

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

Л. П. Вороновська

**ВИЩА МАТЕМАТИКА
Модуль 3**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання освітнього
рівня «бакалавр» за спеціальностями 192 – Будівництво та
цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології)*

**Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2019**

УДК 517(042.3)

Вороновська Л. П. Вища математика. Модуль 3 : конспект лекцій для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології / Л. П. Вороновська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 192 с.

Автор

канд. пед. наук Л. П. Вороновська

Рецензент

Л. Б. Коваленко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова)

*Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 9 від 25.04.2019.*

Конспект лекцій складено з метою допомогти студентам будівельних спеціальностей вишів під час підготовки до занять та іспитів з вищої математики.

© Л. П. Вороновська, 2019

© ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2019

ЗМІСТ

Вступ	5
Лекція 1 Об'єм циліндричного тіла. Інтегральна сума функції двох змінних. Подвійний інтеграл. Властивості подвійного інтеграла.....	6
Лекція 2 Обчислення подвійного інтегралу шляхом зведення до повторного. Заміна порядку інтегрування у повторному інтегралі	12
Лекція 3 Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярній системі координат.....	22
Лекція 4 Геометричні застосування подвійного інтегралу.....	30
Лекція 5 Фізичні застосування подвійного інтегралу.....	42
Лекція 6 Потрійний інтеграл та його застосування.....	50
Лекція 7 Скалярне поле. Криволінійний інтеграл за довжиною (першого роду). Застосування криволінійного інтегралу першого роду.....	60
Лекція 8 Векторне поле. Криволінійний інтеграл за координатами (другого роду).....	71
Лекція 9 Обчислення криволінійного інтегралу за координатами. Формула Гріна. Умови незалежності криволінійного інтегралу від шляху інтегрування.....	81
Лекція 10 Інтегрування повних диференціалів. Первісна функції. Застосування криволінійних інтегралів до задач механіки та термодинаміки.....	92

Лекція 11	Поверхневий інтеграл за площею. Поверхневий інтеграл за координатами.....	100
Лекція 12	Формула Стокса. Формула Остроградського- Гауса.....	113
Лекція 13	Числові ряди. Основні поняття. Властивості числових рядів. Достатні ознаки збіжності знакододатніх рядів.....	122
Лекція 14	Ознака Даламбера. Радикальна та інтегральна ознаки Коші. Знакозмінні ряди. Знакопчергові ряди. Ознака Лейбниці. Абсолютна й умовна збіжність.....	132
Лекція 15	Функціональні ряди.....	145
Лекція 16	Періодичні функції. Розклад періодичних функцій у ряд Фур'є. Достатні умови збіжності ряду Фур'є	173
Лекція 17	Ряди Фур'є для парних і непарних періодичних функцій. Ряди Фур'є для періодичних функцій з довільним періодом.....	181
	Список рекомендованої літератури.....	191

ВСТУП

Конспект лекцій побудований за модульною технологією навчання згідно з робочими програмами курсу «Вища математика» для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології.

До конспекту увійшли лекції за темами «Подвійні та потрійні інтеграли», «Криволінійні інтеграли. Елементи теорії поля» та «Числові та степеневі ряди. Ряди Фур'є».

Доступне, коротке подання теоретичного матеріалу супроводжується детальними ілюстраціями, великою кількістю прикладів для практичного закріплення вивченого.

ЛЕКЦІЯ 1

ОБ'ЄМ ЦИЛІНДРИЧНОГО ТІЛА. ІНТЕГРАЛЬНА СУМА ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Об'єм циліндричного тіла. Інтегральна сума функції двох змінних

Розглянемо задачу визначення об'єму V циліндричного тіла.

Визначення. Циліндричним тілом називається тіло, обмежене площиною Oxy , поверхнею $z = f(x, y)$, з якою будь яка пряма паралельна осі Oz , перетинається тільки в одній точці, і циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі Oz (рис. 1.1).

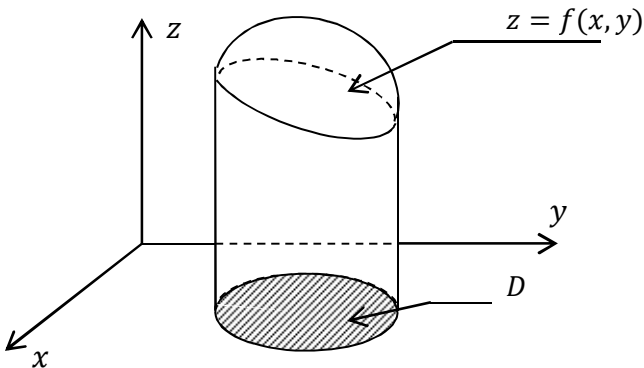


Рисунок 1.1

Область D , що є проекцією поверхні $z = f(x, y)$ на площину Oxy , називається *основою* циліндричного тіла.

При визначенні об'єму циліндричного тіла ми будемо використовувати два принципи:

- 1) якщо розбити тіло на частини, то його об'єм буде дорівнювати сумі об'ємів отриманих частин;
- 2) об'єм прямого циліндра дорівнює добутку площі основи на висоту циліндра.

Нехай $z = f(x, y)$ неперервна в області D і знаходиться над площиною Oxy , тобто $f(x, y) > 0$. Виконаємо наступні дії:

- розіб'ємо основу циліндричного тіла, тобто область D , на n частин довільної форми, будемо їх називати *частинними областями*. Позначимо частинні області $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, а їх площу відповідно – $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$;
- через границю кожної частинної області проведемо циліндричну поверхню, тобто отримаємо n частинних циліндричних тіл;
- виберемо в кожній частинній області σ_i довільно точку $P_i(x_i, y_i)$ і замінимо відповідне частинне циліндричне тіло прямим циліндром, висота якого буде дорівнювати $z_i = f(x_i, y_i)$, а площа основи $\Delta\sigma_i$;
- об'єм i -го прямого циліндра знаходиться за формулою
$$V_i = f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i;$$
- в результаті виконаних дій отримаємо n -ступінчате циліндричне тіло, об'єм якого дорівнює

$$V_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n;$$

$$\begin{aligned} V_n &= f(x_1, y_1)\Delta\sigma_1 + f(x_2, y_2)\Delta\sigma_2 + \dots + f(x_n, y_n)\Delta\sigma_n = \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i. \end{aligned}$$

Припустимо, що об'єм V даного циліндричного тіла приблизно рівний об'єму V_n n -ступінчатого циліндричного тіла. Враховуючи, що чим більше n , тим менше кожна із частинних областей. Переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$, ми будемо вимагати щоб площа найбільшої частинної області прямувала до нуля ($\Delta\sigma_i \rightarrow 0$).

Отже, ми приймемо шуканий об'єм V рівним границі, до якої прямує V_n , при прямуванні до нуля площі найбільшої частинної області:

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\Delta\sigma_i \rightarrow 0)}} V_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\Delta\sigma_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i.$$

де $f(x_i, y_i)$ – значення функції в точці $P_i(x_i, y_i)$ і $\Delta\sigma_i$ – площа частинної області.

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i, \quad (1.1)$$

Сума (1.1) називається n -ою інтегральною сумою для функції $f(x, y)$ в області D , яка відповідає розбиттю даної області на n частинних областей.

Визначення. Подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D називається границя, до якої прямує n -а інтегральна сума (1.1) при прямуванні до нуля площі найбільшої частинної області.

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\Delta\sigma_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i = \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

Вираз $f(x, y)d\sigma$ називається підінтегральним виразом; функція $f(x, y)$ – підінтегральною функцією, $d\sigma$ – елемент площі, область D – областю інтегрування, змінні x і y називаються змінними інтегрування.

Таким чином, об'єм циліндричного тіла, обмеженого площиною Oxy , поверхнею $z = f(x, y)$ та циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі Oz , виражається подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$, узятий по області D , що є основою циліндричного тіла:

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

Теорема про існування подвійного інтегралу. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області D , обмеженої замкненою лінією, то її n -та інтегральна сума прямує до границі при прагненні до нуля площі найбільшої частинної області. Ця границя, тобто подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) d\sigma$, не залежить від способу розбиття області D на частинні області σ_i і від вибору в них точок P_i .
(Без доведення).

Властивості подвійних інтегралів

I. Подвійний інтеграл від суми (різниці) скінченного числа функцій дорівнює сумі (різниці) подвійних інтегралів від кожної функції:

$$\begin{aligned} & \iint_D (f \pm \varphi(x, y) \pm \dots \pm \psi(x, y)) d\sigma = \\ & = \iint_D f(x, y) d\sigma \pm \iint_D \varphi(x, y) d\sigma \pm \dots \pm \iint_D \psi(x, y) d\sigma. \end{aligned}$$

II. Постійний множник підінтегральної функції можна винести за символ подвійного інтеграла:

$$\iint_D C f(x, y) d\sigma = C \iint_D f(x, y) d\sigma.$$

III. Якщо область інтегрування D складна, тобто $D = D_1 + D_2$, то:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma.$$

IV. Якщо в кожній точці області D для функцій $f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ виконується нерівність $f(x, y) \geq \varphi(x, y)$, то

$$\iint_D f(x, y) d\sigma > \iint_D \varphi(x, y) d\sigma.$$

V. Якщо функція $f(x, y)$ в будь якій точці інтегрування D задовольняє умові

$$m \leq f(x, y) \leq M,$$

де m і M відповідно найменше та найбільше значення функції в області D , то

$$mS \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq MS,$$

де S – площа області D .

VI. Подвійний інтеграл дорівнює добутку значення підінтегральної функції в деякій точці області інтегрування на площу області інтегрування, тобто

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\zeta, \eta)S.$$

Значення $f(\zeta, \eta)$, що знаходять з вказаного рівняння, називають середнім значенням функції $f(x, y)$ в області D .

ЛЕКЦІЯ 2

ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛУ ЗВЕДЕННЯМ ЙОГО ДО ПОВТОРНОГО. ЗМІНА ПОРЯДКУ ІНТЕГРУВАННЯ У ПОВТОРНОМУ ІНТЕГРАЛІ

Обчислення подвійного інтеграла зведенням його до повторного

При обчисленні подвійного інтеграла $\iint_D f(x, y) d\sigma$ елемент площі $d\sigma$ зручніше представити в іншому вигляді. Розбиваючи область інтегрування D в площині Oxy на частинні області за допомогою двох систем координатних ліній: $x = \text{const}, y = \text{const}$ (рис. 2.1). Ці лініями є прямими,

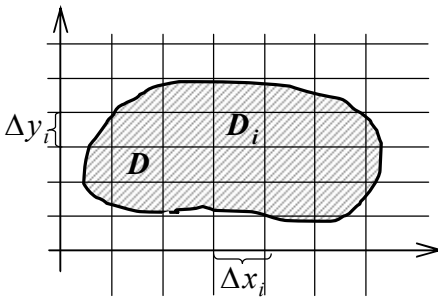


Рисунок 2.1

паралельними відповідно осям Ox і Oy , а частинними областями є прямокутники зі сторонами паралельними осям координат. Площа кожної частинної області $\Delta\sigma_i$ дорівнює добутку відповідних Δx_i і Δy_i . Тому елемент площі

$$d\sigma = dx dy,$$

тобто елемент площі в декартових координатах є добутком диференціалів незалежних змінних. Отже ми маємо

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (2.1)$$

При обчисленні подвійного інтегралу (2.1) спираємося на той факт, що він виражає об'єм V циліндричного тіла з основою D , обмеженого поверхнею $z = f(x, y)$. Нагадаємо, що ми вже займалися задачею про об'єм тіла, коли розглядали застосування визначеного інтегралу до задач геометрії, і отримали наступу формулу:

$$V = \int_a^b S(x) dx, \quad (2.2)$$

де $S(x)$ – площа поперечного перерізу тіла площиною, перпендикулярною до вісі абсцис, а $x = a$ і $x = b$ – рівняння площин, що обмежують дане тіло. Застосуємо цю формулу для обчислення подвійного інтеграла.

Припустимо спочатку, що область інтегрування D задовольняє наступній умові: будь-яка пряма, паралельна вісі Ox або вісі Oy , перетинає межу області не більше чим у двох точках. Відповідне циліндричне тіло зображено на рисунку 2.2.

При перетині циліндричного тіла площиною $x = C$, де $C = const$ утворюється криволінійна трапеція $C_1M_1M_2C_2$ (рис. 2.2). Апліката $z = f(x, y)$ точки лінії M_1M_2 при фіксованому x є функцією лише однієї змінної y , причому аргумент y змінюється в межах від $y_{вх} = y_1(x)$ до $y_{вих} = y_2(x)$.

Площа $S(x)$ фігури $C_1M_1M_2C_2$ дорівнює визначеному інтегралу:

$$S(x) = \int_{y_{вх}}^{y_{вих}} z dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

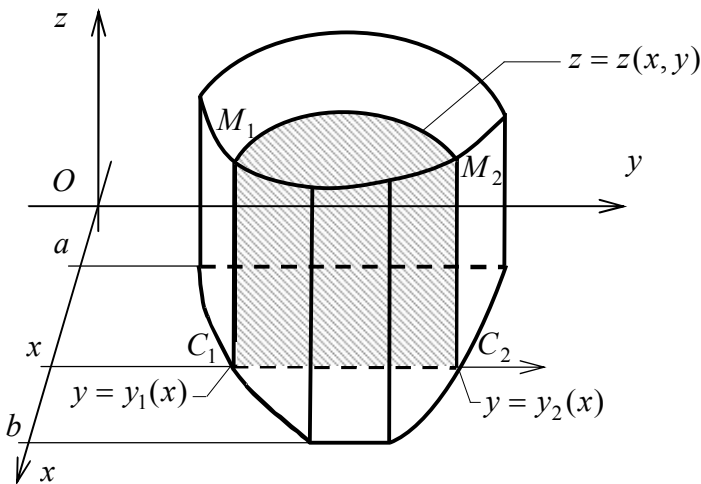


Рисунок 2.2

Відповідно формулі (2.2) об'єм всього тіла буде дорівнювати інтегралу від $S(x)$ в інтервалі зміни x ($a \leq x \leq b$).

Змінюючи в формулі $S(x)$ виразом, остаточно маємо (2.2) у вигляді:

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Порівнюючи обидва вирази для об'єму V , одержуємо формулу

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

яка зводить подвійний інтеграл до двократного повторного

інтеграла

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (2.3)$$

Спочатку обчислюється **внутрішній інтеграл** $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ за **внутрішньою змінною** y в припущенні, що **зовнішня змінна** x фіксована (при інтегруванні x є сталою). У результаті обчислення внутрішнього інтеграла в межах від $y_1(x)$ до $y_2(x)$ одержуємо певну функцію $S(x)$ однієї змінної x .

Зовнішні межі інтегрування a і b – завжди сталі. Обчислюючи **зовнішній інтеграл** $\int_a^b S(x) dx$, дістаємо деяке число I – значення подвійного інтеграла.

Внутрішні межі інтегрування $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є функціями зовнішньої змінної x . В окремих випадках вони також можуть бути сталими.

Зупинимось більш детально на знаходженні меж інтегрування області D в напрямі осі Oy (рис. 2.3).

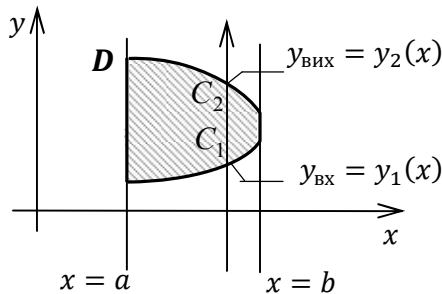


Рисунок 2.3

1) Знаходимо проекцію області D на вісь Ox , отримуємо відрізок $[a, b]$, $a \leq x \leq b$. Числа a і b – відповідно нижня і верхня межі у зовнішньому інтегралі за змінною x . Вони визначаються крайніми зліва та справа точками області D , які лежать на вертикальних прямих $x = a$ та $x = b$, що обмежують цю область.

2) Проведемо через будь-яку внутрішню точку x відрізка $[a; b]$ пряму, паралельну осі Oy і в тому ж напрямі. Ця пряма перетинає межу області D у двох точках – входу C_1 і виходу C_2 . Щоб визначити межі інтегрування внутрішнього інтеграла за змінною y , визначаємо, якій лінії належить точка C_1 – це лінія входу, якій лінії належить точка C_2 – це лінія виходу. Обов'язково лінії входу і виходу повинні бути представлені, як $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$. Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – відповідно нижня і верхня межі у внутрішньому інтегралі за змінною y .

Аналогічні дії виконують, розглядаючи область D у напрямі осі Ox (рис. 2.4). Внутрішній інтеграл маємо за змінною x . Обчислюючи його в межах від $x_1(y)$ до $x_2(y)$ (при цьому зовнішня змінна y вважається сталою), дістаємо деяку функцію $S(y)$ від однієї змінної y . Зовнішній інтеграл є інтегралом за змінною y . Тому, переходячи до двократного

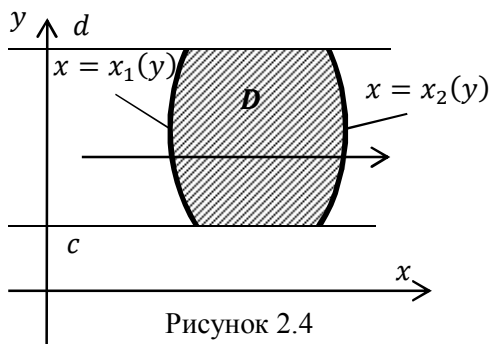


Рисунок 2.4

повторного інтегрування маємо:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (2.4)$$

Якщо область D правильна в напрямках обох осей Ox і Oy , то подвійний інтеграл можна звести до повторного будь-яким з указаних способів. Зрозуміло, що результати обчислень при цьому однакові, тобто *значення подвійного інтеграла не залежить від порядку інтегрування*:

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (2.5)$$

Перехід від лівої частини цього співвідношення до правої і навпаки називається *зміною порядку інтегрування*.

Залежно від вигляду області D та підінтегральної функції $f(x, y)$, треба обирати той порядок інтегрування, який приводить до простіших обчислень.

Якщо область D не є правильною в напрямі жодної з осей Ox чи Oy , то її необхідно розбити на частини без спільних внутрішніх точок, кожна з яких є правильною в напрямі Ox чи Oy . Обчислюючи подвійні інтеграли по правильних частинних областях і додаючи результати, знайдемо шуканий подвійний інтеграл по всій області D .

Правила обчислення подвійного інтеграла в прямокутних координатах

1. Побудувати область інтегрування D і перевірити, чи є вона правильною (прямі, паралельні осям координат, перетинають межу області не більше ніж в двох точках).

2. Обрати раціональний порядок інтегрування.

3. Перейти від подвійного інтеграла до повторного.

4. Розставити межі інтегрування в повторному інтегралі, пам'ятаючи, що межі зовнішнього інтеграла завжди сталі (це кінці інтервалу, що належить осі Ox або осі Oy , на який проєктується область D), а межі внутрішнього інтегралу є функціями тієї змінної, відносно якої береться зовнішній інтеграл.

5. Знайти внутрішній інтеграл, вважаючи сталою змінну зовнішнього інтеграла.

6. Обчислити зовнішній інтеграл від функції, отриманої у результаті знаходження внутрішнього інтеграла.

Зауважимо, що коли область інтегрування D – прямокутник, сторони якого паралельні осям координат то всі чотири межі інтегрування в повторному інтегралі сталі.

Приклад 2.1 Розставити межі в повторному інтегралі двома способами, якщо область інтегрування D обмежена лініями $y = x^2$ і $y = x + 2$ та обчислити інтеграл, якщо $f(x, y) = x + y$.

Розв'язання.

Перший спосіб. Побудуємо область інтегрування D і проведемо пряму паралельно осі Oy (рис. 2.5 а). Ця пряма перетинає межу області D у двох точках – входу C_1 і виходу C_2 . Аналіз форми області D і вигляду рівнянь ліній, які її обмежують, показує, що область D – правильна у напрямі осі Oy (лінія входу і лінія виходу не змінюється при переміщенні прямої вліво і вправо в межах області D).

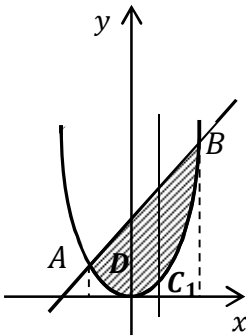


Рисунок 2.5 а

$$-1 \leq x \leq 2.$$

Межі інтегрування внутрішнього інтеграла: $y = x^2$ – лінія входу, $y = x + 2$ – лінія виходу.

Для знаходження меж інтегрування зовнішнього інтеграла необхідно знайти точки перетину ліній:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}; \quad x^2 = x + 2;$$

$$x^2 - x - 2 = 0; \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 2.$$

$$A(-1, 1), \quad B(2, 4); \quad \text{отже}$$

Тому за формулою (2.3) отримаємо:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) \, dy.$$

Другий спосіб. Побудуємо область інтегрування D і проведемо пряму паралельно осі Ox (рис. 2.5 б). Ця пряма перетинає межу області D у двох точках – входу C_1 і виходу C_2 . Аналіз форми області D і вигляду рівнянь ліній, які її обмежують, показує, що область D – складна у напрямі осі Ox (лінії входу при переміщенні прямої вгору і вниз в межах області D різні). Тому, область інтегрування представимо у вигляді суми

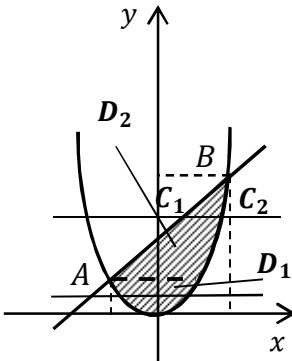


Рисунок 2.5 б

$$D = D_1 + D_2.$$

Визначимо межі інтегрування для кожної області окремо.

D_1 : межі інтегрування внутрішнього інтеграла: $x = -\sqrt{y}$ – лінія входу, $x = \sqrt{y}$ – лінія виходу; межі інтегрування зовнішнього інтеграла: $0 \leq y \leq 1$.

D_2 : межі інтегрування внутрішнього інтеграла: $x = y - 2$ – лінія входу, $x = \sqrt{y}$ – лінія виходу; межі інтегрування зовнішнього інтеграла: $1 \leq y \leq 4$.

Остаточно, за формулою (2.4), маємо:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^4 dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

Обчислимо інтеграл більш простим способом, тобто першим.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy = \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} (x + y) dy =$$

(пам'ятаємо, що x у внутрішньому інтегралі є сталою)

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^2 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{x+2} dx = \\ &= \int_{-1}^2 \left(-\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{(x+2)^2}{2} + x(x+2) \right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^2 \left(-\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2} + x^2 + 4x + 2 \right) dx = \\ &= \left(-\frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + 2x^2 + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = \\ &= -\frac{1}{10}(32 + 1) - \frac{1}{4}(16 - 1) + \frac{1}{2}(8 + 1) + 2(2 + 1) = \frac{69}{20} \end{aligned}$$

ЛЕКЦІЯ 3

ЗАМІНА ЗМІННИХ У ПОДВІЙНОМУ ІНТЕГРАЛІ. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в деякій замкненій і обмеженій області D , тоді існує інтеграл

$$I = \iint_D f(x, y) \, dx dy. \quad (3.1)$$

Нехай формули $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками $M(x, y)$ області D координатної площини Oxy і точками $M^*(u, v)$ деякої області D^* іншої координатної площини Ouv .

Справедлива така теорема.

Теорема. Якщо перетворення $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, переводить замкнену обмежену область D в замкнену обмежену область D^* , і є взаємно однозначним, при цьому функції $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ мають в області D^* неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а функція $f(x, y)$ неперервна в області D , то справедлива така формула заміни змінних у подвійному інтегралі

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv \quad (3.2)$$

(Без доведення).

Функціональний визначник $J(u, v)$ називається **визначником Якобі (якобіаном)**.

Таким чином, виконуючи заміну змінної в інтегралі (3.1), ми маємо елемент площі $dx dy$ в координатах x, y замінити елементом площі $|J(u, v)| du dv$ в координатах u, v , і область інтегрування D замінити відповідною їй областю D^* .

На практиці часто застосовують перехід до полярних координат. Прямокутні координати x, y зв'язані співвідношеннями з полярними координатами ρ, φ :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (0 \leq \rho \leq \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi.$$

У цьому випадку якобіан

$$|J(\rho, \varphi)| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho,$$

тому елемент площі: $dx dy = \rho d\rho d\varphi$.

Формула переходу до полярних координат у подвійному інтегралі набуває вигляду

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi, \quad (3.3)$$

де область D задана у декартовій системі координат Oxy , а D^* – відповідна їй область у полярній системі координат $O\rho\varphi$.

Зауваження 1. Перехід до полярних координат доцільно застосовувати тоді, коли:

- 1) область інтегрування D задана у полярній системі;
- 2) область інтегрування D – круг або його частина (сектор, сегмент, кільце і т.п.), оскільки при цьому рівняння межі області містять суму $x^2 + y^2$;
- 3) сама підінтегральна функція містить цей вираз $x^2 + y^2$.

Ця сума в полярних координатах має досить простий вигляд $x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2$.

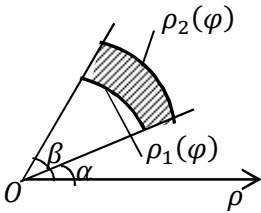


Рисунок 3.1

Зауваження 2. Якщо область D – обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути α та β ($\alpha < \beta$) і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ та $\rho = \rho_2(\varphi)$ ($\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$), то полярні координати області D^* змінюються в межах $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $\rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)$ (рис.3.1).

Тоді справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho, \quad (3.4)$$

яка зводить подвійний інтеграл до двократного повторного інтеграла. Тут внутрішнім є інтеграл за змінною ρ . Обчислюючи його в межах від $\rho_1(\varphi)$ до $\rho_2(\varphi)$, вважаючи зовнішню змінну φ сталою, дістаємо деяку функцію $S(\varphi)$ від однієї змінної φ .

Інтегруючи потім цю функцію в межах від α до β , одержуємо значення подвійного інтеграла.

Зауваження 3. Якщо область D охоплює початок координат, тобто точка $O(0,0)$ є внутрішньою точкою області D , то

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho, \quad (3.5)$$

де $\rho(\varphi)$ – полярне рівняння межі області D .

Перехід до полярних координат здійснюється заміною $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $dx dy = \rho d\rho d\varphi$ у підінтегральному виразі та відповідним перетворенням рівнянь ліній, що обмежують область інтегрування D . Перетворення області D в область D^* не виконують, а сумістивши декартову і полярну системи, знаходять межі інтегрування по ρ і φ , досліджуючи зміну ρ і φ точки (ρ, φ) при її ототожненні з точкою (x, y) області D .

Приклад 3.1 Обчислити подвійний інтеграл, якщо область D обмежена лініями: $x^2 + y^2 = 9$ і $y \geq 0$

$$\iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy.$$

Розв'язання. Область інтегрування D обмежена лінією $x^2 + y^2 = 9$ – це коло з радіусом $R = 3$ та з центром у початку координат обмежений прямою $y = 0$ (рис. 3.2). Виконаємо перехід до полярних координат:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 9; \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 9;$$

$$\rho^2 = 9; \rho = 3.$$

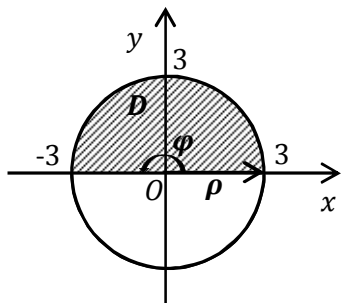


Рисунок 3.2

Знайдемо межі інтегрування для φ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = 0 \end{cases}.$$

В полярних координатах:

$$\begin{cases} \rho = 3 \\ \rho \sin \varphi = 0; \sin \varphi = 0; \varphi \in [0; \pi]. \end{cases}$$

Виконаємо перехід підінтегрального виразу до полярних координат, за

формулами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ і $dxdy = \rho d\rho d\varphi$.

$$\iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2} dx dy = \iint_{D^*} \sqrt{9 - \rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi} \rho d\rho d\varphi.$$

Початок координат належить області D , тому за формулою (3.5) маємо

$$\int_0^\pi d\varphi \int_0^3 \sqrt{9 - \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} \rho d\rho = \int_0^\pi d\varphi \int_0^3 \sqrt{9 - \rho^2} \rho d\rho$$

Внутрішній інтеграл

$$\int_0^3 \sqrt{9 - \rho^2} \rho d\rho = \left| \begin{array}{l} t = 9 - \rho^2, \\ dt = -2\rho d\rho, \\ t_{\text{н}} = 9, t_{\text{в}} = 0 \end{array} \right| = -2 \int_9^0 t^{\frac{1}{2}} dt = 2 \left. \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^9 =$$

$$= \frac{4}{3} (3^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \cdot 27 = 36.$$

Зовнішній інтеграл

$$\int_0^{\pi} 36d\varphi = 36\varphi \Big|_0^{\pi} = 36\pi.$$

Приклад 3.2 Обчислити подвійний інтеграл, якщо область D обмежена лініями: $\rho = R$ і $\rho = 2R\sin\varphi$

$$\iint_D \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi.$$

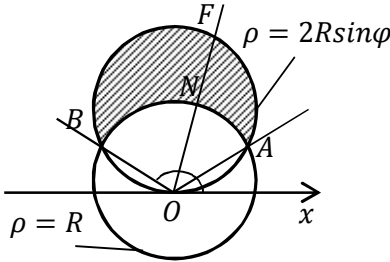


Рисунок 3.3

Розв'язання. Визначимо, як змінюється в області D полярний кут φ . Для цього проведемо промені в точки A і B (рис. 3.3). Знайдемо рішення системи рівнянь ліній, що обмежують область інтегрування:

$$\begin{cases} \rho = 2R\sin\varphi; \\ \rho = R \end{cases};$$

$$2R\sin\varphi = R; \sin\varphi = \frac{1}{2};$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6}; \varphi_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

Знайдемо межі зміни полярного радіуса ρ , для цього проведемо промінь через область інтегрування D . Точка N належить лінії входу області $\rho = R$, а точка F належить лінії виходу області $\rho = 2R\sin\varphi$, тому полярний радіус змінюється від R до $2R\sin\varphi$. За формулою (3.4) маємо

$$\iint_D \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin\varphi d\varphi \int_R^{2R\sin\varphi} \rho^2 d\rho.$$

Внутрішній інтеграл

$$\begin{aligned} \int_R^{2R\sin\varphi} \rho^2 d\rho &= \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_R^{2R\sin\varphi} = \frac{1}{3} (8R^3 \sin^3\varphi - R^3) = \\ &= \frac{1}{3} R^3 (8\sin^3\varphi - 1). \end{aligned}$$

Зовнішній інтеграл

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{3} R^3 (8\sin^3\varphi - 1) \sin\varphi d\varphi &= \frac{1}{3} R^3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (8\sin^4\varphi - \sin\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} R^3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (8(\sin^2\varphi)^2 - \sin\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} R^3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(8 \left(\frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) \right)^2 - \sin\varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} R^3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2(1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) - \sin\varphi) d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}R^3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(2 \left(1 - 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\varphi) \right) - \sin\varphi \right) d\varphi = \\
&= \frac{1}{3}R^3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2 - 4\cos 2\varphi + 1 + \cos 4\varphi - \sin\varphi) d\varphi = \\
&= \frac{1}{3}R^3 \left(3\varphi - 2\sin 2\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi + \cos\varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{R^3}{12} (\pi + 3\sqrt{3})
\end{aligned}$$

ЛЕКЦІЯ 4

ГЕОМЕТРИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

Площа плоскої фігури

Якщо в подвійному інтегралі $\iint_D f(x, y) dx dy$ підінтегральну функцію прийняти тотожно рівною одиниці $f(x, y) = 1$, то його значення чисельно дорівнюватиме площі області інтегрування D :

$$S = \iint_D dx dy. \quad (4.1)$$

Якщо фігура відноситься до полярної системи координат, то її площа обчислюється за формулою

$$S = \iint_D \rho d\rho d\varphi. \quad (4.2)$$

Приклад 4.1 Знайти площу фігури, обмежену лініями $y = 4 - x^2$; $2x - y - 4 = 0$.

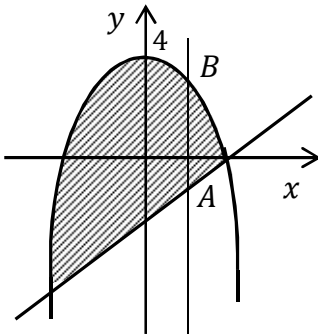


Рисунок 4.1

Розв'язання. На рисунку 4.1 область D подана як правильна в напрямі осі Oy . Тому за формулами (4.1) та (2.3) маємо

$$S = \iint_D dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy.$$

Знайдемо межі інтегрування для змінних x і y , для цього проведемо промінь через область інтегрування D .

Точка A належить лінії входу області $2x - y - 4 = 0$, а точка B належить лінії виходу області $y = 4 - x^2$, тому межі інтегрування для x знайдемо розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2; \\ y = 2x - 4; \end{cases}$$

$$4 - x^2 = 2x - 4; \quad x^2 + 2x - 8 = 0;$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -4.$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^2 dx \int_{2x-4}^{4-x^2} dy = \int_{-4}^2 y \Big|_{2x-4}^{4-x^2} dx = \int_{-4}^2 (8 - x^2 - 2x) dx = \\ &= \left(8x - \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-4}^2 = 16 - \frac{8}{3} - 4 - \left(-32 + \frac{64}{3} - 16 \right) = 36; \end{aligned}$$

$$S = 36 \text{ кв.од.}$$

Приклад 4.2 Знайти площу фігури, обмежену лініями $x^2 + y^2 - 2ax = 0$; $x^2 + y^2 - ax = 0$.

Розв'язання. Кожна лінія в своєму рівнянні має вираз $x^2 + y^2$, це вказує на необхідність переходу до полярних координат. Представимо рівняння ліній в полярних координатах використовуючи формули переходу

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi; \\ y = \rho \sin \varphi; \end{cases}$$

тому маємо

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0, \quad \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi - 2a\rho \cos \varphi = 0,$$

$$\rho^2 = 2a\rho\cos\varphi, \quad \rho = 2a\cos\varphi;$$

$$x^2 + y^2 - ax = 0, \quad \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi - a\rho\cos\varphi = 0,$$

$$\rho^2 = a\rho\cos\varphi, \quad \rho = a\cos\varphi.$$

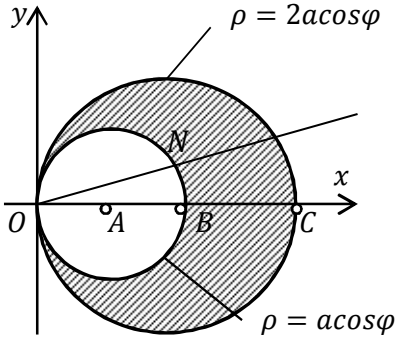


Рисунок 4.2

Як видно з рисунку 4.2, фігура симетрична відносно осі Ox , тому шукана площа дорівнює подвоєній площі верхньої частини. Тому кут φ має нижню межу рівну нулю: $\varphi = 0$. Для знаходження верхньої межі розглянемо систему рівнянь ліній, що обмежують область D :

$$\begin{cases} \rho = 2a\cos\varphi \\ \rho = a\cos\varphi \end{cases}; \quad 2a\cos\varphi = a\cos\varphi; \quad 2a\cos\varphi - a\cos\varphi = 0;$$

$$\cos\varphi = 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Знайдемо межі зміни полярного радіуса ρ , для цього проведемо промінь через область інтегрування D . Точка N належить лінії входу $\rho = a\cos\varphi$, а точка F належить лінії виходу $\rho = 2a\cos\varphi$.

Визначимо межі в яких змінюється

За формулою (3.4) маємо

$$\begin{aligned}
S_1 &= \iint_D dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{2a\cos\varphi} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_{a\cos\varphi}^{2a\cos\varphi} d\varphi = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4a^2 \cos^2\varphi - a^2 \cos^2\varphi) d\varphi = \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = \\
&= \frac{3a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{3a^2}{4} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^2}{8}; \quad S = 2S_1 = \frac{3\pi a^2}{4} \text{ кв. од.}
\end{aligned}$$

Об'єм тіла

Нехай правильно у напрямі осі Oz просторове тіло V , яке обмежене низу і зверху поверхнями $z = f_1(x, y)$ і $z = f_2(x, y)$, проєктується на площину Oxy в область D . Тоді його об'єм обчислюється за формулою

$$V = \iint_D (f_2(x, y) - f_1(x, y)) dx dy. \quad (4.3)$$

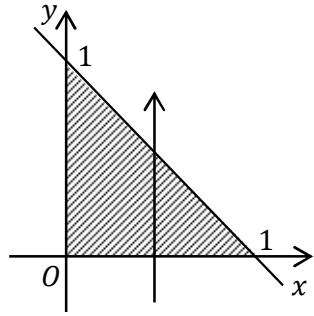
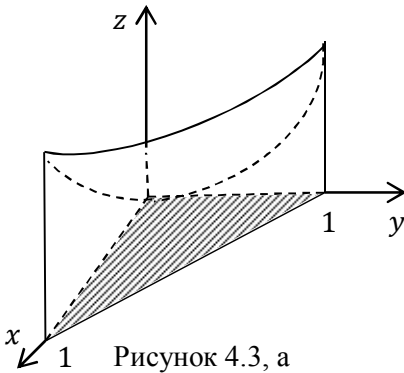
Якщо $f_1(x, y) = 0$, то об'єм тіла знаходимо за формулою

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (4.4)$$

Приклад 4.3 Знайти об'єм тіла обмеженого

параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$ координатними площинами і площиною $x + y = 1$.

Розв'язання. На рис. 4.3, а представлено тіло, об'єм якого необхідно обчислити, обмежене знизу площиною $z = 0$ з боків площинами $x = 0$, $y = 0$ і $x + y = 1$ і зверху поверхнею $z = x^2 + y^2$.



Проекцією тіла на площину Oxy є область інтегрування D (рис. 4.3, б). Лінія входу $y = 0$, а лінія виходу $y = 1 - x$.

Згідно з формулою 4.4 маємо

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy = \\
 &= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{(1-x)^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} (0 - 1) = \frac{4 - 3 + 1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Приклад 4.4 Обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 2x$ та площинами $2x - z = 0$ і $4x - z = 0$ (рис 4.4, а).

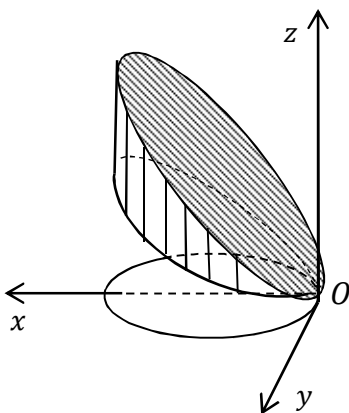


Рисунок 4.4, а

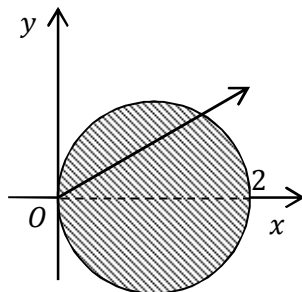


Рисунок 4.4, б

Розв'язання. На рисунку 4.4, а представлено тіло, об'єм якого необхідно обчислити, обмежене циліндром $x^2 + y^2 = 2x$ та площинами $2x - z = 0$ і $4x - z = 0$.

Поверхні, що обмежують тіло: зверху $4x - z = 0$ (або $z = 4x$); знизу $2x - z = 0$ (або $z = 2x$). Використовуючи формулу (4.3) маємо:

$$V = \iint_D (4x - 2x) dx dy = \iint_D 2x dx dy.$$

Проекцією тіла на площину Oxy є область інтегрування D (рис. 4.4, б), це круг, симетричний відносно осі Ox . Перейдемо до полярних координат, використовуючи підстановку $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 2\rho \cos \varphi;$$

$\rho = 2 \cos \varphi$ – рівняння циліндра в полярних координатах і рівняння лінії, що обмежує область інтегрування D в полярних координатах.

Знайдемо межі інтегрування в полярних координатах. З того, що коло, симетричне відносно осі Ox , то розглянемо верхню частину області: $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $\rho \in [2, 2 \cos \varphi]$

$$\begin{aligned} V_1 &= 2 \iint_{D^*} \rho \cos \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_2^{2 \cos \varphi} \rho^2 \cos \varphi d\rho = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_2^{2 \cos \varphi} d\varphi = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi (8 \cos^3 \varphi - 8) d\varphi = \\ &= \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 \varphi - \cos \varphi) d\varphi = \frac{16}{3} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{16}{3} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \varphi)^2 d\varphi - \sin \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \\
&= \frac{16}{3} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) \right)^2 d\varphi - \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) \right) = \\
&= \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi - 1 \right) = \\
&= \frac{4}{3} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\varphi) \right) d\varphi - 1 \right) = \\
&= \frac{4}{3} \left(\left(\varphi + 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right) = \\
&= \frac{4}{3} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{3\pi - 4}{3} \text{ (од. куб.)} \\
V = 2V_1 &= \frac{6\pi - 8}{3} \text{ (од. куб.)}.
\end{aligned}$$

Площа поверхні

Нехай σ – деяка поверхня, плоска область D_{xy} – її проекція на координатну площину Oxy (рис. 4.5). Поверхня σ називається **правильною в напрямі осі Oz** , якщо виконуються наступні умови:

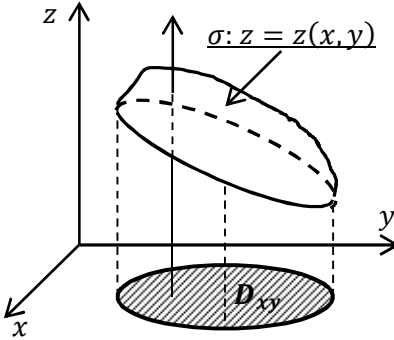


Рисунок 4.5

1) довільна пробна пряма, що проходить через область D_{xy} паралельно осі Oz і в тому ж напрямі, перетинає поверхню σ лише в одній точці, тобто поверхня σ взаємно однозначно проектується в область D_{xy} ;

2) рівняння поверхні σ задається в явному вигляді, розв'язаному відносно z , причому тільки однією формулою $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ неперервна в D_{xy} .

Аналогічно розглядаються поверхні, що **правильні в напрямі осей Ox і Oy** .

Якщо поверхня σ правильна у всіх трьох напрямках Ox , Oy і Oz , то вона називається просто **правильною**.

Наприклад, параболоїд $z = x^2 + y^2$ правильний у напрямі тільки осі Oz ; циліндр $z = \sqrt{x}$ правильний у напрямі тільки осей Ox і Oz ; площина $x + 3y - 7z + 5 = 0$ просто правильна.

Якщо поверхня σ – неправильна, то вона розбивається на правильні частини. Як правило, для цього застосовують

координатні площини або їм паралельні.

Нехай правильна у напрямі осі Oz поверхня σ проектується на координатну площину Oxy в замкнену обмежену область D_{xy} і задається рівнянням $z = z(x, y)$. Тоді площу поверхні знаходять за допомогою формули:

$$S_{\sigma} = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

Якщо поверхня σ правильна у напрямі осі Ox чи Oy , то її площа обчислюється відповідно за формулою

$$S_{\sigma} = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz,$$

$$S_{\sigma} = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz.$$

Приклад 4.5 За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу частини верхньої півсфери $\sigma: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, яка вирізається вертикальним циліндром $x = \sqrt{2y - y^2}$ і площиною $x = 0$.

Розв'язання. На рис. 4.6 зазначена частина півсфери подана як правильна в напрямі осі Oz . Її проекцією на площину Oxy служить область D_{xy} – півкруг з центром $(0; 1)$ і радіусом $r = 1$.

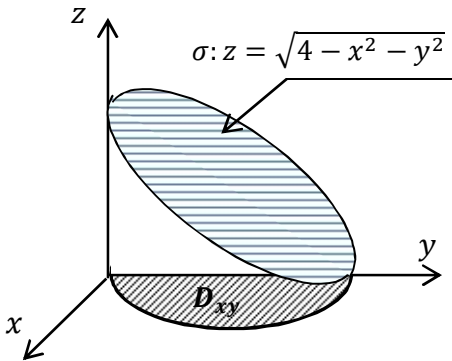


Рисунок 4.6

З рівняння півсфери знайдемо частинні похідні:

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}};$$

$$z'_y = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

Тоді

$$\begin{aligned} S_\sigma &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \, dxdy = \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2}} \, dxdy = \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{\frac{4}{4 - x^2 - y^2}} \, dxdy = 2 \iint_{D_{xy}} \frac{dxdy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

Оскільки область інтегрування D_{xy} – півкруг, то зручно перейти до полярних координат:

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad dxdy = \rho d\rho d\varphi.$$

На рис. 4.7 область D_{xy} подана як правильна в напрямі координатних променів. Тоді

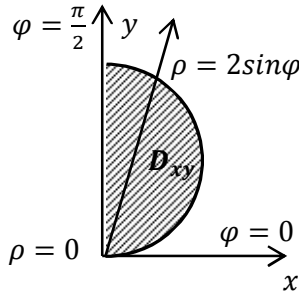


Рисунок 4.7

$$\begin{aligned}
 S_{\sigma} &= 2 \iint_{D_{xy}} \frac{dx dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} = \\
 &= 2 \iint_{D_{xy}} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{4 - \rho^2}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{4 - \rho^2}} = \\
 &= \left| \begin{array}{l} U = 4 - \rho^2; \\ dU = -2\rho d\rho; \rho d\rho = -\frac{dU}{2}; \\ U_H = 4, \quad U_B = 4\cos^2\varphi. \end{array} \right| = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_4^{4\cos^2\varphi} \frac{dU}{\sqrt{U}} = \\
 &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{U} \Big|_4^{4\cos^2\varphi} d\varphi = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\varphi - 2) d\varphi = \\
 &= -4 (\sin\varphi - \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -4 \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi - 4 \text{ (ОД. КВ.)}
 \end{aligned}$$

ЛЕКЦІЯ 5

ФІЗИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

Маса і середня густина пластини. Нехай на координатній площині Oxy лежить матеріальна пластинка, що має форму обмеженої замкненої області D , у кожній точці якої поверхнева густина визначається неперервною функцією $\mu = \mu(x, y)$. Тоді маса m і середня густина $\mu_{\text{сер}}$ пластини обчислюються за формулами:

$$m = \iint_D \mu(x, y) dx dy; \quad (5.1)$$

$$\mu_{\text{сер}} = \frac{m}{S} = \frac{\iint_D \mu(x, y) dx dy}{\iint_D dx dy}. \quad (5.2)$$

Статичні моменти і центр маси пластини. Статичні моменти фігури D відносно осей Ox і Oy обчислюють за формулами:

$$M_x = \iint_D y \mu(x, y) dx dy; \quad M_y = \iint_D x \mu(x, y) dx dy. \quad (5.3)$$

Відповідно координати x_c та y_c центра маси пластини обчислюються за формулами

$$x_c = \frac{M_y}{m}; \quad y_c = \frac{M_x}{m}. \quad (5.4)$$

Моменти інерції пластини. Моментом інерції матеріальної точки маси m відносно вісі l називається добуток маси m на квадрат відстані d точки до вісі, тобто $I_l = md^2$.

Моменти інерції пластини відносно осей Ox і Oy обчислюють за формулами:

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy; \quad I_y = \iint_D x^2 \mu(x, y) dx dy. \quad (5.5)$$

Момент інерції відносно початку координат

$$I_o = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2) \mu(x, y) dx dy. \quad (5.6)$$

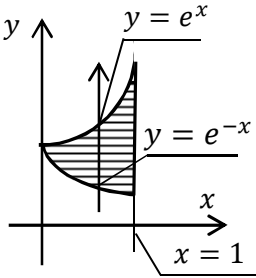


Рисунок 5.1

Приклад 5.1 Знайти масу та середню густину пластини D , обмеженої лініями $y = e^x$, $y = e^{-x}$ і $x = 1$, якщо поверхнева густина задається функцією $\mu(x, y) = x + 4y$.

Розв'язання. На рис. 5.1 пластинка D зображена як правильна в напрямі осі Oy . Обчислимо її масу:

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \mu(x, y) dx dy = \iint_D (x + 4y) dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} (x + 4y) dy = \int_0^1 (xy + 2y^2) \Big|_{e^{-x}}^{e^x} dx = \\ &= \int_0^1 (xe^x - xe^{-x} + 2e^{2x} - 2e^{-2x}) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 x(e^x - e^{-x})dx + 2 \int_0^1 (e^{2x} - e^{-2x})dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} U = x; \quad dV = (e^x - e^{-x})dx; \\ dU = dx; \quad V = e^x + e^{-x}. \end{array} \right| = \\
&= x(e^x + e^{-x}) \Big|_0^1 - \int_0^1 (e^x + e^{-x})dx + 2 \left(\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{2} \right) \Big|_0^1 = \\
&= e + e^{-1} - (e^x - e^{-x}) \Big|_0^1 + e^2 + e^{-2} - 2 = \\
&= e + e^{-1} - e + e^{-1} - 0 + e^2 + e^{-2} - 2 = 2e^{-1} + e^2 + e^{-2} - 2.
\end{aligned}$$

Знайдемо площу пластини D :

$$\begin{aligned}
S &= \iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} dy = \int_0^1 y \Big|_{e^{-x}}^{e^x} dx = \int_0^1 (e^x - e^{-x})dx = \\
&= (e^x + e^{-x}) \Big|_0^1 = e + e^{-1} - 2.
\end{aligned}$$

Тепер обчислимо середню густину пластини $\mu_{\text{сер}}$:

$$\mu_{\text{сер}} = \frac{m}{S} = \frac{2e^{-1} + e^2 + e^{-2} - 2}{e + e^{-1} - 2}.$$

Приклад 5.2 Знайти статичні моменти M_x та M_y відносно осей координат та центр маси $C(x_c, y_c)$ пластини D , обмеженої дугою кривої $y = \sqrt{\sin x}$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, віссю Ox і прямою $x = \frac{\pi}{2}$, якщо поверхнева густина $\mu(x, y) = 60y \cos x$.

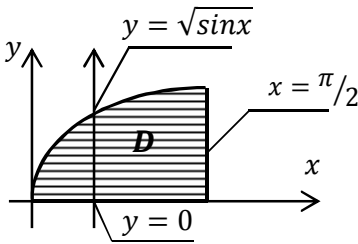


Рисунок 5.2

Розв'язання. На рисунку 5.2 пластина D подана як правильна в напрямі осі Oy . Обчислимо її масу:

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_D \mu(x, y) dx dy = \\
 &= \iint_D 60y \cos x dx dy = \\
 &= 60 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \int_0^{\sqrt{\sin x}} y dy = 60 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{\sin x}} dx = \\
 &= 30 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x dx = 15 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{15}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= -\frac{15}{2} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{15}{2} (-2) = 15.
 \end{aligned}$$

Знайдемо статичні моменти пластини:

$$M_x = \iint_D y \mu(x, y) dx dy = \iint_D y 60y \cos x dx dy =$$

$$\begin{aligned}
&= 60 \iint_D y^2 \cos x \, dx dy = 60 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \int_0^{\sqrt{\sin x}} y^2 dy = \\
&= 60 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^{\sqrt{\sin x}} dx = 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\sin x)^{\frac{3}{2}} dx = \\
&= \left| \begin{array}{l} U = \sin x; \quad dU = \cos x \, dx; \\ U_H = 0; \quad U_B = 1. \end{array} \right| = 20 \int_0^1 U^{\frac{3}{2}} dU = 20 \left. \frac{U^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right|_0^1 = 8;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \iint_D x \mu(x, y) \, dx dy = M_y = \iint_D x 60y \cos x \, dx dy = \\
&= 60 \iint_D x y \cos x \, dx dy = 60 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx \int_0^{\sqrt{\sin x}} y \, dy = \\
&= 60 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^{\sqrt{\sin x}} dx = 30 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \sin x \, dx = \\
&= 15 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x \, dx = \left| \begin{array}{l} U = x; \quad dV = \sin 2x \, dx; \\ dU = dx; \quad V = -\frac{1}{2} \cos 2x. \end{array} \right| =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 15 \left(\left(-\frac{x}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx \right) = \\
&= 15 \left(-\frac{\pi}{4} \cos \pi - 0 + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = 15 \left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) = \frac{15\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Тепер обчислимо координати центра маси пластини:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{15\pi}{4}}{15} = \frac{\pi}{4}; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{8}{15}.$$

Приклад 5.3 Знайти момент інерції I_y відносно осі Oy пластини D , обмеженої дугою кардіоїди $(x^2 + y^2 - 2x) = 4(x^2 + y^2)$, $y \geq 0$, півколом $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$ і віссю Oy , якщо поверхнева густина

$$\mu(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Розв'язання. Рівняння кардіоїди і кола спрощуються при переході до полярних координат. Перейдемо до полярних координат $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$; $x^2 + y^2 = \rho^2$, отримаємо рівняння кардіоїди $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$, рівняння півкола $\rho = 1$.

На рисунку 5.3 область D подана як правильна в напрямі координатних променів. Знайдемо момент інерції I_y пластини D , виконавши перехід до полярних координат в подвійному інтегралі:

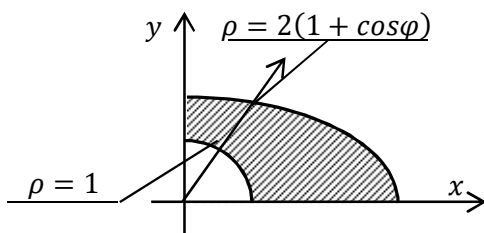


Рисунок 5.3

$$\begin{aligned}
 I_y &= \iint_D x^2 \mu(x, y) \, dx dy = \iint_D x^2 \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} \, dx dy = \\
 &= \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi; y = \rho \sin \varphi; \\ dx dy = \rho d\rho d\varphi; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 \leq \rho \leq 2(1 + \cos \varphi) \end{array} \right| = \\
 &= \iint_D \rho^2 \cos^2 \varphi \frac{\rho \sin \varphi}{\rho^4} \rho d\rho d\varphi = \iint_D \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\rho d\varphi = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_1^{2(1+\cos \varphi)} \rho \, d\rho = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, \rho \Big|_1^{2(1+\cos \varphi)} \, d\varphi =
 \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi (1 + 2 \cos \varphi) d\varphi = \left| \begin{array}{l} U = \cos \varphi; dU = -\sin \varphi d\varphi \\ U_{\text{H}} = 1; U_{\text{B}} = 0 \end{array} \right|$$

$$= - \int_1^0 U^2 (1 + 2U) dU = \int_0^1 (U^2 + 2U^3) dU = \left(\frac{U^3}{3} + \frac{U^4}{2} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

ЛЕКЦІЯ 6

ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Поняття потрійного інтегралу

Теорія потрійного інтегралу аналогічна теорії подвійного інтегралу.

Нехай в замкненій області V простору Oxy задана неперервна функція $u = f(x, y, z)$. Розбиваючи область V сіткою поверхонь на n частин V_i ($i = \overline{1, n}$) і вибираючи в кожній з них довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ складемо інтегральну суму $\sum_{i=1}^n f(x, y, z) \Delta V_i$ для функції $f(x, y, z)$ в області V .

Якщо границя інтегральної суми існує при необмеженому зростанні n таким чином, що кожна елементарна область V_i стягується в точку ($d_i \rightarrow 0$), то її називають потрійним інтегралом від функції $u = f(x, y, z)$ по області V і позначають

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\max d_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(x, y, z) \Delta V_i = \\ &= \iiint_V f(x, y, z) dV. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Теорема 6.1 Якщо функція $u = f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій замкненій області V , то границя інтегральної суми (6.1) при $n \rightarrow \infty$ і $\max d_i \rightarrow 0$ існує і не залежить ні від способу розбиття області V на частини, ні від вибору точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$ в них.

Потрійний інтеграл має ті ж самі властивості, що і подвійний інтеграл.

Обчислення потрійного інтегралу в прямокутній системі координат

В прямокутній системі координат обчислення потрійного інтегралу зводиться до обчислення трьох визначених інтегралів.

Нехай область інтегрування V є тіло обмежене знизу поверхнею $z = z_1(x, y)$,

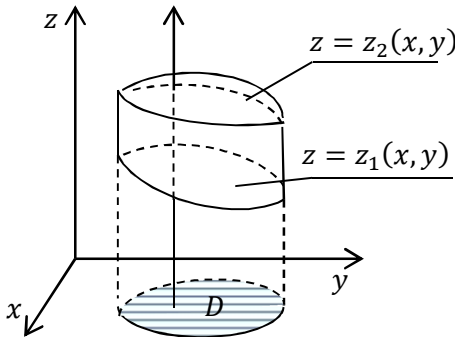


Рисунок 6.1

зверху – поверхнею $z = z_2(x, y)$, за умовою і $z_1(x, y)$, і $z_2(x, y)$ – неперервні функції в замкнутій області D , що є проекцією тіла на площину (рис. 6.1).

Область V – правильна в напрямку осі Oz . Тоді для будь якої неперервної в області V функції $f(x, y, z)$ справедлива формула

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dS, \quad (6.2)$$

що зводить обчислення потрійного інтегралу до обчислення подвійного інтегралу (6.2). Спочатку обчислюється внутрішній

інтеграл за змінною z при постійних x і y . Результатом обчислення є функція двох змінних x, y .

Якщо область D обмежена лініями $x = a, x = b, y = y_1(x), y = y_2(x)$, то маємо формулу

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz, \quad (6.3)$$

яка зводить потрійний інтеграл до трикратного повторного інтеграла.

Зауваження.

1. Порядок інтегрування в формулі (6.3), може бути іншим.

2. Якщо область V – неправильна, то її необхідно розбити на правильні частини.

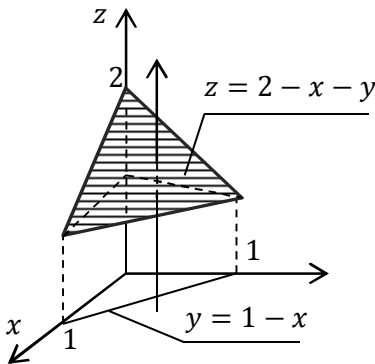


Рисунок 6.2

Oy . За формулою (6.3) маємо:

Приклад 6.1 Обчислити

$$\iiint_V (x + z) dx dy dz,$$

де V обмежена площинами $z = 1, x + y + z = 2, x = 0, y = 0$. (рис. 6.2)

Розв'язання. Область V є правильною у напрямку осі Oz . Її проекції на площину Oxy є також правильними у напрямку осі

$$\begin{aligned}
\iiint_V (x+z) \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_1^{2-x-y} (x+z) \, dz = \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(xz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_1^{2-x-y} dy = \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(2x - x^2 - xy - x + \frac{(2-x-y)^2}{2} - \frac{1}{2} \right) dy = \\
&= \int_0^1 \left(xy - x^2y - x \frac{y^2}{2} - \frac{(2-x-y)^3}{6} - \frac{y}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \\
&= \int_0^1 \left(x - x^2 - x^2 + x^3 - \frac{x(1-x)^2}{2} - \frac{1}{6} + \frac{(2-x)^3}{6} - \frac{1}{2} + \frac{x}{2} \right) dx \\
&= \left(\frac{3x^2}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) - \frac{2x}{3} - \frac{(2-x)^4}{24} \right) \Big|_0^1 = \\
&= \frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{2}{3} - \frac{1}{24} + \frac{2^4}{24} = \\
&= \frac{18 - 16 + 8 - 3 - 16 - 1 + 16}{24} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Потрійний інтеграл у циліндричних та сферичних координатах

У багатьох задачах обчислення потрійних інтегралів зручніше робити в циліндричній, сферичній або іншій криволінійній системі координат.

Перехід до циліндричних координат.

Визначимо положення довільної точки $M(x, y, z)$ у просторі її декартовою координатою – аплікатою z і полярними координатами ρ і φ її проєкції M_1 на площину Oxy (рис. 6.3).

Величини ρ , φ і z називаються **циліндричними координатами** точки M .

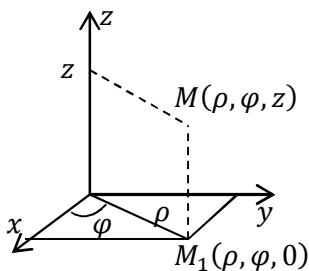


Рисунок 6.3

З рисунку 6.3 видно, що прямокутні і циліндричні координати точки M зв'язані співвідношеннями:

$$x = \rho \cos \varphi; \quad y = \rho \sin \varphi; \quad z = z \\ (0 \leq \rho \leq \infty; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Елемент об'єму $dV^* = dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz$.

Формула переходу потрійного інтеграла до циліндричних координат:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz.$$

Зауваження. Перехід до циліндричних координат доцільно застосовувати, коли:

1) область інтегрування V задана у циліндричній системі;

2) область інтегрування V проектується в круг або його частину;

3) підінтегральна функція $f(x, y, z)$ містить суму квадратів хоча б двох декартових координат.

Перехід до сферичних координат.

Визначимо положення довільної точки $M(x, y, z)$ у просторі за допомогою трьох величин: відстані $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ від початку координат O до точки M (**радіус-вектор**), кута φ між додатним напрямом осі Ox та проекцією OM_1 відрізка OM на площину Oxy (**довгота**), кута θ між додатним напрямом осі Oz та відрізком OM (**широта**). Величини ρ , φ і θ називаються **сферичними координатами** точки M . Прямокутні і сферичні координати точки M зв'язані співвідношеннями:

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta; \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta; \quad z = \rho \cos \theta;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$(0 \leq \rho \leq \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi),$$

$$\text{Елемент об'єму } dV^* = dx dy dz = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Формула переходу потрійного інтеграла до циліндричних сферичних координат:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$= \iiint_{V^*} f(\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Зауваження. Перехід до сферичних координат необхідний, якщо область інтегрування V є сфера (рівняння її меж $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в сферичних координатах має вигляд $\rho = R$) або її частина, а також якщо підінтегральна функція є функцією від суми квадратів трьох змінних $f(x^2 + y^2 + z^2)$.

Приклад 6.2 Обчислити

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{4 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

де V – сфера $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Розв'язання. Обчислимо інтеграл шляхом переходу до сферичних координат: $x = \rho \cos \varphi \sin \theta$; $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$;

$$z = \rho \cos \theta; dV = dxdydz = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Область V – сфера, її рівняння в сферичних координатах $\rho = 1$, підінтегральна функція після переходу до сферичних координат набуває вигляду:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{1}{4 + (\rho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{1}{4 + (\rho^2 (\cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \theta))^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4 + \rho^3}. \end{aligned}$$

Нові змінні мають такі межі: $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Таким чином маємо:

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_V \frac{1}{4 + \rho^3} \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho^2 d\rho}{4 + \rho^3} = \\
 &= \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left. \frac{1}{3} \ln(4 + \rho^3) \right|_0^1 = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{4} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\
 &= \frac{1}{3} \ln \frac{5}{4} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3} \ln \frac{5}{4} \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \\
 &= \frac{2\pi}{3} \ln \frac{5}{4} (-\cos\theta) \Big|_0^\pi = \frac{4\pi}{3} \ln \frac{5}{4}.
 \end{aligned}$$

Застосування потрійного інтегралу

1. Об'єм тіла за допомогою потрійного інтегралу обчислюється за формулами:

1) в декартових координатах:

$$V = \iiint_V dx dy dz,$$

2) в циліндричних координатах:

$$V = \iiint_V \rho d\rho d\varphi dz,$$

3) в сферичних координатах:

$$V = \iiint_V \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

2. **Масса тіла** m при заданій об'ємній щільності γ обчислюється за допомогою потрійного інтегралу:

$$m = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

3. **Статистичні моменти** S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} тіла відносно координатних площин Oxy, Oxz, Oyz обчислюють за формулами:

$$S_{xy} = \iiint_V z \gamma(x, y, z) dV, \quad S_{xz} = \iiint_V y \gamma(x, y, z) dV,$$

$$S_{yz} = \iiint_V x \gamma(x, y, z) dV.$$

4. **Координати центру ваги тіла** V знаходять за формулами:

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}; \quad y_c = \frac{S_{xz}}{m}; \quad z_c = \frac{S_{xy}}{m}.$$

5. **Момент інерції тіла** відносно координатних площин обчислюється за формулами

$$I_{xy} = \iiint_V z^2 \gamma(x, y, z) dV, \quad I_{xz} = \iiint_V y^2 \gamma(x, y, z) dV,$$

$$I_{yz} = \iiint_V x^2 \gamma(x, y, z) dV.$$

Момент інерції відносно координатних осей:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dV,$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dV,$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dV.$$

ЛЕКЦІЯ 7

СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ЗА ДОВЖИНОЮ (ПЕРШОГО РОДУ). ЗАСТОСУВАННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛУ ЗА ДОВЖИНОЮ

Задача про масу дуги. Криволінійний інтеграл за довжиною (першого роду)

Нехай у деякій області D координатної площини Oxy задано неперервне плоске скалярне поле $U = f(x, y)$. Припустимо, що в цій області D лежить кусково-гладка матеріальна крива L . Нехай неперервна функція $U = f(x, y)$ визначає лінійну густину розподілу маси вздовж кривої L . Потрібно обчислити масу дуги L_{AB} (рис. 7.1).

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних частин Δl_i , $i = \overline{1, n}$ точками $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = B$ з абсцисами $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

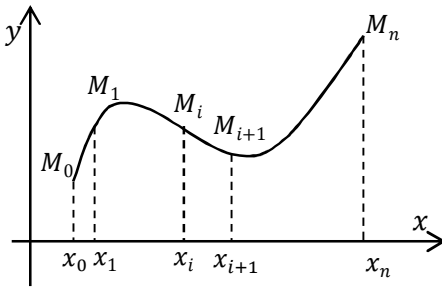


Рисунок 7.1

Розглянемо одну з елементарних дуг Δl_i . Нехай довжина Δl_i цієї дуги настільки мала, що її густину можна вважати сталою величиною, яка дорівнює значенню $f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ в довільно вибраній точці $\bar{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in \Delta l_i$. Тоді

$\Delta m_i \approx f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta l_i$ – маса елементарної дуги Δl_i . А маса всієї дуги L_{AB} :

$$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta l_i. \quad (7.1)$$

Одержана сума називається *інтегральною* для функції $f(x, y)$ по довжині дуги L_{AB} .

Очевидно, якщо довжина найбільшої елементарної дуги Δl_i прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$, то

$$m = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta l_i = \int_{L_{AB}} f(x, y) dl \quad (7.2)$$

Скінченна границя інтегральної суми (7.2) при необмеженому здрібненні розбиття дуги на елементарні частини називається *криволінійним інтегралом за довжиною* (*криволінійним інтегралом першого роду*).

Якщо покласти $f(x, y) = 1$, то криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x, y) dl$ чисельно дорівнює довжині l дуги L_{AB} : $\int_{L_{AB}} dl$.

Зауваження:

1. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в деякій області D , що містить в собі кусково-гладку криву L , то існує криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x, y) dl$ (достатні умови існування криволінійного інтеграла за довжиною).

2. Криволінійний інтеграл за довжиною не залежить від напрямку руху по дузі: $\int_{L_{AB}} f(x, y) dl = \int_{L_{BA}} f(x, y) dl$. Інші властивості цього інтеграла аналогічні властивостям звичайного одновимірного інтеграла.

3. Поняття криволінійного інтеграла за довжиною поширюється на випадок дуги L_{AB} просторової лінії L , розміщеної в просторовому скалярному полі $U = f(x, y, z)$.

Обчислення криволінійного інтеграла за довжиною

Обчислення криволінійного інтеграла за довжиною здійснюється зведенням його до одновимірною інтеграла методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

1. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в параметричній формі: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta$, причому коли параметр t змінюється на відрізку $[\alpha, \beta]$, точка кривої L рухається від точки A до точки B . Диференціал дуги такої кривої записується у вигляді $dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$. Виконуючи заміну у криволінійному інтегралі отримуємо:

$$\int_{L_{AB}} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt. \quad (7.3)$$

Аналогічна формула має місце для криволінійного інтегралу у просторі $U = f(x, y, z)$. Перед обчисленням обов'язково виконуємо перехід до параметричного рівняння кривої:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta,$$

$$\int_{L_{AB}} f(x, y, z) dl =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt. \quad (7.4)$$

2. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутній системі координат рівнянням $y = y(x), x \in [a, b]$. В такому випадку криволінійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\int_{L_{AB}} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (7.5)$$

3. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$. В такому випадку криволінійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\int_{L_{AB}} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (7.6)$$

Приклад 7.1 Обчислити $\int_L (x^5 + 8xy) dl$,

де $L: y = \frac{1}{4}x^4, x \in [0, 1]$.

Розв'язання. Лінія L задана в прямокутній системі координат, тому використовуємо формулу (7.5). Знайдемо $y'(x)$

$$y'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3, \text{ тому } \sqrt{1 + (y'(x))^2} = \sqrt{1 + x^6}.$$

Підставимо у формулу:

$$\int_L (x^5 + 8xy) dl = \int_0^1 \left(x^5 + 8x \frac{1}{4} x^4 \right) \sqrt{1 + x^6} dx =$$

$$\int_0^1 3x^5 \sqrt{1 + x^6} dx = \left[\begin{array}{l} u = 1 + x^6; \\ du = 6x^5 dx; \\ 3x^5 dx = \frac{1}{2} du; \\ u_{\text{н}} = 1; u_{\text{в}} = 2 \end{array} \right] =$$

$$\frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (\sqrt{8} - 1).$$

Приклад 7.2 Обчислити $\int_L \sqrt{2y} dl$, де L – перша арка циклоїди

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

Розв'язання. Лінія L задана параметрично, тому застосовуємо формулу (7.3). Межі інтегрування $t \in [0, 2\pi]$. Знайдемо x'_t та y'_t :

$$x'_t = a(1 - \cos t); \quad y'_t = a \sin t.$$

Знайдемо

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} =$$

$$= a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = a\sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Отже маємо:

$$\begin{aligned} \int_L \sqrt{2y} dl &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2a(1 - \cos t)} \cdot a\sqrt{2 - 2\cos t} dt = \\ &= 2a\sqrt{a} \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2} dt = 2a\sqrt{a} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) dt = \\ &= 2a\sqrt{a} (t - \sin t) \Big|_0^{2\pi} = 4\pi a\sqrt{a}. \end{aligned}$$

Приклад 7.3 Обчислити $\int_L (x - y) dl$, де L коло $x^2 + y^2 = ax$.

Розв'язання. Лінія L – це коло, тому виконаємо перехід до полярних координат за формулами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, маємо:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = a\rho \cos \varphi;$$

$$\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = a\rho \cos \varphi;$$

$$\rho = a \cos \varphi; \quad \rho' = -a \sin \varphi.$$

$$\sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} = a.$$

Обчислимо криволінійний інтеграл за формулою (7.6):

$$\begin{aligned}
\int_L (x - y) dl &= \int_0^{2\pi} (\rho \cos\varphi - \rho \sin\varphi) a d\varphi = \\
&= a \int_0^{2\pi} (a \cos^2\varphi - a \cos\varphi \sin\varphi) d\varphi = \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi - a^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi.
\end{aligned}$$

Обчислимо кожен з доданків окремо:

$$\begin{aligned}
I_1 &= a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi = a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \\
&= \frac{a^2}{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = a^2 \pi.
\end{aligned}$$

$$I_2 = a^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi = \left. \begin{array}{l} u = \sin\varphi; \\ du = \cos\varphi d\varphi; \\ u_{\text{н}} = 0, u_{\text{в}} = 0 \end{array} \right| = 0.$$

Остаточно маємо

$$\int_L (x - y) dl = \pi a^2.$$

Застосування криволінійного інтеграла за довжиною

За допомогою криволінійного інтеграла за довжиною довжина дуги L обчислюється за формулою:

$$L = \int_{L_{AB}} dl.$$

Маса плоскої матеріальної дуги L з лінійною густиною $\mu = \mu(x, y)$ визначається за формулою

$$m = \int_L \mu(x, y) dl.$$

Криволінійний інтеграл за довжиною застосовують для обчислення статичних моментів дуги L плоскої матеріальної кривої відносно осей Ox і Oy відповідно

$$M_x = \int_L y \mu(x, y) dl; \quad M_y = \int_L x \mu(x, y) dl,$$

а також моментів інерції відносно осей Ox і Oy відповідно

$$I_x = \int_L y^2 \mu(x, y) dl; \quad I_y = \int_L x^2 \mu(x, y) dl,$$

і відносно початку координат

$$I_0 = \int_L (x^2 + y^2) \mu(x, y) dl.$$

Координати центра маси дуги L плоскої кривої $C(x_c, y_c)$ знаходять за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}; \quad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Приклад 7.4 Обчислити масу m , статичні моменти M_x і M_y відносно осей Ox і Oy , координати центра маси $C(x_c, y_c)$ і момент інерції I_x відносно осі Ox плоскої матеріальної дуги L з лінійною густиною $\mu = \mu(x, y)$, якщо

$$L: x = 2\cos t, y = 2\sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \mu(x, y) = xy^2.$$

Розв'язання. $dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$

$$x'_t = -2\sin t; y'_t = 2\cos t.$$

$$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} dt = 2 dt.$$

Обчислимо масу m :

$$\begin{aligned} m &= \int_L \mu(x, y) dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \cdot 4\sin^2 t \cdot 2 dt = \left. \begin{array}{l} u = \sin t; \\ du = \cos t dt; \\ u_H = 0, u_B = 1 \end{array} \right| = \\ &= 16 \int_0^1 u^2 du = 16 \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Обчислимо статичні моменти M_x і M_y відносно осей Ox і Oy :

$$M_x = \int_L y \mu(x, y) dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t \cdot 2\cos t \cdot 4\sin^2 t \cdot 2 dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t \, dt = \left. \begin{array}{l} u = \sin t; \\ du = \cos t \, dt; \\ u_H = 0, u_B = 1 \end{array} \right| = \\
&= 32 \int_0^1 u^3 \, du = 32 \frac{u^4}{4} \Big|_0^1 = 8;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \int_L x \mu(x, y) \, dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \cdot 2 \cos t \cdot 4 \sin^2 t \cdot 2 \, dt = \\
&= 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^2 t \, dt = 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) \, dt = \\
&= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 2t) \, dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \, dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 4t) \, dt = \\
&= 4 \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \frac{\pi}{2} = 2\pi.
\end{aligned}$$

Координати центра маси дуги L плоскої кривої $C(x_c, y_c)$:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{2\pi}{\frac{16}{3}} = \frac{3\pi}{8}; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{8}{\frac{16}{3}} = \frac{3}{2}; \quad C\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{3}{2}\right).$$

Обчислимо момент інерції I_x відносно осі Ox :

$$\begin{aligned}
I_x &= \int_L y^2 \mu(x, y) dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t \cdot 2\cos t \cdot 4\sin^2 t \cdot 2 dt = \\
&= 64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = \left. \begin{array}{l} u = \sin t; \\ du = \cos t dt; \\ u_H = 0, u_B = 1 \end{array} \right| = \\
&= 64 \int_0^1 u^4 du = 64 \frac{u^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{64}{5}.
\end{aligned}$$

ЛЕКЦІЯ 8

ВЕКТОРНЕ ПОЛЕ. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ЗА КООРДИНАТАМИ (ДРУГОГО РОДУ)

Поняття векторного поля. Векторні лінії

Якщо кожній точці $M(x, y, z)$ деякої області D простору поставлений у відповідність вектор $\vec{F}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, де $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ – скалярні функції, то вважають, що задано *просторове векторне поле*.

У випадку плоскої області D і двовимірного вектора $\vec{F}(M)$, що лежить у площині цієї області, говорять про *плоске векторне поле*. Зокрема, якщо область D лежить на координатній площині Oxy , то розглядається плоске векторне поле $\vec{F}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j}$, де $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$.

Координатні функції $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні першого порядку.

Векторною лінією поля $\vec{F} = \vec{F}(M)$ називається крива $\vec{r} = \vec{r}(t)$, дотична до якої в кожній її точці співпадає з вектором $\vec{F} = \vec{F}(M)$, тобто $d\vec{r} \parallel \vec{F}(M)$. Тому, за умовою колінеарності векторів, маємо диференціальне рівняння векторних ліній

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

Розглянемо просторове векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

Дивергенцією (розбіжністю) векторного поля \vec{F} у точці $M(x, y, z)$ називається число, яке знаходять за формулою:

$$\operatorname{div}\vec{F}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}. \quad (8.1)$$

Дивергенція є скалярною характеристикою векторного поля.

Якщо $\operatorname{div}\vec{F}(M) > 0$, то точка M називається **джерелом (витоком)**, а якщо $\operatorname{div}\vec{F}(M) < 0$, то точка M називається **стоком**.

Незамкнені векторні лінії починаються в джерелах і закінчуються в стоках.

Дивергенція характеризує потужність джерел і стоків. Кожному векторному полю \vec{F} відповідає скалярне поле $\operatorname{div}\vec{F}$ розподілу джерел та стоків поля \vec{F} .

Векторне поле \vec{F} називається **соленоїдальним (трубчатим)**, якщо в кожній точці його дивергенція дорівнює нулю: $\operatorname{div}\vec{F} = 0$.

Векторні лінії соленоїдального поля або замкнуті, або мають кінці на межі поля, або мають нескінченні гілки (у випадку необмеженого поля).

Приклад 8.1 Знайти дивергенцію даного векторного поля вказаних точках:

$$\vec{F} = x^3\sqrt{z}\vec{i} + 3xy^2z\vec{j} + xy^4\vec{k}; \quad M_1(-1,2,4); \quad M_2(1,1,9).$$

Розв'язання:

$$P = x^3\sqrt{z}; \quad Q = 3xy^2z; \quad R = xy^4; \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2\sqrt{z};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 6xyz; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 0;$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3x^2\sqrt{z} + 6xyz;$$

$$\operatorname{div}\vec{F}(M_1) = -42 < 0, \quad M_1 - \text{точка стоку};$$

$$\operatorname{div}\vec{F}(M_2) = 63 > 0, \quad M_2 - \text{точка виток}.$$

Ротором (вихором) векторного поля \vec{F} у точці $M(x, y, z)$ називається вектор, який знаходиться за формулою:

$$\operatorname{rot}\vec{F}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \Bigg|_M = \left(\frac{\partial R(M)}{\partial y} - \frac{\partial Q(M)}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial R(M)}{\partial x} - \frac{\partial P(M)}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q(M)}{\partial x} - \frac{\partial P(M)}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (8.2)$$

Ротор є *векторною характеристикою* поля \vec{F} . Кожному векторному полю \vec{F} відповідає векторне поле його роторів $\operatorname{rot}\vec{F}$, що характеризує обергання поля \vec{F} в кожній точці.

Якщо в кожній точці його ротор дорівнює нулю: $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$, то векторне поле \vec{F} називається **безвихровим**.

Кожне векторне поле \vec{F} може бути подане як сума безвихрового та соленоїдального полів.

Приклад 8.2 Знайти ротор даного векторного поля в указаній точці: $\vec{F} = z^2\vec{i} + 4xyz\vec{j} - x^2y\vec{k}$; $M(1, -1, 2)$.

Розв'язання.

$$P = z^2; \quad Q = 4xyz; \quad R = -x^2y;$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & 4xyz & -x^2y \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(-x^2y)}{\partial y} - \frac{\partial(4xyz)}{\partial z} \right) \vec{i} - \\ &- \left(\frac{\partial(-x^2y)}{\partial x} - \frac{\partial(z^2)}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial(4xyz)}{\partial x} - \frac{\partial(z^2)}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= (-x^2 - 4xy)\vec{i} - (-2xy - 2z)\vec{j} + (4yz - 0)\vec{k}; \\ \operatorname{rot}\vec{F}(M) &= (-1 + 4)\vec{i} - (2 - 4)\vec{j} + 8\vec{k} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 8\vec{k}. \end{aligned}$$

Щільністю циркуляції векторного поля \vec{F} у точці $M(x, y, z)$ у напрямі вектора \vec{n} називається число

$$C_{\vec{n}}(M) = n p_{\vec{n}} \operatorname{rot}\vec{F}(M). \quad (8.3)$$

Щільність циркуляції $C_{\vec{n}}(M)$ в даній точці M досягає максимуму в напрямі ротора $\operatorname{rot}\vec{F}(M)$ і дорівнює його модулю:

$$C_{\max}(M) = |\operatorname{rot}\vec{F}(M)|, \quad \vec{n}_{\max} = \operatorname{rot}\vec{F}(M).$$

Приклад 8.3 Знайти максимальну щільність циркуляції даного векторного поля в указаній точці:

$$\vec{F} = 2x^2z^2\vec{i} - \frac{xy}{z}\vec{j} + x^2y^3; \quad M(1,2,-1).$$

Розв'язання: $P = 2x^2z^2$; $Q = -\frac{xy}{z}$; $R = x^2y^3$;

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2z^2 & -\frac{xy}{z} & x^2y^3 \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(x^2y^3)}{\partial y} - \frac{\partial(-\frac{xy}{z})}{\partial z} \right) \vec{i} - \\ &- \left(\frac{\partial(x^2y^3)}{\partial x} - \frac{\partial(2x^2z^2)}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial(-\frac{xy}{z})}{\partial x} - \frac{\partial(2x^2z^2)}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= \left(3x^2y^2 + \frac{xy}{z^2} \right) \vec{i} - (2xy^3 - 4x^2z) \vec{j} + \left(-\frac{y}{z} - 0 \right) \vec{k}; \\ \operatorname{rot}\vec{F}(M) &= (12 + 2)\vec{i} - (16 + 4)\vec{j} + 2\vec{k} = 14\vec{i} - 20\vec{j} + 2\vec{k}. \end{aligned}$$

$$\vec{n}_{\max} = \operatorname{rot}\vec{F}(M) = 14\vec{i} - 20\vec{j} + 2\vec{k};$$

$$C_{\max}(M) = |\operatorname{rot}\vec{F}(M)| = \sqrt{14^2 + (-20)^2 + 2^2} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6}.$$

Якщо векторне поле \vec{F} одночасно соленоїдальне і безвихрове, то воно називається **гармонічним**.

Векторне поле \vec{F} гармонічне, якщо в кожній його точці дивергенція і ротор дорівнюють нулю:

$$\operatorname{div}\vec{F} = 0; \operatorname{rot}\vec{F} = 0.$$

Приклад 8.4 Перевірити, чи є дане векторне поле гармонічним:

$$\vec{F} = (yz + 5x)\vec{i} + (xz - 3y)\vec{j} + (xy - 2z)\vec{k}.$$

Розв'язання: $P = yz + 5x; Q = xz - 3y; R = xy - 2z;$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{F} &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(yz + 5x) + \frac{\partial}{\partial y}(xz - 3y) + \frac{\partial}{\partial z}(xy - 2z) = 5 - 3 - 2 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + 5x & xz - 3y & xy - 2z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial(xy - 2z)}{\partial y} - \frac{\partial(xz - 3y)}{\partial z} \right) \vec{i} - \\ &- \left(\frac{\partial(xy - 2z)}{\partial x} - \frac{\partial(yz + 5x)}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial(xz - 3y)}{\partial x} - \frac{\partial(yz + 5x)}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= (x - x)\vec{i} - (y - y)\vec{j} + (z - z)\vec{k} = 0. \end{aligned}$$

Отже, векторне поле гармонічне.

Криволінійний інтеграл за координатами (другого роду)

Нехай в області D площини Oxy задане плоске силове поле $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – проекції на осі координат. Нехай під дією змінної сили $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ матеріальна точка B рухається деякою плоскою кусково-гладкою напрямленою лінією L . Необхідно обчислити роботу A , яка виконується при переміщенні цієї точки M по дузі L_{AC} (рис. 8.1).

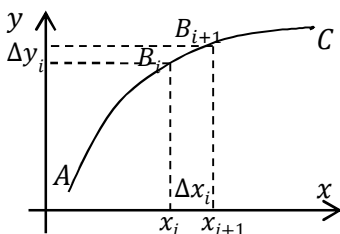


Рисунок 8.1

Розіб'ємо дугу L_{AC} довільним способом на n елементарних дуг $\Delta l_i, i = \overline{1, n}$ точками $A = B_1, B_2, \dots, B_n = C$. Розглянемо елементарну дугу Δl_i , якій відповідає вектор переміщення $\Delta l_i = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}$. Нехай довжина Δl_i цієї дуги

настільки мала, що на ній вектор сили $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ можна вважати сталою величиною:

$$\vec{F}_i = P_i(x_i, y_i)\vec{i} + Q_i(x_i, y_i)\vec{j}$$

Тоді робота на цій ділянці Δl_i визначається скалярним добутком

$$\Delta A_i \approx \vec{F}_i \cdot \Delta l_i = P_i(x_i, y_i) \Delta x_i + Q_i(x_i, y_i) \Delta y_i.$$

Складемо суму елементарної роботи на всіх ділянках $\Delta l_i, i = \overline{1, n}$ і отримаємо:

$$A_n \approx \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \sum_{i=1}^n (P_i(x_i, y_i) \Delta x_i + Q_i(x_i, y_i) \Delta y_i).$$

Одержана сума називається **інтегральною** для вектор-функції $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ по напрямленій дузі L_{AC} . Переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$ ($\max \Delta l_i \rightarrow 0$), отримуємо значення A .

Скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^n (P_i(x_i, y_i) \Delta x_i + Q_i(x_i, y_i) \Delta y_i)$ при необмеженому здрібненні розбиття дуги на елементарні частини називається **криволінійним інтегралом за координатами (криволінійним інтегралом другого роду)** і позначається

$$\begin{aligned} & \int_{L_{AC}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ & = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P_i(x_i, y_i) \Delta x_i + Q_i(x_i, y_i) \Delta y_i). \end{aligned}$$

Якщо лінія L замкнена, то інтеграл по ній записується у вигляді:

$$\oint_L \vec{F}(x, y) dl = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

причому початкова точка вибирається довільно і вказується напрям обходу. Якщо напрям обходу замкненого контуру L явно не зазначено, то приймається додатний напрям (рух проти годинникової стрілки).

Властивості криволінійного інтеграла за координатами

Криволінійний інтеграл за координатами визначається підінтегральним виразом, довжиною і формою кривої інтегрування та її напрямом.

Властивості криволінійного інтеграла:

1. При зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл за координатами тільки змінює знак

$$\int_{L_{AC}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{L_{CA}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

2. Просторове векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ можна розглядати як суму трьох векторних полів $P\vec{i}$, $Q\vec{j}$ і $R\vec{k}$. Відповідно, повний криволінійний інтеграл за координатами можна розглядати як суму трьох інтегралів

$$\int_L \vec{F} dl = \int_L P dx + Q dy + R dz = \int_L P dx + \int_L Q dy + \int_L R dz.$$

3. Розглянемо $\oint_L \vec{F} dl$ по замкненому контуру L . З'єднавши дві довільні точки A і B цього контура дугою L_{AB} , одержимо два замкнені контури L_1 і L_2 . Тоді

$$\oint_L \vec{F} dl = \oint_{L_1} \vec{F} dl + \oint_{L_2} \vec{F} dl.$$

Тобто, при розбитті замкненого контура на замкнені

підконтури значення сумарного криволінійного інтеграла не змінюється. Ця властивість виражає закон збереження обертального руху.

Інші властивості криволінійного інтегралу другого роду аналогічні властивостям звичайного визначеного інтеграла.

ЛЕКЦІЯ 9

ОБЧИСЛЕННЯ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛУ ЗА КООРДИНАТАМИ. ФОРМУЛА ГРІНА. УМОВИ НЕЗАЛЕЖНОСТІ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛУ ЗА КООРДИНАТАМИ ВІД ШЛЯХУ ІНТЕГРУВАННЯ

Обчислення криволінійного інтеграла за координатами

Обчислення криволінійного інтеграла за координатами здійснюється зведенням його до визначеного інтеграла методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

1. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах у параметричній формі $x = x(t)$; $y = y(t)$; $\alpha \leq t \leq \beta$, де функції $x(t)$ і $y(t)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$ неперервні разом зі своїми похідними $x'(t)$ та $y'(t)$, причому точці A кривої відповідає параметр α , а точці B – параметр β . Тоді,

$$\int_{L_{AB}} P(x, y) dx = \left| \begin{array}{l} x = x(t); y = y(t); \\ dx = x'(t) dt \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t)) x'(t) dt.$$

Аналогічно,

$$\int_{L_{AB}} Q(x, y) dy = \left| \begin{array}{l} x = x(t); y = y(t); \\ dy = y'(t) dt \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t)) y'(t) dt.$$

Отже,

$$\int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t)) x'(t)dt + \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t); y(t)) y'(t)dt. \quad (9.1)$$

2. Якщо плоска крива L_{AB} задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, де функція $y(x)$ та її похідна $y'(x)$ неперервні на проміжку $[a, b]$, то

$$\int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \left| \begin{array}{l} y = y(x); \\ dy = y'(x)dx \end{array} \right| =$$

$$= \int_{L_{AB}} P(x, y(x))dx + Q(x, y(x))y'(x)dx =$$

$$= \int_{L_{AB}} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)) dx. \quad (9.2)$$

Якщо плоска крива L_{AB} задана рівнянням $x = x(y)$, $c \leq y \leq d$, причому функція $x(y)$ та її похідна $x'(y)$ неперервні на проміжку $[c, d]$, то маємо

$$\int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \left| \begin{array}{l} x = x(y) \\ dx = x'(y)dy \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{L_{AB}} P(x(y), y)x'(y)dy + Q(x(y), y)dy = \\
&= \int_{L_{AB}} (P(x(y), y)x'(y) + Q(x(y), y))dy. \quad (9.3)
\end{aligned}$$

3. Як згадувалося раніше, поняття криволінійного інтеграла другого роду поширюється й на просторові криві. Нехай $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ визначені і неперервні на просторовій кривій L_{AB} , що задана рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, де функції $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ неперервні на проміжку $[\alpha, \beta]$. Тоді існує криволінійний інтеграл

$$\int_{L_{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

і має місце формула

$$\begin{aligned}
\int_{L_{AB}} Pdx + Qdy + Rdz &= \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t))x'(t)dt + \\
&+ Q(x(t), y(t), z(t))y'(t)dt + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)dt \quad (9.4)
\end{aligned}$$

Приклад 9.1 Обчислити інтеграл

$$\int_L xy dx + (x - y)dy$$

вдоль ліній 1) $y = x$; 2) $y = x^2$; від точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$.

Розв'язання. 1) $L: y = x, \quad dy = dx$, а отже за формулою (9.2) маємо:

$$\begin{aligned}\int_L xy \, dx + (x - y)dy &= \int_0^1 x x \, dx + (x - x)dx = \\ &= \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2) $L: y = x^2; \quad dy = 2x dx$.

$$\begin{aligned}\int_L xy \, dx + (x - y)dy &= \int_0^1 x x^2 \, dx + (x - x^2)2x dx = \\ &= \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 2x^3) dx = \int_0^1 (2x^2 - x^3) dx = \\ &= \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Як бачимо, в двох випадках ми отримали різні значення, не зважаючи на те що початкова та кінцева точки інтегрування однакові. Це вказує на те, що криволінійний інтеграл залежить не лише від початкової та кінцевої точок інтегрування, а й від лінії, що з'єднує їх.

Приклад 9.2 Обчислити інтеграл

$$\int_L (2a - y)dx - (a - y)dy,$$

де L – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$.

Розв'язання. За умовою L – перша арка циклоїди, тому $t \in [0, 2\pi]$. $dx = a(1 - \cos t)dt$; $dy = a \sin t dt$. За формулою (9.1) маємо:

$$\begin{aligned} & \int_L (2a - y)dx - (a - y)dy = \\ & = \int_0^{2\pi} (2a - a(1 - \cos t))a(1 - \cos t)dt - \\ & \quad - (a - a(1 - \cos t))a \sin t dt = \\ & = \int_0^{2\pi} (a^2(1 + \cos t)(1 - \cos t) - a^2 \cos t \sin t) dt = \\ & = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t - \cos t \sin t) dt = \\ & = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 t - \frac{1}{2} \sin 2t\right) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 \left(t \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt + \frac{1}{4} \cos 2t \Big|_0^{2\pi} \right) = \\
&= a^2 \left(2\pi - \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{2\pi} \right) = \pi a^2.
\end{aligned}$$

Приклад 9.3 Обчислити інтеграл

$$\int_L x dx + y dy + (x + y - 1) dz,$$

де L – відрізок прямої, від точки $A(1,1,1)$ до точки $B(2,3,4)$.

Розв'язання. Знайдемо канонічні рівняння прямої AB :

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1} = \frac{z-1}{4-1}; \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Перейдемо до параметричного запису прямої і обчислимо диференціали:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} = t \Rightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = 3t + 1 \end{cases}$$

$$dx = dt; \quad dy = 2dt; \quad dz = 3dt.$$

Врахуємо, що при заміні змінної змінюються межі інтегрування, $1 \leq x \leq 2$, то $0 \leq t \leq 1$.

Отже,

$$\int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz =$$

$$= \int_0^1 (t + 1)dt + (2t + 1) 2dt + (t + 1 + 2t + 1 - 1)3dt =$$

$$\int_0^1 (14t + 6) dt = 14 \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 + 6 t \Big|_0^1 = 7 + 6 = 13.$$

Формула Гріна

Формула Гріна зв'язує подвійний інтеграл по області D з криволінійним інтегралом по межі L цієї області.

Теорема. Якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку $\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $\frac{\partial P}{\partial y}$ в області D , то має місце формула

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (9.5)$$

де D — деяка однозв'язна область, обмежена замкненим контуром L (інтегрування виконується в додатному напрямі).

Формула (9.5) називається формулою Гріна.

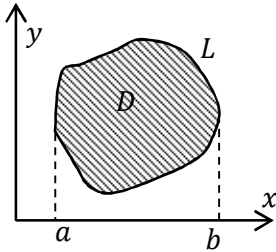


Рисунок 9.1

Доведення. Обмежимося розглядом області D , правильної в напрямі осі Oy (рис. 9.1).

Обчислимо

$$\iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = \int_a^b P(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx =$$

$$= \int_a^b (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))) dx =$$

$$= - \int_b^a P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx = - \oint_L P(x, y) dx.$$

Аналогічно

$$\iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \oint_L Q(x, y) dy.$$

Склавши відповідні вирази, маємо

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Умови незалежності криволінійного інтеграла за координатами від шляху інтегрування

Як згадувалося раніше, при розв'язанні прикладу 9.1, величина криволінійного інтегралу

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (9.6)$$

залежить не лише від початкової та кінцевої точок інтегрування, а й від лінії, що з'єднує їх.

Виникає питання: за яких умов інтеграл (9.6) не залежить від лінії, за якою виконується інтегрування, а залежить лише від початкової та кінцевої точок лінії інтегрування?

Лема. Для того щоб криволінійний інтеграл (9.6) не залежав від лінії інтегрування, необхідно і достатньо, щоб цей інтеграл, взятий по будь-якому замкненому контуру, дорівнював нулю.

(приймемо без доведення)

Теорема. Нехай функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними в однозв'язній області D . Тоді, для того щоб криволінійний інтеграл (9.6) не залежав від лінії інтегрування, необхідно і достатньо, щоб в усіх точках області D виконувалась рівність

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (9.7)$$

Рівність (9.7) вказує на те, що підінтегральний вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом, тому теорему можна сформулювати в наступному виді.

Для того щоб криволінійний інтеграл (9.6) не залежав від лінії інтегрування, необхідно і достатньо, щоб його підінтегральний вираз був повним диференціалом.

Доведення. Доведемо спочатку достатність умови (9.7) для рівності нулю інтеграла (9.6) за замкнутою контуру. Розглянемо довільний замкнений контур L^* (за лемою), що обмежує деяку область D^* , що цілком належить області D . Застосуємо формулу Гріна:

$$\int_{L^*} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Так як за умовою $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то подвійний інтеграл дорівнює нулю, а отже дорівнює нулю і криволінійний інтеграл за контуром L^* , що було необхідно довести.

Перейдемо до доведення необхідної умови (9.7). Так як нам відомо тепер, що інтеграл за будь-яким замкненим контуром дорівнює нулю, то знову таки, за формулою Гріна, вважаємо, що дорівнює нулю подвійний інтеграл

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (9.8)$$

Припустимо, що рівність $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ не виконується. Візьмемо довільну точку M , в якій ця умова порушується, та обчислимо різницю $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ в цій точці.

Нехай

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)_M > 0.$$

За умови неперервності частинних похідних маємо, що різниця $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ є додатною в деякій достатньо малій області G , але тоді за властивістю подвійних інтегралів

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy > 0,$$

що викликає протиріччя з рівнянням (9.8). А це означає, що наше припущення про не дотримання умови (9.7) було не вірним, тобто, ми довели, що $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в області D .

Отже, робимо висновок: якщо область D однозв'язна і функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ разом зі своїми частинними похідними неперервні в цій області, то всі наступні чотири умови рівносильні, тобто, якщо виконується одна з них, то виконуються і всі останні.

1. Криволінійний інтеграл $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, взятий по будь-якому замкнутому контуру, що цілком лежить в області D , дорівнює нулю.
2. Криволінійний інтеграл $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не залежить від лінії інтегрування.
3. Вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом.
4. В усіх точках області D має місце рівність $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

ЛЕКЦІЯ 10

ІНТЕГРУВАННЯ ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛІВ. ПЕРВІСНА ФУНКЦІЇ. ЗАСТОСУВАННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ДО ЗАДАЧ МЕХАНІКИ ТА ТЕРМОДИНАМІКИ

Інтегрування повних диференціалів. Первісна функції

Якщо підінтегральний вираз криволінійного інтегралу

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (10.1)$$

є повним диференціалом, то при виконанні всіх умов теореми (пункту 9.3), величина цього інтегралу залежить лише від початкової та кінцевої точок інтегрування. Тому інтеграл (10.1) записують зазвичай у вигляді

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

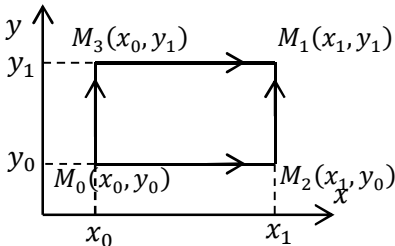


Рисунок 10.1

де (x_0, y_0) – початкова точка лінії інтегрування, а (x_1, y_1) – кінцева. Використовуючи властивість 3 пункту 8.3 будемо виконувати інтегрування за ламаною $M_0M_2M_1$ або $M_0M_3M_1$, ланки якої паралельні осям координат (рис. 10.1).

Так на ланці M_0M_2 $y = y_0$, $dy = 0$, а на ланці M_2M_1 $x = x_1$, $dx = 0$, тому

$$\begin{aligned} & \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ & = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y) dy. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Приклад 10.1 Обчислити інтеграл

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xydx + x^2 dy.$$

Розв'язання.

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xydx + x^2 dy = \int_0^2 2x \cdot 0 dx + \int_0^1 4dy = 4.$$

Розглянемо інтеграл з фіксованою початковою точкою $M_0(x_0, y_0)$ та змінною кінцевою $M(x, y)$:

$$I(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (10.3)$$

Величина цього інтегралу буде залежати лише від координат кінцевої точки тобто буде функцією змінних x і y .

Підінтегральний вираз є повним диференціалом функції $U(x, y)$

$$dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Обчислимо інтеграл (10.3) за формулою (10.2)

$$I(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy,$$

враховуємо, що змінна x у другому інтегралі в процесі інтегрування є сталою. З того, що $P = \frac{\partial U}{\partial x}$ та $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, випливає

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx &= \int_{x_0}^x \frac{\partial U(x, y_0)}{\partial x} dx = \\ &= U(x, y_0) \Big|_{x_0}^x = U(x, y_0) - U(x_0, y_0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^y Q(x, y)dy &= \int_{y_0}^y \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} dy = \\ &= U(x, y) \Big|_{y_0}^y = U(x, y) - U(x, y_0). \end{aligned}$$

Отже, маємо

$$I(x, y) = U(x, y_0) - U(x_0, y_0) + U(x, y) - U(x, y_0);$$

$$I(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = U(x, y) - U(x_0, y_0).$$

Якщо функцію $U(x, y)$ назвемо *первісною* для повного диференціала $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, то отриманий вираз є формулою Ньютона-Лейбніца для криволінійного інтегралу. Вважаючи $U(x_0, y_0) = C$, отримуємо:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\
 &= \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy + C. \quad (10.4)
 \end{aligned}$$

Приклад 10.2 Знайти функцію $U(x, y)$, якщо даний вираз є повним диференціалом функції

$$dU = (2x \cos y - y^2 \sin x)dx + (2y \cos x - x^2 \sin y)dy.$$

$$\text{Розв'язання. } P(x, y) = 2x \cos y - y^2 \sin x;$$

$$Q(x, y) = 2y \cos x - x^2 \sin y.$$

Знайдемо частинні похідні та порівняємо їх:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x \sin y - 2y \sin x;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \sin x - 2x \sin y.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Даний вираз є повним диференціалом функції $U(x, y)$.

Визначимо початкову точку інтегрування враховуючи область визначення функцій $P(x, y)$ та $Q(x, y)$. В даному випадку зручно обрати початковою точкою інтегрування $O(0, 0)$. За формулою (10.4) маємо:

$$U(x, y) = \int_0^x 2x dx + \int_0^y (2y \cos x - x^2 \sin y) dy =$$

$$= 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^x + 2 \cos x \frac{y^2}{2} \Big|_0^y + x^2 \cos y \Big|_0^y + C =$$

$$= x^2 + y^2 \cos x + x^2 \cos y - x^2 + C = y^2 \cos x + x^2 \cos y + C;$$

$$U(x, y) = y^2 \cos x + x^2 \cos y + C.$$

Перевірку отриманого результату можна виконати за умовами $P = \frac{\partial U}{\partial x}$ та $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -y^2 \sin x + 2x \cos y = P(x, y);$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2y \cos x - x^2 \sin y = Q(x, y).$$

Отже, шукана функція:

$$U(x, y) = y^2 \cos x + x^2 \cos y + C.$$

Застосування криволінійних інтегралів другого роду

1) Розглянемо *роботу силового поля*, заданого силою

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Якщо проєкції P, Q, R сили \vec{F} на осі координат задовольняють умовам $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$, то робота в цьому силовому полі визначається криволінійним інтегралом

$$A = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

і не залежить від форми шляху. Таке силове поле називається *потенціальним*. Функція $U(x, y, z)$ для якої вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ є повним диференціалом, називається *потенціалом* силового поля.

Робота в потенціальному силовому полі дорівнює різниці потенціалів обчислених в кінцевій та початковій точках шляху.

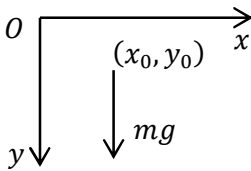


Рисунок 10.2

Поле тяжіння. Виберемо в площині руху матеріальної точки масою m координатні осі, причому вісь Oy направлена вертикально вниз (рис. 10.2), тому проєкції на вісі координат дорівнюють $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = mg$, де g – прискорення сили тяжіння. Робота при переміщенні матеріальної точки з точки $M_0(x_0, y_0)$ в точку $M(x, y)$:

$$A = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} mg \, dy = mg \int_{y_0}^y dy = mg y - mg y_0.$$

Потенціальна функція має вид

$$U(x, y) = mg y + C.$$

2) *Площа плоскої фігури.* Нехай на площині задана правильна область D (рис. 10.3).

$$D: \{y_1(x) \leq y(x) \leq y_2(x); a \leq x \leq b\}$$

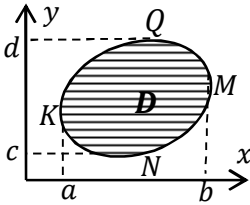


Рисунок 10.3

Межу області D , тобто криву $MQKN$ позначимо L і вважатимемо додатньо орієнтованою. Розглянемо інтеграл $-\oint_L y dx$ і зведемо його до визначених інтегралів

$$\begin{aligned} -\oint_L y dx &= -\left(\int_{KNM} y dx - \int_{MQK} y dx \right) \\ &= \int_{MQK} y dx - \int_{KNM} y dx = \int_a^b y_2(x) dx - \int_a^b y_1(x) dx = S, \end{aligned}$$

де S – площа області D .

Аналогічно

$$\oint_L x dy = S.$$

Додаючи отримані формули маємо:

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx.$$

Приклад 10.3 Обчислити площу плоскої фігури обмеженої еліпсом $x = a \cos t$; $y = b \sin t$.

Розв'язання. $dx = -a \sin t dt$; $dy = b \cos t dt$.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \cos^2 t dt + ad \sin^2 t dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab. \end{aligned}$$

ЛЕКЦІЯ 11

ПОВЕРХНЕВИЙ ІНТЕГРАЛ ЗА ПЛОЩЕЮ. ПОВЕРХНЕВИЙ ІНТЕГРАЛ ЗА КООРДИНАТАМИ

Поняття поверхневого інтеграла за площею (першого роду)

Розглянемо скалярне поле $U = U(x, y, z)$ на поверхні σ .

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. У середині кожної частинної поверхні $\Delta\sigma_i$ візьмемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta\sigma_i$, обчислимо значення заданої функції в цій точці $U(M_i)$ і помножимо це значення на площу елементарної частини $\Delta\sigma_i$ та складемо суму

$$\sum_{i=1}^n U(M_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n U(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i.$$

Одержаний вираз називається **інтегральною сумою** для функції $U = U(x, y, z)$ по поверхні σ .

Скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^n U(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i$, яка не залежить від способу розбиття поверхні σ та від вибору точок M_i , за умови прямування до нуля діаметрів елементарних частин називається **поверхневим інтегралом за площею (поверхневим інтегралом першого роду)** від функції $U = U(x, y, z)$ по поверхні σ :

$$\lim_{d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n U(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} U(x, y, z)d\sigma.$$

Якщо розглядати функцію $U = U(x, y, z)$ як поверхневу

густину $\mu = \mu(x, y, z)$ маси, розподіленої по поверхні σ , то інтеграл виражає масу всієї поверхні:

$$m = \iint_{\sigma} \mu(x, y, z) d\sigma.$$

(фізичний зміст поверхневого інтеграла за площею).

Якщо $U(x, y, z) = 1$, то маємо площу поверхні σ :

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma$$

Поверхневий інтеграл за площею не залежить від вибору орієнтації поверхні σ . Інші властивості поверхневого інтеграла першого роду аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

Обчислення поверхневого інтеграла за площею

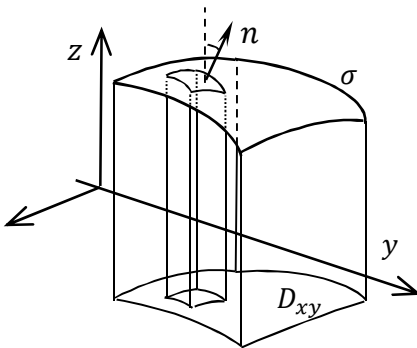


Рисунок 11.1

Розглянемо інтеграл $\iint_{\sigma} U(x, y, z) d\sigma$. Припустимо, що поверхня σ правильна в напрямі осі Oz і задана явно рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ неперервна зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} – проекції σ на площину Oxy (рис. 11.1).

Розглянемо елемент $d\sigma$ поверхні σ , який проектується на елемент $dS = dx dy$ області D_{xy} .

Проведемо нормаль \vec{n} так, щоб вона утворила гострий кут γ з віссю Oz , тоді $\cos \gamma > 0$. Будемо вважати, що

елементарна поверхня $d\sigma$ настільки мала, що в її межах нормаль не змінюється. Тоді площі елементарної частини $d\sigma$ та її проекції $dS = dx dy$ зв'язані співвідношенням

$$dS = dx dy = |\cos\gamma|d\sigma; \quad d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}.$$

З іншого боку, вибрана нормаль \vec{n} до поверхні $z = z(x, y)$ має проекції $-z'_x$, $-z'_y$, 1. Тому

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}, \quad \text{а } d\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} dxdy.$$

Отже

$$\iint_{\sigma} U(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} U(x, y, z(x, y)) \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} dxdy.$$

Якщо $U(x, y, z) = 1$, то площа поверхні σ

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} dxdy.$$

Приклад 11.1 Обчислити поверхневий інтеграл за площею

$$\iint_{\sigma} (4x + 5z) d\sigma,$$

де σ – частина площини $2x + 2y + 5z = 10$, що відсікається координатними площинами $x = 0, y = 0, z = 0$.

Розв'язання. Поверхню σ будемо розглядати як правильну в напрямі осі Oz (рис. 11.2 а), а її проекцію D_{xy} – як

правильну в напрямі осі Oz плоску область (рис. 11.2 б). Тоді σ :

$$z = \frac{10 - 2x - 2y}{5}; \quad z'_x = -\frac{2}{5}; \quad z'_y = -\frac{2}{5};$$

$$D_{xy}: 0 \leq x \leq 5; 0 \leq y \leq 5 - x.$$

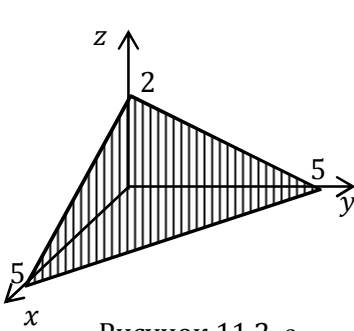


Рисунок 11.2, а

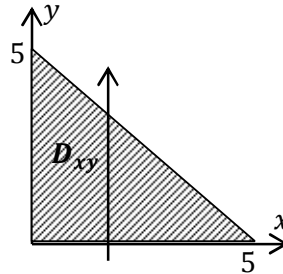


Рисунок 11.2, б

За формулою

$$\iint_{\sigma} U(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} U(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy;$$

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (4x + 5z) d\sigma &= \iint_{D_{xy}} \left(4x + 5 \frac{10 - 2x - 2y}{5} \right) \sqrt{1 + \frac{4}{25} + \frac{4}{25}} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (2x - 2y + 10) \frac{\sqrt{33}}{5} dx dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{33}}{5} \int_0^5 dx \int_0^{5-x} (2x - 2y + 10) dy = \\
&= \frac{\sqrt{33}}{5} \int_0^5 \left(2xy - 2 \frac{y^2}{2} + 10y \right) \Big|_0^{5-x} dx = \\
&= \frac{\sqrt{33}}{5} \int_0^5 (10x - 2x^2 - 25 + 10x - x^2 + 50 - 10x) dx = \\
&= \frac{\sqrt{33}}{5} \int_0^5 (-3x^2 + 10x + 25) dx = \\
&= \frac{\sqrt{33}}{5} (-x^3 + 5x^2 + 25x) \Big|_0^5 = 25\sqrt{33}.
\end{aligned}$$

Поняття поверхневого інтеграла за координатами (другого роду). Потік векторного поля

Розглянемо деяку просторову область V , в якій задано поверхню σ , обмежену просторовою лінією L . Нехай вибрана сторона σ^\pm поверхні характеризується одиничним вектором нормалі

$$\vec{n} = \cos\alpha \vec{i} + \cos\beta \vec{j} + \cos\gamma \vec{k},$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора \vec{n} , $|\vec{n}| = 1$.

Нехай задано векторне поле \vec{F} на поверхні σ :

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Розіб'ємо поверхню σ довільними лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. Усередині кожного частинного елемента $\Delta\sigma_i$ візьмемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, обчислимо значення функції $\vec{F}(M_i)$ і нормалі $\vec{n}(M_i)$, знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{F}(M_i)$ і $\vec{n}(M_i)$, помножимо цей добуток на площу елементарної частини $\Delta\sigma_i$ та складемо суму

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i) \Delta\sigma_i. \quad (11.1)$$

Одержаний вираз називається *інтегральною сумою* для вектор-функції $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ по вибраній стороні σ^\pm поверхні σ .

*Скінченна границя інтегральної суми (11.1), яка не залежить від способу розбиття поверхні σ та від вибору точок $M_i(x_i, y_i, z_i)$, за умови прямування до нуля діаметрів елементарних частин називається **поверхневим інтегралом за координатами (поверхневим інтегралом другого роду)** від вектор-функції $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ по вибраній стороні σ^\pm поверхні σ :*

$$\lim_{\Delta\sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i) \Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma.$$

Інтеграл $\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma$ визначає загальну кількість рідини, що протікає за одиницю часу через вибрану сторону σ^\pm поверхні σ .

Тому поверхневий інтеграл $\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ також називають *поток векторного поля \vec{F}* через вибрану сторону σ^{\pm} поверхні σ :

$$\Pi^{\pm} = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$$

(фізичний зміст поверхневого інтеграла за координатами).

Якщо поверхня σ замкнена, то інтеграл по ній записується так $\oiint_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$.

Якщо всюди на поверхні σ векторне поле \vec{F} дотичне до неї ($\vec{F} \perp \vec{n}$), то потік через неї дорівнює нулю:

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = 0.$$

При зміні орієнтації поверхні σ поверхневий інтеграл за координатами змінює тільки знак:

$$\iint_{\sigma^{-}} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = - \iint_{\sigma^{+}} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Інші властивості поверхневого інтеграла першого роду аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

Якщо виразити скалярний добуток у координатній формі, то одержимо співвідношення

$$\iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma,$$

що відображає *зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду*.

Векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ можна подати як суму трьох векторних полів $P\vec{i}$, $Q\vec{j}$, $R\vec{k}$. Відповідно поверхневий інтеграл можна розбити на три інтеграли-доданки.

Розглянемо інтеграли $\iint_{\sigma^{\pm}} R \vec{k} \cdot \vec{n} d\sigma$. Обчислимо скалярний добуток $\vec{k} \cdot \vec{n} = |\vec{k}| |\vec{n}| \cos \gamma = \cos \gamma$; $\cos \gamma d\sigma$ є проекцією $dS = dx dy$ $d\sigma$ на площину Oxy : $\cos \gamma d\sigma = dx dy$, тому

$$\iint_{\sigma^{\pm}} R \vec{k} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} R dx dy.$$

Аналогічно $\cos \alpha d\sigma = dy dz$; $\cos \beta d\sigma = dx dz$. Звідси маємо

$$\iint_{\sigma^{\pm}} P \vec{i} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} P dy dz;$$

$$\iint_{\sigma^{\pm}} Q \vec{j} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} Q dx dz.$$

Отримані три інтеграли називаються *поверхневими інтегралами за відповідною парою координат*

$$\iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} P \, dydz + Q \, dx dz + R \, dx dy.$$

Обчислення поверхневого інтеграла за координатами

Обчислення поверхневого інтеграла другого роду зводиться до обчислення подвійних інтегралів по плоских областях.

Необхідно спроектувати поверхню σ на всі *три* координатні площини і безпосередньо перейти до відповідних подвійних інтегралів. Для цього треба розбити повний інтеграл на складові частини і кожну з них розглянути окремо.

Нехай поверхня σ правильна в усіх трьох напрямках Ox, Oy, Oz . Зокрема, її можна задати явно рівнянням $z = z(x, y)$, де функцію $z(x, y)$ будемо вважати неперервною зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проекції σ на площину Oxy .

Якщо $dS = dx dy$ – площа проекції елементарної поверхні $d\sigma$ на площину Oxy , то площа елементарної поверхні знаходиться за формулою:

$$d\sigma = \frac{dx dy}{|\cos \gamma|} = \pm \frac{dx dy}{\cos \gamma},$$

де береться один певний знак “+” чи “-” у залежності від орієнтації поверхні. Тоді для поверхневого інтеграла

$$I_z = \iint_{\sigma^{\pm}} R \, dx dy \text{ маємо:}$$

$$I_z = \iint_{\sigma^\pm} R \, dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \, dx dy,$$

тобто обчислення поверхневого інтеграла за парою координат (x, y) зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy} . При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо $\cos \gamma \geq 0$ (кут γ – гострий), чи знак мінус, якщо $\cos \gamma \leq 0$ (кут γ – тупий).

Аналогічно обчислюються поверхневі інтеграли за відповідною парою координат (y, z) чи (x, z) :

$$I_x = \iint_{\sigma^\pm} P \, dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) \, dy dz;$$

$$I_y = \iint_{\sigma^\pm} Q \, dx dz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) \, dx dz,$$

де D_{yz} і D_{xz} – проєкції поверхні σ на координатні площини відповідно Oyz і Oxz . При цьому перед подвійним інтегралом береться знак «+», якщо кут між нормаллю \vec{n} і координатною віссю відповідно Ox чи Oy гострий, або знак «-», якщо цей кут тупий.

Повний поверхневий інтеграл за координатами знаходиться як сума отриманих подвійних інтегралів

$$\iint_{\sigma^\pm} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{\sigma^\pm} P \, dy dz + Q \, dx dz + R \, dx dy = I_x + I_y + I_z.$$

Приклад 11.2 Обчислити потік векторного поля $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ через зовнішню сторону σ^+ поверхні σ , відповідний вектор нормалі \vec{n} якої утворює з віссю Oz гострий кут γ :

$$\vec{F} = \frac{x^2}{\sqrt{y^2 + z^2}} \vec{i} + \frac{\pi x}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{j} + \frac{1 - z^2}{x^2 + y^2} \vec{k};$$

$$\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0).$$

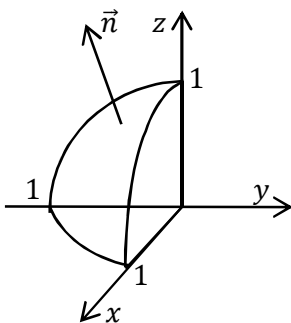


Рисунок 11.3

Розв'язання. Поверхня σ є восьмою частиною сфери одиничного радіуса з центром у початку координат (рис. 11.3). Вона правильна в усіх трьох напрямках Ox, Oy, Oz . При цьому нормаль \vec{n} до вибраної сторони σ^+ з осями Ox і Oz утворює гострі кути α і γ , а з віссю Oy – тупий кут β . Позначимо проєкції σ на координатні площини відповідно D_{yz}, D_{xz} і D_{xy} , які

будуть чвертями кругів радіуса $R = 1$. Поверхню σ можна задати явно відповідно одним з рівнянь

$$x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}; \quad y = -\sqrt{1 - x^2 - z^2}; \quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Повний поверхневий інтеграл за координатами знайдемо як суму отриманих подвійних інтегралів

$$\Pi^\pm = \iint_{\sigma^\pm} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = I_x + I_y + I_z.$$

Обчислимо окремо кожний з інтегралів:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \iint_{\sigma^+} \frac{x^2}{\sqrt{y^2 + z^2}} dydz = \left[x = \sqrt{1 - y^2 - z^2} \right] = \\
 &= \iint_{D_{yz}} \frac{1 - y^2 - z^2}{\sqrt{y^2 + z^2}} dydz = \left[\begin{array}{l} y = \rho \cos\varphi; z = \rho \sin\varphi \\ dydz = \rho d\rho d\varphi; \\ \rho \in [0; 1]; \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \end{array} \right] = \\
 &= \iint_{D_{yz}} \frac{1 - \rho^2}{\rho} \rho d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - \rho^2) d\rho = \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\rho - \frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^1 d\varphi = \frac{2}{3} \varphi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{3}; \\
 I_y &= \iint_{\sigma^+} \frac{\pi x}{x^2 + y^2 + z^2} dx dz = \left[y = -\sqrt{1 - x^2 - z^2} \right] = \\
 &= - \iint_{D_{xz}} \frac{\pi x dx dz}{x^2 + (1 - x^2 - z^2) + z^2} = -\pi \iint_{D_{xz}} x dx dz = \\
 &= \left[\begin{array}{l} x = \rho \cos\varphi; z = \rho \sin\varphi \\ dx dz = \rho d\rho d\varphi; \\ \rho \in [0; 1]; \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \end{array} \right] = -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho \cos\varphi \rho d\rho =
 \end{aligned}$$

$$= -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^1 d\varphi = -\frac{\pi}{3} \sin\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{3};$$

$$I_z = \iint_{\sigma^+} \frac{1-z^2}{x^2+y^2} dx dy = \left[z = \sqrt{1-x^2-y^2} \right] =$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} dx dy = \iint_{D_{xy}} dx dy = \left| \begin{array}{l} dx dz = \rho d\rho d\varphi; \\ \rho \in [0; 1]; \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{array} \right| =$$

$$= \iint_{D_{xy}} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, остаточно маємо

$$\Pi^\pm = I_x + I_y + I_z = \frac{\pi}{4}.$$

ЛЕКЦІЯ 12

ФОРМУЛА СТОКСА. ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО-ГАУССА

Формула Стокса

Для поверхневих інтегралів має місце формула, аналогічна формулі Гріна. Розглянемо у просторі деяку поверхню σ , обмежену замкнутою лінією L (рис. 12.1). Проекцією цієї поверхні на площину Oxy буде область D , обмежена замкнутою лінією l . Нехай у просторі задано векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

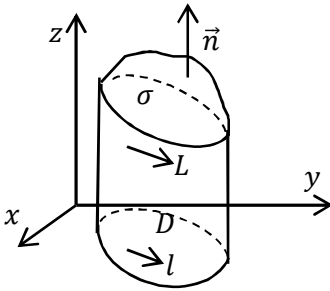


Рисунок 12.1

Якщо вважати $z = 0$ і $R(x, y, z) = 0$, то матимемо плоске векторне поле, що в області D приймає значення

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

Обчислимо ротор цього векторного поля

$$\text{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Тоді потік цього ротора через додатну сторону D^+ області D буде дорівнювати

$$\iint_{D^+} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{D^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \cdot \vec{n} \, d\sigma.$$

Оскільки одинична нормаль \vec{n} до області D співпадає з \vec{k} , то $\vec{n} \cdot \vec{k} = 1$, $\cos \gamma = 1 > 0$. Перейдемо до подвійного інтеграла:

$$\begin{aligned} \iint_{D^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \cdot \vec{n} \, d\sigma &= \iint_{D^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma = \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Згадуючи формулу Гріна, отримуємо

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_l \vec{F} \, d\vec{l}.$$

$$\iint_{D^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \oint_l \vec{F} \, d\vec{l}$$

Остаточно, маємо **формулу Стокса**

$$\oint_l \vec{F} \, d\vec{l} = \iint_{D^+} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

У просторі для поверхні σ , обмеженої замкненою лінією L , формула Стокса залишається в тому ж вигляді.

Теорема Стокса (зв'язок між криволінійним і поверхневим інтегралами): Циркуляція векторного поля \vec{F} вздовж замкненої лінії L , що обмежує поверхню σ , дорівнює потоку ротора цього поля через указану поверхню.

Зауваження 1. Розглянемо довільний одиничний вектор \vec{n} , що виходить з деякої точки M , і оточимо цю точку плоскою поверхнею $\Delta\sigma$, перпендикулярною до вектора \vec{n} і обмеженою замкненим контуром ΔL . За формулою Стокса одержимо

$$\oint_{\Delta L} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Delta\sigma} \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

До правої частини застосуємо теорему про середнє значення, маємо

$$\oint_{\Delta L} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \text{rot}\vec{F}(M_*) \cdot \vec{n} \Delta\sigma = n p_{\vec{n}} \text{rot}\vec{F}(M_*) \cdot \Delta\sigma.$$

Розділивши рівність на $\Delta\sigma$ і стягуючи $\Delta\sigma$ до даної точки M , тобто переходячи до границі при $\Delta\sigma \rightarrow 0$ (при цьому $M_* \rightarrow M$ і $\Delta L \rightarrow 0$), отримаємо проекцію ротора на довільну вісь

$$C_{\vec{n}} = n p_{\vec{n}} \text{rot}\vec{F}(M) = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta L} \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta\sigma}.$$

Таким чином ротор $\text{rot}\vec{F}$ не залежить від вибору системи координат (є інваріантною векторною характеристикою поля).

Зауваження 2 Коли векторне поле безвихрове, тобто

$\text{rot}\vec{F} = 0$, то для довільного замкненого контура L , який цілком лежить у цьому полі, за формулою Стокса маємо

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_{\sigma^+} \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0.$$

Це означає, що безвихрове поле є потенціальним. Навпаки, якщо поле потенціальне, тобто для довільного замкненого контуру L $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$, то за формулою Стокса маємо

$$\iint_{\sigma^+} \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0.$$

звідки $\text{rot}\vec{F} = 0$. Це означає, що потенціальне поле є безвихровим.

Зауваження 3 Із формули Стокса випливає, що *потік вихору векторного поля \vec{F} не залежить від виду поверхні σ , що натягнута на замкнений контур L .*

Отже, *потік вихору векторного поля \vec{F} через замкнену поверхню дорівнює нулю:*

$$\oiint_{\sigma^+} \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0.$$

Приклад 12.1 Обчислити потік ротора векторного поля $\vec{F} = (y + xz)\vec{i} + (x + yz)\vec{j} + xyz\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ поверхні σ : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($z \geq 0$), відповідний вектор нормалі \vec{n} якої утворює з віссю Oz гострий кут.

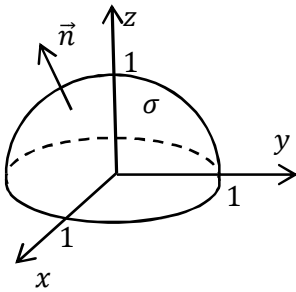


Рисунок 12.2

Розв'язання. Поверхня σ є півсферою одиничного радіуса з центром у початку координат (рис. 12.2), обмеженою замкненою лінією L – колом $x^2 + y^2 = 1$ в площині Oxy . За формулою Стокса

$$\Pi = \iint_{\sigma^+} \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \oint_L \vec{F} \, d\vec{l} =$$

$$\oint_L (y + xz)dx + (x + yz)dy + xyzdz =$$

Далі врахуємо, що L лежить у площині $z = 0$, і перейдемо до параметричних рівнянь

$$= \left| \begin{array}{l} x = \cos t; \quad y = \sin t; \quad z = 0; \quad dx = -\sin t \, dt; \\ \quad \quad \quad dy = \cos t \, dt; \quad dz = 0; \quad 0 \leq t \leq 2\pi \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t(-\sin t)dt + \cos t \cos t \, dt) = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos 2t \, dt = \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Формула Остроградського-Гаусса

Розглянемо просторове тіло V , обмежене замкненою поверхнею σ (рис. 12.3). Проекцію тіла на площину Oxy

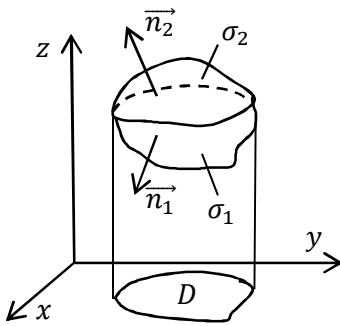


Рисунок 12.3

позначимо через D . Нехай лінія L на поверхні тіла, що проектується в межу області D , поділяє поверхню σ на дві правильні в напрямі осі Oz частини σ_1 та σ_2 , які описуються явно відповідно рівняннями $z = f_1(x, y)$ і $z = f_2(x, y)$. Окрім того, виділимо зовнішню сторону σ^+ поверхні, якій відповідає одиничний вектор нормалі \vec{n} . Нехай у просторі задано векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Обчислимо потрібний інтеграл

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dV = \iiint_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \\ &= \iint_D dx dy \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz = \iint_D \left(R(x, y, z) \Big|_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \right) dx dy = \\ &= \iint_D (R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y))) dx dy. \end{aligned}$$

Далі перетворимо одержані одержані подвійні інтеграли в поверхневі

$$\iint_{\sigma_2^+} R(x, y, z) dx dy + \iint_{\sigma_1^+} R(x, y, z) dx dy = \oiint_{\sigma^+} R(x, y, z) dx dy.$$

Таким чином

$$\iiint_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \oiint_{\sigma^+} R(x, y, z) dx dy.$$

Аналогічно можна обчислити

$$\iiint_V \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} dx dy dz = \oiint_{\sigma^+} Q(x, y, z) dx dz;$$

$$\iiint_V \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz = \oiint_{\sigma^+} P(x, y, z) dy dz.$$

Склавши ці три рівності, маємо **формулу Остроградського - Гаусса** в координатній формі

$$\oiint_{\sigma^+} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

або у векторній формі

$$\oiint_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV.$$

Отже, справедлива **теорема Остроградського-Гаусса** (зв'язок між поверхневим і потрійним інтегралами):

Теорема. Потік векторного поля \vec{F} через зовнішню сторону σ^+ замкненої поверхні σ дорівнює потрійному інтегралу за об'ємом V , обмеженим цією поверхнею, від дивергенції $\operatorname{div} \vec{F}$ поля.

Приклад 12.2 Обчислити потік просторового векторного поля $\vec{F} = (x^3 - yz)\vec{i} + (y^3 + 2x)\vec{j} + xz^2\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ повної поверхні σ конуса $V: z^2 = x^2 + y^2, z = 1$.

Розв'язання. Оскільки поверхня σ (рис. 12.4) замкнена, то для обчислення потоку можна застосувати формулу Остроградського-Гаусса.

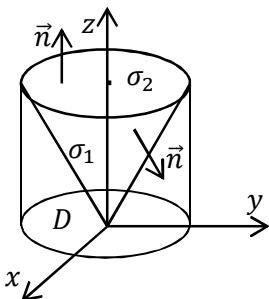


Рисунок 12.4

Проекцією конуса V на площину Oxy є круг D радіуса $R = 1$ з центром у початку координат. Бокова поверхня конуса σ_1 задається явно рівнянням $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, а поверхня основи σ_2 задається явно рівнянням $z = 1$. Знайдемо дивергенцію

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - yz) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3 + 2x) + \frac{\partial}{\partial z}(xz^2) = \\ &= 3x^2 + 3y^2 + 2xz. \end{aligned}$$

$$\Pi = \oiint_{\sigma^+} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV =$$

$$= \iiint_V (3x^2 + 3y^2 + 2xz) dx dy dz =$$

Для обчислення потрійного інтеграла перейдемо до циліндричних координат

$$= \left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi; y = \rho \sin \varphi; z = z; x^2 + y^2 = \rho^2; \\ \sigma_1: z = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho; \sigma_2: z = 1; dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz \end{array} \right| =$$

$$= \iiint_V (3\rho^2 + 2\rho \cos \varphi \cdot z) \rho d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho}^1 (3\rho^2 + 2\rho \cos \varphi \cdot z) dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (3\rho^2 z + \rho \cos \varphi \cdot z^2) \Big|_{\rho}^1 \rho d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (3\rho^3 - 3\rho^4 + \rho^2 \cos \varphi - \rho^4 \cos \varphi) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3\rho^4}{4} - \frac{3\rho^5}{5} + \frac{\rho^3}{3} \cos \varphi - \frac{\rho^5}{5} \cos \varphi \right) \Big|_0^1 d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{20} + \frac{2}{15} \cos \varphi \right) d\varphi = \left(\frac{3}{20} \varphi + \frac{2}{15} \sin \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{10}.$$

ЛЕКЦІЯ 13

ЧИСЛОВІ РЯДИ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ. ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ. ДОСТАТНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ЗНАКОДОДАТНИХ РЯДІВ

Числові ряди. Основні поняття

Нехай дано нескінчену числову послідовність $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$

Визначення. Вираз

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

*називається **числовим рядом**, а $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ — членами ряду, причому n -й член u_n також має назву загального члена ряду.*

Ряд вважається заданим, якщо відомо правило, за яким для будь-якого номера n можна записати відповідний член ряду. Найчастіше, загальний член ряду задається формулою $u_n = f(n)$, завдяки якій можна записати будь який член ряду. Наприклад, якщо $u_n = 2^n$, то маємо

$$2 + 4 + 8 + \dots + 2^n + \dots$$

Нехай задано ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Знайдемо суму n перших його членів, що має назву n -ї часткової суми ряду S_n :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Утворимо послідовність часткових сум ряду:

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1, \\ S_2 &= u_1 + u_2, \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

З необмеженим збільшенням числа n в сумі S_n зростає кількість доданків.

Визначення. Якщо при $n \rightarrow \infty$ існує границя послідовності часткових сум членів даного ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

то ряд називається **збіжним**, а число S — його сумою. Якщо послідовність S_n не прямує до границі, то ряд називають **розбіжним**.

Ряд може бути розбіжним в двох випадках:

- 1) якщо послідовність S_n прямує до нескінченності;
- 2) якщо послідовність S_n коливається.

Розглянемо суму членів нескінченної **геометричної прогресії**

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (13.1)$$

Сума n перших членів прогресії дорівнює

$$S_n = a \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Якщо $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, а тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a}{q - 1}.$$

А отже, при $|q| < 1$ нескінченна геометрична прогресія утворює ряд що збігається, сума якого дорівнює

$$S_n = \frac{a}{q - 1}.$$

Якщо $|q| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, а тому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, тобто ряд розбігається.

Нехай $q = 1$. Ряд має вигляд $a + a + \dots + a + \dots$ і тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$. Тому ряд розбігається.

Якщо $q = -1$, то ряд має вигляд

$$a - a + \dots + (-1)^{n-1}a + \dots$$

У цьому випадку маємо коливаючу послідовність, що не прямує ні до якої границі, тому такий ряд розбігається.

Таким чином, *ряд геометричної прогресії збігається при $|q| < 1$ і розбігається при $|q| \geq 1$.*

Розглянемо ряд, що збігається

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Різниця між сумою ряду та його n -ю частковою сумою

називається n -м залишком ряду:

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

Початковий ряд збігається, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, а отже абсолютна величина залишку

$$|r_n| = |S - S_n|$$

При розгляді числових рядів розв'язують дві основні задачі:

- 1) дослідити ряд на збіжність;
- 2) знайти суму збіжного ряду.

Приклад 13.1 Користуючись означенням, дослідити ряд на збіжність. Для збіжного ряду вказати його суму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)(5n+3)}$$

Розв'язання. Розкладемо загальний член ряду на найпростіші дроби:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{(5n-2)(5n+3)} = \frac{A}{5n-2} + \frac{B}{5n+3} = \\ &= \left| \begin{array}{l} A(5n+3) + B(5n-2) = 1; \\ n = -\frac{3}{5}: 5A = 1; A = \frac{1}{5} \\ n = \frac{2}{5}: -5B = 1; B = -\frac{1}{5} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5n+3} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3} \right). \end{aligned}$$

Тоді часткову суму S_n можна подати у замкненій формі,

де кількість доданків не залежить від числа n :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{18} + \dots - \frac{1}{5n+3} \right) = \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3} \right). \end{aligned}$$

Знайдемо границю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5n+3} \right) = \frac{1}{15}.$$

Отже, ряд збігається і його сума $S = \frac{1}{5}$.

Властивості числових рядів

1) *Збіжність або розбіжність ряду не порушиться, якщо змінити, відкинути чи додати скінченне число членів.*

Зокрема, ряд і будь-який його залишок збігаються чи розбігаються одночасно.

2) *Якщо ряд*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

збігається і має суму S , то ряд, отриманий з добутку всіх членів даного ряду на одне і те ж число λ :

$$\lambda u_1 + \lambda u_2 + \dots + \lambda u_n + \dots$$

також збігається, і має суму λS .

3) *Якщо збігаються ряди*

$$S' = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

$$S'' = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

то ряд, отриманий додаванням (відніманням) відповідних членів даних рядів:

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) \dots + (u_n \pm v_n) + \dots$$

також збігається, і його сума дорівнює $S' \pm S''$

4) Якщо ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

збігається, то довільний ряд, отриманий з даного групуванням його членів, що не змінює

Теорема (необхідна ознака збіжності). Якщо ряд збігається, то його загальний член u_n прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Доведення. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, де S – сума ряду (стала величина). Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$, бо при $n \rightarrow \infty$ і $n-1 \rightarrow \infty$. Віднімаючи з першої рівності другу, дістанемо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0.$$

Але $S_n - S_{n-1} = u_n$. Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Наслідок (достатня ознака розбіжності). Якщо границя загального члена u_n при $n \rightarrow \infty$ відмінна від нуля, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

Приклад 13.2 Дослідити ряд на збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+5}$$

Розв'язання. Знайдемо границю n -го члена u_n при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+5} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(2 + \frac{5}{n} \right)} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

За достатньою ознакою розбіжності ряд розбігається.

Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів

Числовий ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

називається **знакододатним**, якщо всі його члени – невід'ємні числа:

$$u_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$$

Послідовність часткових сум знакододатного ряду є зростаючою. Згадуючи, що обмежена монотонна змінна має границю, дістаємо **необхідну і достатню умову збіжності знакододатного ряду**: **знакододатний ряд збігається, якщо**

послідовність його часткових сум обмежена зверху, і розбігається в протилежному випадку.

Ознаки порівняння

При застосуванні ознак порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1), що досліджується на збіжність, порівнюється з **еталонним рядом** $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ (2), про який відомо збігається він чи розбігається.

За еталонні ряди часто приймають:

а) **узагальнений гармонічний ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k},$$

що збігається, коли $k > 1$, і розбігається при $k \geq 1$;

б) **геометричний ряд** (ряд геометричної прогресії)

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n,$$

що збігається при $q < 1$ і розбігається при $q \geq 1$.

Теорема 1 (перша ознака порівняння).

а) Нехай маємо збіжний еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причому $u_n \leq v_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ теж збігається.

(Якщо $u_n > v_n$, то жодних висновків робити не можна).

б) Нехай маємо розбіжний еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причому $u_n \geq v_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ теж

розбігається.

(Якщо $u_n < v_n$, то ніяких висновків робити не можна).

Таким чином, з розбіжним рядом порівнюємо “у бік більше”; а зі збіжним рядом – “у бік менше”.

Теорема 2 (друга ознака порівняння). Якщо існує скінченна, відмінна від нуля границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = C, \quad (0 < C < \infty)$$

відношення загальних членів двох знакододатних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, то обидва ряди поведуть себе однаково щодо збіжності: одночасно збігаються чи розбігаються.

Приклад 13.3 За допомогою основної ознаки порівняння дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \ln n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{n^2 - 2n + 4}.$$

Розв’язання. а) Оберемо для порівняння еталонний ряд геометричної прогресії

$$v_n = \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

зі знаменником $q = \frac{1}{3} < 1$, а тому даний ряд збігається.

$$u_n = \frac{1}{3^n \ln n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3^n \ln n}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

тому досліджуваний ряд також збігається.

$$\text{б) } u_n = \frac{\sqrt{n^3}}{n^2 - 2n + 4} = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right)};$$

оберемо за еталонний – узагальнений гармонійний ряд $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; $k = \frac{1}{2} < 1$, еталонний ряд розбігається.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right)}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right)} = 1,$$

тому досліджуваний ряд розбігається.

ЛЕКЦІЯ 14

ОЗНАКА ДАЛАМБЕРА. РАДИКАЛЬНА ТА ІНТЕГРАЛЬНА ОЗНАКИ КОШІ. ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ. ОЗНАКА ЛЕЙБНИЦЯ. АБСОЛЮТНА Й УМОВНА ЗБІЖНІСТЬ

Ознака Даламбера

Теорема (ознака Даламбера). Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя відношення наступного члена до попереднього,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = C$$

то

а) при $C < 1$ ряд збігається;

б) при $C > 1$ ряд розбігається;

в) при $C = 1$ не можна зробити висновок, збігається ряд чи розбігається.

Доведення. а) Нехай $C < 1$. Візьмемо число q , що задовольняє нерівності $C < q < 1$. Для відношення $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ з означення границі впливає, що існує такий номер N , що для всіх $n \geq N$ буде справджуватися умова $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$. Таким чином, для $n \geq N$ маємо:

$$u_{N+1} < qu_N, \quad u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2u_N,$$

$$u_{N+3} < qu_{N+2} < q^2u_{N+1} < q^3u_N, \dots$$

Розглянемо два ряди

$$u_1 + u_2 + \dots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots;$$

$$u_N + qu_N + q^2u_N + q^3u_N + \dots,$$

де другий збігається як геометричний ряд зі знаменником $q < 1$.

Члени першого ряду не перевищують відповідних членів другого ряду. Тому за основною ознакою порівняння перший ряд теж збігається.

б) Нехай $C > 1$. Тоді для відношення $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ з означення границі випливає, що існує такий номер N , що для всіх $n \geq N$ буде справджуватися умова $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Звідси $u_{n+1} > u_n$ для всіх $n \geq N$. Це означає, що члени ряду зростають, починаючи з номера $N + 1$. Тому загальний член ряду не прямує до нуля $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$. За достатньою ознакою розбіжності даний ряд розбігається.

Приклад 14.1 Дослідити за ознакою Даламбера збіжність ряду:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}.$$

Розв'язання.

а) за n -м членом ряду, знаходимо наступний $(n+1)$ -й член:

$$u_n = \frac{3^n}{2^n(2n+1)}, \quad u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}(2(n+1)+1)} =$$

$$= \frac{3^n \cdot 3}{2^n \cdot 2 \cdot (2n+3)}.$$

Знайдемо границю відношення u_{n+1} до u_n при необмеженому зростанні n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot 2^n \cdot (2n+1)}{2^n \cdot 2 \cdot (2n+3) \cdot 3^n} =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

Так як $n \rightarrow \infty$ і максимальна степінь чисельника дорівнює максимальній степені знаменника, то границя дорівнює відношенню коефіцієнтів, при старших степенях n , отже маємо: $C = \frac{3}{2} > 1$ тому даний ряд розбігається.

$$\text{б) } u_n = \frac{n!}{5^n}; \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} = \frac{n!(n+1)}{5^n \cdot 5}.$$

Знайдемо границю відношення u_{n+1} до u_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1) \cdot 5^n}{5^n \cdot 5 \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5} = \infty.$$

$C = \infty$, тому робимо висновок, що даний ряд розбігається.

$$\begin{aligned} \text{в) } u_n &= \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}; & u_{n+1} &= \frac{7^{3(n+1)}}{(2(n+1)-5)!} = \frac{7^{3n} \cdot 7^3}{(2n-3)!} = \\ & & &= \frac{7^{3n} \cdot 7^3}{(2n-5)! \cdot (2n-4) \cdot (2n-3)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{3n} \cdot 7^3 \cdot (2n-5)!}{(2n-5)! \cdot (2n-4) \cdot (2n-3) \cdot 7^{3n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^3}{(2n-4) \cdot (2n-3)} = 0. \end{aligned}$$

$C = 0 < 1$, тому робимо висновок, що даний ряд збігається.

Радикальна ознака Коші

Теорема (радикальна ознака Коші). Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = C,$$

то

а) при $C < 1$ ряд збігається;

б) при $C > 1$ ряд розбігається;

в) при $C = 1$ не можна зробити висновок, збігається ряд чи розбігається.

Радикальну ознаку зручно застосовувати, коли загальний член ряду має в своєму складі показникові функції від n , з яких досить просто добувається корінь n -го степеня.

Приклад 14.2 Дослідити за радикальною ознакою Коші збіжність ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 1}{4n^2 + 5} \right)^n ; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \right)^{n^2} .$$

Розв'язання.

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n^2 + 1}{4n^2 + 5} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{4n^2 + 5} = \frac{3}{4},$$

$C = \frac{3}{4} < 1$ – ряд збігається.

$$\begin{aligned} 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{2n-1} \right)^{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n}{2n-1} - 1 \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n - (2n-1)}{2n-1} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n-1} \right)^{\frac{2n-1}{1} \cdot \frac{1}{2n-1} \cdot n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}. \end{aligned}$$

$C = \sqrt{e} > 1$ – ряд розбігається.

(При обчисленні границі ми скористалися другою чудовою границею).

Інтегральна ознака Коші

Ця ознака базується на порівнянні числового ряду з

невласним інтегралом.

Теорема (інтегральна ознака Коші). Якщо члени знакододатного ряду u_1, u_2, u_3, \dots , утворюють спадну послідовність (u_n) , і на проміжку $[a, b]$ існує спадна неперервна невід'ємна функція така, що при натуральних значеннях аргументу співпадає з членами ряду u_1, u_2, u_3, \dots , тоді вказаний ряд і невластний інтеграл

ведуть себе однаково: збігаються чи розбігаються одночасно.

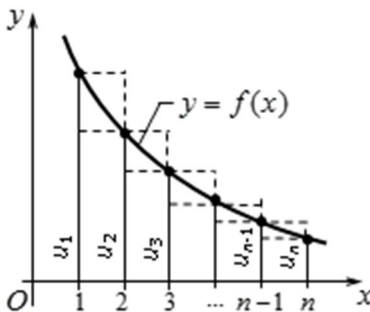


Рисунок 14.1

Побудуємо на цьому рисунку також графік відповідної функції $y = f(x)$. Площа відповідної криволінійної трапеції, що спирається на відрізок $[1, n]$, дорівнює визначеному інтегралу

Доведення. Зобразимо даний ряд геометрично точками на координатній площині, відкладаючи на осі номери $1, 2, \dots, n$, а на осі y — відповідні значення його членів $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ (рис. 14.1).

$$I_n = \int_1^n f(x) dx.$$

Впишемо в цю трапецію і опишемо навколо неї ступінчасті фігури, утворені з прямокутників, основами яких є проміжки $[1, 2]$, $[2, 3]$, ..., а висоти дорівнюють u_1, u_2, \dots, u_n .

Порівнюючи площі цих фігур, дістанемо:

$$u_2 + u_3 \dots + u_n < I_n < u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

або $S_n - u_1 < I_n < S_n - u_n$, де $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ - часткова сума ряду. Звідси

$$S_n < u_1 + I_n \text{ і } S_n > u_n + I_n.$$

Нехай інтеграл $\int_1^\infty f(x) dx$ є збіжним. Його значення

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n.$$

Тоді $S_n < u_1 + I$.

Отже, зростаюча послідовність часткових сум S_n обмежена зверху і тому має границю. Тобто, ряд $\sum_{n=1}^\infty u_n$ збігається.

Нехай тепер інтеграл $\int_1^\infty f(x) dx$ є розбіжним. У даному випадку це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \infty$. Тоді, переходячи у нерівності $S_n > u_n + I_n$ до границі при $n \rightarrow \infty$, отримаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty.$$

Отже, послідовність часткових сум S_n необмежена і має

нескінченну границю. Тобто, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається.

Приклад 14.3 Дослідити за інтегральною ознакою Коші збіжність ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 1}; \quad 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

Розв'язання. Замінімо у заданому виразі загального члену ряду $u_n = f(n)$ номер n неперервною змінною x і переконаємося, що функція $f(x)$ є неперервною і спадаючою на нескінченному інтервалі зміни x . Потім знаходимо невластний інтеграл від функції $f(x)$ з нескінченною верхньою границею.

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= \frac{2x}{x^2 + 1}; & \int_1^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \\ & & &= \left[\begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \\ t_H = 2; t_B = \infty \end{array} \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_2^{\infty} \frac{dt}{t} = \\ & & &= \lim_{N \rightarrow \infty} \ln t \Big|_2^N = \ln \infty - \ln 2 = \infty. \end{aligned}$$

Інтеграл розбігається, а отже розбігається і ряд.

$$2) f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}; \quad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_2^N \frac{dx}{x \ln^2 x} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \\ t_H = \ln 2; t_B = \infty \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^N \frac{dt}{t^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_{\ln 2}^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \Big|_{\ln 2}^{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Інтеграл збігається, тому збігається і ряд.

Знакозмінні ряди. Ознака Лейбниця

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що містить нескінченну кількість членів обох знаків $+$ і $-$, називається *знакозмінним*.

Знакозмінний ряд, два довільні сусідні члени якого мають різні знаки, називається *знакопечерговим* або *рядом Лейбниця*. Його вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots,$$

де $a_n = |u_n| \geq 0$.

Теорема (достатня ознака Лейбниця). Якщо для знакопечергового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n \geq 0$ виконуються дві умови:

$$1) a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

тобто послідовність, складена з модулів членів ряду, є монотонно спадною і прямує до нуля, тоді цей ряд є збіжним, причому його сума S додатна і не перевищує модуля першого члена: $0 < S \leq a_1$.

Доведення. Розглянемо часткову суму з парним числом членів:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} = \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}). \end{aligned}$$

Кожна різниця в дужках додатна, оскільки $a_n > a_{n+1}$. Тому $S_{2n} > 0$ і послідовність зростаюча.

Крім того,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \\ &S_{2n} < a_1 \end{aligned}$$

оскільки сума елементів в кожній дужці знову-таки додатна. Тобто послідовність обмежена зверху.

Отже, послідовність монотонно зростає і обмежена, тому має границю. Нехай

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S, \quad 0 < S < a_1.$$

Обчислимо границю сум з непарними номерами:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = S + 0 = S.$$

Таким чином, часткові суми як з парними, так і з

непарними номерами мають спільну границю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S$$

Звідси випливає, що вся послідовність часткових сум також має, причому ту ж саму границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$, Тобто ряд збігається. При цьому $0 < S < a_1$.

Теорема (достатня ознака збіжності знакозмінного ряду). Якщо для знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений з модулів його членів, то даний ряд також збігається.

Доведення. Нехай $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ і $S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^n |u_k|$ – часткові суми відповідно даного ряду і ряду з абсолютних величин його членів.

Позначимо через $S_n^{(+)}$ і $S_n^{(-)}$ суми модулів відповідно всіх невід’ємних і всіх від’ємних членів серед перших n членів даного ряду. Тоді

$$S_n = S_n^{(+)} - S_n^{(-)} \text{ і } S_n^{(m)} = S_n^{(+)} + S_n^{(-)}.$$

За умовою ряд з модулів збігається, тобто існує скінченна границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(m)} = S^{(m)}, \quad S^{(m)} > 0.$$

$S_n^{(+)}$ і $S_n^{(-)}$ – додатні зростаючі величини, що менші $S^{(m)}$. Значить, вони мають границі:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(+)} = S^{(+)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(-)} = S^{(-)}.$$

Тоді існує скінченна границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n^{(+)} - S_n^{(-)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(+)} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(-)} = S^{(+)} - S^{(-)}$$

Отже, даний знакозмінний ряд збігається.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений з модулів його членів, збігається, та **умовно збіжним**, коли сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ з модулів його членів розбігається.

З попередньої ознаки випливає, що *довільний абсолютно збіжний ряд є збіжним*.

Дослідження знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ на збіжність розпочинаємо з виявлення абсолютної збіжності як більш “сильної”, застосовуючи відомі ознаки збіжності знакододатних рядів до ряду з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Якщо ряд з модулів збігається, то сам знакозмінний ряд абсолютно збіжний, і дослідження завершене. Якщо ж ряд з модулів розбігається, то треба провести дослідження безпосередньо самого знакозмінного ряду на умовну збіжність.

Приклад 14.4 Дослідити на абсолютну й умовну збіжність дані знакозмінні ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}.$$

Розв'язання.

1) Дослідимо ряд, складений з абсолютних значень членів даного ряду. Застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x-1} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\ln(2x-1) \right) \Big|_1^N = \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \ln(2N-1) - 1 \right) = \infty,\end{aligned}$$

невласний інтеграл розбігається, тому необхідно дослідити на умовну збіжність за ознакою Лейбниця

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0,$$

отже даний ряд збігається, тому робимо висновок, що ряд збігається умовно.

$$2) u_n = \frac{1}{(2n-1)!}.$$

Досліджуємо за ознакою Даламбера.

Знайдемо

$$u_{n+1} = \frac{1}{(2(n+1)-1)!} = \frac{1}{(2n+1)!} = \frac{1}{(2n-1)! 2n(2n+1)};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!}{(2n-1)! 2n(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 0,$$

$$(C < 1).$$

Даний ряд збігається абсолютно.

ЛЕКЦІЯ 15

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Збіжність функціональних рядів

Функціональним називається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, членами якого є функції $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, визначені на деякій непорожній множині D зміни аргументу x .

Якщо аргументу x надати деякого значення x_0 з **області визначення** D ряду, то дістанемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, що може збігатися чи розбігатися. Відповідно x_0 називається **точкою збіжності** чи **точкою розбіжності** функціонального ряду.

Множина D_S всіх точок збіжності називається **областю збіжності** функціонального ряду.

В області збіжності ряду його сума S є функцією x : $S = S(x)$. Записують $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ і кажуть, що **функція $S(x)$ розвивається (розкладається) в ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$** .

Для залишку $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ збіжного функціонального ряду виконується умова $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається **абсолютно збіжним** в деякій області D_α , якщо в довільній точці x_0 цієї області абсолютно збігається відповідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Теорема Вейерштрасса (достатня ознака рівномірної збіжності функціонального ряду). Якщо для всіх значень x з деякого відрізка $[a, b]$ члени функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

за абсолютною величиною не перевищують відповідних членів збіжного знакододатного числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то функціональний ряд збігається абсолютно і рівномірно на цьому відрізьку $[a, b]$.

Степеневі ряди

1 Збіжність степеневих рядів

Найбільш важливим для прикладних задач окремим випадком функціональних рядів є степеневі ряди.

Степеневим рядом за степенями двочлена $x - x_0$ називається функціональний ряд вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

де x – дійсна змінна (*аргумент*); x_0 – дійсне фіксоване число; $a_0, a_1, \dots, a_n \dots$ – дійсні сталі (*коефіцієнти*).

При $x_0 = 0$ одержується більш зручний за формою степеневий ряд за степенями x

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

До цього спрощеного вигляду довільний степеневий ряд зводиться лінійною заміною $x - x_0 = t$.

Очевидно, що довільний степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ збіжний в точці $x = x_0$ до суми $S = a_0$. Тому область збіжності степенєвого ряду завжди містить принаймні одну точку $x = x_0$.

Теорема Абеля.

а) Якщо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (*)$$

збігається при деякому $x = x_1 \neq 0$, то він абсолютно збігається при всіх значеннях x , для яких $|x| < |x_1|$;

б) Якщо степеневий ряд (*) розбігається при деякому $x = x_2$, то він розбігається при всіх значеннях x , для яких $|x| > |x_2|$.

Доведення.

а) Оскільки за умовою ряд (*) збіжний в точці $x = x_1 \neq 0$, то збіжним є числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$. За необхідною ознакою $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_1^n = 0$. Звідси випливає, що послідовність $\{a_n x_1^n\}$ обмежена, тобто існує таке додатне число M що

$$|a_n x_1^n| \leq M, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Враховуючи, що для $|x| < |x_1|$ величина

$$q = \left| \frac{x}{x_1} \right| < 1,$$

маємо:

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq M q^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

Тобто модуль кожного члена степеневого ряду не перевищує відповідного члена збіжного геометричного ряду

$\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ зі знаменником $|q| < 1$. Тоді за основною ознакою порівняння при $|x| < |x_1|$ цей ряд абсолютно збіжний.

б) Нехай тепер існує таке значення $x = x_2$, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбіжний. Доведемо методом від супротивного, що тоді цей ряд буде розбіжним і для всіх x , що задовольняють нерівність $|x| > |x_2|$. Справді, припускаючи, що ряд збіжний в якій-небудь точці x_k , яка задовольняє цю нерівність, за доведеним в пункті а) дістанемо, що він повинен бути збіжним і в точці x_2 , бо $|x_2| < |x_k|$. Але це суперечить умові, що в точці x_2 ряд розбігається.

Теорема Абеля дозволяє розділити множини точок збіжності та розбіжності степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Якщо x_1 – точка збіжності ряду, то весь інтервал $(-|x_1|; |x_1|)$ заповнено точками абсолютної збіжності цього ряду. Якщо x_2 – точка розбіжності ряду, то на інтервали $(-\infty; |x_2|) \cup (|x_2|; \infty)$ складаються з точок розбіжності цього ряду.

Існує таке невід’ємне число R , яке називається **радіусом збіжності** степеневому ряду, що при $|x| < R$ ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ – розбіжний (рис. 15.1). Симетричний інтервал $(-R; R)$ називається **інтервалом збіжності** степеневому ряду. Його довжина дорівнює подвоєному радіусу.

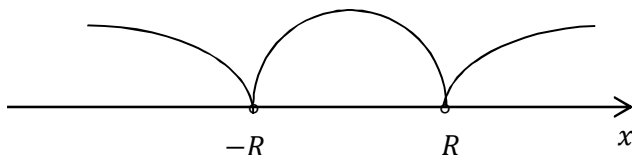


Рисунок 15.1

Зауваження 1. На кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x = \pm R$, питання про збіжність розв'язується окремо для кожного конкретного ряду. Таким чином, область збіжності степеневому ряду може відрізнятись від інтервалу $(-R; R)$ не більше ніж двома точками $x = \pm R$.

Зауваження 2. У деяких рядів інтервал збіжності вироджується в точку $R = 0$, у інших – інтервалом збіжності є вся числова пряма $R \in (-\infty; \infty)$.

Зауваження 3. Інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ за степенями двочлена $x - x_0$ знаходять з нерівності

$$|x - x_0| < R,$$

тобто він має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$ і є симетричним відносно x_0 .

Зауваження 4. Інтервал збіжності степеневому ряду можна знайти безпосередньо за ознакою Даламбера або за радикальною ознакою Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів даного ряду.

Приклад 15.1 Визначити інтервали збіжності степеневих рядів:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n-1} \sqrt{n+1}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{3n}}{n^2}.$$

Розв'язання.

1) За відомим загальним членом ряду u_n , знайдемо u_{n+1} :

$$u_n = \frac{x^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}}; \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{2^n\sqrt{n+2}}.$$

Далі, за ознакою Даламбера, знаходимо границю

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} 2^{n-1} \sqrt{n+1}}{2^n \sqrt{n+2} x^n} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{2} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \right| = \frac{|x|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{|x|}{2}. \end{aligned}$$

З'ясуємо, при яких значеннях x ця границя буде менше одиниці, тобто

$$\frac{|x|}{2} < 1;$$

$$-1 < \frac{x}{2} < 1;$$

$$-2 < x < 2.$$

Згідно ознаки Даламбера, при будь-якому значенні x із знайденого інтервалу даний ряд збігається абсолютно, а при $|x| > 2$ розбігається. Граничні точки $x = \pm 2$ досліджуємо окремо.

При $x = -2$ отримуємо числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2)^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n 2^n}{2^{n-1}\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

який розбігається, що впливає із ознаки порівняння з узагальненим гармонійним рядом.

При $x = 2$ отримуємо знакозмінний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2^{n-1} \sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{\sqrt{n+1}},$$

котрий збігається за ознакою Лейбніца:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}} = 0$$

і не збігається абсолютно за ознакою порівняння (див. вище), а отже збігається умовно.

Отже, інтервал збіжності даного степеневого ряду є напіввідкритий інтервал: $-2 < x \leq 2$.

$$2) u_n = \frac{(x+5)^{3n}}{n^2}; \quad u_{n+1} = \frac{(x+5)^{3n+3}}{(n+1)^2};$$

$$\begin{aligned} C &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+5)^{3n+3} n^2}{(n+1)^2 (x+5)^{3n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+5)^3 n^2}{(n+1)^2} \right| = \\ &= |x+5|^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = |x+5|^3. \end{aligned}$$

Визначимо, при яких значеннях x ряд збігається:

$$|x+5|^3 < 1;$$

$$|x+5| < 1;$$

$$-1 < x + 5 < 1;$$

$$-6 < x < -4.$$

Граничні точки інтервалу досліджуємо окремо.

При $x = -6$ отримуємо знакозмінний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

який збігається абсолютно за ознакою Лейбніца.

При $x = -4$ отримуємо числовий ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Згідно з ознакою порівняння ряд збігається.

Інтервал збіжності ряду: $-6 \leq x \leq -4$.

2 Властивості степеневих рядів

Враховуючи властивості рівномірно збіжних рядів і теорему Абеля, сформулюємо *основні властивості степеневих рядів*.

1) *Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізку $[a, b]$, який цілком міститься в інтервалі збіжності $(-R; R)$.*

2) *Сума степеневого ряду $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ неперервна на інтервалі збіжності $(-R; R)$.*

3) Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку $[a, b]$, який належить інтервалу збіжності $(-R; R)$. Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності.

4) Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно диференціювати в інтервалі збіжності $(-R; R)$. Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності.

Ряди Тейлора і Маклорена

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі деякої точки x_0 і в цій точці нескінченне число разів диференційовна. Припустимо, що в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ функцію $f(x)$ можна подати у вигляді степеневого ряду

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \\ &= a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \end{aligned}$$

У цьому разі кажуть, що **функція $f(x)$ розвинена (розкладена) в степеневий ряд** в околі точки x_0 (за степенями двочлена $x - x_0$).

Знайдемо коефіцієнти цього ряду через значення самої функції $f(x)$ та її похідних у центрі розвинення x_0 . Для цього послідовно диференціюватимемо ряд і підставлятимемо в ліву та праву частини одержаних розкладів значення $x = x_0$, а потім розв'язуватимемо знайдені вирази відносно шуканих коефіцієнтів:

$$f(x_0) = a_0 = 1 \cdot a_0 = 0! \cdot a_0 \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{f(x_0)}{0!}};$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots$$

$$f'(x_0) = a_1 = 1 \cdot a_1 = 1! \cdot a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}};$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3a_4(x - x_0)^2 + \dots;$$

$$f''(x_0) = 2a_2 = 1 \cdot 2a_2 = 2! \cdot a_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}};$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x - x_0) + \dots;$$

$$f'''(x_0) = 3 \cdot 2a_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 = 3! a_3 \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}};$$

.....

Отже можемо записати за аналогією, що

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}$$

Підставляючи одержані значення коефіцієнтів, дістанемо **ряд Тейлора** для даної функції $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) +$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots$$

Якщо в ряді Тейлора покласти $x_0 = 0$, то отримаємо **ряд Маклорена** для даної функції $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n =$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Після розкладання даної функції $f(x)$ в її ряд Тейлора необхідно знайти його область збіжності та встановити, чи збігається він саме до цієї функції $f(x)$.

Наведемо без доведення декілька важливих теорем про єдиність, збіжність і умови існування ряду Тейлора.

Теорема 1 Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ можна подати у вигляді ряду $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ за степенями двочлена $x - x_0$, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції, тобто

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Теорема 2 Для того, щоб ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ збігався до самої функції $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$, тобто $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$, необхідно і достатньо, щоб ця функція мала похідні всіх порядків на цьому інтервалі і залишковий член

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1$$

її формули Тейлора прямував до нуля при $n \rightarrow \infty$ для всіх x з цього інтервалу, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Теорема 3 Якщо функція $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ має похідні всіх порядків та існує число $M > 0$ таке, що $|f^{(n)}(x)| \leq M$, для всіх $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$, то цю функцію можна розкласти в ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Розклад функцій у ряди Тейлора і Маклорена

Розклад функцій в степеневі ряди в загальному випадку ґрунтується на використанні рядів Тейлора чи Маклорена.

За **способом безпосередньої побудови** для даної функції $f(x)$ здійснюють наступне:

- а) знаходять похідні $f'(x)$, $f''(x)$..., $f^{(n)}(x)$, ...;
- б) обчислюють значення похідних у заданій точці $x = x_0$;
- в) записують розклад функцій в степеневі ряди

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n;$$

г) знаходять інтервал і область його збіжності.

Розклад деяких елементарних функцій в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty, \infty); \quad (1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (-\infty, \infty); \quad (2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (-\infty, \infty); \quad (3)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad (-1, 1); \quad (4)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1; 1]; \quad (5)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \quad [-1; 1); \quad (6)$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad (-1, 1); \quad (7)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad [-1, 1]; \quad (8)$$

Приклад 15.2 Розкласти функції в ряд Тейлора:

$$1) f(x) = \frac{1}{2x-1}, \text{ при } a = 2; \quad 2) f(x) = \ln(3x-1), \text{ при } a = 1.$$

Розв'язання. 1) Знайдемо похідні та обчислимо їх значення при $x = a$:

$$f(x) = \frac{1}{2x-1}, \quad f(2) = \frac{1}{3};$$

$$f'(x) = \frac{(-1)}{(2x-1)^2} \cdot 2, \quad f'(2) = \frac{(-1) \cdot 2}{3^2};$$

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{(-1)}{(2x-1)^4} \cdot 2(2x-1) \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 2^2}{(2x-1)^3},$$

$$f''(2) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 2^2}{3^3} = \frac{2! \cdot 2^2}{3^3};$$

$$f^{(3)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot \frac{(-1)}{(2x-1)^6} \cdot 3(2x-1)^2 \cdot 2 = \frac{(-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3}{(2x-1)^4},$$

$$f^{(3)}(2) = \frac{(-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3}{3^4} = \frac{(-1) \cdot 3! \cdot 2^3}{3^4};$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot 2^n}{(2x-1)^{n+1}}, \quad f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot 2^n}{3^{n+1}},$$

.....

Підставляючи отримані значення в ряд Тейлора, отримуємо:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{3} - \frac{1! \cdot 2}{1! \cdot 3^2} (x-2) + \frac{2! \cdot 2^2}{2! \cdot 3^3} (x-2)^2 - \frac{3! \cdot 2^3}{3! \cdot 3^4} (x-2)^3 + \dots \\
 &\quad + \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot 2^n}{n! \cdot 3^{n+1}} (x-2)^n + \dots = \\
 &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2}{3} (x-2) + \frac{2^2}{3^2} (x-2)^2 - \frac{2^3}{3^3} (x-2)^3 + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{3^n} (x-2)^n + \dots \right);
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot (x-2)^n}{3^n}.$$

Досліджуємо збіжність отриманого ряду за ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{2^n \cdot (x-2)^n}{3^n};$$

$$u_{n+1} = \frac{2^{n+1} \cdot (x-2)^{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2 \cdot 2^n \cdot (x-2)^n \cdot (x-2)}{3 \cdot 3^n};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2 \cdot 2^n \cdot (x-2)^n \cdot (x-2) \cdot 3^n}{3 \cdot 3^n \cdot 2^n \cdot (x-2)^n} \right| = \frac{2}{3} |x-2|.$$

Визначимо, при яких значеннях x ряд збігається:

$$\frac{2}{3} |x-2| < 1;$$

$$-1 < \frac{2}{3}(x - 2) < 1;$$

$$-\frac{3}{2} < x - 2 < \frac{3}{2};$$

$$\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}.$$

Граничні точки цього інтервалу дослідимо окремо.

При $x = \frac{1}{2}$ отримаємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot (-1)^n \cdot 3^n}{3^n 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

Отриманий ряд є розбіжним.

При $x = \frac{7}{2}$ отримаємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

Отриманий ряд розбігається.

Інтервал збіжності ряду: $\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$.

$$2) f(x) = \ln(4x - 1), \quad f(1) = \ln 3;$$

$$f'(x) = \frac{1}{4x - 1} \cdot 4, \quad f'(1) = \frac{1 \cdot 4}{3};$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(4x-1)^2} \cdot 4^2, \quad f''(1) = \frac{-1 \cdot 4^2}{3^2};$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot (4x-1)}{(4x-1)^4} \cdot 4^3 = \frac{2! \cdot 4^3}{(4x-1)^3}, \quad f^{(3)}(1) = \frac{2! \cdot 4^3}{3^3};$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot 4^n}{(4x-1)^n},$$

$$f^n(1) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot 4^n}{3^n};$$

.....

Підставимо отримані значення в ряд Тейлора

$$f(x) = \ln 3 + \frac{4}{3}(x-1) - \frac{1! \cdot 4^2}{2! \cdot 3^2}(x-1)^2 + \frac{2! \cdot 4^3}{3! \cdot 3^3}(x-1)^3 + \dots$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot 4^n}{n! \cdot 3^n}(x-1)^n + \dots =$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot 4^n}{n! \cdot 3^n}(x-1)^n;$$

$$f(x) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4^n}{n \cdot 3^n}(x-1)^n.$$

Дослідимо збіжність отриманого ряду за ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{4^n \cdot (x-1)^n}{n \cdot 3^n}; \quad u_{n+1} = \frac{4^{n+1} \cdot (x-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4^{n+1} \cdot (x-1)^{n+1} \cdot n \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot (n+1) \cdot 4^n \cdot (x-1)^n} \right| = \\ &= \frac{4}{3} |x-1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{4}{3} |x-1| \end{aligned}$$

Визначимо, при яких значеннях x ряд збігається:

$$\frac{4}{3} |x-1| < 1;$$

$$-1 < \frac{4}{3}(x-1) < 1;$$

$$\frac{1}{4} < x < \frac{7}{4}.$$

При $x = \frac{1}{4}$, отримуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

При $x = \frac{1}{4}$ ряд збігається умовно за ознакою Лейбніця.

При $x = \frac{7}{4}$, отримуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

отриманий ряд розбігається за ознакою порівняння.

Область збіжності ряду: $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right)$.

Приклад 15.3 Розкласти функції в ряд Маклорена, з'ясувати області збіжності отриманих рядів:

$$1) f(x) = x \cdot \sin 2x; \quad 2) f(x) = \frac{1}{x^2 + 2}.$$

Розв'язання.

1) Розкладемо $\sin 2x$ за формулою (2):

$$\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$x \cdot \sin 2x = x \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right)$$

$$f(x) = x \cdot \sin 2x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+1)!}$$

Досліджуємо збіжність отриманого ряду за ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+1)!},$$

$$u_{n+1} = \frac{2^{2n+3} x^{2n+4}}{(2n+3)!} = \frac{2^{2n+3} x^{2n+4}}{(2n+1)! \cdot (2n+2) \cdot (2n+3)}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{2n+3} x^{2n+4} \cdot (2n+1)!}{(2n+1)! \cdot (2n+2) \cdot (2n+3) \cdot 2^{2n+1} x^{2n+2}} \right| =$$

$$= 4x^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0,$$

отже, даний ряд збігається при $x \in (-\infty, \infty)$.

2) розкладемо в ряд Маклорена спочатку дріб $\frac{1}{x^2+2}$, замінивши x^2 на t :

$$f(t) = \frac{1}{t+2}, \quad f(0) = \frac{1}{2};$$

$$f'(t) = \frac{-1}{(t+2)^2}, \quad f'(0) = -1 \cdot \frac{1}{2^2};$$

$$f''(t) = \frac{1 \cdot 2 \cdot (t+2)}{(t+2)^4} = \frac{1 \cdot 2}{(t+2)^3}, \quad f''(0) = \frac{1 \cdot 2}{2^3};$$

$$f'''(t) = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3(t+2)^2}{(t+2)^6} = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3}{(t+2)^4}, \quad f'''(0) = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3}{2^4};$$

... ..

$$f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(t+2)^{n+1}}, \quad f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{2^{n+1}}.$$

Отриманні значення підставимо у формулу ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{x}{1!} + \frac{1 \cdot 2}{2^3} \cdot \frac{x^2}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n \cdot n!}{2^{n+1}} \cdot \frac{x^n}{n!} + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Досліджуємо збіжність отриманого ряду за ознакою Даламбера:

$$u_n = \frac{x^n}{2^{n+1}}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{2^{n+2}};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} \cdot 2^{n+1}}{2^{n+2} \cdot x^n} \right| = \frac{1}{2} \cdot |x| < 1;$$

$$-2 < x < 2.$$

При $x = -2$, отримуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-2)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n} \cdot 2^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$$

– ряд розбігається.

При $x = 2$, отримуємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \text{ – ряд розбігається.}$$

Область збіжності ряду $x \in (-2; 2)$.

Застосування степеневих рядів

Степеневі ряди застосовують до наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів, роз'язання диференційних рівнянь.

Приклад 15.4 Обчислити наближено зазначену величину з точністю до α , використавши розклад в степеневий ряд відповідно підібраної функції.

$$1) \sqrt[3]{500}, \alpha = 0,001; \quad 2) \cos 10^\circ, \alpha = 0,001.$$

Розв'язання. 1) Наближене обчислення зазначеної функції виконується за допомогою біноміального ряду.

Представимо дане число у вигляді, до якого можливо застосувати біноміальний ряд:

$$\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{1000 \cdot \frac{1}{2}} = 10 \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 10 \sqrt[3]{1 - \frac{1}{2}} = 10 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

В біноміальний ряд підставимо замість x величину $(-1/2)$, $m = 1/3$.

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2!} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!} \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)(\frac{1}{3}-3)}{4!} \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \\
& + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)(\frac{1}{3}-3)(\frac{1}{3}-4)}{5!} \left(-\frac{1}{2}\right)^5 + \\
& + \dots = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{5}{648} - \frac{5}{1944} - \frac{11}{11644} - \dots = \\
& = 1 - 0,1666666 - 0,0277777 - \\
& - 0,007716 - 0,002572 - 0,0009446 - \dots \approx 0,79396.
\end{aligned}$$

$$\sqrt[3]{500} \approx 10 \cdot 0,79396 \approx 7,9396.$$

2) Представимо аргумент функції косинус через радіанну міру кута:

$$x = 10^\circ = \frac{10 \cdot \pi}{180} = \frac{3,14159}{18} = 0,17453.$$

Для обчислення наближеного значення функції скористаємося формулою:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots ;$$

$$\cos 0,17453 = 1 - \frac{(0,17453)^2}{2!} + \frac{(0,17453)^4}{4!} - \frac{(0,17453)^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 - 0,01523 + 0,0000386 - \dots \approx 0,9848.$$

Приклад 15.6 Обчислити визначений інтеграл з точністю $\alpha = 0,0001$.

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx$$

Розв'язання. Даний інтеграл не можливо обчислити в елементарних функціях. Тому підінтегральну функцію необхідно розкласти в степеневий ряд і перевірити, чи належать границі інтегрування області збіжності цього ряду, якщо так, то наближене обчислення інтегралу можливе.

Розкладемо функцію $y = \sin(x^2)$ в степеневий ряд за формулою:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

замінивши в ній x на x^2 . Отримаємо

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \dots.$$

Знайдемо область збіжності отриманого степеневого ряду, застосовуючи ознаку Даламбера.

$$u_n = \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}; \quad u_{n+1} = \frac{x^{4n+6}}{(2n+3)!}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{4n+6}(2n+1)!}{(2n+3)!x^{4n+2}} \right| =$$

$$= x^4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = x^4 \cdot 0 = 0.$$

Область збіжності $(-\infty, \infty)$. Відрізок $[0,1]$ належить області збіжності. Таким чином,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin(x^2) dx &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots \right) dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + \dots \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \frac{1}{15 \cdot 7!} + \dots = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \dots \end{aligned}$$

Отримали знакозмінний числовий ряд. Остаток ряду не перевищує першого із відкинутих членів. У даному випадку достатньо взяти перші два члена, а

$$R_3 < \frac{1}{1320} < 8 \cdot 10^{-4}.$$

Тобто, вказана точність буде дотримуватись. Тому

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} \approx 0,3095.$$

Приклад 15.7 Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + x^2 y = 0$ у вигляді степеневого

ряду і частинне розв'язання, яке задовольняє початковим умовам: $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Розв'язання. Нехай степеневий ряд має вид

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Знайдемо y'' : $y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$; $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

Підставимо знайдені значення в дане рівняння:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Отриманий вираз дорівнює нулю, якщо суми коефіцієнтів при відповідних степенях дорівнюють нулю. Останній вираз перепишемо у вигляді:

$$2a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 \cdot x + (a_1 + 3 \cdot 4 \cdot a_4)x^2 + (a_2 + 4 \cdot 5 \cdot a_5)x^3 + \\ + (a_3 + 5 \cdot 6 \cdot a_6)x^4 + \dots + (a_n + (n+3)(n+4)a_{n+4})x^{n+2} + \dots = 0$$

Звідки випливає, що

$$a_2 = 0; a_3 = 0; a_0 + 3 \cdot 4 \cdot a_4 = 0; a_1 + 4 \cdot 5 \cdot a_5 = 0;$$

$$a_2 + 4 \cdot 5 \cdot a_5 = 0; \dots; a_n + (n+3)(n+4)a_{n+4} = 0.$$

Остання рівність дає рекурентне відношення:

$$a_{n+4} = -\frac{a_n}{(n+3)(n+4)}$$

яке дозволяє визначити всі коефіцієнти шуканого степеневого ряду. Рекурентне відношення має цикл $4k$. Таким чином, $a_{4k+2} = 0; a_{4k+3} = 0$;

$$a_{4k} = -\frac{a_{4(k-1)}}{(4k-1)4k}; \quad a_{4k+1} = -\frac{a_{4k-3}}{4k(4k+1)}$$

для всіх $k \geq 1$. Наприклад,

$$\begin{aligned} a_4 &= -\frac{a_0}{3 \cdot 4}, a_5 = -\frac{a_1}{4 \cdot 5}, a_6 = 0, a_7 = 0, a_8 = -\frac{a_4}{7 \cdot 8}, a_9 \\ &= -\frac{a_5}{8 \cdot 9}. \end{aligned}$$

В a_8 і a_9 підставимо a_4 і a_5 виражені через a_0 і a_1 відповідно. Отримаємо,

$$a_8 = \frac{a_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8}; \quad a_9 = \frac{a_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9}.$$

Отже, шуканий ряд буде мати вид:

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{3 \cdot 4} x^4 - \frac{a_1}{4 \cdot 5} x^5 + \frac{a_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} x^8 + \frac{a_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} x^9 \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Отриманий ряд можна групувати у вигляді суми двох рядів:

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{x^{12}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \dots \right) +$$

$$+ a_1 \left(x - \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \frac{x^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} - \frac{x^{13}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13} + \dots \right).$$

Початкове диференційне рівняння другого порядку, тому знайдене у вигляді степеневого ряду розв'язання містить дві довільні сталі a_0 та a_1 . Визначимо їх, використовуючи початкові умови: $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

$$y(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 - \frac{a_0}{3 \cdot 4} \cdot 0 - \frac{a_1}{4 \cdot 5} \cdot 0 + \frac{a_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} \cdot 0 + \dots = a_0.$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1.$$

$$y' = a_1 - \frac{4a_0}{3 \cdot 4} x^3 - \frac{5a_1}{4 \cdot 5} x^4 + \frac{8a_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} x^7 + \frac{9a_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} x^8 - \dots$$

$$y'(0) = a_1 - \frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{a_1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 7} \cdot 0 + \frac{a_1}{4 \cdot 5 \cdot 8} \cdot 0 - \dots$$

$$y'(0) = a_1. \quad y'(0) = 2 \Rightarrow a_1 = 2.$$

Частинний роз'язок, який задовольняє початковим умовам, запишемо у вигляді:

$$y = 1 + 2x - \frac{x^4}{3 \cdot 4} - \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \frac{x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{x^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9}$$

$$- \frac{x^{12}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} - \dots$$

ЛЕКЦІЯ 16

ПЕРІОДИЧНІ ФУНКЦІЇ. РОЗКЛАДАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ У РЯДИ ФУР'Є. ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБІЖНОСТІ РЯДУ ФУР'Є

Періодичні функції

Вивчаючи періодичні процеси, виникає потреба розкладання періодичних функцій, що описують ці процеси, в так званий тригонометричний ряд.

Згадаємо, що функція $y = f(x)$, визначена на множині D , називається *періодичною* на цій множині, якщо існує таке число $T > 0$, що при будь-якому $x \in D$ значення $(x + T) \in D$ і $f(x + T) = f(x)$.

Найпростішими періодичними функціями є тригонометричні функції $\sin x$ і $\cos x$ період яких дорівнює 2π .

Найпростішим періодичним процесом є *гармонійне коливання*, що описується формулою

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (16.1)$$

де A – амплітуда коливання, ω – частота, φ_0 – початкова фаза. Функцію такого виду називають найпростішою гармонікою. Основним періодом є $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Виконаємо перетворення виразу (16.1)

$$\begin{aligned} y &= A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \sin \omega t \cos \varphi_0 + A \cos \omega t \sin \varphi_0 = \\ &= a \cos \omega t + b \sin \omega t, \end{aligned} \quad (16.2)$$

де $a = A \cos \varphi_0$, $b = A \sin \varphi_0$. Отже ми бачимо, що просте гармонійне коливання описується періодичними функціями $\cos \omega t$ та $\sin \omega t$.

Складне гармонійне коливання також описується функціями *cos* ωt та *sin* ωt .

Розкладання періодичних функцій у ряди Фур'є

За допомогою так званого тригонометричного ряду майже будь-яку періодичну функцію можна представити у вигляді ряду, члени якого є прості гармоніки

Тригонометричним рядом називається функціональний ряд виду

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots \\ & \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots = \\ & = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned} \quad (16.3)$$

де a дійсні числа $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2 \dots$ – сталі коефіцієнти.

Припустимо, що ряд (16.3) на відріжку $[-\pi; \pi]$ рівномірно збіжний до функції $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (16.4)$$

Важливою ознакою тригонометричних функцій ряду (16.3) є їх ортогональність на відріжку $[-\pi; \pi]$. Вона розуміється у наступному сенсі: інтеграл на цьому відріжку від добутку двох будь-яких функцій дорівнює

- нулю, якщо в підінтегральну функцію входять різні функції;
- додатному числу, якщо підінтегральна функція складається з квадрата будь-якої функції.

Будемо припускати, що цей розклад і одержані з нього далі ряди можна почленно інтегрувати на відрізку $[-\pi; \pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$.

Обчислимо наступні інтеграли:

при $k \neq n; k, n = 0, 1, 2 \dots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+n)x + \cos(k-n)x] \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(k+n)x}{k+n} + \frac{\sin(k-n)x}{k-n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (16.5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k-n)x - \cos(k+n)x] \, dx = 0; \quad (16.6)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(k+n)x + \sin(k-n)x] \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(n-k)x}{n-k} - \frac{\cos(n+k)x}{n+k} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (16.7)$$

Інтегруючи ряд (16.4) на відрізку $[-\pi; \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) dx$$

отримуємо, що всі інтеграли, окрім першого,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0 \pi,$$

дорівнюють нулю. Звідси знаходимо нульовий коефіцієнт

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (16.8)$$

Для визначення коефіцієнтів a_n і b_n послідовно помножимо обидві частини (16.4) на $\cos nx$, $\sin nx$ і проінтегруємо на відрізку $[-\pi; \pi]$, отримаємо:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad (16.9)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (16.10)$$

Числа a_0 , a_n , b_n , що визначаються за формулами (16.8) – (16.10) називаються **коефіцієнтами Фур'є** функції $f(x)$, а тригонометричний ряд (16.4) – **рядом Фур'є** функції $f(x)$.

Якщо $f(x)$ парна функція, то

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = 0.$$

Якщо $f(x)$ не парна функція, то

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Зауваження:

$$\cos \pi n = \cos(-\pi n) = (-1)^n;$$

$$\sin \pi n = \sin(-\pi n) = 0.$$

Достатні умови збіжності ряду Фур'є

Знайдено декілька достатніх ознак збіжності ряду Фур'є до функції $f(x)$. Зазначимо без доведення одну з них.

Теорема Діріхле (достатня ознака збіжності функції в ряд Фур'є). Якщо функція $f(x)$ має період $T = 2\pi$ і на відрізок $[-\pi; \pi]$ неперервна або має скінченне число точок розриву першого роду і відрізок $[-\pi; \pi]$ можна розбити на скінченне число частин так, що всередині кожної з них функція монотонна, то її ряд Фур'є збігається на всій числовій осі, причому сума ряду $S(x)$ в точках неперервності функції $f(x)$ дорівнює їй самій $S(x) = f(x)$, а у кожній точці розриву x_0 функції $f(x)$ – середньому арифметичному односторонніх границь при $x \rightarrow x_0$ зліва та справа

$$S(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \right).$$

При цьому збіжність ряду Фур'є рівномірна на будь-якому відрізку, що належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.

Функція $f(x)$, що задовольняє умови теореми Діріхле, називається **кусково-монотонною** на відрізку $[-\pi; \pi]$.

Приклад 16.1 Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом 2π) функцію $f(x)$, яка задана на відрізку $[-\pi; \pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 3x - 2, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Розв'язання. Графік функції зображений на рис. 16.1.

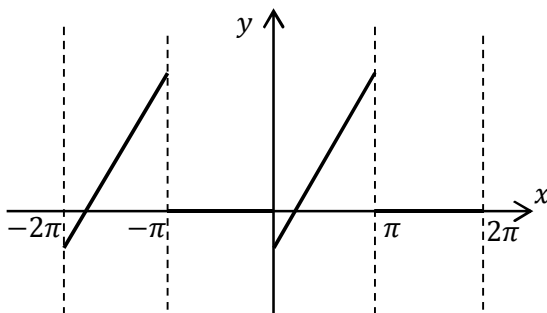


Рисунок 16.1

На відрізку $-\pi \leq x \leq 0$ функція $f(x)=0$, тому $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = 0$. На відрізку $0 \leq x \leq \pi$ функція $f(x) = 3x - 2$, тому

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (3x - 2) dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{3x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{3\pi^2}{2} - 2\pi \right) = \frac{3\pi - 4}{2};
 \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (3x - 2) \cos nx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = 3x - 2; \quad du = 3dx \\ dv = \cos nx \, dx; \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left((3x - 2) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{3}{n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{3 \cos nx}{n^2} \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{3}{n^2} (\cos \pi n - \cos 0) = \frac{3}{\pi n^2} ((-1)^n - 1);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (3x - 2) \sin nx \, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = 3x - 2; \quad du = 3dx \\ dv = \sin nx \, dx; \quad v = \frac{-1}{n} \cos nx \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-(3x - 2) \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{3}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \left((2 - 3\pi)(-1)^n - 2 + \frac{3 \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n} ((2 - 3\pi)(-1)^n - 2).$$

Розклад в ряд Фур'є періодичної функції $f(x)$, яка задана на відрізку $[-\pi; \pi]$:

$$f(x) = \frac{3\pi - 4}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos nx + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi n} ((2 - 3\pi)(-1)^n - 2) \sin nx \right).$$

ЛЕКЦІЯ 17

РЯДИ ФУР'Є ДЛЯ ПАРНИХ І НЕПАРНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ. РЯДИ ФУР'Є ДЛЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ З ДОВІЛЬНИМ ПЕРІОДОМ

Ряди Фур'є для парних і непарних періодичних функцій

Для парних і непарних функцій справедливі наступні твердження (доведіть їх самостійно):

1) Добуток двох парних чи двох непарних функцій є парною функцією.

2) Добуток парної функції на непарну є непарною функцією.

3) Інтеграл по симетричному відрізьку $[-a; a]$, $a > 0$ від парної функції $f(x)$ дорівнює подвоєному інтегралу по правій половині цього проміжку $[0; a]$:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

4) Інтеграл по симетричному відрізьку $[-a; a]$, $a > 0$ від непарної функції $f(x)$ дорівнює нулю:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Нехай треба розкласти в ряд Фур'є 2π -періодичну парну функцію $f(x)$. Оскільки $\cos nx$ і $\sin nx$ – відповідно парна або непарна функції, то добутки $f(x) \cos nx$ і $f(x) \sin nx$ також

відповідно є парною і непарною функціями. Інтегруючи їх на симетричному проміжку $[-\pi; \pi]$, дістанемо:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx; \quad (17.1)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad (17.2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0. \quad (17.3)$$

Тоді ряд Фур'є для парної функції набуває вигляду

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (17.4)$$

Нехай треба розкласти в ряд Фур'є 2π -періодичну непарну функцію $f(x)$. Тоді добутки $f(x) \cos nx$ і $f(x) \sin nx$ відповідно є непарною і парною функціями. Інтегруючи їх на симетричному проміжку $[-\pi; \pi]$, дістанемо:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0; \quad (17.5)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0; \quad (17.7)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (17.8)$$

Ряд Фур'є для непарної функції набуває вигляду

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (17.9)$$

Приклад 17.1 Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)$, яка задана на відрізку $[0; \pi]$, до визначив її парним і непарним чином. Побудувати графіки для кожного продовження.

$$f(x) = x^2 - 1$$

Розв'язання. Для функції, яка подовжена парним чином коефіцієнти ряду Фур'є знаходимо за формулами (17.1) – (17.4) тому маємо:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 - 1) dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{3} - \pi \right) = \frac{2\pi^2}{3} - 2;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 - 1) \cos nx \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 1; \quad du = 2x dx \\ dv = \cos nx \, dx; \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right|$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2 - 1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \cdot \left(0 - \frac{2}{n} \left(-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) \right) = \\
&= \frac{4}{\pi n^2} \left(\pi (-1)^n - \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{4}{n^2} (-1)^n.
\end{aligned}$$

Розклад в ряд Фур'є функції, подовженої парним чином:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos nx.$$

б) Для функції, яка подовжена непарним образом коефіцієнти ряду Фур'є знаходимо за формулами (17.5) – (17.8) тому маємо:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 - 1) \sin nx \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 1; \quad du = 2x dx \\ dv = \sin nx; \quad v = \frac{-1}{n} \cos nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - x^2}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = \cos nx; \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi n} \left[(1 - \pi^2)(-1)^n - 1 + 2 \left(\frac{x}{n} \sin nx \Big|_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx \, dx \right) \right] = \\
&= \frac{2}{\pi n} \left[(1 - \pi^2)(-1)^n - 1 + 2 \left(0 + \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^\pi \right) \right] = \\
&= \frac{2}{\pi n} \left[(1 - \pi^2)(-1)^n - 1 + \frac{2}{n^2} ((-1)^n - 1) \right].
\end{aligned}$$

Розклад в ряд Фур'є функції, подовженої непарним чином:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1 - \pi^2)(-1)^n - 1 + \frac{2}{n^2} ((-1)^n - 1) \right] \frac{\sin nx}{n}.$$

Ряди Фур'є для періодичних функцій з довільним періодом. Гармонічний аналіз

Нехай $2l$ -періодична функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-l; l]$ довжиною в період $T = 2l$, $l > 0$ і на цьому відрізку є кусково-монотонною.

Розкладемо її в ряд Фур'є. Виконаємо заміну змінної за формулою $x = \frac{lt}{\pi}$ і розглянемо функцію $\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$.

Ця 2π -періодична функція $\varphi(t)$ визначена на відрізку $[-\pi; \pi]$ і кусково-монотонна на ньому. Розкладемо її в ряд Фур'є:

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt);$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos nt dt;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sin nt dt.$$

Повернемося до змінної x і дістанемо шукане розкладання:

$$t = \frac{\pi x}{l}, dt = \frac{\pi}{l} dx;$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right),$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Зауваження. Розкладання парних та непарних періодичних функцій з періодом $T = 2l$, $l > 0$ відповідно у ряди косинусів і синусів набувають аналогічного вигляду, як і для функцій з періодом $T = 2\pi$.

Приклад 17.2 Розкласти в ряд Фур'є в зазначеному інтервалі періодичну функцію $f(x)$ з періодом $T = 2l$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 \leq x \leq -1, \\ 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Розв'язання. Функція задана на відрізку $[-2, 2]$. Довжина інтервалу інтегрування $2l = 4$, тому $l = 2$. Тому

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^{-1} (x + 2) dx + \int_{-1}^1 dx + \int_1^2 (2 - x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left. \frac{(x + 2)^2}{2} \right|_{-2}^{-1} + x \Big|_{-1}^1 - \left. \frac{(2 - x)^2}{2} \right|_1^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^{-1} (x + 2) \cos \frac{\pi n x}{2} dx + \right.$$

$$+ \int_{-1}^1 \cos \frac{\pi n x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \cos \frac{\pi n x}{2} dx \Bigg).$$

Обчислимо окремо кожен з інтегралів:

$$1) \int_{-2}^{-1} (x+2) \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \left| \begin{array}{l} u = x+2, \quad du = dx \\ dv = \cos \frac{\pi n x}{2} dx, \quad v = \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= (x+2) \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} \Big|_{-2}^{-1} - \frac{2}{\pi n} \int_{-2}^{-1} \sin \frac{\pi n x}{2} dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_{-2}^{-1} =$$

$$= \frac{-2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2} \left(\cos \frac{\pi n}{2} - \cos \pi n \right).$$

$$2) \int_{-1}^1 \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \left(\sin \frac{\pi n}{2} + \sin \frac{\pi n}{2} \right) = \frac{4}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2}.$$

$$3) \int_1^2 (2-x) \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \left| \begin{array}{l} u = 2-x, \quad du = -dx \\ dv = \cos \frac{\pi n x}{2} dx, \quad v = \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= (2-x) \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} \Big|_1^2 + \frac{2}{\pi n} \int_1^2 \sin \frac{\pi n x}{2} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_1^2 = \\
&= \frac{-2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2} (\cos \pi n - \cos \frac{\pi n}{2}).
\end{aligned}$$

Підставимо знайдені значення інтегралів a_n , отримаємо

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{-2}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2} (\cos \frac{\pi n}{2} - \cos \pi n) \right) = \\
&= \frac{-1}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{2}{\pi^2 n^2} (\cos \frac{\pi n}{2} - \cos \pi n).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{\pi n x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^{-1} (x+2) \sin \frac{\pi n x}{2} dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_{-1}^1 \sin \frac{\pi n x}{2} dx + \int_1^2 (2-x) \sin \frac{\pi n x}{2} dx \right)
\end{aligned}$$

Обчислимо окремо кожен з інтегралів:

$$\begin{aligned}
1) \int_{-2}^{-1} (x+2) \sin \frac{\pi n x}{2} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x+2, \quad du = dx \\ dv = \sin \frac{\pi n x}{2}, \quad v = \frac{-2}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2} \end{array} \right| = \\
&= \frac{-2(x+2)}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_{-2}^{-1} + \frac{2}{\pi n} \int_{-2}^{-1} \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \\
&= \frac{-2}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n x}{2} \Big|_{-2}^{-1} = \frac{-2}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{2}.
\end{aligned}$$

$$2) \int_{-1}^1 \sin \frac{\pi n x}{2} dx = \frac{-2}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_{-1}^1 = 0.$$

$$3) \int_1^2 (2-x) \sin \frac{\pi n x}{2} dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = 2-x, \quad du = -dx \\ dv = \sin \frac{\pi n x}{2} dx, \quad v = \frac{-2}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= -(2-x) \frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_1^2 - \frac{2}{\pi n} \int_1^2 \cos \frac{\pi n x}{2} dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n x}{2} \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{2}.$$

Підставимо знайдені значення інтегралів b_n , отримаємо

$$b_n = \frac{1}{2} \left(\frac{-2}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{2} - \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{2} + 0 + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{2} \right) = 0.$$

Розклад в ряд Фур'є в зазначеному інтервалі функції $f(x)$

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{2} + \frac{4}{\pi^2 n^2} \left(\cos \frac{\pi n}{2} - \cos \pi n \right) \right) \cos \frac{\pi n x}{2}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – СПб. : Профессия, 2001. – 432 с.
2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2006. – 736 с.
3. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі: у 2 кн. / За ред. Г.Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003. – Кн. 1 : Основні розділи. – 400 с. – Кн. 2 – Спеціальні розділи. – 368 с.
4. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: у 2ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : АСТ, 2014. – Ч. 1 – 303 с., Ч. 2 – 415 с.
5. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2003. – 648 с.
6. Вороновська Л.П. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» Модуль 1. [Електронний ресурс] (для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології) / Л. П. Вороновська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О.М. Бекетова. – Харків, 2017. – 161 с. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/45103/>, вільний (дата звернення: 23.06.2019). – Назва з екрана.
7. Вороновська Л.П. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» Модуль 2. [Електронний ресурс] (для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології) / Л. П. Вороновська ; Харків нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова, 2018. – 163 с. – Режим доступу: <https://eprints.kname.edu.ua/49557/>, вільний (дата звернення: 23.06.2019). – Назва з екрана.
8. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецьк : Сталкер, 2003. – 495 с.
9. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное

исчисление : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 2011. – Т.1. – 430 с. – Т.2. – 580 с.

10. Розендорн Э. Р. Теория поверхностей / Э. Р. Розендорн. – М. : Физматлит, 2006. – 304 с.

11. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 270 с.

Навчальне видання

ВОРОНОВСЬКА Лариса Петрівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль 3

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

*(для студентів 2 курсу денної і заочної форм навчання
спеціальностей 192 – Будівництво та цивільна інженерія,
185 – Нафтогазова інженерія та технології)*

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *Л. П. Вороновська*

План 2018, поз. 109Л

Підп. до друку 25.06.2019. Формат 60×84/16.

Друк на ризографі. Ум. друк арк. 8

Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач

Харківський національний університет
міського господарства імені О.М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.

Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017.