МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи
і виконання лабораторних робіт

з дисципліни

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ ТА ПРОЦЕСІВ

(для студентів 1 курсу денної форми навчання
освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, напрямів підготовки
6.030504 – «Економіка підприємництва» та 6.030509 – «Облік і аудит»)

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2014

Методичні вказівки до самостійної роботи і виконання лабораторних робот з дисципліни «Комп'ютерне моделювання економічних систем та процесів» (для студентів 1 курсу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, напрямів підготовки 6.030504 – «Економіка підприємства» та 6.030509 – «Облік і аудит») / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. О. М. Штельма, Н. В. Макогон. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2014. – 29 с.

Укладачі: О. М. Штельма,

Н. В. Макогон

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу.

Рецензент: доцент фізико-математичних наук О. Б. Костенко

Затверджено кафедрою прикладної математики та інформаційних технологій, протокол № 1 від 30.08.2013 р.

ЗМІСТ

Принципи побудови економетричних моделей. Парнолінійна регресія

Прості лінійні регресійні моделі встановлюють лінійну залежність між двома змінними, наприклад, витратами на відпустку та складом родини; витратами на рекламу та обсягом продукції; що випускається, витратами на споживання та валовим національним продуктом (ВНП); зміною ВНП залежно від часу і та ін.

При цьому одна із змінних y вважається залежною змінною та розглядається, як функція від незалежної змінної x.

У загальному вигляді проста вибіркова регресійна модель запишеться так:

$$y = b_0 + b_1 x + e \qquad (1.1)$$

де y – вектор спостережень за залежною змінною $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$;

x – вектор спостережень за незалежною змінною $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$;

b_0, b_1 – оцінки невідомих параметрів регресійної моделі; e – вектор випадкових величин (помилок). Регресійна модель називається лінійною, якщо вона лінійна за своїми параметрами. Отже, модель є лінійною регресійною моделлю.

Оцінка параметрів лінійної регресії за допомогою методу найменших квадратів

Щоб мати явний вигляд залежності, необхідно знайти (оцінити) невідомі параметри b_0, b_1 цієї моделі.

Реальні спостереження y_i і x_i зобразимо точками у системі координат (X,Y) (рис. 1.1).

Таблиця 1.1

i	y_i	x_i
1	25	5
2	30	6
3	35	9
4	45	12
5	65	18

Візуально можна припустити, що між даними є лінійна залежність, тобто їх можна апроксимувати прямою лінією.

Взагалі, існує необмежена кількість прямих $y = b_0 + b_1 x$, які можна провести через множину спостережуваних точок. Яку ж з них вибрати? Щоб це визначити, потрібно мати у розпорядженні певний критерій, що дозволяв би вибрати з множини можливих прямих "найкращу" з точки зору даного критерію. Найпоширенішим є критерій мінімізації суми квадратів відхилень. На рис. 6.1, наприклад, пряма (1), як і інші, розташована таким чином, що деякі точки знаходяться вище, а деякі нижче цієї прямої, на основі чого можна встановити відхилення (помилки) відносно цієї прямої:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - b_0 - b_1 x_i,\ i = \overline{1, n}.$$

де $\hat{y}$ – і-та точка на прямій, яка відповідає значенню x_i.

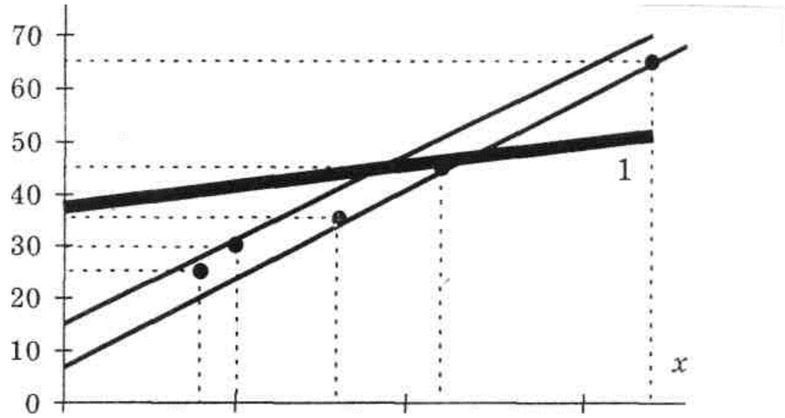

Рисунок 1.1

Відхилення, або помилки, ще інколи називають залишками. Логічно, що треба проводити пряму таким чином, щоб сума квадратів помилок була мінімальною. В цьому і полягає *критерій найменших квадратів:* невідомі параметри b_0, b_1 визначаються таким чином, щоб мінімізувати $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$.

Оцінка параметрів, обчислених за методом найменших квадратів має вигляд

$$b_1 = \frac{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{xy}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2},$$

де $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

$b_0 = \overline{y} - b_1 \overline{x}$

Вираз для b_1 можна записати ще таким чином:

$$b_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\operatorname{var}(x)}.$$

Тепер можемо записати у явному вигляді регресію y від x, у якій параметри обчислені за методом найменших квадратів. Її інколи називають регресією найменших квадратів y від x. Маємо:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x,$$

або

$$y = \hat{y} + e = b_0 + b_1 x + e.$$

Коефіцієнт кореляції

Найпростішим критерієм, який дає кількісну оцінку зв'язку між двома показниками, є коефіцієнт кореляції. Він розраховується за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{\operatorname{var}(x)\operatorname{var}(y)}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}},$$

де $\operatorname{cov}(x,y)$ – коефіцієнт коваріації між x та y; $\operatorname{var}(x)$ – дисперсія змінної x; $\operatorname{var}(y)$— дисперсія змінної y.

Коефіцієнт кореляції дорівнює відношенню коефіцієнта коваріації до кореня з добутку двох дисперсій. Коефіцієнт кореляції, на відміну від коефіцієнта коваріації, є вже не абсолютною, а відносною мірою зв'язку між двома факторами. Тому значення коефіцієнта кореляції , як можна побачити з виразу, завжди розташовані між -1 та +1 (-1 < r_{xy} < 1). Позитивне значення коефіцієнта кореляції свідчить про прямий зв'язок між показниками, а негативне – про зворотний зв'язок. Коли коефіцієнт кореляції прямує за абсолютною величиною до 1, це свідчить про наявність сильного зв'язку ($r \to \pm 1$ – щільність зв'язку велика); у протилежному випадку, коли коефіцієнт кореляції прямує до нуля ($r \to 0$), зв'язку немає.

Коефіцієнт детермінації

Поряд з коефіцієнтом кореляції використовується ще один критерій, за допомогою якого також вимірюється щільність зв'язку між двома або більше показниками та перевіряється адекватність (відповідність) побудованої регресійної моделі реальній дійсності. Тобто дається відповідь на запитання, чи справді зміна значення y лінійно залежить саме від зміни значення x, а не відбувається під впливом різних випадкових факторів. Таким критерієм є коефіцієнт детермінації.

Коефіцієнт детермінації дорівнює квадрату коефіцієнта кореляції:

$$R^2 = r^2$$

Коефіцієнт детермінації завжди позитивний і перебуває у межах від нуля до одиниці ($0 < R^2 < 1$).

Приклад 1. *У таблиці 1.2 наведено умовні данні спостережень витрат y на відпустку робітника залежно від кількості членів його родини x. Побудувати регресійну модель залежності y і x, знайти оцінки її параметрів.*

Таблиця 1.2 – Дані приклад 1

Кількість членів родини	**Витрати на відпустку, *ум. од.***
x	y
1	16
2	12
2	23
4	19
6	30
$x = 3$	$y = 20$

Розв'язання

Для того, щоб встановити залежність витрат на відпустку від розмірів родини, припустимо, що ця залежність описується лінійною функцією,

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x,$$

тобто її можна розглядати, як просту лінійну регресію

$$y = \hat{y} + e = b_0 + b_1 x + e.$$

Встановимо її невідомі параметри за формулами

$$b_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\operatorname{var}(x)} \text{ та } b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}.$$

Незважаючи на громіздкість цієї формули з першого погляду, вона найчастіше використовується на практиці.

Для підрахунку b_1 нам потрібно визначити $n, \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} y_i, \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Відобразимо ці дані за допомогою таблиці 1.3

Таблиця 1.3 – Обчислення приклад 1

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	$\hat{y}_i$	$e_i = y_i - \hat{y}$
1	1	16	16	1	14.74	1.26
2	2	12	24	4	17.37	-5.37
3	2	23	46	4	17.37	5.63
4	4	19	76	16	22.63	-3.63
5	6	30	180	36	27.89	2.11
$\sum$	15	100	342	61	100	0

Згідно з таблицею 1.3 $b_1 = \dfrac{342 - 15 \cdot \dfrac{100}{5}}{61 - \dfrac{225}{5}} = \dfrac{42}{61 - 45} \approx 2{,}63$,

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 20 - 2{,}63 \cdot 3 = 12{,}11,$$

$$\hat{y}_i = 12{,}11 + 2{,}63 x_i .$$

Це рівняння дає для кожного спостережуваного значення x_i значення $\hat{y}_i$ та $e_i = y_i - \hat{y}$ (дві останні колонки табл. 1.3). Підкреслимо, що сума оцінених значень дорівнює сумі фактичних значень y_i, а сума помилок дорівнює 0.

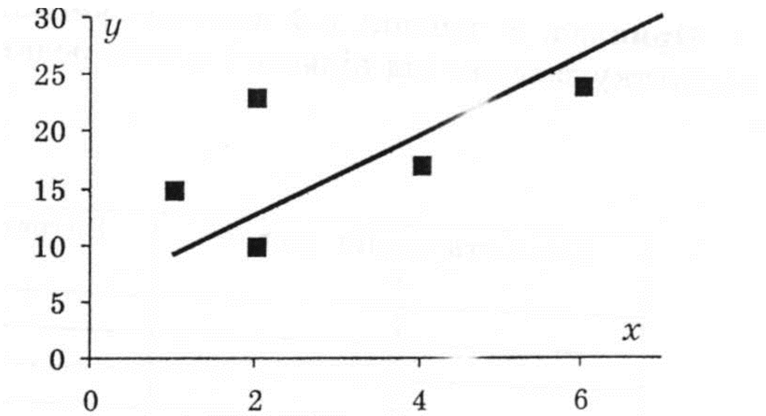

Рисунок 1.2

Приклад 2. *Спостережені значення прибутку фабрики y (ум.од) і її затрат x (ум.од) на рекламу задані в таблиці 1.4. Побудувати регресійну модель залежності y і x, знайти оцінки її параметрів. Обчисліть коефіцієнти кореляції та детермінації.*

Таблиця 1.4 – Дані приклад 2

i	1	2	3	4	5	6
x_i	20	14	12	20	33	38
y_i	75	85	92	88	72	99

Розв'язання

Всі обчислення зведемо в табл. 1.5. Необхідні підсумкові значення будемо заносити в колонку $\sum$.

Таблиця 1.5 – Обчислення приклада 2

i	x_i	y_i	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	20	75	-2.83	-10.17	103.4	28.81	8.03
2	14	85	-8.83	-0.17	0.0289	1.47	78.03
3	12	92	-10.83	6.83	46.649	-74.03	117.36
4	20	88	-2.83	2.83	8.01	-8.03	8.03
5	33	72	10.17	-13.17	173.45	-133.86	103.36
6	38	99	15.17	13.83	191.269	209.81	230.03
$\sum$	137	511			522.75	224.17	544.84

Згідно з табл. 1.5 $\bar{x} = 22{,}83$; $\bar{y} = 85{,}16$.

$$b_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{24{,}17}{544{,}83} = 0{,}04436.$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 85{,}16 - 0{,}04436 \cdot 22{,}83 = 84{,}15.$$

$$\hat{y}_i = 84{,}15 + 0{,}04436x.$$

У рівнянні прямої коефіцієнт b_1 є тангенсом куту нахилу прямої до осі 0х. Якщо $b_1 > 0$, то між змінною y і змінною x існує позитивний (прямий) зв'язок, якщо $b_1 < 0$ - негативний (зворотний), при $b_1 = 0$ змінні x і y незалежні одна від одної.

В нашому прикладі зв'язок між y та x дуже слабкий, бо $b_1 = 0{,}04436$.

Коефіцієнт b_0 є точкою перетину прямої з віссю 0y.

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{24{,}17}{6} = 4{,}02.$$

$$\operatorname{var}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{544{,}84}{6} = 90{,}8.$$

$$\operatorname{var}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = \frac{522{,}25}{6} = 87{,}13.$$

Розрахуємо коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{4{,}02}{\sqrt{90{,}8}\sqrt{87{,}13}} = 0{,}045.$$

Коефіцієнт кореляції також свідчить про слабкий зв'язок між y та x.

Розрахуємо коефіцієнт детермінації:

$$r^2 = \frac{4,02 \cdot 4,02}{90,8 \cdot 87,13} = 0,002 .$$

Парнолінійна регресія в Exel

Приклад 3 *Передбачити об'єм річних продажів для всіх нових магазинів, знаючи їх розміри. Для оцінки залежності між розміром магазина (у квадратних футах) і об'ємом його річних продажів створимо вибірки з 14 магазинів (рис. 1.3).*

Магазин	Площадь (тыс. кв. футов)	Объем годовых продаж (млн. долл.)
1	1,7	3,7
2	1,6	3,9
3	2,8	6,7
4	5,6	9,5
5	1,3	3,4
6	2,2	5,6
7	1,3	3,7
8	1,1	2,7
9	3,2	5,5
10	1,5	2,9
11	5,2	10,7
12	4,6	7,6
13	5,8	11,8
14	3,0	4,1

а

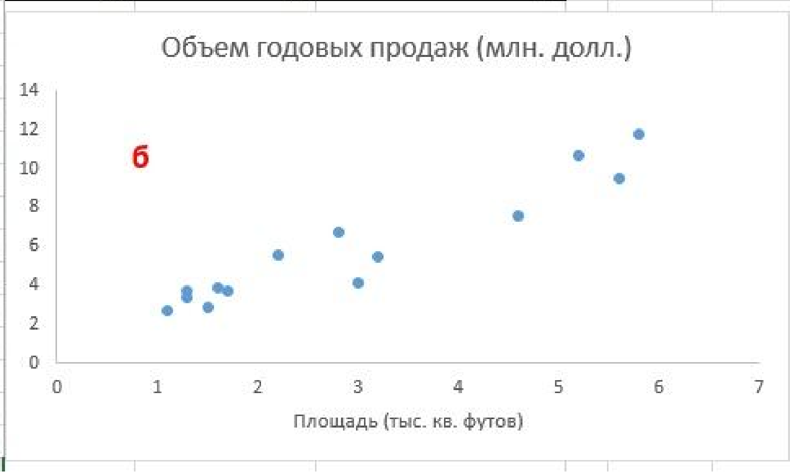

Рисунок 1.3 – Площі і річні об'єми продажів 14 магазинів мережі Sunflowers: (а) початкові дані; (б) діаграма розкиду

Аналіз рис. 1.3 показує, що між площею магазина X і річним об'ємом продажів Y існує позитивна залежність. Якщо площа магазина збільшується, об'єм продажів зростає майже лінійно.

До того, як Excel узяв на себе всю рутинну роботу, обчислення за методом найменших квадратів були дуже трудомісткими. Excel дозволяє вирішувати подібні завдання двома способами. По-перше, можна скористатися *Пакетом аналізу* (рядок *Регресія*). Результати представлені на рисунку 1.4. По-друге, можна, виділивши крапки на графіці (як на рис. 1.3б), кликнути правою кнопкою миші і вибрати *Додати лінію тренда.* Далі можна вибрати вид лінії тренда (у нашому випадку – *Лінійна*), відформатувати лінію, показати на графіці рівняння і величину достовірності апроксимації (*R2*) (рис. 1.5).

ВЫВОД ИТОГОВ						
Регрессионная статистика						
Множественный R	0,9509					
R-квадрат	R^2 0,9042					
Нормированный R-квадрат	0,8962					
Стандартная ошибка	S_{YX} 0,9664					
Наблюдения	14					
Дисперсионный анализ						
	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
Регрессия	1	SSR 105,7476	105,7476	113,2335	0,0000	
Остаток	12	SSE 11,2067	0,9339			
Итого	13	SST 116,9543				
	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
Y-пересечение	b_0 0,9645	0,5262	1,8329	0,0917	-0,1820	2,1110
Площадь (тыс. кв. футов)	b_1 1,6699	0,1569	10,6411	0,0000	1,3280	2,0118

Рисунок 1.4 – Результати рішення задачі про залежність між площами і річними об'ємами продажів в магазинах мережі Sunflower (отримані за допомогою Пакету аналізу Excel)

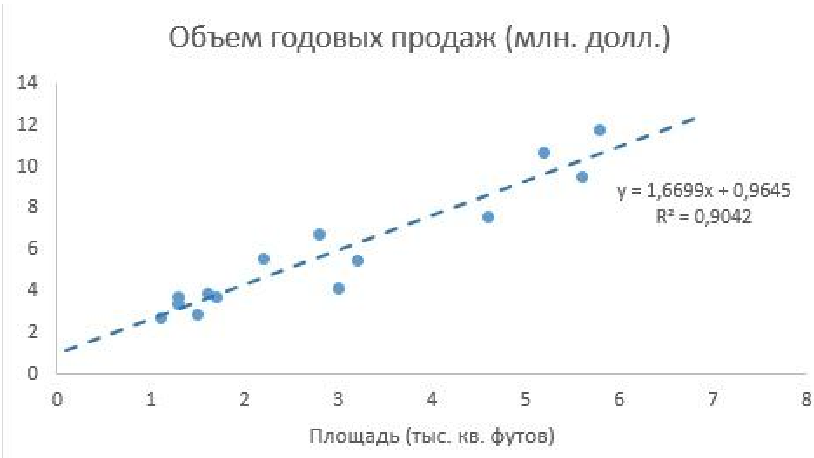

Рисунок 1.5 – Діаграма розкиду і лінія регресії (тренда)

Як випливає з рис. 1.4 і 1.5, b_0 = 1,6699, а b_1 = 0,9645. Таким чином, рівняння лінійної регресії для цих даних має наступний вид:

$$\hat{y}_i = 0{,}9645 + 1{,}6699x$$

Обчислений нахил дорівнює b_0= +1,6699. Це означає, що при зростанні змінної X на одиницю середнє значення змінної Y зростає на 1,6699 одиниць. Інакше кажучи, збільшення площі магазина на один квадратний фут приводить до збільшення річного об'єму продажів на 1,67 тис. дол. Таким чином, нахил є часткою річного об'єму продажів, залежною від розміру магазина. Обчислене зрушення b_1= +0,9645 (млн. дол.). Ця величина є середнім значенням змінної Y при X = 0. Оскільки площа магазина не може дорівнювати нулю, зрушення можна вважати часткою річного доходу, залежною від інших чинників. Слід зазначити, проте, що зрушення змінної Y виходить за межі діапазону змінної X. Отже, до інтерпретації параметра b_1 необхідно відноситися уважно.

Обчислення сум квадратів. Для того, щоб знайти коефіцієнт кореляції обчислимо суми квадратів.

Повна сума квадратів (SST) рівна сумі квадратів різниць між спостережуваними значеннями змінної Y і її середнім значенням:

$$SST = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2$$

Сума квадратів регресії (SSR) рівна сумі квадратів різниць між передбаченими значеннями змінної Y і її середнім значенням:

$$SSR = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$$

Сума квадратів помилок (SSE) рівна сумі квадратів різниць між спостережуваними і передбаченими значеннями змінної Y:

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

Суми квадратів, обчислені за допомогою програми *Пакету аналізу* Excel при рішенні задачі про мережу магазинів Sunflowers, представлені на рисунку 1.4.

Коефіцієнт змішаної кореляції. Величини *SSR*, *SSE* і *SST* не мають очевидної інтерпретації. Проте відношення суми квадратів регресії (*SSR*) до повної суми квадратів (*SST*) є оцінкою корисності регресійного рівняння. Це відношення називається коефіцієнтом кореляції r_2:

$$r^2 = \frac{\text{сумма квадратов регрессии}}{\text{полная сумма квадратов}}$$

$$r^2 = \frac{105{,}7476}{116{,}9543} = 0{,}904$$

Таким чином, 90,4% варіацій річного об'єму продажів пояснюється мінливістю площі магазинів, зміряної в квадратних футах. Дане значення величини r^2 свідчить про сильний позитивний лінійний взаємозв'язок між двома змінними.

Лінійні моделі множинної регресії

Узагальнена множинна лінійна регресійна модель має вигляд:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n + \varepsilon$$

де y – залежна змінна; $x_1, x_2, ..., x_p$ – незалежні змінні (або фактори);

$\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n$ – параметри моделі (константи), які потрібно оцінити;

ε – неспостережувана випадкова величина.

Узагальнена регресійна модель – це модель, яка дійсна для всієї генеральної сукупності. На відміну від узагальненої регресійної, вибіркова модель будується для певної виборки.

Вибіркова лінійна множинна модель має такий вигляд:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p + e \quad (7.1)$$

де y – залежна змінна;

$x_1, x_2, ..., x_p$ – незалежні змінні (або фактори);

$b_1, b_2, ..., b_p$ – оцінки невідомих параметрів виборочної моделі;

e – випадкова величина (помилка).

Лінійною регресійною моделлю називають модель, що лінійна за своїми параметрами.

За введеними нами позначеннями, множинна лінійна регресійна модель має p незалежних змінних, або факторів, які впливають на залежну змінну y, та (p + 1) невідомих параметрів, які потрібно оцінити.

Розглянемо двофакторну модель

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + e = \hat{y} + e$$

Параметри моделі b_1, b_2, b_0 треба оцінити за методом найменших квадратів.

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2$$

$$b_1 = \frac{\sum \tilde{x}_{i1} \tilde{y}_i \sum \tilde{x}_{i2}^{\,2} - \sum \tilde{x}_{i2} \tilde{y}_i \sum \tilde{x}_{i1} \tilde{x}_{i2}}{\sum \tilde{x}_{i1}^{\,2} \sum \tilde{x}_{i2}^{\,2} - \left(\sum \tilde{x}_{i1} \tilde{x}_{i2} \right)^2},$$

$$b_2 = \frac{\sum \tilde{x}_{i2} \tilde{y}_i \sum \tilde{x}_{i1}^{\,2} - \sum \tilde{x}_{i1} \tilde{y}_i \sum \tilde{x}_{i1} \tilde{x}_{i2}}{\sum \tilde{x}_{i1}^{\,2} \sum \tilde{x}_{i2}^{\,2} - \left(\sum \tilde{x}_{i1} \tilde{x}_{i2} \right)^2}$$

де $\tilde{x}_{i1} = x_{i1} - \bar{x}_1$; $\tilde{x}_{i2} = x_{i2} - \bar{x}_2$; $\tilde{y} = y_i - \bar{y}$ відхилення змінних.

Приклад 4. *Досліджується рівень середньомісячної заробітної плати* y *(ум.од.) в залежності від продуктивності праці* x_1 *(ум.од.) і фондоємності продукції* x_2 *(ум.од.) для 6 споріднених за випуском продукції фірм. Дані спостережень наведені в таблиці 2.1 Побудувати лінійну регресію для даного процесу, знайти оцінки її параметрів.*

Таблиця 2.1

x_1	2	4	6	7	8
x_2	9	6	12	11	20
y	55	46	35	67	72

Розв'язання

Рівнянням лінійної регресії заданого умовою процесу є

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon .$$

Оцінками її параметрів $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ мають бути параметри регресії b_0, b_1, b_2, що будуються за вибірковими даними :

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + e = \hat{y} + e$$

Параметри моделі b_1, b_2, b_0 треба оцінити за методом найменших квадратів. Знайдемо параметри моделі , за матричною формою запису системи нормальних рівнянь.

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \; e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

$$Y = XB + e,$$

$X^T Y = \left(X^T X\right) B$ - матрична форма системи нормальних рівнянь.

$B = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$ матрична форма розв'язку системи нормальних рівнянь.

Тут $\left(X^T X\right)^{-1}$ - матриця, обернена до матриці $\left(X^T X\right)$. Стовпець В називається вектором оцінок коефіцієнтів (параметрів) регресії.

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 6 & 12 & 11 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 12 \\ 1 & 7 & 11 \\ 1 & 8 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 27 & 58 \\ 27 & 169 & 351 \\ 58 & 351 & 782 \end{bmatrix}$$

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 6 & 12 & 11 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 55 \\ 46 \\ 35 \\ 67 \\ 72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 275 \\ 1549 \\ 3368 \end{bmatrix}$$

$$\left(X^T X\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.62 & -0.14 & -0.06 \\ -0.14 & 0.098 & -0.03 \\ -0.05 & -0.03 & 0.02 \end{bmatrix}$$

$$B = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y = \begin{bmatrix} 1.62 & -0.14 & -0.06 \\ -0.14 & 0.098 & -0.03 \\ -0.05 & -0.03 & 0.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 275 \\ 1549 \\ 3368 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.76 \\ 0.24 \\ 1.55 \end{bmatrix}$$

Таким чином, одержана теоретична лінійна залежність між факторами x_1 і x_2 та $\hat{y}$ $\hat{y} = 35{,}76 + 0{,}24x_1 + 1{,}55x_2$

Модель множинної регресії в Excel

Приклад 5. *Для маркетингового дослідження в компанії OmniPower була створена вибірка, що складається з 34 магазинів з приблизно однаковими об'ємами продажів. Розглянемо дві незалежні змінні - ціна батончика OmniPower в центах (**x_1**) і місячний бюджет рекламної кампанії, що проводиться в магазині, виражений в доларах (**x_2**). До цього бюджету входять витрати на оформлення вивісок і вітрин, а також на роздачу купонів і безкоштовних зразків. Залежна змінна **y** є кількістю батончиків OmniPower, проданих за місяць (рис. 2.1).*

	A	B	C	D
1	Магазин	Объем продаж	Цена	Расходы на рекламу
2	1	4141	59	200
3	2	3842	59	200
4	3	3056	59	200
5	4	3519	59	200
6	5	4226	59	400
7	6	4630	59	400
8	7	3507	59	400
9	8	3754	59	400
10	9	5000	59	600
11	10	5120	59	600
12	11	4011	59	600
13	12	5015	59	600
14	13	1916	79	200
15	14	675	79	200
16	15	3636	79	200
17	16	3224	79	200
18	17	2295	79	400
19	18	2730	79	400

Рисунок 2.1 – Місячний об'єм продаж батончиків OmniPower, їх ціна і витрати на рекламу

Для обчислення коефіцієнтів регресії використовується метод найменших квадратів. У Excel можна скористатися *Пакетом аналізу*, опцією *Регресія*. На відміну від побудови лінійної регресії, просто задайте як *Вхідний інтервал X* область, що включає всі незалежні змінні (рис. 2.2). У нашому прикладі це $C$1:$D$35.

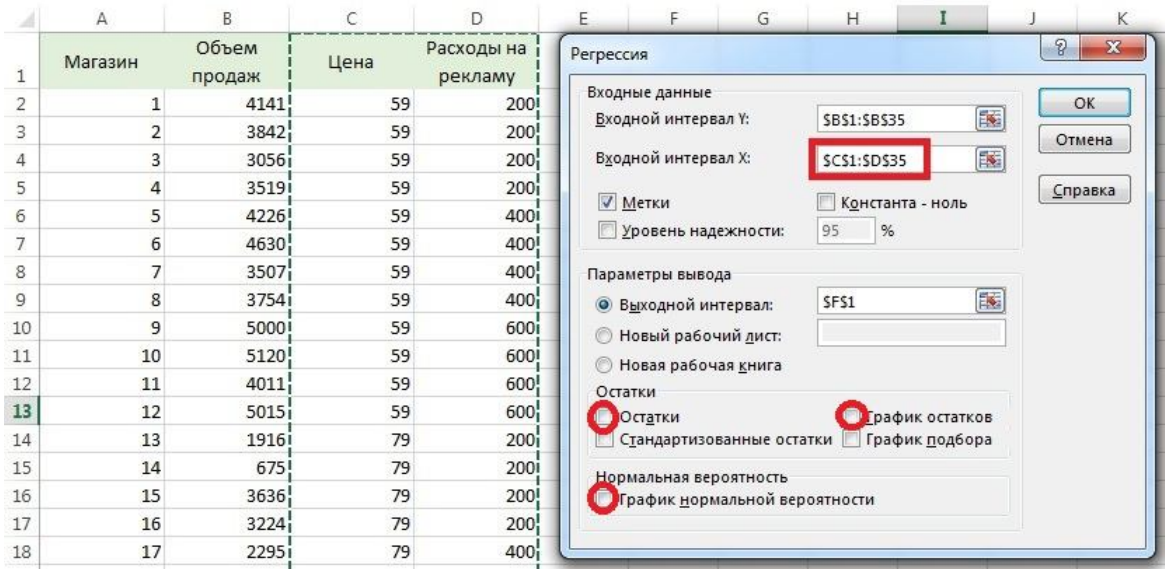

Рисунок 2.2 – Вікно Регресія Пакету аналізу Excel

Результати роботи Пакету аналізу представлені на рис. 2.3. Як бачимо, b_0= 5 837,52, b_1 = –53,217 і b_2= 3,163. Таким чином, $\hat{y} = 5837.52 - 53.217x_1 + 3.163x_2$.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Анализ продаж батончиков OmniPower**						
2							
3	*Регрессионная статистика*						
4	Множественный R	0,870					
5	R-квадрат	0,758					
6	Нормированный R-квадрат	0,742					
7	Стандартная ошибка	638,065					
8	Наблюдения	34					
9							
10	Дисперсионный анализ						
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*	
12	Регрессия	2	**SSR** 39 472 731	19 736 365	48,477	0,000	
13	Остаток	31	**SSE** 12 620 947	407 127			
14	Итого	33	**SST** 52 093 677				
15							
16		*Коэффици-енты*	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
17	Y-пересечение	b_0 5 837,521	628,150	9,293	0,000	4 556,400	7 118,642
18	Цена	b_1 -53,217	6,852	-7,766	0,000	-67,193	-39,242
19	Расходы на рекламу	b_2 3,613	0,685	5,273	0,000	2,216	5,011

Рисунок 2.3 – Множинна регресія дослідження об'ємів продажу батончиків

Вибірковий нахил b_0 рівний 5 837,52 і є оцінкою середньої кількості батончиків OmniPower, проданих за місяць при нульовій ціні і відсутності витрат на рекламу. Оскільки ці умови позбавлені сенсу, в даній ситуації величина нахилу b_0 не має розумної інтерпретації.

Вибірковий нахил b_1 рівний –53,217. Це означає, що при заданому щомісячному об'ємі витрат на рекламу збільшення ціни батончика на один цент приведе до зниження очікуваного об'єму продажів на 53,217 штук. Аналогічно вибірковий нахил b_2, рівний 3,613, означає, що при фіксованій ціні збільшення щомісячних рекламних витрат на один долар супроводжується збільшенням очікуваного об'єму продажів батончиків на 3,613 шт. Ці оцінки дозволяють краще зрозуміти вплив ціни і реклами на об'єм продажів. Наприклад, при фіксованому об'ємі витрат на рекламу зменшення ціни батончика на 10 центів збільшить об'єм продажів на 532,173 шт., а при фіксованій ціні батончика збільшення рекламних витрат на 100 дол. збільшить об'єм продажів на 361,31шт.

Індивідуальні завдання з теми “Парнолінійна регресія”

Варіант 1

Досліджується лінійний зв'язок між відповідними показниками для 5 банків України. Побудувати лінійну регресійну модель, знайти оцінки її параметрів. Обчисліть коефіцієнти кореляції та детермінації.

Показники	Ощадбанк	Україна	Приватбанк	Укрсоцбанк	Аваль
Чисті активи(x)	10.27	18.45	11.25	10.04	8.38
Власні засоби(y)	7.85	21.33	7.62	11.35	3.93

Варіант 2

Показники	Пумб	Укрсіббанк	Славянський	Укркредбанк	Укрінбанк
Чисті активи(x)	4.93	1.51	1.36	1.37	2.02
Власні засоби(y)	3.89	3.29	2.59	0.98	1.67

Варіант 3

Показники	БГбанк	Правексбанк	Зевс	Металург	Стандарт
Чисті активи(x)	1.61	1.17	0.81	0.51	0.66
Власні засоби(y)	0.91	1.16	0.99	1.02	0.86

Варіант 4

Показники	Ощадбанк	Україна	Приватбанк	Укрсоцбанк	Аваль
Власні засоби(x)	7.85	21.33	7.62	11.35	3.93
Статутний фонд(y)	1.06	5.63	4.55	2.95	3.5

Варіант 5

Показники	Пумб	Укрсіббанк	Славянський	Укркредбанк	Укрінбанк
Власні засоби(x)	3.89	3.29	2.59	0.98	1.67
Статутний фонд(y)	2.04	9.08	1.68	0.69	1.53

Варіант 6

Показники	БГбанк	Правексбанк	Зевс	Металург	Стандарт
Власні засоби(x)	1.67	0.91	1.16	0.99	1.02
Статутний фонд(y)	1.53	2.25	2.48	1.78	1.18

Варіант 7

Показники	Ощадбанк	Україна	Приватбанк	Укрсоцбанк	Аваль
Статутний фонд(x)	1.06	5.63	4.55	2.95	3.5
Внески громадян(y)	51.1	12.16	14.155	4.5	1.5

Варіант 8

Показники	Пумб	Укрсіббанк	Славянський	Укркредбанк	Укрінбанк
Статутний фонд(x)	2.04	9.08	1.68	0.69	1.53
Внески громадян(y)	0.07	0.08	0.6	0.3	1.3

Варіант 9

Показники	БГбанк	Правексбанк	Зевс	Металург	Стандарт
Статутний фонд(x)	1.53	2.25	2.48	1.78	1.18
Внески громадян(y)	0.01	0.8	0.3	0.8	0.001

Варіант 10

Показники	Ощадбанк	Україна	Приватбанк	Укрсоцбанк	Аваль
Внески громадян(x)	51.1	12.16	14.155	4.5	1.5
Балансовий прибуток(y)	6.4	9.01	15.73	10.51	7.95

Варіант 11

Показники	Пумб	Укрсіббанк	Славянський	Укркредбанк	Укрінбанк
Внески громадян(x)	0.07	0.08	0.6	0.3	1.3
Балансовий прибуток(y)	4.76	1.08	7.06	3.83	0.63

Варіант 12

Показники	БГбанк	Правексбанк	Зевс	Металург	Стандарт
Внески громадян(x)	0.01	0.8	0.3	0.8	0.001
Балансовий прибуток(y)	1.47	0.55	1.83	1.8	1.31

Варіант 13

Показники	Ощадбанк	Україна	Пріватбанк	Укрсоцбанк	Аваль
Балансовий прибуток(x)	6.4	9.01	15.73	10.51	7.95
Чисті активи(y)	10.27	18.45	11.25	10.04	8.38

Варіант 14

Показники	Пумб	Укрсіббанк	Славянський	Укркредбанк	Укрінбанк
Балансовий прибуток(x)	4.76	1.08	7.06	3.83	0.63
Чисті активи(y)	4.93	1.51	1.36	1.37	2.02

Варіант 15

Показники	БГбанк	Правексбанк	Зевс	Металург	Стандарт
Балансовий прибуток(x)	1.47	0.55	1.83	1.8	1.31
Чисті активи(y)	1.61	1.17	0.81	0.51	0.66

Варіант 16

Показники	Кредит	Надра	Вабанк	Югбанк	Енергобанк
Чисті активи(x)	0.7	1.45	1.22	0.64	0.68
Власні засоби(y)	1.15	0.88	1.02	0.7	0.84

Варіант 17

Показники	Фінкред	Кіббанк	Мтбанк	Укбанк	Кбанк
Чисті активи(x)	0.93	2.51	0.53	0.37	0.62
Власні засоби(y)	0.81	0.29	0.59	0.93	0.67

Варіант 18

Показники	Донгобанк	Псбанк	Югбанк	Метбанк	Стандарт
Чисті активи(x)	0.31	0.56	0.74	0.67	0.38
Власні засоби(y)	0.44	0.94	0.59	0.77	0.64

Варіант 19

Показники	Кредит	Надра	Вабанк	Югбанк	Енергобанк
Власні засоби(x)	1.15	0.88	1.02	0.7	0.84
Статутний фонд(y)	2.25	1.68	1.12	1.71	2.02

Варіант 20

Показники	Фінкред	Кіббанк	Мтбанк	Укбанк	Кбанк
Власні засоби(x)	0.81	0.29	0.59	0.93	0.67
Статутний фонд(y)	1.11	1.29	1.59	2.09	1.16

Варіант 21

Показники	Донгобанк	Псбанк	Югбанк	Метбанк	Стандарт
Власні засоби(x)	0.44	0.94	0.59	0.77	0.64
Статутний фонд(y)	1.24	0.64	0.79	0.71	1.22

Варіант 22

Показники	Кредит	Надра	Вабанк	Югбанк	Енергобанк
Статутний фонд(x)	2.25	1.68	1.12	1.71	2.02
Внески громадян(y)	0.35	0.58	0.32	0.71	0.57

Варіант 23

Показники	Фінкред	Кіббанк	Мтбанк	Укбанк	Кбанк
Статутний фонд(x)	1.11	1.29	1.59	2.09	1.16
Внески громадян(y)	0.36	0.09	0.03	0.09	0.51

Варіант 24

Показники	Донгобанк	Псбанк	Югбанк	Метбанк	Стандарт
Статутний фонд(x)	1.24	0.64	0.79	0.71	1.22
Внески громадян(y)	0.04	0.04	0.19	0.49	0.22

Варіант 25

Показники	Кредит	Надра	Вабанк	Югбанк	Енергобанк
Внески громадян(x)	0.35	0.58	0.32	0.71	0.57
Балансовий прибуток(y)	0.64	0.54	1.47	0.84	0.89

Варіант 26

Показники	Фінкред	Кіббанк	Мтбанк	Укбанк	Кбанк
Внески громадян(x)	0.04	0.04	0.19	0.49	0.22
Балансовий прибуток(y)	0.34	0.24	0.11	0.47	0.62

Варіант 27

Показники	Донгобанк	Псбанк	Югбанк	Метбанк	Стандарт
Внески громадян(x)	0.03	0.24	0.49	0.11	0.21
Балансовий прибуток(y)	1.64	1.04	0.93	0.48	0.75

Варіант 28

Показники	Кредит	Надра	Вабанк	Югбанк	Енергобанк
Балансовий прибуток(x)	0.64	0.54	1.47	0.84	0.89
Чисті активи(y)	0.7	1.45	1.22	0.64	0.68

Варіант 29

Показники	Фінкред	Кіббанк	Мтбанк	Укбанк	Кбанк
Балансовий прибуток(x)	0.44	0.94	1.37	0.94	0.99
Чисті активи(y)	0.93	2.51	0.53	0.37	0.62

Варіант 30

Показники	Донгобанк	Псбанк	Югбанк	Метбанк	Стандарт
Балансовий прибуток(x)	1.64	1.04	0.93	0.48	0.75
Чисті активи(y)	0.31	0.56	0.74	0.67	0.38

Індивідуальні завдання з теми "Лінійні моделі множинної регресії"

Варіант 1

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 , b_2.

x_1	2	4	6	7	8
x_2	20	15	12	19	33
y	75	86	95	88	72

Варіант 2

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 , b_2.

x_1	3	5	7	9	11
x_2	21	16	13	20	34
y	74	85	94	87	71

Варіант 3

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	5	7	9	11	13
x_2	20	17	12	11	30
y	76	86	92	88	78

Варіант 4

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 , b_2.

x_1	1	3	5	7	9
x_2	22	17	14	22	35
y	73	82	91	88	72

Варіант 5

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 .

x_1	2	3	4	5	6
x_2	30	25	22	29	43
y	85	96	95	98	82

Варіант 6

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2.

x_1	3	4	5	6	7
x_2	32	27	24	31	45
y	83	94	90	68	80

Варіант 7

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2.

x_1	4	5	6	8	2
x_2	28	25	22	29	43
y	81	94	89	94	82

Варіант 8

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2.

x_1	9	6	4	5	3
x_2	31	27	18	27	35
y	80	90	92	98	82

Варіант 9

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2.

x_1	8	7	3	4	3
x_2	21	17	12	29	33
y	75	86	95	88	72

Варіант 10

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2.

x_1	7	6	5	3	8
x_2	12	15	19	18	20
y	45	26	45	38	42

Варіант 11

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2.

x_1	1	3	4	6	2
x_2	8	15	19	18	10
y	35	26	55	38	42

Варіант 12

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 ,b_2.

x_1	2	4	6	3	8
x_2	11	16	17	14	20
y	37	46	36	38	42

Варіант 13

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 .

x_1	1	2	3	4	7
x_2	17	18	12	19	24
y	45	24	45	36	42

Варіант 14

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 ,b_2.

x_1	5	4	6	2	3
x_2	19	24	14	19	22
y	43	22	45	34	42

Варіант 15

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1,b_2 .

x_1	2	1	3	5	7
x_2	18	14	15	17	16
y	41	28	45	32	42

Варіант 16

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 ,b_2.

x_1	2	3	66	5	1
x_2	12	16	20	12	10
y	39	30	45	3	42

Варіант 17

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 ,b_2.

x_1	6	1	2	4	5
x_2	29	11	13	18	33
y	65	76	85	78	62

Варіант 18

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	7	3	7	9	4
x_2	20	15	12	19	33
y	55	66	75	68	52

Варіант 19

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	3	5	7	9	8
x_2	20	35	43	19	33
y	45	56	65	58	72

Варіант 20

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	2	4	6	8	9
x_2	29	15	18	19	33
y	70	80	90	80	70

Варіант 21

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	3	5	9	12	14
x_2	20	45	42	39	33
y	75	86	95	88	72

Варіант 22

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1					
x_2	20	15	12	19	33
y	75	86	95	88	72

Варіант 23

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	5	8	12	13	14
x_2	28	45	29	19	30
y	75	86	95	88	72

Варіант 24

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	11	9	5	8	12
x_2	29	17	32	19	23
y	70	86	90	85	74

Варіант 25

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	11	12	13	17	18
x_2	32	35	22	29	33
y	75	86	95	88	72

Варіант 26

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 , b_2.

x_1	14	11	11	9	12
x_2	21	35	42	39	33
y	75	80	91	82	72

Варіант 27

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	3	5	7	18	11
x_2	23	18	13	29	33
y	65	86	95	88	72

Варіант 28

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	12	2	5	7	11
x_2	22	15	12	19	33
y	75	86	95	88	72

Варіант 29

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1, b_2 .

x_1	11	12	13	7	8
x_2	40	27	35	21	33
y	75	86	95	88	72

Варіант 30

Знайти невідомі параметри множинної лінійної регресії b_0 і b_1 , b_2.

x_1	11	12	12	7	8
x_2	26	19	21	19	33
y	75	86	95	88	72

Список джерел

1. Самойленко М. І. Математичне програмування / М. І. Самойленко. – Харків: Основа, 2002. – 424 с.
2. Зайченко Ю. П. Исследование операций: учеб. пособие для студентов вузов / Ю. П. Зайченко. – Киев: Вища школа, 1989, – 392 с.
3. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. В. Волощенко. – М. : Высш. шк., 1980.
4. Бережная Е. В. Математические методы моделирования экономических систем / Е. В. Бережная. – М. : Финансы и статистика, 2001.
5. Красс М. С. Математические методы и модели для магистрантов экономики: учеб. пособие / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2006. – 496 с. : ил.
6. Лагоша Б. А. Оптимальное управление в экономике / Б. А. Лагоша. – М. : Финансы и статистика, 2003.
7. Долгопятов Т. Г. Математическое моделирование экономических процессов / Т. Г. Долгопятов, Б. Г. Суворов. – М. : МГУ, 1990. – 262 с.
8. Зайченко Ю. П. Исследование операций : сб. задач / Ю. П. Зайченко, С. А. Шумилова. – Київ : вища школа, 1990. – 239 с.
9. Плис А. И. Математический практикум для экономистов и инженеров: учеб. пособие / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – М.: Финансы и статистика, 1999.
10. Монахов А. В. Математические методы анализа экономики / А. В. Монахов. – СПб. : Питер, 2002. – 176 с.
11. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике / П. В. Конюховский. – СПб. : Питер, 2002.
12. Жиронкина Г. В. Економетрія: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закладів / Г. В. Жиронкина, В. О. Тіманюк. – Харків : вид-во НФаУ: Золоті сторінки, 2004. – 224 с.
13. Елисеева И. И. Эконометрика: учебник / И. И. Елисеева. – М. : Финансы и статистика, 2003.
14. Лук’яненко І. Г. Сучасні економетричні методи у фінансах : навч. посібник / І. Г. Лук’яненко, Ю. О. Городніченко. – Київ : Літера, ЛТД, 2002. – 352 с.
15. Лук’яненко І. Г. Економетрика: підручник / І. Г. Лук’яненко, Л. І. Краснікова – Київ : товариство «Знання», КОО, 1998. – 494 с.
16. Черкасов В. В. Деловой риск предпринимательской деятельности: практ. пособие / В. В. Черкасов. – Киев, 1996.

17. Егоршин А. А., Малярец Л. М. Практикум по эконометрии в Excel: учебное пособие для экономических вузов / А. А. Егоршин, Л. М. Малярец. – Харків : «ИНЖЕК», 2005. – 100 с.

18. Самойленко М. І. Методичні вказівки до самостійного вирішення задач та виконання розрахункових завдань з курсу “Математичного програмування“ / М. І. Самойленко, Г. В. Білогурова, О. М. Штельма, І. О. Гавриленко. – Харків : ХДАМГ, 2006.

Виробничо-практичне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи і виконання лабораторних робіт з дисципліни

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ ТА ПРОЦЕСІВ

(для студентів 1 курсу денної форми навчання
освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, напрямів підготовки
6.030504 – «Економіка підприємництва» та 6.030509 – «Облік і аудит»)

Укладачі **ШТЕЛЬМА** Ольга Миколаївна,
МАКОГОН Наталія Вікторівна

Відповідальний за випуск *М. І. Самойленко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Є. Г. Панова*

План 2014, поз. 348М

Підп. до друку 12.06.2014. Формат 60×84/16
Друк на різографі. Ум. друк. арк. 1,1
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.