних безперервних, лінійних імпульсних систем та приклади моделювання в середовищі MATLAB динамічних ланок і складових автоматизованих електромеханотронних систем. Основні положення теорії автоматичного регулювання викладені на основі лінеаризованих стаціонарних моделей із застосування операторно-частотних методів, визначення передавальної функції та часових характеристик. На думку авторів, такий виклад теорії автоматичного регулювання автоматизованих електромеханотронних систем є доступним студентам надає їм можливість виконання аналізу і синтезу при проектуванні автоматичних систем із елементами штучного інтелекту, а також дозволяє вибір дій при експлуатації таких систем.

1 ПРИНЦИПИ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

1.1 Короткий історичний нарис розвитку автоматики

Ідея створення машин, що працюють «самі по собі», без участі людини, виникла дуже давно. Але поява перших автоматичних пристроїв промислового призначення пов'язана з винаходом і розвитком парових машин та турбін. Широке промислове застосування парових машин стало багатоманітним лише з оснащенням їх такими автоматичними пристроями, як автоматичний парарозподільчий механізм, регулятор рівня води в котлі парової машини, регулятор обертів вихідного вала машини і т. д. Винахід першого в світі промислового регулятора припадає на 1765 р. і належить кріпосному механіку І. І. Ползунову. Цим регулятором був регулятор, що автоматично підтримував заданий рівень води в котлі парової машини незалежно від інтенсивності відбору пари. В 1784 р. англійський механік Джеймс Уатт одержав патент на центробіжний регулятор швидкості парової машини.

Запропонований І. І. Ползуновим принцип регулювання за відхиленням до нашого часу остається одним із основних принципів побудови різних автоматичних пристроїв. Схема регулятора Ползунова наведена на рисунку 1.1. Принцип дії регулятора полягає в такому. На поверхні води в котлі парової машини розміщено поплавковий механізм (1) який через систему важелів зв'язаний із клапаном (2) вхідного трубопроводу (3). Коли рівень води в котлі дорівнює заданій величині h , вихід трубопроводу (3) перекрито клапаном 2. У разі зниженню рівня води, по мірі відбору пари, поплавок (1), переміщуючись разом із поверхнею води через систему важелів, відкриває клапан (2). Шляхом регулювання положення клапана відносно трубопроводу автоматично піддержується заданий рівень води в котлі.

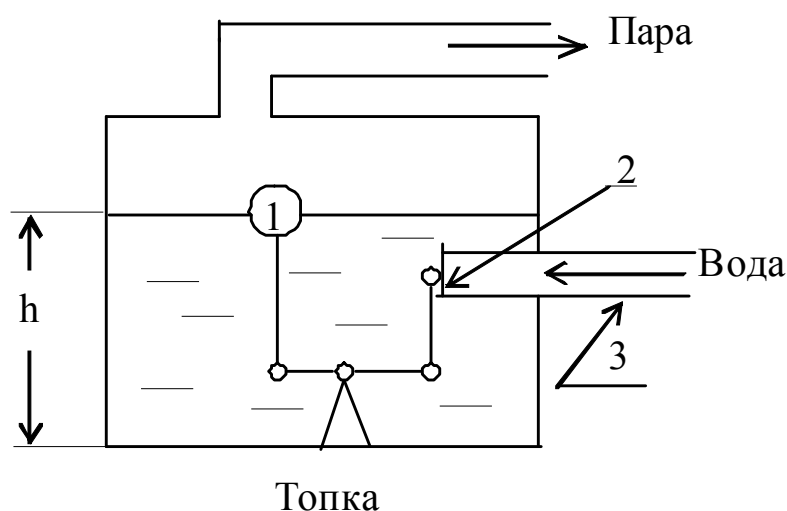


Рисунок 1.1 – Регулятор рівня води

Автоматичні пристрої для забезпечення заданих параметрів парових двигунів та турбін довгий час були головними представниками автоматичних регуляторів промислового призначення. Починаючи з другої половини XIX століття велику роль у розвитку автоматики відіграло зародження промислової електротехніки. Застосування електрики значно розширило можливості побудови складних автоматичних пристроїв. Одним із перших електричних автоматів був електромагнітний регулятор швидкості обертання вала парового двигуна, розроблений у 1854 р. К. І. Константиновим.

Проектування перших автоматичних пристроїв велось емпіричним шляхом і супроводжувалось багатьма невдачами. Основи наукового підходу до проектування автоматичних регуляторів було закладено професором Петербургського технологічного інституту І. О. Вишнеградським (1831–1895 рр.), роботи якого «Про загальну теорію регуляторів», «Про регулятори прямої дії», що були опубліковані в 1876 і 1878 р. [1], започаткували теорію автоматичного управління і регулювання. Однак і після цього розвиток теорії автоматично діючих пристроїв у різних сферах техніки в продовж значного часу відбувався незалежно один від одного. Великий вклад у теорію автоматичного регулювання внесли роботи пов'язані з стійкістю автоматичних систем. Засновником строгої теорії стійкості є професор Харківського університету академік О. М. Ляпунов (1857–1918 рр.). Особливо інтенсивно теорія автоматичного регулювання почала розвиватись із кінця тридцятих років XX століття, коли були розроблені частотні методи аналізу стійкості лінійних систем, поставлена проблема якості регулювання та закладено основи ефективних методів дослідження нелінійних систем. Чітке розуміння тієї обставини, що робота будь-яких автоматичних пристроїв, незалежно від їхнього походження та призначення, ґрунтується на загальних принципах і може бути розглянута з єдиної позиції, прийшло значно пізніше – у сорокових роках XX століття. На цей час припадає і закінчення формування автоматики в самостійну наукову дисципліну. У подальшому істотний розвиток одержала теорія лінійних систем. Так, були розроблені методи оцінки якості перехідних процесів та динамічної точності систем. Розроблена теорія дискретних систем автоматичного регулювання. Одержали подальший розвиток методи дослідження нелінійних систем. Одержані головні результати в теорії інваріантності, у яких сформульовані критерії реалізації умов інваріантності. Крім того, виникли нові наукові напрями: теорія оптимальних систем, що самоналаштовуються; теорія розпізнавання образів; теорія чутливості.

Унаслідок злиття теорії автоматичного регулювання з теорією інформації та теорією обчислюваних машин виник новий напрям у науці – теорія автоматичного керування. Формування цієї теорії є новим етапом розвитку автоматики.

У розвиток автоматики як науки визначний внесок зробили П. Л. Чебишев, Б. В. Булгаков, А. В. Михайлов. Значний вклад у розвиток сучасної науки про керування внесли Б. Н. Петров, Є. П. Попов, В. В. Солодовников, Я. З. Ципкін, В. П. Шипілло.

Варто зазначити, що методи дослідження, які розроблені в теорії автоматичного управління та регулювання, є загальними, сфера застосування яких виходить за межі дисципліни. Принципи керування за якими будуються технічні системи, мають універсальний характер. Аналогічні принципи (наприклад принцип зворотного зв'язку) є властивим регуляційним системам живих організмів, системам управління виробництвом та суспільством. Тому вивчення теорії автоматичного керування та регулювання на сьогодні є необхідним для спеціалістів не тільки в сфері автоматичної, а й в інших напрямках.

1.2 Поняття про автоматичне регулювання

Стан будь-якого технічного агрегату можна охарактеризувати однією або декількома фізичними величинами. Наприклад, генератор електричного струму характеризується величиною напруги на вихідних клеммах та частотою цієї напруги, електричний двигун – обертами його вала, електричний транспортний засіб – швидкістю руху та силою тяги, електричний перетворювач електричної енергії – величинами вихідних напруги та струму.

У теорії автоматичного регулювання технічний агрегат називають регульованим об'єктом, а фізичні величини, що характеризують його стан, – регульованими величинами [2–7]. Автоматичним регулюванням називається зміна регульованої величини за заданим законом без безпосередньої участі людини. Мета регулювання полягає в забезпеченні необхідного закону зміни регульованої величини. Закони зміни регулюємої величини можуть бути різними. Наприклад, у багатьох технічних задачах вимагається підтримувати регульовану величину на заданому постійному рівні. У більш складніших випадках вимагається змінювати регульовану величину в часі (або в функції якоїсь другої величини) за наперед заданим законом. Зазвичай закон зміни регульованої величини наперед є невідомим, тобто є випадковою функцією часу. Наприклад, зазвичай є необхідним, щоб напруга генератора та її частота підтримувались постійними на заданих рівнях, швидкість руху транспортного засобу змінювалась за заздалегідь розробленою програмою, вихідні напруга та струм напівпровідникового перетворювача електричної енергії не змінювались при змінах параметрів вхідної напруги та навантаження. Отже, регульовану величину $y(t)$ об'єкта (рис. 1.2) необхідно регулювати так, щоб вона дорівнювала заданій величині $y_3(t)$, тобто

$$e_{ycm}(t) = \lim \Delta e(t). \quad (1.1)$$

Величина $y_3(t)$ може бути постійною або змінюватись за якимось законом (наперед відомому або невідомому).

Для того щоб регульована величина об'єкта прийняла необхідне значення, на його вхід подається регульовальне діяння $q(t)$.

У реальних об'єктах регулювання завжди присутні причини, що відхиляють регульовану величину від необхідного закону його зміни. Такі причи-

ни називаються збурювальними діями й позначаються f_1, \dots, f_n . Серед збурювальних можна відокремити одне або декілька, що найсильніше діють на регульовану величину. Такі збурювальні дії називають основними, а всі останні – другорядними.

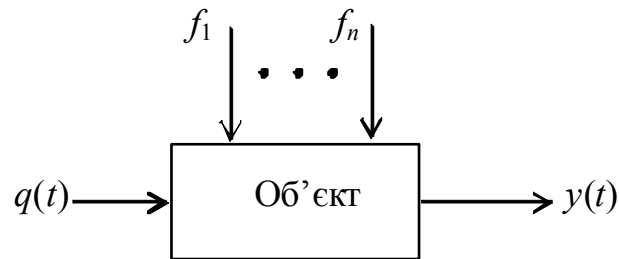


Рисунок 1.2 – Схема об'єкта та зовнішніх збурень

Деякі приклади конкретних об'єктів регулювання різної фізичної природи наведені на рисунку 1.3. На рисунку 1.3, а наведено резервуар $ГР$ гальмової системи електровоза, що живиться за допомогою стисненого повітря від компресора $К$. Необхідно, щоб тиск повітря в резервуарі підтримувався на заданій незмінній рівні P_0 . У такому разі тиск є регульованою величиною. Необхідний закон регулювання $y(t) = P_0 = const$. Головною причиною (збурювальним діями), що призводять до відхилення тиску від заданої величини P_0 , є відкриття гальмового крана.

З-поміж другорядних можна виокремити: негерметичність міжвагонних з'єднань гальмового трубопроводу; зміни параметрів стиснутого повітря внаслідок змін температури.

Відхилення тиску від заданої величини P_0 у такій системі може компенсуватись шляхом зміни продуктивності компресора, що досягається за допомогою регулювання обертів привідного електричного двигуна або регулювання часу його роботи за умови незмінної продуктивності.

На рисунку 1.3, б наведена схема електроприводу з двигуном постійного струму незалежного збудження. Якірне коло двигуна M підключено до керованого джерела постійного струму $КД$ із напругою $U_я$, величину якої можна збільшувати або зменшувати, змінюючи U_3 .

Регульованою величиною є кутова швидкість Ω обертання якоря двигуна. Зазвичай потрібно, щоб ця швидкість була незмінною та дорівнювала заданій величині, тобто $\Omega = \Omega_0 = const$. Головним збурювальним діями, що впливає на швидкість обертання якоря, у цій системі регулювання є зміни навантаження в наслідок підключення або відключення механізмів. Серед другорядних збурень можна виокремити зміни струму I_0 обмотки збудження LE , зміни опору щітково-колекторного вузла (унаслідок спрацьовування щіток), тощо. Об'єктом регулювання є електричний двигун, а регулювальним органом – кероване джерело живлення $КД$, вихідна напруга $U_я$ якого змінюється під дією керувального діяння U_3 . У разі збільшення U_3

збільшується напруга $U_{я}$, що викликає збільшення швидкості. І навпаки, зменшення U_3 викликає зменшення кутової швидкості якоря двигуна.

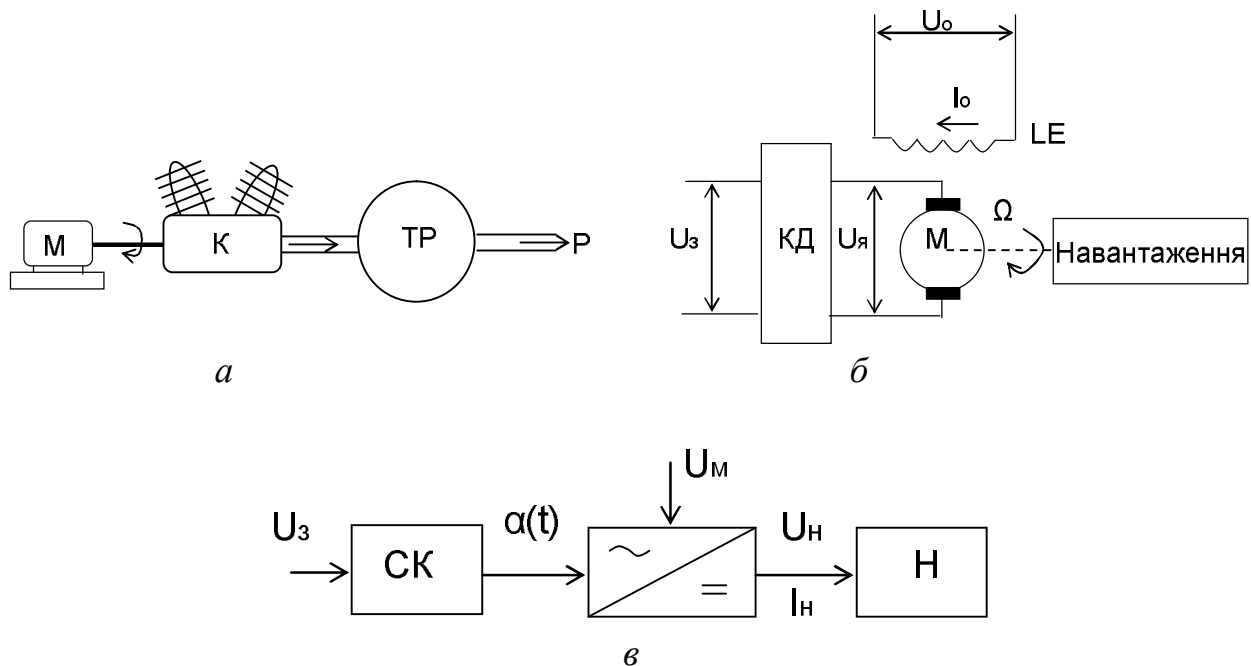


Рисунок 1.3 – Приклади об'єктів регулювання:

- а – резервуар гальмової системи електровоза;*
- б – схема електроприводу з двигуном постійного струму незалежного збудженням;*
- в – функціональна схема керованого напівпровідникового перетворювача змінної напруги U_m в постійну U_n*

На рисунку 1.3, в зображена функціональна схема керованого напівпровідникового перетворювача змінної напруги U_m у постійну U_n . Управління перетворювачем здійснюється системою керування СК. Основне збудююче діяння викликає навантаження Н. Зміна величини навантаження викликає зміни струму I_n та напруги U_n . Другорядні збудювальні діяння є результатом змін живильної напруги U_m , змін температури, що впливають як на перетворювач, так і на систему керування тощо. У цій системі об'єктом регулювання є перетворювач. Регульовальний орган – система керування, що формує керувальне діяння $\alpha(t)$. Змінюючи вхідне діяння U_3 , можна компенсувати зміни вихідної напруги перетворювача.

Із наведених прикладів неважко зробити висновок, що розглянуті об'єкти регулювання є частковими випадками функціональної схеми, зображеної на рисунку 1.2. У кожному конкретному випадку змінюється лише фізична сутність регульованої величини $y(t)$, регульовальної величини $q(t)$ і збудюючих діянь $f_1 \dots f_n$. Пристрій, що автоматично вирішує задачу регулювання в певному об'єкті, називається автоматичним регулятором. Об'єкт регулювання та автоматичний регулятор у сукупності утворюють систему автоматичного регулювання (САР). На рисунку 1.4 наведена узагальнена функціона-

льна схема системи автоматичного регулювання. Функціональною називається схема автоматичного регулювання, що містить елементи, які виконують конкретні самостійні функції та зв'язки між ними. Окремий елемент функціональної схеми можна замінити певним пристроєм автоматики. Замінивши кожен функціональний елемент реальним пристроєм і з'єднавши їх відповідно до передачі сигналів, одержимо принципіальну схему системи автоматичного регулювання.

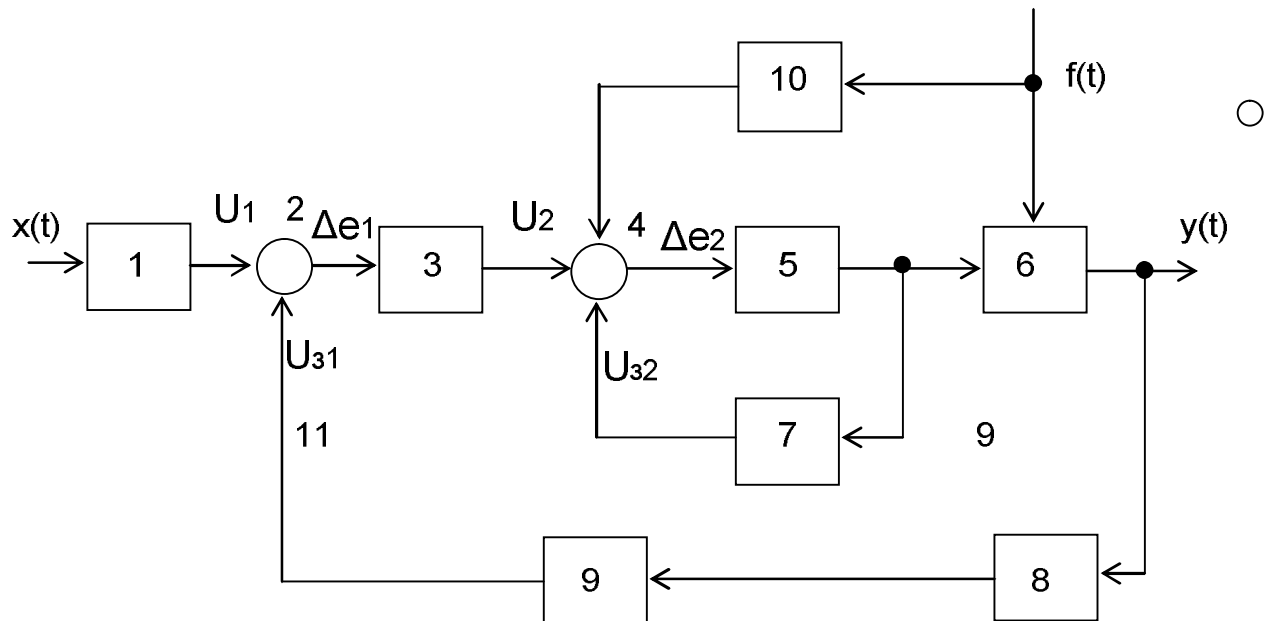


Рисунок 1.4 – Функціональна схема САР

Пояснення до рисунку 1.4:

1 – вхідний елемент, що перетворює вхідне діяння $x(t)$ у форму, зручну для порівняння з іншими сигналами;

2 – вузол підсумовування (основний), вихідний сигнал якого дорівнює алгебраїчній сумі вхідних сигналів;

3 – послідовний корегувальний елемент, що надає системі регулювання заданих динамічних властивостей;

4 – додатковий вузол підсумовування;

5 – підсилювальний елемент для споріднення як за величиною, так і за потужністю вихідного сигналу попередньої частини схеми з вхідним сигналом наступного елемента;

6 – об'єкт регулювання;

7 – паралельний корегувальний елемент;

8 – вимірювальний елемент, вихідний сигнал якого пропорційний регульованій величині $y(t)$;

9 – перетворювальний елемент кола зворотного зв'язку;

10 – елемент, що компенсує дію зовнішнього збурювального діяння $f(t)$.

Усі елементи системи на рисунку 1.4 з'єднуються між собою за допомогою ліній зв'язку. Елемент 7 із лінією 12 створюють внутрішній зворотній зв'язок, унаслідок чого на виході вузла підсумовування 4 одержують сигнал

$$\Delta e_2 = U_2 \pm U_{32}, \quad (1.2)$$

де U_{32} – сигнал зворотного зв'язку.

Залежно від знака U_{32} у контурі діє від'ємний або додатковий зворотній зв'язок. Так, знаку « – » відповідає від'ємний, а знаку « + » додатний зворотній зв'язок.

Елементи 8, 9 з лінією 11 створюють головний зворотній зв'язок, унаслідок дії якого в системі створюється сигнал похибки Δe_1 , що характеризує точність роботи всієї системи регулювання

$$\Delta e_1 = U_1 - U_{31}. \quad (1.3)$$

У разі розмикання головного зворотного зв'язку система автоматичного регулювання, що працює по замкнутому циклу, перетворюється в систему розімкнутого циклу.

1.3 Класифікація автоматичних систем

1.3.1 Класифікація САР за призначенням

У техніці використовуються велика кількість різноманітних автоматичних пристроїв та систем, що відрізняються за фізичним походженням, принципом дії, схемними й технічними реалізаціями. У ці пристрої та системи зазвичай призначені для розв'язання декількох завдань автоматизації.

Системи автоматичної сигналізації призначені для повідомлення обслуговуючому персоналу про стан технічної установки або про перебіг технологічного процесу.

Системи автоматичного блокування та захисту призначені для запобігання аварійних ситуацій у технічних агрегатах та установках.

Системи автоматичного пуску та зупинки забезпечують вмикання та вимикання різних агрегатів та установок за заданій програмі.

Системи автоматичного керування призначені для керування різними агрегатами і перебігу різних процесів без участі людини.

Керування в широкому розумінні слова – це організація будь-якого процесу, що забезпечує досягнення поставленої мети. Рух транспортного засобу є керований процес. Мета керування при цьому полягає в досягненні заданого кінцевого пункту в заданий час із найменшими затратами енергоресурсів.

Системи автоматичного регулювання розв'язують задачу регулювання параметрів тих або інших технічних агрегатів. Теорія автоматичного регулювання є одним із розділів теорії автоматичного керування.

Залежно від способу формування керованого діяння розрізняють такі принципи регулювання: принцип регулювання за збурювальним діянням, принцип керування за відхиленням регульованої величини та принцип комбінованого регулювання.

1.3.2 Класифікація САР за способом діяння на об'єкт регулювання

За способом дії керовального діяння на об'єкт регулювання системи автоматичного регулювання діляться на системи прямої та непрямой дії. У системах прямої дії вимірювальний елемент безпосередньо діє на регульований орган за рахунок власної енергії. Додаткові джерела енергії для переміщення регулюючого органа в таких системах відсутні. Прикладом систем прямої дії є регулятор рівня води в котлі парової машини, запропонований І. І. Ползуновим, і центробіжний регулятор Джеймса Уатта для регулювання обертів вала парової машини. У регуляторі Ползунова поплавков, що є вимірювальним елементом, через систему важелів безпосередню діє на клапан трубопроводу. У регуляторі Д. Уатта переміщення регулюючого органа здійснюється під дією центробіжної сили тягарців.

Перевагою систем прямого регулювання є їхня простота, оскільки проміжні підсилювальні елементи у них відсутні. Водночас точність роботи систем прямого регулювання порівняно невелика, що обмежує сферу їх застосування об'єктами невеликої потужності, у яких непотрібно великих зусиль для дії на регулюємий орган. Пояснюється це тим, що точність роботи чутливого елемента різко знижується, коли із їхнього виходу знімається значна потужність.

Системи непрямого регулювання в своєму складі мають пристрої, що підсилюють потужність сигналу похибки. Такими пристроями є спеціальні пневматичні, гідравлічні, електричні, електронні та інші підсилювачі. Ефект підсилення сигналу за потужністю досягається шляхом уведення в склад системи автоматичного регулювання додаткових джерел енергії, для живлення підсилювальних елементів. У наслідок цього сигнал похибки лише керує передачею енергії від додаткових джерел енергії до регульовального органа. Унаслідок цього системи непрямого регулювання дають змогу використовувати високоточні малопотужні вимірювальні елементи для керування роботою об'єктів великої потужності. Ускладнення систем автоматичного регулювання в порівняно із системами прямого регулювання настільки компенсується значним підвищенням точності, що значна більшість сучасних САР є системами непрямого регулювання.

1.3.3 Класифікація САР за величиною похибки

Якість роботи системи автоматичного регулювання характеризується величиною похибки. Граничне значення, до якого прямує похибка в часі, називається усталеною похибкою САР:

$$e_{уст}(t) = \lim \Delta e(t). \quad (1.4)$$

Залежно від величини усталеної похибки, системи автоматичного регулювання поділяють на статичні й астатичні. Статична система – система, у якій усталена похибка при постійному зовнішньому збуренні відмінна від нуля. Наприклад, для системи зображеної на рисунку 1.5, що має в своєму складі ланку з коефіцієнтом підсилення K , усталена похибка визначається виразом

$$\Delta y_{уст}(t) = \frac{y(t) - x(t)}{K}, \quad (1.5)$$

при $x(t) = const$.

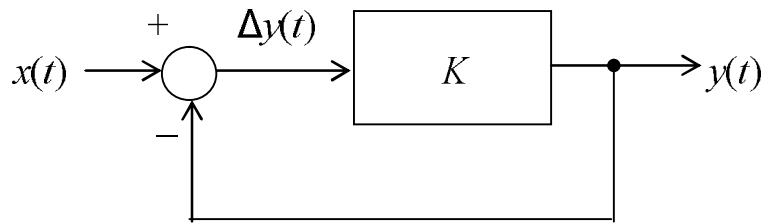


Рисунок 1.5 – Структурна схем статичної системи

Із (1.5) випливає, що величина усталеної похибки залежить від контурного коефіцієнта підсилення, який у цьому разі дорівнює K . Шляхом заміни коефіцієнта підсилення можна зменшувати або збільшувати усталену величину похибки, але завжди для кінцевої величини K

$$\Delta e_{уст} \neq 0. \quad (1.6)$$

Астатична система відносно зовнішнього діяння – система, у якій усталена похибка, спричинена цим діянням (збуренням)

$$\Delta e_{уст} = 0. \quad (1.7)$$

Зазначені визначення показують, що поняття статизму та астатизму пов'язані з розглядом усталеного режиму САР і завжди стосуються конкретного зовнішнього діяння. При цьому часто для спрощення всі другі діяння умовно прирівнюють нулю.

Покажемо, наприклад, що система регулювання, яка зображена на рисунку 1.1 є статичною відносно величини рівня води h у котлі парової машини. Відхилення рівня води спричиняє похибку

$$\Delta h(t) = h_o - h(t). \quad (1.8)$$

Знак $\Delta h(t)$ залежить від того, зменшується чи збільшується рівень води $h(t)$ відносно заданого h_o .

Для ліквідації похибки Δh поплавков повинен розвинути зусилля необхідне для переміщення клапана вхідного трубопроводу. Величина цього зусилля залежить від сил опору, що діють у системі. Але незалежно від цих сил, переміщення поплавка пропорційно до переміщення клапана. Тобто регулювальний орган може займати нове положення тільки при похибці регулювання, що в (1.8) не дорівнює нулю. З цього випливає висновок, що системи прямої дії є статичними системами стосовно зовнішніх діянь. Фізична сутність виникнення в таких системах статичної похибки полягає в тому, що для компенсації зовнішнього збурення необхідна зміна положення регулювального органа, що можливо лише при виконанні умови (1.6).

Приведений аналіз появи статичної похибки дає можливість зробити висновок про те, що для її ліквідації необхідно змінити закон зміни положення регулюючого органа. Досягається це, наприклад, шляхом заміни пропорційного зв'язку між похибкою $\Delta e(t)$ і регулювальним діянням $q(t)$ на інтегральний зв'язок.

Варто зазначити, що наявність статичної похибки не є причиною відмови від практичного застосування статичних систем. У правильно спроектованій системі статична похибка може бути дуже малою. Крім того, питання точності роботи САР в усталеному режимі не вичерпують всієї проблеми теорії та практики регулювання.

1.3.4 Класифікація САР за характером керувального діяння

Залежно від закону зміни вхідного діяння $x(t)$ усі системи автоматичного регулювання поділяються на системи стабілізації, програмного регулювання та слідкуючі системи.

Системи стабілізації призначені для підтримки незмінності регульованої величини $y(t)$. У таких системах вхідне діяння

$$x(t) = x_0 = const. \quad (1.9)$$

Прикладами таких систем є регулятори І. І. Ползунова та Д. Уатта. На рисунку 1.6 наведена електрична схема системи стабілізації вихідної напруги генератора постійного струму G .

Обмотка збудження LE генератора живиться від джерела постійної напруги U_0 . Струм збудження I_0 регулюється шляхом зміни опору резистора R . Вихідна напруга генератора U_r подається на вхід 1 регулятора P , на вхід 2 якого подано вхідне діяння $U_3 = const$. Вхідне діяння U_3 визначає величину вихідної напруги U_r генератора. До виходу регулятора P підключено двигун постійного струму M . Вал статора двигуна механічно з'єднано з рухомим контактом резистора R .

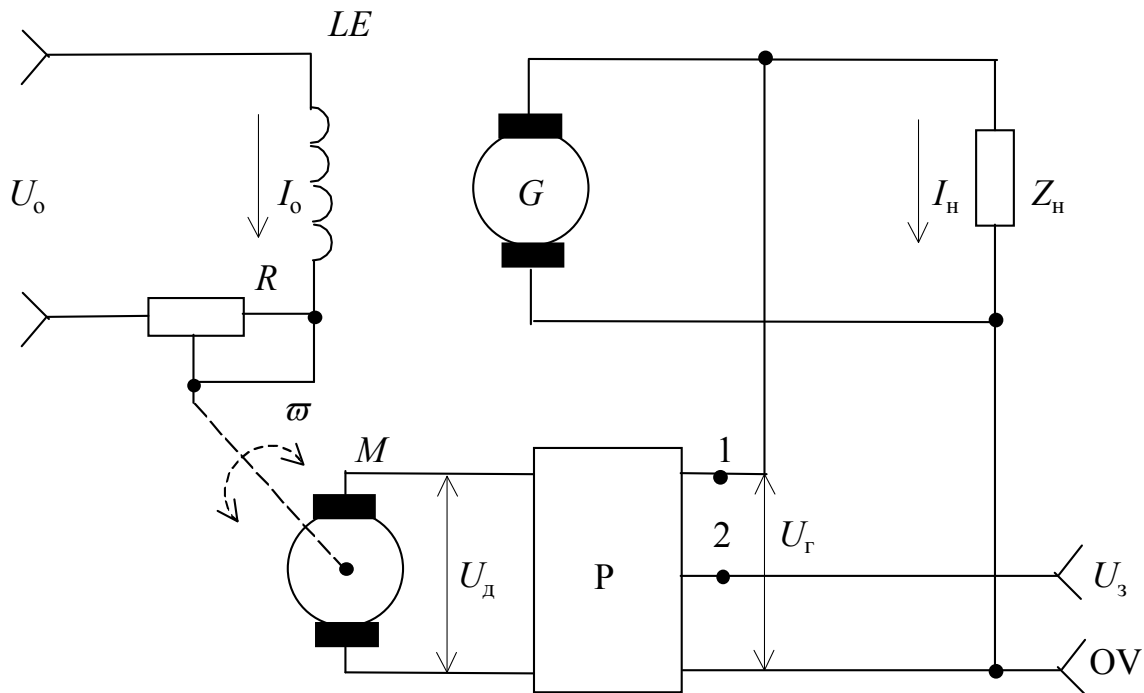


Рисунок 1.6 – Електрична схема системи стабілізації вихідної напруги генератора постійного струму

Стабілізація напруги генератора здійснюється в такому порядку. Зменшення опору навантаження $Z_{\text{н}}$ викликає збільшення струму $I_{\text{н}}$ і зменшення напруги $U_{\text{г}}$ відносно установленої величини. Регулятор P , порівнюючи $U_{\text{г}}$ і $U_{\text{з}}$, визначає величину та знак похибки

$$\Delta U_{\text{г}} = U_{\text{з}} - U_{\text{г}}. \quad (1.10)$$

Згідно з похибкою (1.10) регулятор формує напругу $U_{\text{д}}$, що подається на двигун M . Двигун, переміщуючи рухомий контакт резистора R , змінює струм збудження генератора. Шляхом зміни величини струму збудження компенсується відхилення напруги генератора від заданої величини. Так у разі зменшення $Z_{\text{н}}$ система регулювання викликає збільшення струму збудження і, як наслідок, збільшення $U_{\text{г}}$. У разі збільшення $Z_{\text{н}}$, що викликає підвищення вихідної напруги генератора, система регулювання зменшує струм збудження. Точність стабілізації вихідної напруги генератора та поведінка системи в перехідних режимах визначається властивостями регулятора.

Системи програмного регулювання призначені для зміни регульованої величини $y(t)$ за відомим законом у функції часу або якоїсь іншої величини. У таких системах вхідне діяння є наперед визначеною функцією часу:

$$x(t) = x_o(t), \quad (1.11)$$

або якоїсь іншої величини

$$x(t) = x_o(\mu). \quad (1.12)$$

Системи, у яких вхідне діяння змінюється згідно з (1.11), (1.12) зазвичай називають системами з програмним регулюванням. Програми типу (1.11) називають часовими, а програми типу (1.12) – параметричними. Параметричні програми можуть залежати від однієї або декількох величин – $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$. У такому разі випадку вхідне діяння є визначеною функцією декількох змінних

$$x(t) = x_0(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n). \quad (1.13)$$

Прикладом часової програми є зміна обертів потужного електродвигуна в процесі запуску. Плавний закон наростання обертів дає змогу зменшити небезпечні електромеханічні перевантаження, що значно подовжує довговічність двигуна.

Задача програмного регулювання вирішується так само як і задача стабілізації – за допомогою систем автоматичного регулювання, що функціонують по замкнутому циклу (див. рис. 1.4). Головна відмінність систем програмного регулювання від системи стабілізації полягає в тому, що в системах програмного регулювання головною задачею є відтворення заданої програми з визначеною точністю. Конструктивно системи програмного регулювання відрізняються від систем стабілізації наявністю задаючого елемента, що формує закон зміни (програму) вхідного діяння. У реальних системах задаючий елемент становить механічний або електричний пристрій. Найбільш високу точність завдання програми дають електричні функціональні перетворювачі дискретного типу, у яких програма записується у вигляді цифрового коду.

Слідкуючі системи призначені для зміни регулюємої величини $y(t)$ за наперед невизначеним законом. У таких системах вхідне діяння $x(t)$ є випадковою функцією часу.

Залежно від фізичного походження регульованої величини $y(t)$ виокремлюють слідкуючі системи відтворення кутових переміщень, швидкості обертання, моменту, змін струму та напруги.

1.3.5 Класифікація за характером передавальних сигналів

Роботу будь-якої системи автоматичного регулювання супроводжується перетворенням сигналів під час їх передачі між елементами САР. Залежно від характеру передавальних сигналів системи автоматичного регулювання розрізняють як неперервні, імпульсні та релейні системи.

У неперервній системі між вхідними й вихідними величинами всіх елементів існує неперервний функціональний зв'язок. Вихідна величина $y_i(t)$ кожного i -го елемента такої системи в кожний момент часу визначається вхідною величиною $x_i(t)$. Статична характеристика елемента неперервної системи, що визначає зв'язок між його вхідною та вихідною величинами, становить неперервну функцію. Так, згідно з рисунком 1.7, вхідному сигналу x_i для моментів часу t_1 і t_2 відповідають вихідні сигнали $y_1(t), y_2(t)$. Прикладами систем неперервної дії є системи, що наведені на рисунку 1.5 та рисунку 1.6.

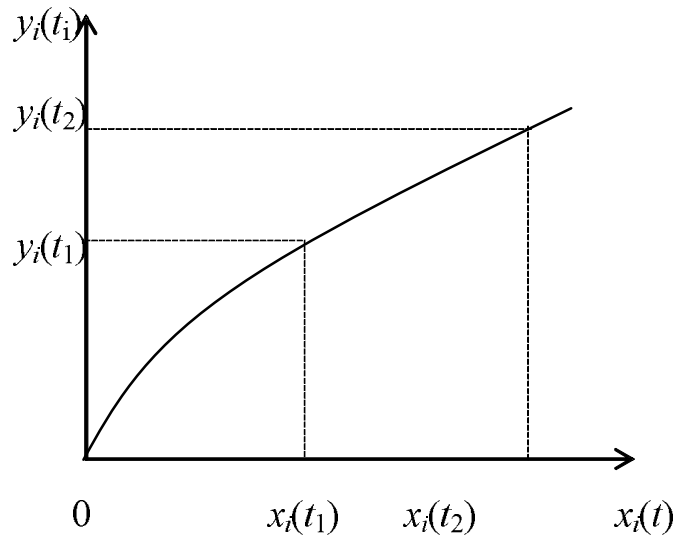


Рисунок 1.7 – Статична характеристика неперервної системи

У неперервних системах передача сигналів виконується за допомогою модуляції. Під модуляцією розуміють зміну якогось параметра опорного сигналу за законом інформаційного (передавального) сигналу. Пристрій, що здійснює модуляцію, називається модулятором (див. рис. 1.8). Найпоширенішим є модулятор, що має два входи. На один із цих входів подають інформаційний сигнал x_i , а на другий – несучий сигнал x_n , що грає роль переносника інформації. Вихідний сигнал модулятора y є функцією вхідних сигналів, від якої залежить від типу модулятор.

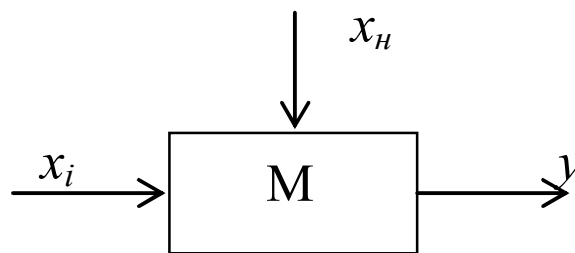


Рисунок 1.8 – Структурна схема модулятора

У неперервних системах в якості несучого використовують постійний або гармонійний сигнал. Цим сигналом відповідають системи автоматичного регулювання постійного або змінного струмів. У системах постійного струму $x_n = const$. У системах змінного струму

$$x_n(t) = U \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.14)$$

де U – амплітуда;

ω – кутова частота;

φ – початкова фаза несучого сигналу.

Кожний із трьох параметрів (U , ω , φ) можна використати для передачі інформації про вхідний сигнал модулятора x_i . Якщо амплітуда U несучого сигналу є функцією вхідного сигналу x_i , то відбувається амплітудна модуляція, що ілюструється на рисунку 1.9.

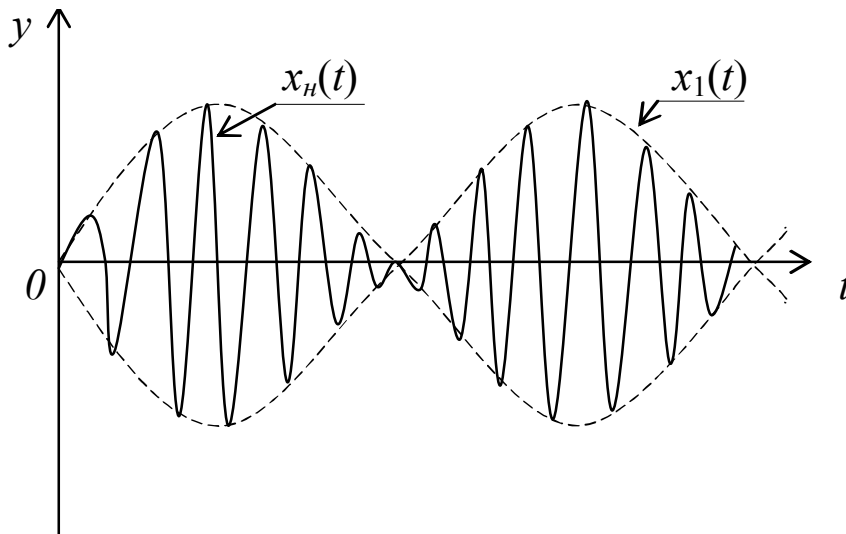


Рисунок 1.9 – Амплітудно-імпульсна модуляція

Коли в (1.14) $\omega = \omega(x_i)$, то відбувається частотна модуляція (див. рис. 1.10). У цьому разі частота вихідного (несучого) сигналу модулятора ω змінюється під дією зміни амплітуди вхідного сигналу x_i .

Якщо в (1.14) $\varphi = \varphi(x_i)$, то відбувається фазова модуляція. Фазовий зсув вихідного сигналу φ змінюється у функції зміни вхідного сигналу x_i модулятора. На рисунку 1.11 зображено процес фазової модуляції. На інтервалі $0 \leq t \leq t_0$ фазовий зсув вихідного сигналу $y(t)$ відносно $x_n(t)$ дорівнює φ_1 . Після зміни величини вхідного сигналу $x_i(t)$ модулятора в момент часу t_0 , фазовий зсув дорівнює φ_2 .

У практиці застосування неперервних систем автоматичного регулювання найбільш найпоширенішими є системи з амплітудною гармонічною модуляцією.

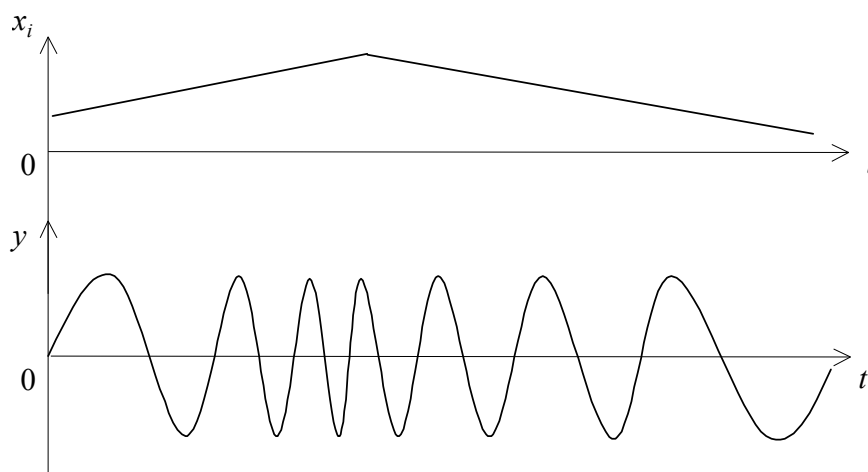


Рисунок 1.10 – Частотна модуляція

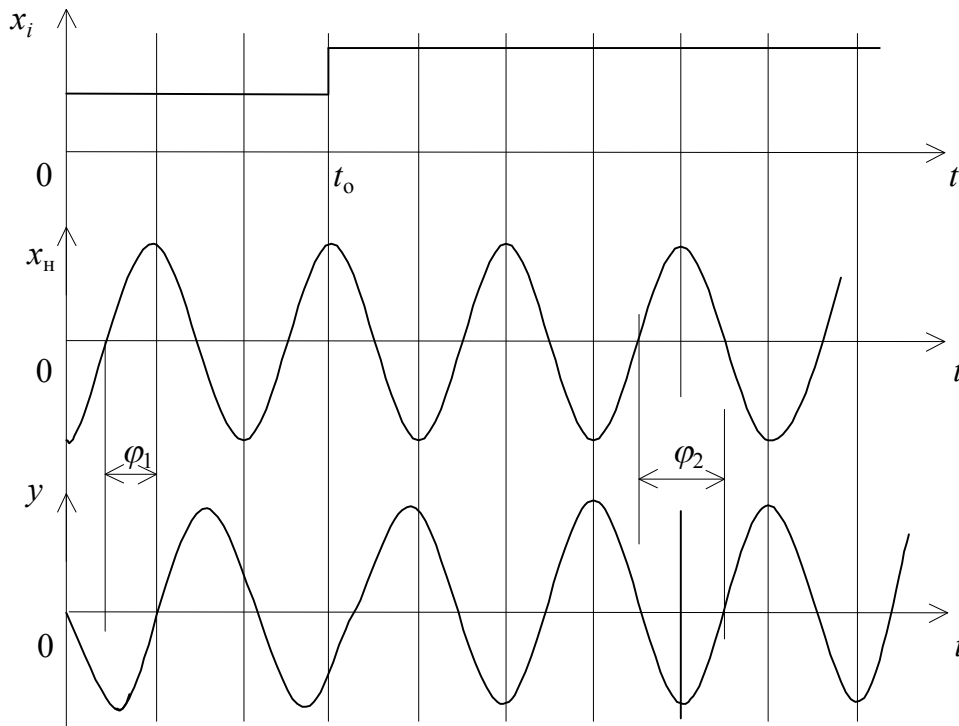


Рисунок 1.11 – Фазова модуляція

Системи із дискретною модуляцією називаються дискретними системами регулювання. Такі системи мають у своєму складі принаймні один дискретний елемент (дискретний модулятор), вихідна величина якого змінюється дискретно при неперервному входному сигналі. Процес перетворення входного сигналу $x_i(t)$ в дискретний $y(t)$ називається квантування (подрібненням).

Квантування за рівням відбувається шляхом фіксації дискретних рівнів у довільні моменти часу. У наслідок квантування неперервний входний сигнал перетворюється в ступінчаста змінюему функцію, що характеризується постійним рівнем квантування δ (рис. 1.12). Моменти квантування t_i залежать від зміни входного сигналу $x_i(t)$.

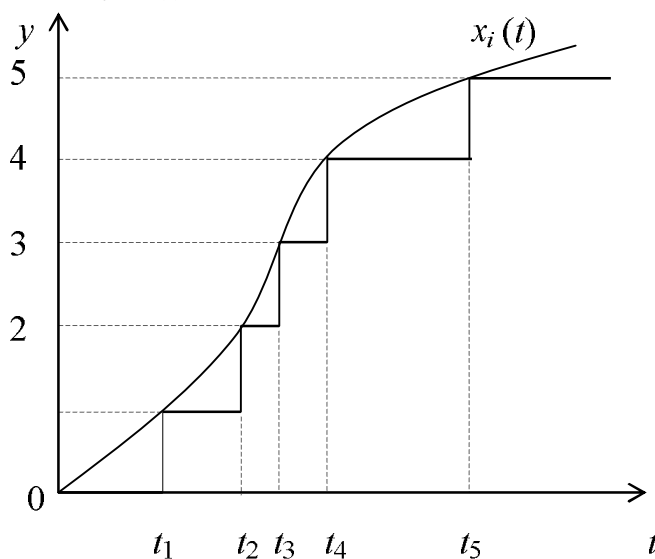


Рисунок 1.12 – Квантування за рівням

Квантуванню в часі відповідає фіксація дискретних моментів згідно з рисунком 1.13. Неперервний вхідний сигнал $x_i(t)$ перетворюється в послідовність імпульсів, амплітуди яких дорівнюють миттєвим значенням $x_i(t)$ у моменти квантування:

$$y = \begin{cases} x_i[nT], & \text{для } t = nT, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \\ 0, & \text{для } t \neq nT \end{cases} \quad (1.15)$$

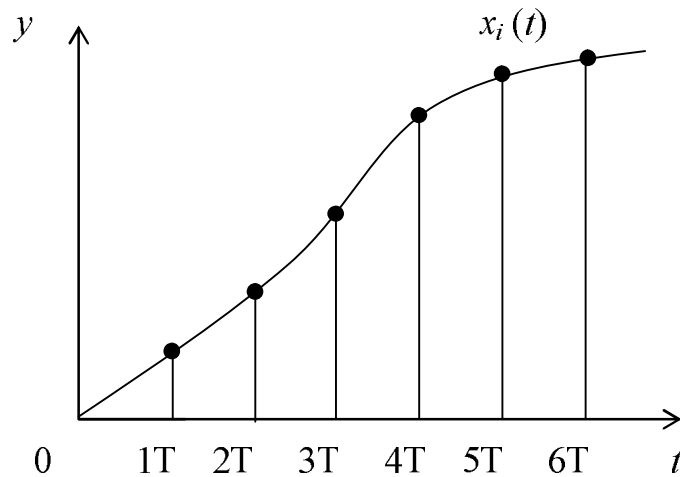


Рисунок 1.13 – Квантування в часі

Період квантування T при цьому є постійною величиною.

Залежно від виду квантування вхідного сигналу дискретні елементи можна розбити на релейні та імпульсні.

Релейним елементом називається пристрій, що здійснює квантування вхідного сигналу за рівням. Вихідна величина такого елемента приймає фіксовані значення, що дорівнюють цілому числу кроків квантування за рівням δ .

Імпульсним елементом (ІЕ) називається пристрій, що здійснює квантування вхідного сигналу в часі (рис. 1.14, а). Вихідною величиною імпульсного елемента є послідовність імпульсів (рис. 1.14, б) модульованих вхідним сигналом. У разі змін вхідного сигналу $x(t)$ модуляції може піддаватись любий із параметрів імпульсної послідовності: амплітуда A , період T , відносна тривалість імпульсу $\gamma = t_u / T$. У зв'язку із цим розрізняють:

- амплітудно-імпульсну модуляцію (АІМ), коли $A = f(x)$, $T = const$, $\gamma = const$;
- широтно-імпульсну модуляцію (ШІМ), коли $\gamma = f(x)$, $A = const$, $T = const$;
- частотно-імпульсну модуляцію (ЧІМ), коли $T = f(x)$, $A = const$, $\gamma = const$.

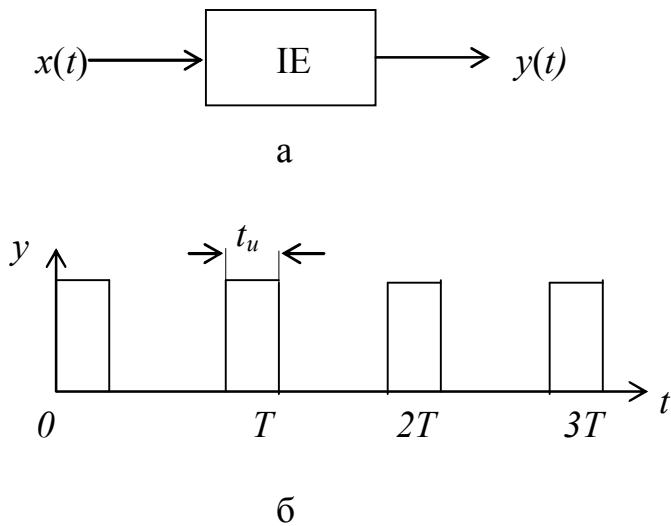


Рисунок 1.14 – Імпульсний елемент:
а – імпульсний елемент; *б* – вихідний сигнал імпульсного елемента

Прикладом імпульсного елемента, що здійснює АІМ, є періодично замикаємий імпульсом управління t_u електронний ключ S (рис. 1.15, а). У такому імпульсному елементі під час замкнутого стану ключа ($\gamma = const, T = const$) вихідна напруга U_2 змінюється за законом вхідної величини U_1 (рис. 1.15, б). У цьому разі в системі діє амплітудно-імпульсна модуляція першого роду (АІМ-1).

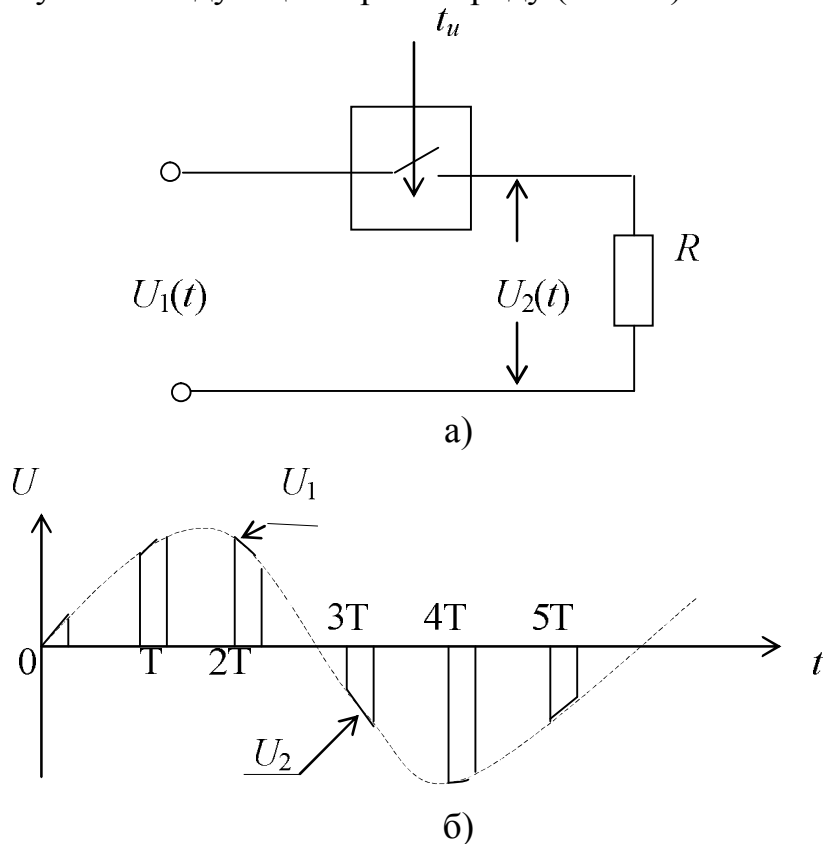
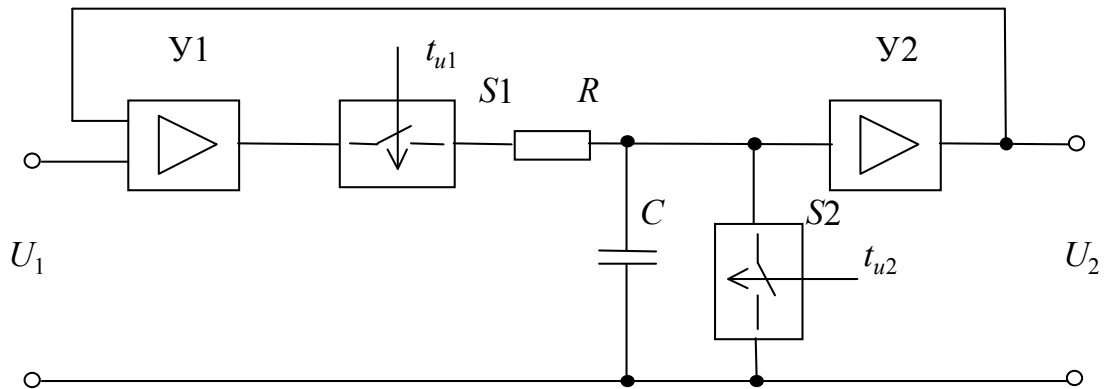
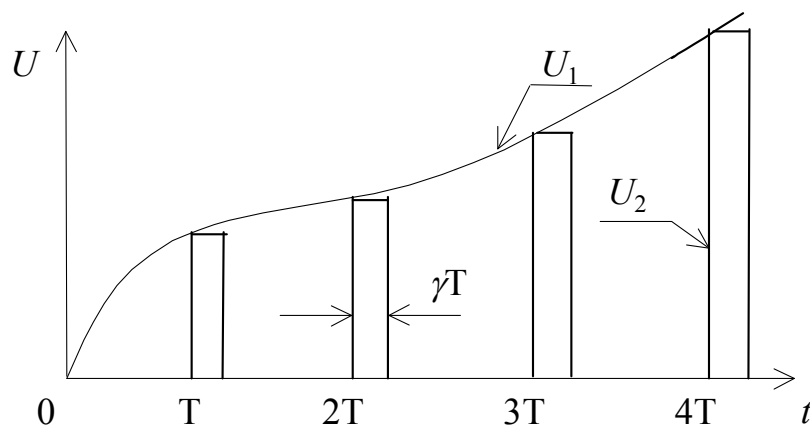


Рисунок 1.15 – Імпульсний елемент, що здійснює АІМ-1:
а – імпульсний елемент; *б* – вихідний сигнал імпульсного елемента

Коли вихідна величина імпульсного елемента має вигляд імпульсів амплітуди яких не змінюється у функції вхідного сигналу, а дорівнює йому лише в тактові моменти то в системі здійснюється амплітудно-імпульсна модуляція другого роду (АІМ-2). Прикладом такого елемента є імпульсний елемент, показаний на рисунку 1.16, а, що складається із підсилювачів $У1$, $У2$, електронних ключів $S1$, $S2$ та RC ланки. Електронний ключ $S1$ замикається в тактові моменти nT на час t_{u1} тривалість якого значно менше тривалості тактового інтервалу (рис. 1.16, б). Електронний ключ $S2$ замикається в часовим зсувом γT відносно тактових моментів. Час замкнутого стану ключа $S2$ дорівнює $(1-\gamma)T$. Під час замкнутого стану електронного ключа $S1$, вхідний сигнал U_1 у тактові моменти запам'ятовується на конденсаторі C . Після розмикання ключа $S1$ сигнал на конденсаторі остається незмінним до замикання ключа $S2$. У наслідок цього вихідний сигнал U_2 має вигляд послідовності прямокутних імпульсів, амплітуди яких дорівнюють миттєвим значенням вхідного сигналу U_1 у тактові моменти часу.



а



б

Рисунок 1.16 – Імпульсний елемент, що здійснює АІМ-2:
а – імпульсний елемент; б – вихідний сигнал імпульсного елемента

1.4 Закони регулювання

Головним завданням будь-якої системи автоматичного регулювання (рис. 1.17) є виконання умови

$$x(t) = y(t) \quad (1.16)$$

із наперед заданою точністю.

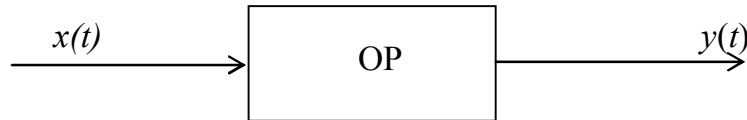


Рисунок 1.17 – Об’єкт регулювання

Чим точніше виконується умова (1.16) тим краща система автоматичного регулювання. Якість роботи системи автоматичного регулювання оцінюється різницею між необхідним законом зміни регульованої величини $x(t)$ і фактичним законом її зміни $y(t)$.

$$\Delta e = x(t) - y(t) \quad (1.17)$$

Функція $\Delta e(t)$ визначає похибку система автоматичного регулювання. Чим менша величина $\Delta e(t)$, тим краще система автоматичного регулювання. Для ідеальної системи $\Delta e(t) = 0$. Система регулювання за похибкою є системою зі зворотним зв’язком. Оскільки $\Delta e = x(t) - y(t)$, то система регулювання є системою з від’ємним зворотнім зв’язком.

Зменшення величини $\Delta e(t)$ досягається шляхом застосування регулювання за похибкою. Для цього спочатку визначають похибку, а потім залежності від її величини та знака формують регульовальне діяння на об’єкт регулювання, що зводить $\Delta e(t) = 0$. При $\Delta e(t) > 0$ регульовальне діяння повинно збільшувати регульовану величину $y(t)$, а при $\Delta e(t) < 0$ – зменшувати.

Загалом для визначення регульовального діяння на об’єкт регулювання використовуються чотири елементи (рис.1.18): задаючий, чутливий, порівнюючий та корегуючий пристрій (регулятор).

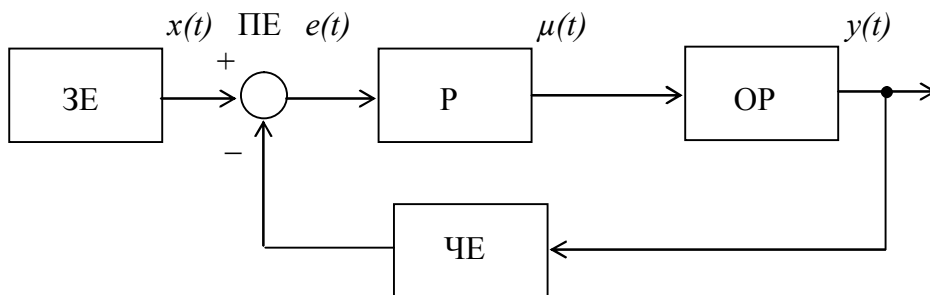


Рисунок 1.18 – Структурна схема

Задаючий елемент (ЗЕ) – слугує для формування вхідного діяння $x(t)$. Коли $x(t) = x(0)$ - постійна величина, задаючий елемент становить просто орган настроювання.

Чутливий елемент (ЧЕ) – виміряє регульовану величину $y(t)$.

Порівнюючий елемент (ПЕ) – обчислюваний пристрій, що розраховує похибку $\Delta e(t)$.

Корегуючий пристрій (регулятор) (Р) – виконує функціональне перетворення сигналу похибки (підсилення, диференціювання, інтегрування тощо) для придання системі регулювання заданих якостей. На виході регулятора формується регульовальне діяння $\mu(t)$.

У теорії автоматичного керування законом регулювання називають залежність регульовального діяння від сигналу похибки.

Якщо в якості регулятора використовується підсилювач із коефіцієнтом підсилення K , тоді регульовальне діяння визначається як

$$\mu(t) = \Delta e(t) \cdot K. \quad (1.18)$$

У цьому разі система регулювання, що зображена на рисунку 1.19, характеризується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \Delta e(t) = x(t) - y(t); \\ y(t) = \Delta e(t) \cdot K \cdot F(t), \end{cases} \quad (1.19)$$

де $F(t)$ – функція, що визначає зв'язок між вхідним та вихідним сигналами ОР.

Розв'язавши систему (1.19) відносно сигналу похибки, одержуємо

$$\Delta e(t) = \frac{x(t)}{1 + K \cdot F(t)}. \quad (1.20)$$

Із (1.20) випливає, що зміна K викликають зміну величини похибки. Рівняння $\mu(t) = \Delta e(t) \cdot K$ показує, що в цій системі регульовальне діяння пропорційне похибці – пропорційний закон регулювання. Корегуюча ланка, що реалізує цей закон, називається пропорційним регулятором (П-регулятором). Оскільки рівняння для скінченної величини K не дорівнює нулю, то система регулювання із пропорційним регулятором є статичною.

Якщо в якості регулятора у системі застосувати інтегратор, то зв'язок між похибкою та регульовальним діянням прийме такий вигляд:

$$\mu(t) = \frac{1}{T} \int_0^t \Delta e(t) \cdot dt, \quad (1.21)$$

де T – стала часу інтегратора.

Тоді система диференціальних рівнянь, що описує систему регулювання має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta e(t) = x(t) - y(t), \\ y(t) = F(t) \cdot \frac{1}{T} \int_0^t \Delta e(t) \cdot dt. \end{array} \right. \quad (1.22)$$

Із (1.22) випливає, що в випадку цьому разі похибка регулювання визначається трансцендентним рівнянням

$$\Delta e(t) = x(t) - F(t) \cdot \frac{1}{T} \int_0^t \Delta e(t) \cdot dt. \quad (1.23)$$

В усталеному режимі, тобто коли $t \rightarrow \infty$, умовою збіжності рівняння (1.23) є $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta e(t) = 0$.

Цей закон регулювання називають інтегральним. Регулятор, що реалізує цей закон регулювання – інтегральний регулятор (І-регулятор). Застосування даного регулятора надає системі астатизму першого порядку.

Поведінка системи автоматичного регулювання із І-регулятором в перехідному режимі гірша, ніж із П-регулятором. Пояснюється це інтегральним зв'язком у (1.22) між вихідним сигналом об'єкта регулювання $y(t)$ і похибкою $x(t)$. Зазначений недолік виправляється шляхом застосування пропорційно-інтегрального закону регулювання, для якого

$$\mu(t) = \frac{1}{T} \int_0^t \Delta e(t) \cdot dt + \Delta e(t) \cdot K. \quad (1.24)$$

Цей закон регулювання поєднує в собі позитивні властивості інтегрального закону в усталеному режимі із позитивними властивостями пропорційного закону в перехідному режимі. Регулятор, що реалізує залежність (1.24), називається пропорційно-інтегральним (ПІ-регулятор). Система регулювання із ПІ-регулятором в усталеному режимі має $\Delta e(t) = 0$. Поліпшення поведінки системи в перехідному режимі досягається за рахунок пропорційної складової $\Delta e(t) \cdot K$.

Подальше поліпшення динамічних властивостей системи автоматичного регулювання досягається шляхом уведення у регулювальне діяння похідної від сигналу похибки. Уведення похідної є потужним засобом поліпшення поведінки системи регулювання.

Такий прийом застосовують у сукупності як із пропорційним, так із інтегрально-пропорційним законами. У першому випадку одержують пропорційно-диференціальний закон регулювання, для якого

$$\mu(t) = \Delta e(t) \cdot K + \frac{d\Delta e(t)}{dt}, \quad (1.25)$$

що реалізується за допомогою пропорційно-диференціального регулятора (ПД-регулятором). Цей регулятор реагує не тільки на саму похибку, а й на тенденцію її зміни. Такий регулятор демпфує коливання в системі, що виникають із-за наявності у ній інерційних елементів. Компенсація статичної похибки системи із ПД-регулятором досягається шляхом застосуванням пропорційно-диференціально-інтегрального (ПІД) регулятора, регулювальне діяння якого описується рівнянням

$$\mu(t) = \Delta e(t) \cdot K + \frac{d\Delta e(t)}{dt} + \frac{1}{T_0} \int_0^t \Delta e(t) \cdot dt. \quad (1.26)$$

Введення в систему інтегральної складової від похибки надає системі регулювання астатизму першого порядку поряд із високими динамічними властивостями.

1.5 Типові діяння в системах автоматичного регулювання. Головні задачі теорії автоматичного керування

Системи автоматичного регулювання працюють у двох головних режимах: усталеному та неусталеному. Неусталений режим зазвичай називають перехідним або динамічним. Він викликається зовнішніми збуреннями або зміною параметрів системи автоматичного регулювання. Під параметрами системи розуміють такі показники регулятора та об'єкта регулювання: постійні часу, коефіцієнти передач (підсилення), величини ємності конденсатора, величини індуктивностей дроселів, величини опорів резисторів електричних кіл.

Зовнішні діяння (збурення), що діють на систему регулювання, становлять функцію, закон зміни якої в часі важко передбачити. Тому під час дослідження динамічних режимів систем автоматичного регулювання застосовують типові закони змін зовнішніх діянь:

1. *Одинична ступенева функція.* Аналітично східчаста функція описується у такий спосіб

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0; \\ 1, & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Графік даної функції наведено на рисунку 1.19, а.

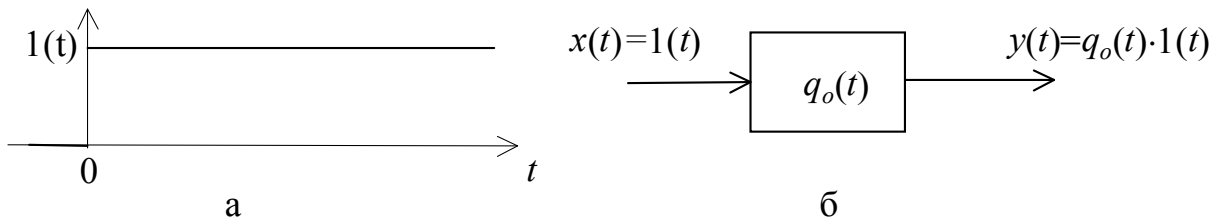


Рисунок 1.19 – Одинична ступенева функція

Ця функція моделює, наприклад, ступінчате збільшення або зменшення навантаження. Ця функція також може моделювати ступінчасту зміну вхідного діяння (див. рис. 1.19, б) під час дослідження динамічних властивостей системи автоматичного регулювання;

2. *Лінійно-зростаюча функція* (рис. 1.20)

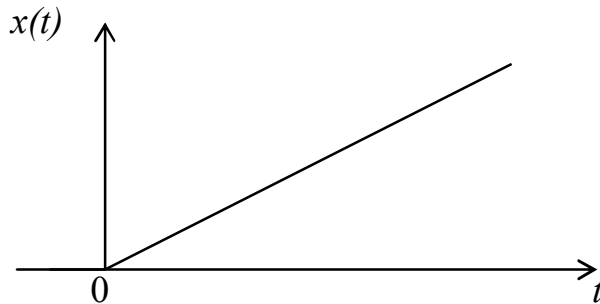


Рисунок 1.20 – Графік лінійно зростаючої функції

$$x(t) = \begin{cases} q_1(t), & \text{при } t > 0; \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

Ця функція, наприклад, моделює вхідне діяння слідкуючої системи автоматичного регулювання. Вихідний сигнал система регулювання згідно із рисунку 1.20 визначається як

$$y(t) = q_1(t) \cdot q_o(t). \quad (1.29)$$

3. *Гармонійне діяння* (рис. 1.21).

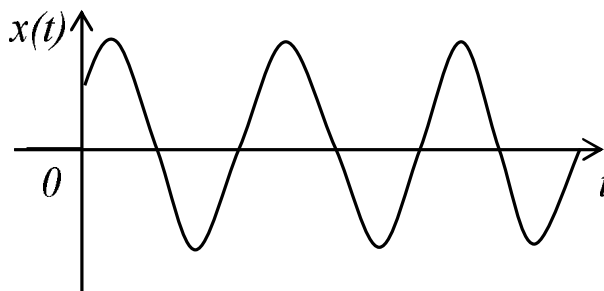


Рисунок 1.21 – Гармонійне діяння

Цей сигнал застосовується для моделювання, наприклад, дії вібрації або качки на об'єкт регулювання.

$$x(t) = \begin{cases} q_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi), & \text{при } t > 0; \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (1.30)$$

4. Дельта функція (рис. 1.22)

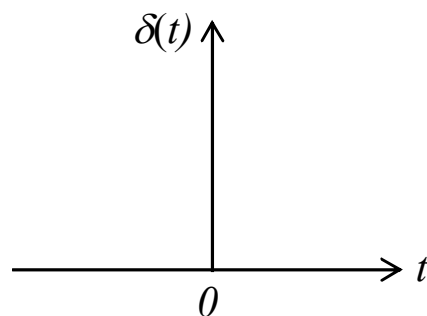


Рисунок 1.22 – Дельта функція

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq 0; \\ \infty, & \text{при } t = 0. \end{cases} \quad (1.31)$$

Дельта функція становить математичну ідеалізацію імпульсу нескінченно малої тривалості площа якого дорівнює одиниці

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt = 1. \quad (1.32)$$

Ця функція застосовується для моделювання, наприклад, дії імпульсної завади.

Яким би не було зовнішнє діяння, воно завжди викликає в системі автоматичного регулювання перехідний процес. Якщо цей процес в часі затухає, то після його закінчення система приходить в усталений стан. При цьому початкові відхилення його вихідної координати зменшуються до нуля. Такі системи називають стійкими. У стійких системах перехідний процес із часом затухає. Якщо перехідний процес не затухає, то система не стійка. Поведінка стійкої системи автоматичного регулювання в перехідному режимі характеризує її якість.

Загалом вихідна величина такої системи складається з двох складників

$$y(t) = y_y(t) + y_n(t), \quad (1.33)$$

де $y_y(t)$ – усталена складова;

$y_n(t)$ – перехідна складова.

Характер змін перехідної складової залежить від властивостей системи автоматичного регулювання. У достатньо сильно демпфированих системах перехідна складова змінюється за експонентою – крива 1 на рисунку 1.23.

У слабо демпфированих системах перехідна складова має коливальний характер – криві 2, 3 на рисунку 1.23.

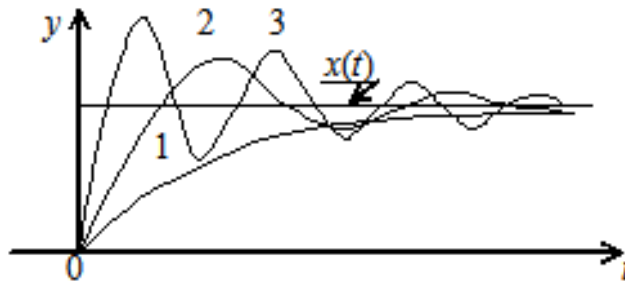


Рисунок 1.23 – Перехідна складова

Головними завданнями теорії автоматичного регулювання є такі:

– аналіз – дослідження відомої системи автоматичного регулювання з метою визначення її властивостей та шляхів поліпшення;

– синтез – проектування системи автоматичного регулювання, що відповідає заданим вимогам.

Головні етапи синтезу:

1. Вивчення об'єкта регулювання, умов його роботи й головних збурюючих діянь.

2. Формування вимог, що висуваються до системи автоматичного регулювання.

3. Вибір принципу регулювання та первісної схеми регулятора.

4. Вибір елементів регулятора.

5. Розрахунки елементів регулятора на підставі вимог у статичному та динамічному режимах.

6. Теоретичні дослідження статичного та динамічного режимів.

7. Експериментальні дослідження та корегування системи автоматичного регулювання.

8. Виготовлення та монтаж системи автоматичного регулювання.

9. Наладка системи автоматичного регулювання в реальних умовах роботи.

10. Дослідна експлуатація.

Під час проектування системи автоматичного регулювання використовують як теоретичні, так і експериментальні моделі. Застосування теоретичних методів аналізу та синтезу вимагає попереднього опису системи автоматичного регулювання. Систему рівнянь, що описують роботу системи автоматичного регулювання називають її математичною моделлю. Залежно від характеру математичної моделі системи автоматичного регулювання розрізняють як лінійні й нелінійні. Лінійна система автоматичного регулювання – система, яку із достатньо високим ступенем точності можна описати лінійними диференційними рівняннями. Нелінійна система описується нелінійними диференційними рівняннями.

В усталеному режимі властивості системи визначаються статичною характеристикою. Статичною характеристикою системи (елемента) називається залежність між вхідною та вихідною величинами. Статичні характеристики елементів, на базі яких одержують статичну характеристику системи, розраховують або одержують експериментально. Приклади статичних характеристик елементів наведені на рисунку 1.24.

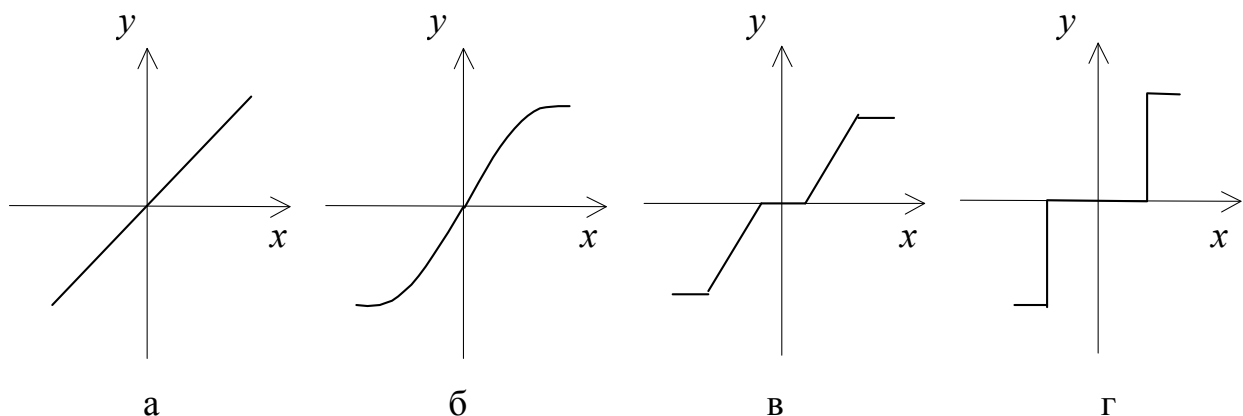


Рисунок 1.24 – Статичні характеристики

Статична характеристика на рисунку 1.24, а є лінійною, на рисунку 1.24, б – нелінійна, а на рисунку 1.24, в, г – істотно нелінійні.

1.6 Лінеаризація нелінійних рівнянь системи автоматичного регулювання

Перший крок у дослідженні нелінійних систем полягає в побудові їхніх приблизних лінійних моделей, тобто в лінеаризації вихідних рівнянь. Підставою для лінеаризації є те, що в реальних системах автоматичного регулювання відхилення керувального діяння та інших змінних величин від усталених значень є незначними. Розглянемо динамічну ланку (рис. 1.25, а) у якій зв'язок між вхідним і вихідним сигналами визначається функцією f . Нехай статична характеристика динамічної ланки має вигляд, зображений на рисунку 1.25, б. Лінеаризація зводиться до заміни криволінійної характеристики

на інтервалі $(x_1 - x_2)$, що називається робочим інтервалом, відрізком прямої. Крім робочого інтервалу, визначається й положення робочої точки (x_0, y_0) на характеристиці із якої починається або в яку прагне процес. Робоча точка повинна бути спільною як для вихідної, так і для апроксимальної прямої.

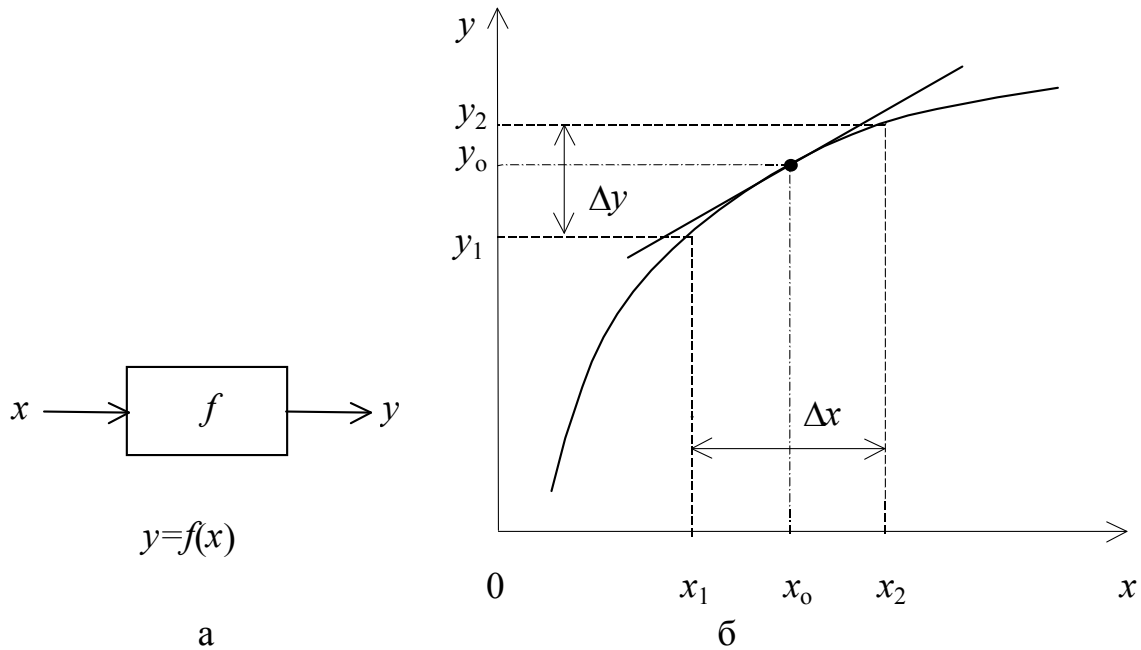


Рисунок 1.25 – Статична характеристика динамічної ланки:
a – динамічна ланка; *б* – статична характеристика динамічної ланки

Під час лінеаризації відрізок нелінійної характеристики в робочому інтервалі замінюється відрізком дотичної до кривої в робочій точці. Аналітично рівняння лінійного наближення одержують шляхом розкладу функції $f(x)$ в околицях робочої точки в ряд Тейлора, обмежившись лінійними членами (першими двома)

$$y_0 + \Delta y \approx f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x. \quad (1.34)$$

Вираз (1.34) можна розбити на два рівняння:

$$y_0 = f(x_0), \quad \text{та} \quad \Delta y = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x. \quad (1.35)$$

Перше рівняння зв'язує вхідну та вихідну координати системи в робочій точці. Друге рівняння зв'язує відхилення (прирости) вхідної та вихідної координат. Коефіцієнт передачі лінеаризованої ланки (системи) тоді визначається як

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0}. \quad (1.36)$$

У разі, коли дотичну до статичної характеристики в робочій точці провести неможливо (розрив, злам, невизначеність), лінеаризацію відносно вибраного режиму є неможливою.

У наслідок лінеаризації нелінійна ланка (рис. 1.25, а) замінюється лінійною (рис. 1.26) із коефіцієнтом передачі, що визначається формулою (1.36). У подальшому, для спрощення запису, позначення приростів вхідного та вихідного сигналів опускаються.

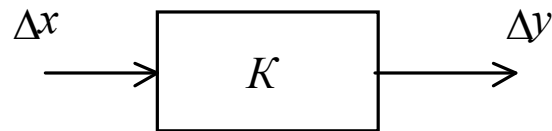


Рисунок 1.26 – Лінеаризована ланка

Приклад. Необхідно побудувати та лінеаризувати статичну характеристику трифазного мостового керованого тиристорного випрямляча (рис. 1.27).

Тиристорний випрямляч живиться від мережі змінного струму із лінійною напругою $U_M = 380$ В і має в системі імпульсно-фазового керування (СІФК) лінійний опорний сигнал. Опорний сигнал одержують шляхом інтегруванням постійної напруги U_o за половину періоду напруги, що живить тиристорний випрямляч. Для n -го інтервалу роботи тиристорного випрямляча опорний сигнал визначається такою аналітичною залежністю

$$U_{oc} = \frac{1}{\omega_o \cdot T_o} \int_{\theta[n-1]}^{\theta} U_o \cdot dt = \frac{U_o \cdot \theta}{\omega_o \cdot T_o}, \quad (1.37)$$

де T_o – стала часу інтегратора;

θ – змінна кутова координата;

$\omega_o = 2\pi f_o$, $f_o = 50$ Гц.

Кут відкриття чергового тиристора випрямляча визначається умовою перемикування компаратора в системі керування

$$U_{oc}(\theta) = U_y(\theta). \quad (1.38)$$

На підставі цієї умови функціональна залежність кута керування тиристорного випрямляча від величини напруги U_y має вигляд

$$\alpha = \frac{\omega_o \cdot T_o \cdot U_o}{U_y}. \quad (1.39)$$

Середнє значення вихідної напруги тиристорного випрямляча при $\alpha = 0$:

$$U_{do} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot m \cdot U_o \cdot \sin \frac{\pi}{m}, \quad (1.40)$$

де m – пульсність тиристорного випрямляча, яка для схеми на рисунку 1.27 визначається як $m = 6$.

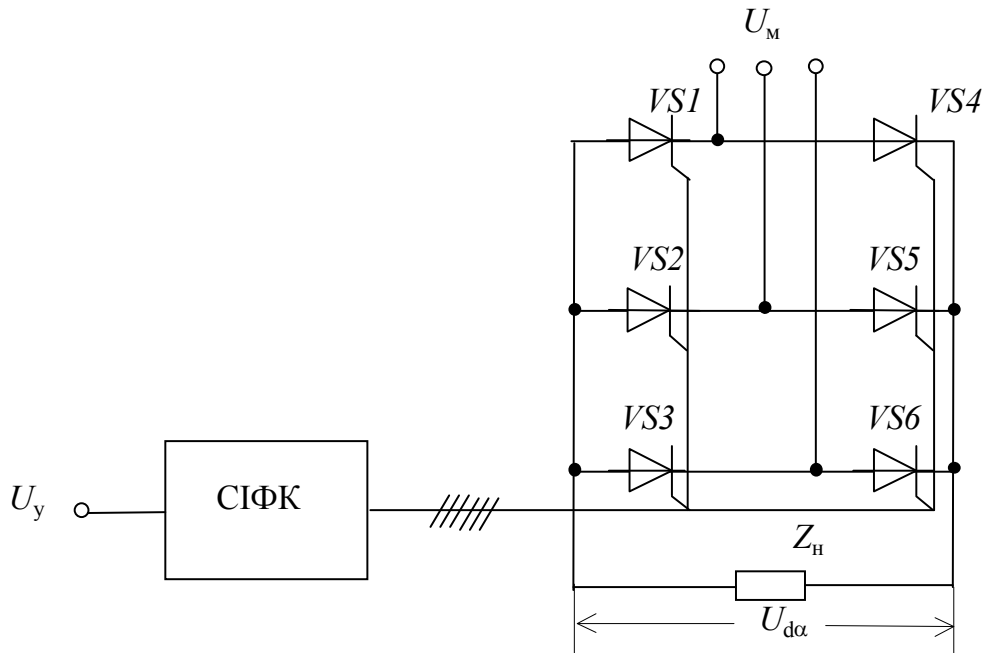


Рисунок 1.27 – Схема тиристорного випрямляча

У керованому режимі середнє значення вихідної напруги для неперервного струму в навантаженні

$$U_{d\alpha} = U_{do} \cdot \cos \alpha. \quad (1.41)$$

Підстановка формули (1.39) у формулу (1.41) дає вираз для статичної характеристики тиристорного випрямляча

$$U_{d\alpha} = U_{do} \cdot \cos U_y \frac{\omega_o \cdot T_o}{U_o}. \quad (1.42)$$

На рисунку 1.28 наведена статична характеристика тиристорного випрямляча для випадку, коли в системі керування (СІФУ):

$$\frac{\omega_o \cdot T_o}{U_o} = \frac{\pi}{20}. \quad (1.43)$$

Лінеаризуємо одержану статичну характеристику в робочій точці A із координатами $U_y = 6$ В, $U_{d\alpha} = 300$ В.

Згідно з формулою (1.36) коефіцієнт передачі тиристорного випрямляча в робочій точці визначається як

$$K_{TB} = \frac{dU_{d\alpha}}{dU_y} = -U_{do} \cdot \frac{\pi}{20} \cdot \sin\left(U_y \cdot \frac{\pi}{20}\right) \Big|_{U_y = 6} = -65,19; \quad (1.44)$$

або як

$$K_{TB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{268 - 333}{6,5 - 5,5} = -65. \quad (1.45)$$

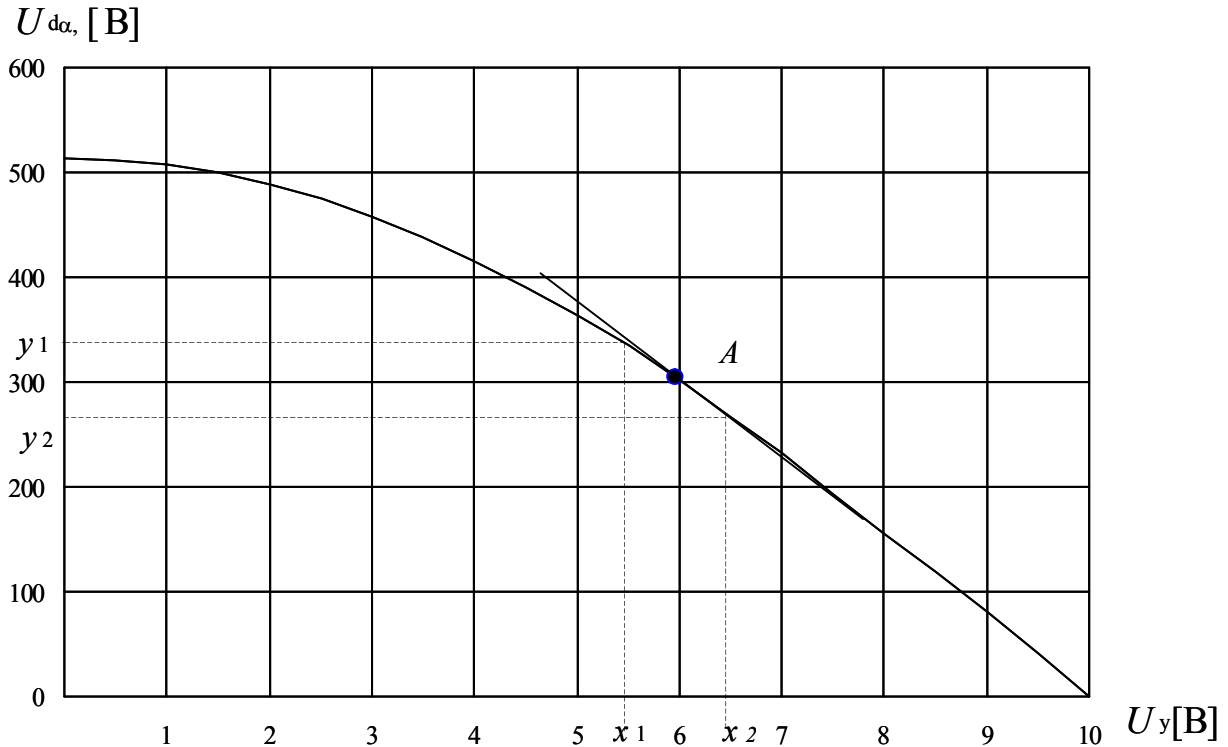


Рисунок 1.28 – Статична характеристика тиристорного випрямляча

У наслідок лінеаризації статичної характеристики тиристорний випрямляч в околицях робочої точки замінюється лінійною ланкою із коефіцієнтом передачі, що дорівнює K_{TB} .

Питання та завдання для самоперевірки

1. Назвіть прізвище механіка, що винайшов перший у світі промисловий регулятор.
2. Де застосовують системи прямого регулювання?
3. Як називається процес зміни будь-якого параметра несучого сигналу за законом інформаційного сигналу?
4. Як називають процес перетворення вхідного сигналу в дискретний?
5. Як називають пристрій, що здійснює квантування вхідного сигналу в часі?

6. Як називають процес модуляції, коли вихідна величина імпульсного елемента має вигляд імпульсів амплітуди яких не змінюється у функції вхідного сигналу, а дорівнює йому лише в тактові моменти?
7. Призначення порівнювального елемента в САР.
8. До якого типу САР належить регулятор Ползунова.
9. У наслідок чого неперервний вхідний сигнал САР перетворюється в ступінчасто-змінювану функцію?
10. Який закон регулювання реалізує П-регулятор?
11. Назвіть задачі головні завдання теорії автоматичного регулювання.
12. Призначення чутливого елемента в САР.
13. Якою є САР, у якій усталена похибка при постійному зовнішньому збуренні відмінна від нуля?
14. Який із регуляторів компенсує статичну похибку?
15. Як називають процес побудови наближених моделей нелінійних систем?
16. Укажіть закон зміни одиничної ступеневої функції.
17. Назвіть типові діяння в САР.
18. Яку функцію виконує корегувальний елемент?
20. Зобразіть імпульсний елемент, що здійснює АІМ-1.
20. Як лінеаризують статичну характеристику в робочій точці?
21. Що таке дельта функція?
23. Який закон реалізує ПІД-регулятор?
23. Укажіть закон зміни лінійнозростаючої функції.
24. Яке завдання вирішують САР?
25. Як називають пристрій, що здійснює квантування вхідного сигналу за рівне?
26. Призначення задаючого елемента в САР.
27. Як називається процес зміни фазового зсуву вихідного сигналу під дією зміни амплітуди вхідного сигналу?

2 ДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ

2.1 Диференційні рівняння динамічних ланок системи автоматичного регулювання

На відміну від усталеного режиму, динамічний режим характеризується змінами вхідного та вихідного сигналів: $x(t) = var$, $y(t) = var$. Поведінка системи автоматичного регулювання в динамічному режимі описується диференційними рівняннями n -го порядку

$$a_0 \frac{d^m y(t)}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + a_2 \frac{d^{m-2} y(t)}{dt^{m-2}} + \dots + a_{m-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_m y(t) =$$
(2.1)

$$= b_0 \frac{d^n x(t)}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + b_2 \frac{d^{n-2} x(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_n x(t);$$

де $m \geq n+1$.

Розглянемо динамічну ланку (рис. 2.1), динамічні процеси якої описуються функцією $q(t)$.

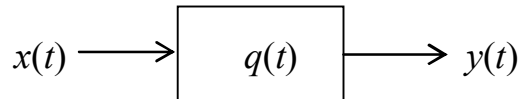


Рисунок 2.1 – Узагальнена динамічна ланка

В залежності від виду функції $q(t)$ змінюються динамічні властивості ланки.

2.1.1 Пропорційна ланка

Для пропорційної ланки $q(t) = K$. Диференційне рівняння пропорційної ланки має вигляд

$$y(t) = K \cdot x(t). \tag{2.2}$$

2.1.2 Диференційна ланка

У цій динамічній ланці функція $q(t)$ описує процес диференціювання в часі вхідного діяння. Диференційне рівняння диференційної ланки має вигляд

$$y(t) = T \frac{dx(t)}{dt}, \tag{2.3}$$

де T – стала часу.

Прикладами диференційних ланок є підключення індуктивності L (рис. 2.2, а) до джерела струму $I(t)$ та підключення конденсатора C (рис. 2.2, б) до джерела напруги $U(t)$.

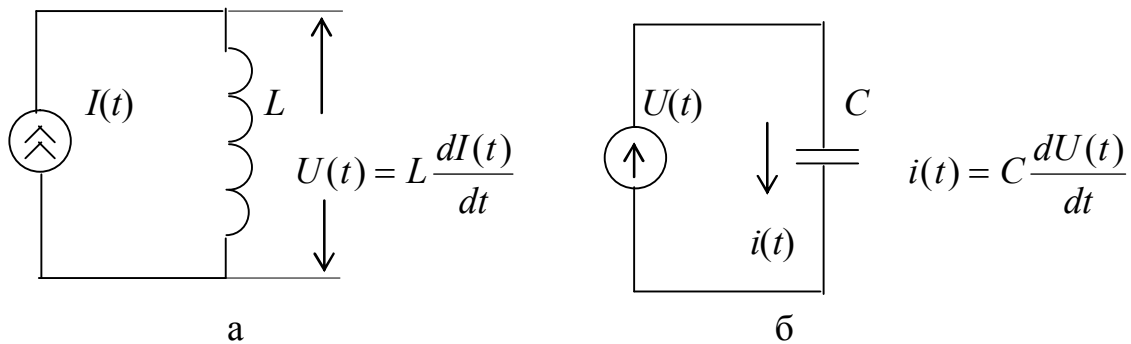


Рисунок 2.2 – Електричні схеми диференційних ланок

2.1.3 Інтегрувальна ланка

У цій динамічній ланці функція $q(t)$ описує процес інтегрування вхідного діяння. Диференційне рівняння інтегрувальної ланки має вигляд

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^t x(t) \cdot dt. \quad (2.4)$$

Прикладами диференційних ланок є підключення індуктивності L (рис. 2.3, а) до джерела напруги $U(t)$ та підключення конденсатора C (рис. 2.3, б) до джерела струму $I(t)$. Динамічні процеси в ланці рисунку 2.3, а характеризуються рівнянням

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t U(t) \cdot dt, \quad (2.5)$$

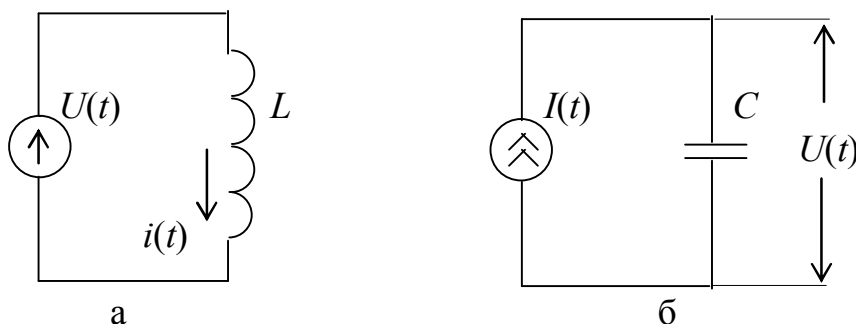


Рисунок 2.3 – Електрична схема інтегруючої а ланки

а в ланці рисунку 2.3, б – рівнянням

$$U(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I(t) \cdot dt. \quad (2.6)$$

2.1.4 Аперіодична ланка

Динамічні процеси в аперіодичній ланці описуються диференціальним рівнянням

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t). \quad (2.7)$$

Замінивши у рівняння (2.7) операцію диференціювання на інтегрування і записавши одержаний результат відносно вихідного сигналу $y(t)$, одержуємо

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^t [K \cdot x(t) - y(t)] \cdot dt. \quad (2.8)$$

Виразу (2.8) відповідає модель (рисунок 2.4) аперіодичної ланки.

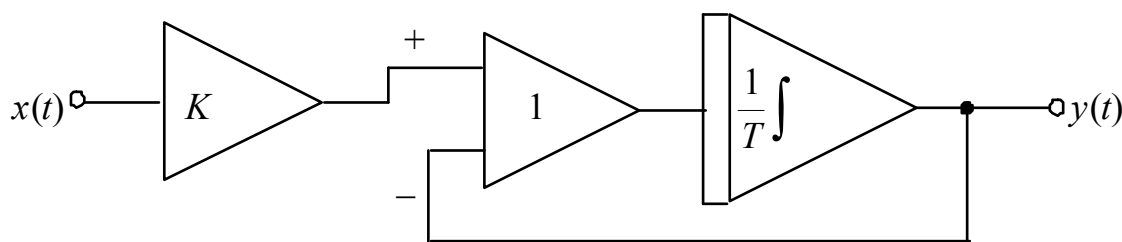


Рисунок 2.4 – Модель аперіодичної ланки

Прикладом аперіодичної ланки є електрична схема RC -ланки, що зображена на рисунку 2.5. Динамічні процеси в такій ланці описуються наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} U_1(t) &= R \cdot i(t) + U_2(t); \\ U_2(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i(t) \cdot dt. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

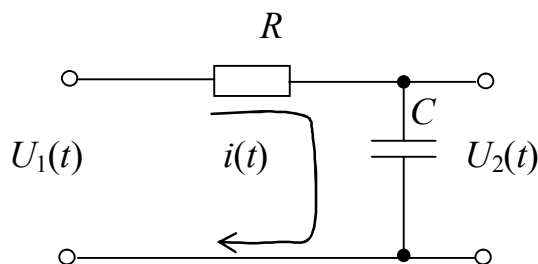


Рисунок 2.5 – Електрична схема аперіодичної ланки

Розв'язавши систему рівнянь (2.9), одержуємо

$$RC \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = U_1(t), \quad (2.10)$$

де $RC = T$ – стала часу аперіодичної ланки.

Одержане рівняння (2.10) структурно співпадає із рівнянням (2.7) при $K = 1$.

Другим прикладом аперіодичної ланки є генератор постійного струму. Генератор являє собою підсилювач у якому зміною струму збудження $i_3(t)$ відбувається керування струму $i_я(t)$ кола якоря. На схемі, зображеній на рисунку 2.6, R_3 і L_3 – активний опір та індуктивність кола збудження.

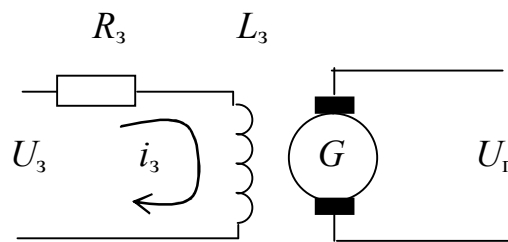


Рисунок 2.6 – Генератор постійного струму

При постійних обертах якоря динамічні процеси в генераторі визначаються системою рівнянь

$$\left. \begin{aligned} U_3(t) &= R_3 \cdot i_3(t) + L_3 \frac{di_3(t)}{dt}, \\ U_2(t) &= K_2 \cdot R_3 \cdot i_3(t), \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

де $K_2 = \frac{1}{R_3} \cdot \frac{dU_2}{dt}$ – коефіцієнт підсилення за напругою від кола збудження до якорного кола.

Виключивши струм із системи рівнянь (2.11), одержимо диференціальне рівняння

$$K_2 \cdot U_3(t) = T_3 \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t), \quad (2.12)$$

де $T_3 = \frac{L_3}{R_3}$ – електромагнітна стала часу кола збудження генератора.

2.1.5 Диференційна ланка з уповільненням

Динамічні процеси в цій динамічній ланці описуються таким диференційним рівнянням

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T \frac{dx(t)}{dt}. \quad (2.13)$$

Виконавши перетворення аналогічні (2.8), одержуємо

$$y(t) = x(t) - \frac{1}{T} \int_0^t y(t) \cdot dt. \quad (2.14)$$

Виразу (2.14) відповідає модель, що зображена на рисунку 2.7.

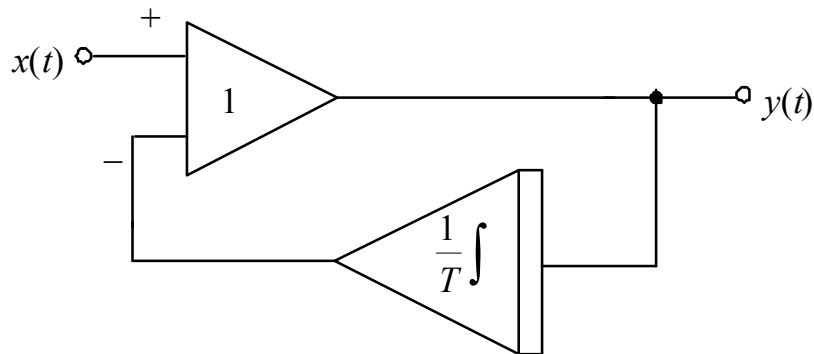


Рисунок 2.7 – Модель диференційної ланки із уповільненням

Прикладом диференційної ланки із уповільненням є електрична схема RC-ланки, що наведена на рисунку 2.8. Процеси в цій ланці описуються системою диференційних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} U_1(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i(t) \cdot dt + U_2(t), \\ U_2(t) &= i(t) \cdot R. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

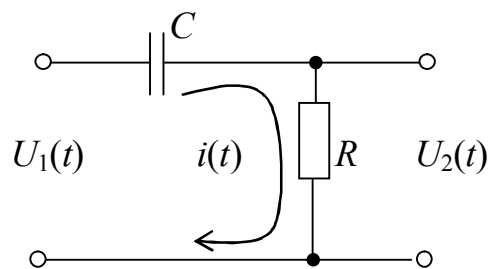


Рисунок 2.8 – Електрична схема диференційної ланки з уповільненням

Розв'язавши систему рівнянь (2.15), одержуємо

$$T \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = T \frac{dU_1(t)}{dt}, \quad (2.16)$$

де $T = RC$.

2.1.6 Ізодромна ланка

Динамічні процеси в ізодромній ланці описуються таким диференціальним рівнянням

$$T_1 \frac{dy(t)}{dt} = x(t) + T_2 \frac{dx(t)}{dt}. \quad (2.17)$$

Проінтегрувавши й розділивши на T_1 обидві частини рівняння (2.17), одержуємо

$$y(t) = \frac{1}{T_1} \int_0^t x(t) \cdot dt + \frac{T_2}{T_1} x(t). \quad (2.18)$$

Виразу (2.18) відповідає модель (рис. 2.9) ізодромної ланки, на якій $K = T_2/T_1$

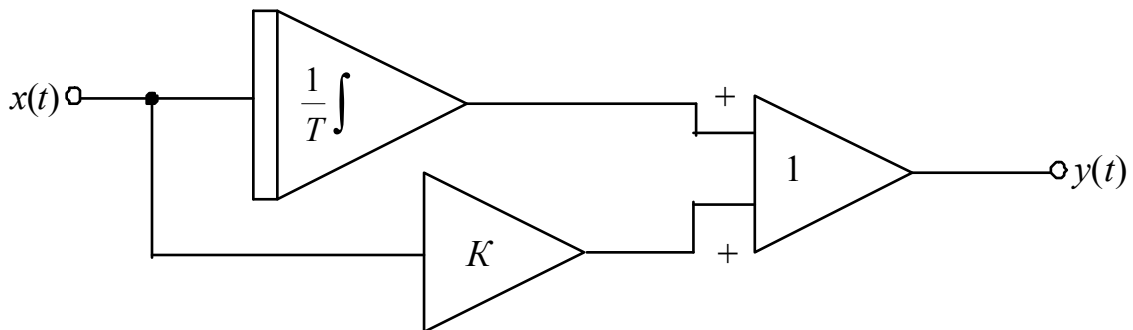


Рисунок 2.9 – Модель ізодромної ланки

2.1.7 Коливальна ланка

Диференціальне рівняння коливальної ланки має вигляд

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \cdot \xi \cdot T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t). \quad (2.19)$$

Представивши (2.19) у вигляді аналогічному (2.8), одержимо модель (рис. 2.10) коливальної ланки.

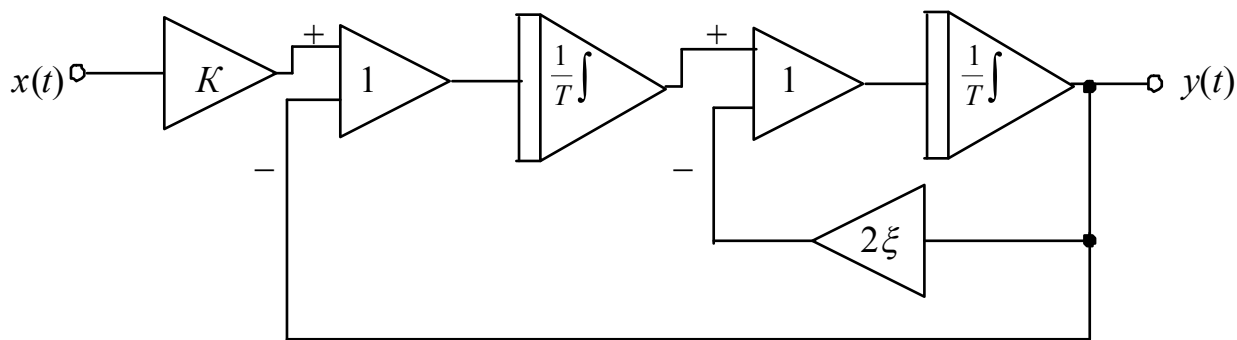


Рисунок 2.10 – Модель коливальної ланки

Прикладом коливальної ланки є електричний ланцюг принципова схема якого наведена на рисунку 2.11.

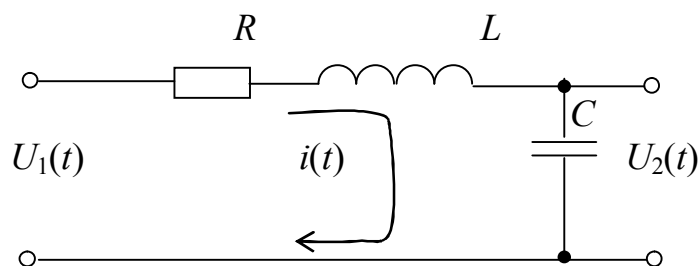


Рисунок 2.11 – Принципова схема коливальної ланки

Наведеній схемі відповідає наступна система диференціальних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} U_1(t) &= R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + U_2(t); \\ U_2(t) &= \frac{1}{C} \int_0^t i(t) \cdot dt. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Розв'язавши систему рівнянь (2.20), одержуємо

$$LC \frac{d^2 U_2(t)}{dt^2} + RC \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = U_1(t), \quad (2.21)$$

де $L \cdot C = T^2$, T – стала часу;

$$RC = 2 \cdot T \cdot \xi, \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \text{ – коефіцієнт демпфірування.}$$

В залежності від величини ξ перехідний процес у коливальній ланці носить різний характер. Коли $\xi < 1$ реакція коливальної ланки на скачок вхі-

дного діяння носить коливальний характер. При цьому, чим менша величина ξ , тим більша амплітуда коливань. Коли $\xi > 1$ перехідний процес носить аперіодичний характер і коливальна ланка вироджується в дві послідовно з'єднані аперіодичні ланки.

2.1.8 Консервативна ланка

Ланка будь-якої фізичного погодження, що описується диференційним рівнянням

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = K \cdot x(t), \quad (2.22)$$

називається консервативною ланкою.

Коливальна ланка може вважатись консервативною, якщо в ній відсутні елементи, що спричиняють втрати енергії коливань ($\xi = 0$). Прикладом консервативної ланки є коливальний контур (рис. 2.11), у якому відсутній активний опір R . Усі характеристики консервативної ланки можна одержати із характеристик коливальної ланки при $\xi = 0$.

2.2 Диференційні рівняння замкнутої системи

Порядок запису диференційних рівнянь замкнутої системи автоматичного регулювання розглянемо на прикладі системи, функціональна схема якої наведена на рисунку 2.12. Система складається із трьох послідовно з'єднаних аперіодичних ланок. Кожна із i -тої аперіодичних ланок має свої коефіцієнт передачі K_i та сталу часу T_i . Вхідними діяннями для кожної із динамічних ланок є вихідний сигнал попередньої ланки. Так, для першої аперіодичної ланки вхідним діянням є сигнал похибки $\varepsilon(t)$. Для другої аперіодичної ланки – вихідний сигнал $q(t)$ першої ланки, а для третьої – вихідний сигнал $z(t)$ другої ланки. Ураховуючи вираз (2.7), записуємо диференціальні рівняння для кожної із аперіодичних ланок.

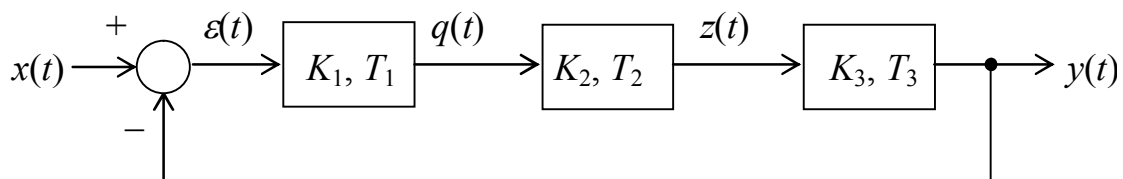


Рисунок 2.12 – Функціональна схема замкнутої системи автоматичного регулювання

$$\begin{cases} T_1 \cdot \frac{dq(t)}{dt} + q(t) = K_2 \cdot \varepsilon(t); \\ T_2 \cdot \frac{dz(t)}{dt} + z(t) = K_2 \cdot q(t); \\ T_3 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_3 \cdot z(t); \\ x(t) - y(t) = \varepsilon(t). \end{cases} \quad (2.23)$$

Доповнивши одержані рівняння умовою замикання зворотного зв'язку, одержуємо систему диференціальних рівнянь, що описують динамічні процеси в аналізованій замкнутій системі.

2.3 Перетворення Лапласа

2.3.1 Загальні відомості про перетворення Лапласа

Розв'язання лінійних диференціальних рівнянь може бути спрощено шляхом використання методів, в основу яких покладено перетворення функції дійсної змінної в функцію комплексної змінної. Методи функціонального перетворення дають змогу диференціальні рівняння замінити алгебраїчними рівняннями, розв'язання яких значно простіше. До таких перетворень належить метод Лапласа.

За Лапласом може бути перетворена функція яка відповідає таким вимогам

$$f(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Із (2.24) випливає, що за Лапласом може бути перетворена функція, яка визначена для додатних значень часу. Приклади таких функцій наведено на рисунку 2.13.

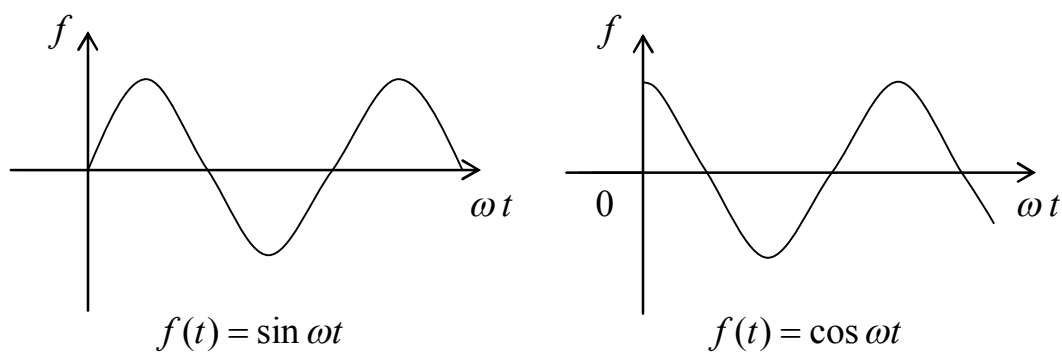


Рисунок 2.13 – Приклади функцій

Перехід від функції в часовій області до функції комплексної змінної називається прямим перетворенням Лапласа (L -перетворення). Пряме перетворення Лапласа здійснюється за допомогою інтегрального перетворення [8]

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt, \quad (2.25)$$

де p – комплексна змінна;

$f(t)$ – оригінал;

$F(p)$ – зображення.

Зворотній перехід від зображення до оригіналу здійснюється за допомогою такого інтегрального перетворення:

$$f(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(p) \cdot e^{pt} \cdot dp. \quad (2.26)$$

Пряме перетворення позначається як

$$F(p) = L[f(t)], \quad (2.27)$$

а зворотне як

$$f(t) = L^{-1}[F(p)]. \quad (2.28)$$

У таблиці 2.1 наведені перетворення за Лапласом найбільш вживаних функцій.

Таблиця 2.1 – Перетворення за Лапласом

$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$	$F(t)$
$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$1(t)$	$\frac{1}{p}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$e^{-at} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$e^{-at} \cdot \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{p} \left(\frac{1}{p+a} \right)$	$t \cdot \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{1}{a}(e^{-at} - 1)$	$\frac{1}{p} \left(\frac{1}{p-a} \right)$	$sh \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{p \mp a}$	$ch \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$

2.3.2 Теореми перетворення Лапласа

Теорема лінійності.

Якщо функція $f(t)$ являє собою деяку функцію $f_1(t)$, помножену на константу a

$$f(t) = a \cdot f_1(t) \quad (2.29)$$

і яка може бути перетворена за Лапласом

$$L[f_1(t)] = F_1(p), \quad (2.30)$$

то

$$L[f(t)] = L[a \cdot f_1(t)] = a \cdot F_1(p). \quad (2.31)$$

Якщо функція $f(t)$ являє собою суму деяких i -тих функцій

$$f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t), \quad (2.32)$$

кожна із яких перетворюються за Лапласом

$$L[f_i(t)] = F_i(p), \quad (2.33)$$

то зображення функції $f(t)$ може бути знайдено як суму зображень від $f_i(t)$.

$$L[f(t)] = \sum_{i=1}^n F_i(p). \quad (2.34)$$

Ця властивість дає змогу одержати перетворення за Лапласом алгебраїчних многочленів, тригонометричних та гіперболічних функцій.

Приклад 2.1 Знайти перетворення за Лапласом функції

$$f(t) = 1 - e^{-at}. \quad (2.35)$$

Цю функцію можна представити як суму двох функцій $f_1(t) = 1$ і $f_2(t) = e^{-at}$ які згідно із таблицею 2.1 мають зображення: $F_1(p) = \frac{1}{p}$ і $F_2(p) = \frac{1}{p+a}$. Застосувавши формулу (2.34), одержуємо перетворення функції $f(t)$:

$$L[f(t)] = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+a} = \frac{a}{p(p+a)}. \quad (2.36)$$

Приклад 2.2 Знайти перетворення за Лапласом функції $f(t) = U \cdot \cos \omega t$.

Застосувавши до функції $f(t)$ формулу Ейлера [9], одержуємо

$$U \cdot \cos \omega t = U \cdot \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}). \quad (2.37)$$

Тоді, згідно із таблицею 2.1

$$L[U \cdot \cos \omega t] = U \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{p + j\omega} \right) = U \cdot \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \quad (2.38)$$

Теорема подібності.

Якщо функція $f(t)$ може бути перетворена за Лапласом

$$L[f(t)] = F(p), \quad (2.39)$$

то при зміні масштабу змінної величини $f(t) = f(a \cdot t)$, зображення набуває вигляду

$$L[f(a \cdot t)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right). \quad (2.40)$$

Теорема згасання.

Якщо функція $f(t)$ може бути перетворена за Лапласом

$$L[f(t)] = F(p), \quad (2.41)$$

то тоді згасаюча функція $f(t) \cdot e^{-at}$ має зображення

$$L[f(t) \cdot e^{-at}] = F(p + a). \quad (2.42)$$

Приклад 2.3 Знайти перетворення по Лапласу функції

$$f(t) = e^{-at} \cdot \sin \omega t. \quad (2.43)$$

Згідно із таблицею 2.1 $L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ тоді, застосовуючи формулу (2.40), одержуємо

$$L[e^{-at} \cdot \sin \omega t] = \frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}. \quad (2.44)$$

Теорема диференціювання. Якщо функція $f(t)$ та її n -та похідна $f^{(n)}(t)$ можуть бути перетворені за Лапласом, то

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n \cdot \left\{ F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right\}, \quad (2.45)$$

де $F(p) = L[f(t)]$.

Формула (2.45) значно спрощується для нульових початкових умов $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$:

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n \cdot F(p). \quad (2.46)$$

Приклад 2.4 Знайти перетворення за Лапласом першої похідної функції $f(t) = U \cdot \sin \omega t$.

Згідно із таблицею 2.1 маємо

$$F(p) = L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (2.47)$$

Застосувавши до виразу (2.47) формулу (2.46), одержуємо

$$L[f'(t)] = \frac{\omega \cdot p}{p^2 + \omega^2}. \quad (2.48)$$

Теорема інтегрування. Якщо $L[f(t)] = F(p)$, то для нульових початкових умов

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{p} \cdot F(p). \quad (2.49)$$

Аналогічно до (2.49) маємо

$$L\left[\int_0^{t_1} dt_1 \cdot \int_0^{t_2} dt_2 \cdot \dots \cdot \int_0^{t_{(n-1)}} f(t) dt_{(n-1)}\right] = \frac{1}{p^n} \cdot F(p). \quad (2.50)$$

Приклад 2.5 Знайти перетворення за Лапласом інтеграла функції $f(t) = 1(t) \cdot U(t)$.

Згідно із таблицею 2.1 маємо

$$F(p) = L[1(t)] = \frac{1}{p}. \quad (2.51)$$

Застосувавши до (2.51) формулу (2.49), одержуємо

$$L\left[\int_0^t U(t) \cdot 1(t) \cdot dt\right] = U(p) \cdot \frac{1}{p^2}. \quad (2.52)$$

Теореми диференціювання та інтегрування відіграють важливу роль в одержанні перетворення за Лапласом диференційних рівнянь динамічних ланок системи автоматичного регулювання.

Теорема зсуву. Якщо функція $f(t)$ може бути перетворена за Лапласом і має своїм зображенням $F(p)$, то перетворення за Лапласом функції $f(t-\tau)$ має вигляд

$$L[f(t-\tau)] = e^{-p\tau} \cdot F(p). \quad (2.53)$$

Графік функції $f(t-\tau)$ одержують із графіка функції $f(t)$ шляхом зсуву останнього в право на величину τ (рис. 2.14, а, б).

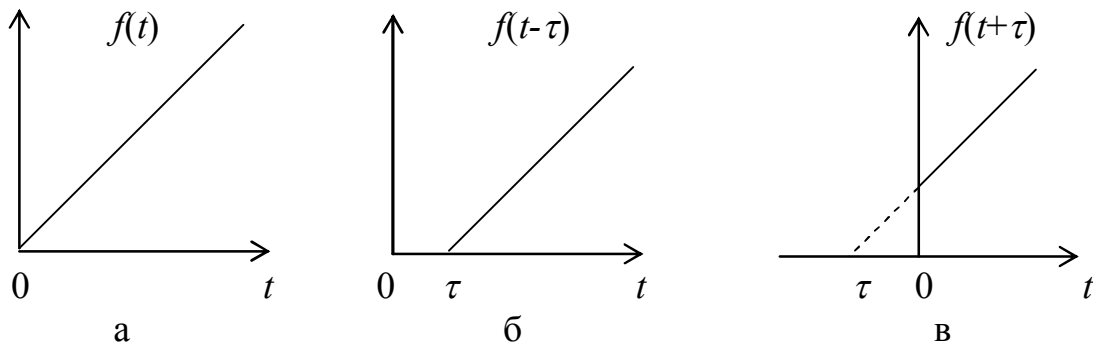


Рисунок 2.14 – Графіки функції

Формула (2.53) відіграє важливу роль у дослідженні систем автоматичного регулювання з запізненням.

Якщо формулу (2.53) читати із право наліво, тобто переходити від зображення до оригіналу, то необхідно пам'ятати, що оригінал $f(t-\tau)$ при $t < \tau$ дорівнює нулю. Так, наприклад, якщо в результаті розрахунків одержано перетворення

$$F(p) = e^{-p} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}, \quad (2.54)$$

то при $t \geq 1$ оригіналом буде $\sin(t-1)$, а при $0 \leq t < 1$ – нуль.

Якщо графік функції $f(t)$ зміщується на τ не вправо, а наліво (рис. 2.14, в), то його частина, що відповідає відрізку осі t від 0 до τ , пропадає, так як нова функція відповідно до (2.24) розглядається тільки для зна-

чень $t \geq 0$. У разі такого зміщення функції $f(t)$ перетворення за Лапласом функції $f(t + \tau)$ виконується згідно із формулою

$$L[f(t + \tau)] = e^{p\tau} \cdot \left[F(p) + \int_0^{\tau} e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt \right]. \quad (2.55)$$

Формула (2.55) відіграє важливу роль у розв'язанні різностних рівнянь, що застосовуються під час дослідження дискретних систем автоматичного регулювання. У такі рівняння, крім $f(t)$, входять значення $f(t + T)$, $f(t + 2T)$ і тощо.

Теорема згортання. Якщо функція $f(t)$ має зображення $F(p)$, то перетворення за Лапласом від добутку функції $f(t)$ і затухаючої експоненти e^{-at} виконується згідно із формулою

$$L[e^{-at} \cdot f(t)] = F(p + a). \quad (2.56)$$

Теорема згортання. Добутки зображень $F_1(p) \cdot F_2(p)$ в області оригіналу відповідає інтегральна комбінація функцій $f_1(t)$ та $f_2(t)$ яка називається згорткою

$$f_1 \cdot f_2 = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) \cdot dt. \quad (2.57)$$

Згортка, так само як і добутки, має властивість комутативності, тобто

$$f_1 \cdot f_2 = f_2 \cdot f_1,$$

або в розкритому вигляді

$$\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) \cdot dt = \int_0^t f_2(\tau) \cdot f_1(t - \tau) \cdot dt \quad (2.58)$$

і властивістю асоціативності

$$(f_1 \cdot f_2) \cdot f_3 = (f_1 \cdot f_3) \cdot f_2. \quad (2.59)$$

Перетворення за Лапласом згортки функцій виконується згідно із формулою

$$L[f_1 \cdot f_2] = F_1(p) \cdot F_2(p), \quad (2.60)$$

тобто, згортка функцій в області оригіналу відповідає добутку зображень цих функцій у комплексній області.

Теорема розкладу. Із раніше наведених прикладів видно як, маючи диференціальне рівняння динамічної ланки або всієї системи автоматичного управління, можна знайти перетворену за Лапласом функцію. Отже виникає

нова задача – відтворення первинної функції по перетвореній, або, як інакше кажучи, пошуку оригінала по зображенню. Ця задача зводиться до розв'язання інтегрального рівняння (2.17).

Якщо зображення функції має вигляд відношення двох поліномів

$$F(p) = \frac{U(p)}{V(p)}, \quad (2.61)$$

де $U(p) = a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0$, $V(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0$, причому показник ступеня полінома чисельника менший показника ступеня полінома знаменника $m < n$.

Тоді розв'язання інтегрального рівняння Лапласа має вигляд

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{U(p_i)}{V'(p_i)} e^{p_i t}, \quad (2.62)$$

де p_i – корінь рівняння $V(p) = 0$; $V'(p_i) = \frac{dV}{dp}$ при $p = p_i$.

Формула (2.62) дає змогу виконувати зворотне перетворювання Лапласа для простих коренів рівняння $V(p) = 0$.

Приклад 2.6 Знайти оригінал функції

$$F(p) = \frac{T_1 p + 1}{p(T_2 p + 1)}, \quad (2.63)$$

де T_1 і T_2 – постійні коефіцієнти.

У цьому разі $U(p) = T_1 p + 1$, а $V(p) = p(T_2 p + 1)$. Характеристичне рівняння $p(T_2 p + 1) = 0$ має два корені: $p_1 = 0$ і $p = -1/T_2$. Похідна від характеристичного полінома $V'(p) = 2T_2 p + 1$. Тоді згідно із формулою розкладу (2.62) одержуємо

$$f(t) = 1 + \left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right) e^{-\frac{t}{T_2}}. \quad (2.64)$$

Теорема про початкове значення оригіналу. Якщо функція $f(t)$ має зображення $F(p)$, то початкове значення функції $f(t = 0)$ одержують як

$$f(0_+) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p). \quad (2.65)$$

Теорема про кінцеве значення оригіналу. Якщо функція $f(t)$ має зображення $F(p)$, то кінцеве значення функції $f(t = \infty)$ одержують як

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p). \quad (2.66)$$

Формули (2.65) і (2.66) дають змогу одержати початкове ті кінцеве значення оригіналу безпосередньо по його перетворенню за Лапласом.

2.4 Операційний метод розв'язання диференціальних рівнянь

Операційний метод є метод інтегрування деяких класів лінійних диференціальних рівнянь. Цей метод зводиться до того, що спочатку виконується пошук не самої функції, яка задовольняє диференціальному рівнянню, а відповідна їй перетворена за Лапласом функція.

Цей метод безпосередньо застосовується до звичайних диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами. Спосіб складання перетворених функцій, що задовольняють диференціальному рівнянню, найзручніше ілюструвати на прикладах.

Приклад 2.7 Дано диференціальне рівняння (2.10) аперіодичної ланки, що наведена на рисунку 2.5 розв'язати

$$RC \frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = U_1(t).$$

Потрібно розв'язати це рівняння для нульових початкових значень

$$U_2|_{t=0} = U_2(0). \quad (2.67)$$

На першому етапі виконаємо перетворення за Лапласом диференціального рівняння (2.10). Застосувавши до обох частин рівняння теорему лінійності та теорему диференціювання одержуємо

$$RC \cdot U_2(p) \cdot p + U_2(p) = U_1(p). \quad (2.68)$$

В результаті перетворення за Лапласом одержуємо звичайне алгебраїчне рівняння першого порядку змінної p . На другому етапі, розв'язавши (2.68), одержуємо

$$U_2(p) = U_1(p) \frac{1}{RC \cdot p + 1}. \quad (2.69)$$

На останньому етапі, задавшись законом зміни вхідного діяння $U_1(p) = L[U_1(t)]$, із застосуванням теореми розкладу (2.62) одержують оригінал функції $U_2(t)$.

Приклад 2.8 Виконати перетворення за Лапласом диференціального рівняння коливальної ланки (2.19)

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \cdot \xi \cdot T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot x(t)$$

для нульових початкових значень $y|_{t=0} = y(0)$.

Застосувавши до обох частин рівняння теорему лінійності та теорему диференціювання, одержуємо

$$T^2 \cdot p^2 \cdot y(p) + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot y(p) + y(p) = K \cdot x(p). \quad (2.70)$$

Подальший шлях розв'язання рівняння (2.70) такий же як і у прикладі 2.7.

Приклад 2.9 Виконати перетворення за Лапласом системи диференційних рівнянь (2.23) замкнутої системи автоматичного регулювання, що зображена на рисунку 2.12.

$$\begin{cases} T_1 \cdot \frac{dq(t)}{dt} + q(t) = K_2 \cdot \varepsilon(t); \\ T_2 \cdot \frac{dz(t)}{dt} + z(t) = K_2 \cdot q(t); \\ T_3 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_3 \cdot z(t); \\ x(t) - y(t) = \varepsilon(t). \end{cases}$$

Застосувавши до обох частин рівнянь системи теорему лінійності та теорему диференціювання, одержуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} T_1 \cdot p \cdot q(p) + q(p) = K_2 \cdot \varepsilon(p); \\ T_2 \cdot p \cdot z(p) + z(p) = K_2 \cdot q(p); \\ T_3 \cdot p \cdot y(p) + y(p) = K_3 \cdot z(p); \\ x(p) - y(p) = \varepsilon(p). \end{cases} \quad (2.71)$$

Подальший шлях розв'язання системи диференційних рівнянь наведено в попередніх прикладах 2.7, 2.8.

2.5 Передавальні функції динамічних ланок

2.5.1 Визначення передавальної функції

Передавальна функція динамічної ланки (рис. 2.15) або системи автоматичного регулювання визначається відношенням перетворених за

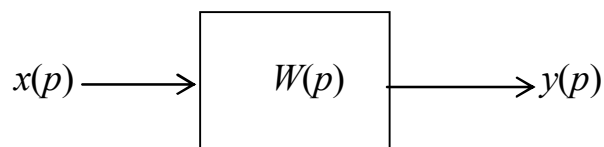


Рисунок 2.15 – Структурна схема динамічної ланки

Лапласом вихідного $y(p)$ і вхідного $x(p)$ сигналів

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)}. \quad (2.72)$$

В загальному випадку передавальна функція являє собою раціональний дріб

$$W(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + a_3 p^{n-3} + \dots + a_n}{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + b_3 p^{m-3} + \dots + b_m}, \quad (2.73)$$

де a_i і b_i – коефіцієнти, що залежать від параметрів динамічної ланки.

Багаточлен $x(p)$ знаменника передавальної функції називається характеристичним поліномом, а рівняння

$$M(p) = 0, \quad (2.74)$$

являє собою характеристичне рівняння динамічної ланки або системи автоматичного регулювання.

2.5.2 Передавальні функції елементарних ланок

Пропорційна ланка. Виконавши перетворення за Лапласом диференційного рівняння (2.2) із подальшим застосуванням визначення передавальної функції, одержимо

$$K = \frac{a_n}{b_m}, \quad (2.75)$$

де K – коефіцієнт передачі (підсилення).

Диференційна ланка. Згідно з диференційним рівнянням (2.3) передавальна функція диференційної ланки

$$G(p) = T \cdot p. \quad (2.76)$$

Інтегрувальна ланка. Виконавши перетворення за Лапласом диференційного рівняння (2.4) одержуємо

$$G(p) = \frac{1}{T \cdot p}. \quad (2.77)$$

Аперіодична ланка. Виконавши перетворення за Лапласом диференційного рівняння (2.7) із подальшим застосуванням визначення передавальної функції, одержимо

$$G(p) = \frac{K}{T \cdot p + 1}. \quad (2.78)$$

Диференційна ланка із сповільненням. Застосувавши до диференційного рівняння (2.13) перетворення за Лапласом, одержимо

$$T \cdot p \cdot y(p) + y(p) = T \cdot p \cdot x(p).$$

Звідки

$$G(p) = \frac{T \cdot p}{T \cdot p + 1}. \quad (2.79)$$

Ізодромна ланка. Перетворення за Лапласом диференційного рівняння (2.17) ізодромної ланки має вигляд

$$T_1 \cdot p \cdot y(p) = x(p) + T_2 \cdot p \cdot x(p). \quad (2.80)$$

Звідки

$$G(p) = \frac{T_2 \cdot p + 1}{T_1 \cdot p}. \quad (2.81)$$

Коливальна ланка. Передавальну функцію коливальної ланки одержимо із (2.70)

$$G(p) = \frac{1}{T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T \cdot p + 1}. \quad (2.82)$$

Консервативна ланка. Перетворення за Лапласом диференційного рівняння (2.22) консервативної ланки має вигляд

$$T^2 \cdot p^2 \cdot y(p) + y(p) = K \cdot x(p). \quad (2.83)$$

Із (2.83) одержуємо

$$G(p) = \frac{K}{T^2 \cdot p^2 + 1}. \quad (2.84)$$

Наведені передавальні функції динамічних ланок є найбільш застосовуваних при побудові систем автоматичного регулювання. Передавальні функції других динамічних ланок можуть бути одержані або із їх диференційних рівнянь, або безпосередньо із їхніх електричних схем.

2.5.3 Запис передавальної функції динамічної ланки по її електричній схемі

Розглянемо узагальнену електричну схему динамічної ланки, що наведена на рисунку 2.16. Опори $Z_1(p)$ і $Z_2(p)$ являють собою еквівалентні опори різних видів з'єднань активних та реактивних елементів динамічної ланки.

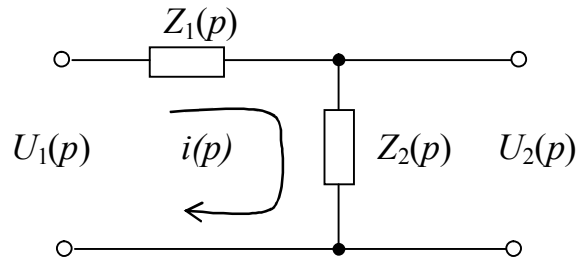


Рисунок 2.16 – Узагальнена електрична схема динамічної ланки

Зв'язок між вхідним та вихідним сигналами ланки визначається системою диференційних рівнянь, записаних в операторній формі

$$\begin{cases} U_2(p) = i(p) \cdot Z_2(p), \\ i(p) = U_1(p) \frac{1}{Z_1(p) + Z_2(p)}. \end{cases} \quad (2.85)$$

Підставивши друге рівняння системи в перше та застосувавши умову (2.72) одержуємо передавальні функцію динамічної ланки у наступному вигляді

$$G(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}, \quad (2.86)$$

де $Z_1(p) + Z_2(p) = Z_{\text{вх}}(p)$ – вхідний опір, а $Z_2(p) = Z_{\text{вих}}(p)$ – вихідний опір ланки.

Із (2.86) витікає, що передавальна функція пасивної динамічної ланки визначається відношенням її вхідного та вихідного опорів. Вхідний опір визначається опорами елементів, що підключені до вхідних клем динамічної ланки. Вихідний – опорами елементів, що підключені до вихідних клем ланки (при цьому U_1 умовно відключають).

Приклад 2.10. Записати передавальну функцію динамічної ланки електрична схема якої приведена на рисунку 2.17. Вихідний опір ланки визначається опором змінному струмові паралельного з'єднання резистора R_2 та конденсатора C

$$Z_{\text{вих}}(p) = \frac{R_2}{R_2 \cdot C \cdot p + 1}. \quad (2.87)$$

Вхідний опір ланки сумою опорів R_1 та паралельного з'єднання R_2 і C

$$Z_{вх}(p) = \frac{R_1(R_2 \cdot C \cdot p + 1) + R_2}{R_2 \cdot C \cdot p + 1}. \quad (2.88)$$

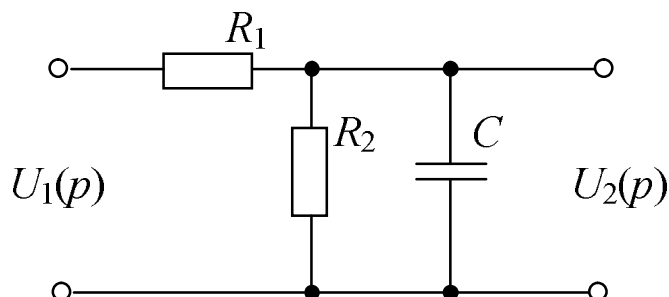


Рисунок 2.17 – Електрична схема динамічної ланки

Підставивши вирази (2.87) та (2.88) у (2.86) і виконавши перетворення, одержимо передавальну функцію динамічної ланки

$$G(p) = \frac{Z_{вих}(p)}{Z_{вх}(p)} = \frac{K}{T \cdot p + 1}, \quad (2.89)$$

де $K = R_2 / (R_1 + R_2)$, $T = R_1 \cdot R_2 \cdot C / (R_1 + R_2)$.

2.6 Реалізація передавальних функцій динамічних ланок на операційному підсилювачі

2.6.1 Загальні відомості про операційний підсилювач

Операційний підсилювач становить широкосмуговий підсилювач постійного струму [10], що характеризується великим коефіцієнтом підсилення ($K_0 \geq 10 \cdot 10^3$), великим вхідним опором ($r_{вх.} \geq 400 \cdot 10^3 \dots 200 \cdot 10^6$ Ом) та малим вихідним опором ($r_{вих.} < 200$ Ом).

В інженерній практиці при аналізі та синтезі схем на операційному підсилювачі приймають такі допущення:

$$K_0 \rightarrow \infty, r_{вх.} \rightarrow \infty, r_{вих.} = 0. \quad (2.90)$$

Зазначені допущення значно спрощують розрахунки схем. Похибка від таких допущень для сучасних операційних підсилювачів не перевищує 1 %. Операційний підсилювач, що характеризується параметрами (2.90), зветься ідеальним. Операційний підсилювач має два входи і один вихід (рис. 2.18). Вхід 1 – інвертувальний, 2 – неінвертувальний. Залежно від того

на який вхід подається вхідний сигнал одержують інвертувальну або неінвертувальну динамічну ланку.

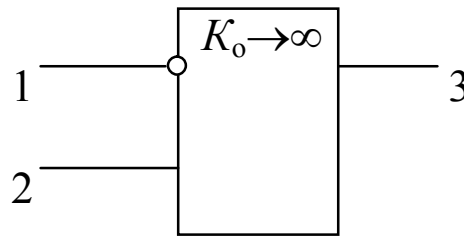


Рисунок 2.18 – Операційний підсилювач

Під інвертуванням розуміють знакоінверсію вихідного сигналу відносно вхідного.

Операційний підсилювач широко застосовується для практичної реалізації передавальних функцій динамічних ланок при побудові систем автоматичного регулювання.

2.6.2 Інвертувальна ланка на операційному підсилювачі

Інвертувальна ланка будується із використанням інвертувального входу операційного підсилювача (рис. 2.19).

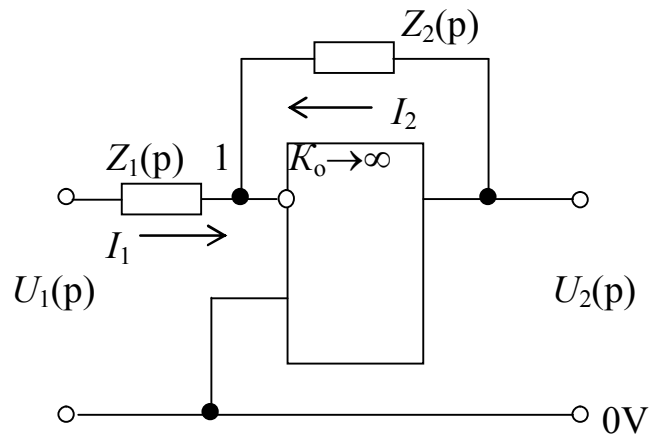


Рисунок 2.19 – Інвертувальна ланка

Параметри вхідного кола ланки визначаються опором $Z_1(p)$, а параметри від'ємного зворотного зв'язку – опором $Z_2(p)$. У вхідному колі протікає струм $I_1(p)$, а у колі зворотного зв'язку струм $I_2(p)$. Для ідеального операційного підсилювача ($K_0 \rightarrow \infty$) потенціал точки 1 відносно загальної шини 0V дорівнює нулю. На підставі цього можна записати, що

$$I_1(p) = -I_2(p).$$

Ураховуючи те, що

$$I_1(p) = \frac{U_1(p)}{Z_1(p)}, \quad \text{а} \quad I_2(p) = \frac{U_2(p)}{Z_2(p)},$$

Одержуємо

$$\frac{U_1(p)}{Z_1(p)} = -\frac{U_2(p)}{Z_2(p)}. \quad (2.91)$$

Із (2.91) витікає, що передавальна функція динамічної ланки побудованої із використанням інвертувального входу операційного підсилювача визначається як:

$$W_i(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}. \quad (2.92)$$

Знак мінус у (2.92) визначає наявність знакоінверсії між вхідним і вихідним сигналами.

2.6.3 Неінвертувальна ланка на операційному підсилювачу

Схема неінвертувальної ланки наведена на рисунок 2.20.

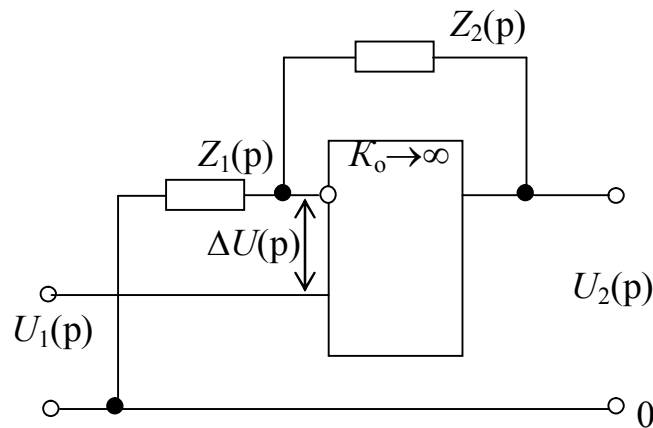


Рисунок 2.20 – Схема неінвертувальної ланки

Електричні процеси в даній ланці описуються такою системою диференціальних рівнянь, записаних в операторній формі

$$\begin{cases} U_2(p) = \Delta U(p) K_o, \\ \Delta U(p) = U_1(p) - U_2(p) \frac{Z_1(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}, \end{cases} \quad (2.93)$$

де $\Delta U(p)$ – диференціальний вхідний сигнал операційного підсилювача.

Розв'язавши систему рівнянь (2.93) із урахуванням того, що в ідеального операційного підсилювача $K_o \rightarrow \infty$, одержимо

$$U_2(p) = U_1(p) \frac{Z_1(p) + Z_2(p)}{Z_1(p)}. \quad (2.94)$$

Із (2.94) одержуємо вираз для передавальної функції неінвертувальної ланки

$$W_H(p) = 1 + \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}. \quad (2.95)$$

Вирази (2.92) та (2.95) є загальними та дають змогу виконувати аналіз і синтез конкретних передавальних функцій динамічних ланок.

2.6.4 Реалізація на операційному підсилювачі передавальних функцій типових динамічних ланок

Пропорційна ланка. У пропорційній ланці опори у вхідному колі і колі зворотного зв'язку є активними елементами: $Z_1(p) = R_1$, $Z_2(p) = R_2$. Згідно із (2.92) та (2.95) коефіцієнт інвертувальної ланки дорівнює

$$K_i = -\frac{R_2}{R_1}, \quad (2.96)$$

а неінвертувальної

$$K_H = 1 + \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.97)$$

Диференційна ланка. Схема диференційної ланки наведена на рисунку 2.21.

Згідно зі схемою маємо:

$$Z_1(p) = \frac{1}{Cp}, \quad Z_2(p) = R.$$

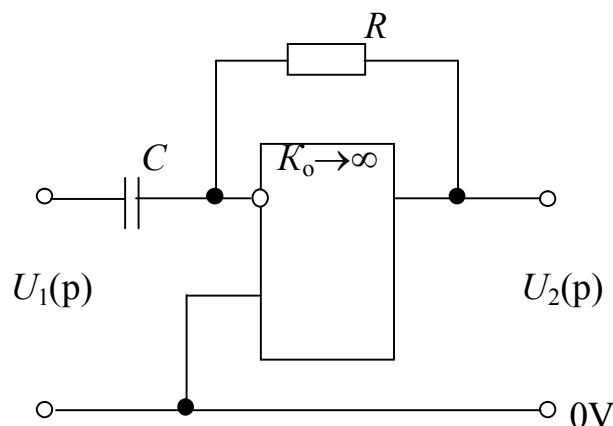


Рисунок 2.21 – Ідеально диференційна ланка

Тоді із (2.92) одержуємо

$$G(p) = -Tp, \quad (2.98)$$

де $T = RC$ – стала часу.

Неідеальна диференційна ланка. Електрична схема усієї ланки наведена на рисунку 2.22. Вхідне коло ланки складається із паралельного з'єднання резистора R_1 та конденсатора C . Згідно із рисунком маємо

$$Z_1(p) = \frac{R_1}{R_1 Cp + 1}, \quad Z_2(p) = R_2.$$

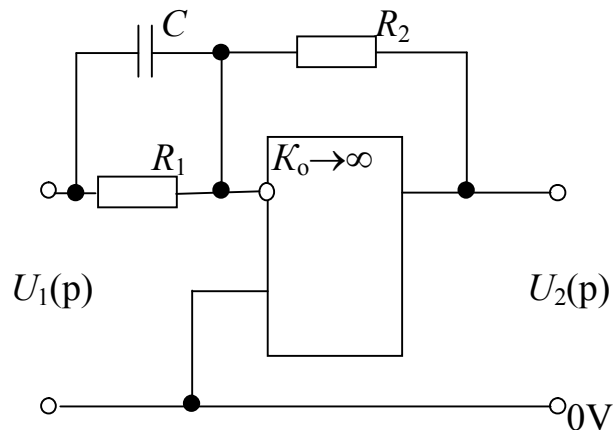


Рисунок 2.22 – Неідеальна диференційна ланка

Підставивши вирази для $Z_1(p)$ і $Z_2(p)$ в (2.92) одержуємо

$$G(p) = -K(1 + Tp), \quad (2.99)$$

де $K = \frac{R_2}{R_1}$.

Інтегрувальна ланка. Помінявши в схемі на рисунку 2.21 місцями конденсатор і резистор одержимо схему інтегрувальної ланки, що зображена на рисунку 2.23.

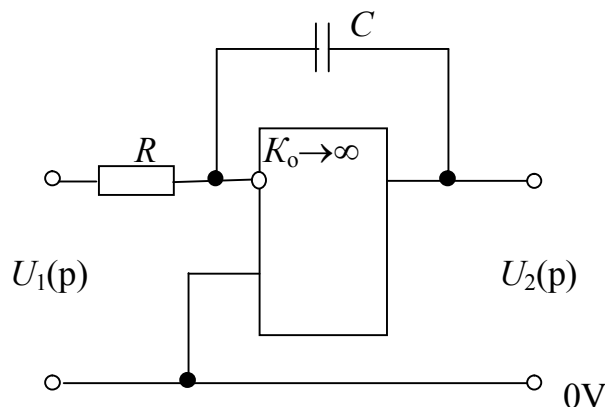


Рисунок 2.23 – Інтегрувальна ланка

Згідно із рисунком маємо

$$Z_1(p) = R, \quad Z_1(p) = \frac{1}{Cp}.$$

Розділивши $Z_2(p)$ на $Z_1(p)$ одержимо вираз для передавальної функції інтегруючої ланки

$$G(p) = -\frac{1}{Tp}, \quad (2.100)$$

де $T = RC$.

Аперіодична ланка. Електрична схема аперіодичної ланки наведена на рисунку 2.24. У вхідному колі цієї ланки $Z_1(p) = R_1$. Коло зворотного зв'язку складається із паралельного з'єднання конденсатора C і резистора R_2 . Еквівалентний опір кола зворотного зв'язку дорівнює

$$Z_2 = \frac{R_2}{R_2 Cp + 1}.$$

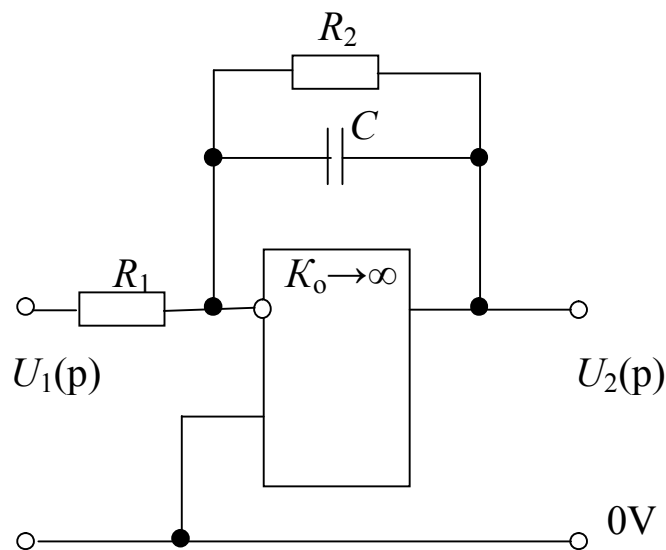


Рисунок 2.24 – Електрична схема аперіодичної ланки

Підставивши вирази для $Z_1(p)$ і $Z_2(p)$ в (2.92), одержимо передавальну функцію аперіодичної ланки

$$G = -\frac{K}{Tp + 1}, \quad (2.101)$$

де $K = R_2/R_1$, $T = R_2C$.

Диференційна ланка зі сповільненням. Схема цієї динамічної ланки наведена на рисунку 2.25. Вхідне коло ланки складається із конденсатора C_1 ,

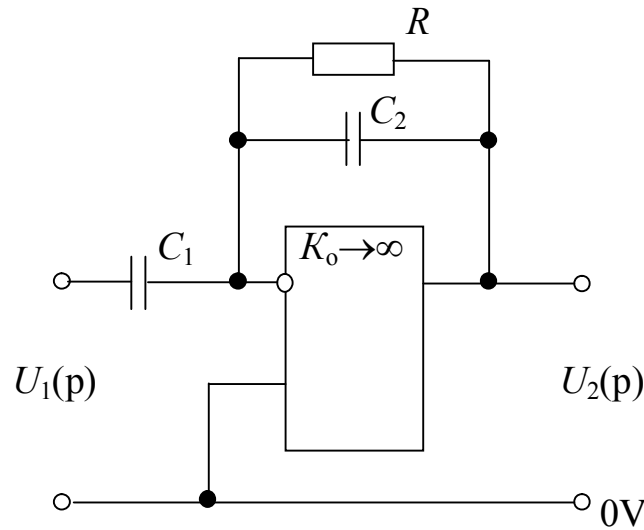


Рисунок 2.25 – Перший варіант диференційної ланки із сповільненням

тобто

$$Z_1(p) = \frac{1}{C_1 p}.$$

Коло зворотного зв'язку складається із паралельного з'єднання резистора R і конденсатора C_2 , тобто

$$Z_2(p) = \frac{R}{RC_2 p + 1}.$$

Підставивши вирази для $Z_1(p)$ і $Z_2(p)$ у (2.92) одержимо передавальну функцію ланки

$$G(p) = -\frac{T_1 p}{T_2 p + 1}, \quad (2.102)$$

де $T_1 = RC_1$, $T_2 = RC_2$.

На рисунку 2.26 наведена друга схемна реалізація передавальної функції ланки зі сповільненням. У цій схемі вхідне коло складається із послідовного з'єднання конденсатора C і резистора R_1 , для якого

$$Z_1(p) = \frac{R_1 C p + 1}{C p}.$$

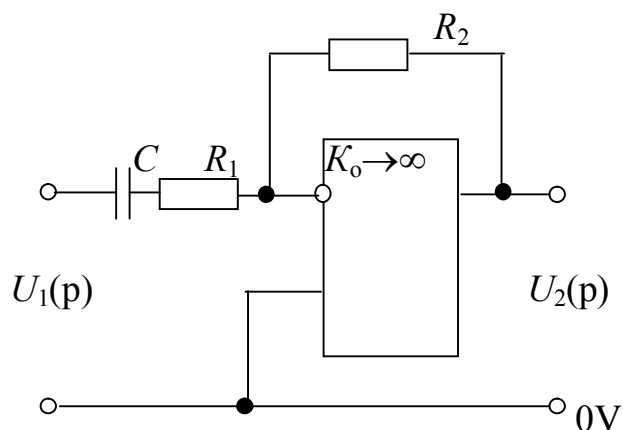


Рисунок 2.26 – Другий варіант диференційної ланки зі сповільненням

Підставивши в (2.92) вирази для $Z_1(p)$ і $Z_2(p)$ одержуємо

$$G(p) = -\frac{R_2 C p}{R_1 C p + 1} = -\frac{T_2 p}{T_1 p + 1}, \quad (2.103)$$

де $T_1 = R_1 C$, $T_2 = R_2 C$.

При $T_1 = T_2$ формули (2.102) і (2.103) структурно співпадають із формулою (2.79).

Ізодромна ланка. Електрична схема ланки наведена на рисунку 2.27.

Для цієї ланки $Z_1(p) = R_1$, $Z_2(p) = \frac{1}{Cp} + R_2$.

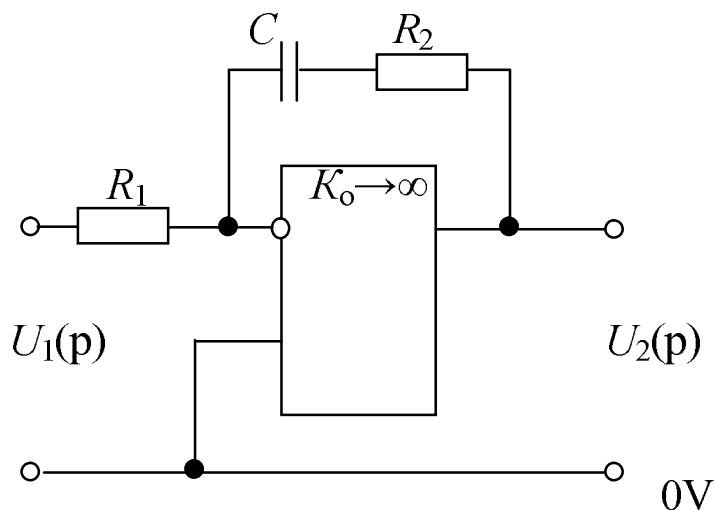


Рисунок 2.27 – Електрична схема ізодромної ланки

Передавальна функція ізодромної ланки

$$G(p) = -\frac{1 + T_2 p}{T_1 p}, \quad (2.104)$$

де $T_1 = R_1 C$, $T_2 = R_2 C$.

Ця динамічна ланка реалізує пропорційно-інтегральний закон регулювання і тому її називають пропорційно-інтегральним (PI-регулятором).

Коливальна ланка. Електричну схему коливальної ланки одержують шляхом реалізації на операційних підсилювачах її моделі, що наведена на рисунку 2.28 [5].

Якщо параметри елементів схеми вибрати у такий спосіб, що: $R_1 = R_2 = R_6$, $R_3 = R_5$, $C_1 = C_2$, то передавальна функція такої динамічної ланки має вигляд

$$G(p) = -\frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}, \quad (2.105)$$

де $T = R_1 C_1 = R_6 C_2$;

$\xi = R_4 / (R_4 + R_7)$.

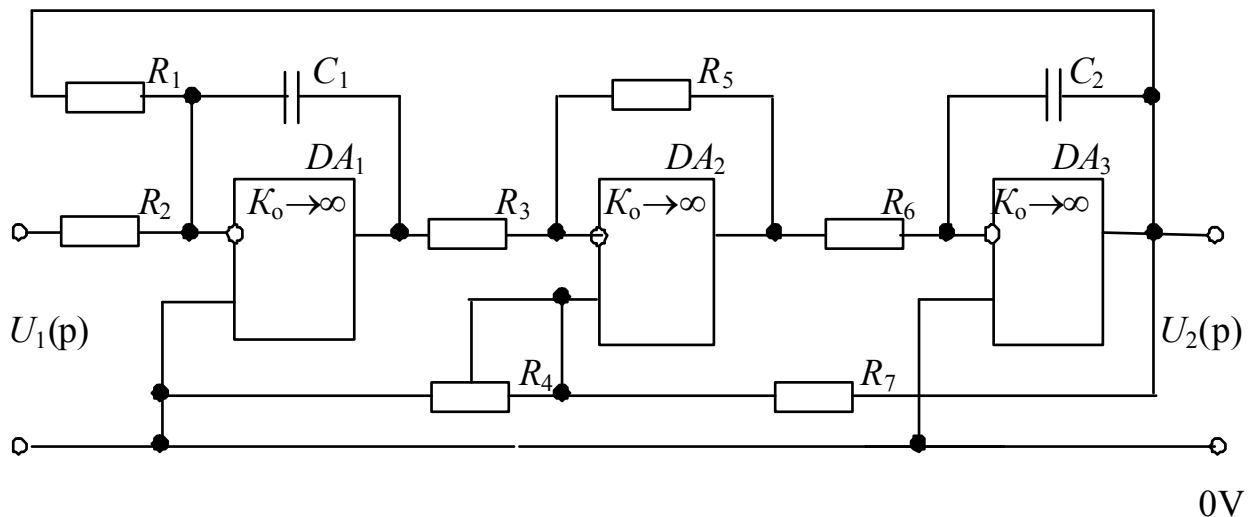


Рисунок 2.28 – Електрична схема коливальної ланки

Шляхом зміни опору резистора R_4 регулюється величина коефіцієнта демпфірування.

2.7 Структурні схеми систем автоматичного регулювання

2.7.1 Визначення структурної схеми

Структурною схемою системи автоматичного регулювання називають графічне зображення її математичного опису. На структурній схемі (рис. 2.29, а) ланки та елементи зображують у вигляді прямокутників, у середині яких записуються позначення передавальних функцій. Вхідні та вихідні сигнали записуються у вигляді перетворення за Лапласом їхніх математичних виразів в області оригіналів. Місця зняття сигналів позначаються у вигляді точкового з'єднання, місце підсумовування сигналів – у вигляді кола (рис. 2.29, б, в). Зв'язок між елементами системи автоматичного регулювання

позначається в вигляді відрізків прямих зі стрілкою на кінці. Стрілка вказує напрямок передачі сигналу.

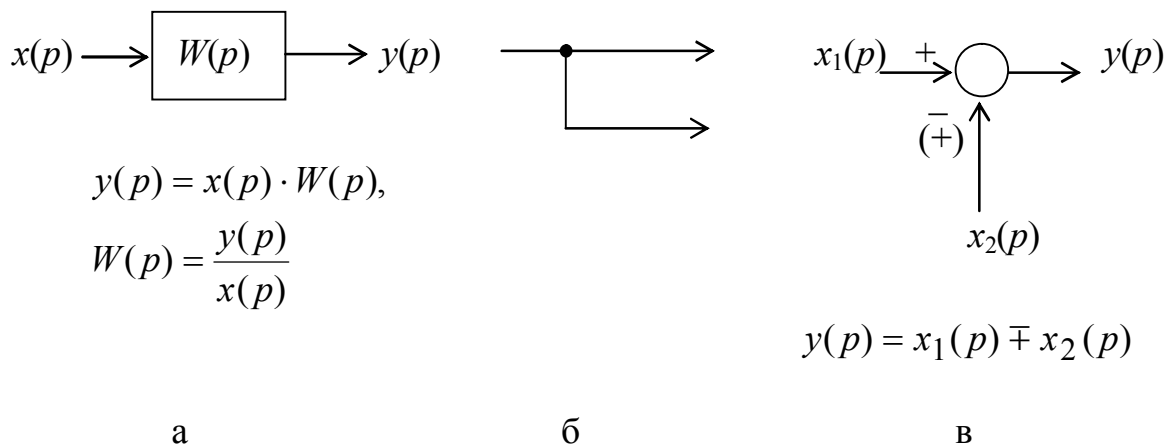


Рисунок 2.29 – Елементи структурної схеми САР

2.7.2 Правила перетворення структурних схем

Послідовне з'єднання ланок. На структурній схемі послідовне з'єднання декількох динамічних ланок (рис. 2.30) можна замінити однією еквівалентною ланкою із тими самими вхідним та вихідним сигналами та передавальною функцією, що дорівнює добутку передавальних ланок послідовно з'єднаних ланок.

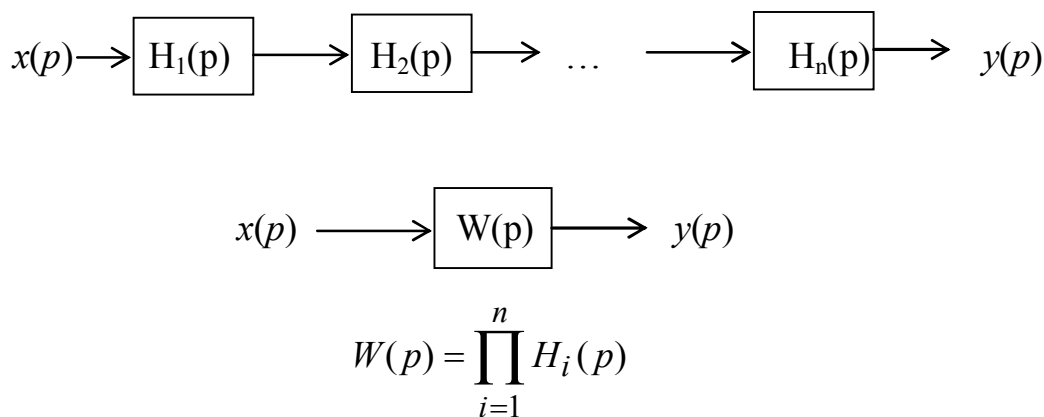


Рисунок 2.30 – Послідовне з'єднання динамічних ланок

Паралельне з'єднання ланок. На структурній схемі паралельне з'єднання декількох динамічних ланок (рис. 2.31) може бути замінено однією еквівалентною ланкою із тими самими вхідним та вихідним сигналами й передавальною функцією, що дорівнює сумі передавальних ланок паралельно з'єднаних ланок.

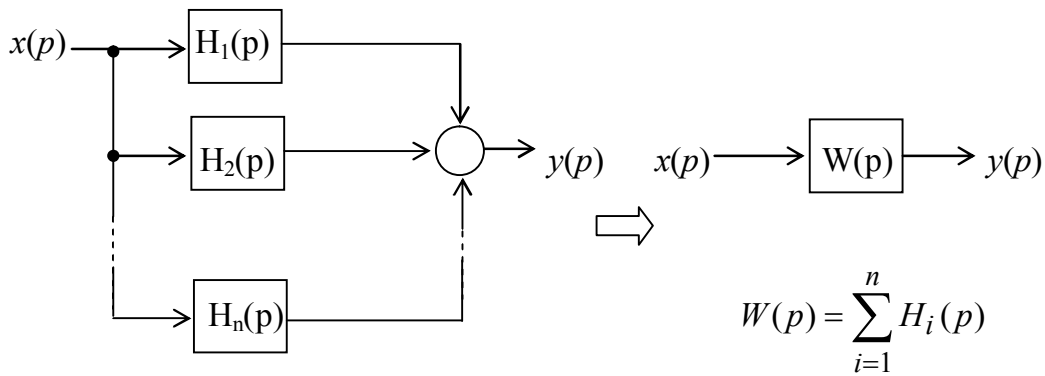


Рисунок 2.31 – Структурна схема паралельного з'єднання динамічних ланок

Перенос точки зняття сигналу із входу на вихід (рис. 2.32).

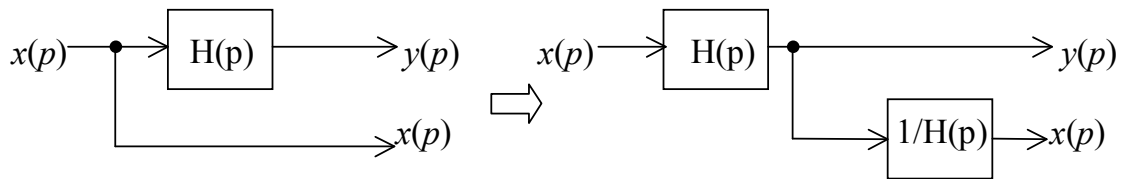


Рисунок 2.32 – Перенесення точки зняття сигналу із входу на вихід

Перенос точки зняття сигналу із виходу на вхід (рис. 2.33).

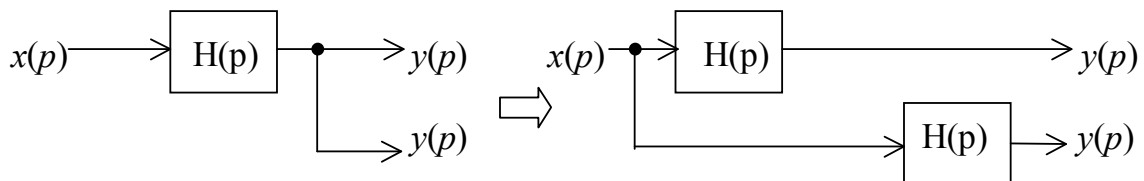


Рисунок 2.33 – Перенесення точки зняття сигналу із виходу на вхід

Перенесення вузла сумування через ланку (рис. 2.34)

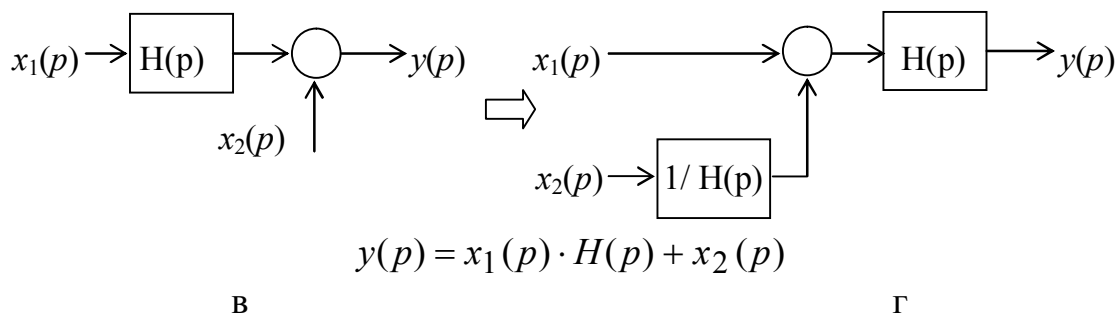
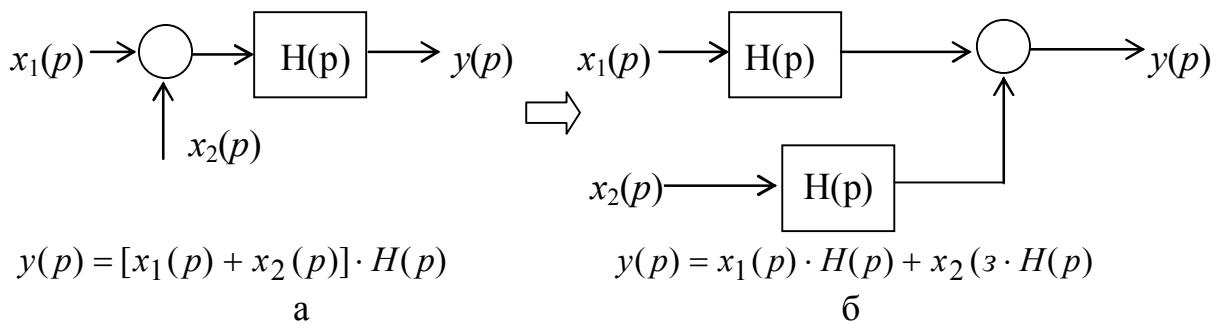


Рисунок 2.34 – Перенесення вузла сумування через ланку

Зміна порядку сумування (див. рис. 2.35)

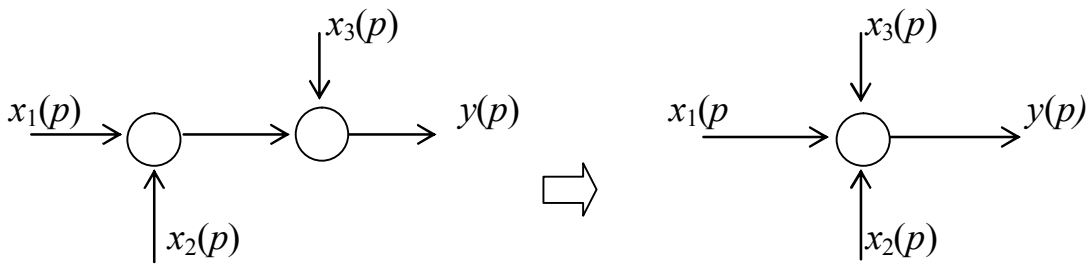


Рисунок 2.35 – Зміна порядку сумування

2.7.3 Запис передавальної функції замкнутої системи

Порядок одержання передавальної функції замкнутої системи автоматичного регулювання розглянемо на прикладі структурної схеми з від'ємним зворотнім зв'язком, що наведена на рисунку 2.36.

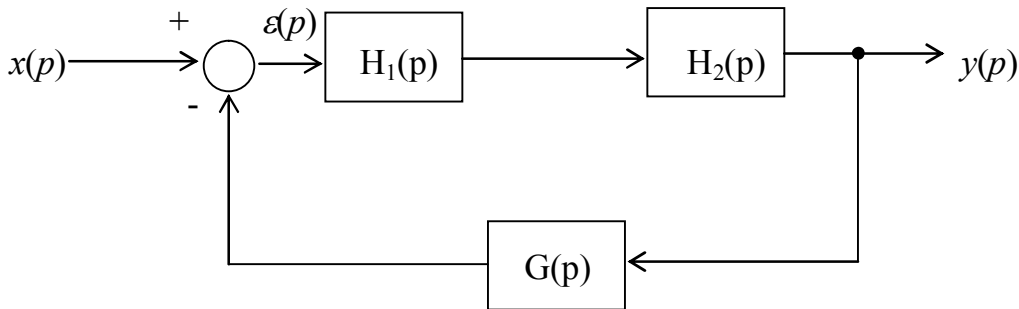


Рисунок 2.36 – Узагальнена структурна схема САР

Запис передавальної функції можна вести двома шляхами. При першому із них спочатку одержують зв'язок між вихідним регульованою величиною $y(p)$ і сигналом похибки

$$y(p) = \varepsilon(p) \cdot H_1(p) \cdot H_2(p). \quad (2.106)$$

Далі одержують рівняння замикання системи

$$\varepsilon(p) = x(p) - y(p) \cdot G(p). \quad (2.107)$$

Далі, підставивши рівняння (2.107) у (2.106), одержимо

$$y(p)[1 - H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot G(p)] = x(p) \cdot H_1(p) \cdot H_2(p). \quad (2.108)$$

Із рівняння (2.108) згідно з визначенням передавальної функції (2.72) одержуємо передавальну функцію замкнутої системи автоматичного регулювання

$$W(p) = \frac{H_1(p) \cdot H_2(p)}{1 - H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot G(p)}. \quad (2.109)$$

Другий шлях одержання передавальної функції замкнутої системи полягає в тому, що виразу записують зв'язок між вхідним діянням $x(p)$ та регульованою величиною $y(p)$, використовуючи напрямки передачі сигналів та застосовуючи правило проходження сигналу через динамічну ланку. Для структурної схеми наведеної на рисунку 2.36, одержуємо

$$y(p) = x(p) \cdot H_1(p) \cdot H_2(p) - y(p) \cdot G(p) \cdot H_1(p) \cdot H_2(p). \quad (2.110)$$

Перетворивши (2.110) відносно регульованої величини $y(p)$ і застосувавши (2.72), одержуємо передавальну функцію у вигляді (2.109).

2.8 Часові характеристики динамічних ланок

2.8.1 Визначення часових характеристик

Часовою характеристикою динамічної ланки за якомусь із зовнішніх діянь називається закон зміни вихідної величини ланки у функції часу t при змінах зовнішнього діяння за заданим законом за умови, що до прикладання зовнішнього діяння ланка перебувала в стані покою. Часові характеристики ланки залежать від її властивостей і від характеру зовнішнього діяння, для якого вони визначаються. Можна розглядати ці характеристики за вхідним діянням $q(t)$, по збурювальному діянню $f(t)$ (див. рис.1.2) і тощо. При визначенні часових характеристик за якомусь із діянь всі інші діяння роблять рівними нулю. Під час дослідження динамічних ланок найрозповсюдженішими є часові характеристики – перехідна функція і функція ваги.

2.8.2 Перехідна функція динамічної ланки

Реакція динамічної ланки, зображеною на рисунку 2.37, на вхідне діяння у вигляді східчастої функції $x(t) = 1(t)$, називається перехідною функцією $h(t)$.

Перехідна функція може бути одержана експериментально або визначена теоретично. Якщо динамічна ланка описується передавальною функцією $W(p)$, то враховуючи те, що перетворення за Лапласом одиничної східчастої функції

$$L\{1(t)\} = \frac{1}{p}, \quad (2.111)$$

зображення перехідної функції дорівнює

$$H(p) = \frac{W(p)}{p}. \quad (2.112)$$

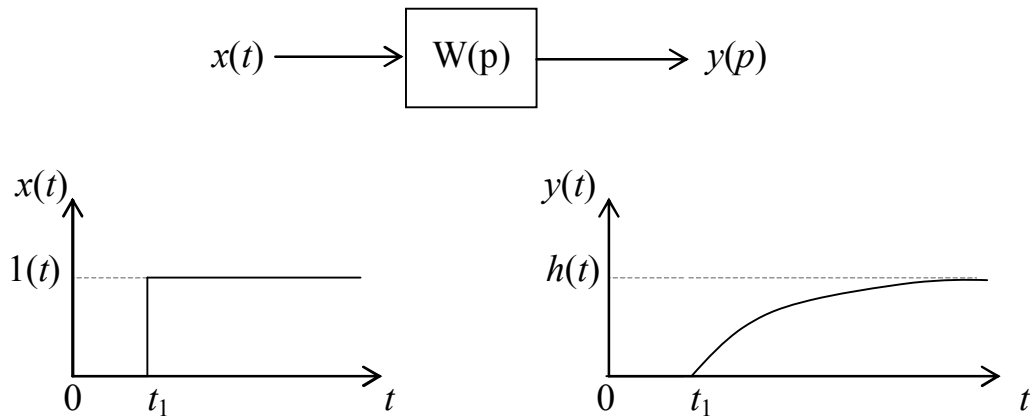


Рисунок 2.37 – Перехідна функція

Із (2.112) витікає, що

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\}, \quad (2.113)$$

тобто перехідна функція являє собою зворотне перетворення Лапласа від передавальної функції динамічної ланки, поділеної на p . Оригінал перехідної функції можна одержати застосувавши теорему розкладу (2.62).

Результати розрахунків перехідної функції відображають у вигляді графіка, побудованого в координатах (h і t). Конкретний вигляд перехідної функції (монотонний, коливальний і тощо) залежить від властивостей динамічної ланки. Початкове (при $t \rightarrow 0_+$) і кінцеве (при $t \rightarrow \infty$) значення перехідної функції можна знайти за теоремах (2.65) і (2.66)

$$h(0_+) = \lim_{p \rightarrow \infty} pH(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} W(p), \quad (2.114)$$

$$h(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pH(p) = \lim_{p \rightarrow 0} W(p).. \quad (2.115)$$

Приклад 2.11 Визначити перехідну функцію аперіодичної ланки (рис. 2.5), передавальна функція якої

$$W(p) = \frac{1}{Tp + 1}.$$

Згідно із (2.112) зображення перехідної функції має вигляд

$$H(p) = \frac{1}{p(Tp + 1)}. \quad (2.116)$$

Характеристичний поліном функції (2.116) має два корені $p_1 = 0$ і $p_2 = -1/T$. Застосувавши теорему розкладу (2.62), для якої $V'(p) = 2Tp + 1$, одержуємо вираз для перехідної функції аперіодичної ланки

$$h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}. \quad (2.117)$$

Графік перехідної функції наведено на рисунку 2.38 на якому U_1 – східчасте вхідне діяння, а $U_2 = h(t)$.

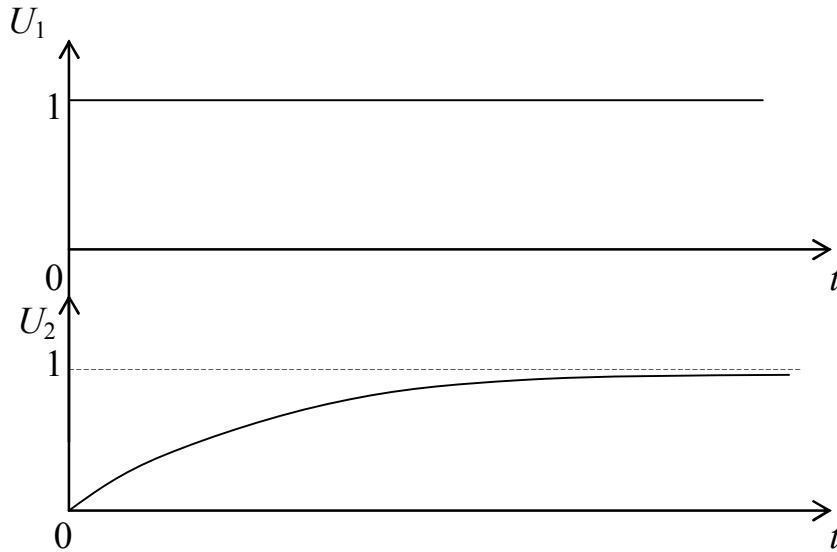


Рисунок 2.38 – Перехідна функція аперіодичної ланки

Застосувавши вирази (2.65) та (2.66) до (2.116) одержимо

$$h(0_+) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{Tp + 1} = 0, \quad (2.118)$$

$$h(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{Tp + 1} = 1, \quad (2.119)$$

що співпадає із (2.117) при підстановках $t = 0$ і $t \rightarrow \infty$.

Приклад 2.12 Знайти перехідну функцію коливальної ланки

$$W(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1}, \quad (2.120)$$

електрична схема якої приведена на рисунку 2.11 для сталої часу $T = 0,025$ С і різних величин коефіцієнта демпфірування: $\xi = 0,1$; $\xi = 0,5$; $\xi = 0,9$.

Згідно із (2.112) зображення переходної функції має вигляд

$$H(p) = \frac{1}{p(T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1)}. \quad (2.121)$$

Характеристичний поліном функції (2.121) має корені

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = \frac{-\xi \pm \sqrt{1 - \xi^2}}{T}. \quad (2.122)$$

Згідно із теоремою розкладу (2.62) одержуємо оригінал переходної функції

$$h(t) = 1 + e^{-\frac{\xi t}{T}} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin\left(\frac{t}{T} \sqrt{1 - \xi^2}\right) - \cos\left(\frac{t}{T} \sqrt{1 - \xi^2}\right) \right]. \quad (2.123)$$

На рисунку 2.39 наведені результати розрахунків переходної функції для різних величин коефіцієнта демпфірування. На графіку $U_2(t) = h(t)$.

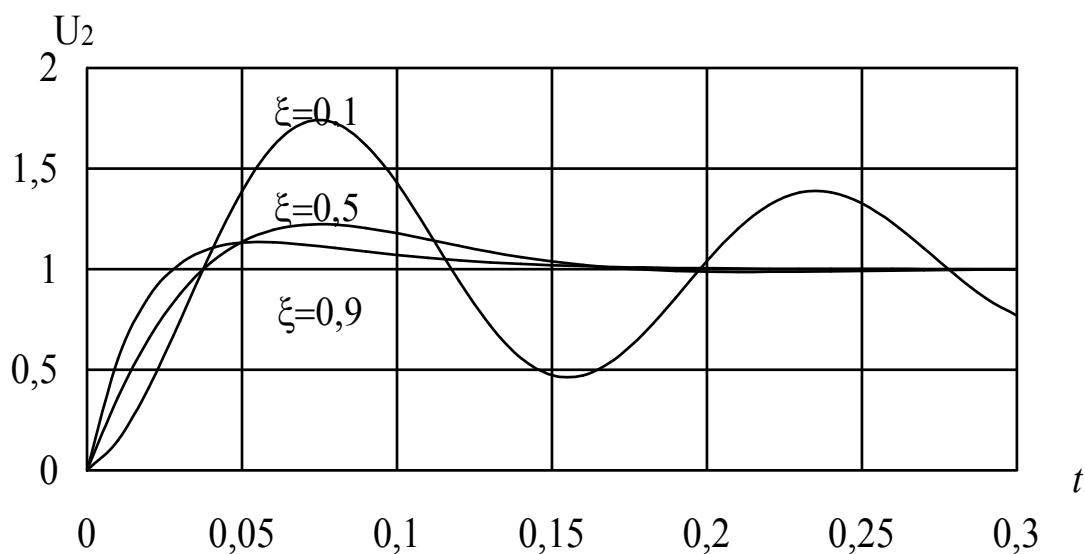


Рисунок 2.39 – Перехідна функція коливальної ланки

Коли на вхід динамічної ланки діє не одинична східчаста функція $x(t) = A \cdot 1(t)$, то вихідна величина буде визначатись як $y(t) = A \cdot h(t)$, де $A = const$.

2.8.3 Функція ваги динамічної ланки

Реакція динамічної ланки (рис. 2.37) на вхідне діяння у вигляді дельта функції $x(t) = \delta(t)$ називається функцією ваги $\varpi(t)$. Ураховуючи те, що перет-

ворення за Лапласом дельта функції дорівнює одиниці (див. табл. 2.1), зображення функції ваги дорівнює передавальній функції динамічної ланки

$$\varpi(p) = W(p). \quad (2.124)$$

Із (2.124) витікає, що оригінал функції ваги визначається як зворотне перетворення Лапласа від передавальної функції динамічної ланки

$$\varpi(t) = L^{-1}\{W(p)\}. \quad (2.125)$$

Початкове та кінцеве значення функції ваги визначаються формулами

$$\varpi(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot W(p), \quad (2.126)$$

$$\varpi(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot W(p).$$

Зв'язок між перехідною функцією та функцією ваги встановлюється теоремою про зображення похідної. Згідно із визначенням перехідної функції

$$L\{h(t)\} = \frac{W(p)}{p}, \quad (2.127)$$

тоді, на підставі теореми про зображення похідної оригіналу для нульових початкових умов, маємо

$$L\{h'(t)\} = W(p), \quad (2.128)$$

де $h'(t)$ – похідна перехідної функції.

Із виразів (2.124), (2.125) та (2.128) маємо зв'язок між перехідною функцією та функцією ваги

$$\varpi(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (2.129)$$

і навпаки

$$h(t) = \int \varpi(t) dt. \quad (2.130)$$

Приклад 2.13 Визначити функцію ваги аперіодичної ланки із передавальною функцією, що наведена в прикладі 2.11.

Згідно із (2.124) зображення функції ваги аперіодичної ланки має вигляд

$$\varpi(p) = \frac{1}{Tp + 1}. \quad (2.131)$$

Характеристичний поліном функції (2.131) має один корінь $p = -1/T$. Застосувавши до виразу (2.131) теорему розкладу, одержуємо

$$\varpi(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (2.132)$$

Такий самий вираз для функції ваги одержуємо, якщо застосувати властивість (2.129) до (2.117).

2.9 Частотні характеристики динамічних ланок

2.9.1 Визначення частотних характеристик

Якщо на вхід лінійної динамічної ланки із передавальною функцією $W(p)$, що наведена на рисунку 2.37, подається гармонічне вхідне (рис .2.40)

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1), \quad (2.133)$$

де A_1 – амплітуда вхідного сигналу;

ω – кругова частота;

φ – початкова фаза вхідного сигналу, то на її виході встановлюються гармонічне коливання тієї самої частоти ω , амплітуда якого

$$A_2 = A_1 |W(j\omega)|, \quad (2.134)$$

а фаза

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \arg W(j\omega). \quad (2.135)$$

Із формул (2.134) та (2.135) витікає, що у разі зміни частоти ω вхідного діяння вихідний сигнал ланки змінює амплітуду й фазовий зсув. Для визначення усталеної реакції ланки на гармонійне вхідне діяння достатньо знати комплексну функцію $W(j\omega)$ матеріальної змінної ω . Функція

$$W(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + a_2(j\omega)^{n-2} + a_3(j\omega)^{n-3} + \dots + a_n}{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + b_2(j\omega)^{m-2} + b_3(j\omega)^{m-3} + \dots + b_m}, \quad (2.136)$$

яку одержують шляхом заміни в передавальній функції (2.73) p на $j\omega$, називається частотною передавальною функцією і може бути представлена в декількох виглядах.

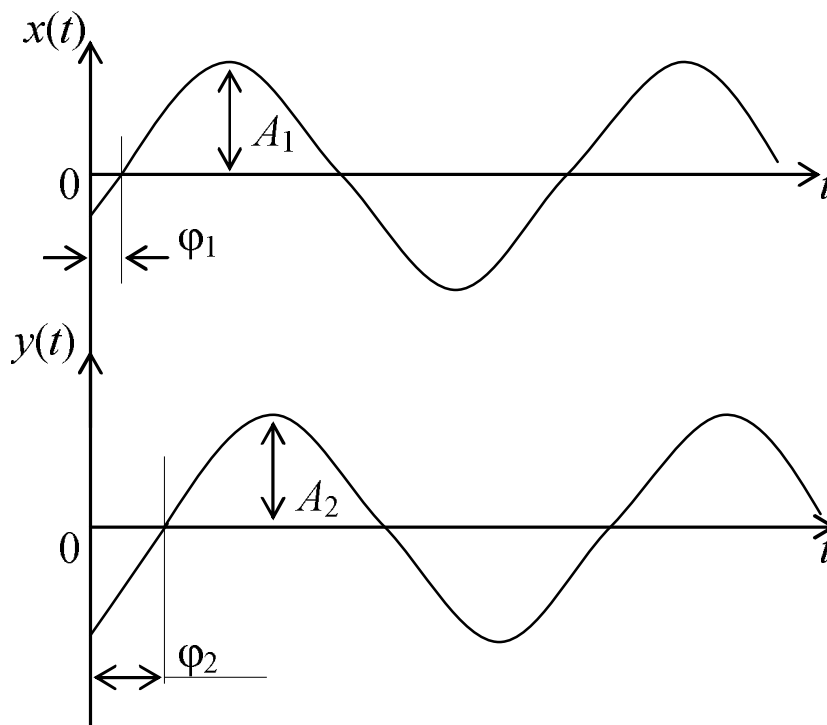


Рисунок 2.40 – Визначення частотних характеристик

Наприклад, у показовій формі

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.137)$$

де $A(\omega) = |W(j\omega)|$;
 $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$.

Або в такому вигляді

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (2.138)$$

де $U(\omega) = \operatorname{Re}\{W(j\omega)\}$;
 $V(\omega) = \operatorname{Im}\{W(j\omega)\}$.

Згідно із виразом (2.137) розрізняють такі частотні характеристики:

- амплітудно-частотну характеристику;
- фазову частотну характеристику;
- амплітудно-фазочастотну характеристику;
- логарифмічну амплітудну частотну характеристику.

Частотні характеристики широко застосовуються при аналізі і синтезі систем автоматичного регулювання.

2.9.2 Амплітудно-частотна характеристика

Згідно із виразом (2.137) функція $A(\omega)$ характеризує залежність коефіцієнта передачі лінійної динамічної ланки від зміни частоти. Ця залежність і називається амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) ланки. Амплітудно-частотна характеристика може бути одержана експериментально або теоретично. Для одержання аналітичного виразу амплітудно-частотної характеристики необхідно подати частотну передавальну функцію (2.136) у такому вигляді

$$W(j\omega) = \frac{U_n(\omega) + jV_n(\omega)}{U_m(\omega) + jV_m(\omega)}, \quad (2.139)$$

де U_n і U_m – дійсні частини чисельника та знаменника,
 V_n і V_m — мнимі частини чисельника та знаменника.

Амплітудно-частотна характеристика визначається як модуль частотної передавальної функції (2.139)

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{U_n^2(\omega) + V_n^2(\omega)}{U_m^2(\omega) + V_m^2(\omega)}}. \quad (2.140)$$

Змінюючи частоту в діапазоні $0 \leq \omega \leq \infty$ розраховують залежність коефіцієнта передачі динамічної ланки від частоти. Результати розрахунків представляють у вигляді графіка в площині параметрів $A(\omega)$ і ω .

2.9.3 Фазо-частотна характеристика

Фазо-частотна характеристика динамічної ланки характеризує залежність фазового зсуву вихідного сигналу відносно вхідного у функції зміни частоти вхідного сигналу. Фазо-частотну характеристику, так же як і амплітудну частотну характеристику, одержують експериментально або в вигляді аналітичної залежності. Теоретично вираз для розрахунку фазо-частотної характеристики одержують як різницю аргументів поліномів чисельника та знаменника частотної передавальної функції (2.139)

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V_n(\omega)}{U_n(\omega)} - \operatorname{arctg} \frac{V_m(\omega)}{U_m(\omega)}. \quad (2.141)$$

Змінюючи частоту в діапазоні $0 \leq \omega \leq \infty$, розраховують залежність фазового зсуву динамічної ланки від частоти. Результати розрахунків представляють у вигляді графіка в площині параметрів $\varphi(\omega)$ і ω . Для зручності аналізу графіки амплітудно-частотної характеристики і фазо-частотної характеристики будують із використанням спільної осі частот.

Приклад 2.14 Одержати вирази для амплітудно-частотної та фазо-частотної характеристик аперіодичної ланки із передавальною функцією, що наведена в Прикладі 2.11. Виконати розрахунки для $T = 0,001\text{C}$ та побудувати графіки частотних характеристик.

Передавальна функція наведеної динамічної ланки має вигляд

$$W(p) = \frac{1}{Tp + 1}. \quad (2.142)$$

Замінивши в (2.142) p на $j\omega$, одержимо частотну передавальну функцію аперіодичної ланки

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}. \quad (2.143)$$

Порівнюючи формули (2.139) і (2.143) встановлюємо, що для цієї передавальної функції $U_n = 1$, $V_n = 0$, $U_m = 1$, $V_m = \omega T$. Тоді згідно із формулами (2.140) і (2.141) одержуємо:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad (2.144)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T. \quad (2.145)$$

Результати розрахунків частотних характеристик із урахуванням того, що $\omega = 2\pi f$ розташовані в таблиці 2.1.

Таблиця 2 – Результати розрахунків частотних характеристик

$f[\text{Гц}]$	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450
A	1	0,95	0,85	0,73	0,62	0,54	0,47	0,41	0,36	0,33
$\varphi[\text{рад.}]$	0	-0,33	-0,62	-0,83	-1	-1,11	-1,2	-1,27	-1,32	-1,37

Графіки амплітудно-частотної і фазо-частотної характеристик наведені на рисунку 2.41

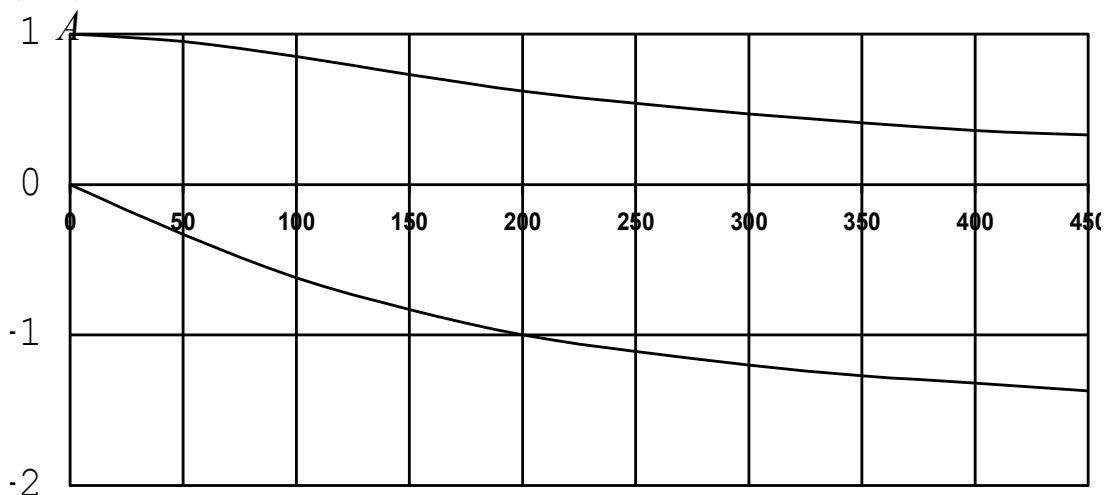


Рисунок 2.41 – Частотні характеристик аперіодичної ланки

2.9.4 Амплітудно-фазочастотна характеристика

Для побудови амплітудно-фазочастотної характеристики динамічної ланки необхідно її частотну передавальну функцію представити у вигляді (2.135). Для цього поліноми чисельника і знаменника передавальної функції (2.136) помножують на поліном, що є пов'язаним із поліномом знаменника

$$W(j\omega) = \frac{[U_n(\omega) + jV_n(\omega)] \cdot [U_m(\omega) - jV_m(\omega)]}{[U_m(\omega) + jV_m(\omega)] \cdot [U_m(\omega) - jV_m(\omega)]}. \quad (2.146)$$

Виконавши перетворення в (2.146) одержимо

$$U(\omega) = \frac{U_n(\omega)U_m(\omega) + V_n(\omega)V_m(\omega)}{U_m^2(\omega) + V_m^2(\omega)}, \quad (2.147)$$
$$V(\omega) = \frac{U_m(\omega)V_n(\omega) - U_n(\omega)V_m(\omega)}{U_m^2(\omega) + V_m^2(\omega)}.$$

Для кожного фіксованого значення частоти $\omega = \omega_1$ частотна передавальна функція (2.138) на комплексній площині (U, jV) зображується вектором $A(\omega_1)$, повернутим відносно осі абсцис на кут $\varphi(\omega_1)$. Годограф, що описує цей вектор у разі зміні частоти від 0 до ∞ називається амплітудно-фазочастотною характеристикою (АФЧХ) динамічної ланки (див. рис. 2.42).

Серед властивостей амплітудно-фазочастотної характеристики слід зазначити, що годограф АФЧХ динамічної ланки першого порядку розташовується в одному квадранті комплексної площини, годограф АФЧХ ланки другого порядку проходить через два квадранти, третього порядку – через три квадранти тощо.

2.9.5 Логарифмічні частотні характеристики

Частотні методи дослідження лінійних систем автоматичного регулювання значно спрощуються при застосуванні логарифмічних частотних характеристик. Зазвичай застосовують логарифмічні амплітудно-частотні (ЛАХ) і фазо-частотні характеристики.

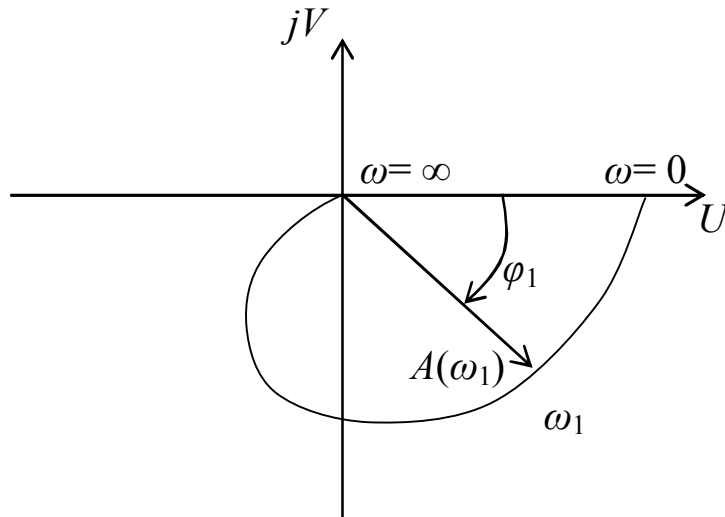


Рисунок 2.42 – Годограф амплітудно-фазочастотної характеристики

Для побудови логарифмічних частотних характеристик по осі частот відкладають $\lg \omega$. Одиницями виміру частоти є октава (зміна частоти в два рази) і декада (зміна частоти в десять разів).

Коефіцієнт передачі вимірюють у децибелах (дБ). Зв'язок між коефіцієнтами передачі в абсолютних величинах і децибелах встановлюється формулою

$$K[\text{дБ}] = 20 \lg A, \quad (2.148)$$

де A – абсолютна величина коефіцієнта передачі.

На графіку коефіцієнт передачі у децибелах відкладають в лінійному масштабі. Фазовий зсув між вхідним та вихідним сигналами динамічної ланки також відкладають у лінійному масштабі.

Приклад 2.15 Побудувати логарифмічні частотні характеристики аперіодичної ланки прикладу 2.14 для $K = 2$.

Для побудови логарифмічних характеристик використаємо результати розрахунків які містяться в таблиці 2. Враховуючи те, що в даному випадку коефіцієнт передачі ланки $K=2$ перехід до нової змінної виконаємо по формулі

$$K[\text{дБ}] = 20 \lg 2 \cdot A, \quad (2.149)$$

де A – величина коефіцієнта передачі із таблиці 2.1.

Результати розрахунків по формулі (2.149) розмістимо у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3 – Результати розрахунків

f [Гц]	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450
K [дБ]	6	5,6	4,6	3,3	1,87	0,67	-0,53	-1,72	-2,85	-3,61

Графік логарифмічної амплітудно-частотної характеристики (ЛАХ) наведено на рисунку 2.43.

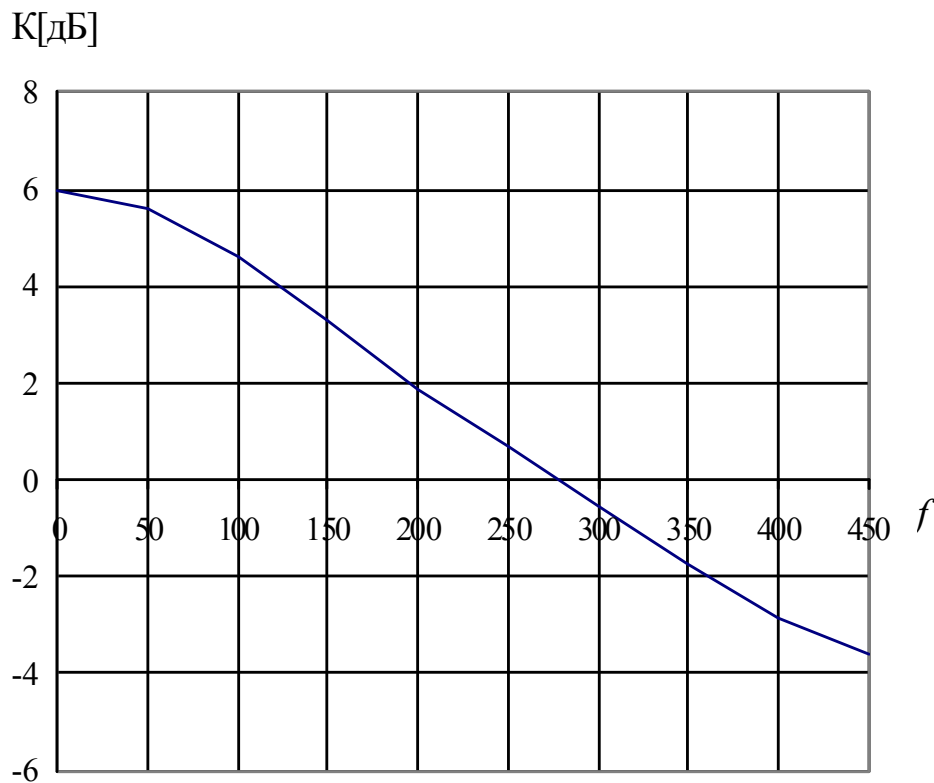


Рисунок 2.43 – ЛАХ аперіодичної ланки

2.9.6 Асимптотична логарифмічна амплітудно-частотна характеристика

Якщо до графіка логарифмічної амплітудно-частотної характеристики, що одержано в прикладі 2.15, провести асимптоти, як це показано на рисунку 2.44, то одержимо асимптотичну характеристику. Як видно із рисунка 2.44, асимптотична характеристика відображає характер поведінки точної характеристики і має деякі властивості.

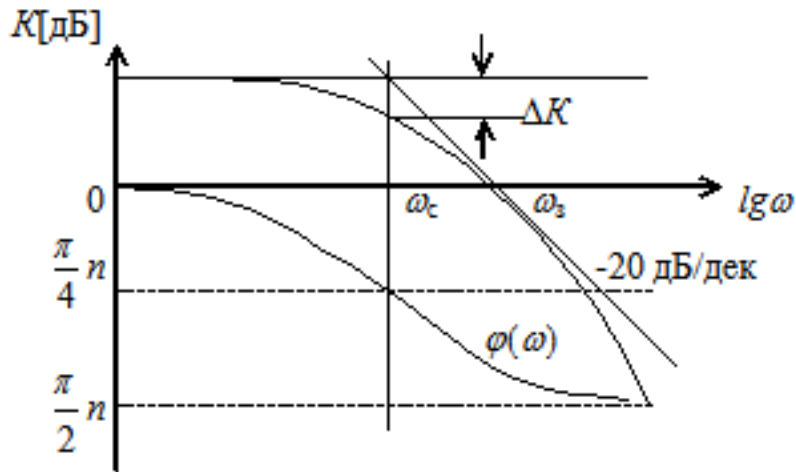


Рисунок 2.44– Асимптотична ЛАХ

Частота ω_c , на якій пересікаються дві асимптоти, називається сполучною частотою. Ця частота зв'язана із сталою часу T динамічної ланки наступним співвідношенням

$$\omega_c = \frac{1}{T}. \quad (2.150)$$

Як видно із графіків, на сполучній частоті спостерігається найбільша розбіжність ΔK між асимптотичною та реальною характеристиками. Величина цієї розбіжності залежить від порядку (показника ступеня) характеристичного полінома передавальної функції динамічної ланки

$$\Delta K = 3 \cdot n \text{ [дБ]}, \quad (2.151)$$

де n – порядок характеристичного полінома.

Так, для ланки (2.142) у якої $n = 1$ розбіжність ΔK дорівнює 3 дБ.

Нахил нахиленої асимптоти визначається властивостями динамічної ланки. Для диференційних ланок він позитивний, а для інтегрувальних – негативний, як це зображено на рисунку 2.44. Величина нахилу визначається порядком характеристичного поліному динамічної ланки

$$\sigma = 20 \cdot n \text{ [дБ/дек]}. \quad (2.152)$$

Фазовий зсув між вхідним та вихідним сигналами на сполучній частоті визначається як

$$\varphi(\omega_c) = n \frac{\pi}{4}. \quad (2.153)$$

Частота ω_z , на якій нахилена асимптота пересікає вісь частот, називається частотою зрізу. Частота зрізу визначає смугу пропускання динамічної ланки.

2.9.7 Частотні характеристики типових динамічних ланок

Асимптотичні частотні характеристики широко застосовують під час аналізу і синтезу систем автоматичного регулювання. Це пояснюється тим, що для їх побудови достатньо знати властивості асимптотичних характеристик поодиноких динамічних ланок. Результуючі асимптотичні частотні характеристики послідовного з'єднання декількох динамічних ланок одержують шляхом графічного додавання асимптотичних характеристик поодиноких ланок із урахуванням знаків та величин нахилів асимптот.

Фазова частотна характеристика послідовного з'єднання динамічних ланок визначається сумою зсувів на кожному зі значень частоти

$$\varphi = \sum_{i=1}^k \left[\arctg \frac{V_{in}(\omega)}{U_{in}(\omega)} - \arctg \frac{V_{im}(\omega)}{U_{im}(\omega)} \right], \quad (2.154)$$

де k – кількість послідовно з'єднаних динамічних ланок;

$V_{in}(\omega)$, $V_{im}(\omega)$ – коефіцієнти при уявних частинах;

$U_{in}(\omega)$, $U_{im}(\omega)$ – коефіцієнти при дійсних частинах передавальних функцій типових ланок.

Пропорційна ланка. Передавальна функція пропорційної ланки

$$G(p) = K.$$

Амплітудно-частотна характеристика (рис. 2.45, а)

$$A(\omega) = K.$$

Фазо-частотна характеристики

$$\varphi(\omega) = 0.$$

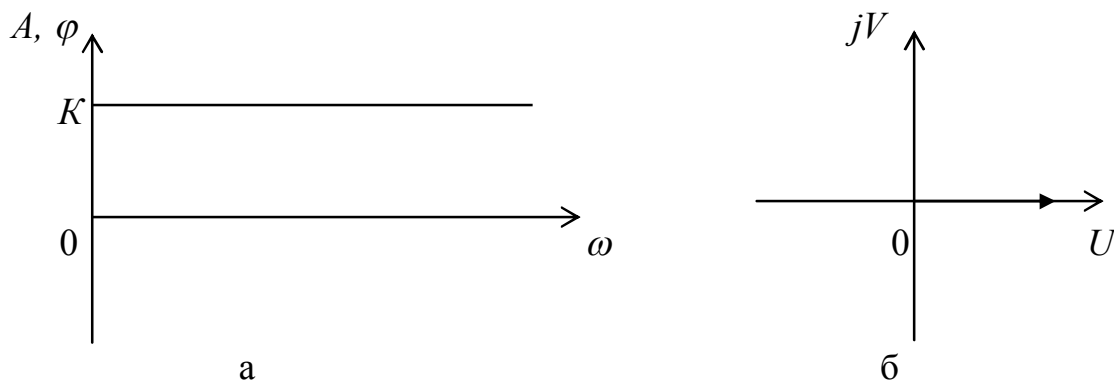


Рисунок 2.45 – Частотні характеристики пропорційної ланки

Амплітудно-фазочастотна характеристика (рис. 2.45, б)

$$V(\omega) = 0, \quad U(\omega) = K. \quad (2.155)$$

Диференційна ланка. Передавальна функція

$$G(p) = Tp. \quad (2.156)$$

Частотна передавальна функція

$$G(j\omega) = j\omega T. \quad (2.157)$$

Амплітудно-частотна характеристика

$$A(\omega) = \omega T. \quad (2.158)$$

Логарифмічна амплітудна частотна характеристика

$$A(\omega) = 20 \lg \omega T. \quad (2.159)$$

Фазо-частотна характеристика

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}. \quad (2.160)$$

Амплітудно-фазочастотна характеристика

$$V(\omega) = \omega T, \quad U(\omega) = 0. \quad (2.161)$$

Графіки частотних характеристик наведені на рисунку 2.46.

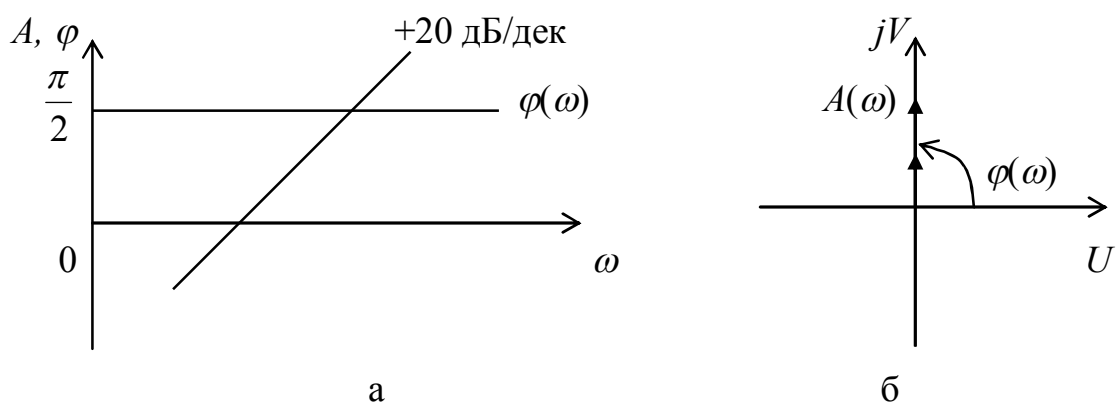


Рисунок 2.46 – Частотні характеристики диференційної ланки

Неідеальна диференційна ланка. Передавальна функція цієї ланки має вигляд

$$G(p) = K(1 + Tp). \quad (2.162)$$

Частотна передавальна функція

$$G(j\omega) = K(1 + j\omega T). \quad (2.163)$$

Амплітудно-частотна характеристика

$$A(\omega) = K\sqrt{1 + \omega^2 T^2}. \quad (2.164)$$

Фазо-частотна характеристика

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}\omega T. \quad (2.165)$$

Амплітудно-фазочастотна характеристика

$$U(\omega) = K, \quad V(\omega) = K\omega T. \quad (2.166)$$

Графіки частотних характеристик наведені на рисунку 2.47.

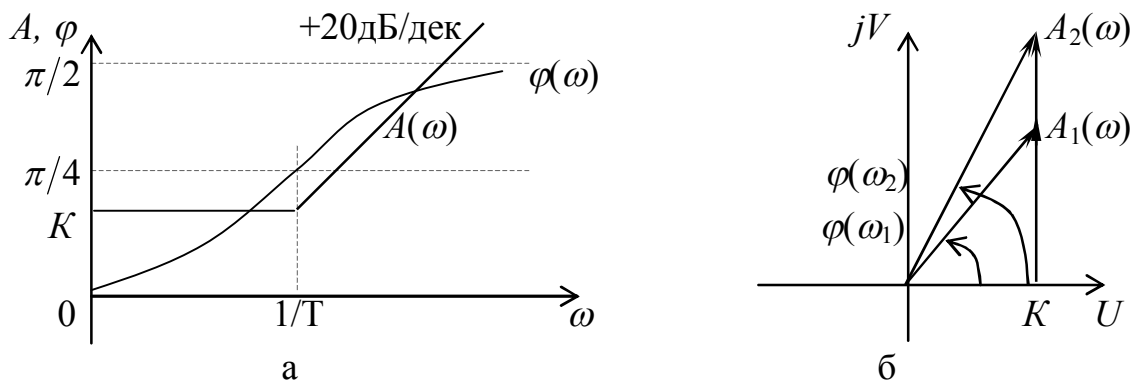


Рисунок 2.47 – Частотні характеристики неідеально диференційної ланки

Інтегрувальна ланка. Передавальна функція

$$G(p) = \frac{1}{Tp}. \quad (2.167)$$

Частотна передавальна функція

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T}. \quad (2.168)$$

Амплітудно-частотна характеристика

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega T}. \quad (2.169)$$

Логарифмічна амплітудно-частотна характеристика

$$A(\omega) = -20 \lg \frac{1}{\omega T}. \quad (2.170)$$

Фазо-частотна характеристика

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \quad (2.171)$$

Амплітудно-фазочастотна характеристика

$$V(\omega) = -\omega T, \quad U(\omega) = 0. \quad (2.172)$$

Графіки частотних характеристик наведені на рисунку 2.48.

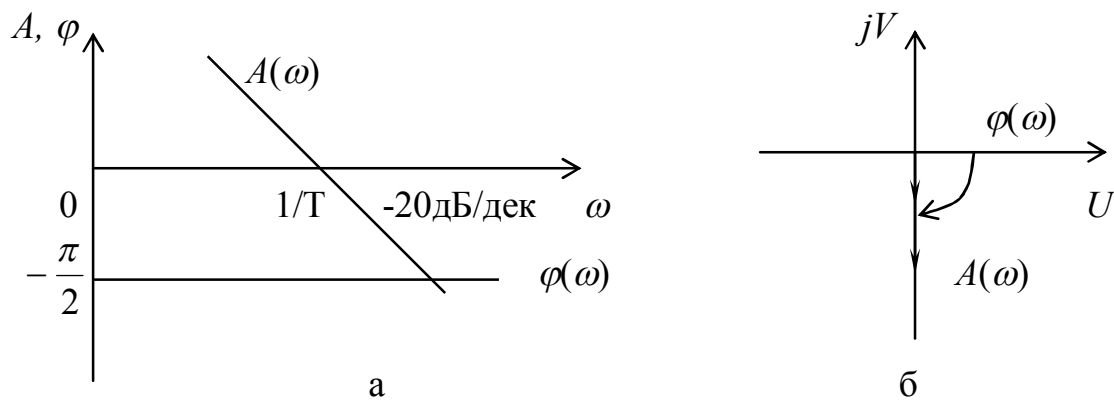


Рисунок 2.48 – Частотні характеристики інтегрувальної ланки

Аперіодична ланка. Передавальна функція

$$G(p) = \frac{K}{Tp + 1}. \quad (2.173)$$

Частотна передавальна функція

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}. \quad (2.174)$$

Амплітудно-частотна характеристика

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}. \quad (2.175)$$

Фазо-частотна характеристика

$$\varphi(\omega) = -\arctg \omega T. \quad (2.176)$$

Графіки цих частотних характеристик наведені на рисунку 2.49, а.

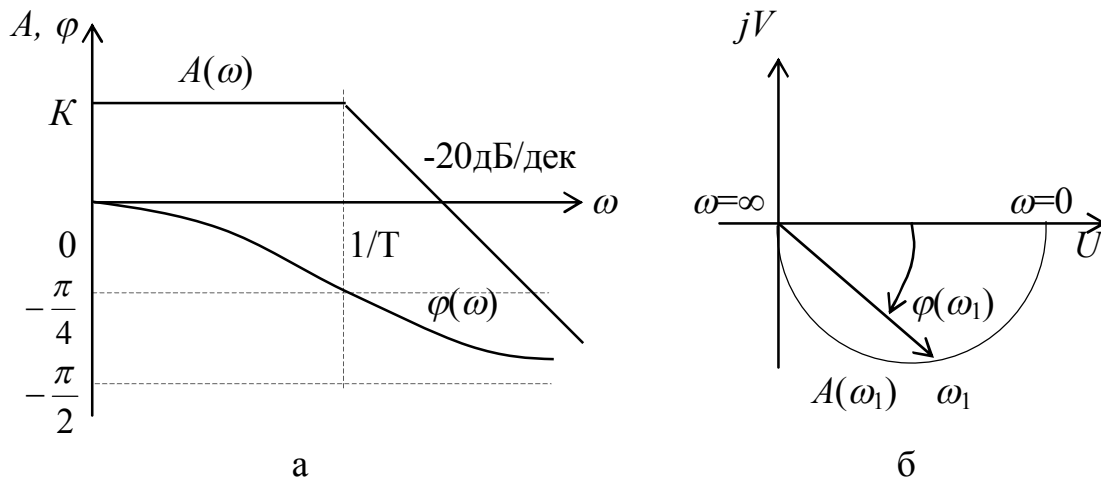


Рисунок 2.49 – Частотні характеристик аперіодичної ланки

Амплітудно-фазочастотна характеристика

$$U(\omega) + jV(\omega) = K \left(\frac{1}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \right). \quad (2.177)$$

Графік амплітудно-фазочастотної характеристики наведено на рисунку 2.49, б.

Диференційна ланка із сповільненням. Передавальна функція цієї динамічної ланки має вигляд

$$G(p) = \frac{T_1 \cdot p}{T_2 \cdot p + 1}. \quad (2.178)$$

Частотна передавальна функція

$$G(j\omega) = \frac{j\omega T_1}{1 + j\omega T_2}. \quad (2.179)$$

Амплітудно-частотна характеристика

$$A(\omega) = \frac{\omega T_1}{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}. \quad (2.180)$$

Фазо-частотна характеристика

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega T_2. \quad (2.181)$$

Для побудови асимптотичної характеристики представлено передавальну функцію (2.178) у вигляді послідовного з'єднання диференційної та аперіодичної ланок

$$G(p) = T_1 \cdot p + \frac{1}{T_2 \cdot p + 1}. \quad (2.182)$$

На рисунку 2.50 зображено процес побудови результуючої характеристики за відомими асимптотичними характеристиками диференційної та аперіодичних ланок. На рисунку 2.50, а одержана результуюча характеристика при $T_1 > T_2$, а на рисунку 2.50, б – при $T_1 < T_2$.

Амплітудно-фазочастотна характеристика ланки (рис. 2.51)

$$U(\omega) + jV(\omega) = \frac{\omega^2 T_1 T_2}{1 + \omega^2 T_2^2} + j \frac{\omega T_1}{1 + \omega^2 T_2^2}. \quad (2.183)$$

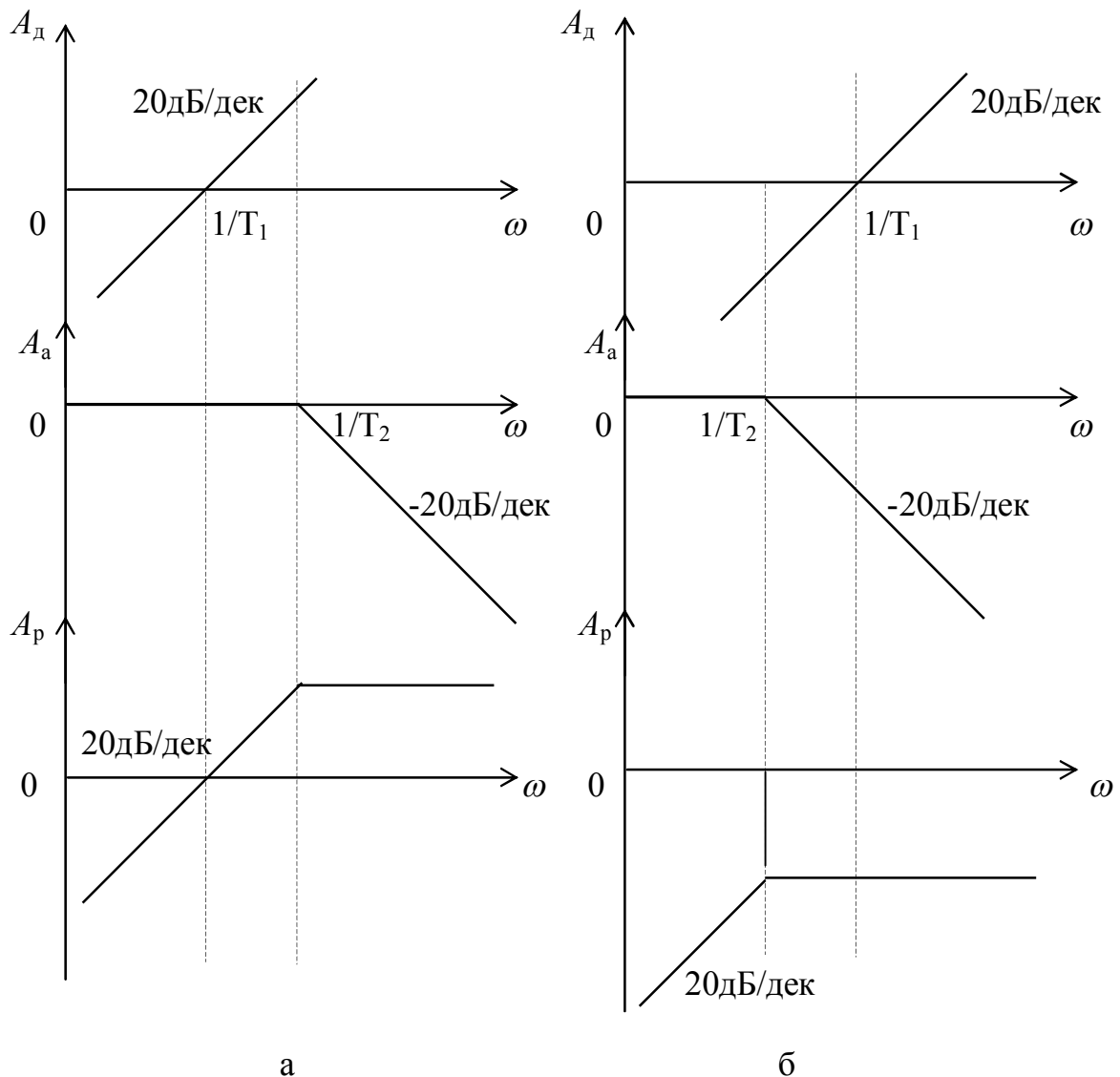


Рисунок 2.50 – Частотні характеристики диференційної ланки зі сповільненням

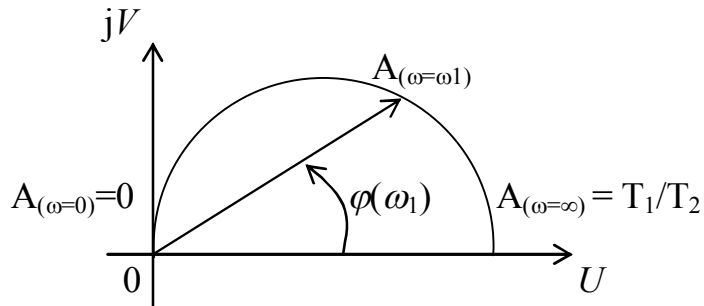


Рисунок 2.51 – Амплітудно-фазочастотна характеристика

Ізодромна ланка. Передавальна функція

$$G(p) = \frac{1 + T_2 p}{T_1 p}. \quad (2.184)$$

Частотна передавальна функція

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\omega T_2}{j\omega T_1}. \quad (2.185)$$

Амплітудно-частотна характеристика

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}{\omega T_1}. \quad (2.186)$$

Фазо-частотна характеристика

$$\varphi(\omega) = \text{arctg} \omega T_2 - \frac{\pi}{2}. \quad (2.187)$$

Для побудови асимптотичної амплітудно-частотної характеристики представимо передавальну функцію (2.184) у вигляді послідовного з'єднання двох ланок

$$G(p) = (1 + T_2 p) \frac{1}{T_1 p}. \quad (2.188)$$

Процес побудови асимптотичних частотних характеристик ізодромної ланки для різних співвідношень сталих часу ланки надано на рисунку 2.52.

Амплітудно-фазочастотна характеристика (рис. 2.53)

$$U(\omega) + jV(\omega) = \frac{T_2}{T_1} - j \frac{1}{\omega T_1}. \quad (2.189)$$

Коливальна ланка. Передавальна функція цієї ланки

$$G(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}. \quad (2.190)$$

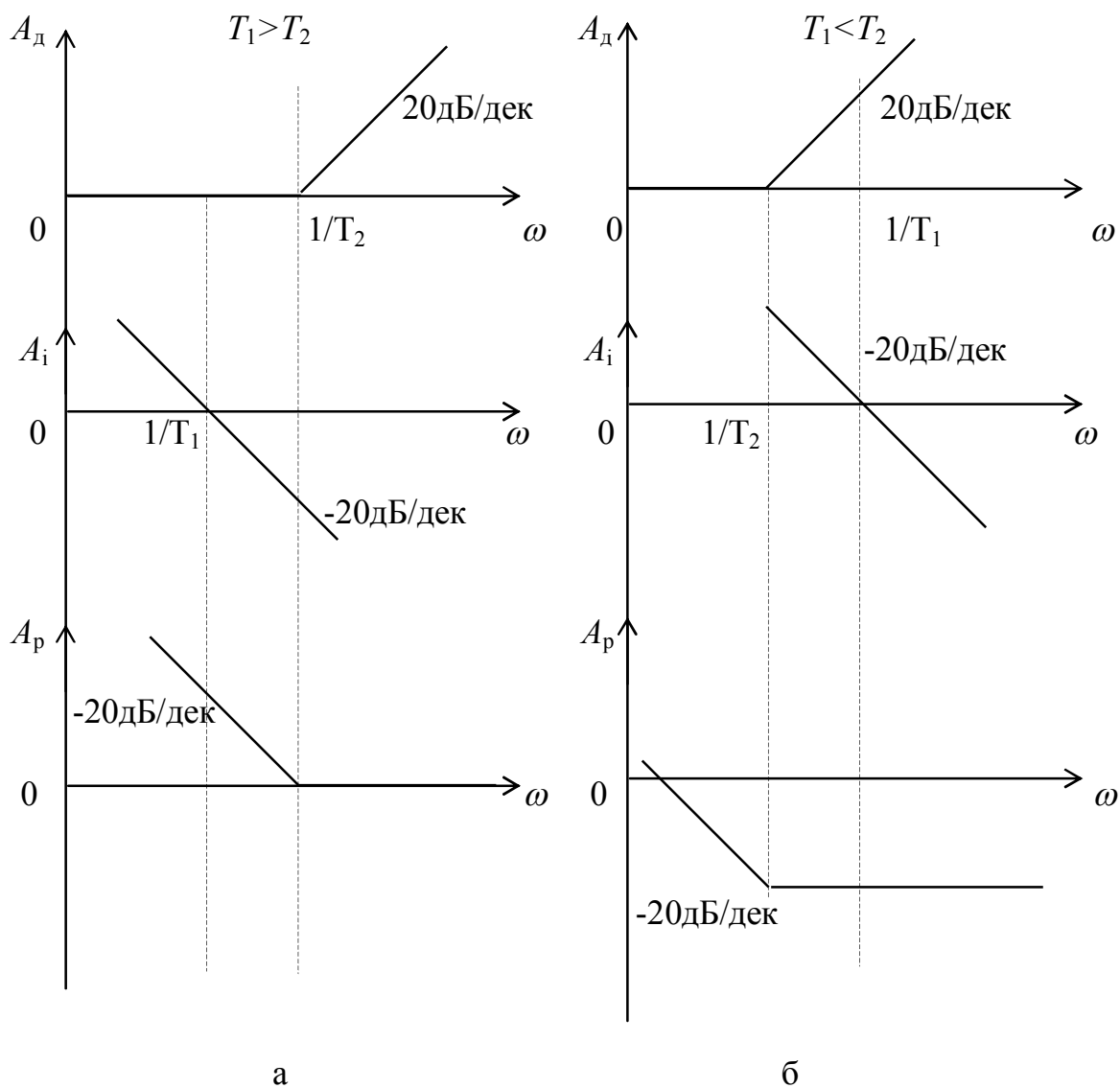


Рисунок 2.52 – Частотні характеристики іподромної ланки

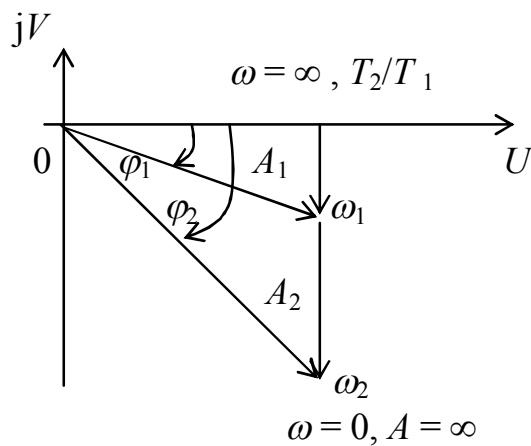


Рисунок 2.53 – Амплітудно-фазочастотна характеристика ізодромної ланки

Частотна передавальна функція

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 T^2 + j2\xi\omega T}. \quad (2.191)$$

Амплітудно-частотна характеристика

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2}}. \quad (2.192)$$

На резонансній частоті $\omega = 1/T$ коефіцієнт передачі коливальної ланки

$$A_{/\omega=1/T} = \frac{1}{2\xi}. \quad (2.193)$$

Фазо-частотна характеристика

$$\varphi(\omega) = -a \operatorname{arctg} \frac{2\xi\omega T}{1 - \omega^2 T^2}. \quad (2.194)$$

Асимптотична амплітудно-частотна і фазо-частотна характеристики наведені на рисунку 2.54.

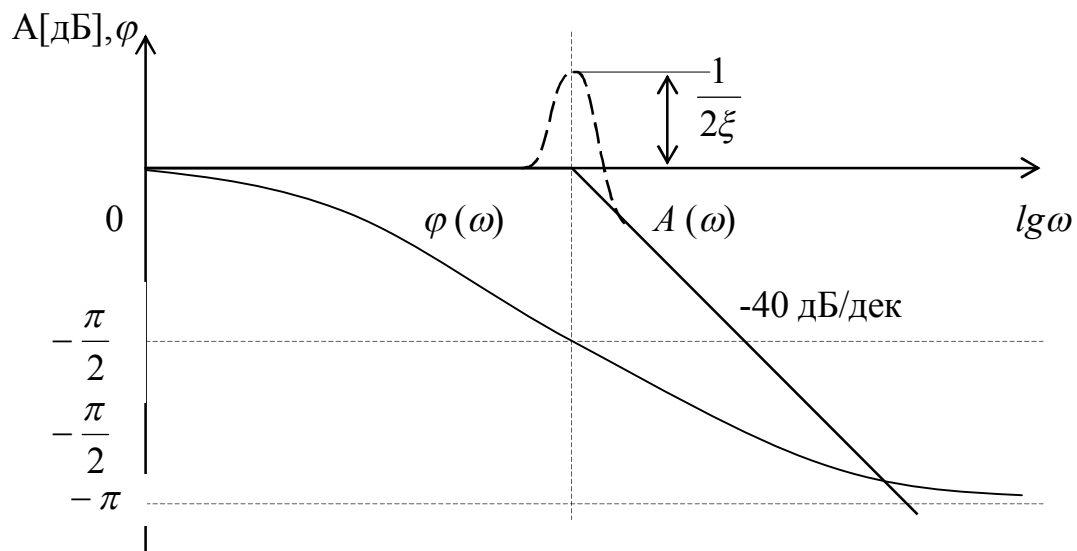


Рисунок 2.54 – Частотні характеристики коливальної ланки

Амплітудно-фазочастотна характеристика (рис. 2.55)

$$U(\omega) + jV(\omega) = \frac{1 - \omega^2 T^2}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2} - j \frac{2\xi \omega T}{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2}. \quad (2.195)$$

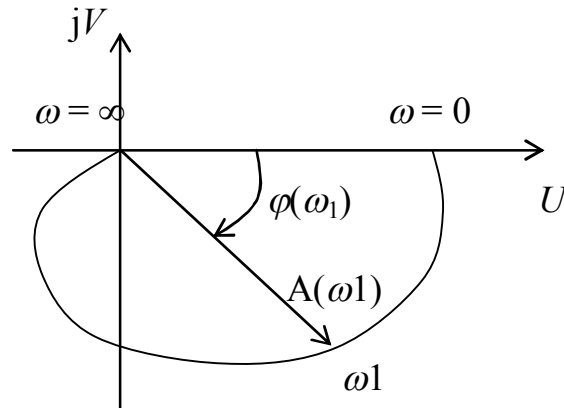


Рисунок 2.55 – Амплітудно-фазочастотна характеристика коливальної ланки

2.9.8 Частотні характеристики немінимально-фазової ланки

Динамічні ланки, частотні характеристики яких розглянуті в п. 2.9.7, є мінімально-фазовими, оскільки нулі і полюси їх передавальних функцій розташовані в лівій частині комплексної площини. У таких ланках фазова частотна характеристика однозначно пов'язана із амплітудно-частотною. У разі зміни амплітудно-частотної характеристики на ± 20 дБ/дек фазова характеристика прямує до $\pm 90^\circ$, а при зміні амплітудної характеристики на ± 40 дБ/дек фазова прямує до $\pm 180^\circ$.

Динамічні ланки, у яких нулі і полюса передавальних функцій розташовані в правій частині комплексної площини, називають не мінімально-фазовими:

$$G(p) = \frac{1}{Tp - 1}; \quad G(p) = Tp - 1 \text{ і т.д.} \quad (2.196)$$

Розглянемо динамічну ланку електрична схема якої наведена на рисунку 2.56. У цій схемі зв'язок між вхідним і вихідним сигналами визначається виразом

$$U_2(p) = U_1(p) \left[\frac{1}{Tp + 1} \left(\frac{R_3}{R_1} + 1 \right) - \frac{R_3}{R_1} \right], \quad (2.197)$$

де $T = R_2 C$.

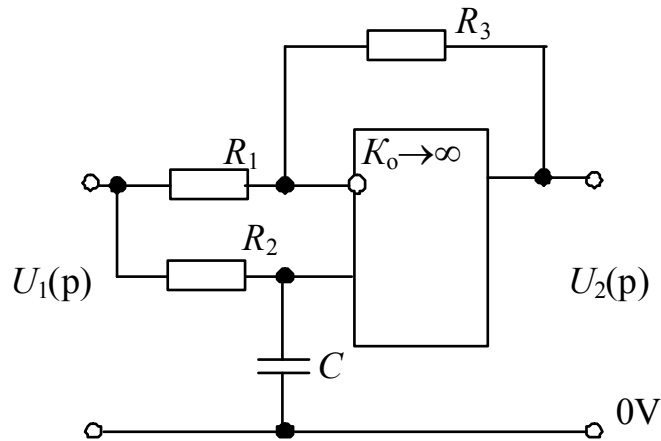


Рисунок 2.56 – Немінімально-фазова динамічна ланка

Із виразу (2.197) при $R_1 = R_3$ одержуємо передавальну функцію ланки

$$G(p) = \frac{1 - Tp}{1 + Tp}. \quad (2.198)$$

Ця ланка має полюс у лівій частині комплексної площини і нуль у правій. Частотна передавальна функція ланки

$$G(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + j\omega T}. \quad (2.199)$$

Амплітудно-частотна характеристика

$$A(\omega) = 1, \quad (2.200)$$

тобто модуль коефіцієнта передачі ланки не залежить від частоти.

Фазо-частотна характеристика

$$\varphi(\omega) = -2 \arctg \omega T. \quad (2.201)$$

При зміні частоти в діапазоні $0 \leq \omega \leq \infty$ фазовий зсув змінюється від 0 до $-\pi$.

Амплітудно-фазочастотна характеристика

$$U(\omega) + jV(\omega) = \frac{1 - \omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{2\omega T}{1 + \omega^2 T^2}. \quad (2.208)$$

Графіки частотних характеристик наведені на рисунку 2.57.

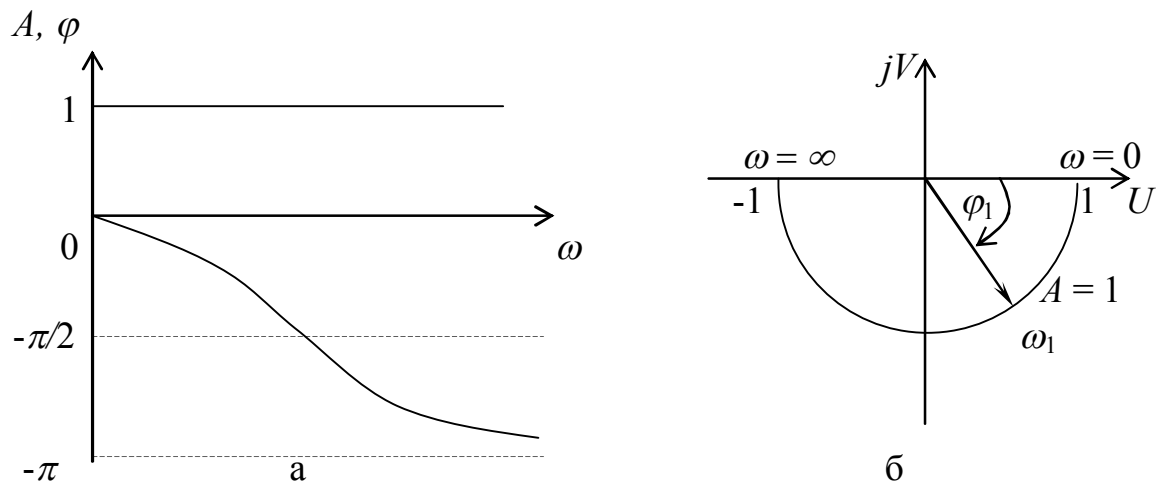


Рисунок 2.57 – Частотні характеристик не мінімально-фазової ланки

2.9.9 Частотні характеристики динамічної ланки із запізненням

Запізнілою називається ланка у якій вихідна величина відтворює вхідну з деяким відставанням. Між вхідною та вихідною величинами ланки із запізненням існує залежність

$$y(t) = x(t - \tau), \quad (2.303)$$

де τ – час запізнення.

Передавальна функція ланки із запізненням має вигляд

$$G(p) = e^{-\tau p}. \quad (2.204)$$

Частотна передавальна функція

$$G(p) = \cos \tau \omega - j \sin \tau \omega. \quad (2.205)$$

Амплітудно-частотна характеристика

$$A(\omega) = 1. \quad (2.206)$$

Фазо-частотна характеристика

$$\varphi(\omega) = -\tau \omega. \quad (2.207)$$

Передавальну функцію системи, що в своєму складі містить ланку із запізненням, зображають як

$$W(p) = H(p) \cdot G(p) = H(p) \cdot e^{-\tau p}, \quad (2.208)$$

де $H(p)$ – передавальна функція частини системи, що немає запізнення;
 $G(p)$ – передавальна функція (2.104) ланки із запізненням.

Частотна передавальна функція послідовного з'єднання ланок

$$W(j\omega) = H(j\omega) \cdot e^{-j\tau\omega} \quad (2.209)$$

Представивши $H(j\omega)$ у показовій формі, одержимо

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \cdot e^{-j\tau\omega} = A(\omega) \cdot e^{j[\varphi(\omega) - \tau\omega]}, \quad (2.210)$$

де $A(\omega)$ – модуль передавальної функції $H(p)$ без урахування запізнення;
 $\varphi(\omega)$ – аргумент цієї функції.

Із рівняння (2.210) витікає, що амплітудно-фазочастотна характеристика системи із запізненням може бути побудована за амплітудно-фазочастотною характеристикою системи без запізнення. Для цього необхідно додатково повернути її вектор за годинниковою стрілкою на кут, що дорівнює $\tau\omega$. Процес побудови амплітудно-фазочастотної характеристики системи із запізненням проілюстровано на рисунку 2.58. На даному рисунку суцільною лінією позначено амплітудно-фазочастотну характеристику системи без запізнення. Така система на частоті ω_1 характеризується модулем коефіцієнта передачі $A(\omega_1)$ і фазовим зсувом $\varphi(\omega_1)$. Для держання координат точки, що відповідає частоті ω_1 на амплітудно-фазочастотній характеристиці системи із запізненням необхідно повернути радіус вектор OA_1 на додатковий кут $\tau\omega$.

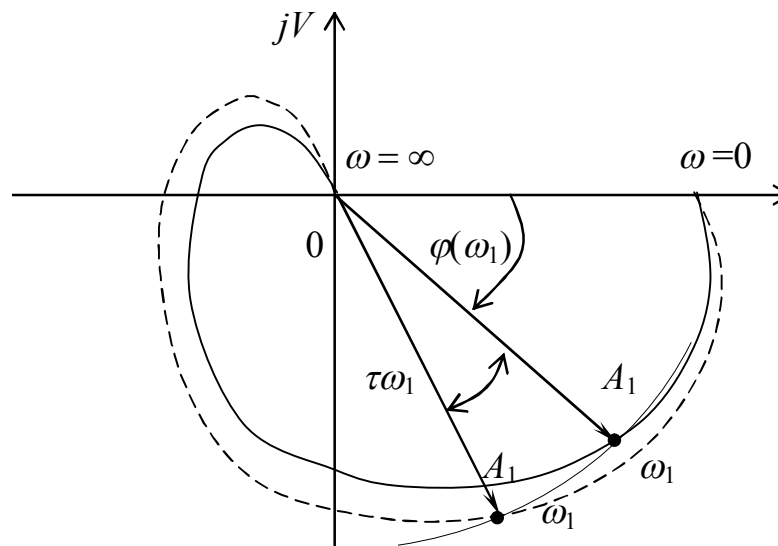


Рисунок 2.58 – Амплітудно-фазочастотна характеристика системи із запізненням

Аналогічно одержують точки для інших частот, за якими будують амплітудно-фазочастотну характеристику системи із запізненням (пунктирна лінія на рис. 2.58).

Питання та завдання для самоперевірки

1. Що називають прямим перетворенням Лапласа?
2. Що називають передавальною функцією динамічної ланки?
3. Укажіть передавальну функцію інтегруючої ланки.
4. Як позначають зображення функції за Лапласом?
5. Що називають характеристичним поліномом?
6. Дати визначення амплітудно-частотної характеристики.
7. Дати визначення фазово-частотної характеристики.
8. Що є амплітудно-фазочастотна характеристика?
9. Яка величина нахилу асимптоти ланки першого порядку?
10. Чому дорівнює оператор Лапласа p у частотній області?
11. Який має нахил асимптоти інтегруючої ланки?
12. Указати перетворення за Лапласом одиничної функції.
13. Укажіть передавальну функцію аперіодичної ланки.
14. Як визначається передавальна функція динамічної ланки, побудованої на операційному підсилювачі?
15. Як здійснюється перехід від абсолютних величин коефіцієнта передачі до дБ?
16. Що називають структурною схемою САР ?
17. Як визначають еквівалентну передавальну функцію послідовного з'єднання n динамічних ланок?
18. Як визначають еквівалентну передавальну функцію паралельного з'єднання n динамічних ланок?
19. Що називають сполучною частотою?
20. Що визначає частота зрізу системи?
21. Дати визначення часовим характеристикам.
22. Що є перехідною функцією динамічної ланки?
23. Що є функція ваги динамічної ланки?
24. Як одержують передавальну функцію замкнутої системи автоматичного регулювання?
25. Сформулюйте теорему розкладу.
26. Що визначає на годографі амплітудно-фазочастотної характеристики довжина вектора?
27. У яким спосіб зв'язані між собою сполучна частота ω_c і стала часу T динамічної ланки?

3 СТІЙКІСТЬ ТА ЯКІСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ

3.1 Стійкість систем автоматичного регулювання

3.1.1 Визначення стійкості

Будь-яка система автоматичного регулювання повинна зберігати свої робочі характеристики незалежно від змін зовнішніх і внутрішніх збурень. Працездатність системи характеризується одним із основних динамічних параметрів – стійкістю.

Для стійкої системи є характерним те, що після зняття зовнішнього збурення система повертається в попередній стійкий стан. Проілюструємо це визначення на системі, що складається із жолоба, стінки якого простягаються в безкінечність (рис. 3.1), та металеві кульки в середині жолоба. За відсутності зовнішніх збурень кулька під дією сили тяжіння P розташовується в нижній частині жолоба.

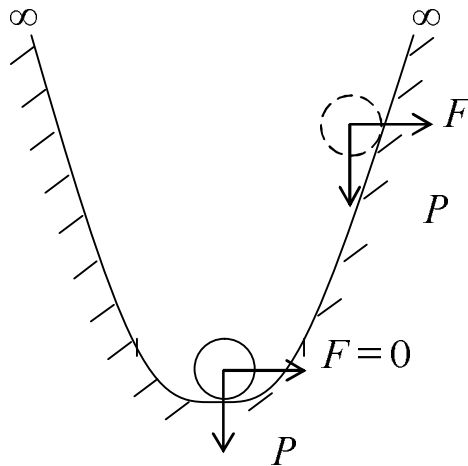


Рисунок 3.1 – Приклад стійкої системи

Якщо до кульки прикласти зовнішнє збурення силою F , то під його дією кулька займе нове положення (див. рис. 3.1). Після зняття зовнішнього збурення кулька під дією сили тяжіння покотиться до низу жолоба. Після декількох коливань відносно точки рівноваги кулька знову займе нижнє положення. Кількість коливань і їх амплітуди залежать від сили тертя між поверхнями кульки і жолоба. Із цього випливає, що розглянута система є стійкою.

Тепер повернемо жолоб випуклою поверхнею вверх, як це зображено на рисунку 3.2. На вершині випуклості розмістимо кульку в точці рівноваги $F = 0$. Кулька перебуває в стані спокою до моменту прикладання зовнішнього збурення. Під дією зовнішнього збурення кулька переміститься в одну або другу сторону відносно точки рівноваги. Після зняття зовнішнього діяння кулька не повертається в попереднє положення. Система, у якій

вихідна координата після зняття зовнішнього збурення віддаляється від початкового стану або здійснює незатухаючі коливання називається нестійкою.

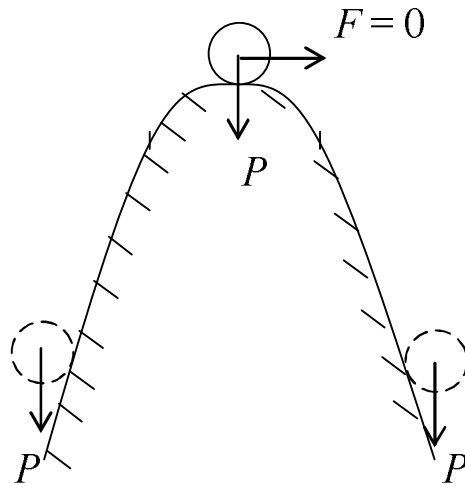


Рисунок 3.2 – Приклад нестійкої системи

Сстійкі системи розрізняють як абсолютно стійкі та стійкі для обмеженого діапазону змін зовнішнього збурення. Прикладом системи із абсолютною стійкістю є система на рисунку 3.1. Незалежно від величини сили F після зняття зовнішнього збурення кулька повертається на дно жолоба.

Тепер розглянемо систему, що складається із хвильової поверхні (рис. 3.3) на якій розміщено металеву кульку. За відсутності зовнішнього збурення кулька займає положення в точці рівноваги. Якщо в системі змінювати зовнішнє збурення F у такий спосіб, що кулька не переміщується за точки із координатами A і B , то після його зняття кулька повертається у вихідне положення. Тобто для цих змін величини зовнішнього збурення система є стійкою. Якщо під дією сили F кульку перемістити за точки із координатами A і B , то після зняття зовнішнього збурення кулька займе нове положення, тобто система втратить стійкість.

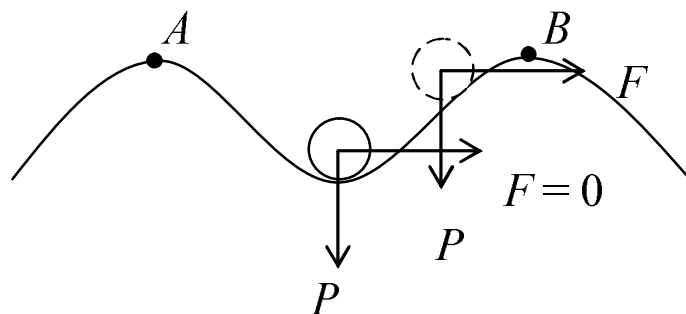


Рисунок 3.3 – Стійкість системи в «малому»

Розглянута система зберігає стійкість при змінах зовнішнього збурення в обмеженому діапазоні

$$0 \leq F \leq F_{\max}, \quad (3.1)$$

де F_{\max} відповідає точкам A і B .

У такому випадку говорять, що система стійка в «малому» і нестійка у «великому». Точки із координатами A і B називають границею стійкості системи.

Основи строгої теорії стійкості динамічної системи були розроблені О. М. Ляпуновим і викладені в 1892 р. в науковій праці «Общая задача об устойчивости движения». За Ляпуновим поняття стійкості полягає в наступному. Якщо система описана лінійними диференціальними рівняннями, то її стійкість не залежить від величини збурень. Лінійна система, що стійка при малих збуреннях, буде стійкою при великих. Нелінійна система може бути стійкою для малих збурень і нестійкою для великих (рис. 3.3). Із теореми Ляпунова витікає, що стійкість нелінійної системи при малих збуреннях можна визначати за її лінеаризованим рівнянням. Для визначення поведінки системи при великих збурюючих діях необхідно застосовувати нелінійні рівняння.

Проблема стійкості зазвичай виникає в замкнутих системах автоматичного регулювання через дію зворотного зв'язку. Тому подальший розгляд питання стійкості досліджується саме для таких систем. В той же час слід зазначити, що методи дослідження стійкості є універсальні.

3.1.2 Умова стійкості системи автоматичного регулювання

Відповідь на запитання, чи буде замкнута система автоматичного регулювання, що у загальному випадку описується передавальною функцією

$$W(p) = \frac{U(p)}{V(p)}, \quad (3.2)$$

можна дати якщо розглянути її перехідну функцію.

Згідно із (2.112) перехідна функція в операторній формі описується виразом

$$H(p) = \frac{U(p)}{p \cdot V(p)}. \quad (3.3)$$

У загальному випадку характеристичне рівняння перехідної функції характеризується наявністю n – коренів серед яких q – дійсні, а $n - q = a_i + jb_i$ – є комплексно пов'язані.

У цьому випадку перехідну функцію на підставі (2.62) можна представити сумою трьох складових

$$h(t) = \frac{U(0)}{V'(0)} + \sum_{i=1}^q \frac{U(p_i)}{V'(p_i)} e^{p_i t} + \sum_{i=q+1}^{n-q} \frac{U(p_i)}{V'(p_i)} e^{a_i t} \sin(b_i t + \varphi). \quad (3.4)$$

Перша складова у (3.4) характеризує усталений режим системи. Друга та третя складові несуть інформацію про перехідний режим в системі. Ці складові по суті відображають зміну похибки регулювання в перехідному режимі. Є очевидним, що система буде стійкою, коли при $t \rightarrow \infty$ перехідна складова затухає до нуля. Розглянемо, як впливають властивості коренів характеристичного рівняння на другу та третю складову перехідної функції. Якщо всі дійсні корені від'ємні ($p_q < 0$), то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^q \frac{U(p_i)}{V'(p_i)} e^{p_i t} = 0. \quad (3.5)$$

Коли дійсні частини a_i комплексних коренів від'ємні ($a_i < 0$), то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=q+1}^{n-q} \frac{U(p_i)}{V'(p_i)} e^{a_i t} \sin(b_i t + \varphi) = 0. \quad (3.6)$$

Із розглянутого витікає, що якщо всі дійсні корені та всі дійсні частини комплексних коренів є від'ємні, то перехідна складова перехідної функції при $t \rightarrow \infty$ затухає до нуля. На комплексній площині, що показана на рисунку 3.4, такі корені розташовані в лівій частині («ліві» корені) це, наприклад, корені p_1, p_2, p_3 . Якщо хоча б один із дійсних коренів або одна із дійсних частин комплексних коренів є позитивними, то перехідна складова перехідної функції носить незатухаючий характер. Такий випадок характеризують корені p_4, p_5, p_6 («праві» корені).

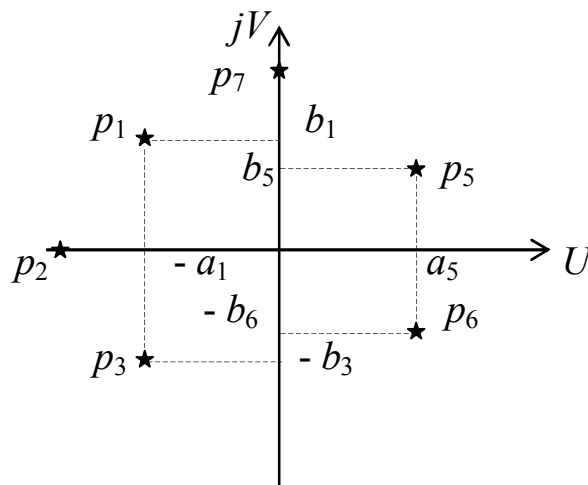


Рисунок 3.4 – Коренева площина

Таким чином, умовою стійкості системи автоматичного регулювання є наявність всіх «лівих» коренів її характеристичного рівняння. Якщо один із коренів є чисто уявним (корінь p_7), то система регулювання знаходиться на межі стійкості.

Сформульована умова стійкості для лінійних систем є справедливою як для малих, так і для великих збурень. Для нелінійних систем, дослідження стійкості яких виконується за лінеаризованими рівняннями, наведена умова стійкості справедлива для малих збурень.

Корені характеристичного рівняння системи автоматичного регулювання не залежать від зовнішніх збурень і їхніх величин, а визначаються тільки параметрами системи. Дослідження стійкості може виконуватись як за заданим параметром системи, так і для визначення параметрів, за яких система буде стійкою.

Як було зазначено, дослідження стійкості зводиться до визначення знаків дійсних частин коренів характеристичного рівняння замкнутої системи. Визначення знаків коренів пов'язано із вирішенням характеристичного рівняння системи. Однак легко вирішуються рівняння не вище другого ступеня. Рівняння третього та четвертого ступенів аналітично вирішуються надзвичайно складно, а рівняння вищих ступенів взагалі не можуть бути вирішені у радикалах.

Для полегшення дослідження системи на стійкість розроблені непрямі методи визначення знаків дійсних частин коренів характеристичного рівняння, які дістали назву критеріїв стійкості. Ці методи не вимагають вирішення характеристичного рівняння.

Розрізняють алгебраїчні та частотні критерії. До алгебраїчних належать критерії Рауса (1875 р.) і Гурвіця (1895 р.). До частотних належать критерії Найквіста (1932 р.), Михайлова (1936 р.), а також метод логарифмічних частотних характеристик.

Поряд із критеріями застосовують необхідну але недостатню умову стійкості Стодоли, згідно із якою для стійкості системи потрібно мати усі коефіцієнти характеристичного рівняння одного знаку. Для систем, що описуються диференційними рівняннями першого та другого порядку, дана умова є достатньою. Для дослідження більш складних систем застосовують інші критерії.

3.1.3 Критерій стійкості Рауса – Гурвіця

В 1875 р. професор математики Кембриджського університету Е. Раус сформулював умову стійкості у вигляді таблиці. Німецький математик А. Гурвіц опублікував у 1895 р. критерій стійкості у вигляді системи визначників. Обидва критерії призводять до одних і тих самих алгебраїчних нерівностей. Тому часто вказані критерії об'єднують, називаючи критерієм Рауса – Гурвіця.

Для визначення стійкості замкнутої системи автоматичного регулювання із коефіцієнтів характеристичного рівняння

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + a_3 p^{n-3} + a_4 p^{n-4} + \dots + a_n = 0, \quad (3.7)$$

у якому $a_0 > 0$, складають квадратну матрицю n – го порядку (порядок матриці дорівнює порядку характеристичного рівняння).

Складання матриці виконують у такому порядку. По головній діагоналі матриці записують коефіцієнти характеристичного рівняння, починаючи із a_1 і закінчуючи a_n . Кожний зі стовпців матриці доповнюють у верх коефіцієнтами із номерами, що збільшуються, а вниз, що зменшуються.

$$\Gamma = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

На місцях відсутніх коефіцієнтів, індекси яких більші n і менші 0, про- ставляють нулі.

Для стійкості системи автоматичного регулювання є необхідно і доста- тньо, щоб n визначників Гурвіця – $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_n > 0$. Визначники Гурвіця представляють собою діагональні визначники матриці (3.8)

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1; & \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; & \dots & \Delta_n = \|\Gamma\|. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для характеристичних рівнянь високих ступенів порядки визначників зростають і їхні практичні розрахунки стають складними. Кри- терій Рауса – Гурвіця раціонально застосовувати для систем характеристичні рівняння яких мають порядок, що не перевищує чотири – п'ять. Для таких систем умови стійкості мають наступний вигляд.

Система першого порядку. Характеристичне рівняння

$$a_0 p + a_1 = 0. \quad (3.10)$$

Умови стійкості

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0. \quad (3.11)$$

Система другого порядку. Характеристичне рівняння

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0. \quad (3.12)$$

Матриця Гурвіця

$$\Gamma = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Умови стійкості

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = a_1 \cdot a_2 > 0, \text{ звідкіля } a_2 > 0. \quad (3.13)$$

Система третього порядку. Характеристичне рівняння

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0. \quad (3.14)$$

Матриця Гурвіця

$$\Gamma = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Умови стійкості

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 > 0; \quad \Delta_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 > 0. \quad (3.15)$$

Система четвертого порядку. Характеристичне рівняння

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0. \quad (3.16)$$

Матриця Гурвіця

$$\Gamma = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Умови стійкості

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_4 > 0; \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 > a_0 \cdot a_3^2 + a_4 \cdot a_1^2. \quad (3.17)$$

Приклад 3.1 Одержимо умови стійкості системи автоматичного регулювання структурна схема якої наведена на рисунку 3.5. Прямий канал сис-

теми регулювання складається із трьох послідовно з'єднаних аперіодичних ланок із передавальними функціями

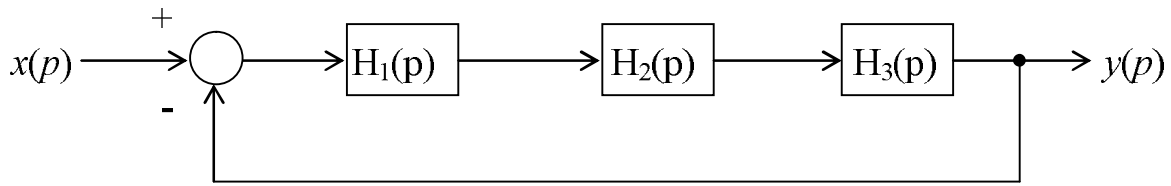


Рисунок 3.5 – Структурна схема САР

$$H_1(p) = \frac{K}{T_1 p + 1}; \quad H_2(p) = \frac{1}{T_2 p + 1}; \quad H_3(p) = \frac{1}{T_3 p + 1}.$$

Передавальна функція замкнутої системи

$$W(p) = \frac{H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p)}{1 + H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p)}. \quad (3.18)$$

Характеристичне рівняння, що приведене до канонічної форми

$$T_1 T_2 T_3 p^3 + [T_1(T_2 + T_3) + T_2 T_3] p^2 + (T_1 + T_2 + T_3) p + K + 1 = 0. \quad (3.19)$$

Згідно із (3.14) одержуємо:

$$a_0 = T_1 T_2 T_3; \quad a_1 = T_1(T_2 + T_3) + T_2 T_3; \quad a_2 = T_1 + T_2 + T_3; \quad a_3 = K + 1. \quad (3.20)$$

Унаслідок підстановки коефіцієнтів (3.20) в умови стійкості (3.15) одержуємо систему нерівностей

$$\begin{cases} T_1(T_2 + T_3) + T_2 T_3 > 0; \\ [T_1(T_2 + T_3) + T_2 T_3](T_1 + T_2 + T_3) - T_1 T_2 T_3(K + 1) > 0; \\ [T_1(T_2 + T_3) + T_2 T_3](T_1 + T_2 + T_3)(K + 1) > 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Перша та третя нерівності виконуються для будь-яких величин параметрів системи регулювання. Друга нерівність накладає обмеження на параметри системи. Якщо сталі часу T_1 , T_2 , T_3 є незмінні й наперед задані, то для стійкості системи необхідно величину коефіцієнта підсилення K вибирати із умови

$$K < \frac{[T_1(T_2 + T_3) + T_2 T_3](T_1 + T_2 + T_3)}{T_1 T_2 T_3} - 1. \quad (3.22)$$

Умова (3.22) одержана із другої нерівності системи (3.21).

3.1.4 Критерій стійкості Найквіста

У 1932 р. американський вчений Найквіст запропонував критерій для дослідження стійкості підсилювачів зі зворотнім зв'язком. В 1938 р. О. В. Михайлов узагальнив цей критерій на системи автоматичного регулювання. В основу критерію Найквіста покладено дослідження амплітудно-частотної характеристики розімкненої системи яка може бути одержана аналітично або експериментально. Ця обставина вигідно відрізняє критерій Найквіста від других.

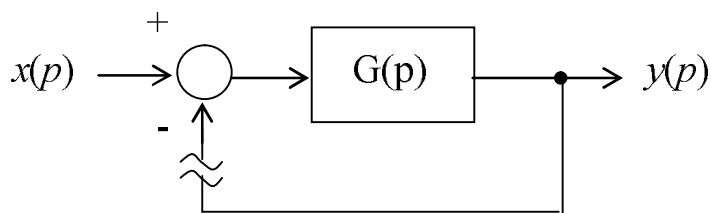


Рисунок 3.6 – Розімкнута САР

Під час дослідження стійкості із застосуванням критерію Найквіста замкнуту систему автоматичного регулювання умовно розмикають, як це показано на рисунку 3.6.

Нехай $G(p) = \frac{y(p)}{x(p)}$ є передавальна функція розімкненої системи.

У п. 2.9.1 показано, що передавальну функцію системи згідно із (2.147) можна подати у наступному вигляді

$$G(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega). \quad (3.23)$$

Виразу (3.23) відповідає годограф амплітудно-частотної характеристики наведений на рисунку 3.7. У разі зміни частоти ω від 0 до ∞ фазовий зсув $\varphi(\omega)$ вектора $G(j\omega)$ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}n$, де n – порядок характеристичного рівняння передавальної функції $G(p)$. На частоті ω_1 фазовий зсув

$$\varphi(\omega_1) = -\pi. \quad (3.24)$$

Сумарний фазовий зсув між вхідним і вихідним сигналами системи із урахуванням від'ємного зворотного зв'язку на частоті ω_1 дорівнює нулю. Коefіцієнт підсилення на частоті ω_1

$$K(\omega_1) = \sqrt{U^2(\omega_1) + V^2(\omega_1)}. \quad (3.25)$$

Якщо підвищити коефіцієнт підсилення до $K(\omega_1) = 1$, то в системі одержимо баланс фаз і амплітуд, що є умовою виникнення коливань із частотою ω_1 .

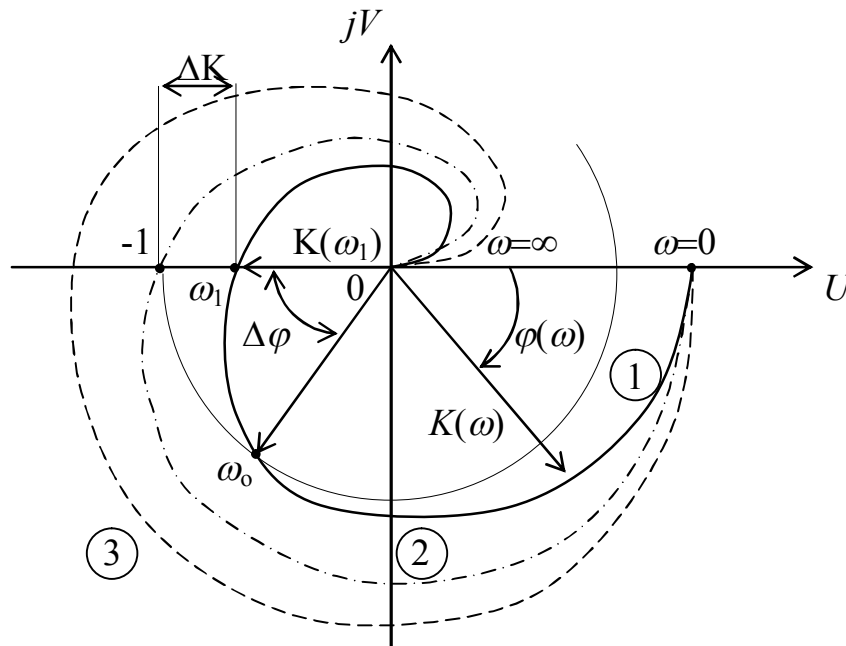


Рисунок 3.7 – Годограф розімкнутої САР

На підставі викладеного, критерій Найквіста полягає в наступному: для стійкості замкнутої системи автоматичного регулювання необхідно, щоб годограф амплітудно-частотної характеристики розімкнутої системи не охоплював точки із координатами $(-1; j0)$.

На рисунку 3.7 стійкій системі відповідає годограф 1. Годограф 2 відповідає системі, що перебуває на межі стійкості. Цифрою 3 позначено годограф амплітудно-частотної характеристики нестійкої системи.

Стійка система характеризується запасом стійкості за коефіцієнтом підсилення ΔK і запасом за фазовим зсувом $\Delta\varphi$. Запас по коефіцієнту підсилення визначають на частоті, що відповідає фазовому зсуву $\varphi(\omega) = -\pi$. Він показує у скільки разів потрібно збільшити $K(\omega_1)$, щоб система втратила стійкість

$$\Delta K = \frac{1}{K(\omega_1)}. \quad (3.26)$$

Запас за фазовим зсувом визначають на частоті, де $K = 1$. Для цього на комплексній площині проводять коло одиничного радіусу із центром у початку координат. Місце перетину кола і годографа амплітудно-частотної характеристики визначають частоту ω_0 одиничного підсилення. На цій частоті фазовий зсув $\varphi(\omega_0)$, тоді

$$\Delta\varphi = \pi - \varphi(\omega). \quad (3.27)$$

Широке застосування критерій Найквіста одержав при дослідженні стійкості за логарифмічним частотним характеристикам. Така можливість витікає із того, що амплітудно-частотна характеристика розімкнутої системи повністю визначається парою характеристик: $A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$, або $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$, що показані на рисунку 3.8.

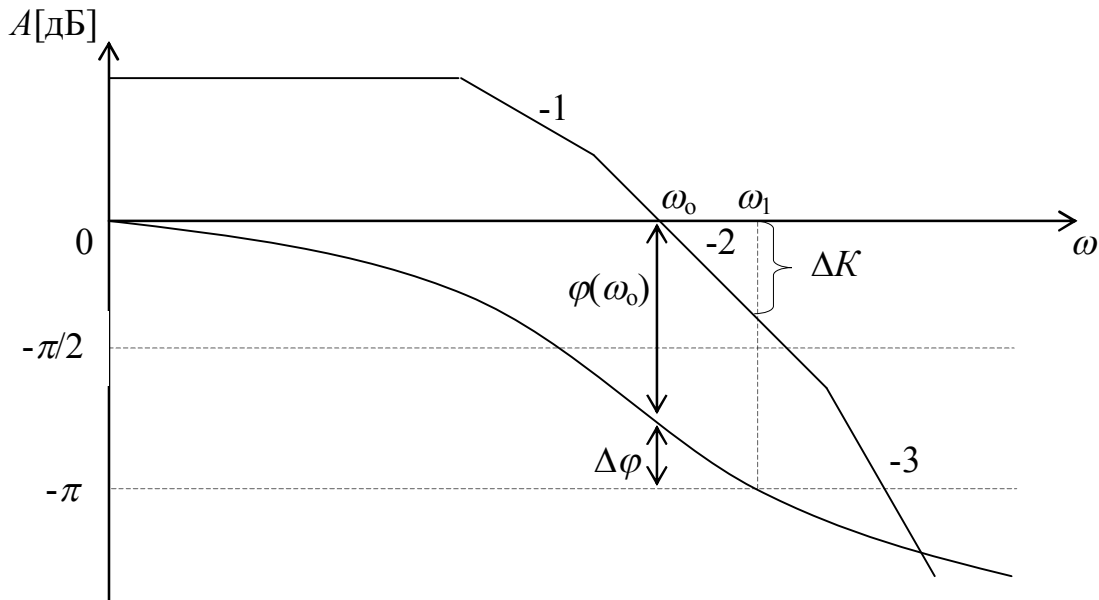


Рисунок 3.8 – Визначення стійкості системи за допомогою логарифмічних частотних характеристик

Позначені на рисунку 3.8 частоти ω_0 і ω_1 співпадають із аналогічними частотами зображеними на рисунку 3.7. Наведені логарифмічні характеристики відповідають стійкій системі автоматичного регулювання із запасом за коефіцієнтом підсилення ΔK і за фазовим зсувом $\Delta\varphi$.

3.1.5 Критерій стійкості Михайлова

Критерій стійкості був запропонований радянським вченим О. В. Михайловим в 1938 р. Цей критерій дає змогу робити висновок про стійкість системи за виглядом кривої Михайлова.

Передавальна функція замкнутої системи, структурна схема якої наведена на рисунку 3.6, має вигляд

$$W(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}. \quad (3.28)$$

В загальному випадку (3.29) можна подати у вигляді відношення двох поліномів

$$W(p) = \frac{N(p)}{M(p)}. \quad (3.29)$$

Представимо характеристичний поліном передавальної функції (3.29) у наступному вигляді

$$M(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n), \quad (3.30)$$

де p_1, p_2, \dots, p_n – корені характеристичного рівняння.

У частотній області характеристичний поліном описується у такий спосіб

$$M(j\omega) = (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n). \quad (3.31)$$

При зміні частоти ω кожний із i -тих співмножників $(j\omega - p_i)$ формує свій кут повороту вектора $M(j\omega)$

$$\varphi_i(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{p_i}. \quad (3.32)$$

Результуючий кут повороту вектора $M(j\omega)$ під дією зміни частоти ω дорівнює

$$\psi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega). \quad (3.33)$$

Із (3.33) витікає, що кожний із i -тих співмножників, який характеризується дійсними або комплексними коренями p_i при зміні частоти ω від 0 до ∞ повертає вектор $M(j\omega)$ на кут $\psi_i = \pm\pi/2$. Позитивний поворот (проти годинникової стрілки) відповідає від'ємній дійсній частині p_i кореня.

Якщо характеристичне рівняння замкнутої системи автоматичного регулювання має n дійсних або комплексних коренів, то результуючий поворот вектора $M(j\omega)$ дорівнює

$$\psi(\infty) = \pm n \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (3.34)$$

Для стійкої системи автоматичного регулювання всі корені її характеристичного рівняння повинні мати від'ємні дійсні частини, тоді

$$\psi(\infty) = n \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (3.35)$$

Із (3.35) слідує, що крива Михайлова стійкої системи при зміні частоти ω повинна послідовно проходити n квадрантів комплексної площини.

Крива Михайлова є годограф вектора

$$M(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega). \quad (3.36)$$

Вектор $M(j\omega)$ являє собою характеристичний поліном замкнутої системи при $p = j\omega$. Крива Михайлова будується на комплексній площині по точкам у разі зміни ω .

Критерій Михайлова формулюється таким чином: для стійкої системи автоматичного регулювання необхідно і достатньо, щоб вектор $M(j\omega)$ при зміні частоти ω від 0 до ∞ повернувся на кут $\psi = n \cdot \pi/2$ проти руху годинникової стрілки, де n – порядок характеристичного рівняння.

Тобто крива Михайлова стійкої системи автоматичного регулювання послідовно проходить число квадрантів комплексної площини, що дорівнює порядку характеристичного рівняння (рис. 3.9, а).

Крива Михайлова завжди при $\omega = 0$ починається із точки, що розташована на позитивній частині дійсної осі. При $\omega \rightarrow \infty$ годограф $M(j\omega) \rightarrow \infty$, до того ж для парного n крива Михайлова іде в безкінечність уздовж дійсної осі X , а для непарних n – уздовж уявної осі Y .

Якщо крива Михайлова проходить через початок координат комплексної площини (крива 1 на рис. 3.9, б), то система автоматичного регулювання перебуває на межі стійкості.

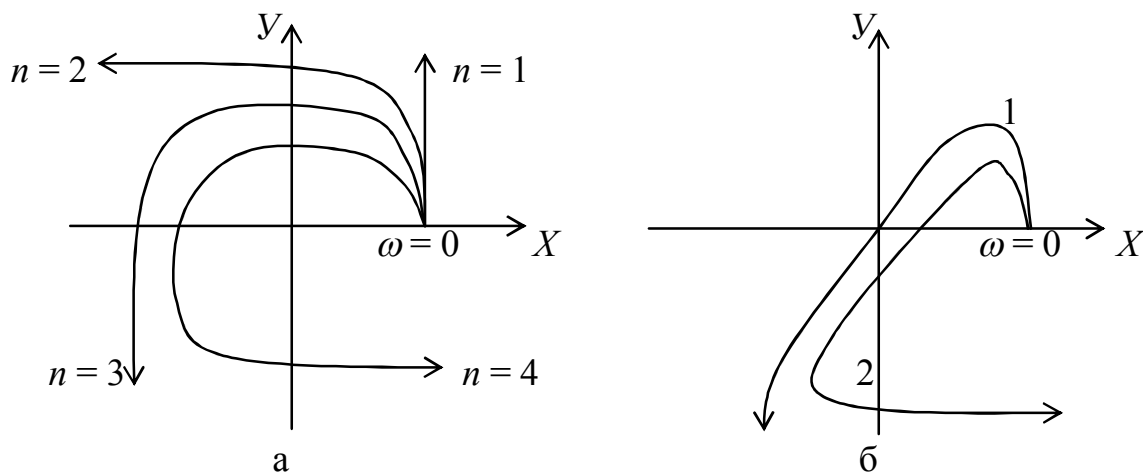


Рисунок 3.9 – Криві Михайлова

Коли порушується послідовність проходження кривою Михайлова квадрантів комплексної площини (крива 2 на рис. 3.9, б), то система автоматичного регулювання нестійка.

3.2 Критерії якості систем автоматичного регулювання

3.2.1 Основні показники якості

Стійкість є необхідною але недостатньою умовою працездатності системи автоматичного регулювання. Стійкість системи автоматичного регулювання означає, що в системі відбувається згасання перехідного процесу викликаного зміною вхідного діяння. Час згасання, максимальне відхилення

регульованої величини та число коливань при цьому не визначають, однак ці величини є важливими показниками якості процесу регулювання.

Показники якості перехідних процесів можна визначити за допомогою різних методів. До їх числа в першу чергу слід віднести [3] побудову перехідного процесу за заданою передавальною функцією замкненої системи, визначення показників якості щодо розташуванню нулів і полюсів передавальної функції, інтегральні оцінки якості, частотні оцінки якості і частотні методи побудови перехідних процесів.

Якість системи автоматичного регулювання (рис. 3.10) прямо безпосередньо обумовлюється величиною та поведінкою похибки в перехідному режимі

$$\Delta e(t) = y(t) - x(t). \quad (3.37)$$

Із (3.37) слідує, що похибка залежить як від властивостей системи автоматичного регулювання, так і від характеру змін вхідного діяння $x(t)$. У теорії автоматичного регулювання широко застосовують методи, що дають змогу оцінити якість системи за її поведінкою в типових режимах, коли випадкове за своєю природою вхідне діяння та зовнішні збурення замінюються типовими функціями часу (див. п. 1.5).

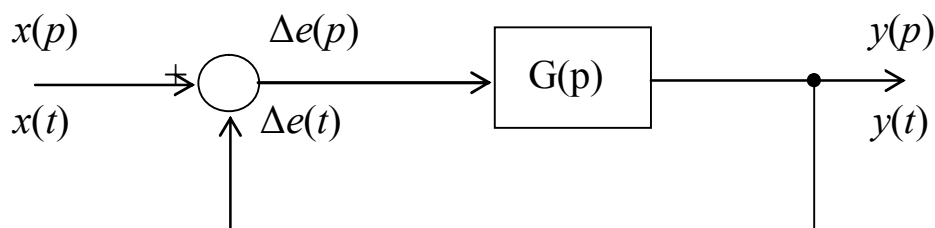


Рисунок 3.10 – Замкнута САР

У загальному випадку критерії якості η_i являють собою функціонали від (3.37), тобто функціонали від похибки

$$\eta_i = \Phi_i[y(t) - x(t)] = \Phi_i[\Delta e(t)], \quad (3.38)$$

де Φ_i – функціонал, що відповідає розглянутому критерію якості;
 $i = 1, 2, 3, \dots, n$, n – кількість розглянутих критеріїв.

Усі критерії якості можна умовно розділити на чотири групи: критерії точності, запас стійкості, швидкодії та комбіновані критерії.

3.2.2 Критерії точності

Критерії точності використовують для оцінки величини похибки, що виникає в усталеному режимі, коли $x(t)$ являє собою типові діяння, що розглянуті в п. 1.5. Критерієм точності є величина похибки в усталеному режимі

$$\Delta e_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta e(t). \quad (3.39)$$

Чим менша величина похибки, тим краща якість системи автоматичного регулювання.

Усталена величина похибки може бути визначена за відомою передавальною функцією системи. Так, для структурної схеми, що наведена на рисунку 3.10 похибка визначається наступним виразом

$$\Delta e(p) = \frac{x(p)}{1 + G(p)}. \quad (3.40)$$

Згідно із теоремою про кінцеве значення оригіналу (2.66), одержуємо

$$\Delta e_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{x(p)}{1 + G(p)}. \quad (3.41)$$

Розглянемо властивості похибки для різних типових вхідних діянь $x(t)$.

Вхідне східчасте діяння $x(t) = 1(t)$ (рис. 1.20). Підставивши в (3.41) зображення за Лапласом вхідного діяння одержуємо

$$\Delta e_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(p)}. \quad (3.42)$$

Для статичної системи передавальна функція $G(0) = K$ являє собою коефіцієнт підсилення розімкнутої системи. У цьому випадку усталена похибка визначається величиною коефіцієнта підсилення

$$\Delta e_{уст} = \frac{1}{1 + K}. \quad (3.43)$$

Для астатичної системи $G(0) = \infty$, тоді $\Delta e_{уст} = 0$.

Приклад 3.1 Визначити усталену похибку системи автоматичного регулювання, у якій

$$G(p) = \frac{T_1 p + 1}{T_2 p}.$$

Підставивши вираз для передавальної функції $G(p)$ у (3.42) і виконавши перетворення, одержуємо

$$\Delta e_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{T_2 p}{T_1 p + T_2 p + 1} = 0.$$

Вхідне діяння в вигляді лінійно зростаючої функції $x(t) = g_1(t)$, де $g_1 = const$ (див. рис. 1.22). Цей випадок є характерним для слідкуючих систем. Виконавши перетворення за Лапласом, одержуємо

$$x(p) = \frac{g_1}{p^2}. \quad (3.44)$$

Із урахуванням (3.44) вираз (3.41) для похибки системи набуває вигляду

$$\Delta e_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{g_1}{p[1 + G(p)]}. \quad (3.45)$$

Із (3.45) слідує, що для статичної системи, у якій $G(0) = K$ похибка регулювання

$$\Delta e_{уст} = \infty.$$

У системі із астатизмом першого порядку, у якій

$$G(p) = \frac{U(p)}{pV(p)}, \quad (3.46)$$

усталена похибка дорівнює

$$\Delta e_{уст} = g_1 V(0).$$

У системі із астатизмом другого і вищих порядків, коли

$$G(p) = \frac{U(p)}{p^n V(p)} \text{ де } n \geq 2, \quad (3.47)$$

усталена похибка

$$\Delta e_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{g_1 p^n V(p)}{p^n V(p) + U(p)} = 0.$$

Вхідне гармонійне діяння $x(t) = g_1 \sin \omega_0 t$. Такий режим широко застосовується для оцінки динамічної точності систем автоматичного регулювання.

Є очевидним, що при такому вхідному діянні похибка також буде змінюватись за гармонійним законом із частотою ω_0 . Амплітудну (максимальну) величину похибки можна визначити як модуль виразу (3.40) при підстановці $p = j\omega$

$$\Delta e_{\max} = g_1 \frac{1}{|1 + G(j\omega)|}. \quad (3.48)$$

У реальних системах $|G(j\omega)| \gg 1$, у наслідок цього вираз (3.49) набуває вигляду

$$\Delta e_{\max} \approx \frac{g_1}{A(\omega_0)}, \quad (3.49)$$

де $A(\omega_0)$ – значення амплітудно-частотної характеристики розімкнутої системи на частоті ω_0 .

Із (3.49) випливає вимога до амплітудної частотної характеристики розімкнутої системи, що забезпечує необхідну точність регулювання

$$A/\omega_0 \text{ (дБ)} = 20 \lg \frac{g_1}{\Delta e_{\max}}. \quad (3.50)$$

Вираз (3.50) накладає обмеження на логарифмічну амплітудно-частотну характеристику розімкнутої системи (рис. 3.11).

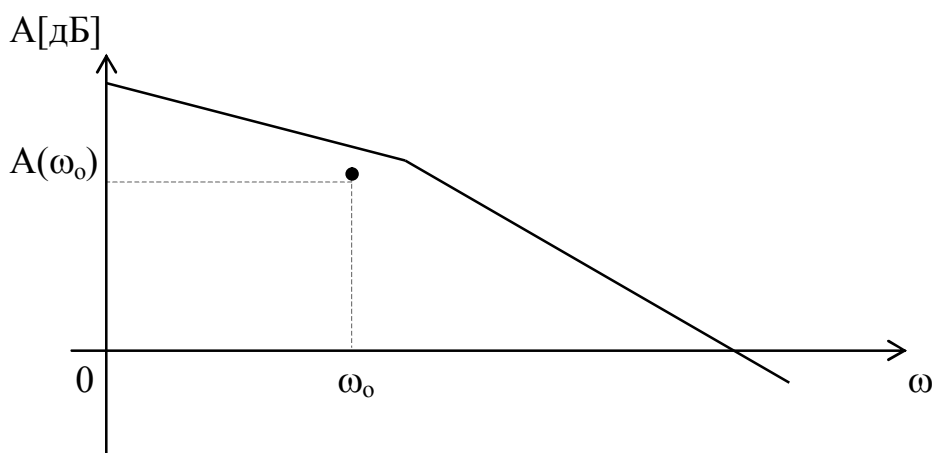


Рисунок 3.11– Оптимізована ЛАХ системи

Шляхи підвищення точності систем автоматичного регулювання:

– збільшення коефіцієнта підсилення найрозповсюдженій метод (однак від збільшення K залежить не тільки величина похибки, а і запас стійкості. У

разі збільшення точності по цьому методу одночасно необхідно забезпечити необхідний запас стійкості);

– підвищення астатизму системи шляхом доповнення системи інтегруючими ланками (тут, як і в попередньому випадку, виникає питання стійкості).

3.2.3 Запас стійкості та швидкодія

Оцінка якості системи автоматичного регулювання може виконуватись по виду кривої перехідного процесу із застосуванням так званих прямих показників якості – перерегулювання, допустимої кількості коливань і тривалості перехідного процесу. В більшості випадків розглядають перехідний процес (рис. 3.12), що виникає під дією одиничної східчастої функції, тобто перехідну функцію замкнутої системи.

Запас стійкості системи, який характеризує віддаленість системи автоматичного регулювання від коливальної границі стійкості, характеризує перерегулювання

$$\delta_{\max} = \frac{h_{\max} - h_{уст}}{h_{уст}} 100\%, \quad (3.51)$$

де h_{\max} – максимальне значення перехідної функції;

$h_{уст}$ – усталене значення перехідної функції.

Для більшості систем автоматичного регулювання запас стійкості є достатнім коли $\delta \leq 10-30\%$. В деяких системах допускається перерегулювання до 70%. Є системи в яких перерегулювання не допускається.

Додатково до величини перерегулювання δ може задаватись допустиме число коливань перехідної функції N_p за час перехідного процесу t_p , та час першого узгодження t_y .

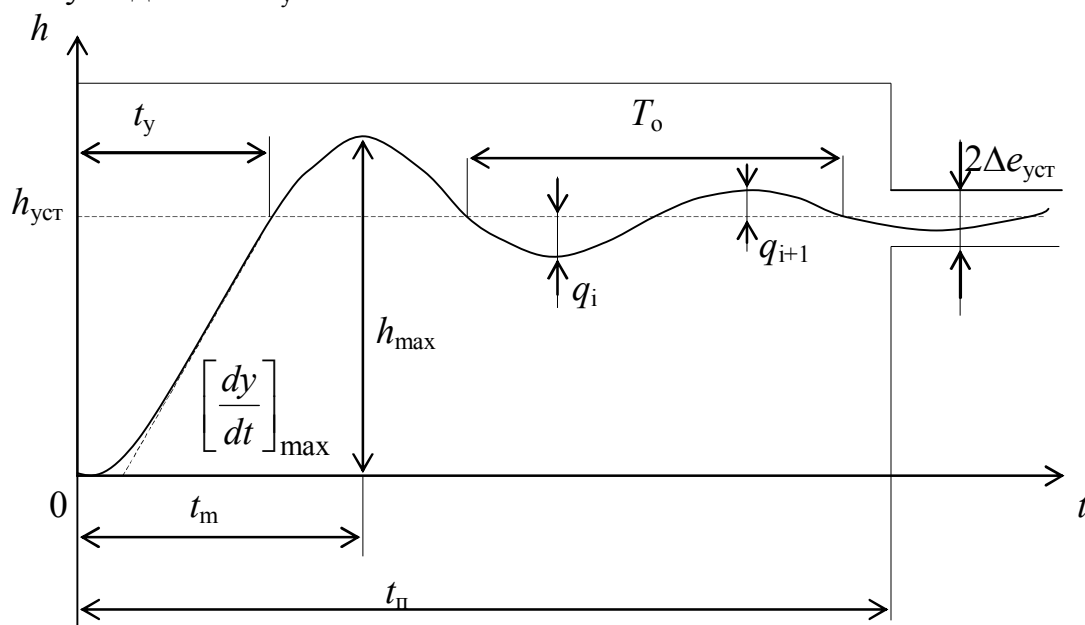


Рисунок 3.12 – Визначення параметрів перехідного процесу

Власна частота коливань перехідного процесу

$$\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}, \quad (3.52)$$

де T_o – період власних коливань в системі.

Швидкість затухання перехідного процесу характеризується логарифмічним показником затухання

$$d_o = \ln \frac{q_i}{q_{i+1}}, \quad (3.53)$$

де q_i і q_{i+n} – амплітуди рядом розташованих коливань.

Чім більша величина d_o , тим скоріше протікає затухання перехідного процесу. Максимальна швидкість наростання перехідної функції характеризується показником

$$\left[\frac{dh}{dt} \right]_{\max}. \quad (3.54)$$

В залежності від властивостей системи автоматичного регулювання перехідні процеси можна розділити на чотири групи (рис. 3.13):

- коливальний процес, що характеризується декількома коливаннями $N_p \geq 2$ (крива 1);
- аперіодичний процес із перерегулюванням (крива 2);
- монотонний процес коли швидкість перехідного процесу $\frac{dh}{dt}$ не міняє знаку (крива 3);
- процес без перерегулювання (крива 4).

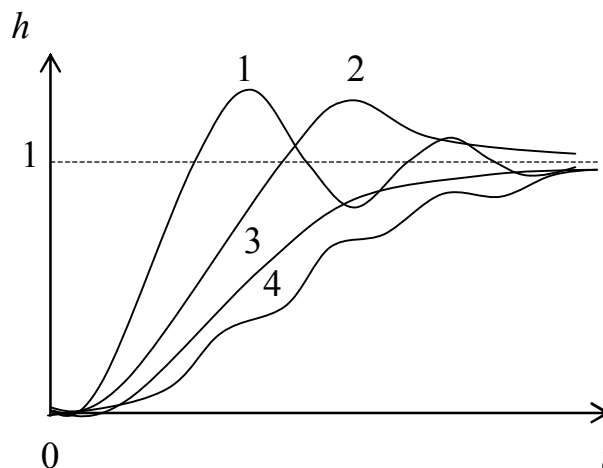


Рисунок 3.13 – Графіки перехідного процесу

У всіх випадках вважають, що перехідний процес закінчився коли відхилення перехідної функції від усталеного значення $h_{уст}$ не перевищує величини похибки $\Delta e_{уст}$.

3.2.4 Оцінка якості перехідних процесів за логарифмічною амплітудно-частотною характеристикою

Розглянемо замкнуту систему автоматичного регулювання, що наведена на рисунку 3.10. Якщо $G(p)$ – передавальна функція розімкнутої системи, передавальна функція замкнутої системи має вигляд

$$W(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)}. \quad (3.55)$$

Замінивши $p = j\omega$, одержуємо частотну передавальну функцію

$$W(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}, \quad (3.56)$$

що визначає зв'язок між частотними характеристиками розімкнутої і замкнутої систем.

Подавши передавальну функцію розімкнутої системи у вигляді (2.137)

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.57)$$

де $A(\omega) = |G(j\omega)|$ – амплітудно-частотна характеристика, а $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ – фазо-частотна характеристика розімкнутої системи.

Із (3.56) можна одержати вираз для амплітудно-частотної характеристики замкнутої системи

$$M(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{A(\omega)}{\sqrt{1 + 2A(\omega)\cos\varphi(\omega) + A^2(\omega)}}. \quad (3.58)$$

Замінивши в (3.58) фазовий зсув $\varphi(\omega)$ на запас по фазі

$$\Delta\varphi = \pi - \varphi(\omega),$$

Одержимо

$$M(\omega) = \frac{A(\omega)}{\sqrt{1 - 2A(\omega)\cos\Delta\varphi(\omega) + A^2(\omega)}}. \quad (3.59)$$

Вираз (3.59) дозволяє знайти резонансну частоту ω_p , що відповідає резонансному максимуму M_p амплітудно-частотної характеристики $M(\omega)$ замкнутої системи (рис. 3.14).

Якщо асимптотична характеристика розімкненої системи має нахил -20 дБ/дек у достатньо широкому діапазоні частот відносно частоти зрізу ω_3 , то [5,11] $\omega_p \approx \omega_3 - \cos \Delta\varphi(\omega_p)$,

$$M_p \approx \frac{1}{\cos \Delta\varphi(\omega_3)}. \quad (3.60)$$

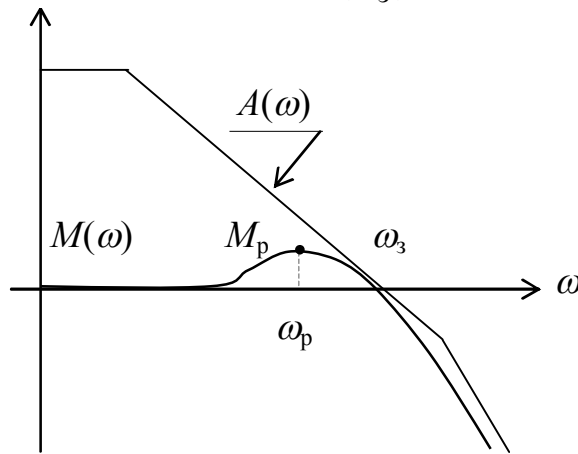


Рисунок 3.14 – Визначення резонансної частоти ω_p

Похибка у такому визначенні M_p не перевищує $\pm 10-12$ %. При монотоннім характері перехідного процесу (рис. 3.15) його якість оцінюється двома часовими показниками: часом запізнення t_3 і часом наростання t_H , які можуть бути визначені як

$$t_3 \approx \sum T_\mu,$$

$$t_H \approx \frac{1}{\omega_3}, \quad (3.61)$$

де $\sum T_\mu$ – сума малих сталих часу в $G(p)$, сполучні частоти яких значно більші частоти зрізу;

ω_3 – частота зрізу системи (див. рис. 3.14).

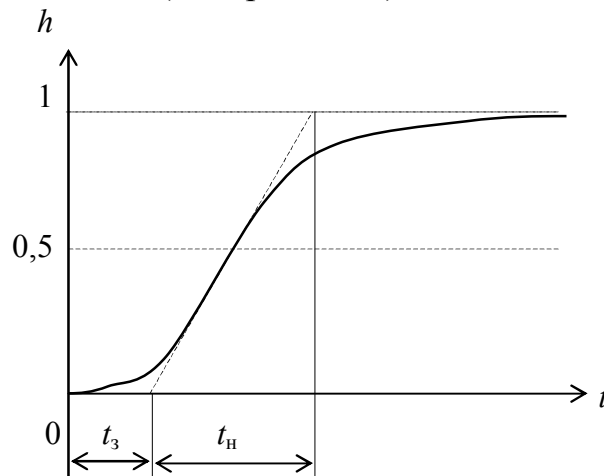


Рисунок 3.15 – Параметри наростання перехідного процесу

Якщо перехідний процес має коливальний характер (див. рис. 3.12), то зв'язок між резонансним максимумом амплітудної частотної характеристики і перерегулюванням може бути визначено як [11]

$$\delta_{\max} = 1 - \frac{1}{M_p}. \quad (3.62)$$

Час досягнення перехідною функцією максимуму перерегулювання визначається у такий спосіб

$$t_m \approx \frac{\pi}{\omega_3}. \quad (3.63)$$

Перехідний процес для заданих величин Δe і δ_{\max} закінчується в системі за час

$$t_{\Pi} = t_m \frac{\ln \frac{1}{\Delta e}}{\ln \frac{1}{\delta_{\max}}}. \quad (3.64)$$

3.2.5 Корекція системи автоматичного регулювання

Підвищення запасу стійкості та якості перехідного процесу досягається шляхом доповнення системи коригувальними пристроями. Коригувальна ланка являє собою динамічну ланку із визначеною передавальною функцією. За допомогою коригувальних ланок виконують деформацію годографа амплітудно-частотної характеристики розімкнутої системи для одержання заданих показників якості системи автоматичного регулювання.

Корекція може бути послідовною, паралельною та за допомогою зворотного зв'язку. У разі послідовної корекції коригувальну ланку включають послідовно із ланками вихідної системи $G(p)$, як це показано на рисунку 3.16, а.

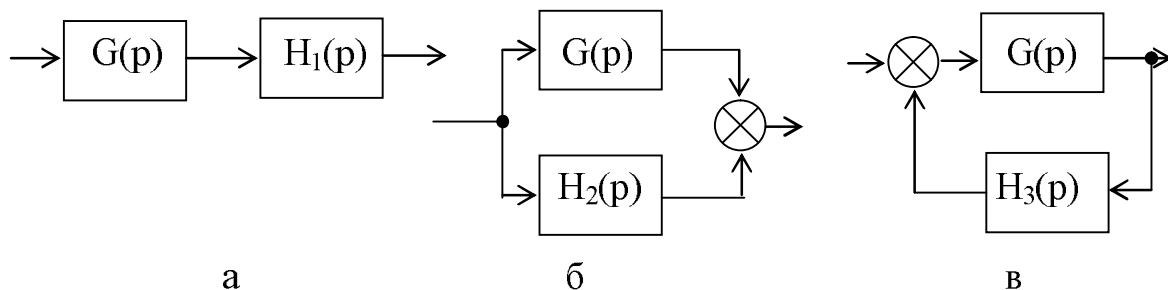


Рисунок 3.16 – Корекція САР

Еквівалентна передавальна функція такого з'єднання

$$W_{\text{нос}} = G(p)H_1(p). \quad (3.65)$$

При паралельній корекції коригувальну ланку включають паралельно динамічним ланкам вихідної системи (рис. 3.16, б). В цьому випадку еквівалентна передавальна функція визначається як

$$W_{нар} = G(p) + H_2(p). \quad (3.66)$$

Корекція за допомогою зворотного зв'язку реалізується шляхом введення в систему локальних замкнутих контурів (рис. 3.16, в) і характеризується наступною еквівалентною передавальною функцією

$$W_o(p) = \frac{G(p)}{1 \pm G(p)H_3(p)}, \quad (3.67)$$

де знак « + » в характеристичному поліномі відповідає від'ємному зворотному зв'язку, а знак « - » – позитивному.

Прирівнявши між собою формули (3.65) – (3.67) можна одержати умови переходу від одного виду корекції до іншого, так

$$H_2(p) = G(p)[H_1(p) - 1], \quad (3.68)$$

$$H_3(p) = \pm \frac{1 - H_1(p)}{G(p)H_1(p)}. \quad (3.69)$$

Найбільш поширеною є послідовна корекція, що пояснюється достатньо простим синтезом передавальної функції коригувальної ланки. При синтезі передавальної функції коригувальної ланки виходять із того, що об'єкт регулювання є заданим, а необхідно визначити коригувальну ланку. Для вирішення цієї задачі є ефективним застосування логарифмічних частотних характеристик. У разі послідовної корекції вихідними даними є логарифмічна амплітудно-частотна характеристика вихідної системи L_3 і вимоги до процесу регулювання. На підставі цих вимог будується так звана бажана логарифмічна амплітудно-частотна характеристика L_6 . Під час побудови бажаної логарифмічної амплітудно-частотної характеристики необхідно враховувати наступні рекомендації. За L_6 і L_3 одержують асимптотичну логарифмічну амплітудно-частотну характеристику.

Низькочастотна область I логарифмічної амплітудної характеристики (рис. 3.17) головним чином визначає точність системи автоматичного регулювання в усталеному режимі. Зв'язок між величиною коефіцієнта підсилення і величиною похибки для статичної системи має вигляд

$$L(0) = 20Lg\left(\frac{x}{\Delta e} - 1\right), \text{ [дБ]}, \quad (3.70)$$

де x – вхідний сигнал системи автоматичного регулювання;

Δe – допустима величина похибки.

Для астатичної системи першого порядку ($\Delta e = 0$) нахил асимптоти логарифмічної амплітудно-частотної характеристики в області низьких частот дорівнює -20 дБ/дек (-1).

Область середніх частот II, що прилягає до частоти зрізу ω_3 системи, переважно визначає запас стійкості і якість перехідних процесів. В цій області нахил асимптоти логарифмічної амплітудно-частотної характеристики вибирають -20 дБ/дек, що в більшості випадків забезпечує необхідний запас стійкості. Чим більший діапазон частот займає ця область, тим більший запас стійкості і тим вища якість перехідних процесів. Величину частоти зрізу системи ω_3 можна визначити за допомогою формули [5]

$$\omega_3 = \frac{\pi \cdot \lambda_{\delta}}{t_{\Pi}}, \quad (3.71)$$

де t_{Π} – час перехідного процесу (час за який відхилення перехідної функції замкнутої системи стане меншим $\Delta e = 1-5\%$).

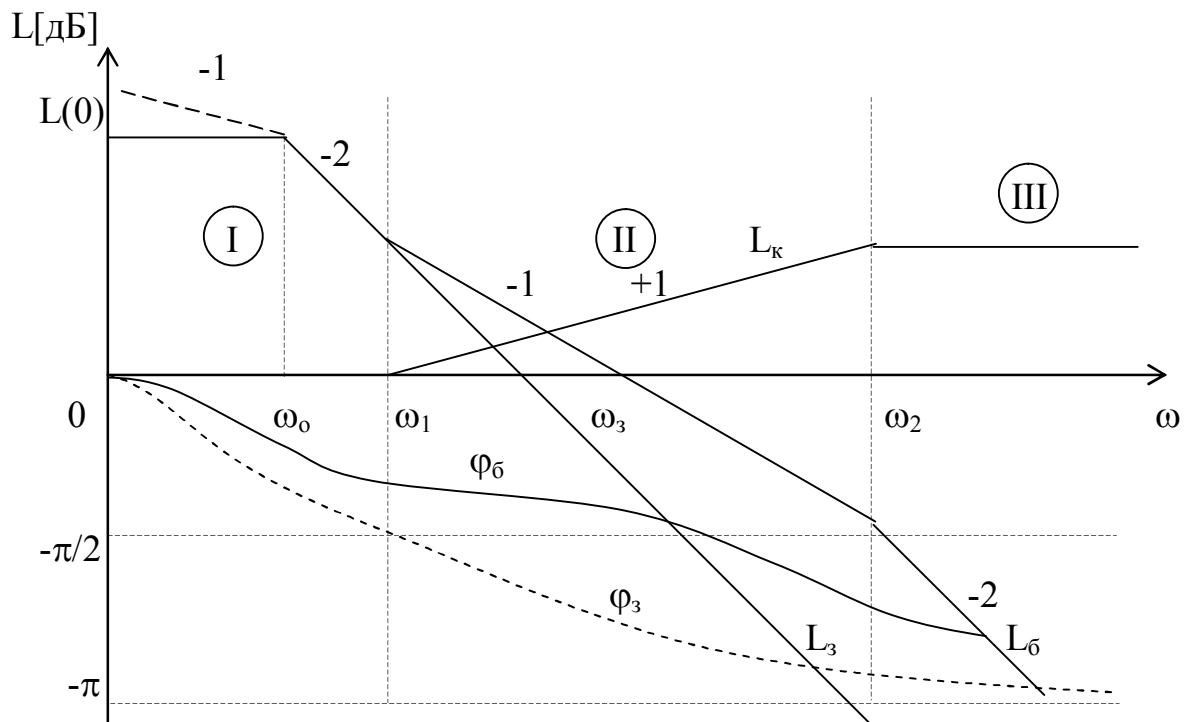


Рисунок 3.17 – ЛАХ розімкнутої скоригованої САР

Залежність коефіцієнта λ_δ від величини перерегулювання δ_{\max} наведена на рисунку 3.18.

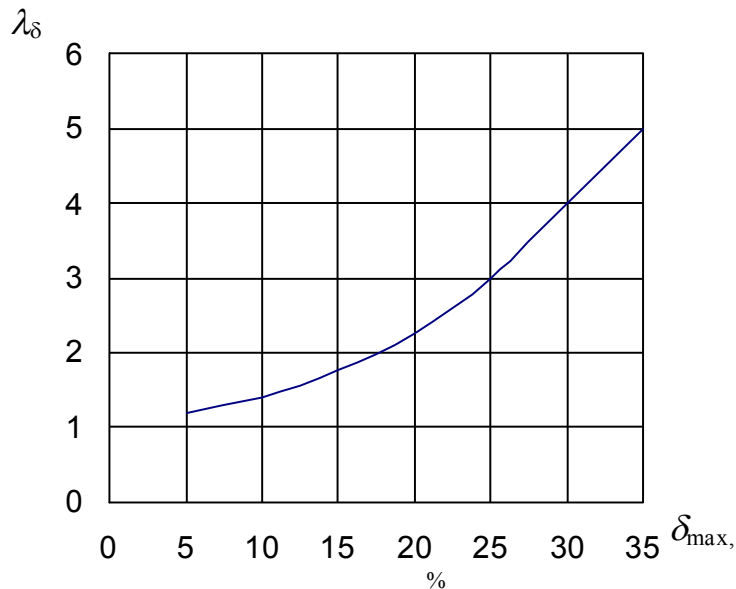


Рисунок 3.18 – Залежність λ_δ від пере регулювання

Сполучні частоти області середніх частот із попередньою та наступною областями визначаються як [13]

$$\omega_1 \approx \frac{\omega_3^2}{\omega_2}, \quad \omega_2 \approx (2 - 4)\omega_3. \quad (3.72)$$

Область високих частот III порівняно слабо впливає на перехідний процес, тому бажану логарифмічну амплітудну частотну характеристику вибирають якомога ближчою до характеристики вихідної (некоректованої) системи.

Асимптотичну амплітудно-частотну характеристику коригувальної ланки одержують згідно з рівнянням

$$L_K = L_G - L_3. \quad (3.73)$$

Розв'язання рівняння (3.73) виконують графічно.

Приклад 3.2 Необхідно виконати синтез передавальної функції коригувальної ланки (регулятора) та розрахувати перехідний процес для системи автоматичного регулювання незмінна частина якої описується передавальною функцією

$$G(p) = \frac{1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}, \quad (3.74)$$

де $T_1 = 0,0159$ С, $T_2 = 0,00159$ С, $T_3 = 0,000159$ С.

Скоригована система повинна забезпечувати в усталеному і перехідно-му режимах такі показники: $\Delta e \leq 5 \%$, $\delta \leq 20 \%$, $t_{\pi} \leq 30 \cdot 10^{-3}$ С при входному діянні $x(t) = 1(t)$.

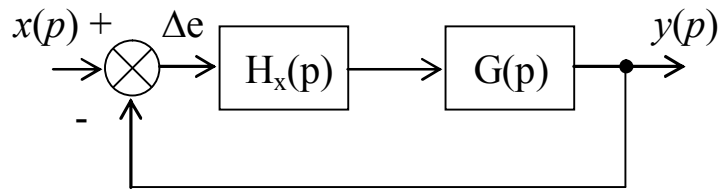


Рисунок 3.19 – Структурна схема скоригованої системи

Структурна схема системи регулювання наведена на рисунку 3.19, на якому $H_k(p)$ – передавальна функція коригувальної ланки.

Передавальна функція (3.74) являє собою три послідовно з'єднані апериодичні ланки зі сполучними частотами

$$f_1 = \frac{1}{2\pi T_1} = 10 \text{ Гц}, \quad f_2 = \frac{1}{2\pi T_2} = 100 \text{ Гц}, \quad f_3 = \frac{1}{2\pi T_3} = 1000 \text{ Гц}.$$

Фазова частотна характеристика згідно із (2.154) визначається виразом

$$\varphi_3(f) = -\arctg \frac{f}{f_1} - \arctg \frac{f}{f_2} - \arctg \frac{f}{f_3}, \quad (3.75)$$

де f – поточна частота.

На рисунку 3.20 наведені частотні характеристики синтезуємої системи автоматичного регулювання.

Для забезпечення заданої величини похибки згідно із (3.65) система повинна в області низьких частот мати коефіцієнт підсилення

$$L(0) = 20 \lg\left(\frac{1}{0,05} - 1\right) = 25,57 \text{ (дБ)}.$$

Приймаємо $L(0) = 26$ дБ. Наносимо на графіки частотних характеристик величину $L(0)$ і проводимо горизонтальну асимптоту.

Частота зрізу системи

$$f_3 = \frac{\lambda_\delta}{2t_{\Pi}} = \frac{2,25}{2 \cdot 30 \cdot 10^{-3}} = 37,5 \text{ (Гц)}.$$

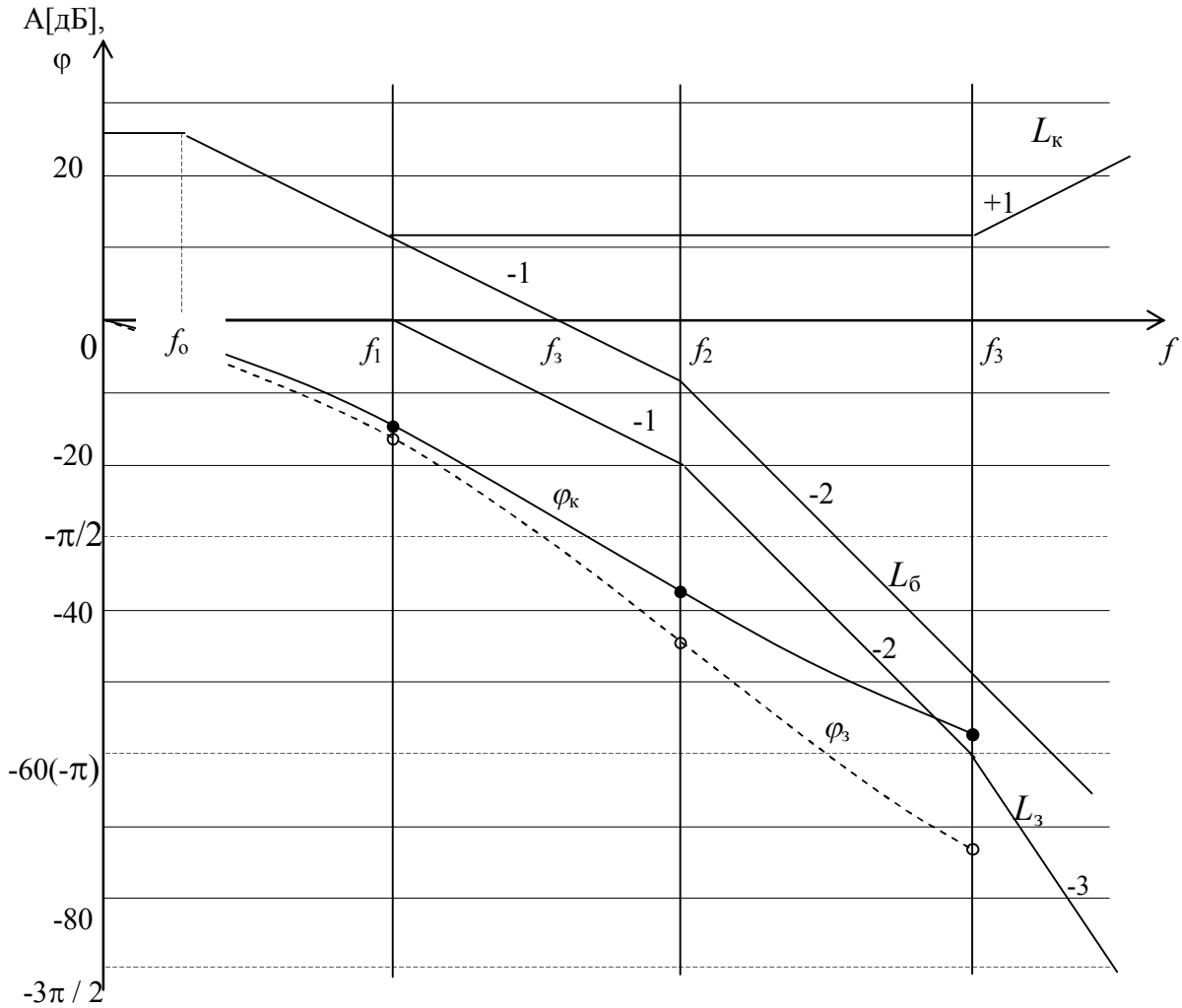


Рисунок 3.20 – Частотні характеристики розімкнутої САР

Наносимо на вісь частот точку, що відповідає частоті f_3 і проводимо через неї асимптоту із нахилом -20 дБ/дек (-1) .

Сполучні частоти області середніх частот

$$f_{\delta 2} \approx 3 \cdot f_3 = 112,5 \text{ Гц}, \quad f_{\delta 1} \approx \frac{37,5^2}{112,5} = 12,5 \text{ Гц}.$$

Вибираємо: $f_{\delta 1} = 10$ Гц, $f_{\delta 2} = 100$ Гц. У цьому випадку сполучні частоти f_1 і f_2 області середніх частот бажаної амплітудної характеристики L_6 співпадають із сполучними частотами f_1 і f_2 заданої частотної характеристики L_3 .

За сполучною частотою f_2 нахил асимптоти бажаної характеристики складає -40 дБ/дек (-2) . В області низьких частот асимптоту бажаної характеристики продовжимо, не змінюючи її нахилу до перетину із горизонтальною асимптотою на частоті $f_0 \approx 2,5$ Гц.

За сполучною частотою f_2 нахил асимптоти бажаної характеристики складає -40 дБ/дек (-2) . В області низьких частот асимптоту бажаної харак-

теристики продовжимо, не змінюючи її нахилу до перетину із горизонтальною асимптотою на частоті $f_o \approx 2,5$ Гц.

Фазова частотна характеристика скоригованої системи визначається як

$$\varphi_K = -\operatorname{arctg} \frac{f}{f_o} - \operatorname{arctg} \frac{f}{f_2}. \quad (3.76)$$

Виконавши вирішення рівняння (3.75) із використанням рисунка 3.20 одержуємо асимптотичну амплітудно-частотну характеристику L_K коригувальної ланки за якою записуємо передавальну функцію

$$H_K(p) = \frac{K(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}{(T_o p + 1)}, \quad (3.77)$$

де K – коефіцієнт підсилення при $f = 0$.

За бажаною асимптотичною амплітудно-частотною характеристикою записуємо передавальну функцію скоригованої розімкнутої системи

$$W(p) = \frac{K}{(T_o p + 1)(T_2 p + 1)} = H_K(p)G(p), \quad (3.78)$$

де $T_o = 1/2\pi f_o$.

Ураховуючи (3.78), одержуємо передавальну функцію замкнутої системи автоматичного регулювання (рис. 3.19)

$$W(p) = \frac{K}{T_o T_2 p^2 + (T_o + T_2)p + K + 1}. \quad (3.79)$$

Для оцінки параметрів замкнутої системи в усталеному та перехідному режимах подаємо на її вхід східчастий сигнал

$$x(p) = \frac{1}{p}.$$

Зображення сигналу похибки системи

$$\Delta e(p) = \frac{1}{p} \left[1 - \frac{K}{T_o T_2 p^2 + (T_o + T_2)p + K + 1} \right]. \quad (3.80)$$

Застосувавши до (3.80) теорему (2.66) одержуємо вираз для усталеної величини похибки

$$\Delta e(\infty) = 1 - \frac{K}{1 + K} = 0,048.$$

Зображення перехідної функції системи регулювання

$$H(p) = \frac{K}{p[T_o T_2 p^2 + (T_o + T_2) + K + 1]} \quad (3.81)$$

Подаємо вираз (3.81) у такому вигляді

$$H(p) = \frac{K}{1+K} \cdot \frac{1}{p(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)}, \quad (3.82)$$

де $T^2 = \frac{T_o T_2}{1+K}$, $2\xi T = \frac{T_2 + T_o}{1+K}$.

Тоді згідно із (2.121) оригінал перехідної функції описується наступним виразом

$$h(p) = \frac{K}{1+K} \left\{ 1 + e^{-\frac{\xi}{T} t} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\frac{t}{T} \sqrt{1-\xi^2}\right) - \cos\left(\frac{t}{T} \sqrt{1-\xi^2}\right) \right] \right\}. \quad (3.83)$$

На рисунку 3.21 представлені результати розрахунку перехідного процесу. Аналіз одержаних результатів розрахунків усталеного і перехідного режимів свідчить про те, що спроектована система відповідає заданим вимогам.

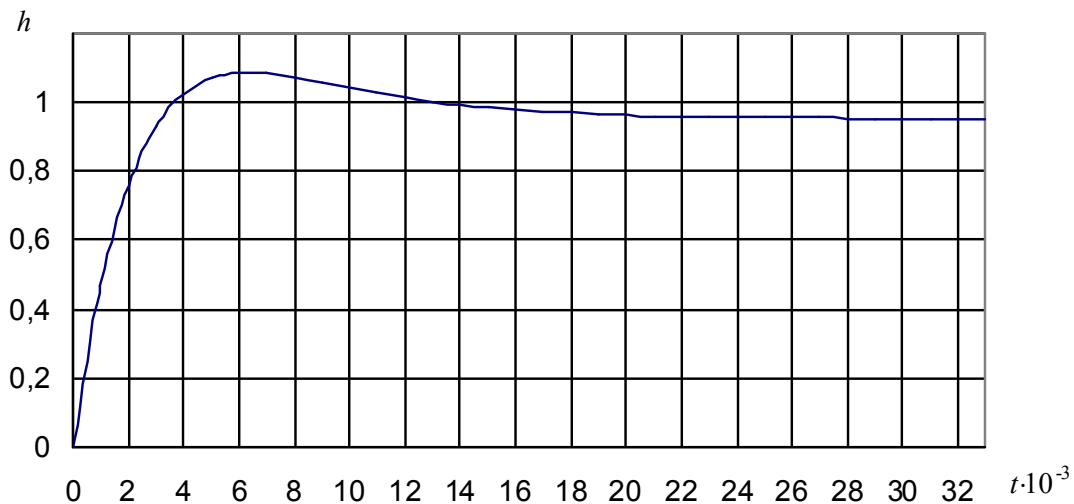


Рисунок 3.21 – Графік перехідного процесу

Схемна реалізація передавальної функції коригувальної ланки (3.77) наведена на рисунку 3.22.

Схема являє собою послідовне з'єднання аперіодичної і двох неідеальних диференційних ланок (див. п. 2.6.4). На DA1 побудована аперіодична ланка із сталою часу $T_o = R_2 C_1 = 1/2\pi f_o$ і коефіцієнтом підсилення $K = R_2/R_1 = 20$. Вибираємо $R_1 = 10$ кОм, тоді $R_2 = 200$ кОм. Ємність конденсатора $C_1 = T_o/R_2 = 1$ мкФ.

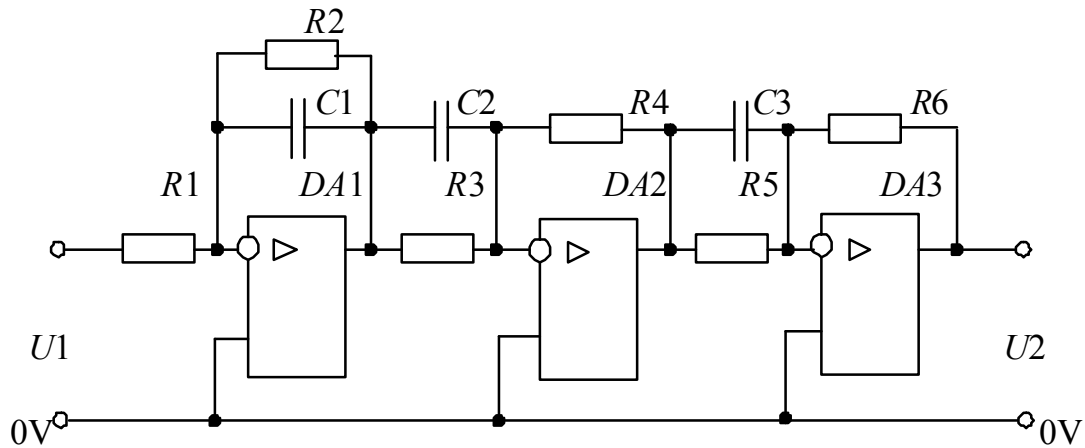


Рисунок 3.22 – Схема передавальної функції корегувальної ланки

На $DA2$ побудована неідеальна диференційна ланка із сталою часу $T_1 = R_3 C_2 = 0,0159$ с. Вибираємо $R_3 = R_4 = 30$ кОм, тоді $C_2 = T_1 / R_3 = 0,53$ мкФ.

На $DA3$ реалізована передавальна функція неідеальної диференційної ланки із сталою часу $T_3 = R_5 C_3 = 0,00159$ с. Вибираємо $R_5 = R_6 = 30$ кОм, тоді $C_3 = T_3 / R_5 = 5000$ пФ.

Питання та завдання для самоперевірки

1. Умова стійкості замкнутої САР за Найквістом.
2. Якими повинні бути корені стійкої неперервної замкнутої САР?
3. Як визначається ЛАХ коригувальної ланки?
4. Критерій стійкості Рауса – Гурвіця.
5. Умови стійкості замкнутої САР за Михайловим.
6. Коли система автоматичного регулювання є стійкою?
7. Перелічіть шляхи підвищення точності систем автоматичного регулювання.
8. На які чотири групи, в залежності від властивостей системи автоматичного регулювання, можна розділити перехідні процеси?
9. Як виконується послідовна корекція системи?
10. Як виконується паралельна корекція системи?
11. Як виконується оцінка якості системи автоматичного регулювання?
12. Що таке коригувальна ланка?
13. За допомогою яких методів можна визначити показники якості перехідних процесів?
14. Хто є засновником теорії стійкості?
15. Як визначається запас стійкості системи за коефіцієнтом передачі?
16. Як визначається запас стійкості системи за фазовим зсувом?
17. Як впливає низькочастотна область ЛАХ на похибку регулювання?
18. Як впливає область середніх частот ЛАХ на динамічні характеристики системи?

4 ІМПУЛЬСНІ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ

4.1 Визначення імпульсної системи

4.1.1 Види імпульсної модуляції. Параметри імпульсного елемента

Характерною особливістю імпульсної системи є те, що хоча б один із її сигналів піддається квантуванню. Квантований у часі сигнал за допомогою імпульсної модуляції перетворюється в послідовність імпульсів, яка діє на неперервну частину системи. Процес квантування і імпульсної модуляції здійснюється імпульсним елементом. Імпульсний елемент (рис. 4.1) перетворює неперервний вхідний сигнал $x(t)$ у послідовність модульованих імпульсів. Основними параметрами імпульсної послідовності є амплітуда імпульсу A , тривалість (ширина) імпульсу $t_u = \gamma T$, положення імпульсу αT у середині періоду дискретності T (зсув у часі або фаза імпульсу) та період дискретності (повторення) імпульсів T . Залежно від того який із параметрів імпульсної послідовності змінюється, розрізняють такі види модуляції: амплітудно-імпульсну (АІМ), широтно-імпульсну (ШІМ), часову імпульсну модуляцію (ЧІМ). Розрізняють також і характер модуляції залежно від того, змінюється чи остається незмінним модульований параметр імпульсної послідовності за час існування імпульсу. Якщо модульований параметр не змінюється, то здійснюється імпульсна модуляція другого роду АІМ-2 [12]. Якщо модульований параметр за час існування імпульсу змінюється за законом модулювальної функції $x(t)$, то такий вид модуляції називається імпульсною модуляцією першого роду – АІМ-1.

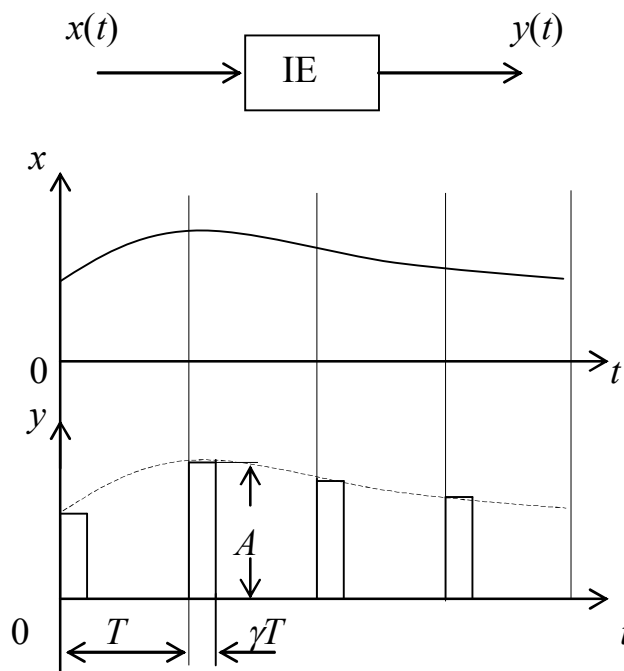


Рисунок 4.1 – Амплітудно-імпульсна модуляція неперервного сигналу

Імпульсні елементи залежно від виду імпульсної модуляції поділяються на амплітудні, широтні й часові імпульсні елементи відповідно першого та другого роду. Імпульсний елемент характеризується наступними параметрами.

Коефіцієнт підсилення k_i імпульсного елемента визначається як результат ділення його вихідного сигналу на вхідний у відповідний дискретний (тактовий) момент часу nT

$$k_i = \frac{y[nT]}{x[nT]}. \quad (4.1)$$

Наприклад, коефіцієнт підсилення амплітудного елемента другого роду (АІМ-2)

$$k_i = \frac{A[nT]}{x[nT]}, \quad (4.2)$$

де $A[nT]$ – амплітуда імпульсу в n - тактовий момент;

$x[nT]$ – амплітуда неперервного вхідного сигналу імпульсного елемента в n – тактовий момент.

Інтервал дискретності (інтервал повторювання імпульсів)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (4.3)$$

де ω_0 – частота повторення імпульсів.

Тривалість імпульсів

$$t_i = \gamma T, \quad (4.4)$$

де $\gamma = \frac{t_i}{T}$ – відносна тривалість імпульсу.

Форма імпульсу $S(t)$ може бути прямокутною, синусоїдальною, експонентною і тощо (рис. 4.2).

Характеристика імпульсного елемента – залежність величини модульованого параметра вихідної послідовності від відповідних значень вхідної величини в тактові моменти часу (рис. 4.3). На лінійній частині крутизна характеристики імпульсного елемента дорівнює коефіцієнту підсилення імпульсного елемента (4.2) для малих приростів значень вхідного сигналу.

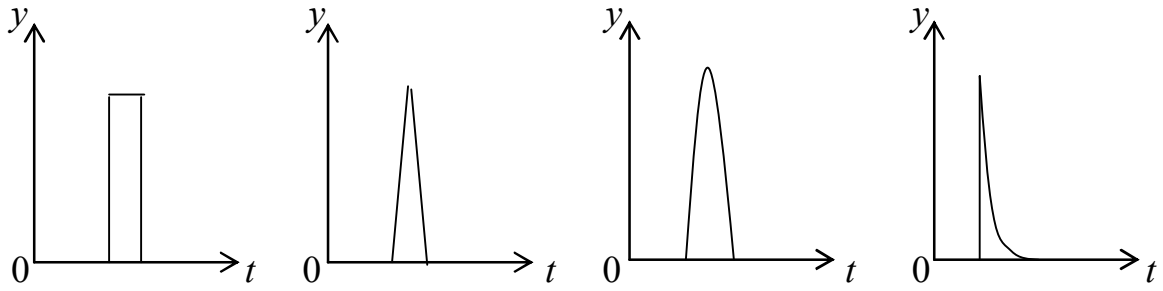


Рисунок 4.2 – Форми вихідного сигналу імпульсного елемента

Імпульсні елементи різноманітні за конструкцією: механічні, електро-механічні, електронні і тощо. В якості імпульсного елемента може бути простий ключ (рис. 1.15) або достатньо складний електронний пристрій (рис. 1.16). Найбільш поширеними є амплітудні імпульсні елементи, які здійснюють амплітудно-імпульсну модуляцію першого або другого роду.

Розглянемо імпульсний елемент, що здійснює амплітудно-імпульсну модуляцію першого роду. Нехай згідно із рисунком 4.1 $x(t)$ це вхідна, а $y(t)$ – вихідна змінні імпульсного елемента. Позначимо через $\varpi_\phi(t)$ функцію, що характеризує форму вихідних імпульсів імпульсного елемента. Форма імпульсів може бути різноманітною при умові, що

$$\varpi_\phi(t) \equiv 0, \tag{4.5}$$

для $t < 0$ і $t < \gamma T$.

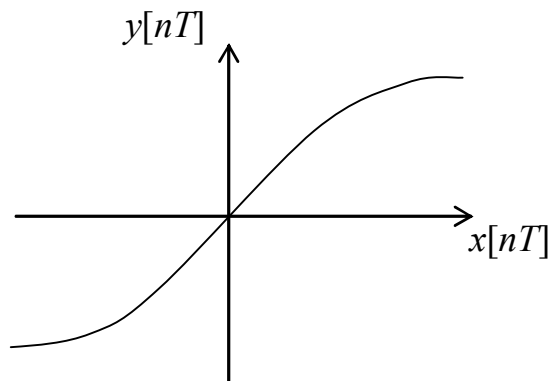


Рисунок 4.3 – Характеристика імпульсного елемента

Функція форми $\varpi_\phi(t)$ дає змогу досить просто записати вираз для вихідної величини імпульсного елемента. У разі довільного вхідного сигналу $x(t)$ вихідна величина імпульсного елемента для моментів часу

$$\gamma T \leq (\gamma + 1)T, \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{4.6}$$

описується рівнянням

$$y(t) = x(nT) \cdot \varpi_\phi(t - nT). \tag{4.7}$$

Із (4.7) витікає, що $y(t) \equiv 0$ для $t < nT$ і $t > (n + \gamma)T$. Тому вихідна величина імпульсного елемента для довільних моментів часу

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot \varpi_{\phi}(t - n)T. \quad (4.8)$$

Аналіз виразу (4.8) показує, що в його правій частині фігурує не функція $x(t)$, а її дискретні значення $x(nT)$. Це засвідчує те, що імпульсний елемент реагує не на весь вхідний сигнал, а тільки на його величину в дискретні моменти часу nT . Тобто імпульсний елемент виділяє із неперервного вхідного сигналу $x(t)$ його значення в дискретні моменти часу. Інформація про поведінку сигналу $x(t)$ у проміжках між моментами $t = nT$ відсутня у вихідному сигналі $y(t)$ імпульсного елемента. Вихідний сигнал імпульсного елемента $y(t)$ буде однаковим для різних сигналів $x(t)$ у яких співпадають значення в тактові моменти часу nT імпульсного елемента (рис. 4.4).

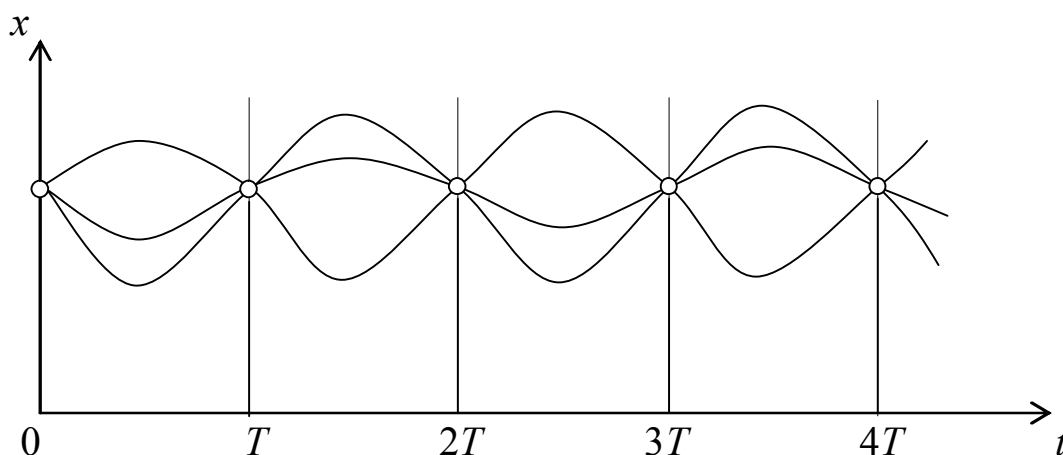


Рисунок 4.4 – Перетворення неперервного сигналу імпульсним елементом

Імпульсний елемент функція форми якого є одиничною δ -функцією називається ідеальним імпульсним елементом. Вихідна величина ідеального імпульсного елемента являє собою послідовність модульованих по «площі» δ -функцій (рис. 4.5)

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT). \quad (4.9)$$

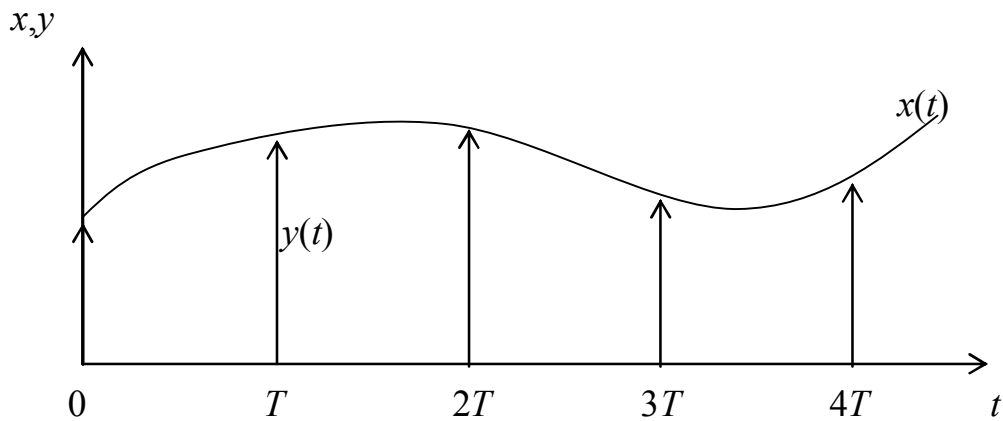


Рисунок 4.5 – Вхідний і вихідний сигнали ідеального імпульсного елемента

Реального фізичного змісту ідеальний імпульсний елемент не має, але є корисною математичною абстракцією. Для моделювання реального імпульсного елемента, що формує на своєму виході імпульси із функцією форми $\varpi_{\phi}(t)$, послідовно із ідеальним імпульсним елементом включають формувальний елемент. За допомогою формувального елемента із δ -функції формується реальний імпульс. Формувальним елементом називають динамічну ланку передавальна функція якої визначається як перетворення за Лапласом функції форми

$$W_{\phi}(p) = L\{\varpi_{\phi}(t)\}. \quad (4.10)$$

У таблиці 4.1 наведені приклади передавальних функцій формувальних елементів.

У разі послідовного з'єднання ідеального імпульсного і формуючого елементів (рис. 4.6) на вхід динамічної ланки із передавальною функцією (4.10) подається послідовність модульованих δ -функцій.

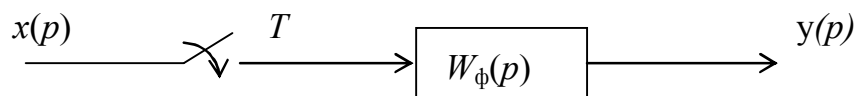


Рисунок 4.6 – Модель імпульсної системи з ідеальним імпульсним елементом

Із формули випливає, що функція $\varpi(t)$ є функцією ваги формувального елемента, тобто реакцією формувального елемента на δ -функцію. Так як ланка $W_{\phi}(p)$ є лінійною, то її реакція на сигнал $x(nT)$ визначається виразом

$$y(nT) = x(nT)\varpi_{\phi}(t - nT), \quad (4.11)$$

де ϖ_{ϕ} – функція ваги формувальної ланки.

Вираз (4.11) свідчить про те, що для вихідної величини структурної схеми зображеної на рисунку 4.6 є справедливою формула (4.8).

Таблиця 4.1– Приклади передавальних функцій формуючих елементів

№ п/п	Часова діаграма	Імпульсна перехідна характеристика	Передавальна функція
1.		$\varpi_{\phi}(t) = A[1(t) - 1(t - \gamma T)]$	$W(p) = A \frac{1 - e^{-\gamma T p}}{p}$
2.		$\varpi_{\phi}(t) = A[1(t) - 1(t - T)]$	$W(p) = A \frac{1 - e^{-T p}}{p}$
3.		$\varpi_{\phi}(t) = e^{-at}[A \cdot 1(t) - A_1 \cdot 1(t - \gamma T)],$ $A_1 = A e^{-a \gamma T}$	$W(p) = \frac{A}{p + a} [1 - e^{-\gamma T (a + p)}]$
4.		$\varpi_{\phi}(t) = A[1(t) - 2 \cdot 1(t - \frac{\gamma}{2} T) + 1(t - \gamma T)]$	$W(p) = \frac{A}{p} (1 - e^{-\frac{\gamma}{2} T p})^2$

Із приведеного випливає, що реальний імпульсний елемент, який здійснює амплітудно-імпульсну модуляцію другого роду, можна замінити еквівалентним послідовним з'єднанням ідеального імпульсного і формувального елементів [12].

4.1.2 Дискретний фільтр

Дискретний фільтр здійснює зміну закону модуляції послідовності входних ідеальних імпульсів, не змінюючи дискретної природи сигналів. Структурна схема дискретного фільтра складається із неперервної ланки із передавальною функцією $D(p)$ і двох ідеальних імпульсних елементів на її вході й виході (рис. 4.7, а).

Імпульсні елементи T_1 і T_2 синхронно і синфазно квантують неперервні сигнали $x(t)$ і $y(t)$. На виході неперервної ланки $D(p)$ діє модульована сигналом $x(t)$ послідовність δ -функцій $x^*(t)$ (рис. 4.7, б).

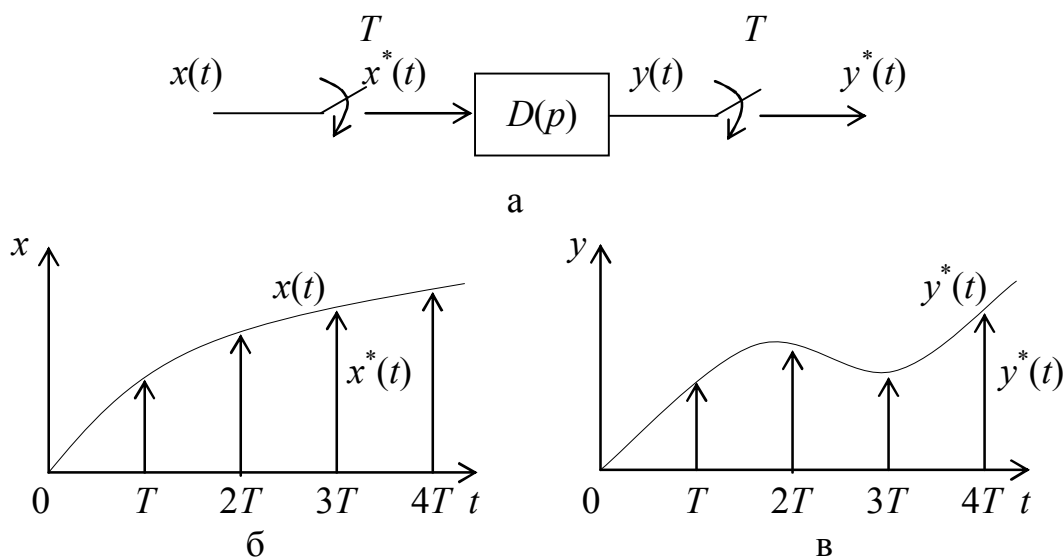


Рисунок 4.7 – Перетворення сигналів в імпульсній системі

Дискретний вихідний сигнал $y^*(t)$ (рис. 4.7, в) є результатом квантування імпульсним елементом T_2 вихідного сигналу $y(t)$ ланки $D(p)$.

4.1.3 Екстрополятори

Екстрополятор призначається для перетворення модульованої послідовності δ -функцій в неперервну функцію. Екстрополяція полягає в запам'ятовуванні кожного значення дискретного сигналу на період дискретності T . Таке запам'ятовування може бути реалізовано шляхом перетворення вихідних імпульсів ідеального імпульсного елемента в імпульси, тривалість яких дорівнює періоду дискретності. У такому разі екстрополюючий при-

стрій являє собою формувальний елемент, передавальна функція якого ви- значається виразом (4.10)

$$W(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}. \quad (4.12)$$

Екстрополятор із передавальною функцією (4.12) часто називають ек- строполятором (фіксатором) першого порядку. Структурна схема імпульс- ної системи із екстрополятором (4.12) наведена на рисунку 4.8, а.

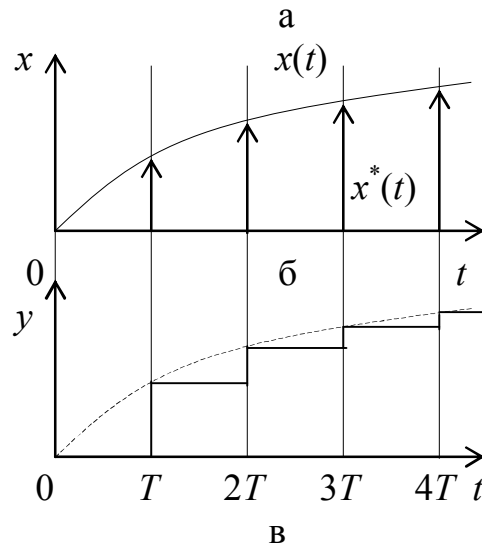
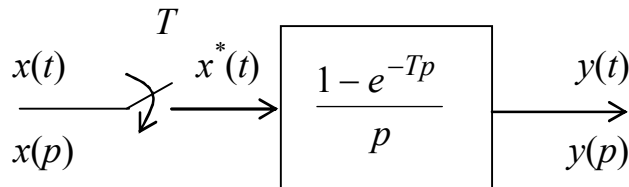


Рисунок 4.8 – Імпульсна система з екстрополятором

Діаграми сигналів, що діють в даній імпульсній системі наведені на рисунку 4.8, б і в.

4.2 Математичний опис імпульсної системи

4.2.1 Пряме Z-перетворення

Розглянемо імпульсну систему, структурна схема якої наведена на рисунку 4.9.

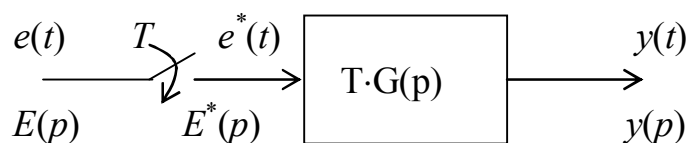


Рисунок 4.9 – Узагальнена структурна схема імпульсної системи

Система складається із ідеального імпульсного елемента, період квантування якого T , та приведеної неперервної частини із передавальною функцією $G(p)$. Для вхідного сигналу $e(t) = 0$ при $t < 0$ на виході імпульсного елемента формується послідовність δ -функції модульованих $e(t)$

$$e^*(nT) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT)\delta(t - nT). \quad (4.13)$$

Для функції $e(t)$, що існує при $t \geq 0$, існує дискретне перетворення Лапласа яке визначається у такий спосіб [13–15]

$$E^*(p) = L\{e^*(t)\} = \frac{1}{2j\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} E(p) \frac{dp}{1 - e^{-T(p-p_i)}}. \quad (4.14)$$

Якщо неперервне перетворення за Лапласом вхідного сигналу $e(t)$ імпульсного елемента має вигляд

$$E(p) = \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (4.15)$$

де $B(p)$ має лише прості корені p_i , то інтеграл (4.14) можна подати у вигляді

$$E^*(p) = \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(p-p_i)}}, \quad (4.16)$$

де $B'(p_i) = \left. \frac{dB}{dp} \right|_{p=p_i}$.

Подамо вираз (4.16) у наступному вигляді

$$E^*(p) = \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-Tp} \cdot e^{Tp_i}}. \quad (4.17)$$

Із одержаного виразу випливає, що перетворення за Лапласом квантованого імпульсним елементом в часі вхідного сигналу є функцією тільки змінної e^{Tp} , оскільки другі члени являють собою постійні величини. Якщо у (4.17) ввести змінну $z = e^{Tp}$, то дискретне перетворення вхідного сигналу $e(t)$ стає раціональною функцією від z

$$E^*(z) = \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{Tp_i}}. \quad (4.18)$$

Вираз (4.18) називають z -перетворенням функції $e(t)$.

Аналіз виразу (4.13) показує, що розмірність сигналів $e(t)$ і $e^*(nT)$ різниться на C^{-1} , оскільки в сигналі $\delta(t-nT)$ одиничні площинки окремих δ -функцій усереднюються на інтервалі дискретності T . Для відновлення розмірності та придання імпульсному елементу одиничного коефіцієнта передачі введемо в структурну схему пропорційну ланку із коефіцієнтом передачі T .

Приклад 4.1 Одержати z -перетворення функції

$$E(p) = \frac{1}{p(p+a)}, \text{ де } a = \text{const.}$$

Поліном чисельника заданої $A(p) = 1$. Поліном знаменника $B(p) = p(p+a)$.

Поліном $B(p)$ має два корені $p_1 = 0$ і $p_2 = -a$. Похідна полінома знаменника $B'(p) = 2p + a$. Застосувавши до заданої функції формулу (4.18) і виконавши перетворення, одержуємо

$$E^*(z) = \frac{z}{a} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-e^{-aT}} \right).$$

У таблиці 4.1 наведені z -перетворення найбільш поширених функцій.

4.2.2 Властивості z -перетворення

Розглянемо ряд властивостей z -перетворення.

Властивість 1. Лінійність функції. Якщо функція $f(t)$ має z -перетворення помножена на константу a , то є справедливим вираз

$$Z\{a \cdot f(t)\} = a \cdot f^*(z). \quad (4.19)$$

Якщо функція $f(t)$ являє собою суму $f_i(t)$ функцій

$$f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t),$$

то її z -перетворення має вигляд

$$f^*(z) = \sum_{i=1}^n f_i^*(z). \quad (4.20)$$

Властивість 2. Перетворення добутку функцій. Якщо задані функції $f_1(t)$ і $f_2(t)$, то z -перетворення їхнього добутку визначається як

$$Z\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = f_1 f_2^*(z). \quad (4.21)$$

При цьому необхідно пам'ятати, що

$$f_1 f_2^*(z) \neq f_1^*(z) \cdot f_2^*(z).$$

Властивість 3. Зсув у часі. Якщо функція $f(t)$ має z -перетворення

$$Z\{f(t)\} = f^*(z),$$

то z -перетворення зсунутої на n -періодів дискретної функції одержують як

$$Z\{f(t - nT)\} = z^{-n} f^*(z) \quad (4.22)$$

і

$$Z\{f(t + nT)\} = z^n \left[f^*(z) - \sum_{i=0}^{n-1} f(iT) \cdot z^i \right]. \quad (4.23)$$

Із властивостей 1 і 3 можна зробити такі висновки.

Висновок 1. Різниця між двома імпульсними послідовностями, що зсунуті між собою на один інтервал дискретності, має таке z -перетворення

$$Z\{f(t) - f(t - nT)\} = (1 - z^{-1}) \cdot f^*(z). \quad (4.24)$$

Висновок 2. Z -перетворення суми двох функцій, що мають між собою зсув на один тактовий інтервал, визначається як

$$Z\{f(t) + f(t - nT)\} = (1 + z^{-1}) \cdot f^*(z). \quad (4.25)$$

Властивість 4. Зміна масштабу в Z області. Якщо функція $f(t)$ має z -перетворення, то її добуток з експонентою $e^{\pm a \cdot t}$ викликає зміну масштабу в Z -площині

$$Z\{e^{at} \cdot f(t)\} = f^*[e^{-\alpha T} z], \quad (4.26)$$

$$Z\{e^{-at} \cdot f(t)\} = f^*[e^{\alpha T} z]. \quad (4.27)$$

Властивість 5. Визначення кінцевого значення. Якщо функція $f(t)$ має z -перетворення $f^*(z)$, то кінцеве значення функції ($f(t = \infty)$) одержують як

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z-1}{z} \cdot f^*(z) \right]. \quad (4.28)$$

Властивість 6. Визначення початкового значення. Якщо функція $f(t)$ має z -перетворення $f^*(z)$, то початкове значення функції ($f(t = 0)$) одержують як

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} f^*(z). \quad (4.29)$$

Властивість 7. Диференціювання z -перетворення. Якщо функція $f(t)$ має z -перетворення $f^*(z)$, то справедливе співвідношення

$$Z\{n \cdot f(nT)\} = -z \frac{df^*(z)}{dz}. \quad (4.30)$$

Властивість 8. Z -перетворення згортки двох функцій. Якщо функції $f_1(t)$ і $f_2(t)$ мають z -перетворення $f_1^*(z)$ і $f_2^*(z)$, то z -перетворення згортки оригіналів одержують як

$$Z\left\{ \sum_{i=0}^n f_1(iT) \cdot f_2[(n-i)T] \right\} = f_1^*(z) \cdot f_2^*(z). \quad (4.31)$$

4.2.3 Реакція приведеної неперервної частини на послідовність δ -функцій

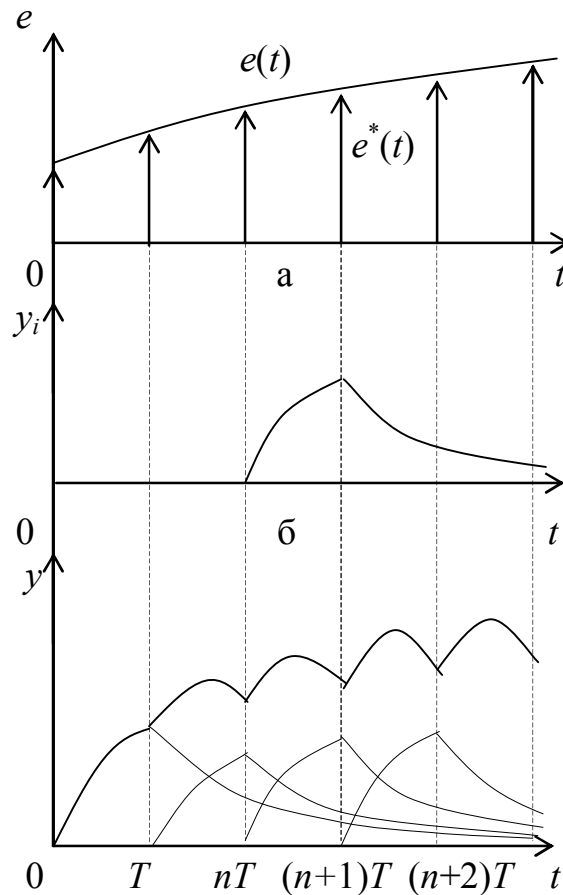
Згідно із рисунку 4.9 на приведену до імпульсного елемента неперервну частину із передавальною функцією $G(p)$ діє послідовність модульованих δ -функцій (4.13), що показана на рисунку 4.10, а. Реакція приведеної неперервної частини на δ -функцію, що діє в n -й момент часу (рисунку 4.10, б) визначається як

$$y_n(t) = e(nT) \cdot \varpi_{nn}(t - nT), \quad t \geq nT, \quad (4.32)$$

де ϖ_{nn} – функція ваги приведеної неперервної частини.

Повний вихідний сигнал $y(t)$ який одержують шляхом розрахунку суми всіх складників y_n , що діють на n -тому інтервалі дискретності, показано на рисунку 4.10, в. Так для $nT \leq t \leq (n+1)T$

$$y(t) = \sum_{i=0}^n e(iT) \cdot \varpi(t - iT). \quad (4.33)$$



В

Рисунок 4.10 – Формування вихідного сигналу імпульсної системи

Дискретні значення вихідного сигналу $y(nT)$ системи одержують із (4.20) підстановкою $t = nT$

$$y(nT) = \sum_{i=0}^n e(nT) \cdot \varpi[(n-i)T]. \quad (4.34)$$

Із (4.33) випливає, що приведена неперервна частина володіє фільтрувальними властивостями. Вона подавляє високочастотні складники вихідного сигналу імпульсного елемента. Унаслідок цього вихідний сигнал $y(t)$ є неперервною функцією. Ступінь подавлення високочастотних складників вихідного сигналу імпульсного елемента визначається властивостями передавальної функції $G(p)$ приведеної неперервної частини. Коли різниця між порядками поліномів знаменника та чисельника дорівнює одиниці, вихідний сигнал $y(t)$ приведеної неперервної частини характеризується наявністю розривів першого роду, тобто в тактові моменти часу лівосторонні й правосторонні значення не рівні між собою

$$y(nT)|_{-0} \neq y(nT)|_{+0}. \quad (4.35)$$

Для передавальної функції приведеної неперервної частини, у яких різниця між порядками поліномів знаменника і чисельника дорівнює двом і більше, маємо

$$y(nT)|_{-0} = y(nT)|_{+0} . \quad (4.36)$$

4.2.4 Передавальна функція імпульсної системи

У п. 4.2.3. зазначено, що вихідний сигнал наведеної на рисунку 4.9 імпульсної системи є неперервною функцією. Часто при дослідженнях імпульсної системи автоматичного регулювання є достатнім знання поведінки вихідного сигналу в тактові моменти часу імпульсного елемента. Для цього до виходу приведеної неперервної частини підключають фіктивний імпульсний елемент, як це показано на рисунку 4.11.

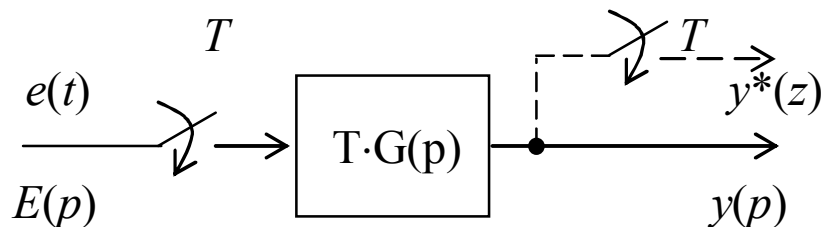


Рисунок 4.11 – Структура розімкнутої імпульсної системи

Фіктивний імпульсний елемент синхронно та синфазно квантує неперервний сигнал, що діє на виході системи. У такій системі як вхідний сигнал $e(p)$, так і вихідний сигнал приведеної неперервної частини згідно із (4.17) піддаються z -перетворенню. Зв'язок між вхідним і вихідним сигналами імпульсної системи записаний у формі z -перетворення має вигляд

$$y^*(z) = e^*(z) \cdot T \cdot G^*(z) , \quad (4.37)$$

де $e^*(z) = Z\{e(p)\}$, $G^*(z) = Z\{G(p)\}$.

Із (4.37) одержуємо передавальну функцію розімкнутої імпульсної системи

$$W^*(z) = \frac{y^*(z)}{x^*(z)} = T \cdot G^*(z) . \quad (4.38)$$

Тепер розглянемо замкнуту імпульсну систему автоматичного регулювання структурна, схема якої наведена на рисунку 4.12. Система в прямому каналі має імпульсний елемент із періодом дискретності T і приведену

неперервну частину із передавальною функцією $G(p)$. До виходу системи підключено фіктивний імпульсний елемент. Зв'язок між вхідним сигналом $x(p)$ і вихідним $y^*(z)$ можна одержати двома способами.

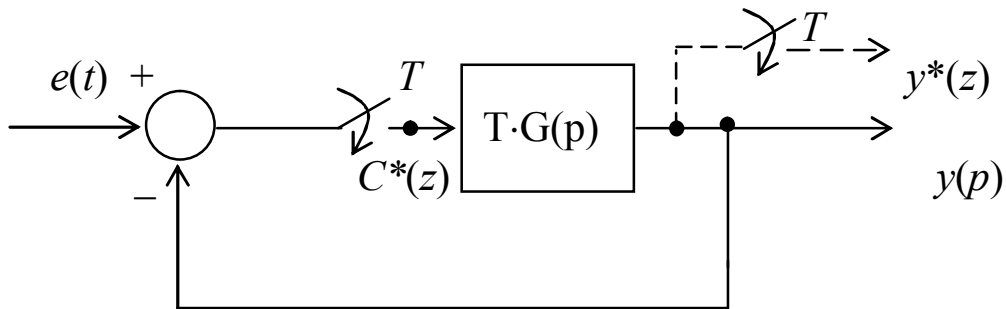


Рисунок 4.12 – Замкнута структура розімкнутої імпульсної системи

Спосіб 1. Записуємо вираз для похибки регулювання

$$e(p) = x(p) - y(p). \quad (4.39)$$

Сигнал похибки перетворюється імпульсним елементом у послідовність модульованих δ -функцій, тобто піддається z -перетворенню

$$e^*(z) = x^*(z) - y^*(z). \quad (4.40)$$

Під дією послідовності δ -функцій на виході приведеної неперервної частини формується сигнал

$$y(p) = e^*(z) \cdot T \cdot G(p) = [x^*(z) - y^*(z)]T \cdot G(p). \quad (4.41)$$

Вихідний сигнал ланки $G(p)$ квантується фіктивним імпульсним елементом, унаслідок чого одержуємо

$$y^*(z) = [x^*(z) - y^*(z)]T \cdot G^*(z). \quad (4.42)$$

Розв'язавши рівняння (4.41) відносно $y^*(z)$ одержуємо зв'язок між вхідним і вихідним сигналами замкнутої системи

$$y^*(z) = \frac{x^*(z) \cdot T \cdot G^*(z)}{1 + T \cdot G^*(z)}. \quad (4.43)$$

Далі із виразу (4.42) одержуємо передавальну функцію замкнутої системи

$$W^*(z) = \frac{y^*(z)}{x^*(z)} = \frac{T \cdot G^*(z)}{1 + T \cdot G^*(z)}. \quad (4.44)$$

Спосіб 2. Позначимо сигнал на виході імпульсного елемента як $C^*(z)$. У цьому випадку вихідний сигнал системи визначається як

$$y^*(z) = C^*(z) \cdot T \cdot G^*(z). \quad (4.45)$$

Вихідний сигнал імпульсного елемента $C^*(z)$ визначимо наступним чином. Починаємо рух від $x(p)$ у напрямку передачі сигналів в замкнутій системі. При цьому пам'ятаємо, що під час проходження сигналу через імпульсний елемент він піддається z -перетворенню. В результаті цього одержуємо

$$C^*(z) = x^*(z) - C^*(z) \cdot T \cdot G^*(z),$$

Звідки

$$C^*(z) = \frac{x^*(z)}{1 + T \cdot G^*(z)}. \quad (4.46)$$

Підставивши (4.46) у (4.45) і виконавши перетворення одержимо передавальну функцію замкнутої системи, що співпадає із (4.44).

Розглянемо більш складну імпульсну систему автоматичного регулювання структурна схема якої наведена на рисунку 4.13.

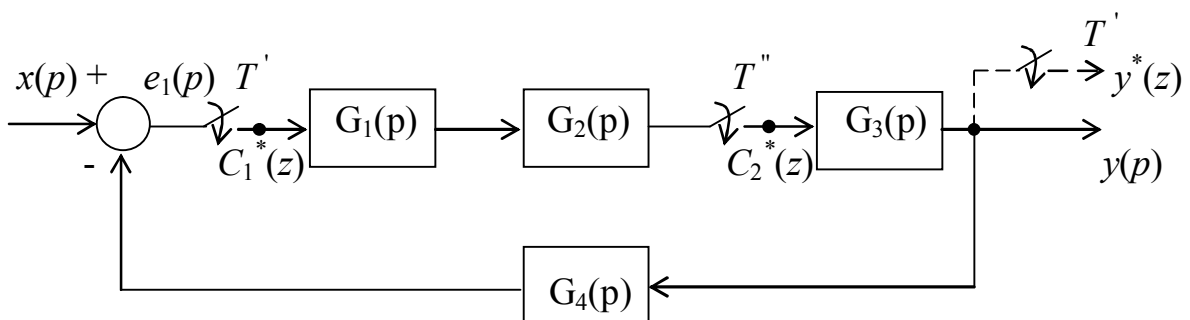


Рисунок 4.13 – Імпульсна система з двома імпульсними елементами

У прямому каналі передачі інформації якої діє два імпульсні елементи T' і T'' . Розглянемо властивості даної системи для різних випадків.

Випадок 1. Імпульсні елементи T' і T'' синхронні і синфазні.

Для одержання передавальної функції системи запишемо систему рівнянь

$$y^*(z) = C_2^*(z) \cdot G_3^*(z), \quad (4.47)$$

$$C_2^*(z) = \frac{x^*(z) \cdot G_1 G_2^*(z)}{1 + G_1 G_2^*(z) \cdot G_3 G_4^*(z)}, \quad (4.48)$$

де $G_1 G_2^*(z) = Z\{G_1(p) \cdot G_2(p)\}$, $G_2^*(z) = Z\{G_3(p)\}$,
 $G_3 G_4^*(z) = Z\{G_3(p) \cdot G_4(p)\}$.

Підставивши (4.48) у (4.47) і виконавши перетворення одержуємо передавальну функцію системи

$$W^*(z) = \frac{G_1 G_2^*(z) \cdot G_3(z)}{1 + G_1 G_2^*(z) \cdot G_3 G_4^*(z)}. \quad (4.49)$$

Випадок 2. Імпульсні елементи T' і T'' мають різні періоди дискретності. Нехай зв'язок між періодами дискретності визначається як

$$T'' = k \cdot T', \quad (4.50)$$

де k – коефіцієнт, що може мати значення менше або більше одиниці.

Згідно із (4.17) дискретне перетворення Лапласа вхідного сигналу $e_1(p)$ імпульсного елемента T' має вигляд

$$C_1^*(p) = \sum_{i=1}^n \frac{A_1(p_i)}{B_1'(p_i)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-T'p} \cdot e^{T'p_i}}, \quad (4.51)$$

де $A_1(p)$ і $B_1(p)$ – поліноми чисельника і знаменника $e_1(p)$;
 p_i – корені $B_1(p)$.

Аналогічно одержимо вираз для вихідного сигналу імпульсного елемента T''

$$C_2^*(p) = \sum_{j=1}^n \frac{A_2(p_j)}{B_2'(p_j)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-T''p} \cdot e^{T''p_j}}, \quad (4.52)$$

де $A_2(p)$ і $B_2(p)$ – поліноми чисельника і знаменника $e_2(p)$;
 p_j – корені $B_2(p)$.

Ураховуючи зв'язок між періодами дискретності імпульсних елементів (4.49), вираз (4.51) набуває вигляду

$$C_2^*(p) = \sum_{j=1}^n \frac{A_2(p_j)}{B_2'(p_j)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-kT'p} \cdot e^{kT'p_j}}. \quad (4.53)$$

Якщо позначити $z_1 = e^{T_1 p}$, а $z_2 = e^{T_2 p}$, то вирази для вихідних сигналів імпульсних елементів набувають вигляду

$$\begin{aligned} C_1^*(z_1) &= \sum_{i=1}^n \frac{A_1(p_i)}{B_1'(p_i)} \cdot \frac{z_1}{z_1 - e^{T_1 p_i}}, \\ C_2^*(z_2) &= \sum_{j=1}^n \frac{A_2(p_j)}{B_2'(p_j)} \cdot \frac{z_2}{z_2 - e^{kT_2 p_j}}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

де $z_2 = k \cdot z_1$.

У (4.54) z -перетворення вхідних сигналів імпульсних елементів записані відносно періоду дискретності T' . Аналогічно їх можна записати відносно періоду дискретності T'' .

Для одержання передавальної функції замкнутої системи автоматичного регулювання запишемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} y^*(z_1) &= G_2^*(z_2) \cdot G_3^*(z_1), \\ C_2^*(z_2) &= \frac{x^*(z_1) \cdot G_1 G_2^*(z_2)}{1 + G_1 G_2^*(z_2) \cdot G_3 G_4^*(z_1)}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Із (4.55) одержуємо

$$W^*(z_1) = \frac{G_1 G_2^*(z_2) \cdot G_3^*(z_1)}{1 + G_1 G_2^*(z_2) \cdot G_3 G_4^*(z_1)}. \quad (4.56)$$

Розглянутий метод одержання z -перетворення може бути розповсюджено і на другу кількість імпульсних елементів.

Випадок 3. Імпульсні елементи T' і T'' синхронні але не синфазні. Імпульсний елемент T'' має запізнення на n тактів відносно імпульсного елемента T' . Для одержання z -перетворення вихідного сигналу імпульсного елемента T'' внесемо запізнення $n T''$ у сигналі $e_2(p)$. Тоді згідно із (4.17) дискретне перетворення Лапласа оригіналу $e_2(p)$ має вигляд

$$C_2^*(p) = \sum_{j=1}^l \frac{A_2(p_j)}{B_2'(p_j)} \cdot \frac{e^{-nT'' p}}{1 - e^{-T'' p} \cdot e^{T'' p_j}}. \quad (4.57)$$

Або в формі z -перетворення

$$C_2^*(z) = z^{-n} G_2^*(z), \quad (4.58)$$

що відповідає (4.22).

Передавальна функція замкнутої системи набуває вигляду

$$W^*(z) = \frac{z^n \cdot G_1 G_2^*(z) \cdot G_3^*(z)}{1 + z^n \cdot G_1 G_2^*(z) \cdot G_3 G_4^*(z)}. \quad (4.59)$$

Розглянемо замкнуту імпульсну систему автоматичного регулювання, структурна схема якої наведена на рисунку 4.14.

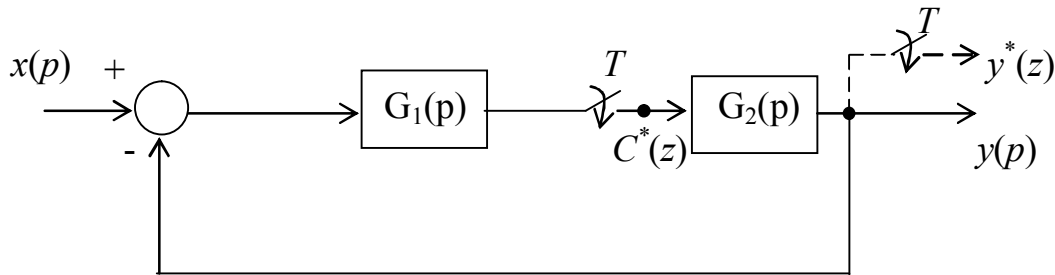


Рисунок 4.14 – САР з імпульсним елементом на виході неперервної ланки

Відмінністю цієї системи від попередніх є те, що імпульсний елемент квантує не саму похибку регулювання, а реакцію динамічної ланки $G_1(p)$ на сигнал похибки. Для одержання зв'язку між вхідним і вихідним сигналами системи запишемо систему рівнянь

$$y^*(z) = C^*(z) \cdot G_2^*(z), \quad (4.60)$$

$$C^*(z) = \frac{x G_1^*(z)}{1 + G_1 G_2^*(z)}, \quad (4.61)$$

де $x G_1^*(z) = Z\{x(p) \cdot G_1(p)\}$.

Підставивши (4.61) у (4.60) одержуємо

$$y^*(z) = \frac{x G_1^*(z)}{1 + G_1 G_1^*(z)}. \quad (4.62)$$

Аналіз одержаного виразу свідчить про те, що поліном чисельника являє собою z -перетворення добутку вхідного сигналу $x(p)$ і передавальної функції ланки $G_1(p)$. Із цього випливає, що для цієї імпульсної системи не можна в явному вигляді одержати передавальну функцію. Це є особливістю імпульсних систем автоматичного регулювання відносно неперервних, для яких завжди можна визначити передавальну функцію у вигляді (2.72). Але відсутність передавальної функції не є перешкодою для дослідження наведеної системи регулювання. Вираз (4.62) повністю описує за заданими передавальними функціям $G_1(p)$ і $G_2(p)$ статичні й динамічні характеристики системи.

4.2.5 Модифіковане z-перетворення

У попередніх параграфах показано, що пряме z-перетворення дозволяє одержати інформацію про сигнали в імпульсній системі в тактові моменти часу імпульсного елемента. У ряді випадків необхідно мати інформацію про значення функції $y(t)$ (рис. 4.11) не тільки в тактові моменти імпульсної системи T , а і в середині інтервалу дискретності. Для цього є достатнім розгляд у ті самі тактові моменти часу функцію $y(t + \varepsilon T)$, зміщену в бік випередження на відносний час ε у середині тактового інтервалу, як це показано на рисунку 4.15 [13].

Згідно із теоремою зсуву (2.55) перетворення за Лапласом такої функції визначається як

$$L\{y(t + \varepsilon T)\} = y(p) \cdot e^{\varepsilon T p}. \quad (4.63)$$

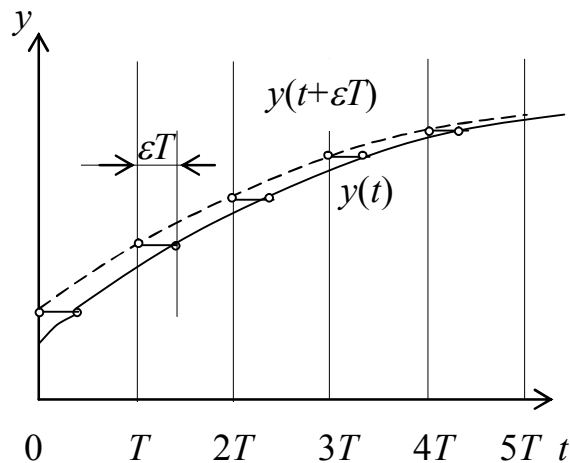


Рисунок 4.15 – Зміщення вихідного сигналу імпульсного елемента

Якщо $y(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$, то z-перетворення зміщеної функції (4.63) набуває вигляду

$$y^*(z, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \frac{A(p_i)}{B'(p_i)} \cdot \frac{z \cdot e^{\varepsilon T p_i}}{z - e^{T p_i}}, \quad (4.64)$$

де $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

Вираз (4.64) називається модифікованим z-перетворенням. У таблиці 4.2 наведені вирази для простого і модифікованого z-перетворення елементарних функцій. Для визначення z-перетворення більш складних функцій можна звернутись до [13,14] або розкласти складну функцію на суму простих ланок [9] із подальшим застосуванням таблиці 4.2.

Модифікованому z-перетворення є характерним залежність від двох змінних: комплексної змінної z і дійсної змінної ε . В інформаційному плані модифіковане z-перетворення $y^*(z, \varepsilon)$ не відрізняється від перетворення за Лапласом $y(p)$ неперервної функції $y(t)$, так як дозволяє, змінюючи ε від нуля до одиниці, одержати значення оригіналу в будь який момент часу. Однак форма подання інформації різна: замість неперервної функції часу $y(t)$, оригінал $y(nT, \varepsilon)$ є дискретною функцією.

У тих випадках, коли сигнал $e(t)$ (рис. 4.11) на вході імпульсного елемента має розриви першого роду в тактові моменти часу (рис. 4.16), застосування модифікованого z-перетворення є обов'язковим, навіть тоді коли не інтересує поведінка вихідного сигналу між тактовими інтервалами.

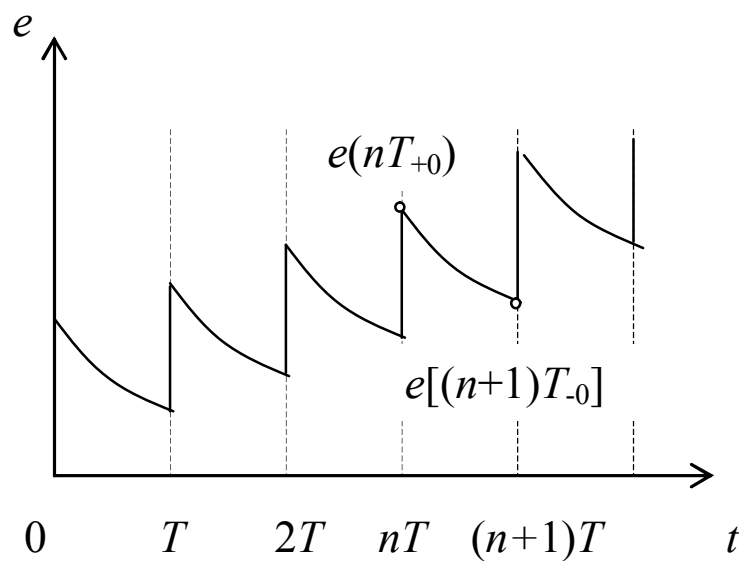


Рисунок 4.16 – Вхідний сигнал імпульсного елемента

Застосування в такому випадку простого z-перетворення дає вірний результат, коли імпульсний елемент реагує на правосторонні значення вхідного сигналу, так із порівняння (4.17) і (4.60) видно, що

$$y^*(z) = y^*(z, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = y^*(z, 0),$$

тобто

$$Z\{y(nT+0)\} = y^*(z, 0). \quad (4.65)$$

Таблиця 4.2 – Z-перетворення елементарних функцій

$G(p)$	$G^*(z)$	$G^*(z, \varepsilon)$
$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{z \cdot e^{-a \cdot \varepsilon \cdot T}}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{p^2}$	$\frac{z \cdot T}{(z-1)^2}$	$\frac{z \cdot T}{(z-1)^2} + \frac{z \cdot \varepsilon \cdot T}{z-1}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\frac{z \cdot T \cdot e^{-a \cdot T}}{(z-e^{-a \cdot T})^2}$	$z \cdot T \cdot e^{-a \cdot \varepsilon \cdot T} \left[\frac{\varepsilon}{z-e^{-a \cdot T}} + \frac{e^{-a \cdot T}}{(z-e^{-a \cdot T})^2} \right]$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{z}{b-a} \left(\frac{1}{z-e^{-a \cdot T}} - \frac{1}{z-e^{-b \cdot T}} \right)$	$\frac{z}{b-a} \left(\frac{e^{-a \cdot \varepsilon \cdot T}}{z-e^{-a \cdot T}} - \frac{e^{-b \cdot \varepsilon \cdot T}}{z-e^{-b \cdot T}} \right)$
$\frac{p+a_0}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{z}{b-a} \left[\frac{a_0-a}{z-e^{-a \cdot T}} - \frac{a_0-b}{z-e^{-b \cdot T}} \right]$	$\frac{z}{b-a} \left[\frac{(a_0-a) \cdot e^{-a \cdot \varepsilon \cdot T}}{z-e^{-a \cdot T}} - \frac{(a_0-b) \cdot e^{-b \cdot \varepsilon \cdot T}}{z-e^{-b \cdot T}} \right]$
$\frac{1}{p^2(p+a)}$	$\frac{z}{a} \left[\frac{1}{a(z-e^{-a \cdot T})} + \frac{T}{(z-1)^2} - \frac{1}{a(z-1)} \right]$	$\frac{z}{a} \left[\frac{e^{-a \cdot \varepsilon \cdot T}}{a(z-e^{-a \cdot T})} + \frac{T}{(z-1)^2} - \frac{a \cdot \varepsilon \cdot T - 1}{a(z-1)} \right]$

У тих випадках коли імпульсний елемент реагує на «лівосторонні» значення вхідного сигналу (наприклад, коли розрив є наслідком роботи самого імпульсного елемента) необхідно застосовувати модифіковане z-перетворення

$$Z_{\varepsilon} \{e(nT_{-0})\} = z^{-1} \cdot e^*(z, 1). \quad (4.66)$$

Фізичний зміст (4.66) полягає в такому: спрямовуючи $\varepsilon \rightarrow 1$, ми одержуємо «лівостороннє» значення вхідного сигналу імпульсного елемента на наступному $(n + 1)$ -му такті. Після помноження на z^{-1} точка відліку зсувається на один такт вліво.

Приклад 4.2 Одержати у формі модифікованого z-перетворення зв'язок між вхідним і вихідним сигналами імпульсної системи регулювання, структурна схема якої наведена на рисунку 4.17.

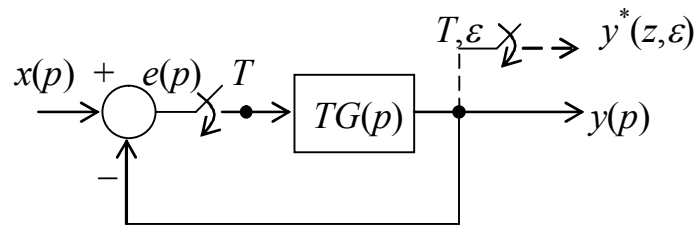


Рисунок 4.17 – Структурна замкнутої імпульсної схема САР

Для одержання інформації про поведінку вихідного сигналу згідно із визначенням модифікованого z-перетворення, уведемо фіктивний імпульсний елемент, що має відносне зміщення ε , як це показано на рисунку 4.17.

Із структурної схеми слідує, що вихідний сигнал ланки $G(p)$ піддається модифікованому z-перетворенню. Запишемо систему рівнянь, що визначають проходження сигналів у системі регулювання

$$y^*(z, \varepsilon) = C^*(z) \cdot T \cdot G^*(z, \varepsilon),$$

$$C^*(z) = \frac{x^*(z)}{1 + T \cdot G^*(z)}. \quad (4.67)$$

Із (4.67) одержуємо

$$y^*(z, \varepsilon) = \frac{x^*(z) \cdot G^*(z, \varepsilon)}{1 + T \cdot G^*(z)}. \quad (4.68)$$

Приклад 4.3 Одержати вираз для вихідного сигналу замкнутої імпульсної системи автоматичного регулювання. Структурна схема системи, що наведена на рисунку 4.18, має в прямому каналі інтегрувальну ланку

$$G(p) = \frac{1}{T_1 p}$$

і пропорційну ланку із коефіцієнтом передачі K .

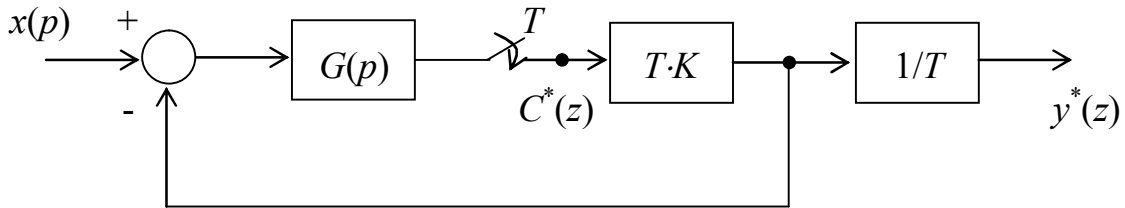


Рисунок 4.18 – САР з інтегральним регулятором

Вхідне діяння системи являє собою східчасту функцію

$$x(p) = \frac{1}{p}.$$

Зв'язок між вхідним і вихідним сигналами системи визначається у такій спосіб:

$$y^*(z) = K \cdot C^*(z);$$

$$C^*(z) = \frac{xG^*(z)}{1 + T \cdot K \cdot G^*(z)};$$

$$y^*(z) = \frac{xG^*(z) \cdot K}{1 + T \cdot K \cdot G^*(z)}. \quad (4.69)$$

Оскільки різниця між показниками ступенів поліномів знаменника та чисельника передавальної функції приведеної неперервної частини дорівнює одиниці, то її реакція на послідовність δ -функцій має розриви першого роду. Для фіксації імпульсним елементом «лівосторонніх» значень реакції запишемо вираз (4.69) у наступному вигляді

$$y^*(z) = \frac{xG^*(z) \cdot K}{1 + z^{-1} \cdot T \cdot K \cdot G^*(z,1)}, \quad (4.70)$$

$$\text{де } xG^*(z) = Z \left\{ \frac{1}{T_1 p^2} \right\} = \frac{T}{T_1} \cdot \frac{z}{(z-1)^2}, \quad G^*(z,1) = Z_{\varepsilon=1} \left\{ \frac{1}{T_1 p} \right\} = \frac{1}{T_1} \cdot \frac{z}{z-1}.$$

Після підстановки в (4.70) відповідних z -перетворень одержуємо вираз для вихідного сигналу системи

$$y^*(z) = K \frac{T}{T_1} \cdot \frac{z}{z^2 + z(K \frac{T}{T_1} - 2) + 1 - K \frac{T}{T_1}}. \quad (4.71)$$

Вираз (4.71) визначає характеристики системи при заданих величинах K і T_1 в усталеному і перехідному режимах.

4.2.6 Зворотне z -перетворення

Зворотній перехід із z області в часову область доцільно розглянути для модифікованого z -перетворення. Перехід від модифікованого до простого z -перетворення легко зробити підстановкою $\varepsilon = 0$.

Зворотне перетворення полягає в визначенні $y(nT)$ за відомим зображенням $y^*(z, \varepsilon)$. Зворотне z -перетворення може бути виконано трьома методами: методом відрахувань; методом розкладу в ряд Лорана; методом різницевого рівняння. Розглянемо перші два методи.

Метод вичитів. Цей метод базується на теоремі відтворення

$$y(nT) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} [y^*(z, \varepsilon) z^{n-1}], \quad (4.72)$$

де $y^*(z, \varepsilon) = \frac{N^*(z, \varepsilon)}{M^*(z)}$ – зображення вихідного сигналу системи.

Відрахування для простих полюсів z_i

$$\operatorname{Res} [y^*(z, \varepsilon) z^{n-1}] = \sum_{i=1}^n \frac{N^*(z_i, \varepsilon)}{M'(z_i)} z_i^{n-1}. \quad (4.73)$$

При наявності кратних полюсів в полюсі z_i визначається як

$$\lim_{z \rightarrow z_i} \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [y^*(z, \varepsilon) \cdot (z - z_i) z^{m-1}], \quad (4.74)$$

де m – порядок кратності полюсів.

Метод відрахувань дозволяє одержати аналітичний вираз для $y(nT)$ і знаходити значення оригіналу на будь-якому такті імпульсного елемента безпо-

середньо підстановкою номера тактового інтервалу. Недоліком цього методу є необхідність попередніх розрахунків коренів полінома $M^*(z)$.

Метод розкладу в ряд Лорана. Якщо $y^*(z, \varepsilon)$ подані у вигляді відношення двох поліномів функції z

$$y^*(z, \varepsilon) = \frac{N^*(z, \varepsilon)}{M^*(z)}, \quad (4.75)$$

при цьому поліноми чисельника і знаменника записані в канонічній формі, то шляхом ділення $N^*(z, \varepsilon)$ на $M^*(z)$ одержимо ряд Лорана. Коефіцієнти ряду Лорана відображають значення $y^*(nT, \varepsilon)$

$$y(nT) = y(0, \varepsilon) + y(1, \varepsilon) \cdot z^{-1} + y(2, \varepsilon) \cdot z^{-2} + y(3, \varepsilon) \cdot z^{-3} + \dots + y(n, \varepsilon) \cdot z^{-n}. \quad (4.76)$$

Перевагою даного метода над попереднім є те, що він не потребує розрахунків коренів полінома $M^*(z)$. Ця властивість у багатьох випадках є вирішальною. Недоліком метода є неможливість безпосереднього визначення $y^*(nT, \varepsilon)$ на бажаному тактовому інтервалі без розрахунків для всіх попередніх тактів. Операцію ділення поліномів для зменшення накопичення похибки потрібно виконувати із достатньо великою кількістю значущих цифр, округляючи результат лише після закінчення розрахунків потрібної кількості членів ряду.

Приклад 4.4 Визначити початкове та кінцеве значення перехідного процесу, а також розрахувати значення перехідного процесу на перших п'яти тактах для імпульсної системи автоматичного регулювання, що розглянута в прикладі 4.3. Перехідний процес розрахувати для наступних параметрів системи: $K=3$, $T_1=2T$.

Вираз (4.71) для вихідного сигналу після підстановки значень коефіцієнта передачі і сталих часу набуває вигляду

$$y^*(z) = \frac{1,5z}{z^2 - 0,5z - 0,5}.$$

Згідно із (4.29) початкове значення перехідного процесу

$$y(0T) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1,5z}{z^2 - 0,5z - 0,5} = 0.$$

Кінцеве значення перехідного процесу визначимо за формулою (4.28)

$$y(\infty T) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z-1}{z} \cdot \frac{1,5z}{z^2 - 0,5z - 0,5} \right] = 1.$$

Значення перехідного процесу на перших п'яти тактових інтервалах визначимо розкладом функції $y^*(z)$ у ряд Лорана

$$y(nT) = 1,5z^{-1} + 0,75z^{-2} + 1,125z^{-3} + 0,937z^{-4} + 1,031z^{-5} + \dots$$

Коефіцієнти при z ряду Лорана визначають значення вихідного сигналу системи автоматичного регулювання в тактові інтервали імпульсного елемента. Результати розрахунків у вигляді графіку перехідного процесу наведені на рисунку 4.19.

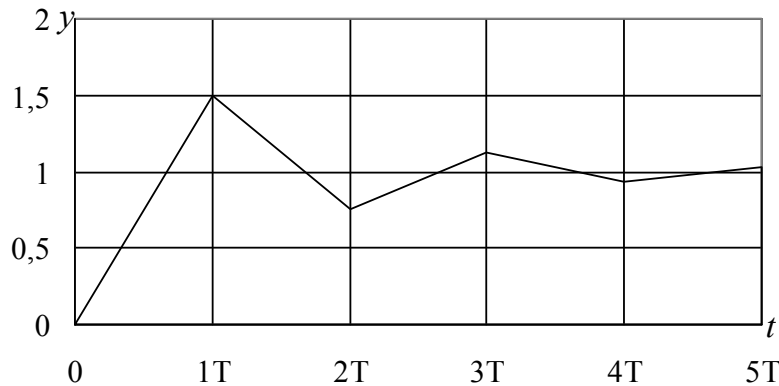


Рисунок 4.19 – Перехідний процес

4.3 Стійкість і якість імпульсних систем автоматичного регулювання

4.3.1 Визначення стійкості імпульсної системи

За аналогією до неперервної системи вираз для реакції $y(nT)$ імпульсної системи на вхідне діяння $x(t)$ можна подати у вигляді суми усталеного і перехідного складників

$$y(nT) = y_{уст}(nT, \varepsilon) + y_n(nT, \varepsilon). \quad (4.78)$$

Значення вихідної величини імпульсної системи можуть бути визначені за допомогою зворотного z -перетворення

$$y(nT, \varepsilon) = Z^{-1} \{ y^*(z, \varepsilon) \}. \quad (4.79)$$

Із математичного погляду визначення стійкості імпульсної системи зводиться до виконання умови

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(nT, \varepsilon) = 0. \quad (4.80)$$

Під час дослідженні стійкості неперервної системи відзначалось, що в стійкій системі автоматичного регулювання (п. 3.1.2) корені характеристичного рівняння повинні бути «лівими», а уявна вісь є границею стійкості.

Для визначення особливостей умови стійкості імпульсної системи автоматичного регулювання, у порівнянні із неперервною системою, розглянемо, що являє собою відображення p -площини на z -площину.

4.3.2 Відображення уявної осі p -площини на z -площину

Згідно із визначенням z -перетворення змінна z дорівнює

$$z = e^{Tp}, \quad (4.81)$$

де T – період дискретності імпульсного елемента.

Зі свого боку відомо, що $p = j\omega$. Із врахуванням цього вираз (4.81) набуває вигляду

$$z = e^{j\omega T}, \quad (4.82)$$

або згідно з формулою Ейлера

$$z = \cos \omega T + j \sin \omega T. \quad (4.83)$$

У разі мінні в (4.83) частоти ω від 0 до $2\pi/T$ (рис. 4.20, а) вектор z опи-сує в своїй площині коло одиничного радіусу (4.20, б). У процесі подальшому збільшенні ω , кола накладаються одне на одне, тобто для відображення мни-мої осі p -площини достатньо відобразити її відрізок, що визначається зміною частоти $0 \leq \omega \leq 2\pi/T$.

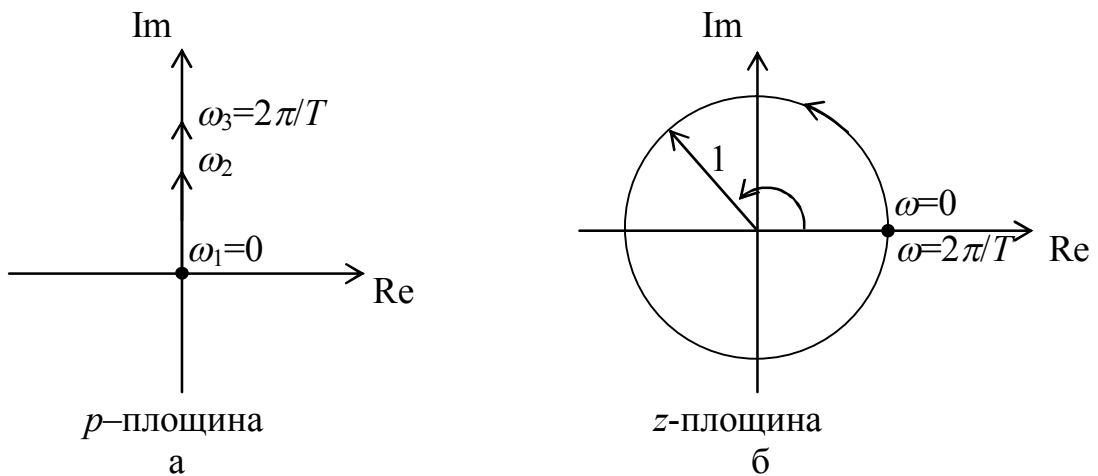


Рисунок 4.20 – Перетворення уявної осі p -площини на z -площину

Із розглянутого витікає, що уявна вісь p -площини на z -площині перетворюється в коло одиничного радіусу. На p -площині уявна вісь є границею стійкості системи, тоді границею стійкості імпульсної системи на z -площині є коло одиничного радіусу.

4.3.3 Відображення лівої половини p -площини на z -площину

На основі попередніх міркувань, для відображення лівої половини p -площини достатньо відобразити прямокутну область (рис. 4.21, а)

$$p = -a(\omega) + jb(\omega). \quad (4.84)$$

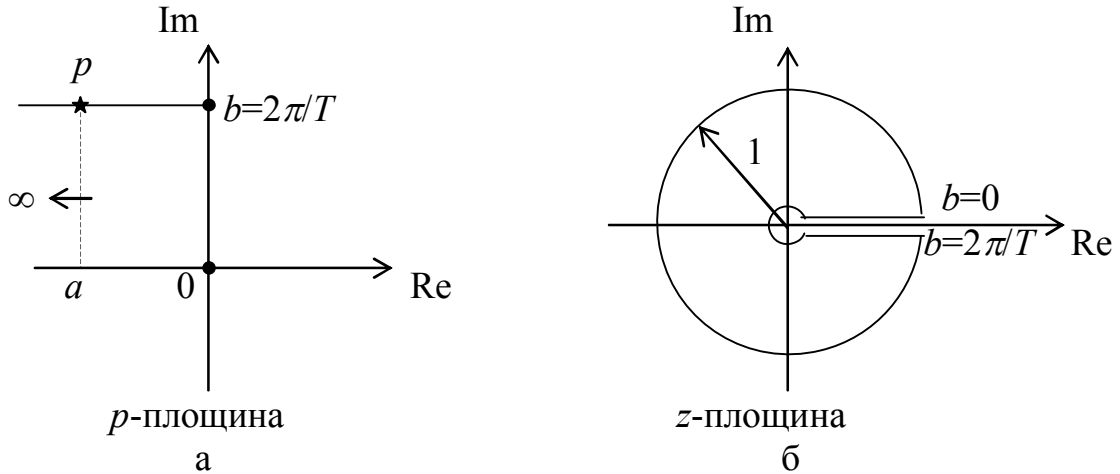


Рисунок 4.21 – Відображення лівої половини p -площини на z -площину

Тоді

$$z = e^{[-a(\omega) + jb(\omega)]T} = e^{-a(\omega)T} \cdot e^{jb(\omega)T}, \quad (4.85)$$

або в тригонометричній формі

$$z = e^{-a(\omega)T} [\cos b(\omega)T + j \sin b(\omega)T]. \quad (4.86)$$

При $a = 0$ вираз (4.86) збігається з (4.83), тобто при зміні частоти вектор z описує коло одиничного радіусу (рис. 4.21, б). Якщо $a \rightarrow \infty$, то $z \rightarrow 0$, як це показано на рисунку 4.21. Із (4.85) і рисунку 4.21 витікає, що для стійкості замкнутої імпульсної системи необхідно, щоб всі корені характеристичного рівняння, одержаного із (4.75)

$$M^*(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_m = 0$$

були розташовані в середині кола одиничного радіусу із центром на початку координат z -площини, тобто

$$\text{mod}[z_i] < 1. \quad (4.87)$$

4.3.4 Аналітична перевірка стійкості

У попередньому параграфі показано, що для стійкості замкнутої імпульсної системи автоматичного регулювання корені її характеристичного рівняння повинні бути по модулю меншими одиниці. Наприклад, для характеристичного рівняння першого порядку

$$a_0 z + a_1 = 0 \quad (4.88)$$

умовою стійкості буде $\left| \frac{a_1}{a_0} \right| < 1$.

Для характеристичного рівняння більш високого порядку кореневий метод дослідження ускладнюється. Для полегшення розв'язання даної задачі використовується застосування білінійного ϖ -перетворення

$$z = \frac{1 + \varpi}{1 - \varpi}, \quad (4.89)$$

$$\varpi = \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (4.90)$$

У результаті застосування білінійного перетворення коло одиничного радіусу на z -площині відображається на уявну вісь ϖ -площини. Унаслідок цього областю стійкості є ліва частина ϖ -площини. Це дає змогу для характеристичних рівнянь із ϖ -перетворенням застосовувати критерії стійкості неперервних систем.

Розглянемо, наприклад, характеристичне рівняння імпульсної системи другого порядку

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0, \quad a_0 > 0. \quad (4.91)$$

Унаслідок підстановки виразу (4.89) воно перетворюється в наступне

$$(a_0 - a_1 + a_2)\varpi^2 + 2(a_0 - a_2)\varpi + a_0 + a_1 + a_2 = 0. \quad (4.92)$$

На підставі критерій Рауса – Гурвіця (3.13) одержуємо умови стійкості

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 + a_2 &> 0, \\ 2(a_0 - a_2) &> 0, \\ a_0 + a_1 + a_2 &> 0. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Аналогічно можна одержати умови стійкості замкнутих імпульсних систем більш високих порядків. Система третього порядку, характеристичне рівняння якої

$$a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0, \quad a_0 > 0, \quad (4.94)$$

має наступні умови стійкості

$$\begin{aligned} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 &> 0, \\ 3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 &> 0, \\ 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 &> 0, \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &> 0, \\ 8(a_0^2 - a_3^2 - a_0 a_2 + a_1 a_3) &> 0. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Для системи четвертого порядку

$$a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 = 0,$$

Коефіцієнти перетвореного характеристичного рівняння

$$b_0 \varpi^4 + b_1 \varpi^3 + b_2 \varpi^2 + b_3 \varpi + b_4 = 0,$$

дорівнюють

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \\ b_1 &= 4(a_0 - a_4) + 2(a_1 - a_2), \\ b_2 &= 6(a_0 + a_4) - 2a_2, \\ b_3 &= 4(a_0 - a_4) + 2(a_3 - a_1), \\ b_4 &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4. \end{aligned} \tag{4.96}$$

Умови стійкості

$$\begin{aligned} b_0 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b_3 > 0, \quad b_4 > 0, \\ b_1 \cdot b_2 - b_0 \cdot b_3 > 0, \\ b_3(b_1 \cdot b_2 - b_0 \cdot b_3) - b_1^2 \cdot b_4 > 0. \end{aligned} \tag{4.97}$$

Для визначення стійкості імпульсної системи можливо застосування критерій Найквіста. Для цього застосовують передавальну функцію розімкнутої системи, що одержана у вигляді z або ϖ перетворення. В обох випадках годограф амплітудно-частотної характеристики розімкнутої системи не повинен охоплювати точку із координатами $(-1, j0)$. Під час використання передавальної функції $W^*(z)$ амплітудно-частотна характеристика є періодичною функцією із періодом $2\pi/T$.

4.3.5 Оцінка якості імпульсних систем

Якість імпульсної системи автоматичного регулювання за аналогією до неперервної оцінюють за точністю регулювання та запасом стійкості. Точність імпульсної системи оцінюють за величині похибки в усталеному режимі при типових вхідних діях. Так, для системи, структурна схема якої наведена на рисунку 4.12, похибка регулювання в, що приведена до тактових моментів імпульсного елемента визначається як

$$e^*(z) = \frac{x^*(z)}{1 + T \cdot G^*(z)}. \tag{4.98}$$

Із (4.98) випливає, що похибка регулювання залежить не тільки від властивостей системи, а й від виду вхідного діяння.

Усталену величину похибки можна одержати за допомогою (4.27)

$$e_{уст} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z-1}{z} \cdot e^*(z) \right]. \quad (4.99)$$

Запас стійкості імпульсної системи можна оцінити за виглядом кривої перехідного процесу при заданому типовому вхідному діянню або за величиною показника коливальності (рис. 3.12)

$$M_{\kappa} = \frac{h_{\max}}{h_{уст}}. \quad (4.100)$$

Для оцінки запасу стійкості за кривою перехідного процесу задають вхідне діяння у вигляді східчастої одиничної функції (1.27) або в вигляді одиничного імпульсу (1.31). Реакцію системи одержують у вигляді перехідної функції

$$h(nT) = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \cdot W^*(z) \right\}, \quad (4.101)$$

або у вигляді функції ваги

$$\varpi(nT) = Z^{-1} \left\{ W^*(z) \right\}, \quad (4.102)$$

де Z^{-1} – зворотне z -перетворення.

При використанні перехідної функції якість системи оцінюють по величині перегулювання (3.52). Допустима величина перегулювання визначається конкретним призначенням системи.

4.3.6 Процес кінцевої тривалості

Подання напівпровідникового перетворювача при малих відхиленнях керувального впливу у вигляді амплітудно-імпульсного модулятора [16–19], дає змогу при певних умовах реалізувати перехідні процеси кінцевої тривалості [20,24].

Дослідженню особливостей формування процесу кінцевої тривалості в системах регулювання з напівпровідниковими перетворювачами присвячено ряд робіт [17,19,24]. У [17] виконаний аналіз процесу кінцевої тривалості в системі із заданою функцією передачі наведеної безупинної частини і дана

методика розрахунку лівосторонніх і правобічних щодо тактових інтервалів значень перехідного процесу.

У [24], базуючись на аналізі перехідних процесів, формується перехідний процес кінцевої тривалості в системі з довільною функцією передачі наведеної безупинної частини. Досягається це шляхом корекції сигналу на вході імпульсного елемента засобами мікропроцесорного керування.

Однак при цьому залишається невирішеною завдання синтезу оптимальної передавальної функції наведеної безупинної частини, що дає змогу отримати фізично реалізований процес кінцевої тривалості. Таке завдання виникає, коли вихідна передавальна функція системи не відповідає вимогам оптимального перехідного процесу. Тут мається на увазі процес, який пов'язаний з точним рівністю нулю вільної складової через певну кількість тактових інтервалів.

На рисунку 4.22 наведена структурна схема досліджуваної системи автоматичного регулювання. Напівпровідниковий перетворювач (керований випрямляч або широтно-імпульсний перетворювач) при малих відхиленнях від стаціонарного стану поданий у вигляді ідеального імпульсного елемента з періодом квантування T . Регульовальна характеристика перетворювача характеризується коефіцієнтом передачі КІП. Фактор пульсації F [16,21,22] враховує дію пульсаційної складової вихідної напруги перетворювача на систему управління перетворювача.

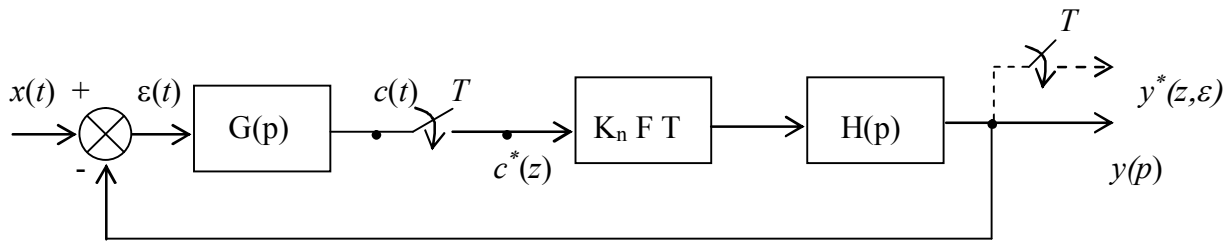


Рисунок 4.22 – Структурна схема імпульсної системи

Ланцюг навантаження перетворювача визначається видом передавальної функції $H(p)$. Властивості системи автоматичного регулювання залежать від передавальної функції регулятора $G(p)$, що реалізує необхідний закон регулювання.

Зв'язок між вхідним і вихідним сигналами, записаний у вигляді модифікованого z -перетворення, визначається виразом

$$y^*(z, \varepsilon) = \frac{z^{-1} \cdot xG^*(z) \cdot H^*(z, \varepsilon) \cdot K_n \cdot F \cdot T}{1 + z^{-1} \cdot K_n \cdot F \cdot T \cdot W^*(z, 1)}, \quad (4.103)$$

де $W^*(z, 1) = GH^*(z, 1)$ – модифіковане z -перетворення наведеної безупинної частини системи.

Вираз (4.103) є справедливим як для розривного, так і для безперервного сигналу $c(t)$ на вході імпульсного елемента. В обох випадках імпульсний елемент враховує лівобічні значення сигналу $c(t)$. У загальному вигляді вираз (4.103) для вихідного сигналу являє собою дробно-раціональну функцію від z

$$y^*(z, \varepsilon) = \frac{N^*(z)}{M^*(z)} = \frac{a_n z^n + a_{(n-1)} z^{n-1} + a_{(n-2)} z^{n-2} + \dots + a_o}{b_m z^m + b_{(m-1)} z^{m-1} + b_{(m-2)} z^{m-2} + \dots + b_o}, \quad (4.104)$$

причому $m > n$ і коріння характеристичного рівняння $M^*(z) = 0$ прості. У цьому випадку вихідний сигнал системи регулювання у часовій області являє собою степеневий ряд

$$y[nT] = c_o z^o + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n}, \quad (4.105)$$

коефіцієнти при z у якому дорівнюють значенням вихідного сигналу в тактові моменти імпульсного елемента. Ряд (4.105) отримано шляхом розкладання вираження (4.104) в ряд Лорана. Параметри коефіцієнтів ряду (4.105) залежать від положення на z -площині коренів характеристичного рівняння системи, що визначається видом безперервної частини системи.

Якщо параметри наведеної безперервної частини системи вибрати у такий спосіб, щоб у виразі (4.104)

$$b_{(m-1)} = b_{(m-2)} = \dots = b_o = 0, \quad (4.106)$$

то характеристичний поліном системи виглядає як

$$M^*(z) = b_m z^m, \quad (4.107)$$

а ряд від $y(z)$ стає кінцевим

$$y[nT] = \frac{1}{b_m} [a_n z^{n-m} + a_{(n-1)} z^{n-m-1} + a_{(n-2)} z^{n-m-2} + \dots + a_o z^{-m}] \quad (4.108)$$

Це означає, що перехідна функція загасає за кінцеве число періодів імпульсного елемента, рівних порядку характеристичного рівняння.

Уявімо передавальну функцію наведеної безупинної частини системи у вигляді суми елементарних ланок

$$W(p) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{p - p_i}, \quad (4.109)$$

де $A_i = \frac{N(p_i)}{M'(p_i)}$ коефіцієнт розкладання в полюсі p_i , $M'(p) = \frac{dM}{dp}$.

Застосувавши модифіковане z -перетворення до вираження (4.109), отримаємо

$$W^*(z, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n A_i \frac{z \cdot e^{-\varepsilon T p_i}}{z - e^{-T p_i}}. \quad (4.110)$$

Після підстановки виразу (4.110) характеристичне рівняння системи набуває вигляд

$$1 + K_n FT \sum_{i=1}^n A_i \frac{e^{-T p_i}}{z - e^{-T p_i}} = 0. \quad (4.111)$$

Підставивши в (4.111) $z = 0$, що відповідає виконанню вимоги (4.106), отримуємо умову процесу кінцевої тривалості

$$K_n FT \sum_{i=1}^n A_i = 1. \quad (4.112)$$

Ця умова є достатньою та фізично реалізується для системи регулювання, у якій безперервна частина має різницю порядків поліномів знаменника і чисельника дорівнює одиниці. Коли $m-n \geq 2$ розкладання передавальної функції $W(p)$ містить ланки як із позитивними, так і з негативними коефіцієнтами

$$W(p) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{p - p_i} - \sum_{i=n-k}^n \frac{B_{(k+i)}}{p - p_{(k+i)}}. \quad (4.113)$$

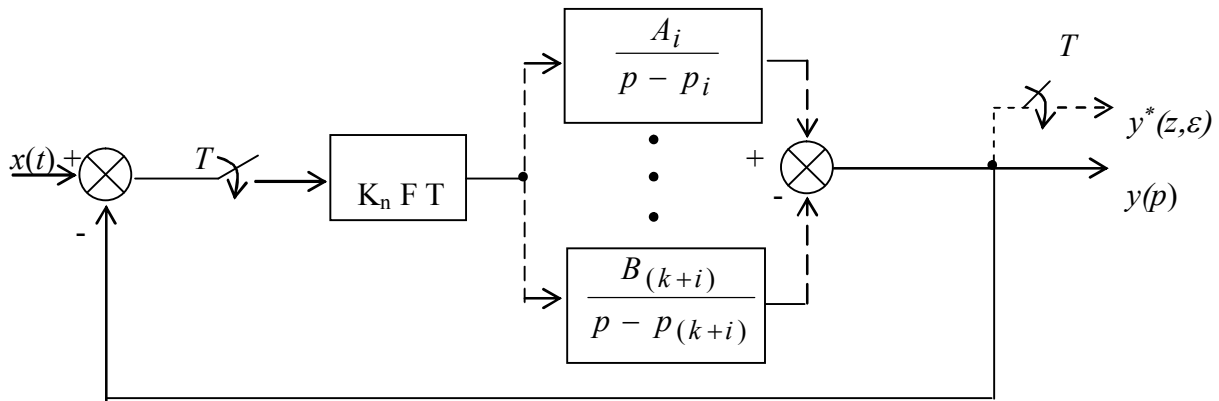
Присутність у розкладанні $W(p)$ доданків з негативними коефіцієнтами створює в замкнутій системі, як це показано на рисунку 4.23, контури передачі інформації з позитивним зворотним зв'язком. Наявність таких контурів погіршує демпфірування вільної складової перехідного процесу, що не дає реалізувати процес кінцевої тривалості.

Для ілюстрації цього висновку розглянемо систему з передавальною функцією наведеної безупинної частини

$$W(p) = \frac{1}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}. \quad (4.114)$$

Уявімо вираз (4.114) у вигляді суми аперіодичних ланок

$$W(p) = \frac{1}{T_1 - T_2} \left(\frac{1}{p + 1/T_1} - \frac{1}{p + 1/T_2} \right). \quad (4.115)$$



Рисунку 4.23 – Структурна схема системи з $W(p)$ у вигляді паралельних ланок

Виконавши модифіковане z-перетворення виразу (4.108) і підставивши результат у характеристичне рівняння, отримаємо

$$1 + K_n F \frac{T}{T_1 - T_2} \left(\frac{e^{-T/T_1}}{z - e^{-T/T_1}} - \frac{e^{-T/T_2}}{z - e^{-T/T_2}} \right) = 0. \quad (4.116)$$

Зробивши в отриманому виразі підстановку $z = 0$, це рівнозначно виконання умови (4.100), отримуємо, що в цій системі відсутній процес кінцевої тривалості.

Існування процесу кінцевої тривалості й фізична реалізація його умов накладає обмеження на передавальну функцію наведеної безперервної частини системи. Це обмеження полягає в тому, що процес кінцевої тривалості реалізується в системі, яка має різницю порядків поліномів знаменника і чисельника передавальної функції безперервної частини дорівнює одиниці. У таких системах реакція безперервної частини містить розриви першого роду.

Якщо передавальний функцію $W(p)$ подати у вигляді послідовного з'єднання елементарних ланок

$$W(p) = \frac{\prod_{j=1}^n T_j (p - p_j)}{\prod_{i=1}^m T_i (p - p_i)}, \quad (4.117)$$

то передавальна функція наведеної безупинної частини системи, що відповідає вимогам існування процесу кінцевої тривалості й астатизму першого порядку, має вигляд

$$W'(p) = \frac{\prod_{j=1}^n T_j(p - p_j) \prod_{i=1}^{m-n} T_q(p - p_q)}{T_o p \prod_{i=1}^m T_i(p - p_i)}. \quad (4.118)$$

На підставі виразів (4.117) і (4.118) синтезуємо передавальну функцію коригувальної ланки (регулятора)

$$G(p) = \frac{W'(p)}{W(p)} = \frac{\prod_{i=1}^{m-n} T_q(p - p_q)}{T_o p}. \quad (4.119)$$

Інтегральна частина передавальної функції $G(p)$ забезпечує отримання нульової помилки регулювання в статичному режимі. Диференціальна частина $G(p)$ дає змогу встановити різницю порядків поліномів знаменника та чисельника $W'(p)$, що дорівнює одиниці без взаємної компенсації нулів і полюсів.

Вираз (4.119) дає змогу синтезувати передавальну функцію регулятора по заданій передавальній функції об'єкта регулювання для отримання максимальної швидкодії замкнутої системи і надання їй властивостей астатизма.

Приклад 4.5 Широтно-імпульсний перетворювач із частотою модуляції $f = 400$ Гц. працює в замкнутій структурі. Передавальна функція ланцюга навантаження

$$H(p) = \frac{1}{T_1 \cdot p + 1}, \quad (4.120)$$

із постійною часу $T_1 = 0,001$ С.

Необхідно отримати в системі граничну швидкодію і нульову помилку в сталому режимі.

Згідно з (4.118) передавальна функція приведеної безперервної частини, що відповідає заданим вимогам до системи регулювання, має вигляд

$$W'(p) = \frac{T_2 \cdot p + 1}{T_o \cdot p \cdot (T_1 p + 1)}. \quad (4.121)$$

Тоді, відповідно до (4.112) передавальна функція регулятора

$$G(p) = \frac{T_2 \cdot p + 1}{T_o \cdot p}. \quad (4.122)$$

Характеристичне рівняння системи

$$1 + K_n F \frac{TT_2}{T_o T_1} \left[\frac{T_1}{T_2} \frac{1}{z-1} + \frac{e^{-\frac{T}{T_1}}}{z - e^{-\frac{T}{T_1}}} \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right) \right] = 0, \quad (4.123)$$

з якого отримуємо умови процесу кінцевої тривалості

$$K_n F \frac{T}{T_o} = \frac{T_1}{T_2}; \quad T_2 = T_1 \left(1 - e^{-\frac{T}{T_1}} \right). \quad (4.124)$$

Отримані умови відповідають вимогам фізичної можливості бути реалізованим.

Розглянемо реакцію системи на вхідне діяння $x(t) = 1/p$. Вираз для перехідного процесу отримаємо з (4.103) підстановкою z -перетворень передавальних функцій і вхідного діяння з урахуванням умов процесу кінцевої тривалості

$$y^*(z, \varepsilon) = \frac{\left(z + \frac{T}{T_2} - 1 \right) e^{-\frac{\varepsilon T}{T_1}}}{z(z-1)}, \quad (4.125)$$

де $T = 1/f$.

Лівобічні значення перехідного процесу отримуємо при $\varepsilon = 0$, а правобічні при $\varepsilon = 1$. На рисунку 4.24 показаний розрахований по (4.125) перехідний процес.

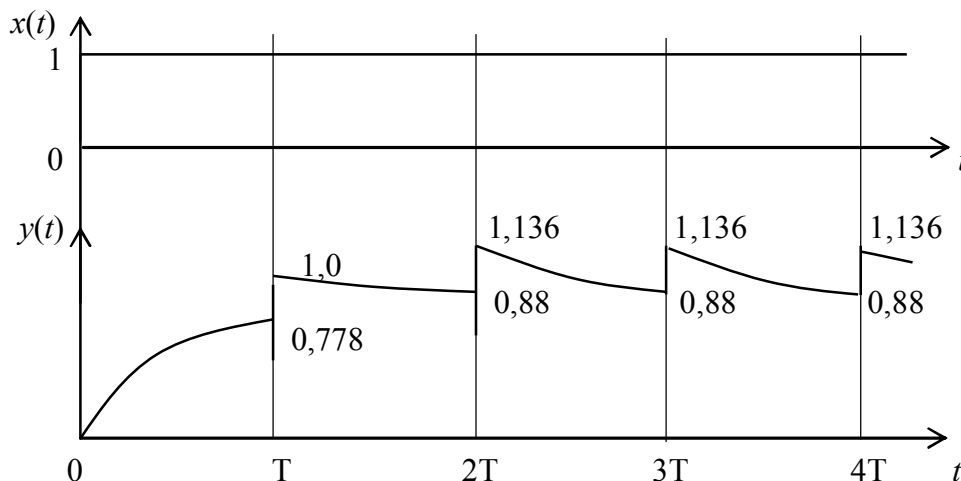


Рисунок 4.24 – Перехідний процес в системі

Як випливає з рисунка, перехідний процес закінчується за два такта перетворювача, що відповідає порядку характеристичного рівняння.

Отримані співвідношення дозволяють за заданими параметрами перетворювача й передавальної функції ланцюга навантаження синтезувати передавальну функцію регулятора, що забезпечує граничне швидкодію та нульову похибку.

Питання та завдання для самоперевірки

1. Який сигнал діє на виході ідеального імпульсного елемента?
2. Для чого імпульсну САР доповнюють фіктивним елементом?
3. Що є перехідний процес кінцевої тривалості в імпульсній системі?
4. Як моделюється реальний імпульсний елемент?
5. Умови процесу кінцевої тривалості.
6. Назвіть умови стійкості імпульсної системи.
7. Якими параметрами характеризується імпульсний елемент?
8. Призначення імпульсного елемента.
9. У який спосіб оцінюють точність імпульсної системи?
10. З допомогою яких методів виконується зворотне z -перетворення?
11. Що таке модифіковане z -перетворення?
12. На чому базується метод вичитів.
13. Що таке зворотне z -перетворення?
15. Що таке фіктивний імпульсний елемент?
16. Назвіть властивості z -перетворення.
17. Призначення екстраполятора.
18. Призначення дискретного фільтра.
19. Що є ідеальний імпульсний елемент?
20. Як визначити передавальну функцію імпульсної системи?

5 АВТОМАТИЗОВАНІ ЕЛЕКТРОМЕХАНОТРОННІ СИСТЕМИ

5.1 Принципи автоматизації електромеханотронних систем

Електромеханотроніка – це галузь науки та техніки яка пов'язана з розробкою теорії та технології автоматичних систем електромеханічного перетворення енергії і яка створюються шляхом функціонального і конструктивного об'єднання електромеханічних перетворювачів з електронними компонентами.

Електромеханотронний перетворювач – автоматична система електромеханічного перетворення енергії, що створена шляхом функціонального і конструктивного об'єднання електромеханічного перетворювача з електронними компонентами перетворення параметрів електроенергії, управління, діагностики та захисту [26].

У електромеханотронному перетворювачі як автоматичній системі за функціональними ознаками можна виділити дві підсистеми:

– енергетична підсистема, що побудована на базі електронних компонентів енергетичного призначення;

– інформаційна підсистема, яка побудована з використанням електронних компонентів інформаційного призначення

Енергетична підсистема – частина електромеханотронного перетворювача, яка об'єднує електромеханічний перетворювач з електронними компонентами енергетичного призначення і забезпечує протікання процесів електромеханічного перетворення енергії, що відповідають призначенню і потужності електромеханотронного перетворювача.

Інформаційна підсистема – частина електромеханотронного перетворювача, яка об'єднує пристрої управління та автоматичного регулювання, діагностування та захисту з електронними компонентами інформаційного призначення і забезпечує протікання енергетичних процесів за заданим законом з необхідною точністю.

Електронні компоненти енергетичного призначення – це прилади і пристрої, що забезпечують зміну параметрів електроенергії, а також комутацію силових ключів в електромеханотронному перетворювачі. Приклади електронних компонентів енергетичного призначення: слабоструміві та силові електронні прилади, випрямлячі, інвертори, перетворювачі частоти, комутаційні пристрої.

Електронні компоненти інформаційного призначення - прилади та пристрої, що забезпечують отримання, зберігання, перетворення та передачу інформації в електромеханотронному перетворювачі. Пристрої інформаційних підсистем утворюються з електронних компонентів і інших приладів, що традиційно використовуються в автоматичній, автоматизованому електроприводі, системах автоматичного регулювання. Приклади електронних компонентів інформаційного призначення: транзисторні підсилювачі, імпульсні

інформаційні прилади, цифро-аналогові аналого-цифрові перетворювачі, мікроконтролери та мікропроцесори.

Вказані поняття і визначення є загальними для електромеханотроніки як технічної науки. На їх основі розробляється конкретна термінологія, яка враховує область техніки, в якій створюються електромеханотронні перетворювачі. Конкретні поняття електромеханотроніки враховують призначення, а також функціональні і конструктивні особливості електромеханотронних перетворювачів в електромашинобудуванні, апарато і приладобудуванні, електроенергетиці, електроприводі, транспорті.

Розглядаючи ступінь автоматизації процесу управління електромеханотронною системою можна визначити наступні рівні: неавтоматизоване керування, автоматизоване керування і автоматичне регулювання.

Неавтоматизоване керування електромеханотронною системою полягає в тому, що обслуговуючих персонал оцінюючи перебіг технологічного процесу приймає рішення про зміну режиму роботи системи.

Оцінка інформації про електромеханотронну систему, а також прийняття рішення про зміну режиму її роботи вимагається від обслуговуючого персоналу достатньо великого об'єму професійних знань, навичок і швидкості реакції. Ускладнення електромеханотронної системи, підвищення вимог до ефективності її керування ставлять задачу її автоматизації.

Автоматизоване керування полягає у частковій заміні людського фактору автоматичними системами і пристроями. Прикладом такого керування є системи захисту від перевантаження тягових двигунів по струму та коротких замикань.

Автоматичне регулювання забезпечує керування електромеханотронної системи за заданим законом і припускає наявність замкнутих систем.

Широке застосування систем автоматичного регулювання пов'язано із застосуванням в електромеханотронних системах силових напівпровідникових перетворювачів електричної енергії з мікроелектронними системами керування і автоматичного регулювання.

На сучасному етапі технічного розвитку відкриваються можливості створення електромеханотронних систем, характерними рисами яких є високі енергетичні і динамічні показники. Досягається це використанням в їх складі досягнень в області силової напівпровідникової техніки і мікроелектронних пристроїв.

Сучасна електромеханотронна система є потужною енергетичною установкою, що порівнюється за потужністю із системою електропостачання. Це визначає взаємовплив електромагнітних процесів електромеханотронної системи і живлячої мережі. Так, при комутаціях тиристорів керованого статичного перетворювача в тяговій мережі збуджуються коливальні процеси, які викликають спотворення форми напруги живильної мережі. Це впливає на роботу системи імпульсно-фазового керування і через неї на силову схему перетворювача. Перехідні процеси, що виникають у живлячій мережі, викликають перехідні процеси в електричних колах електромеханотронної систе-


ми, які можуть бути причиною втрати нею стійкості. Тому є важливим вивчення динамічних характеристик як самої електромеханотронної системи так і її складників.

5.2 Моделювання динамічних ланок електромеханотронних систем

5.2.1 Загальні положення моделювання динамічних ланок у MATLAB

Ускладнення систем автоматичного регулювання і підвищення до них вимог підкреслює актуальність застосування математичного моделювання. На даний час широке застосування для моделювання статичних та динамічних режимів автоматичних систем набуло застосування середовища Samulink MATLAB [27].

Під час моделювання в Samulink система автоматичного регулювання представляється у вигляді звичайної структурної схеми. Важливою властивістю Samulink полягає в тому, що моделювання системи автоматичного регулювання виконується в реальному масштабі часу. Завдяки цьому та наявності великої бібліотеки блоків елементів у якій представлені лінійні і нелінійні ланки з різними передавальними функціями, джерела сигналів та контролюючі пристрої Samulink дає можливість ефективно досліджувати системи автоматичного регулювання різної складності.

Запуск Samulink виконується кнопкою  на панелі MATLAB (рис. 5.1). Після цього з'являється вікно браузера бібліотек (Simulink Library Browse), наведено на рисунку 5.2.

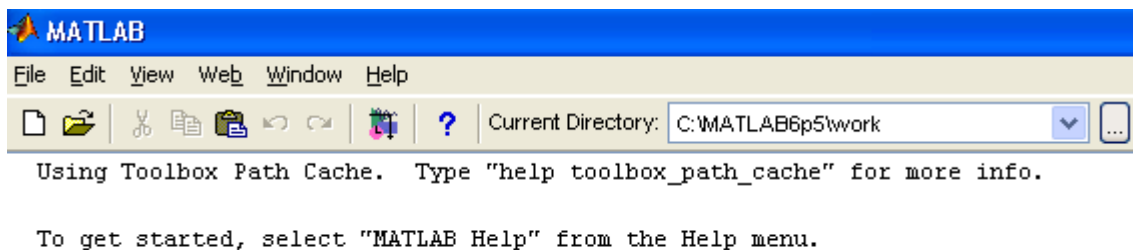


Рисунок 5.1 – Вікно запуску Samulink

Щоб розкрити потрібну вітку дерева бібліотеки необхідно лівою кнопкою миші натиснути «+» біля відповідної піктограми або двічі клацнути по піктограмі.

Найбільш використовуваними блоками в бібліотеці Samulink (рис. 5.2) при моделювання систем автоматичного регулювання є:

- Continuous (елементи лінійних безперервних систем);
- Discontinuities (нелінійні елементи);
- Discrete (елементи дискретних систем);
- Sources (джерела сигналів);
- Sinks (регістратори).

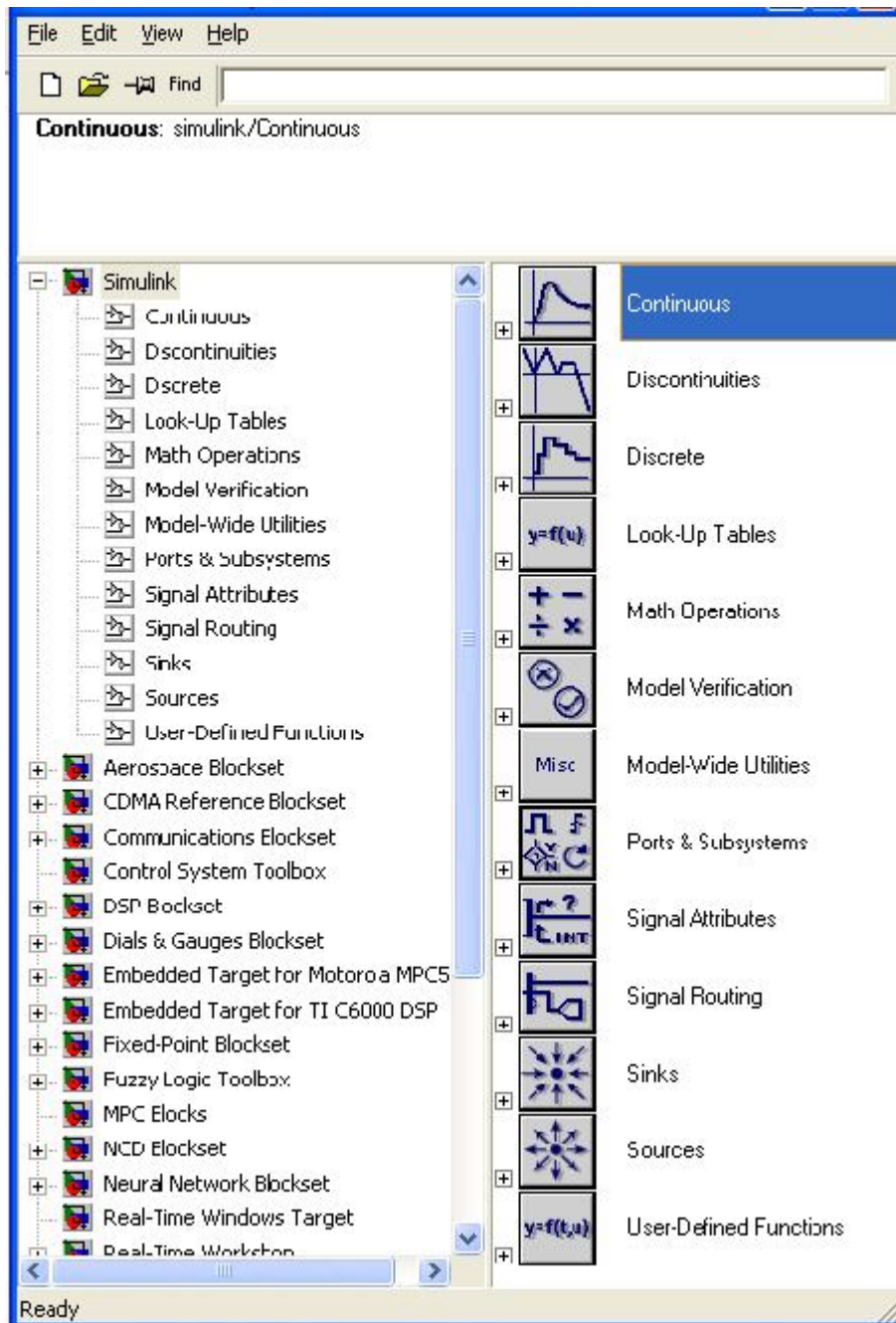



Рисунок 5.2 – Вікно браузера бібліотек

Для створення нової моделі необхідно на панелі інструментів кнопкою



відкрити нове вікно. Вікно, що відкривається має назву Untitled. У Simulation (рис. 5.3) задати метод, шаг та час інтегрування. Початок моделювання визначається кнопкою .

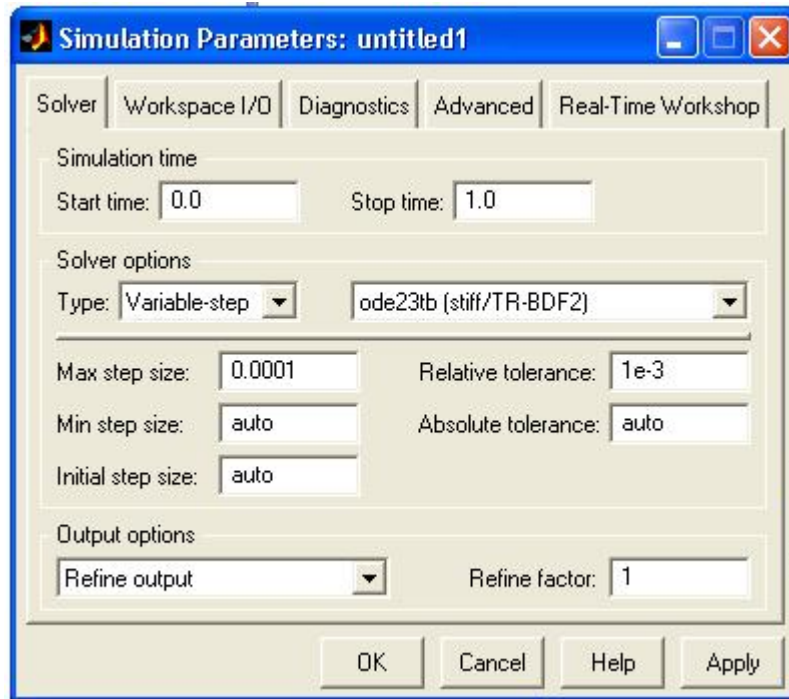



Рисунок 5.3 – Вікно Untitled

Збереження моделі виконують кнопкою  або Fail – Save. У вікні, що викривається латиною можна надати назву моделі, наприклад Mod1.

5.2.2 Моделювання пропорційної данки

У середовище MATLAB пропорційна ланка моделюється елементом *Gain* (табл. 5.1). У п. 2.6.4 була показана реалізація пропорціональної ланки на операційному підсилювачі. Інвертувального підсилювач будується з використанням інвертувального входу операційного підсилювача. Електрична схема цього підсилювача з урахуванням еквівалентної схеми операційного підсилювача наведена на рисунку 5.4.

Коефіцієнт передачі наведеної схеми визначається системою рівнянь:

$$\begin{cases} K_1 = \frac{U_2}{U_1}; \\ U_2 = K_0 \cdot U_{ex} - U_{zввх}, \end{cases} \quad (5.1)$$


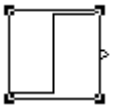
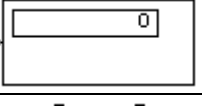
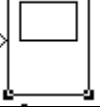
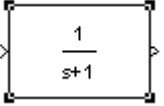
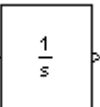
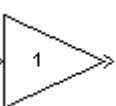

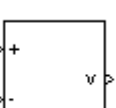
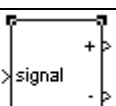
де K_0 – коефіцієнт підсилення операційного підсилювача;

U_{ex} – напруга, що діє між входами операційного підсилювача;

$U_{zввх}$ – падіння напруги на внутрішньому опорі операційного підсилювача;

Z_{ex} та $Z_{вих}$ – вхідний та вихідний опори операційного підсилювача.

Таблиця 5.1 – Блоки в пакеті Simulink

	<i>Constant</i> – сигнал постійної величини.
	<i>Step</i> – ступінчастий сигнал, міняється час стрибка (<i>Step Time</i>), початкове (<i>Initial Value</i>) і кінцеве значення (<i>Final Value</i>)
	<i>Display</i> – цифровий дисплей, показує зміну вхідного сигналу в цифровому вигляді
	<i>Scope</i> – осцилограф, показує зміну сигналу у вигляді графіка, дозволяє передавати дані в робочу область <i>MATLAB</i> для подальшої обробки і оформлення
	<i>Transfer Fcn</i> – передавальна функція, у параметрах задаються чисельник (<i>Numerator</i>) і знаменник (<i>Denominator</i>) у вигляді поліномів.
	<i>Integrator</i> – інтегратор з можливістю установки початкових умов (<i>Initial condition</i>), а також меж насичення (<i>Lower saturation limit</i> u <i>Upper saturation limit</i>)
	<i>Gain</i> – підсилювач, задається коефіцієнт підсилення (<i>Gain</i>)
	<i>Sum</i> – суматор, використовується для додавання та віднімання входів
	<i>Voltage Measurement</i> – вимірювач напруги
	<i>Controller Voltage Source</i> – перетворювач сигналу <i>MATLAB</i> в електричний сигнал

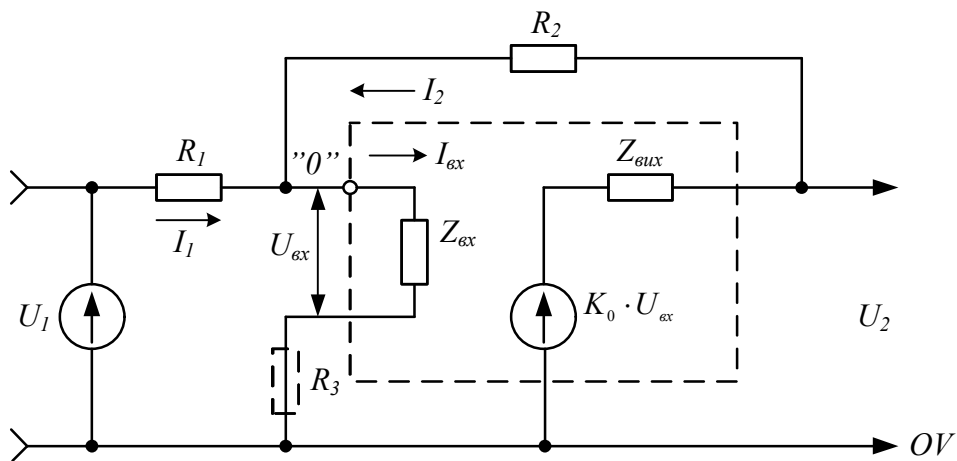


Рисунок 5.4 – Електрична схема інвертувального підсилювача

Для визначення зв'язку між вхідною напругою U_1 та напругою U_{ex} , що безпосередньо діє між входами операційного підсилювача, розглянемо наступну еквівалентну схему, яка наведена на рисунку 5.5.

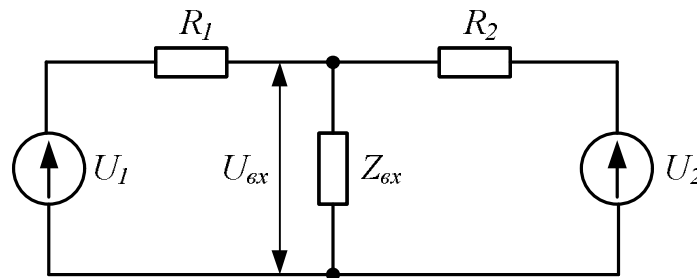


Рисунок 5.5 – Еквівалентна схема

Напругу U_{ex} визначимо за допомогою метода суперпозиції [28], згідно з яким одержуємо:

$$U_{ex} = U'_{ex} + U''_{ex}, \quad (5.2)$$

де U'_{ex} – складова вхідної напруги, що визначається дією джерела з напругою U_1 ;

U''_{ex} – складова U_{ex} , що визначається дією джерела з напругою U_2 .

Згідно з рисунком 5.5 одержуємо:

$$U'_{ex} = \frac{Z_{ex} \cdot R_2}{R_1 \cdot (Z_{ex} + R_2) + Z_{ex} \cdot R_2}; \quad (5.3)$$

$$U''_{ex} = \frac{Z_{ex} \cdot R_1}{R_2 \cdot (Z_{ex} + R_1) + Z_{ex} \cdot R_1}. \quad (5.4)$$

З урахуванням (5.3) і (5.4) формула, що визначає вихідну напругу U_2 підсилювального каскаду, набуває вигляду:

$$U_2 \cdot \left[1 - R_0 \cdot \frac{Z_{ex} \cdot R_1}{R_2 \cdot (Z_{ex} + R_1) + Z_{ex} \cdot R_1} \right] = R_0 \cdot U_1 \cdot \frac{Z_{ex} \cdot R_2}{R_1 \cdot (Z_{ex} + R_2) + Z_{ex} \cdot R_2} - U_{Z_{ex}}. \quad (5.5)$$

Застосувавши до виразу (5.6) умову ідеального операційного підсилювача

$$\begin{aligned} K_0 &= \infty; \\ Z_{ex} &= \infty; \\ Z_{mix} &= 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

та виконавши граничний перехід одержимо:

$$K_I = -\frac{R_2}{R_1}. \quad (5.7)$$

Із виразу (5.7) витікає, що коефіцієнт передачі інвертувального підсилювального каскаду на операційному підсилювачі визначається відношенням резистора R_2 зворотного зв'язку та резистора R_1 у прямому каналі.

Для визначення вхідного опору R_{ex} підсилювального каскаду розглянемо електричні процеси, що діють в його вхідному колі. Згідно з (5.1) зв'язок між вхідною напругою U_{ex} та вихідною напругою U_2 для ідеального операційного підсилювача має вигляд $U_2 = K_0 \cdot U_{ex}$.

За умови скінченності величини напруги U_2 при $K_0 \rightarrow \infty$ $U_{ex} \rightarrow \infty$. Із наведеного витікає, що точка «0» (рис. 5.4), в якій відбувається підсумовування струмів I_1 та I_2 , є еквівалентною до загальної шини OV . Тобто вхідний струм підсилювального каскаду визначається як

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}. \quad (5.8)$$

Із (5.8) випливає, що вхідний опір інвертувального підсилювального каскаду визначає величина опору вхідного резистора:

$$R_{ex} = R_1. \quad (5.9)$$

У реальних схемах величина опору резистора R_1 лежить у межах від декількох кілоом до декількох сотень кілоом. Нижня величина межі обмежується величиною внутрішнього опору джерела вхідної напруги U_1 . Так, наприклад, коли вхідна напруга U_1 є вихідною напругою попереднього каскаду, побудованого на операційному підсилювачі, то $R_1 \geq 2$ кОм. Верхня величина межі опору R_1 обмежується величиною вхідного струму $I_{\dot{a}0}$ операційного підсилювача. Вхідний струм, протікаючи через паралельно з'єднані резистори R_1 і R_2 , створює на них падіння напруги, яка прикладається до інвертувального входу операційного підсилювача. Під дією цієї напруги відбувається

додатковий зсув вихідної характеристики $U_2 = f(U_1)$ підсилювача відносно початку координат. Для усунення цього явища між неінвертуючим входом операційного підсилювача і загальною шиною OV включають резистор R_3 (рис. 5.1). Величина цього резистора розраховується за формулою:

$$R_3 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad (5.10)$$

У разі рівності вхідних струмів інвертуючого та неінвертуючого входів операційного підсилювача падіння напруг на паралельному з'єднанні резисторів R_1 , R_2 та резистора R_3 рівні між собою, але мають різні знаки. У наслідок цього відбувається компенсація складової вхідного сигналу U_{ex} , яка викликана протіканням вхідних струмів. Особливо дієвим цей захід є у схемах, побудованих на операційних підсилювачах з біполярними транзисторами на вході.

Неінвертувальний підсилювальний каскад будують із використанням неінвертувального входу операційного підсилювача. Електрична схема такого підсилювача з застосуванням еквівалентної схеми операційного підсилювача наведена на рисунку 5.6.

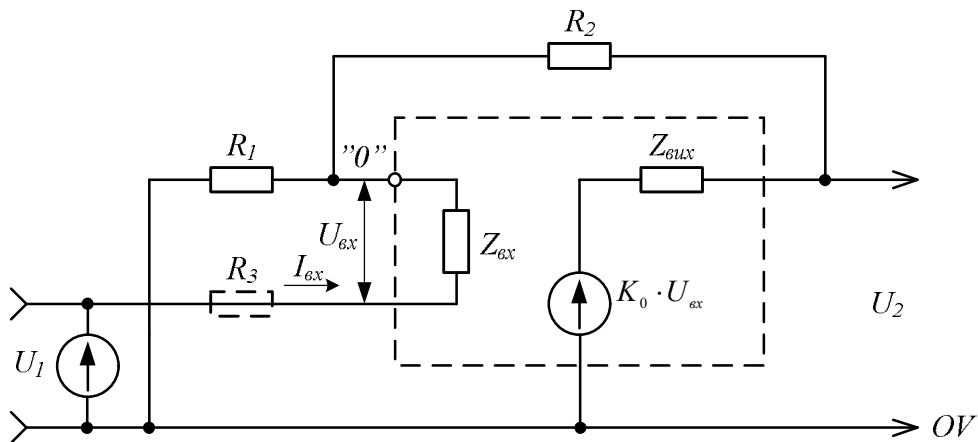


Рисунок 5.6 – Електрична схема неінвертувального підсилювального каскаду

Коефіцієнт передачі наведеної на рисунку 5.6 схеми в загальному випадку визначається рівняннями (5.1).

Для визначення вхідної напруги U_{ex} розглянемо еквівалентну схему, наведену на рисунку 5.7.

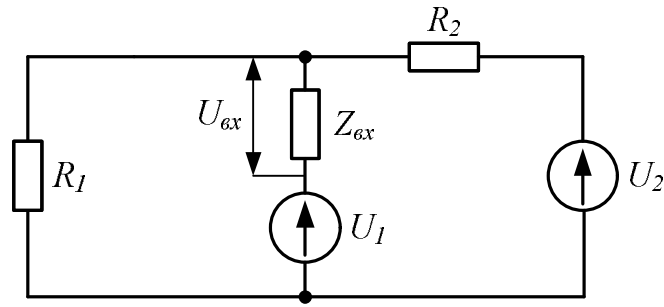


Рисунок 5.7 – Еквівалентна схема

Застосувавши метод суперпозиції за аналогією, як це було зроблено під час розгляду інвертуювального підсилювального каскаду, одержимо

$$U_{ex} = U_1 \cdot \left[\frac{R_1 \cdot R_2}{Z_{ex} \cdot (R_1 + R_2) + R_1 \cdot R_2} + 1 \right] - U_2 \cdot \frac{Z_{ex} \cdot R_1}{R_2 \cdot (Z_{ex} + R_1) + Z_{ex} \cdot R_1}. \quad (5.11)$$

Підставивши (5.11) у (5.1) і виконавши приведення одержимо наступне рівняння:

$$\begin{aligned} U_2 \cdot \left[1 + K_0 \cdot \frac{Z_{ex} \cdot R_1}{R_2 \cdot (Z_{ex} + R_1) + Z_{ex} \cdot R_1} \right] = \\ = K_0 \cdot U_1 \cdot \left[\frac{R_1 \cdot R_2}{Z_{ex} \cdot (R_1 + R_2) + R_1 \cdot R_2} + 1 \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Застосувавши до рівняння (5.12) умови ідеальності операційного підсилювача (5.6) і виконавши граничний перехід, одержимо

$$U_2 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = U_1. \quad (5.13)$$

Підставивши (5.13) у (5.1) одержимо вираз для коефіцієнта передачі неінвертуючого підсилювального каскаду

$$K_n = \frac{R_2}{R_1} + 1. \quad (5.14)$$

Порівняння формули (5.7) і (5.14) вказує на те, що неінвертувальний підсилювач має коефіцієнт передачі на одиницю більший за модуль коефіцієнта передачі інвертуювального підсилювача

$$K_n = K_I + 1. \quad (5.15)$$

Цю особливість використовують при побудові на операційному підсилювачі динамічних ланок систем автоматичного регулювання різноманітного призначення.

Одержані вирази для коефіцієнтів підсилення інвертувального і неінвертувального підсилювачів дають змогу скласти їхню узагальнену структурну схему. Дана структурна схема наведена на рисунку 5.8.

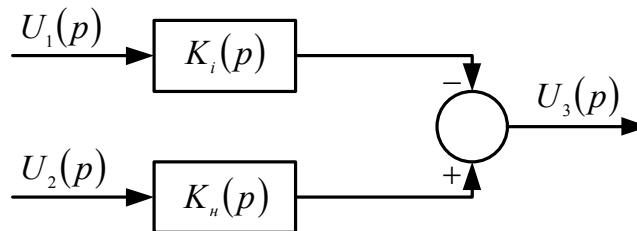


Рисунок 5.8 – Узагальнена структурна схема інвертувального і неінвертувального підсилювачів

Структурна схема має два канали передачі інформації. Верхній канал з коефіцієнтом передачі $K_i(p)$ є відповідним до передачі інформації через інвертувальний вхід операційного підсилювача. Нижній канал з коефіцієнтом передачі $K_n(p)$ є відповідним до передачі інформації через неінвертувальний вхід операційного підсилювача.

Наведена структурна схема є корисною під час аналізу та синтезу електронних схем на операційному підсилювачі.

Коефіцієнти передачі $K_i(p)$ і $K_n(p)$ визначаються відповідно до формул (5.8) та (5.15), у яких опори вхідного кола і кола зворотного зв'язку в загальному випадку записують в операторній формі.

На рисунку 5.9 наведена імітаційна модель інвертувального підсилювача напруги, реалізованого на операційному підсилювачі, модель якого подана на рисунку 5.10. Часові діаграми сигналів інвертуючого підсилювача напруги наведені на рисунку 5.11.

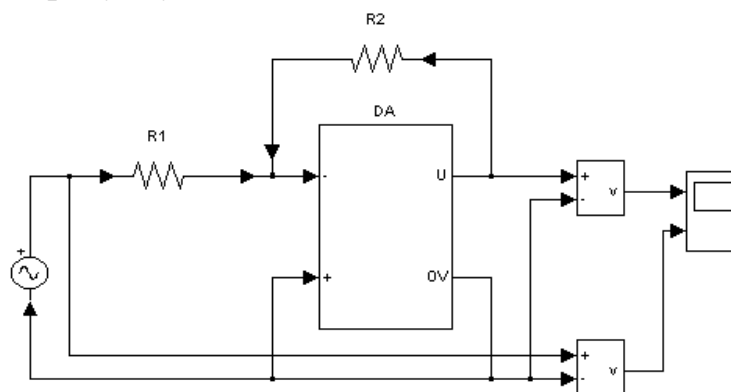


Рисунок 5.9 – Імітаційна модель інвертуювального підсилювача напруги на операційному підсилювачі

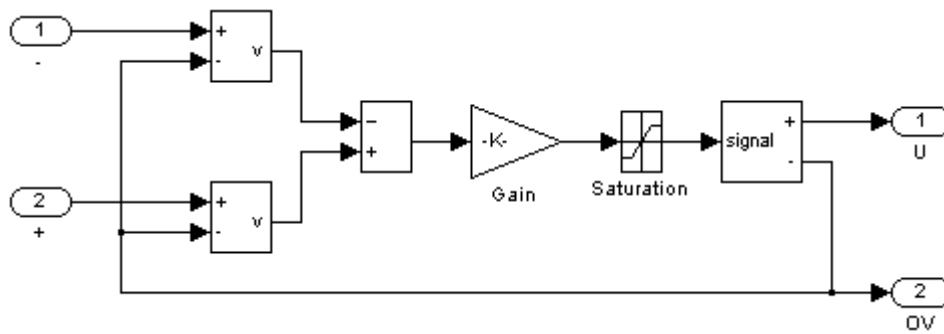


Рисунок 5.10 – Модель операційного підсилювача

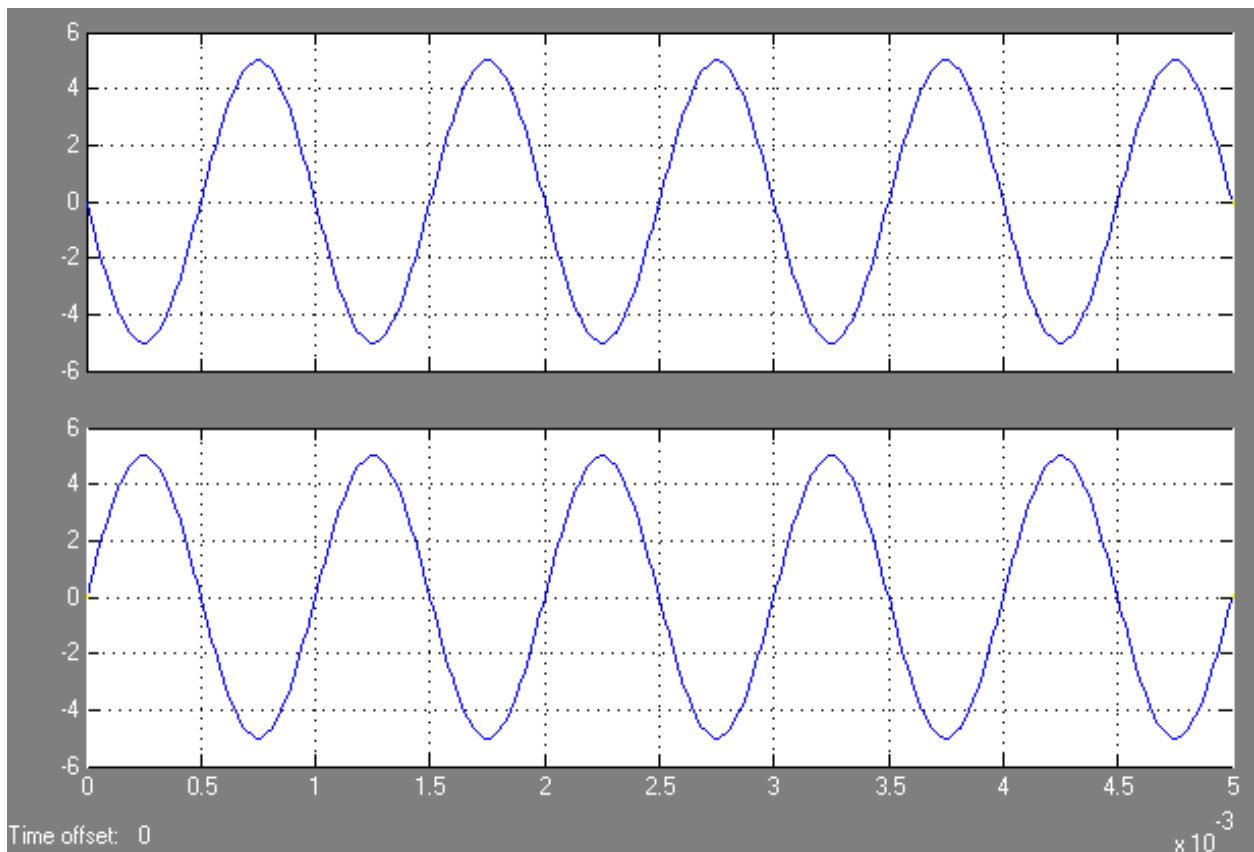


Рисунок 5.11 – Часові діаграми сигналів інвертувального підсилювача напруги

5.2.3 Моделювання інтегральної ланки

Передавальна функція інтегральної ланки згідно з (2.77)

$$G(p) = \frac{1}{T \cdot p}. \quad (5.16)$$

Модель інтегральної ланки в наведена на рисунку 5.12. Стала часу ланки $T = 0,08$ С. Елемент Step формує вхідне діяння у вигляді одиничної

функції $x(t)=1$. Згідно з (2.113) перехідна функція інтегрувальної ланки визначається як

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_0^{t_1} x(t) dt, \quad (5.17)$$

для $t_1 = 0,25$ С перехідна функція має значення $y(t) = 3,125$.

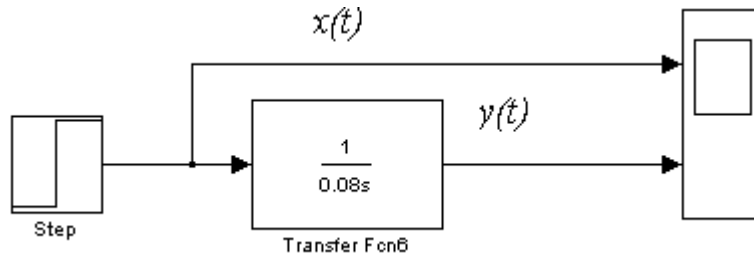


Рисунок 5.12 – Модель інтегруючої ланки

На рисунку 5.13 наведені графіки вхідного діяння $x(t)$ і реакції $y(t)$ інтегрувальної ланки.

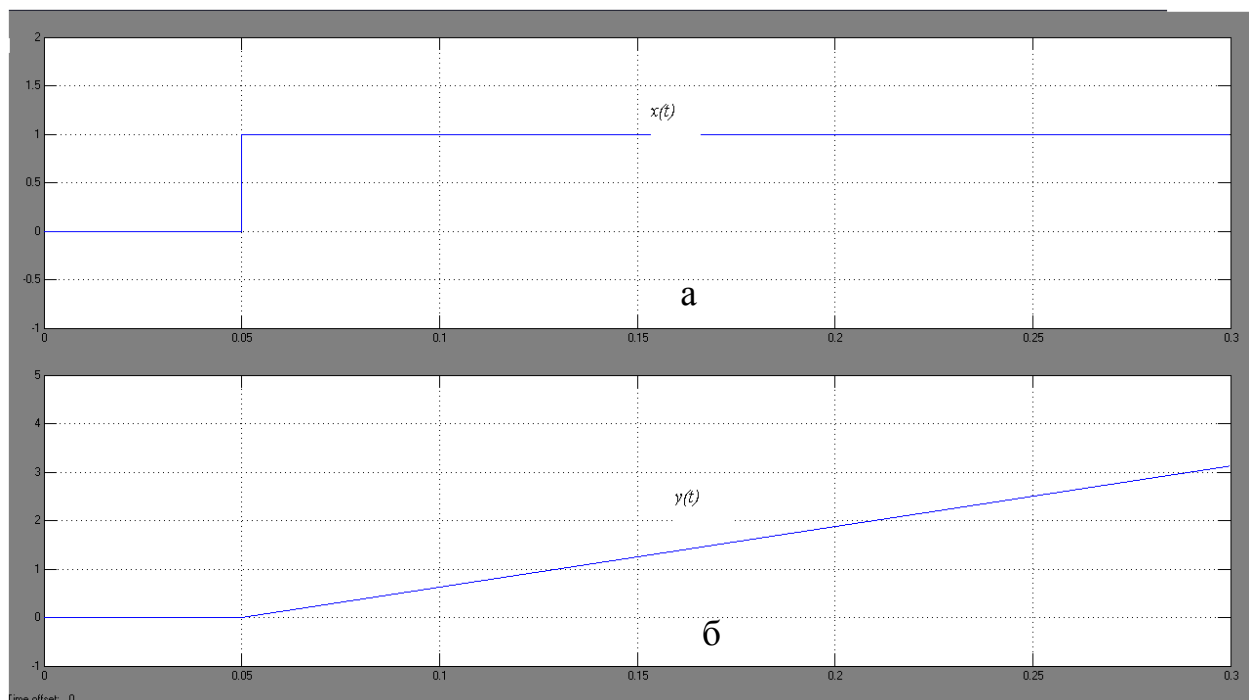


Рисунок 5.13 – Графіки вхідного діяння $x(t)$ і реакції $y(t)$ інтегрувальної ланки

На рисунку 5.14 наведена модель інтегрувальної ланки при реалізації її на операційному підсилювачі. Стала часу інтегрувальної ланки така як і у моделі яка наведена на рисунку 5.12.

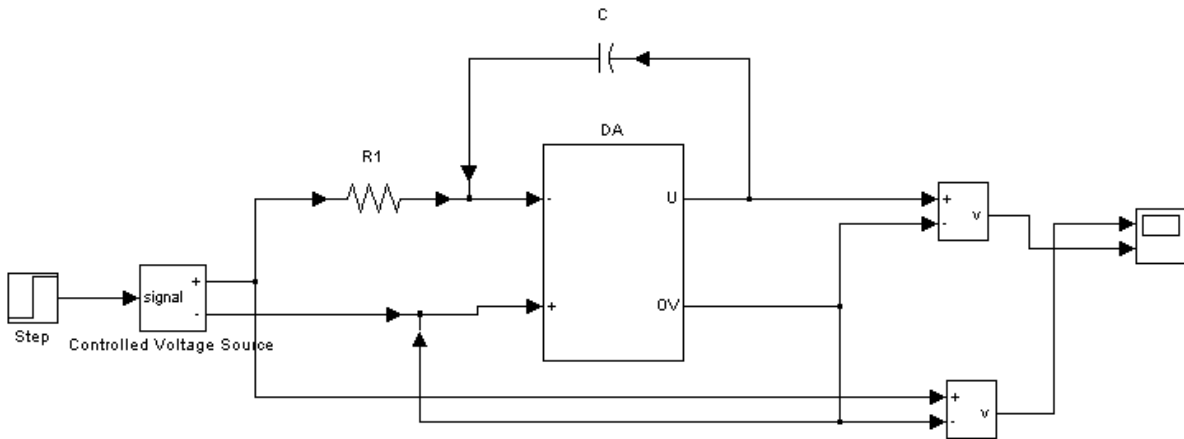


Рисунок 5.14 – Модель інтегральної ланки на операційному підсилювачі

На рисунку 5.15 представлені осцилограми вхідного діяння і перехідної функції.

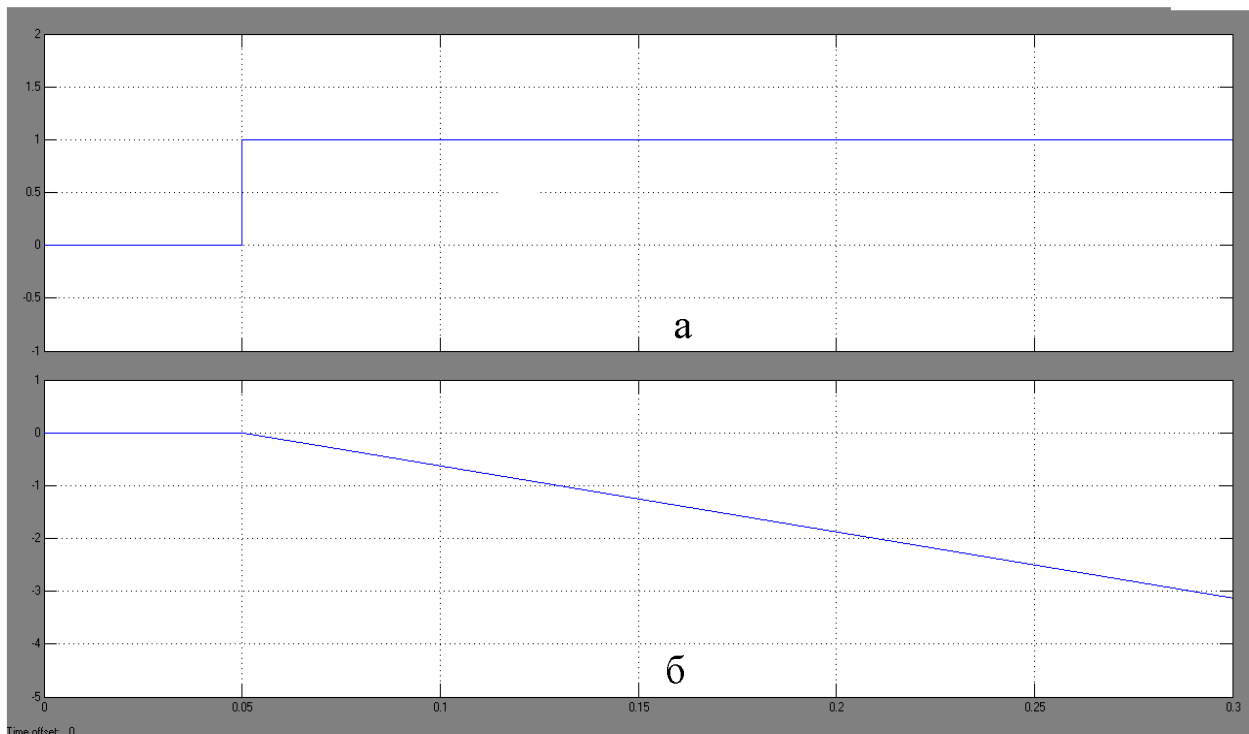


Рисунок 5.15 – Осцилограми вхідного діяння і перехідної функції

5.2.4 Моделювання аперіодичної ланки

Передавальна функція аперіодичної ланки згідно з (2.78)

$$G(p) = \frac{1}{T \cdot p + 1} \quad (5.18)$$

Зображення за Лапласом перехідної функції аперіодичної ланки

$$H(p) = \frac{1}{p \cdot (T \cdot p + 1)} \quad (5.19)$$

З застосуванням теореми розкладу одержимо оригінал перехідної функції

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \frac{U(p_i)}{V'(p_i)} e^{-p_i \cdot t}, \quad (5.20)$$

де p_i – полюса $H(p)$, $V'(p) = \frac{dV(p)}{dp}$.

Виконавши перетворення (5.20), одержимо вираз для перехідної функції аперіодичної ланки

$$h(t) = 1 - e^{-t/T} \quad (5.21)$$

На рисунку 5.16 наведена модель аперіодичної ланки, а на рисунку 5.17 осцилограми вхідного діяння та перехідної функції.

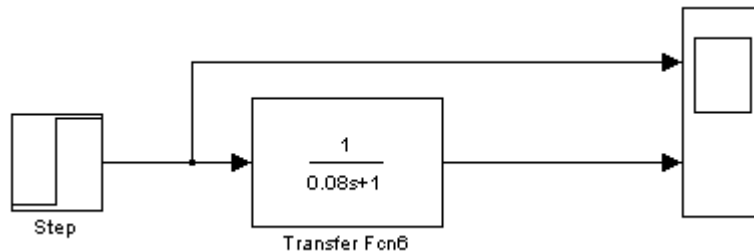


Рисунок 5.16 – Модель аперіодичної ланки

На рисунку 5.18 подана модель аперіодичної ланки, в основу якої закладена модель операційного підсилювача, а на рисунку 5.19 наведені осцилограми її вхідного діяння та перехідної функції.

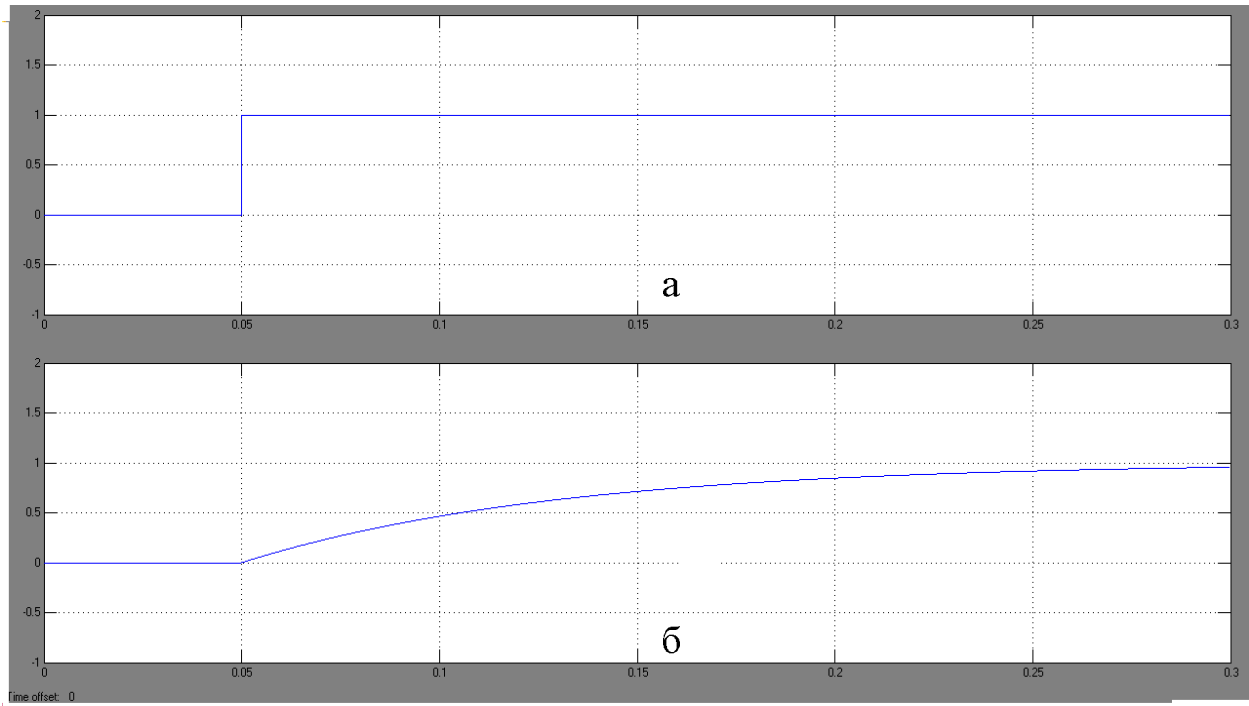


Рисунок 5.17 – Осцилограми вхідного діяння і перехідної функції аперіодичної ланки

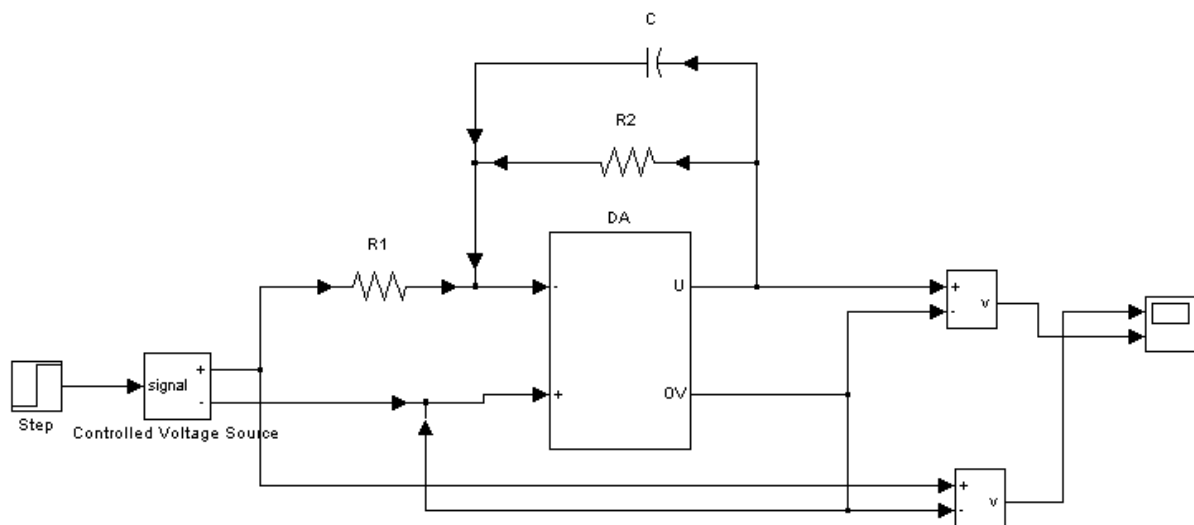


Рисунок 5.18 – Модель аперіодичної ланки побудованої на операційному підсилювачі

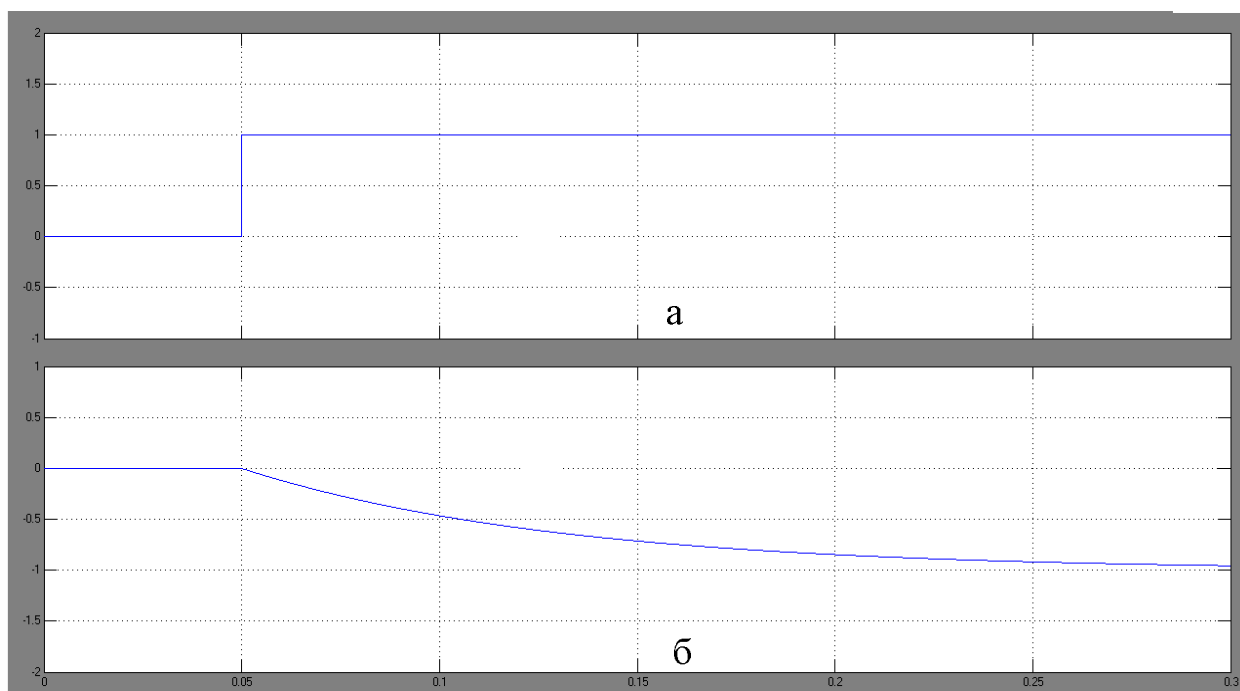


Рисунок 5.19 – Осцилограми її вхідного діяння та перехідної функції аперіодичної ланки на операційному підсилювачі

5.2.5 Моделювання ізодромної ланки

Передавальна функція ізодромної ланки згідно з (2.104)

$$G(p) = -\frac{1 + T_2 p}{T_1 p}. \quad (5.22)$$

Зображення за Лапласом перехідної функції ізодромної ланки

$$H(p) = \frac{1 + T_2 \cdot p}{T_1 \cdot p^2}. \quad (5.23)$$

Перехідна функція іподромної ланки визначається наступним виразом

$$h(t) = \frac{T_2}{T_1} + \frac{1}{T_1} \int_{t_1}^t x(t) dt \quad (5.24)$$

Модель ізодромної ланки представлена на рисунку 5.20, а осцилограми вхідного діяння і перехідної функції наведені на рисунку 5.21.

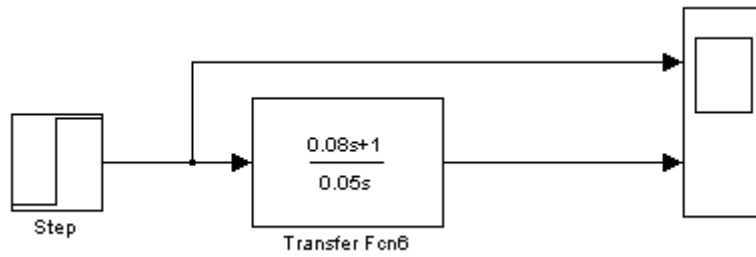


Рисунок 5.20 – Модель ізодромної ланки

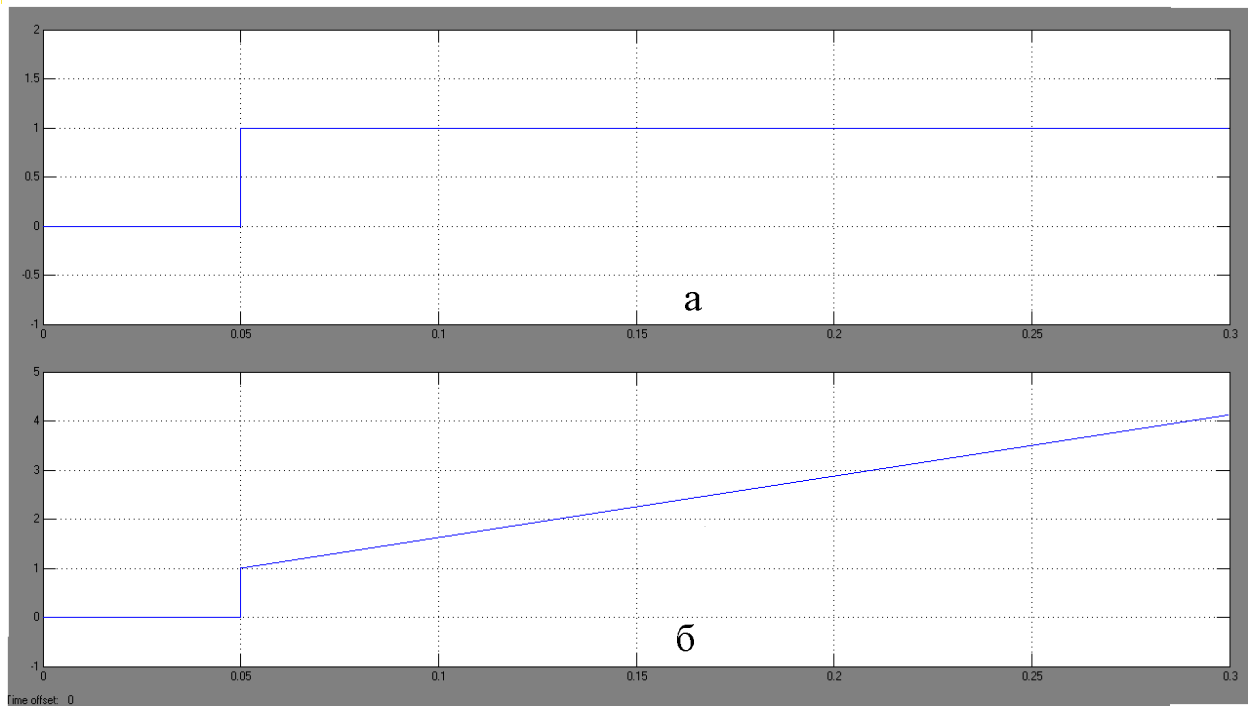


Рисунок 5.21 – Осцилограми вхідного діяння і перехідної функції ізодромної ланки

На рисунку 5.22 зображена модель ізодромної ланки, яка побудована із застосуванням моделі операційного підсилювача. На рисунку 5.23 представлені осцилограми її вхідного і вихідного сигналів.

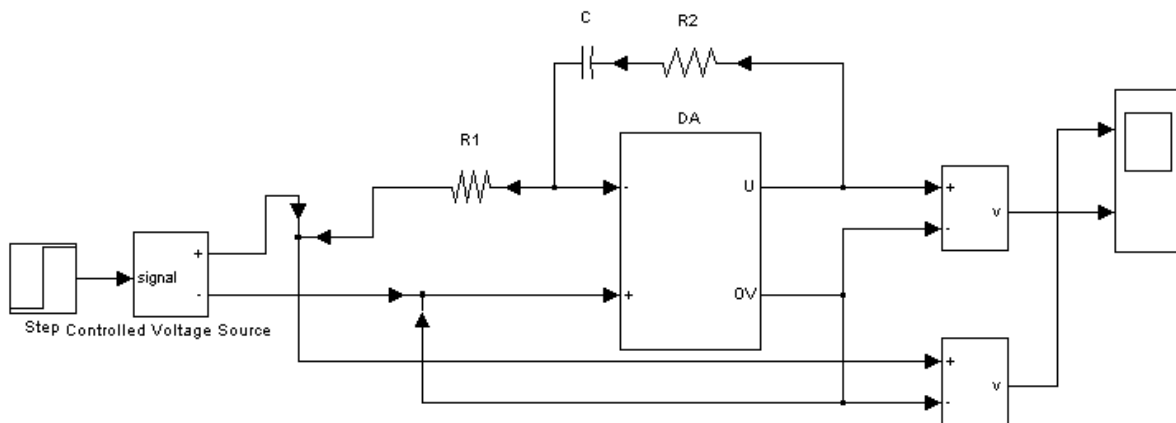


Рисунок 5.22 – Модель ізодромної ланки побудованої на операційному підсилювачі

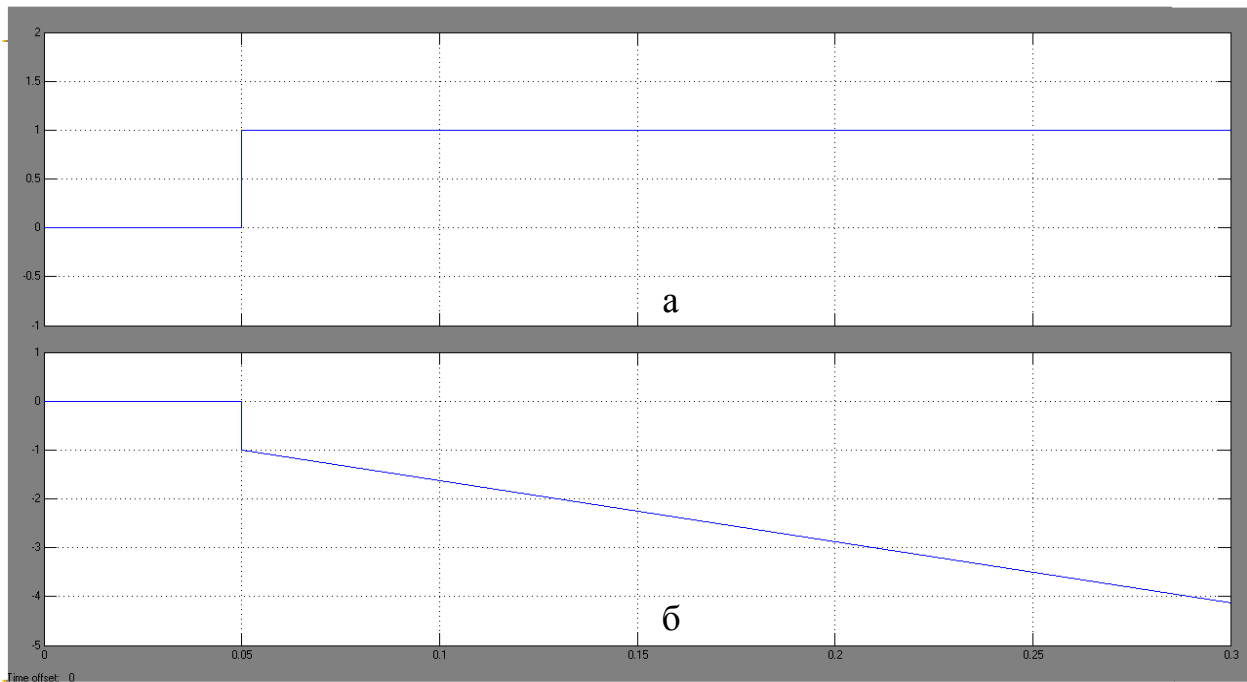


Рисунок 5.23 – Осцилограми її вхідного і вихідного сигналів іздромної ланки на операційному перетворювачі

5.2.6 Динамічна ланка із сповільненням

Передавальна функція динамічної ланки зі сповільненням має вигляд

$$G(p) = \frac{T_1 \cdot p}{T_2 \cdot p + 1}. \quad (5.25)$$

Перехідна функція динамічної ланки зі сповільненням у формі перетворення Лапласа має вигляд

$$H(p) = \frac{T_1 \cdot p}{p(T_2 \cdot p + 1)}. \quad (5.26)$$

Перехідна функція (5.26) має два полюса: $p_1 = 0$; $p_2 = -1/T_2$. Застосувавши теорему розкладу, одержимо вираз для оригіналу перехідної функції динамічної ланки зі сповільненням

$$h(t) = \frac{T_1}{T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}. \quad (5.27)$$

На рисунку 5.24 наведена модель динамічної ланки зі сповільненням для сталих часу $T_1 = 0,08$ С. і $T_2 = 0,05$ С. На рисунку 5.25 наведені осцилограми вхідного та вихідного сигналів ланки (5.25).

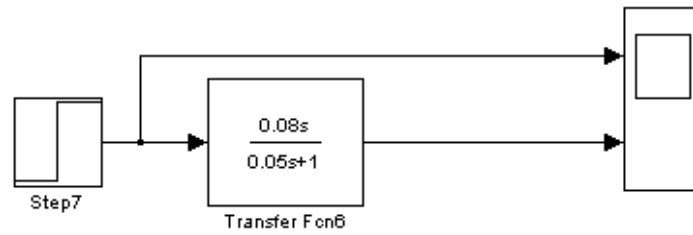


Рисунок 5.24 – Модель динамічної ланки зі сповільненням

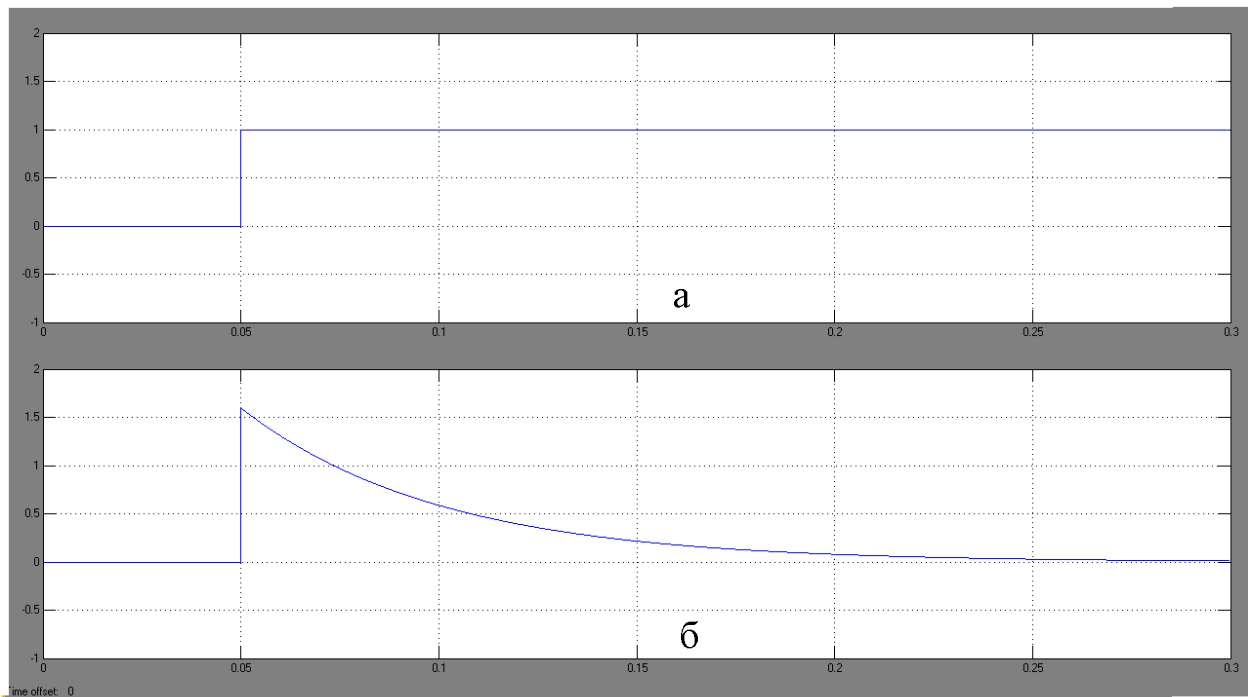


Рисунок 5.25 – Осцилограми вхідного і вихідного сигналів динамічної ланки із сповільненням

На рисунку 5.26 подана модель динамічної ланки зі сповільненням яка побудована на моделі операційного підсилювача, а на рисунку 5.27 наведені осцилограми її сигналів.

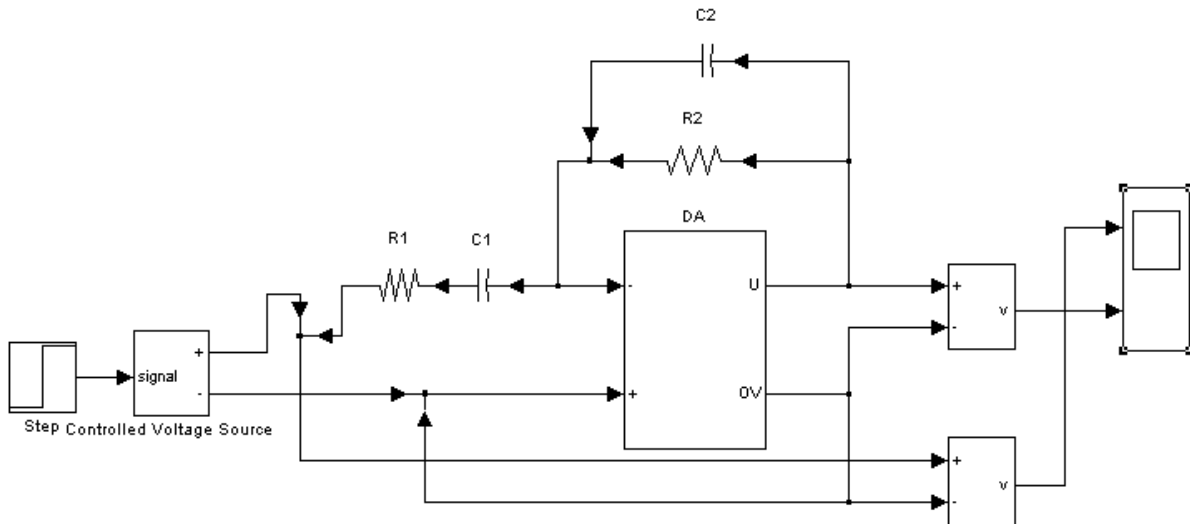


Рисунок 5.26 – Модель динамічної ланки зі сповільненням побудованої на операційному підсилювачі

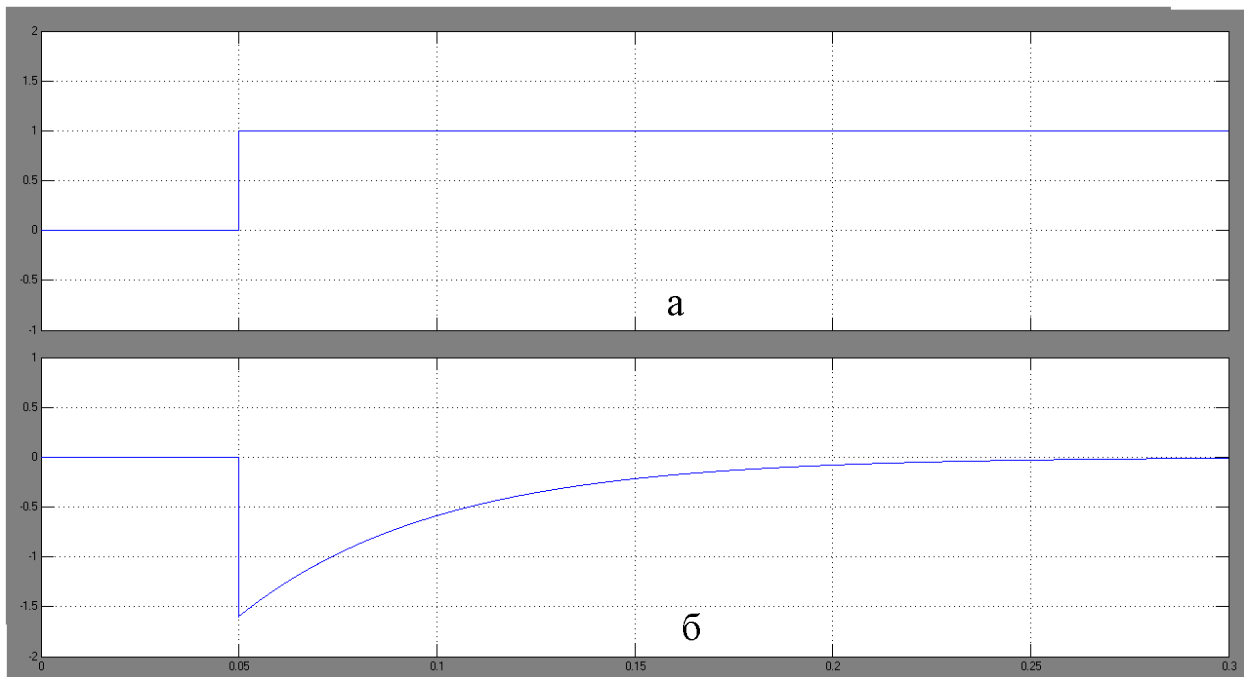


Рисунок 5.27 – Осцилограми сигналів динамічної ланки зі сповільненням на операційному перетворювачі

5.2.7 Моделювання немінімально-фазової динамічної ланки

Передавальна функція немінімально-фазової динамічної ланки визначається таким виразом

$$G(p) = \frac{1 - T \cdot p}{1 + T \cdot p} \quad (5.28)$$

Підстановкою у (5.28) $p = j\omega$ одержуємо частотну передавальну функцію немінімально-фазової динамічної ланки

$$G(\omega) = \frac{1 - j \cdot \omega \cdot T}{1 + j \cdot \omega \cdot T}. \quad (5.29)$$

Із (5.29) одержимо вирази для амплітудо-частотної

$$A(\omega) = 1 \quad (5.30)$$

і фазо-частотною характеристик

$$\varphi(\omega) = -2 \arctg \omega \cdot T. \quad (5.31)$$

Аналіз виразів (5.30) і (5.31) вказує на те, що коефіцієнт передачі немінімально-фазової динамічної ланки не залежить від змін частоти вхідного діяння, а фазовий зсув вихідного сигналу відносно вхідного змінюється в діапазоні $0 \leq \varphi \leq \pi$ при: $\omega = \text{var}, T = \text{const}$ або $\omega = \text{const}, T = \text{var}$.

Немінімально-фазова динамічна ланка в електромеханотронних системах застосовується як керований фазо-регульований пристрій.

На рисунку 5.28 наведена MATLAB модель немінімально-фазової динамічної ланки.

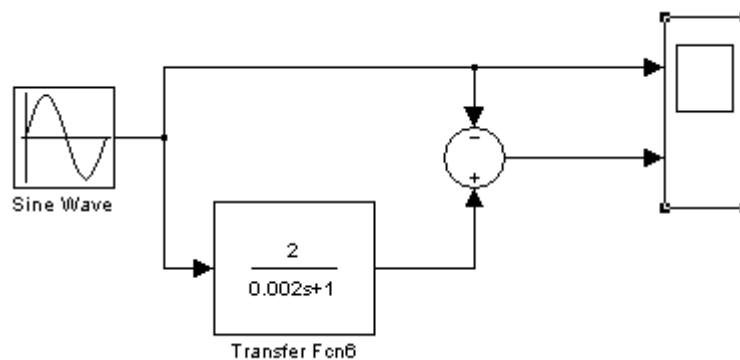


Рисунок 5.28 – Модель немінімально-фазової динамічної ланки

Частота вхідного сигналу $f = 50$ Гц. Фазовий зсув, розрахований за формулою (5.31), складає $\varphi = 64^{\circ}17'$.

На рисунку 5.29 подані осцилограми вхідного і вихідного сигналів немінімально-фазової динамічної ланки.

На рисунку 5.30 наведена модель фазозсувального пристрою побудованого на операційному підсилювач. Аналіз динамічних характеристик фазозсувального пристрою зручно виконати з застосуванням узагальненої структурної схеми підсилювального каскаду на операційному підсилювачі яка наведена на рисунку 5.8.

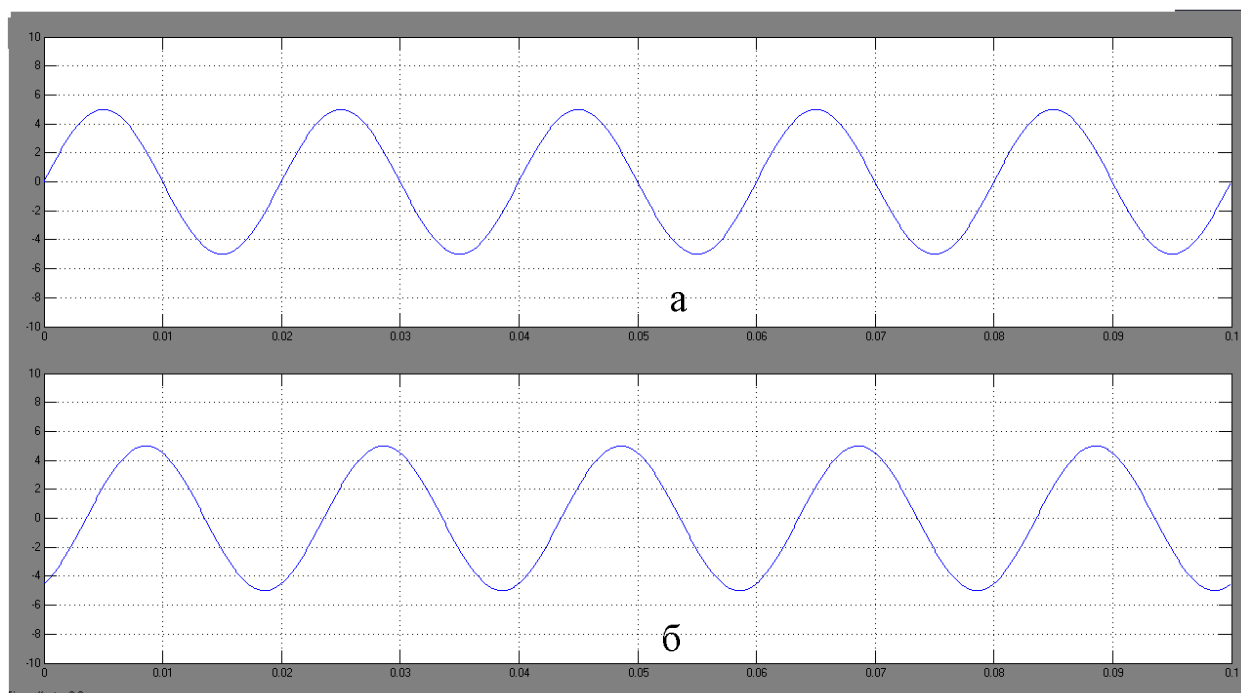


Рисунок 5.29 – Осцилограми вхідного та вихідного сигналів немінімально-фазової динамічної ланки

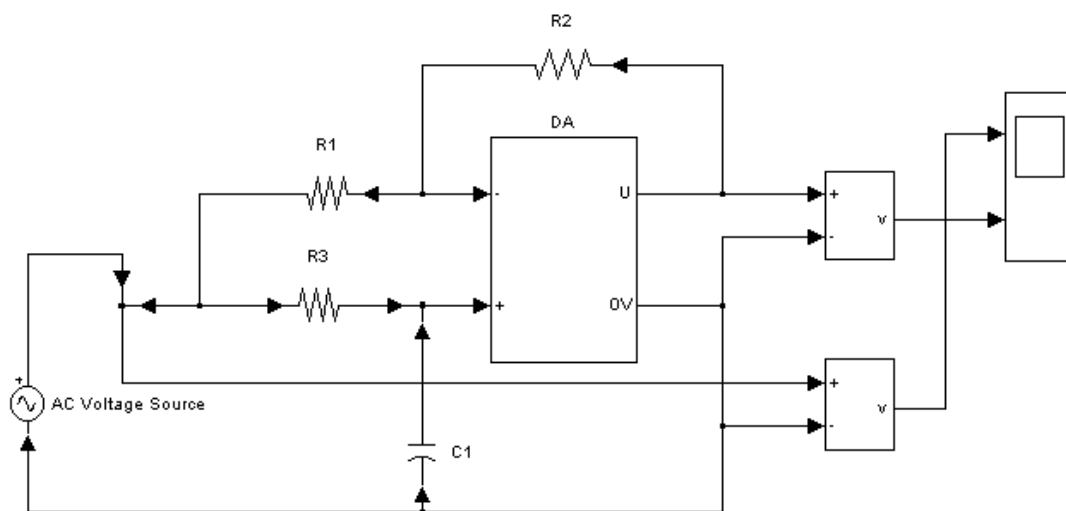


Рисунок 5.30 – Модель фазозсувного пристрою на операційному підсилювачі

Структурна схема фазозсуваючого пристрою приведена на рисунку 5.31. На рисунку 5.31 прийняті такі позначення: $K_i = \frac{R_2}{R_1}$;

$$K_n = K_i + 1; H(p) = \frac{1}{T \cdot p + 1}; T = R_3 \cdot C_1.$$

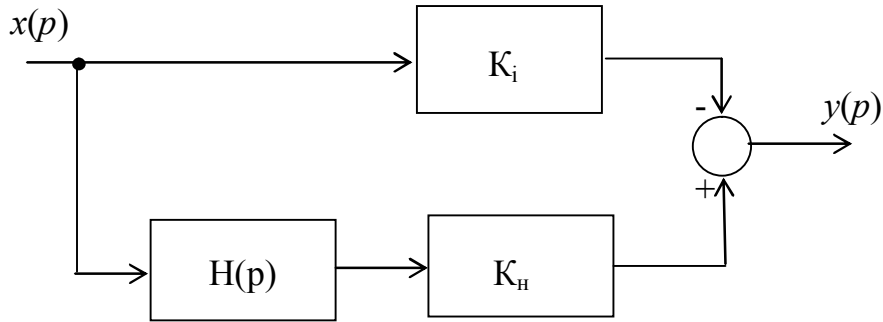


Рисунок 5.31 – Структурна схема фазозсувного пристрою

Згідно за структурною схемою одержуємо зв'язок між вхідним $x(p)$ і вихідним $y(p)$ сигналами

$$y(p) = x(p) \cdot [K_H(p) \cdot H(p) - K_i(p)]. \quad (5.32)$$

З урахуванням прийнятих на рисунку 5.31 позначень і умови, що $R_1 = R_2$, одержимо із (5.32) вираз для передавальної функції фазозсувного пристрою який співпадає з (5.28)

$$G(p) = \frac{1 - R_3 \cdot C_1 \cdot p}{1 + R_3 \cdot C_1 \cdot p}. \quad (5.33)$$

На рисунку 5.32 наведені осцилограми вхідного і вихідного сигналів частотою $f = 50$ Гц фазозсувного пристрою для $T = 0,002$ С.

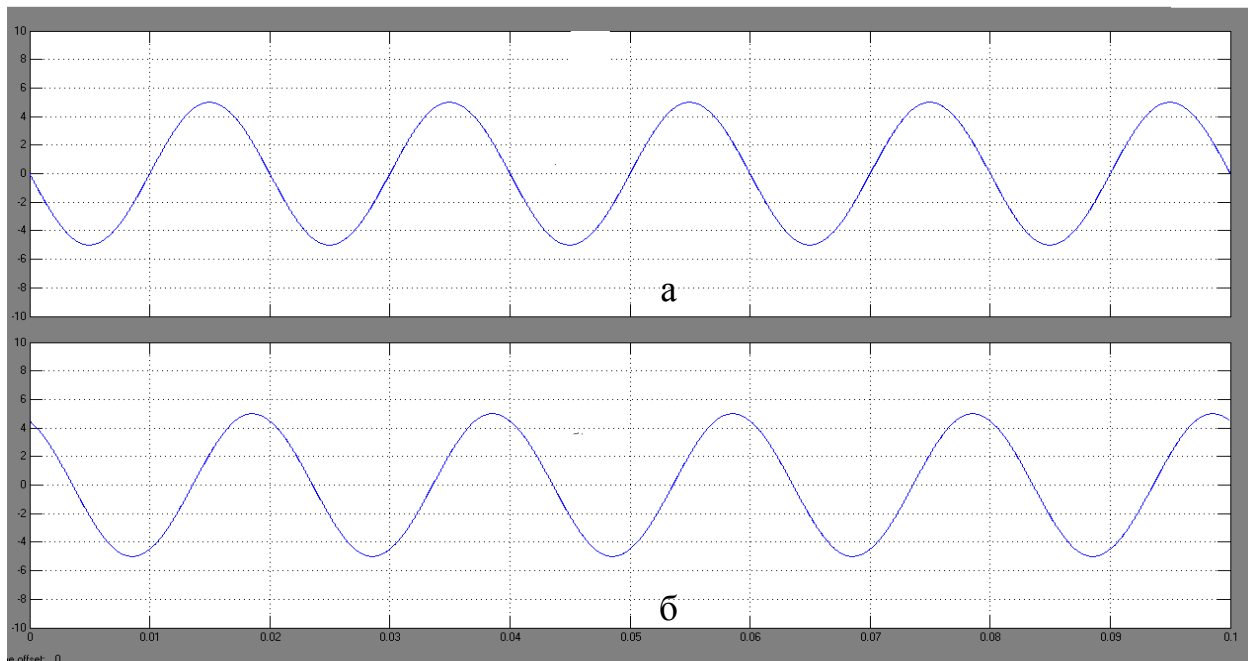


Рисунок 5.32 – Осцилограми вхідного і вихідного сигналів фазозсувного пристрою

5.2.8 Моделювання коливальної динамічної ланки

Передавальна функція коливальної ланки визначається виразом (2.105). Операторна форма перехідної функції коливальної ланки має вигляд

$$H(p) = \frac{1}{p \cdot [T^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T + 1]} \quad (5.34)$$

Функція (5.34) має три полюси:

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = \frac{-\xi \pm j \cdot a}{T}, \quad (5.35)$$

де $a = \sqrt{1 - \xi^2}$.

Застосувавши до (5.34) з урахуванням теореми розкладу (5.20) і вирази для полюсів (5.35) одержимо вираз для перехідної функції коливальної ланки

$$h(t) = 1 - \frac{(1 - \xi^2) \cdot \cos a \cdot t/T + a \cdot \xi \cdot \sin a \cdot t/T}{1 - \xi^2} \cdot e^{-\xi \cdot t/T}. \quad (5.36)$$

Одержаний вираз для перехідної функції визначає закон зміни реакції коливальної ланки на східчає вхідне діяння.

На рисунку 5.33 наведена MATLAB модель для дослідження перехідної функції коливальної ланки. При моделюванні розглянута коливальна ланка, стала часу якої дорівнює $T = 0,01$ с, а коефіцієнт демпфування $\xi = 0,25$.

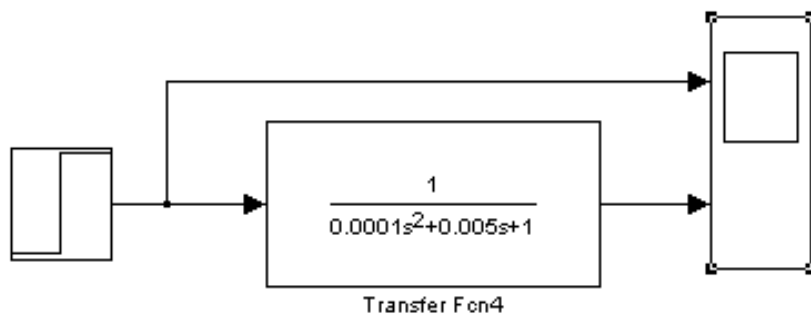


Рисунок 5.33 – Модель для дослідження перехідної функції коливальної ланки

На рисунку 5.34 подані результати моделювання перехідної функції.

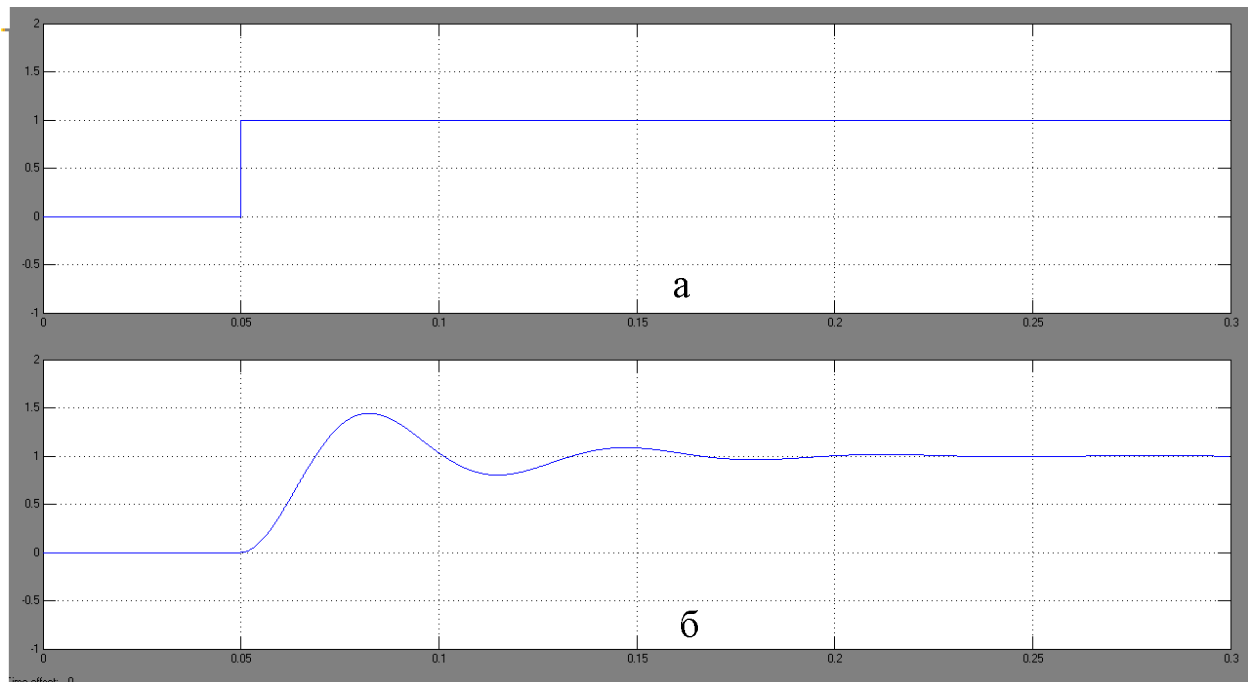


Рисунок 5.34 – Графіки перехідної функції коливальної ланки

На рисунку 5.35 наведена модель для дослідження перехідної функції коливальної ланки з використанням її моделі побудованої на операційних підсилювачах, у якій: $R1 = R2 = R3 = R4 = R6 = R7 = 20 \text{ кОм}$, $R5 = 6,67 \text{ кОм}$, $C1 = C2 = 0,5 \text{ мкФ}$. Дані параметри відповідають величинам сталої часу і коефіцієнта демпфірування коливальної ланки на рисунку 5.33. Результати моделювання наведені на рисунку 5.35.

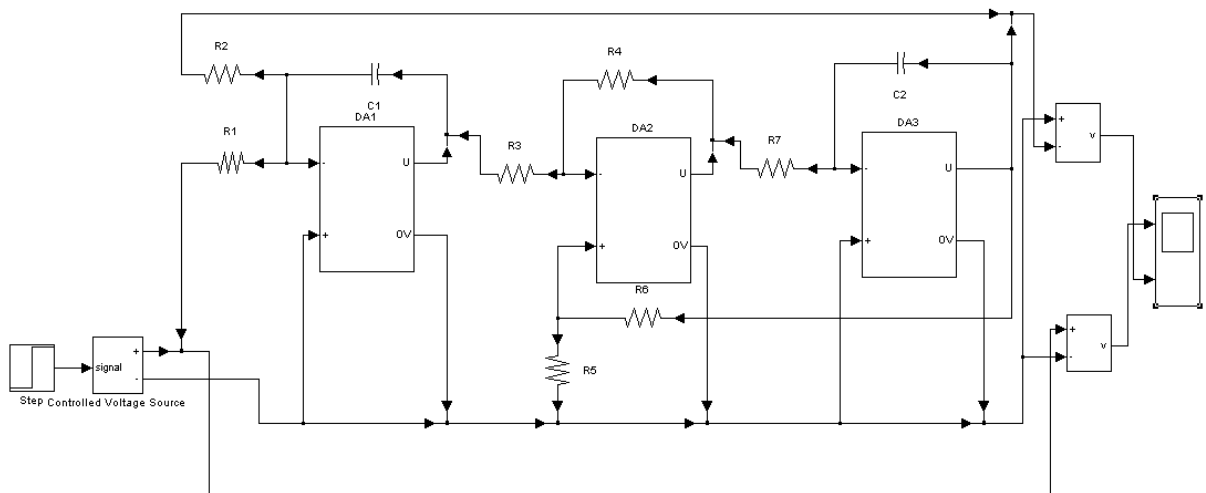


Рисунок 5.35 – Модель для дослідження перехідної функції коливальної ланки побудованої на операційних підсилювачах

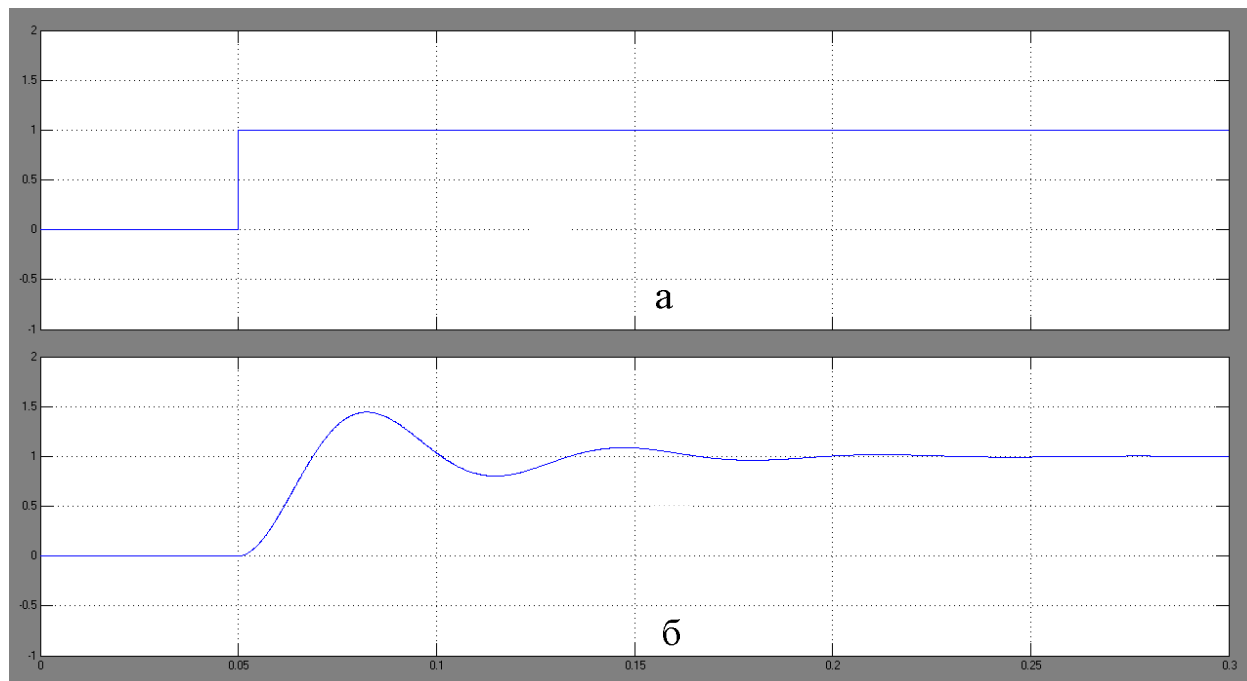


Рисунок 5.36 – Результати моделювання коливальної ланки

Аналіз одержаних результатів досліджень динамічних ланок вказує на адекватність застосованих моделей. Моделі побудовані на базі елементів бібліотеки MATLAB доцільно застосовувати і під час аналізу та синтезу систем автоматичного регулювання електромеханотронних систем. Застосування моделей систем автоматичного регулювання, в основу побудови яких покладена модель операційного підсилювача дає можливість проведення віртуальних експериментальних досліджень реальної електромеханотронної системи.

5.3 Динаміка системи автоматичного регулювання вихідної напруги перетворювача електричної енергії з ШІМ

5.3.1 Система автоматичного регулювання з неперервною моделлю перетворювача

Ця система застосовується для створення стабілізованого джерела постійного струму або для системи програмного регулювання. Об'єктом регулювання в такій системі є напівпровідниковий перетворювач електричної енергії, в окремому випадку – понижувальний перетворювач постійної напруги.

На рисунку 5.37 наведена узагальнена функціональна схема системи автоматичного регулювання вихідних параметрів імпульсного перетворювача постійної напруги понижувального типу, на якій: СК – система керування; РН – регулятор напруги; ДН – датчик напруги.

Силова частина перетворювача складається з ключа V , яка може бути виконана на транзисторах або на двоопераційних тиристорах. Система керу-

вання СК формує послідовність імпульсів керування періоду T , як це показано на рисунку 5.38. У системі керування формується пилоподібний опорний сигнал U_{on} період T якого визначає частоту широтно-імпульсної модуляції

$$U_{on}(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^{\gamma \cdot T} U_1 \cdot dt, \quad (5.37)$$

де U_1 – постійна напруга з якої інтегратором системи керування формується опорний сигнал;

T_0 – стала часу інтегратора системи керування;

$\gamma = \frac{t_i}{T}$ – відносна тривалість вихідного імпульсу системи керування.

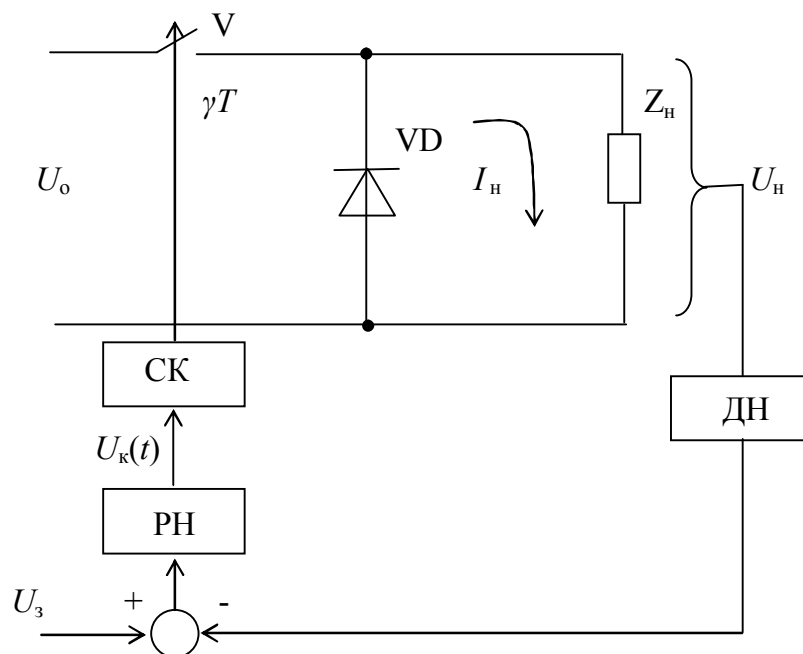


Рисунок 5.37 – Функціональна схема система автоматичного регулювання вихідних параметрів імпульсного перетворювача постійної напруги понижувального типу

Моменти формування вихідних імпульсів U_i системи керування визначаються умовою перемикання

$$U_{on}(t_\gamma) = U_k(t_\gamma). \quad (5.38)$$

Підставивши в (5.38) вираз (5.37) і виконавши перетворення з урахуванням того, що напруга $U_1 = const$ одержимо вираз, що визначає зв'язок між сигналом керування і регульованим параметром перетворювача

$$\gamma = \frac{U_k(t_\gamma)}{U_1}. \quad (5.39)$$

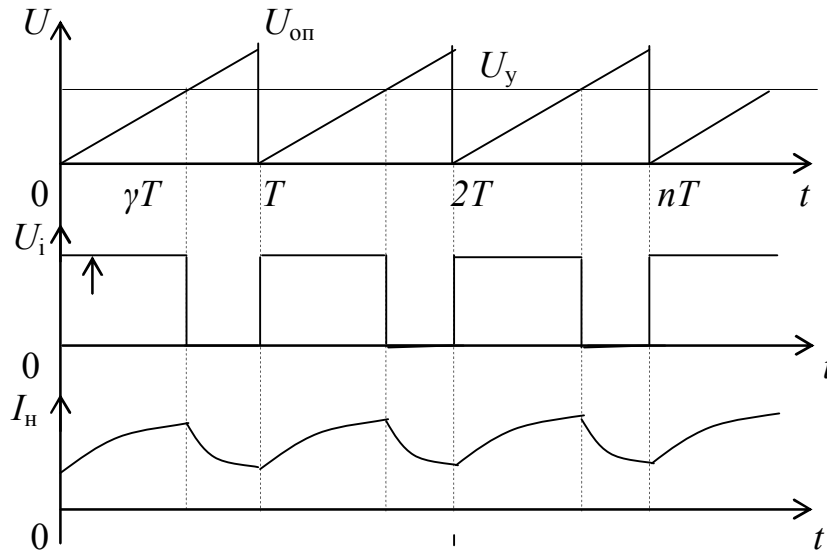


Рисунок 5.38 – Послідовність імпульсів керування

Вираз (5.39) визначає регульовальну характеристику системи керування перетворювача.

Під дією імпульсів системи керування в перетворювачі здійснюється комутація силового ключа V унаслідок чого на навантаженні Z формується напруга U_n середнє значення якої визначається виразом

$$U_n = \frac{1}{T} \int_0^{\gamma \cdot T} U_o \cdot dt. \quad (5.40)$$

Ураховуючи те, що напруга живлення $U_o = const$ із виразу (5.40) одержуємо

$$U_n = \gamma \cdot U_o. \quad (5.41)$$

Підставивши в (5.41) вираз (5.39), одержуємо вираз для регульовальної характеристики перетворювача постійної напруги

$$U_n = \frac{U_o}{U_1} \cdot U_k(t_\gamma). \quad (5.42)$$

Виконавши диференціювання (5.42), одержимо вираз для статичного коефіцієнта передачі перетворювача

$$K_{\Pi} = \frac{U_o}{U_1}. \quad (5.43)$$

Структурна схема системи автоматичного регулювання вихідної напруги перетворювача постійної напруги наведена на рисунку 5.39.

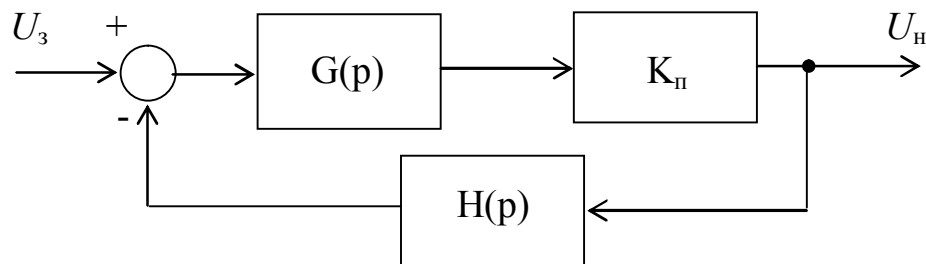


Рисунок 5.39 – Структурна схема системи автоматичного регулювання вихідної напруги перетворювача постійної напруги

До складу структурної схеми системи автоматичного регулювання входять:

$G(p)$ – передавальна функція регулятора напруги (далі РН);

$K_{п}$ – коефіцієнт передачі перетворювача;

$H(p)$ – передавальна функція датчика напруги.

Датчик напруги забезпечує узгодження величин вихідної напруги перетворювача і сигналу зворотного зв'язку, а також гальванічне розділення між силовою частиною схеми і регулятором РН, що поліпшує завадостійкість схеми та безпеку її обслуговування.

Полоси пропускання перетворювача і датчика напруги значно ширші від полоси пропускання системи автоматичного регулювання, що дає можливість при подальших дослідженнях замінити їх без інерційними ланками до коефіцієнтів передач $K_{п}$ і $K_{д}$. В свою чергу, це дає можливість під час аналізу й синтезу системи регулювання застосування методу частотних характеристик який наведено в п. 3.2.5.

Вихідними даними для системи автоматичного регулювання, що проектується є:

- величина похибки в усталеному режимі $\varepsilon = 0$;
- величина перерегулювання $\delta \leq 10\%$;
- тривалість перехідного процесу $t_{п} = 10 \cdot 10^{-3}$ С.

Для виконання вимоги величини похибки система автоматичного регулювання повинна бути астатичною. Для цього, в якості регулятора напруги застосовуємо інтегральну динамічну ланку

$$G(p) = \frac{1}{T \cdot p}. \quad (5.44)$$

Згідно з формулою (3.73) та рисунку 3.18 одержуємо величину частоту зрізу системи

$$\omega_3 = \frac{\pi \cdot 1,3}{10 \cdot 10^{-3}} = 408 \text{ C}^{-1}, \quad (5.45)$$

або $f_3 = 65 \text{ Гц}$.

Стала часу регулятора

$$T = \frac{1}{\omega_3} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ C}. \quad (5.46)$$

Графік логарифмічної частотної характеристики розімкнутої системи подано на рисунку 5.40.

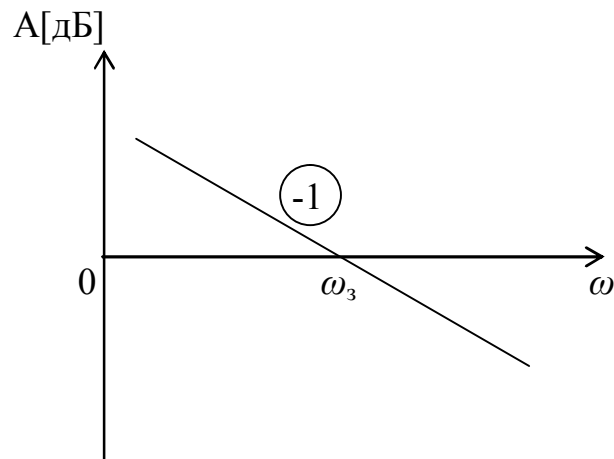


Рисунок 5.40 – Асимптотична ЛАХ розімкнутої системи

Передавальна функція замкнутої системи автоматичного регулювання вихідної напруги перетворювача

$$W(p) = \frac{K_{II} \cdot G(p)}{1 + K_{II} \cdot K_d \cdot G(p)} \quad (5.47)$$

При $K_{II} \cdot K_d = 1$ і з врахуванням (5.44) одержуємо

$$W(p) = \frac{K_{II}}{T \cdot p + 1}. \quad (5.48)$$

Аналогічно з (5.19) та (5.20) одержуємо вираз для перехідної функції системи автоматичного регулювання

$$h(t) = K_{II} \left(1 - e^{-t/T} \right) \quad (5.49)$$

На рисунку 5.41 подані результати розрахунку перехідної функції (5.49), що виконані в середовищі Mathcad. На рисунку 5.42 наведена імітаційна модель системи автоматичного регулювання вихідної напруги перетворювача побудованого в середовищі MATLAB, а на рисунку 5.43 представлені осцилограми вхідного та вихідного сигналів.

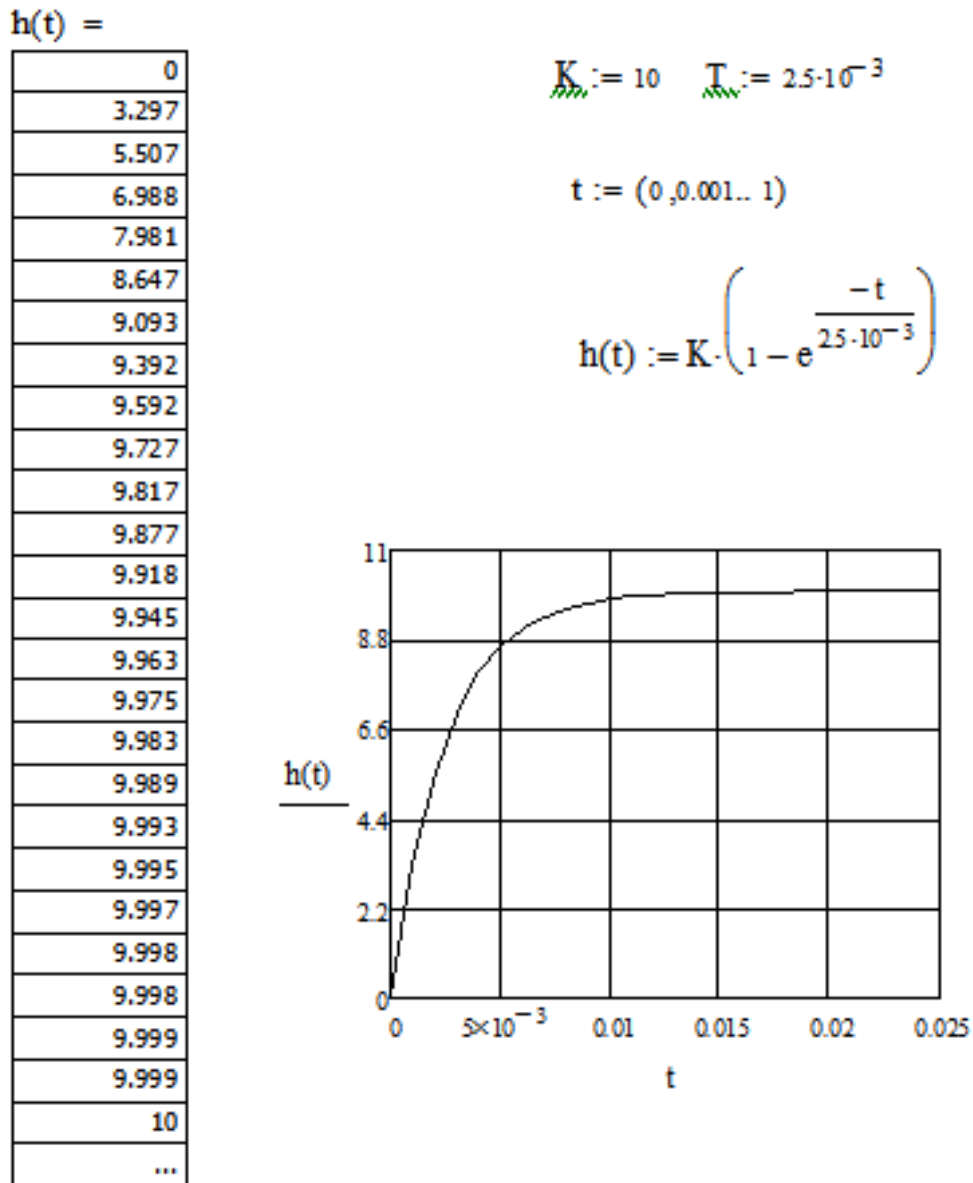


Рисунок 5.41 – Результати розрахунку перехідної функції

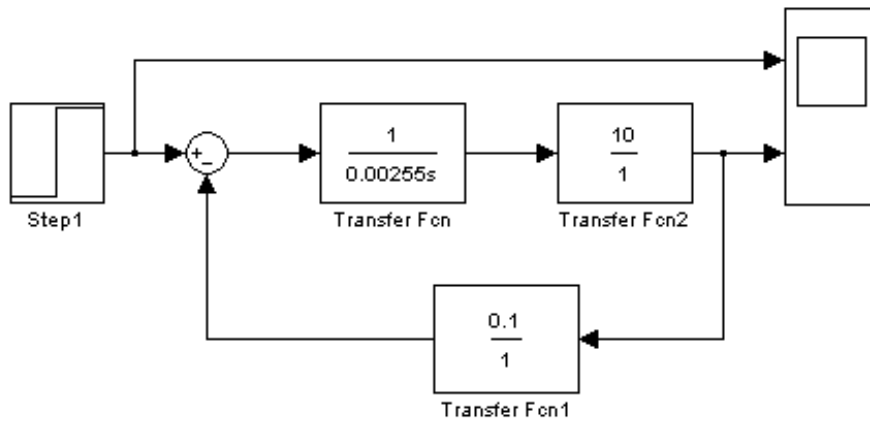


Рисунок 5.42 – Імітаційна модель системи автоматичного регулювання вихідної напруги перетворювача

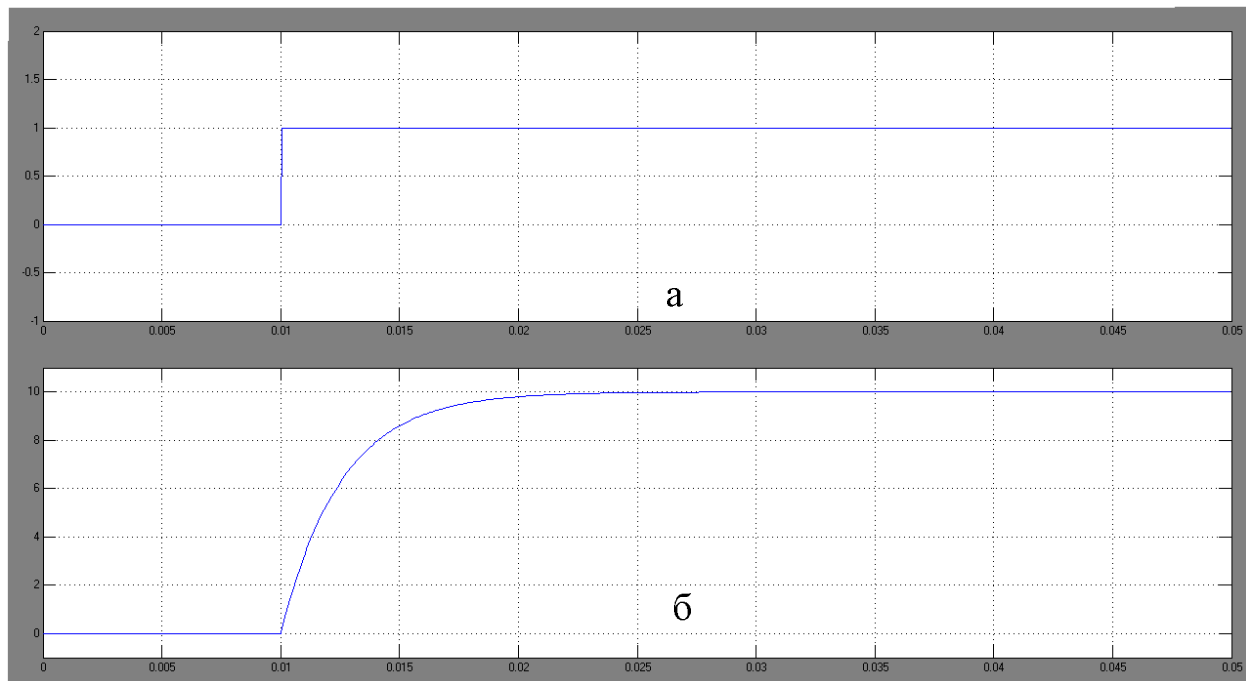


Рисунок 5.43 – Осцилограми вхідного і вихідного сигналів вихідної напруги перетворювача

Одержані аналітичним методом і шляхом імітаційного моделювання результати свідчать про те, що спроектована система автоматичного регулювання вихідної напруги перетворювача постійної напруги відповідає заданим умовам. Це підкреслює коректність застосування методу частотних характеристик для аналізу та синтезу неперервних систем.

5.3.2 Аналіз динамічних характеристик системи автоматичного регулювання струму збудження двигуна постійного струму

У цьому параграфі як приклад виконана розробка системи автоматичного регулювання струму обмотки збудження електричного двигуна постійного струму. Узагальнена функціональна схема системи регулювання зображена на рисунку 5.44.

Живлення обмотки збудження (ОЗ) двигуна (Д) виконується від керуваного тиристорного випрямляча (ТВ). Контроль за струмом обмотки збудження здійснюється за допомогою шунта $R_{ш}$, сигнал якого підсилюється датчиком струму (ДС). Датчик струму також забезпечує гальванічне розділення між силовою частиною системи і регулятором (Р), що поліпшує захист системи від завад та безпеку її обслуговування.

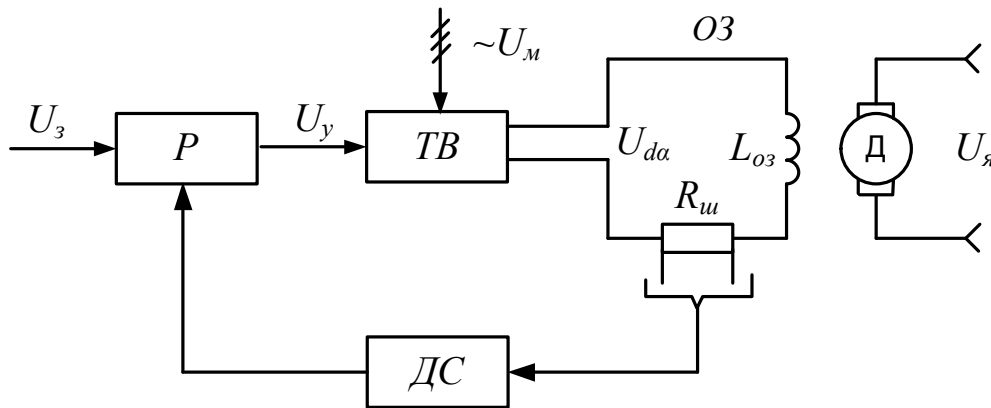


Рисунок 5.44 – Функціональна схема системи регулювання

- Розробка системи автоматичного регулювання включає в себе таке:
- розробка структурної схеми системи регулювання струму збудження;
 - аналіз статичних та динамічних характеристик елементів системи;
 - синтез передавальної функції регулятора;
 - аналіз сталого та перехідного процесів спроектованої системи регулювання;
 - синтез електричної схеми регулятора.

Розробка структурної схеми системи регулювання струму збудження.

Відповідно до завдання розробки та функціональної схеми на рисунку 5.45 наведена структурна схема системи автоматичного регулювання струму збудження електричного двигуна. Структурна схема вміщує в собі такі елементи: вузол порівняння, регулятор струму $G(p)$, тиристорний випрямляч $H_{ТВ}(p)$, обмотка збудження $H_{ОЗ}(p)$, датчик струму $H_{ДС}(p)$.

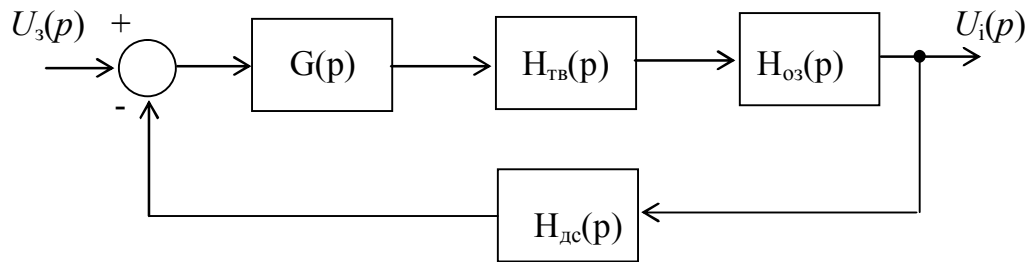


Рисунок 5.45 – Структурна схема системи автоматичного регулювання

Аналіз статичних та динамічних характеристик елементів системи. На даному етапі виконується наступне:

- вивід формули передавальної функції обмотки збудження;
- розрахунки регулювальної характеристики тиристорного випрямляча;
- лінеаризація регулювальної характеристики тиристорного випрямляча;
- розрахунок коефіцієнта підсилення датчика струму;
- розрахунки та побудова частотних характеристик електричного ланцюга, до складу якого входять тиристорний випрямляч, обмотка збудження та датчик струму.

Для виведення передавальної функції обмотки збудження користуються її еквівалентною електричною схемою, що міститься на рисунку 5.46. Наведена еквівалентна схема є лінеаризованою відносно положення робочої точки на кривій намагнічування [27].

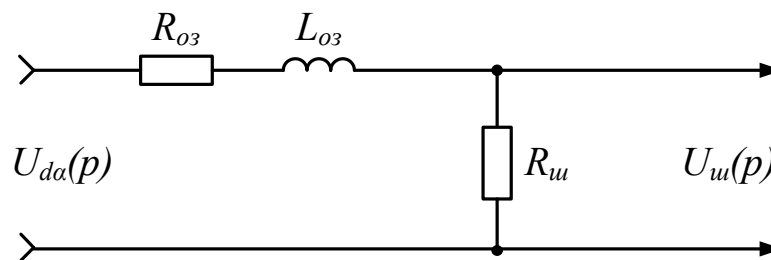


Рисунок 5.46 – Еквівалентна електрична схема обмотки збудження

На рисунку 5.46 надані такі позначення: R_{oz} – активна складова частина опору обмотки; L_{oz} – індуктивність обмотки; $R_{ш}$ – опір шунта.

Передавальну функцію одержують, як відношення вихідного та вхідного опорів схеми, записаних у формі перетворювання Лапласа:

$$H_{O3}(p) = \frac{U_{ш}(p)}{U_{да}(p)} = \frac{Z_{вих}(p)}{Z_{вхід}(p)}, \quad (5.50)$$

де $Z_{вих}(p) = R_{ш}$; $Z_{вхід}(p) = R_{oz} + R_{ш} + L_{oz} \cdot p$.

Підставивши в (5.50) вирази для вхідного та вихідного опорів еквівалентної схеми, одержимо

$$H_{O3}(p) = \frac{K_{O3}}{T_{O3} \cdot p + 1}, \quad (5.51)$$

$$\text{де } K_{O3} = \frac{R_{II}}{R_{II} + R_{O3}}; \quad T_{O3} = \frac{L_{O3}}{R_{III} + R_{O3}}.$$

Живлення обмотки збудження виконує тиристорний випрямляч з лінійним опорним сигналом у системі імпульсно-фазового керування. Наступний етап розробки пов'язаний з визначення властивостей тиристорного випрямляча як елемента системи автоматичного регулювання. Процес побудови регулювальної характеристики тиристорного випрямляча, лінеаризації цієї характеристики і визначення коефіцієнта передачі показано в прикладі 1 параграфу 1.6.

Неперервний струм в обмотці збудження зберігається до кута регулювання тиристорного випрямляча, величина якого

$$\alpha_{\max} = \arctg \frac{\omega_1 \cdot L_{O3}}{R_{O3}}, \quad (5.52)$$

де $\omega_1 = \omega_o \cdot m$.

Підстановка формули (5.52) у формулу (1.39) дає значення максимальної величини управляючої напруги U_y для режиму неперервного струму в обмотці збудження:

$$U_{y \max} = \alpha_{\max} \cdot \frac{U_o}{\omega_o \cdot T_o}. \quad (5.53)$$

Коефіцієнт передачі тиристорного випрямляча визначається виразом (1.44). Одержану величину коефіцієнта підсилення перевіряють графічним методом:

$$K_{TB} \approx \frac{\Delta U_{d\alpha}}{\Delta U_y}, \quad (5.54)$$

де відхилення ΔU_y задаємо симетрично U_{y0} .

Із за неповної керованості (дискретності) тиристорного випрямляча реакція його вихідної напруги на зміну вхідного керуючого сигналу має запізнення, яке приблизно дорівнює половині інтервалу дискретності:

$$\tau = \frac{1}{2 \cdot f_o \cdot m}, \quad (5.55)$$

де m – пульсність випрямляча.

Для поліпшення завадостійкості тиристорного випрямляча на вході його системи імпульсно-фазового управління встановлюють фільтрувальну ланку з передавальною функцією:

$$H_{\Phi}(p) = \frac{1}{T_{\Phi} \cdot p + 1}, \quad (5.56)$$

де $T_{\Phi} = \frac{1}{m \cdot f_o}$.

Ураховуючи особливості динамічних параметрів на структурній схемі системи автоматичного регулювання, передавальна функція керованого випрямляча має вигляд передавальної функції аперіодичної ланки із запізненням:

$$H_{TB}(p) = \frac{K_{TB} \cdot e^{-\tau p}}{T_{\Phi} \cdot p + 1}. \quad (5.57)$$

Шунт для вимірювання струму обмотки збудження вибирають згідно з його величиною I_0 за таблицею 5.2.

Таблиця 5.2 – Величина шунта для вимірювання

I_w, A	5	10	20	30	50	100
$U_w, \text{мВ}$	75	75	75	75	75	75

Величину опору шунта розраховують, використовуючи співвідношення:

$$R_w = \frac{U_w}{I_w}. \quad (5.58)$$

Розрахунок коефіцієнта підсилення датчика струму виконують в установленому режимі. При цьому зробимо допущення, що добуток коефіцієнтів передачі тиристорного випрямляча, обмотки збудження та датчика струму, дорівнює одиниці, тоді

$$K_{ДС} = \frac{1}{K_{TB} \cdot K_{OЗ}}, \quad (5.59)$$

Датчик струму має передавальну функцію аперіодичної ланки першого порядку зі сполучною частотою $f_{ДС}$, та коефіцієнтом підсилення $K_{ДС}$.

$$H_{ДС}(p) = \frac{K_{ДС}}{T_{ДС} \cdot p + 1}. \quad (5.60)$$

де $T_{ДС} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_{ДС}}$ – стала часу датчика струму.

Для розрахунків частотних характеристик аналізованої системи автоматичного регулювання записуємо її загальну передавальну функцію:

$$W(p) = H_{ТВ}(p) \cdot H_{ОЗ}(p) \cdot H_{ДС}(p). \quad (5.61)$$

Вираз (5.61) з урахуванням передавальних функцій (5.51), (5.56), (5.60) та формули (5.59) приймає вигляду

$$W(p) = \frac{1}{(T_{ОЗ} \cdot p + 1) \cdot (T_{\phi} \cdot p + 1) \cdot (T_{ДС} \cdot p + 1)}. \quad (5.62)$$

Методики визначення амплітудно-частотної і фазо-частотної характеристик наведені в п. 2.9.2 та п. 2.9.3. Перейшовши в частотну область в (5.62) і виконавши перетворення, одержимо

$$W(j\omega) = \frac{1}{U_3(\omega) + jV_3(\omega)}, \quad (5.63)$$

де $U_3(\omega) = 1 - \omega^2 \cdot [T_{ОЗ} \cdot T_{\phi} + T_{ДС} \cdot (T_{ОЗ} + T_{\phi})]$;
 $V(j\omega) = \omega(T_{ОЗ} + T_{\phi} - \omega^2 \cdot T_{ОЗ} \cdot T_{\phi} \cdot T_{ДС})$.

Згідно з формулами 2.139, 2.140 і 2.141, одержимо

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{U_3^2(\omega) + V_3^2(\omega)}}, \quad (5.64)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{V_3(\omega)}{U_3(\omega)} - \frac{\pi}{m}; \quad (5.65)$$

де $\frac{\pi}{m}$ – додатковий кут, що враховує запізнення (5.55).

На рисунку 5.47 та рисунку 5.48 представлено результати розрахунків частотних характеристик для $L_{ОЗ} = 0,15$ Гн, $R_{ОЗ} = 10$ Ом та граничної частоти полоси пропускання датчика струму $f_{дс} = 1000$ Гц. Для заданих параметрів стала часу відповідно дорівнюють $T_{ОЗ} = 0,015$ С і $T_{ДС} = 0,159 \cdot 10^{-3}$ С. Живлення обмотки збудження виконується від тиристорного перетворювача з $m = 6$. Відповідно до формули (5.36) стала часу $T_{\phi} = 3,3 \cdot 10^{-3}$ С.

$$\begin{aligned}
T_1 &:= 0.015 && \text{(Стала часу ОЗ)} \\
T_2 &:= 3.3 \cdot 10^{-3} && \text{(Стала часу Ф)} \\
T_3 &:= 0.159 \cdot 10^{-3} && \text{(Стала часу ДС)} \\
\omega &:= 0, 0.1 \dots 10000 \\
U(\omega) &:= 1 - \omega^2 \cdot [T_1 \cdot T_2 + T_3 \cdot (T_1 + T_2)] \\
V(\omega) &:= \omega \cdot (T_1 + T_2 - \omega^2 \cdot T_1 \cdot T_2 \cdot T_3) \quad + \\
A_1(\omega) &:= 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2}} \right)
\end{aligned}$$

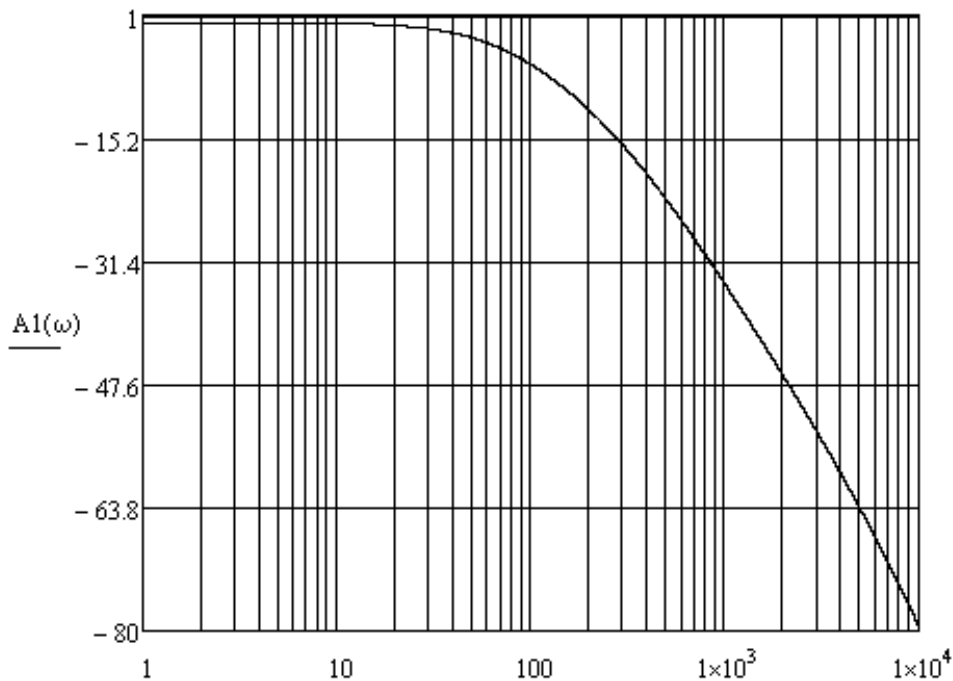


Рисунок 5.47 – Результат розрахунку амплітудно-частотної характеристики

Розраховуючи частотні характеристики, можна замість ω у формули підставляти f , пам'ятаючи, що $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$. Для побудови логарифмічних частотних характеристик розраховують амплітудну характеристику в децибелах:

$$A[\text{дБ}] = 20 \cdot \lg A. \quad (5.66)$$

Побудову графіків АЧХ та ФЧХ виконують, використовуючи лінійний і логарифмічний масштаби. Для побудови логарифмічних частотних характеристик по осі частот відкладають логарифми частот $f_{\text{л}} = \lg f$, користуючись одиницями виміру октава та декада. По осі модуля коефіцієнта підси-

лення відкладають його величини у децибелах. Величини фазового кута φ відкладають у градусах. Для побудови графіків використовують загальну вісь частот.

Синтез передавальної функції регулятора

Відповідно до п. 3.2.5 будемо графік логарифмічної асимптотичної амплітудно-частотної характеристики. Під час побудови асимптотичної характеристики пам'ятають, що сполучні частоти (ω_{cn}) передавальної функції $W(p)$ розраховуються як

$$\omega_{O3} = \frac{1}{T_{O3}} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ C}; \quad \omega_{\phi} = \frac{1}{T_{\phi}} = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ C}; \quad \omega_{ДС} = \frac{1}{T_{ДС}} = 1,59 \cdot 10^{-4} \text{ C}.$$

$$\phi(\omega) := \frac{180 \cdot \left(-\text{atan} \left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)} \right) - \frac{\pi}{6} \right)}{\pi}$$

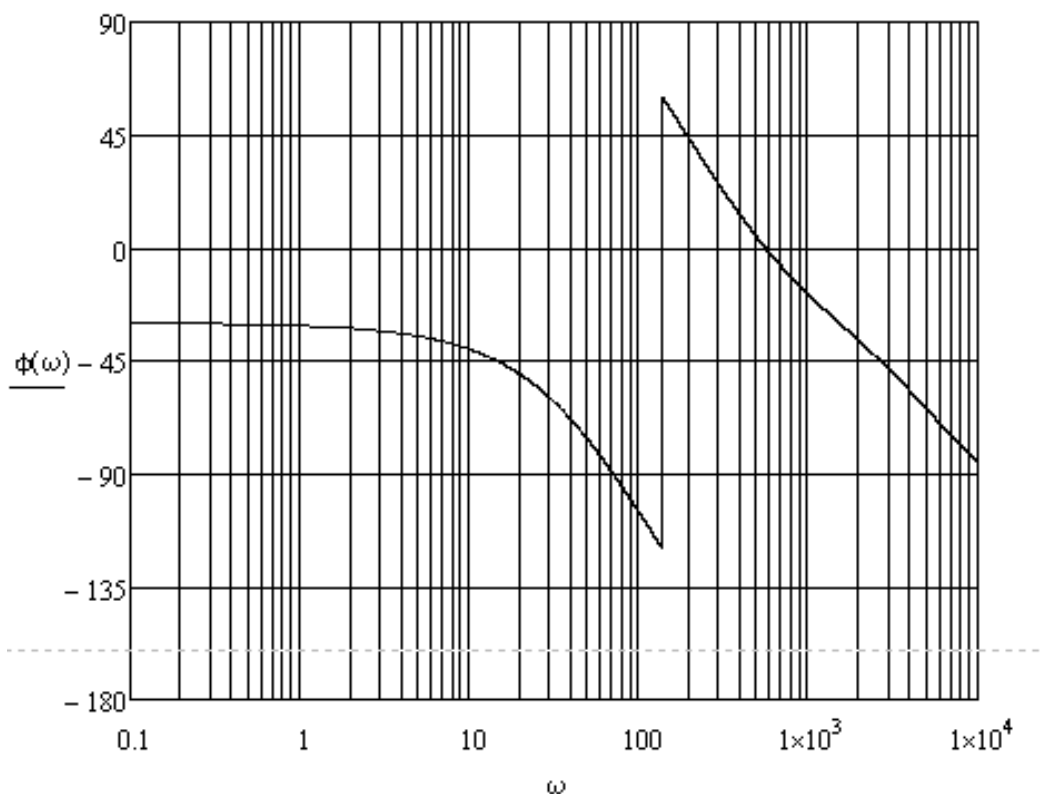


Рисунок 5.48 – Результат розрахунку фазо-частотної характеристики

Нахил асимптоти для частот $\omega \geq \omega_{cn}$ у ланки першого порядку 20 дБ/дек, ланки другого порядку 40 дБ/дек і т. д. Асимптотичні амплітудно-частотні характеристики розімкнутої системи наведені на рисунку 5.49. На побудованих логарифмічних частотних характеристиках розімкнутої системи визна-

чають запас стійкості за коефіцієнтом підсилення ΔK та запас стійкості за фазою $\Delta\varphi$ (див. рис. 3.17).

Відповідно до формули (3.73) і рисунку 3.18 величина частоти зрізу проектуємої системи визначається як

$$f_3 = \frac{\lambda_\delta}{2 \cdot t_{\Pi}} = 65 \text{ Гц}, \quad (5.67)$$

де $t_{\Pi} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ С}$, $\lambda_\delta = 1,3$.

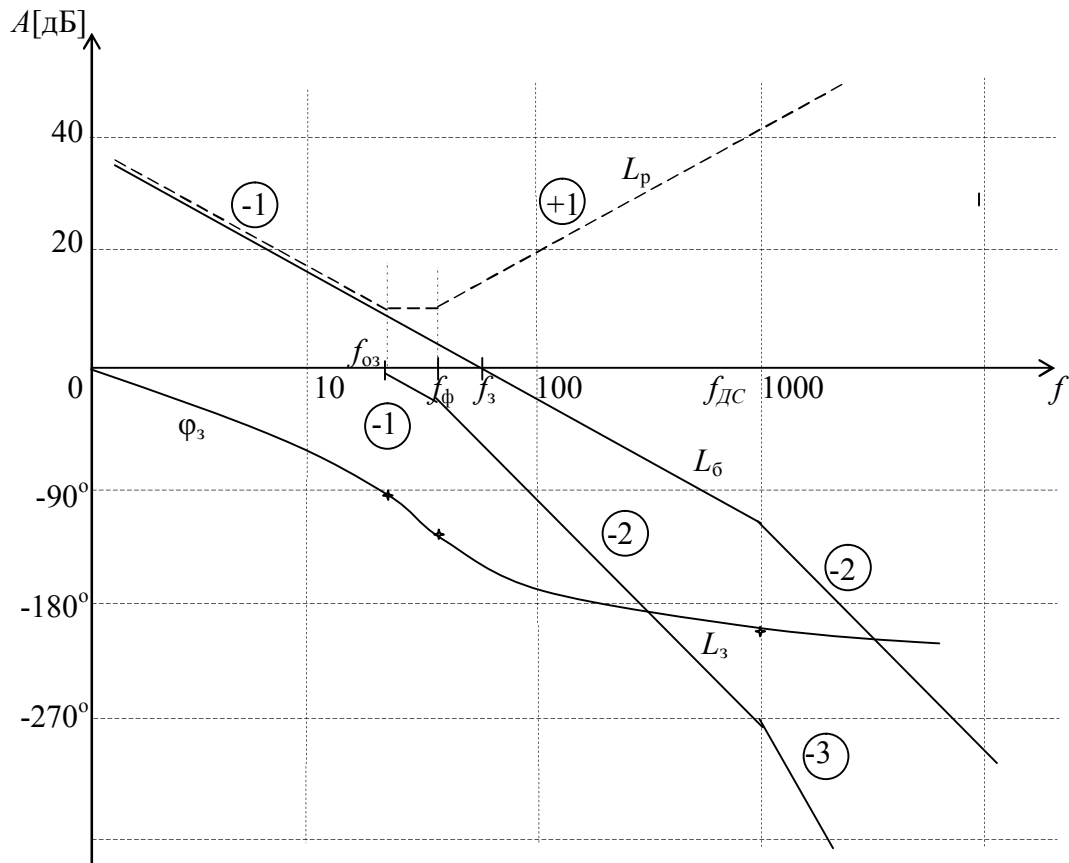


Рисунок 5.49 – Асимптотичні амплітудно-частотні характеристики розімкненої системи

Асимптотичну логарифмічну амплітудну характеристику регулятора (L_p) одержана згідно з формулою

$$L_p = L_б - L_3. \quad (5.68)$$

За асимптотичною ЛАХ регулятора L_p одержуємо його передавальну функцію

$$G(p) = \frac{(T_{оз} \cdot p + 1) \cdot (T_\phi \cdot p + 1)}{T_3 \cdot p \cdot (T_{дс} \cdot p + 1)}. \quad (5.79)$$

Передавальну функцію розімкнутої скорегованої системи регулювання одержимо за асимптотичною ЛАХ L_6

$$W_p(p) = \frac{1}{T_3 \cdot p \cdot (T_{дс} \cdot p + 1)}. \quad (5.71)$$

Передавальна функція замкнутої системи

$$W_3(p) = \frac{1}{T_0^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T_0 \cdot p + 1}, \quad (5.72)$$

де $T_0 = \sqrt{T_3 \cdot T_{дс}}$, $\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_3}{T_{дс}}}$.

Підставивши у вираз для коефіцієнта демпфування значення сталих часу, одержимо $\xi = 1,94$. Величина ξ вказує на те, що перехідний процес у системі є експоненціальним.

Для аналізу динамічних параметрів спроектованої замкнутої системи автоматичного регулювання розглянемо перехідну функцію. Зображення перехідної функції

$$H(p) = \frac{1}{p \cdot (T_0^2 \cdot p^2 + 2 \cdot \xi \cdot T_0 \cdot p + 1)}. \quad (5.73)$$

Полюса зображення перехідної функції: $p_1=0$; $p_{2,3} = \frac{-\xi \pm a}{T_0}$,

де $a = \sqrt{\xi^2 - 1}$.

Застосувавши до (5.73) теорему розкладу, та виконавши перетворення, одержуємо

$$h(t) = 1 - \frac{e^{-\frac{\xi \cdot t}{T_0}}}{2} \cdot \frac{[\xi(\xi + a) - 1] \cdot e^{\frac{a \cdot t}{T_0}} + [\xi(\xi - a) - 1] \cdot e^{-\frac{a \cdot t}{T_0}}}{\xi^2 - 1}. \quad (5.74)$$

На рисунку 5.50 наведені розрахунок перехідної функції в програмі MATCAD і графік перехідного процесу розробленої системи. Крива вхідного процесу вказує на те, що розроблена система автоматичного регулювання відповідає завданню на проектування.

$$T1 := 2.45 \cdot 10^{-3} \text{ Стала часу } T_3$$

$$T2 := 1.59 \cdot 10^{-4} \text{ Стала часу } T_{дс}$$

$$T0 := \sqrt{T1 \cdot T2}$$

$$\xi := \frac{\sqrt{\frac{T1}{T2}}}{2} \quad a := \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$t := 0, 0.00002 \dots 0.025$$

$$h(t) := 1 - \frac{e^{-\xi \cdot \frac{t}{T0}} \left[[\xi \cdot (\xi + a) - 1] \cdot e^{\frac{a \cdot t}{T0}} + [\xi \cdot (\xi - a) - 1] \cdot e^{-\frac{a \cdot t}{T0}} \right]}{2 \cdot (\xi^2 - 1)}$$

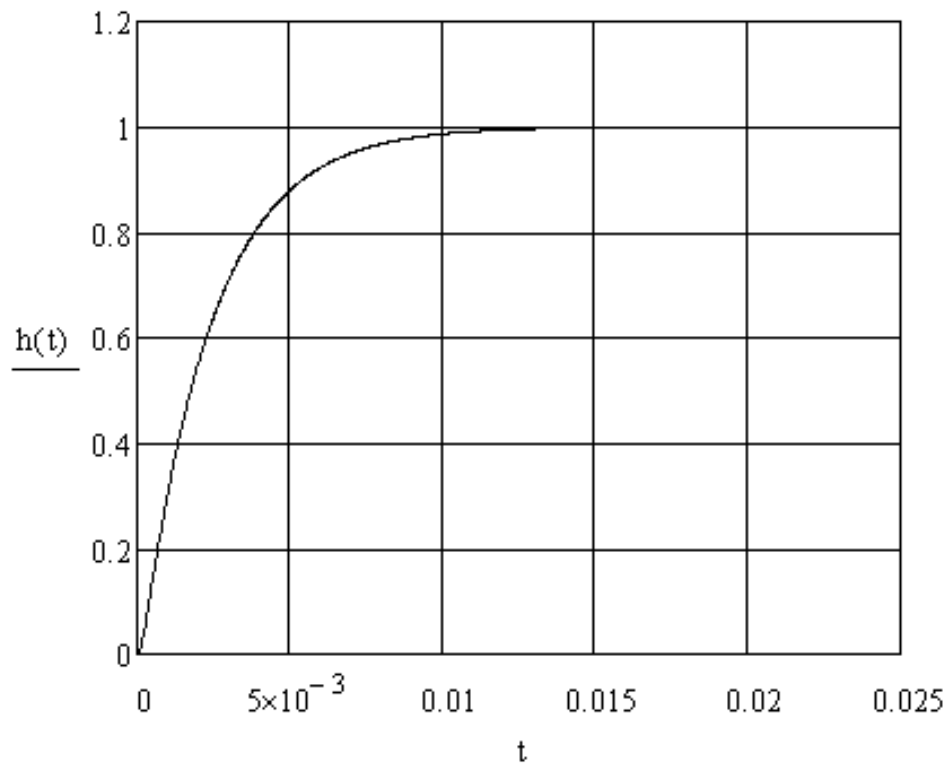


Рисунок 5.50 – Розрахунок перехідної функції в програмі MATCAD і графік перехідного процесу

На рисунку 5.51 наведена Matlab модель, а на рисунку 5.52 подані осцилограми вхідного і вихідного сигналів системи регулювання.

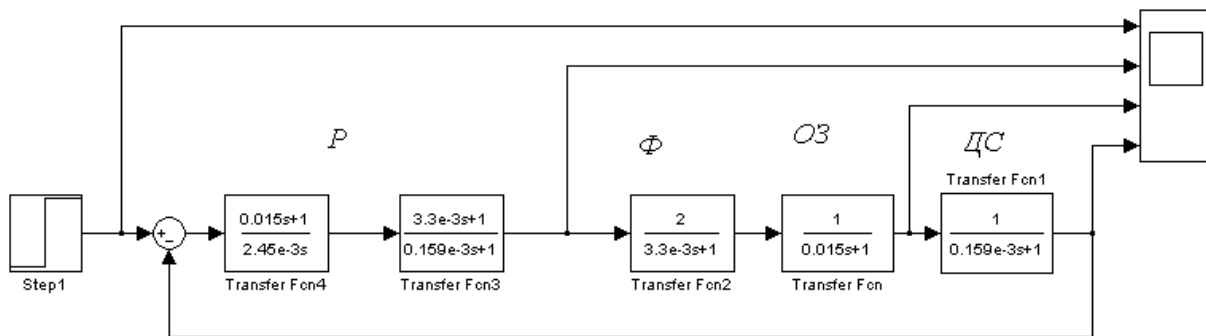


Рисунок 5.51 – Імітаційна модель розробленої системи

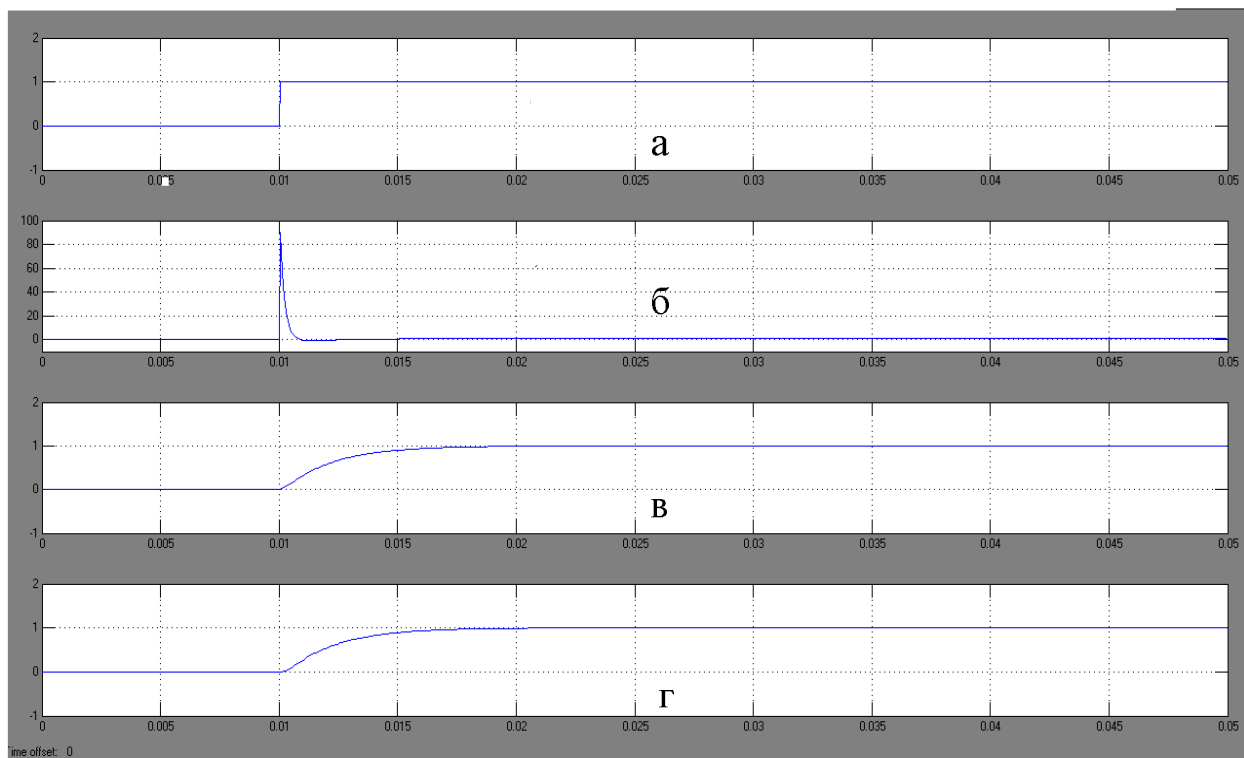


Рисунок 5.52 – Осцилограми вхідного і вихідного сигналів системи регулювання розробленої системи

На рисунку 5.52 наведені такі осцилограми:

- а) вхідне діяння;
- б) вихідний сигнал регулятора;
- в) сигнал пропорційний струму обмотки збудження;
- г) вихідний сигнал датчика струму.

Порівняння рисунка 5.50 і рисунка 5.52 вказує на адекватність результатів розрахунків системи автоматичного регулювання і експериментальних досліджень на імітаційній моделі.

Синтез електронної схеми регулятора. Схемну реалізацію передавальної функції регулятора виконують на пасивних та активних елементах. Пасивну електричну ланку виконують відповідною до передавальної функції шляхом з'єднання резисторів та конденсаторів. Синтез електричної схеми виконують, використовуючи формулу (5.50). У разі послідовного з'єднання пасивних електричних ланок враховують те, що попередня ланка повинна бути джерелом напруги щодо наступної. Ця умова виконується, якщо вхідний опір наступної електричної ланки значно більший вихідного опору попередньої.

Активну електричну ланку виконують на операційних підсилювачах. Синтез схеми базується на тому, що передавальна функція електричної схеми на операційному підсилювачі з використанням його інвертувального входу (див. рис. 5.50) має вигляд:

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}, \quad (5.75)$$

де $Z_2(p)$ – опір елементів зворотного зв'язку;
 $Z_1(p)$ – опір елементів на вході.

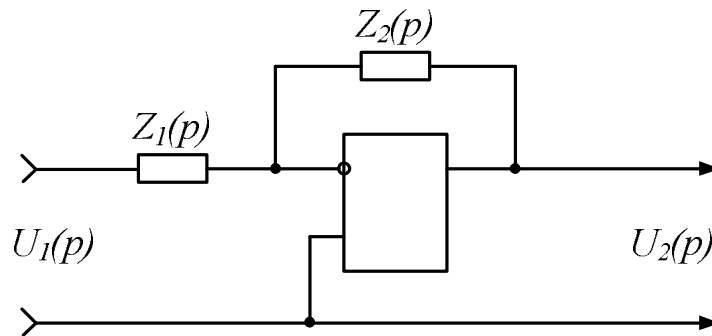
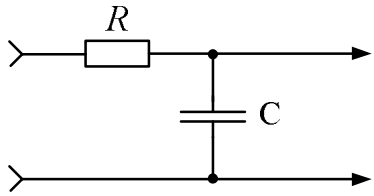
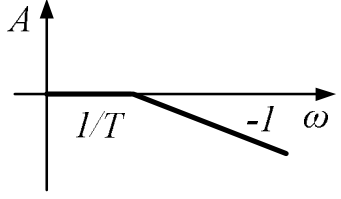
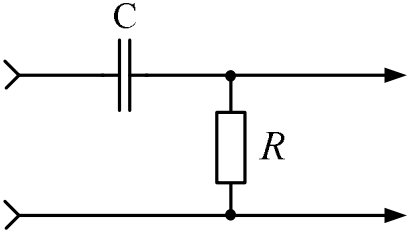
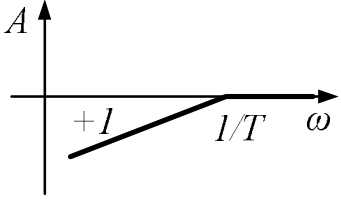
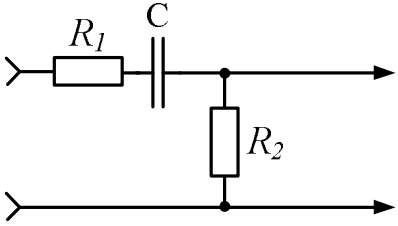
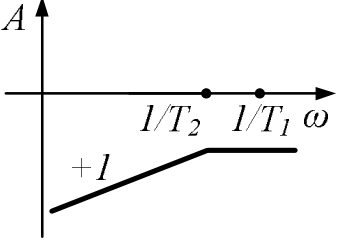
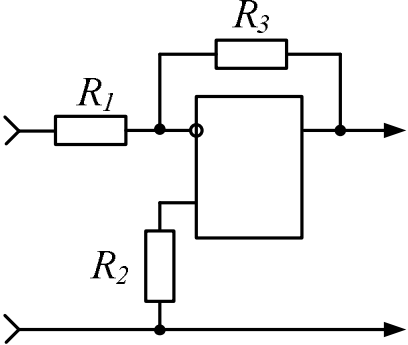
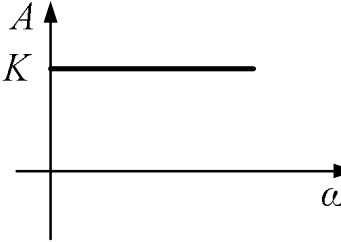
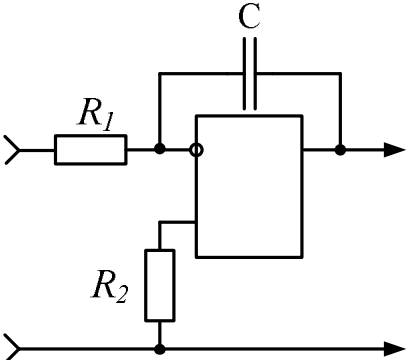
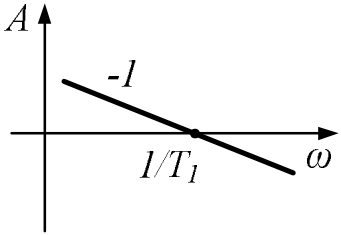


Рисунок 5.53 – Електрична схема на операційному підсилювачі

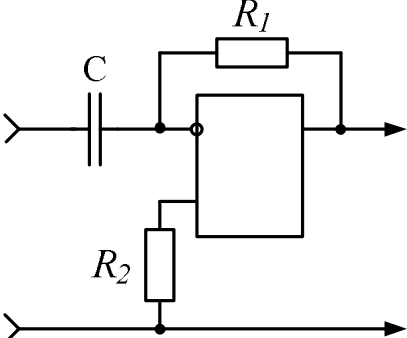
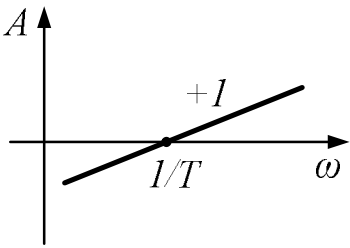
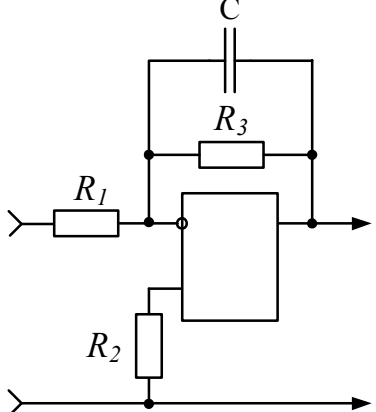
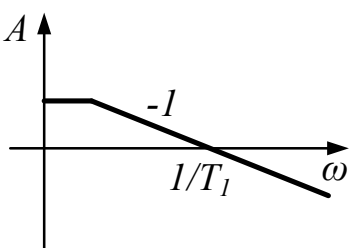
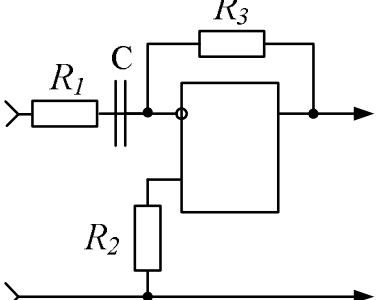
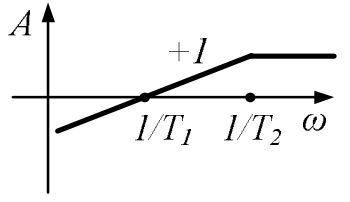
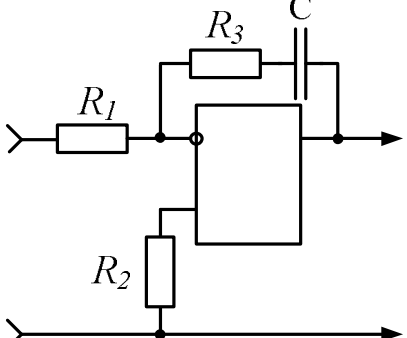
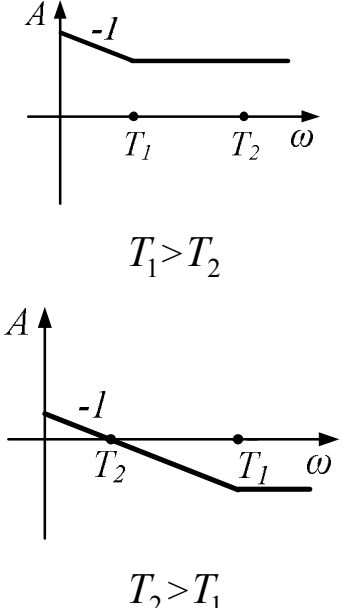
Опори $Z_1(p)$, $Z_2(p)$ можуть нести активні та реактивні складові. Їх виконують згідно передавальною функцією синтезованої електричної ланки шляхом відповідного з'єднання конденсаторів та резисторів.

У таблиці 5.3 наведені приклади схемних реалізацій пасивних та активних електричних ланок.

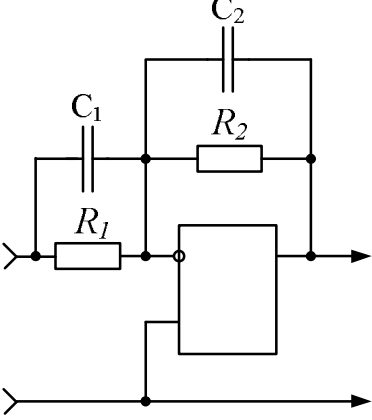
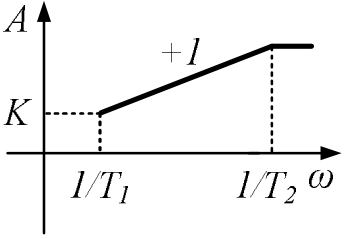
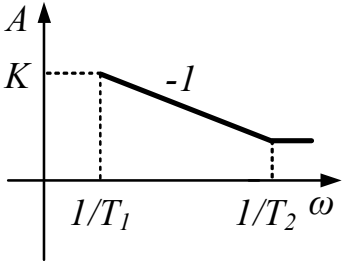
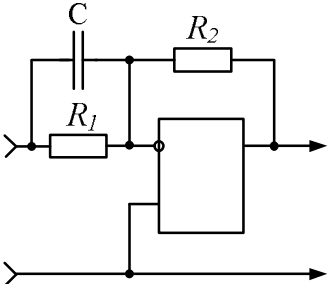
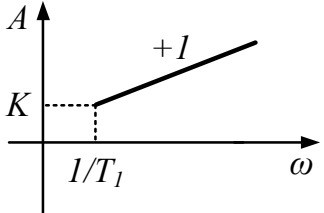
Таблиця 5.3 – Електричні ланки корегувальних кіл системи автоматичного регулювання

$H(p)$	Електрична схема	Л.А.Х.
1	2	3
$\frac{1}{Tp+1},$ $T = R \cdot C$		
$\frac{Tp}{Tp+1}$		
$\frac{T_1 p}{T_2 p + 1},$ $T_1 = R_2 \cdot C,$ $T_2 = (R_1 + R_2) \cdot C$		
$K = -\frac{R_3}{R_2},$ $R_2 = R_3 // R_1$		
$\frac{1}{Tp},$ $T = R_1 \cdot C$		

Продовження таблиці 5.3

1	2	3
Tp		
$\frac{K}{Tp+1}$ $K = -\frac{R_3}{R_2}$ $T = R_3 \cdot C$		
$\frac{T_1p}{T_2p+1}$ $T_1 = R_3 \cdot C$ $T_2 = R_1 \cdot C$		
$\frac{T_1p+1}{T_2p}$ $T_1 = R_3 \cdot C$ $T_2 = R_1 \cdot C$		

Продовження таблиці 5.3

1	2	3
$K \cdot \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1},$ $K = -\frac{R_2}{R_1},$ $T_1 = R_1 \cdot C_1,$ $T_2 = R_2 \cdot C_2$		<p>для $T_1 > T_2$</p>  <p>для $T_1 < T_2$</p> 
$K \cdot (Tp + 1),$ $K = -\frac{R_2}{R_1},$ $T = R_1 \cdot C$		

5.3.3 Система автоматичного регулювання з імпульсною моделлю перетворювача

У п. 5.3.1 розглядалась динаміка системи автоматичного регулювання при інтерпретації напівпровідникового перетворювача як елемента неперервної дії. При цьому було вказано, що коректність такого підходу базується на тому, що полоса пропускання перетворювача значно більша від полоси пропускання приведеної неперервної частини системи автоматичного регулювання. Невиконання цієї умови викликає значну похибку між розрахунковою і реальною системою, а в деяких випадках є причиною втрати її працездатності. Більш точні результати в дослідженні систем автоматичного регулювання з перетворювачами електричної енергії дає застосування теорії імпульсних систем.

Динамічні характеристики тиристорного випрямляча і широтно-імпульсного перетворювача в різних режимах роботи достатньо вивчені і викладені в ряді робіт, серед яких слід відзначити [20, 23].

Випрямляч і перетворювач з ШІМ при малих відхиленнях керуючого впливу $\Delta U_y(t)$ являють собою амплітудно-імпульсний модулятор другого роду. Імпульсна модель тиристорного випрямляча і перетворювача з ШІМ для режиму безперервного струму являє собою послідовне з'єднання ідеального імпульсного елемента і приведеної неперервної частини, що зображено на рисунку 5.54. На рисунку: K_{Π} – статичний коефіцієнт передачі перетворювача; F – фактор пульсацій; T – період дискретності перетворювача.



Рисунок 5.54 – Імпульсна модель тиристорного випрямляча і перетворювача з ШІМ

Аналіз результатів досліджень наведених у перелічених роботах, вказує на те, що імпульсні моделі тиристорного випрямляча і широтно-імпульсного перетворювача для режиму безперервного струму різняться між собою законами змін фактора пульсацій. Особливістю імпульсної моделі є те, що фактор пульсацій є змінною величиною у функції зміни регульованого параметра перетворювача. Викликано це впливом пульсаційної складової вихідної напруги випрямляча на сигнал керування перетворювача. Для дослідження особливостей динамічних характеристик розглянемо замкнуту систему автоматичного регулювання вихідної напруги імпульсного перетворювача з інтегральним регулятором, передавальна функція якого

$$G(p) = \frac{1}{T_1 p}. \quad (5.76)$$

Вибір такої структури пояснюється можливістю реалізації максимальної швидкодії. Структурна схема розглянутої системи зображена на рисунку 5.55.

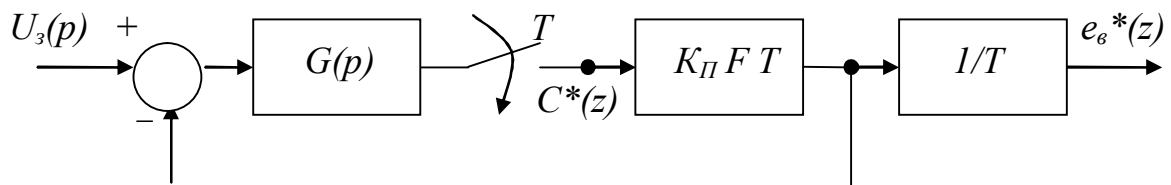


Рисунок 5.55 – Структурна схема замкненої системи автоматичного регулювання вихідної напруги імпульсного перетворювача

Зв'язок між вхідним $U_3(p)$ і вихідним $e_\varepsilon^*(z)$ сигналами, записана в формі z -перетворення, визначається у такий спосіб:

$$e_\varepsilon^*(z) = C^*(z) \cdot K_{\text{п}} F_i T;$$

$$C^*(z) = \frac{U_3 G^*(z)}{1 + K_{\text{п}} F_i T G^*(z)};$$

$$e_\varepsilon^*(z) = \frac{K_{\text{п}} F_i T \cdot U_3 G^*(z)}{1 + K_{\text{п}} F_i T G^*(z)}. \quad (5.77)$$

В результаті того, що різниця порядків поліномів знаменника і чисельника передаточної функції (5.76) наведеної безперервної частини системи дорівнює одиниці її реакція на послідовність $\delta(t)$ імпульсів формованих імпульсним елементом має розриви. Для фіксації імпульсним елементом лівобічних значень вихідного сигналу регулятора $G(p)$ подаємо вираз (5.77) у такому вигляді

$$e_\varepsilon^*(z) = \frac{K_{\text{п}} F_i \cdot U_3 G^*(z)}{1 + z^{-1} \cdot K_{\text{п}} F_i T G^*(z,1)}, \quad (5.78)$$

де $G^*(z,1) = z_{\varepsilon=1} \left\{ \frac{1}{T_1 p} \right\}$.

Згідно з [13] модифіковане z -перетворення передавальної функції $G(p)$ дорівнює

$$G^*(z,1) = \frac{1}{T_1} \cdot \frac{z}{z-1}. \quad (5.79)$$

З урахуванням z -перетворення передавальної функції $G(p)$ характеристичне рівняння системи набуває вигляду

$$z - 1 + K_{\text{п}} \cdot F \cdot T = 0. \quad (5.80)$$

Поєднавши полюс характеристичного рівняння (5.80) з початком z -площині отримаємо умови процесу кінцевої тривалості

$$T_1 = K_{\text{п}} \cdot F \cdot T. \quad (5.81)$$

Для оцінки динамічних властивостей системи, розглянемо її реакцію на одиничний вхідний вплив

$$U_3(p) = L\{1(t)\} = \frac{1}{p}. \quad (5.82)$$

Z-перетворення полінома чисельника вираження (5.78) має вигляд

$$z\{U_3 G^*(z)\} = z \left\{ \frac{1}{T_1 p^2} \right\} = \frac{T}{T_1} \cdot \frac{z}{(z-1)^2}. \quad (5.83)$$

З урахуванням формул (5.81) і (5.83) вираз для вихідного сигналу (5.78) перетворюється на такий

$$e_g^*(z) = \frac{z \cdot K_{\Pi} \cdot F \cdot \frac{T}{T_1}}{(z-1)(z-1 + K_{\Pi} \cdot F \cdot \frac{T}{T_1})}. \quad (5.84)$$

Вираз (5.84) описує перехідний процес у системі при одиничному вхідному впливі.

Аналіз вираз (5.81) і (5.84) вказує на те, що при строгому описі процесів в системі необхідно враховувати зміни на кожному інтервалі дискретності ШІМ динамічного F коефіцієнта. Період повторюваності зазначеного коефіцієнта визначається періодом дискретності перетворювача.

Фактор пульсацій визначається згідно [23] таким виразом:

$$F = \frac{1}{1 + K_{\Pi} \frac{T}{T_1} (1 - \gamma)}, \quad (5.85)$$

де γ – відносна тривалість імпульсу ШІМ.

При виборі з умови (5.81)

$$K_{\Pi} \cdot F \cdot \frac{T}{T_1} = 1, \quad (5.86)$$

вираз для вихідного сигналу (5.84) перетвориться на наступний

$$e_g^*(z) = \frac{1}{z-1}. \quad (5.87)$$

Розклавши (5.87) у степеневий ряд Лорана, отримаємо значення вихідний координати системи в тактові моменти ШІМ

$$e_e(nT) = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots + z^{-n}. \quad (5.88)$$

З (5.88) випливає те, що перехідний процес в системі закінчується за один тактовий інтервал ШІМ, що відповідає порядку передавальної функції безперервної частини системи.

На рисунку 5.56 наведена імітаційна модель перетворювача постійної напруги з ШІМ і системи автоматичного регулювання яка створена в середовищі Matlab. Модель схему перетворювача постійної напруги з ШІМ напруги. Перетворювач подано у вигляді ідеального ключа VT і зворотного діода VD . Навантаження перетворювача виконана на $R2$. Блок Step2 формує скачок сигналу керування. Стала часу регулятора $G(p)$ обрана відповідно за умовою процесу кінцевої тривалості для $F = 0,5$. На рисунку 5.57 подані осцилограми перехідного процесу та стрибка сигналу керування. Верхня осцилограма:

- а) характеризує зміну вихідного сигналу регулятора в перехідному режимі;
- б) зміни вихідної напруги;
- в) зміни вхідного сигналу.

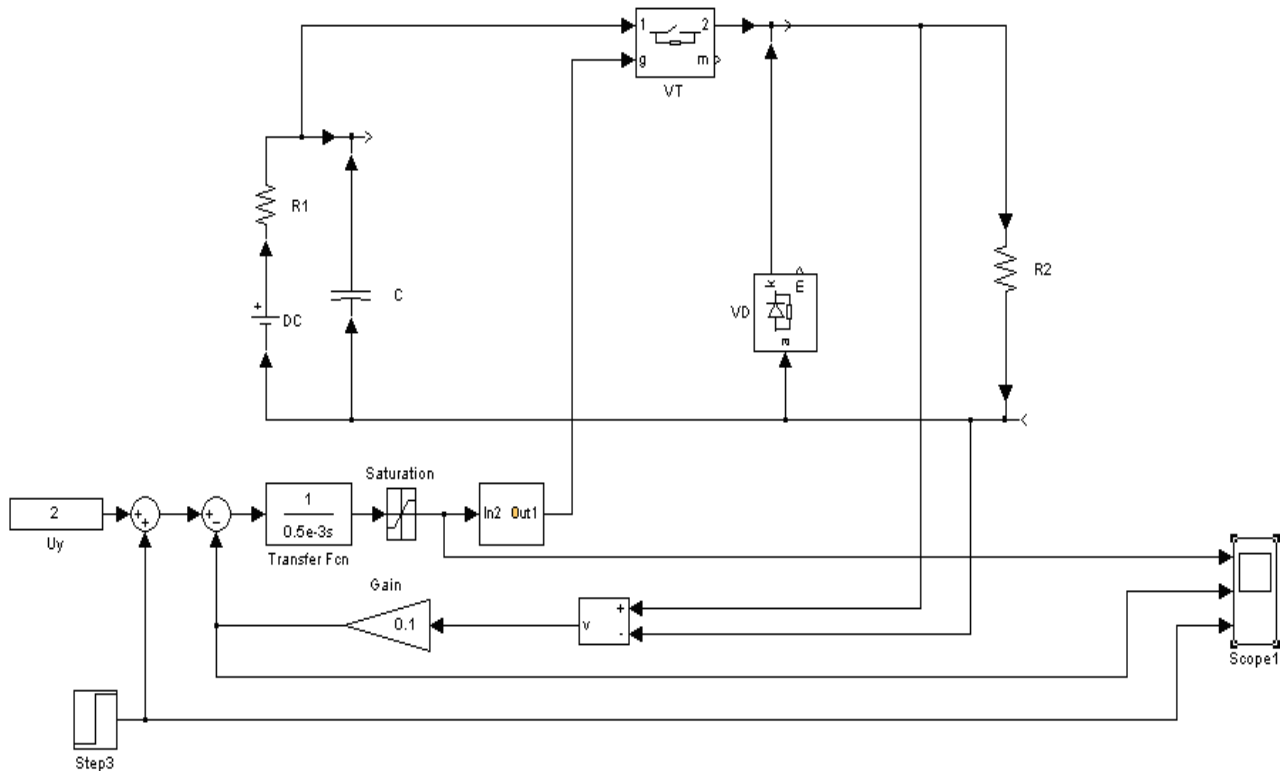


Рисунок 5.56 – Імітаційна модель перетворювача постійної напруги з ШІМ

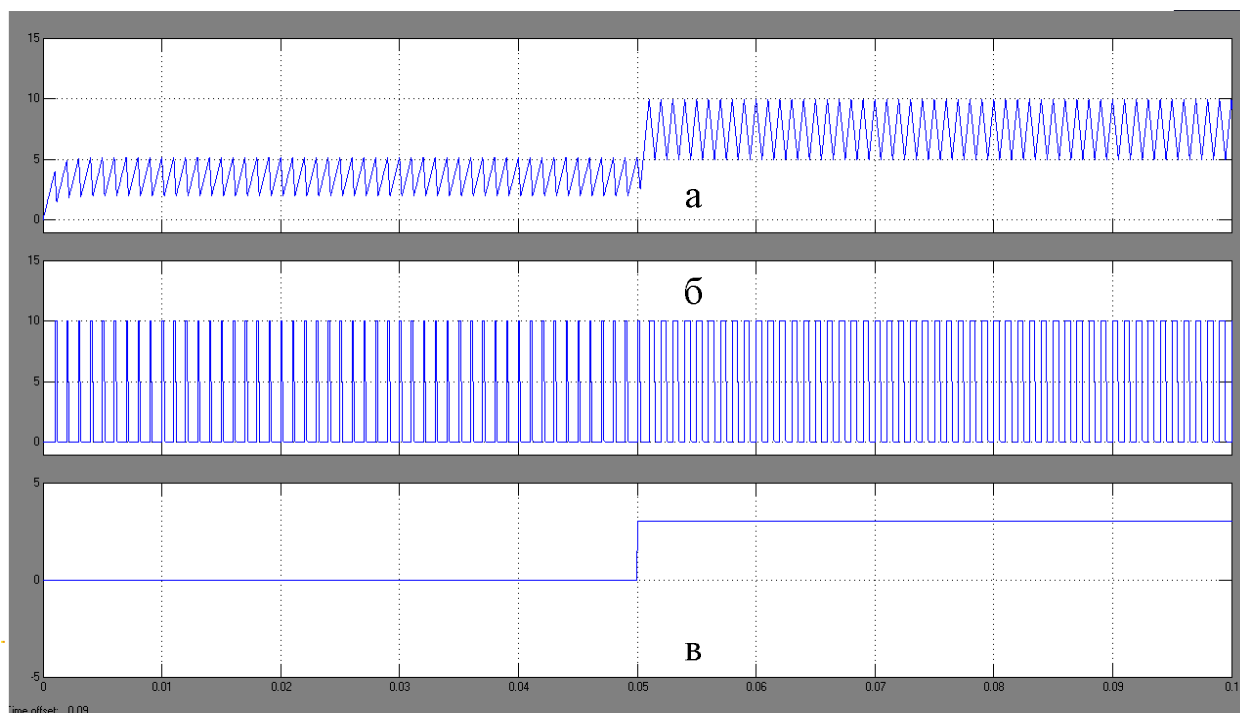


Рисунок 5.57 – Осцилограми перехідного процесу та стрибка сигналу керування

Як слідує із осцилограм, перехідний процес у системі закінчується за один тактовий інтервал ШІМ, що підтверджує аналітичний розрахунок.

У результаті виконаних досліджень встановлено, що представлення перетворювача електричної енергії як амплітудно-імпульсного модулятора другого роду дає змогу точно описати його динамічні процеси.

Питання та завдання для самоперевірки

1. Дати визначення електромеханотронної системи.
2. У чому полягає відмінність електромеханотронної системи від мехатронної?
3. У чому полягає автоматичне регулювання електромеханотронної системи?
4. Як представляється система автоматичного регулювання в середовищі Simulink Matlab?
5. Як виконується запуск Simulink?
6. Яким елементом Simulink Matlab задається східчастий сигнал?
7. Яким елементом Simulink Matlab формується передавальна функція динамічної ланки?
8. З яких компонентів складається узагальнена структурна схема операційного підсилювача?
9. Як визначається передавальна функція, що побудована па операційному підсилювачі?

10. Яка відмінність коефіцієнтів передачі івертувального і неівертувального підсилювачів?
11. Із яких компонентів Simulink Matlab складається модель операційного підсилювача?
12. Як між собою співвідносяться результати моделювання динамічних ланок з застосуванням моделей Simulink Matlab і операційного підсилювача?
13. Зміною параметрів яких елементів моделі, що зображена на рисунку 5.30, регулюють зсув вихідного сигналу?
14. Як визначається умова перемикань у системі керування перетворювача постійної напруги?
15. Який закон зміни регулювальної характеристики перетворювача постійної напруги?
16. У чому полягає умова подання перетворювача постійної напруги у вигляді без інерційної ланки?
17. У чому полягає відмінність безперервної і імпульсної моделей перетворювача постійного струму?
18. Що таке фактор пульсацій?
19. У якому випадку доцільно застосовувати імпульсну модель перетворювача постійної напруги?
20. Що викликає зміни фактора пульсацій?

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Wishtgradski. Sur la theorie generale des regulateurs – Comptes rendus hebdomodaires des séances de l'academie des sciences/ Wishtgradski. – Paris, 1876, t.83. – P. 318–321.
2. Бесекерский В. А. Теория систем автоматического регулирования / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – М. : Наука, 1995. – 767 с.
3. Иващенко Н. Н. Автоматическое регулирование / Н. Н. Иващенко. – М. : Машиностроение, 1978. – 735 с.
4. Теория автоматического управления : нелинейные системы, управления при случайных воздействиях : учебник для студентов вузов / [А. В. Нетушил, А. В. Балтрушевич, В. В. Бурляев и др.]. – М. : Высшая школа, 1983. – 431 с.
5. Воронов А. А. Основа теория автоматического управления / А. А. Воронов. – М. : Энергия, 1980. – 303 с.
6. Власов К. П. Теория автоматического управления / К. П. Власов. – Харьков : Гуманитарный центр, 2013. – 539 с.
7. Ерофеев А. А. Теория автоматического управления / А. А. Ерофеев. – Санкт-Петербург : Политехника издательство, 2008. – 301 с.
8. Конторович М. И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях / М. И. Конторович. – М. : Сов. Радио, 1975. – 319 с.
9. Бронштейн И. Н. Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1967. – 608 с.
10. Аналоговые интегральные схемы / Б. П. Кудряшов, Ю. В. Назаров, Б. В. Тарабрин, В. А. Ушибышев. – М. : « Радио и Связь », 1981. – 156 с.
11. Шипилло В. П. Автоматизированный вентильный электропривод / В. П. Шипилло. – М. : Энергия, 1969. – 400 с.
12. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем / Я. З. Цыпкин. – М. : Физматгиз, 1963. – 967 с.
13. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования / Э. Джури. – М. : Физмаиздат, 1963. – 455 с.
14. Деч Г. Руководство к применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Деч. – Перевод с немецкого. – М. : Наука. – 1971, 288 с.
15. Иванов В. А. Теория дискретных систем автоматического управления / В. А. Иванов, А. С. Ющенко. – М. : «Наука», 1983. – 335 с.
16. Vjaresten N. A. The Statik Converter as a High-Speed Power Amplifier / N. A. Vjaresten. – Direct Current, 1963. – Vol. 6. – P. 154–165.
17. Шипилло В. П. Вентильный преобразователь как элемент системы автоматического регулирования / В. П. Шипилло // Электричество, 1967. – № 11. – С. 63–70.
18. Управляемый выпрямитель в системах автоматического управления / Н. В. Донской, А. Г. Иванов, В. М. Никитин, А. Д. Поздеев. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 352 с.

19. Щербак Я. В. Широотно-импульсный преобразователь с широко-импульсной модуляцией второго рода в условиях несимметрии / Я. В. Щербак // Технічна електродинаміка. – Київ, 1999. – № 1. – С. 31–35.

20. Ивакина Е. Я. Анализ динамических процессов системы автоматического регулирования напряжения преобразователя с ШИМ / Е. Я. Ивакина // Збірник наукових праць української державної академії залізничного транспорту. – Харків, 2013. – Вип. 142. – С. 151–156.

21. Шипилло В. П. Фактор пульсаций в системах регулирования с вентильными преобразователями / В. П. Шипилло, Ю. С. Зинин // Электричество. – 1977. – № 3. – С. 86–89.

22. Щербак Я. В. Фактор пульсаций многоконтурных дискретных систем автоматического регулирования / Я. В. Щербак // Технічна електродинаміка. – Київ, 1998. – № 4. – С. 41–43.

23. Щербак Я. В. Анализ электромагнитных процессов ШИП применением эквивалентных импульсных моделей / Я. В. Щербак // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – Харків, 2000. – № 6. – С. 89–95.

24. Щербак Я. В. Параметрическое формирование процесса конечной длительности в системах с полупроводниковыми преобразователями / Я. В. Щербак // Вестник ХГПУ. – Харьков : ХГПУ, 1999. – Вып. 69. – С. 15–21.

25. Щербак Я. В. Динамические характеристики выпрямителя с широко-импульсной модуляцией / Я. В. Щербак, К. Я. Ивакина // Технічна електродинаміка. – Київ, 2014. – № 3. – С. 47–51.

26. Ткачук В. І. Електромеханотроніка / В. І. Ткачук. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2006. – 440 с.

27. Костенко Л. Д. Моделювання електроприводів / Л. Д. Костенко, В. І. Мороз, Я. С. Паранчук. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2004. – 402 с.

Навчальне видання

**ЩЕРБАК Яків Васильович,
ІВАКІНА Катерина Яківна**

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ
ЕЛЕКТРОМЕХАНОТРОННИХ СИСТЕМ**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Відповідальний за випуск *П. П. Рожков*

Редактор *В. І. Шалда*

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

Дизайн обкладинки *Г. А. Коровкіна*

Підп. до друку 13.12.2018. Формат 60×84/16.

Друк на ризографі. Ум. друк. арк.13,2.

Тираж 60 пр. Зам. № .

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.

Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017.