МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА имени А. Н. БЕКЕТОВА

А. Н. Шаповалов

ОБЕСПЕЧЕНИЕ НАДЕЖНОСТИ ЭКСПЛУАТАЦИИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

(для студентов 4–5 курсов дневной и заочной форм обучения, а также для самостоятельной работы студентов образовательного уровня «магистр» по специальности 192 – Строительство и гражданская инженерия)

Харьков
ХНУГХ им. А. Н. Бекетова
2019

УДК 624.058

Шаповалов А. Н. Обеспечение надежности эксплуатации строительных конструкций : конспект лекций для студентов 4–5 курсов дневной и заочной форм обучения, а также для самостоятельной работы студентов образовательного уровня «магистр» по специальности 192 – Строительство и гражданская инженерия / А. Н. Шаповалов ; Харьков. нац. ун-т город. хоз-ва им. А. Н. Бекетова. – Харьков : ХНУГХ им. А. Н. Бекетова, 2019. – 140 с.

Автор
канд. техн. наук, доц. А. Н. Шаповалов

Рецензенты:

А. И. Вайнберг, доктор технических наук, профессор, заведующий секцией гидротехнического строительства ХНУБА

О. В. Кичаева, доктор технических наук, доцент, заведующая кафедрой механики грунтов, фундаментов и инженерной геологии ХНУГХ им. А. Н. Бекетова

Рекомендуется кафедрой строительных конструкций,
протокол № 2 от 08 октября 2018 г.

Конспект лекций подготовлен с целью оказания помощи студентам строительных специальностей вузов при подготовке к практическим занятиям, зачетам и экзаменам по дисциплине «Обеспечение надежности эксплуатации строительных конструкций»

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Повышение надежности и безопасности эксплуатации как отдельных строительных конструкций, так и зданий и сооружений в целом – одна из главных задач современности для проектных, строительных и научно-исследовательских организаций.

Теория надежности и безопасности зданий и сооружений приобрела особую актуальность в последнее два десятилетия в связи с огромным количеством аварийных разрушений, приводящим к значительному материальному ущербу и человеческим жертвам.

Создавая здание или сооружение, предусматривают определенный теоретический уровень надежности и безопасности эксплуатации всего объекта и его отдельных узлов. Опыт же строительства и эксплуатации свидетельствует о том, что совершенно одинаковые здания и сооружения, которые строятся и эксплуатируются в аналогичных условиях, или их отдельные конструктивные элементы, выходят из строя в различные случайные моменты времени, то есть нельзя строго определить время службы строительной конструкции, а можно только оценить ту вероятность, с которой может безопасно эксплуатироваться объект на протяжении заданного времени общего жизненного цикла этого объекта.

Теория надежности зданий и сооружений не отрицает, не отменяет и не изменяет ни в какой мере существующие научные направления в строительстве. Она имеет строго определенные свои функции: определять те общие состояния и свойства объектов, которые связаны с сохранением или обеспечением показателей качества во времени, другими словами, выполняется аргументированный расчет показателей надежности зданий и сооружений, исходя из накопленных статистических данных и обобщенных сведений по каждому объекту.

Базовым материалом для теоретических расчетов надежности строительных конструкций или здания в целом является теория вероятности.

Основные положения этой теории были заложены Д. Кардано, Б. Паскалем, П. Ферма, Х. Гюйгенсом, Я. Бернулли. В дальнейшем работы этих ученых были развиты Гауссом, Лапласом, Пуассоном, Муавром.

Становление теории вероятности как строгой математической науки было выполнено П. Чебышевым, А. Марковым, А. Ляпуновым и другими.

В последние годы дополнили и расширили теорию вероятности В. Буняковский, В. Болотин, А. Колмогоров, С. Бернштейн, Б. Гнеденко, В. Гмурман, Е. Вентцель, Ю. Пытьев и многие другие.

Изучение закономерностей развития случайных величин (процессов) составляет основной предмет теории вероятностей. В зависимости от того, насколько удачно удается описать случайные события (процессы, исходы, результаты и т.п.), настолько можно прогнозировать развитие этих процессов в будущем и предсказать наиболее опасные или критические точки наблюдаемого события.

Рассматривая надежность зданий и сооружений, необходимо обращать на некоторые особенности расчетов, включающих комплексность и взаимосвязь таких параметров, как вероятность действующих нагрузок, отдельных явлений, влияний характеристик прочности материалов, изменение расчетных моделей, анализ временного фактора в развитии некоторых процессов.

Наряду с теорией вероятности в последние годы начали использовать в определении надежности и безопасности зданий и сооружений и другие теоретические подходы. В частности, рассматривается теория интервальных функций, теория возможностей и другие базовые подходы в оценке надежности анализируемых процессов.

В настоящем конспекте лекций, подготовленному по дисциплине «Обеспечение надежности эксплуатации строительных конструкций», рассматриваются как общетеоретические вопросы теории вероятности, так и некоторые примеры практической реализации данной теории. Этот конспект может служить базовой основой для усвоения вышеуказанной дисциплины, а также поможет студентам-магистрам и научным сотрудникам разобраться в новых направлениях расчета надежности отдельных конструкций, зданий и сооружений.

В конспекте детально освещены в первых пяти лекциях вопросы определения и развития случайных величин, истории возникновения теории вероятностей, комбинаторики, а также основные законы распределения случайных величин (законы Гаусса, Вейбулла, Гумбеля, Пуассона). Отдельное внимание уделяется интегралу Лапласа и его применению в практических задачах, проанализированы случайные функции и корреляционные функции.

В шестой и седьмой лекциях рассматриваются вопросы закономерностей Марковского процесса, законы больших чисел, включающих неравенство Чебышева, закон и формулу Бернулли.

Последующие лекции (восьмая–десятая) рассматривают теоретические основы определения надежности не по теории вероятности, а по теории интервальных функций и теории возможностей.

Остальные лекции посвящены основным положениям практической реализации расчетов по определению надежности в соответствии с существующими нормативными документами. Особое внимание уделяется коэффициенту безопасности β_s и его вычислению в задачах корреляционной связи между нагрузкой $\overline{F}$ и внутренним сопротивлением конструкции $\overline{R}$.

Параллельно рассматриваются вопросы непропорционального (прогрессирующего обрушения), определения категорий последствий (ответственности) зданий и сооружений, приводится пример расчета этой категорийности для конкретного объекта.

ЛЕКЦИЯ 1
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАДАЧИ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ В ПРИМЕНЕНИИ К СТРОИТЕЛЬНЫМ КОНСТРУКЦИЯМ, ЗДАНИЯМ И СООРУЖЕНИЯМ

План лекции:

1. Введение, понятие надежности, актуальность теории надежности в различных отраслях человеческой деятельности.
2. Основные положения теории вероятности. Виды событий и их определение.
3. Краткая история развития теории вероятности, основные этапы этого развития.
4. Комбинаторика: перестановки, размещения, сочетания, практическое значение видов комбинаторики.

1 Введение, понятие надежности, актуальность теории надежности в различных отраслях человеческой деятельности

Современное развитие различных отраслей народного хозяйства (горнодобывающая промышленность, металлургия, машиностроение, строительная отрасль, химическое производство, медицина, сельское хозяйство, авиация, космонавтика, военная техника, оборонные сооружения и др.) стремится прежде всего к обеспечению надежности и безопасности развития и длительного использования данного конкретного вида производства.

Для достижения этих целей использовались и продолжают использоваться общедоступные и упрощенные методики, основанные на имеющемся опыте, математическом расчете, принятии определенных гипотез, использовании узаконенных нормативных рекомендаций, проведении сравнительного анализа, применении новых материалов, технологий и конструктивных схем [14, 15].

Однако ни один из перечисленных способов не может с научной точки зрения обеспечить безопасность и надежность эксплуатации рассматриваемых систем и технологий.

Наблюдаемые в последнее время техногенные аварии, разрушения, климатические воздействия, массовая гибель людей по невыясненным причинам, преждевременный выход из строя запроектированных, на первый взгляд, по всем правилам систем и конструкций, террористические акты – все это поставило на первый план задачу обеспечения надежности рассматриваемых элементов или продукции человеческой деятельности в осложненных или аварийных условиях.

Что же следует понимать под термином «надежность» на современном этапе развития науки?

Согласно нормативному документу ДБН В.1.2-14:2018 «Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель і споруд» [4] под надежностью подразумевается свойство объекта выполнять заданные для него функции в течении определенного периода времени, заданного нормами. Такая формулировка несколько абстрактна и неполна, однако она принята как постулат и все исполнители принимают ее как полной и однозначной.

Под «безопасностью», согласно имеющимся литературным источникам, подразумевается отсутствие для данного объекта (конструкции или здания в целом) недопустимого риска, связанного с возможностью нанесения какого-либо вреда для жизни и здоровья людей, их имущества, а также окружающей природной среды [8].

Сформулированные определения «надежности» и «безопасности» очень расплывчаты и условны, для конкретизации показателей этих понятий разрабатываются в настоящее время научно обоснованные математические зависимости, позволяющие оценить надежность и безопасность объектов, конструкций, систем, узловых соединений в конкретных цифрах. Основными показателями можно считать два наиболее важных и востребованных на современном этапе развития науки о надежности – это время безотказной работы объекта и теоретическое время до первого отказа. Немаловажным показателем является и γ-ресурс, который определяет перспективу надежного использования конкретного элемента при различных неблагоприятных условиях [12].

Все показатели надежности и безопасности базируются на широкомасштабном использовании основных положений теории вероятности включая ее классические теоретические понятия и современные сложные математические разработки [12, 14, 22, 23].

И несмотря на то, что многие объекты, системы, изделия, запроектированные и изготовленные с учетом жестких требований теории надежности, в реальных жизненных условиях могут испытывать аварийные ситуации, однако процент этих ситуаций будет существенно меньше, чем для объектов, запроектированных и изготовленных без учета этих требований, и внедрения основных положений теории надежности [7, 9].

Объективных статистических данных по этому вопросу очень мало, однако практика эксплуатации объектов, реализованных с учетом последних требований теории надежности, показывает, что целесообразность инновационных решений с учетом теории надежности весьма эффективна [13, 17, 24].

2 Основные положения теории вероятности. Виды событий и их определение

Теория вероятности имеет глубокие исторические корни, и она может базироваться как на мистических понятиях, так и на строго обоснованных математических доказательствах. К числу мистических понятий относятся сновидения, гадания, предсказания, расположения звезд и космических объектов и другие. В ряде случаев такие понятия дают положительные результаты, однако степень подтверждения вероятностного исхода планируемого события для этих случаев невелика.

В основу математической теории вероятности закладывается анализ развития определенных событий во времени. При этом, понятие «событие» имеет четкое определение, которое состоит в том, что событие – это конкретный процесс, явление, результаты, исход определенного вида деятельности человека или какого-либо механизма, приспособления, аппарата, системы, электроаппаратуры или оборудования в течение наблюдаемого времени [12, 16, 25].

Например, падение человека на скользкой дороге, частота заболевания ОРЗ в течение года, проявление доброты или агрессивности человека в производственных условиях, результаты испытания материалов или систем в лабораторных условиях, точность попадания выстрелов в заданную мишень, получение ожидаемого эффекта от внедрения новых схем в электрооборудование и т. д. – все это разновидности событий.

Наблюдаемые события, изучаемые в теории вероятности, подразделяются на: – достоверные; – невозможные; – случайные [12, 15].

Например, **достоверное** событие состоит в том, что при $t = 20^{\circ}C$ и атмосферном давлении $p = 760$ мм.рт.ст вода будет жидкой.

Невозможные события: арматурная сталь класса А400С при температуре $t = 20^{\circ}C$ не может разрушится при напряжении $\sigma < 10$ МПа;

тяжелый бетон после истечения 28 суток и температуре $t = 20^{\circ}C$ не может быть мягким и многие другие.

К числу наиболее распространенных относятся **случайные** события. Примером случайных событий могут быть:

- бросая монету, можно получить либо «герб» либо «решку»;
- недисциплинированный студент может прийти на занятия два раза в неделю или четыре, или вовсе не прийти;
- испытывая на прочность бетонные образцы, можно получить различные результаты при каждом испытании;
- точность попадания в мишень при выстреле всегда различна и зависит от многих факторов;
- активность действий человека в различные дни различна и зависит от ряда объективных и субъективных причин.

Изучение закономерностей развития случайных величин и составляет основной предмет теории вероятности. В зависимости от того, насколько удачно удается описать случайные события (процессы, исходы и т. п.), настолько можно прогнозировать развитие этих процессов в будущем и предсказать наиболее опасные или критические точки наблюдаемого события.

Характеризуя более детально случайные события, следует всегда предусматривать их конкретные разновидности [12, 15]:

а) несовместные (т. е. два одновременно не появляются);

б) равновозможные (нет предпочтения одного перед другим);

в) независимые (т. е. появление одного не зависит от другого).

Кроме того, случайные события могут быть однородные и неоднородные. Теория вероятности чаще всего изучает однородные случайные события, которые характеризуют определенный процесс.

Параллельно следует понимать, что теория вероятности ставит перед собой задачу изучать вероятность закономерностей развития однородных массовых случайных процессов. С математической точки зрения вероятность – это число, характеризующее степень возможности появления конкретного ожидаемого события. При этом существует полная группа событий, состоящая из отдельных элементарных исходов, и ожидаемая (желаемая) группа исходов или какой-то один исход.

Отношение числа благоприятствующих (желаемых) событию А элементарных исходов к их общему числу исходов (результатов) называют вероятностью события (событий) А в наблюдаемом процессе, чаще всего эту вероятность обозначают через Р (А).

Если обозначить буквой *m* число, благоприятствующее событию А, а буквой *n* общее число равновозможных, несовместимых, независимых исходов, тогда

$$P(A)=\frac{m}{n}. \qquad (1.1)$$

Вероятность случайного события есть положительное число, лежащее между нулем и единицей: 0 < Р(А) < 1

Вероятность достоверного события равна 1: при $m = n$, $P(A) = 1$.

Вероятность невозможного события равна 0: при $m = 0$, $P(A) = 0$.

3 Краткая история развития теории вероятности, основные этапы этого развития

Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, представляли собой попытки создания теории азартных игр (карты, кости, нарды, рулетка и т. п.). В историческом плане можно выделить пять характерных этапов развития теории вероятностей [12, 14, 15].

Случайные события анализировались со смыслом французского слова Le hasart, что в переводе означает «неожиданность», «случай».

Первый этап охватывает период XVI–XVIII столетий. Среди известных ученых того времени, следует выделить Джироламо Кардано (1501 - 1576 гг., Италия), математика, механика, астролога, медика, предсказателя; предложил комплексные числа, карданный вал, решал кубические уравнения, создавал теории азартных игр в кости, очень близко подошел к теории вероятностей, разработал основы криптографии, шифровальных устройств, в частности решетку Кардано. В своих работах он отмечал: «Имеется одно общее правило для расчета – следует учесть общее число нужных выпадений и число способов, которыми могут появиться желаемые выпадения, а затем найти отношение последнего числа к числу оставшихся возможных выпадений», близок был к закону «больших числе». Предсказал день своей смерти, однако ошибся и, чтобы оправдать свое предсказание, решил в назначенный день покончить с собой.

Блез Паскаль (1623 – 1662 гг., Франция), математик, философ, психолог, участвовал в создании теории броска игральных костей: изобрел игральное колесо (рулетку) и вероятность выигрыша на этом колесе. В последние годы жизни ушел в философию и вел аскетический образ жизни.

К числу известнейших математиков XVII столетия следует отнести француза Пьера де Ферма (1601 – 1665 гг.), который внес определенный вклад в развитие теории вероятностей. Юрист по образованию он являлся автором целого ряда сложных теорем о простых числах, разработал аналитическую геометрию, ввел понятия «математического ожидания» и разработал теоремы о сложении и умножении вероятностей.

Нидерландский ученый Христиан Гюйгенс (1629 – 1695 гг.) был механиком, математиком, физиком. астрономом, основоположником теоретической механики, изобрел маятниковые часы, положил начало волновой оптике. В 1657 году написал приложение «О расчетах в азартной игре», где изложил основные положения теории вероятностей.

Второй этап развития теории вероятностей связан в первую очередь с именем Якоба Бернулли (1654 – 1705 гг..), он разработал и внедрил в практику теории вероятностей так называемый «Закон больших чисел», в котором был основан закон развития накопленных ранее событий, исходов, результатов, фактов. При этом количество накопленных событий колеблется от 100 и более, вплоть до бесконечности.

Третий период характеризуется разработкой математических интерпретаций закономерностей развития случайных величин, возможностью определенного обобщения данных закономерностей, уточнению параметров предлагаемых математических формул. Данный период охватывает время XVIII–XIX столетий. Известными теоретиками в этот период были Лаплас (1749 – 1827 гг..), Гаусс (1777 – 1855 гг..), Пуассон (1781 – 1840 гг..), Муавр и другие.

Четвертый период охватывает конец XIX столетия и начало XX. Он предопределил становление теории вероятности как строгой самостоятельной математической науки. В этот период наиболее важные теоремы и потенциальные возможности теории вероятности разработали П. Л. Чебышев (1821 – 1894 гг.), А. А. Марков (1856 – 1922 гг.), А. М. Ляпунов (1857 – 1918 гг..) и многие другие.

И, наконец, **пятый период** характеризуется современным этапом развития теории вероятности, разработкой новых ее ветвей и разделов. Значительную роль в решении данных вопросов сыграли В. Я. Буняковский, В. Е. Гмурман, Е. С. Вентцель и многие другие.

4 Комбинаторика: перестановки, размещения, сочетания, практическое значение видов комбинаторики

Очень часто в вопросах определения того или иного вероятностного события используется так называемая «математическая комбинаторика».

Существует три основных вида комбинаторики (в соответствии с курсом элементарной математики) :

1) перестановки, обозначаются буквой **P**.
2) размещения, обозначаются буквой **A**.
3) сочетания, обозначаются буквой **C**.

Перестановки – это такие комбинации из одних и тех же элементов ***n***, когда они отличаются только порядком их расположения. например: 123; 132; 213; 231; 312; 321. Количество перестановок определяется по формуле $P = n!$ Для приведенного примера $P = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$.

Размещения – это комбинации, составление из ***n*** элементов по ***m*** штук, которые отличаются либо составом элементов или их порядком. Число всех возможных размещений определяется по формуле $A = n\,(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$. Записывается размещение в общем виде: A_n^m. Например: $A_6^2 = \overbrace{6(6-1)}^{2} = 6\cdot 5 = 30$.

Сочетания – это комбинации из ***n*** элементов по ***m*** элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, например, количество элементов 4:1234, виды сочетаний по 3:123; 234; 412; 134 – каждое сочетание отличается друг от друга одной цифрой. $C_4^3 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3(4-3)!} = 4$.

Пример для сочетаний. Сколькими способами можно выбрать две разные детали из одного ящика, содержащего 10 деталей.

Решение. Искомое число способов запишется в виде C_{10}^{2}.

Используя формулу для сочетаний, получаем окончательное решение

$$C_{10}^{2} = \frac{10\,!}{2!(10-2)!} = 45\,.$$

Следует подчеркнуть, что перестановки, размещения и сочетания связаны между собой соотношением [25]:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}, \text{ кроме того } C_n^m = C_n^{n-m}\,. \tag{1.2}$$

ЛЕКЦИЯ 2
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

План лекции:

1. Геометрическая вероятность. Задача Бюффона.
2. Случайные величины и характер их учета в задачах.
3. Математическое ожидание.
4. Основные теоремы и свойства для математического ожидания.

1 Геометрическая вероятность. Задача Бюффона

Наряду с математической вероятностью существует понятие геометрической вероятности. Сущность последней сводится к тому, что на определенные геометрические фигуры может попадать заданная точка или площадка с определенной степенью вероятности.

Пусть отрезок длиной ***l*** составляет какую-то часть отрезка ***L***. На отрезок ***L*** произвольно устанавливается какая-то точка ***A***. Определить вероятность того, что данная точка может попасть на уменьшенный отрезок ***l***. Вероятность попадания точки ***A*** на отрезок ***l*** пропорционально зависит от длины данного отрезка (рис. 2.1). При этом, положение отрезка L не влияет на вероятность попадания точки **A** на отрезок ***l***.

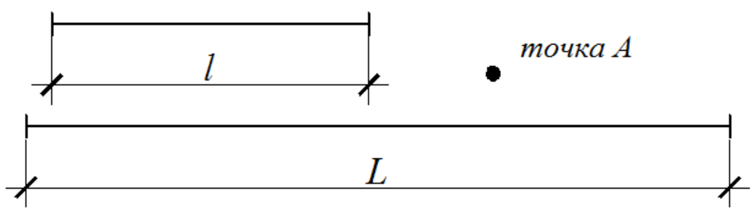

Рисунок 2.1 – Вероятность попадания точки ***A*** на отрезок ***l***, положение ***l*** строго фиксировано, а точка ***A*** может произвольно двигаться на участке ***L***

Очевидно, чем длиннее будет отрезок ***l***, тем и вероятность попадания точки **A** на него выше. Аналитически данную вероятность можно представить следующим видом:

$$P(A) = \frac{\textit{длина} \quad l}{\textit{длина} \quad L} \tag{2.1}$$

Пример. На отрезке **L** длиной 25 см расположен произвольно меньший отрезок ***l***=15 см. Найти вероятность того, что брошенный шарик **А** может попасть на меньший отрезок ***l***. Допуская, что вероятность попадания шарика А на отрезок ***l*** пропорциональна длине отрезка ***l*** и не зависит от его расположения, можно получить $P(A) = \frac{15}{25} = 0{,}6$.

Число 0,6 и является геометрической вероятностью попадания шарика А на отрезок ***l*** = 15 см. Чем больше будет длина ***l***, тем и вероятность попадания будет выше.

Аналогично рассматриваются задачи для отдельных участков площадей, а также объемов (рис. 2.2).

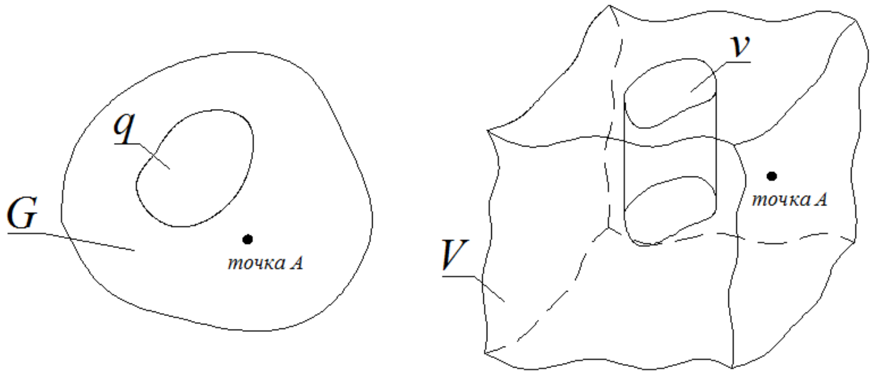

Рисунок 2.2 – Вероятность пересечения точкой **А** малой площади **g** или малого объема **V**

Чем больше будет площадь **g**, тем вероятность пересечения точкой **А** будет выше, а при равенстве площадей **G = g** вероятность достигает **1**. Математические данные вероятности могут быть представлены следующими зависимостями:

$$P_s(A) = \frac{\textit{площадь} \quad g}{\textit{площадь} \quad G}, \tag{2.2}$$

$$P_V(A) = \frac{\textit{объем} \quad v}{\textit{объем} \quad V}. \tag{2.3}$$

При этом следует подчеркнуть, что на вероятность пересечения малой площади **g** или малого объема ***v*** точкой **А** будет существенно влиять форма малых площадей и объемов, в то время как для линейных параметров это обстоятельство не имеет существенного значения.

Задача Бюффона. На горизонтальной абсолютно равной плоскости прочерчены две параллельные линии. Отстоящие друг от друга на расстоянии $2a$. На данную плоскость произвольно бросают отрезок длиной $2\boldsymbol{l}$, при этом $\boldsymbol{l} < \boldsymbol{a}$, степень уменьшения $\boldsymbol{l}$ по отношению к $\boldsymbol{a}$ составляет 15-20%. Найти вероятность того, что отрезок пересечет какую-нибудь прямую линию (верхнюю или нижнюю) (рис. 2.3) [12, 15].

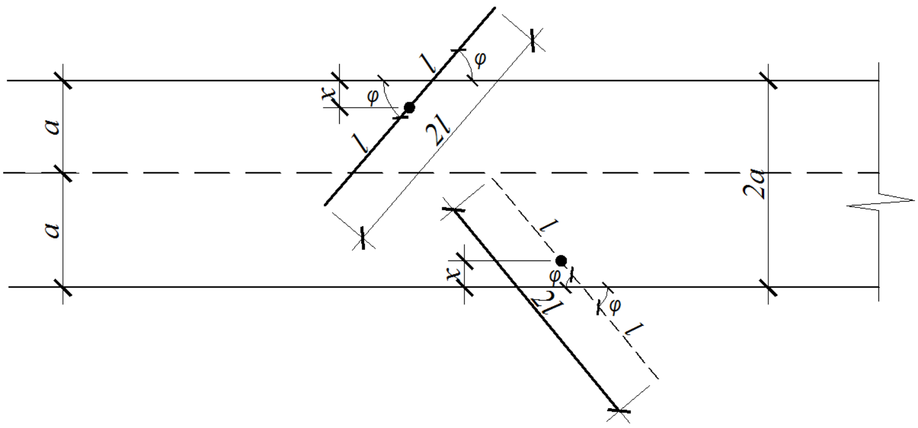

Рисунок 2.3 – Расположение бросаемого отрезка относительно двух параллельных прямых

Решение. Введем обозначения: x – расстояние от середины отрезка до ближайшей параллели; φ – угол, составленный между отрезком и параллельной прямой.

Положение бросаемого отрезка полностью определяется значениями x и φ; при этом, x может принимать значения от 0 до $\boldsymbol{a}$. Возможные значения φ изменяются от 0 до π. Иными словами, середина отрезка может попасть в любую из точек прямоугольника со сторонами $\boldsymbol{a}$ и π. Таким образом, этот прямоугольник можно рассматривать как площадь общих значений $\boldsymbol{G}$, точки которой представляют собой все возможные положения середины рассматриваемого отрезка. Площадь этой фигуры $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{a}\cdot\pi$ (см. рис. 2.4).

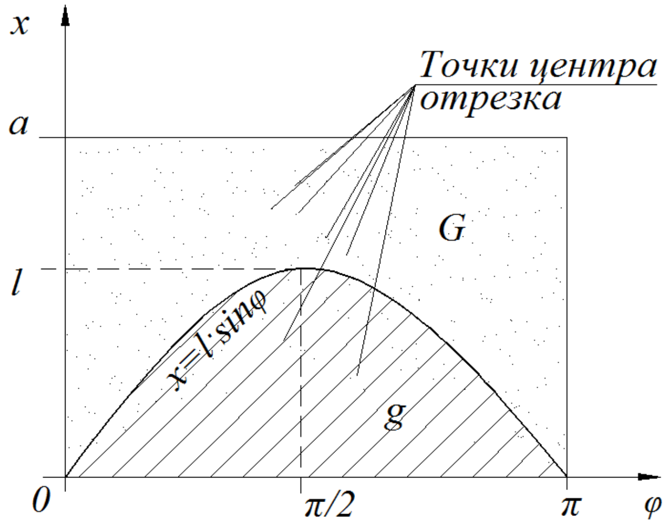

Рисунок 2.4 – Геометрические фигуры задачи Бюффона

Определим теперь фигуру ***g***, каждая точка которой благоприятствует интересующему нас событию, т. е. где каждая точка может служить серединой отрезка, который пересечет ближайшую к ней параллель.

Как видно из рисунка 2.3 отрезок пересечет ближайшую к ней параллель, если $\boldsymbol{x \le l\sin\varphi}$, то есть если середина отрезка попадет в любую из точек фигуры ***g***, заштрихованной на рисунке 2.4. Площадь фигуры ***g*** определится как интеграл функции $\boldsymbol{l\sin\varphi}$ в пределах от 0 до π :

$$g = \int_0^{\pi} l \sin\varphi \, d\varphi. \tag{2.4}$$

Решение данного уравнения имеет такой вид:

$$g = \int_0^{\pi} l \sin\varphi \, d\varphi = -l\cos\varphi \Big|_0^{\pi} = -l[\cos\pi - \cos 0] = -l[-1-1] = 2l.$$

Искомая вероятность того, что заданный отрезок длиной 2***l*** пересечет одну из параллельных прямых, будет равна

$$P(x) = \frac{\textit{площадь} \quad g}{\textit{площадь} \quad G} = \frac{2l}{\pi a}. \tag{2.5}$$

Например, длина отрезка $2l = 2 \cdot 4 = 8$ см, расстояние между параллельными прямыми $2a = 2 \cdot 5 = 10$ см; $\pi = 3{,}14$.

$$P(x) = \frac{2 \cdot 4}{3{,}14 \cdot 5} = \frac{8}{15{,}70} = 0{,}51.$$

2 Случайные величины и характер их учета в задачах

Понятие «событие» носит сугубо абстрактное значение. Как уже указывалось выше, события могут быть несовместные, равновозможные и независимые. Наряду с абстрактным понятием события существует в теории вероятности понятие случайного события или **случайной величины**, которая представляет собой конкретное числовое значение случайного события.

Случайной величиной называют величину, которая в результате испытания или произвольного процесса принимает одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть известны и не могут быть учтены. Например, количество студентов, пришедших на лекцию, есть случайная величина, зависящая от многих неизвестных факторов. Количество мячей, забитых в футбольном матче, также есть случайная величина, заранее неизвестная.

Наряду с понятием случайного события или случайной величины существует понятие вероятности появления случайного события или случайной величины.

Рассмотрим несколько общих теорем, характеризующих закономерность вероятности появления случайных величин.

1. *Теорема сложения вероятностей.*

Вероятность суммы двух или нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий в отдельности, т. е.

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) \tag{2.6}$$

Для произвольного количества несовместных случайных событий можно записать:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{2.7}$$

Из этой теоремы исходит очень важное следствие: сумма вероятностей несовместных случайных событий, образующих полную группу событий, равна 1; т. е. $P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_n)=1$.

Пример к теореме о сложении вероятностей.

В благотворительной лотерее разыгрывается 1 000 билетов. Из них на один билет выигрыш 500 грн.; на 10 билетов выигрыш 100 грн; на 200 билетов выигрыш 20 грн. и на 300 билетов выигрыш 5 грн. Остальные 489 билетов без выигрыша. Найти вероятность, что купленный билет по цене 10 грн. выиграл не менее 20 грн.

Для анализа вероятности выигрыша не менее 20 грн. выигрыши по 5 грн. не рассматриваются. Ожидаемая вероятность выигрыша P(A). Обозначим A_1 выигрыш по 20 грн., A_2 выигрыш по 100 грн., A_3 – выигрыш по 50 грн.

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$

$$P(A_1)=\frac{200}{1000}=0{,}2;\quad P(A_2)=\frac{10}{1000}=0{,}01;\quad P(A_3)=\frac{1}{1000}=0{,}001.$$

Вероятность выигрыша не менее 20 грн.:

$$P(A)=0{,}2+0{,}01+0{,}001=0{,}211.$$

Если учесть выигрыш по 5 грн. и билеты без выигрышей тогда полная вероятность: $\sum_{1}^{5} P(A_i)=0{,}211+0{,}3+0{,}489=1.$

2. *Теорема произведения вероятностей.*

Произведением двух событий **A** и **B** называют событие **AB**, состоящие в совместном появлении (совмещении) этих событий.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Например, если **A**, **B**, **C** – появление «герба» во всех трех бросаниях монеты, то **ABC** – выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

Условной вероятностью $P_A(B)$ или P(A\B) называют вероятность события **B**, вычисленную в предположении, что событие **A** уже наступило.

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B). \qquad (2.8)$$

Из этой теоремы следует, что вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1A_2A_3...A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)..P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n), \tag{2.9}$$

где $P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n)$ – вероятность события A_n, вычисленная в предположении, что события $A_1A_2..A_{n-1}$ наступили. В частности, для трех событий

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)$$

Пример. У сборщика имеется под рукой 10 валиков, 3 из которых имеют отверстия для болтов, а 7 без отверстий. Сборщик берет последовательно валики. Найти вероятность того, что первый раз сборщик взял валик с отверстием, а второй без отверстия.

Вероятность первого события $P(A) = 3/10$. Вероятность того, что второй валик (без отверстий), событие В, вычисляется в предположении, что первый валик с отверстием, т. е. условная вероятность $P_A(B) = 7/9$. По теореме умножения искомая вероятность

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=0{,}233.$$

Пусть событие А может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу событий. Поскольку неизвестно заранее, какое из этих событий наступит, то их иногда называют гипотезами. Например, идет какой-то процесс или испытание, количество всех испытаний 10, но ожидаемый результат В1, В2, В3 появился только в 7-ми испытаниях и только в двух испытаниях появился результат А. Вероятность появления события «А» определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A) \tag{2.10}$$

или

$$P(A)=\sum_{1}^{n}P(B_1)\cdot P_{B_i}(A). \qquad (2.11)$$

Условную вероятность появления события B_i при условии, что событие А произошло, можно определить с учетом теоремы перемножения и формулы полной вероятности

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{\sum_{1}^{n}P(B_i)P_{B_i}(A)} \qquad (2.12)$$

Данная формула имеет название формулы Бейеса в честь английского математика, который вывел и опубликовал ее в 1764 г. [16].

Пример. Два станка производят технологические детали для сборки, которые поступают на один конвейер. Производительность первого станка в 2 раза больше второго, но он дает детали отличного качества только 60 %, а второй станок дает детали отличного качества 84 %. В конце конвейера контролер взял деталь, и она оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что взятая деталь произведена первым станком.

Решение. Обозначим через A – деталь отличного качества. Тогда B_1 – событие, соответствующее производству детали отличного качества для первого станка B_2 – событие для детали отличного качества второго станка; $P(B_1)P_{B_1}(A)=0{,}666\frac{60}{100}=0{,}3996$; $P(B_2)P_{B_2}(A)=0{,}333\frac{84}{100}=0{,}2797$; вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества определится по формуле полной вероятности:

$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=0{,}666\cdot 0{,}6+0{,}333\cdot 0{,}84=0{,}6793$. Вероятность того, что взятая деталь произведена первым станком: $P_A(B_1)=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)}=\frac{0{,}3996}{0{,}3996+0{,}2797}=0{,}5882\cdot$

Следует отметить, что производительность первого станка 0,666 от общей продукции, а второго – 0,333. В сумме общая продукция составит 0,666 + 0,333 ≈ 1.

3 Математическое ожидание

Имеется ряд случайных величин x_1, x_2, x_3, …, x_n и нам неизвестно, что принимать за истинное значение. Можно получить просто среднее значение

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3, \ldots, x_n}{n}, \tag{2.13}$$

и считать, что это значение очень близко к истинному значению.

А можно получить другую среднюю характеристику случайной величины, которую называют **математическим ожиданием**.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на вероятности их появления. Обозначают математическое ожидание буквой $M(x)$.

$$M(x) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 p_3 + \ldots + x_n p_n. \tag{2.14}$$

Если случайная величина принимает счетное множество возможных значений, то

$$M(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i. \tag{2.15}$$

При этом, предполагается, что ряд правой части сходится абсолютно и сумма всех вероятностей $p_i = 1$.

4 Основные теоремы и свойства для математического ожидания

Отличительные свойства математического ожидания сводятся к следующим:

– математическое ожидание постоянной величины С равно самой величине С:

$$M(c) = C; \tag{2.16}$$

– математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = M(x_1) + M(x_2) + \ldots + M(x_n); \tag{2.17}$$

– математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 .. x_n) = M(x_1) \cdot M(x_2) \cdot M(x_3) .. M(x_n); \qquad (2.18)$$

– математическое ожидание биноминального распределения, в частности бинома Ньютона, равно произведению числа испытаний на вероятность появления ожидаемого события в одном испытании:

$$M(x) = np .$$

Вероятность наступления произвольного события Р, а вероятность не наступления события $q = 1 – P$. Ожидаемая вероятность наступления события m

$$M(m) = \sum_{i}^{\infty} mpq^{m-1} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{P} .$$

ЛЕКЦИЯ 3
ХАРАКТЕРИСТИКА ПАРАМЕТРОВ РАССЕИВАНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

План лекции:

1. Определение понятий «дисперсия» и «стандарт».
2. Нормальный закон распределения случайной величины.
3. Плотность нормированного распределения и интеграл Лапласа.

1 Определение понятий «дисперсия» и «стандарт»

Имеется ряд значений случайных величин. Степень отличия одной величины от другой может быть незначительной, а может быть и существенной. Для объективной оценки насколько происходит отличие одной случайной величины от другой необходимо выбрать какой-то параметр, относительно которого необходимо произвести сравнение. Можно для сравнения взять наименьшее значение случайной величины, можно взять наибольшее значение, можно взять среднее значение.

Чаще всего в теории надежности принимают для сравнительного анализа либо среднюю величину рассматриваемого параметра, либо математическое ожидание.

Объективными характеристиками **рассеивания** (разброса) возможных значений случайной величины относительно **математического ожидания** или среднего значения служат так называемые **дисперсия** и **среднее квадратическое отклонение** (стандарт). Дисперсию чаще всего обозначают буквой D, а стандарт буквой σ.

Для оценки степени разброса (рассеивания) случайных величин удобно использовать квадраты разности между случайной величиной и математическим ожиданием.

Поэтому дисперсией D называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания $M(x)$:

$$D(x)=M[X-M(x)]^2 \qquad (3.1)$$

или, раскрывая квадратные скобки, получим:

$$D(x)=M[x^2-2M(x)\cdot X+M^2(x)]=$$
$$=M(x^2)-2M(x)\cdot M(x)+M^2(x)=M(x^2)-[M(x)]^2$$

Тогда формулу (3.1) можно записать в виде

$$D(x)=M(x^2)-[M(x)]^2. \qquad (3.2)$$

То есть дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания.

Например, найти дисперсию случайной величины ***x***, которая задана следующим законом изменения этой случайной величины:

x	2	3	5
$p(x)$	0,1	0,6	0,3.

Вначале найдем математическое ожидание случайной величины M(x):

$$M(x) = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 0{,}2 + 1{,}8 + 1{,}5 = 3{,}5.$$

Определим математическое ожидание квадратов этой случайной величины:

$$M(x^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3 = 13{,}3.$$

Искомая дисперсия: $Д(x)=M(x^2)-[M(x)]^2=13{,}3-3{,}5^2=1{,}05.$

Квадратный корень из дисперсии $D(x)$ есть не что иное как среднее квадратическое отклонение или стандарт, который обозначается буквой $\sigma(x)$:

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)} \quad \text{или} \quad \sigma^2(x)=D(x). \qquad (3.3)$$

Чаще всего под заглавной буквой X понимают какую-то случайную величину, а под прописной буквой x подразумевают ее текущее значение. В литературе встречается обозначение стандарта σ(x) словом «девиата», однако этот термин можно отнести только к историческим обозначениям.

Для рассматриваемого выше примера

$$\sigma_x=\sqrt{1{,}05}=1{,}0247.$$

Рассмотрим некоторые наиболее характерные свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины С равна 0:

$$D(c)=C. \qquad (3.4)$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:

$$D(cx) = c^2 D(x). \tag{3.5}$$

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(x_1 + x_2 + ... + x_n) = D(x_1) + D(x_2) + ... + D(x_n). \tag{3.6}$$

4. Дисперсия биноминального распределения равна произведению числа испытаний n на вероятность и невероятность появления события в одном испытании:

$$D(x) = n \cdot p \cdot q; \quad q = 1 - p. \tag{3.7}$$

5. Дисперсия разности двух случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(x_1 - x_2) = D(x_1) + D(x_2). \tag{3.8}$$

Биноминальное распределение имеет следующий вид:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot a^{n-3} \cdot b^3 + ... + b^n. \tag{3.9}$$

В теории вероятности очень часто используется коэффициент вариации v, который показывает насколько отличается стандарт от среднего значения случайной величины:

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}}. \tag{3.10}$$

Данный коэффициент широко применяется при определении прочностных характеристик строительных материалов (камня, бетона, арматуры, конструктивной стали и других материалов) [2].

2 Нормальный закон распределения случайной величины

Характер развития случайных величин, как правило, не имеет строгой математической закономерности. Но это развитие в ряде случаев может приближаться в определенной степени к какой-то закономерности. Если удается, пусть даже приближенно, описать развитие случайных процессов или явлений, то можно тогда и прогнозировать этот процесс в будущем. В теории вероятностей существует целый ряд математических зависимостей, которые с достаточной точностью могут описать динамику развития случайных величин. Рассмотрим некоторые из них.

Среди наиболее распространенных теоретических распределений случайных величин большое значение имеет так называемый **нормальный закон распределения** (закон Гаусса).

Для анализа этого закона необходимо ознакомиться с двумя важными понятиями: **функция** распределения вероятностей и **плотность** распределения вероятностей.

Функция распределения $F(x)$ может иметь какое-то заданное выражение, зависящее от закономерности развития случайных величин. Пусть x – действительное число, вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x, т. е. вероятность события $X < x$, обозначим через $F(x)$. Разумеется, если x меняется, то, вообще говоря, изменяется и $F(x)$, т. е. $F(x)$ является функцией от x.

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньше x, т. е.

$$F(x) = P(X < x) \tag{3.11}$$

Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a \le x < b) = F(b) - F(a).$$

Пример. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \;\; x \le -1 \\ x/4 + \dfrac{1}{4} \quad \text{при} \;\; -1 < x \le 3 \\ 1 \quad \text{при} \;\; x < 3 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (0, 2):

$$P(0<x<2)=F(2)-F(0)$$

Решение. Заданный интервал (0, 2) находится в пределах $F(x)=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$, тогда $F(2)-F(0)=\left(2/4+\frac{1}{4}\right)-\left(0/4+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$. Таким образом, $P(0<x<2)=\frac{1}{2}$.

Итак, мы рассмотрели способ задания непрерывной случайной величины с помощью функции распределения $F(x)$. Однако этот способ задания не является единственным. Непрерывную случайную величину можно задать, используя другую функцию, которую называют **плотностью** распределения вероятностей или просто плотностью вероятности.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ – первую производную от функции распределения $F(x)$:

$$f(x)=F'(x) \tag{3.12}$$

Из этого определения следует, что функция распределения является первообразной для плотности распределения:

$$F(a<x<b)=\int_b^a f(x)dx. \tag{3.13}$$

В нормальном законе распределения в качестве основного параметра, зависящего от случайной величины X, принимается плотность распределяется, имеющая вид:

$$P(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{3.14}$$

где x – координата случайной величины X;

a – средняя величина X или ее математическое ожидание;

σ – стандарт случайной величины, т. е. $\sigma=\sqrt{D}$.

Графически нормальный закон может быть представлен в виде гиперболических кривых, приведенных на рисунке 3.1.

В зависимости от получаемой величины σ кривые могут быть или более крутыми ($\sigma = 0{,}5a$) или более пологими ($\sigma = 2a$).

Если средняя величина случайной величины X располагается на координате $x = a = 0$, то такой закон распределения называют симметричным.

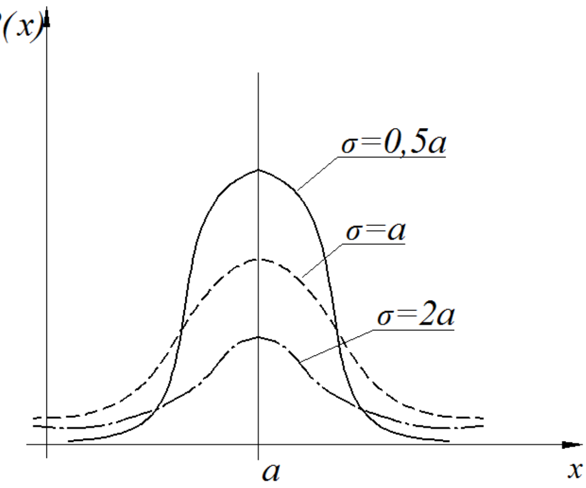

Рисунок 3.1 – Нормальный закон распределения (закон Гаусса) для случайной величины x

Существует несколько математических приемов, позволяющих анализировать и представлять нормальный закон в необходимом виде для решения задач о надежности и различной степени охвата всей области имеющихся результатов случайных величин. Можно охватить их на 60 %, 80 %, 95 % и более. Единственным существенным требованием при построении графика нормального закона является накопление как можно большего количества значений случайной величины. Чем больше будет их значений, тем точнее можно будет построить график и прогнозировать развитие случайной величины в будущем. С практической точки зрения результатов должно быть не менее 25 – 30.

3 Плотность нормированного распределения и интеграл Лапласа

Исходя из плотности распределения, представленной формулой (3.14), определим значение функции распределения $F(x)$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx. \qquad (3.15)$$

Выполним некоторые преобразования. Заменим $\frac{x-a}{\sigma}=u$, тогда $x=\sigma u+a$; $dx=\sigma du$ и формула (3.15) может быть представлена следующим образом:

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du. \qquad (3.16)$$

В этом случае плотность нормированного распределения

$$\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}. \qquad (3.17)$$

Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du$ можно переписать следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{u^2}{2}}du+\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Теперь функция распределения приобретет следующее значение

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{u^2}{2}}du+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Если вместо ∞ применить конкретное значение x или u, то мы получим второе слагаемое в виде

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du. \qquad (3.18)$$

Данное значение $\Phi(x)$ называется **интегралом Лапласа** или нормированной функцией Лапласа, иногда данную функцию называют интегралом ошибок [12, 15].

Для удобства производства математических операций составлены специальные таблицы при вычислении $\Phi(x)$ (см. Приложения к лекциям).

Аналогичные таблицы приведены и для плотности распределения $\varphi(u)$, приведенной в формуле (3.17).

Если возникает задача определения случайной величины в каких-то заданных пределах x_1 и x_2, удобно воспользоваться зависимостью

$$P(x_1 < x < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right). \qquad (3.19)$$

Функция Ф нечетная, поэтому при возможном отрицательном значении x_1–a знак «–» можно вынести за знак функции.

Пример. Математическое ожидание a и стандарт σ определенной случайной величины х соответственно равны: a = 30; σ = 10. Найти вероятность того, что х находится в пределах 10 и 50.

Решение: x_1 = 10; x_2 = 50:

$$P(10 < x < 50) = \Phi\left(\frac{50 - 30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 30}{10}\right) = \Phi(2) + \Phi(2) = 2\Phi(2).$$

По таблицам для интеграла Лапласа находим $\Phi(2) = 0{,}4772$ (Приложение В).

Искомая вероятность $P(10 < x < 50) = 2 \times 0{,}4772 = 0{,}9544$, т. е. очень высокая.

ЛЕКЦИЯ 4
ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ПРАКТИЧЕСКОЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

План лекции:

1. Законы распределения случайных величин В. Вейбулла и Э. Гумбеля.
2. Закон распределения Пуассона.
3. Примеры практического применения закона Пуассона в задачах надежности.

1 Законы распределения случайных величин В. Вейбулла и Э. Гумбеля

Распределение случайных величин не всегда соответствует какому-то определенному закону. Идеального закона, который бы описывал все особенности распределения, не существует. Поэтому различными авторами предлагались свои законы распределения, которые каким-то образом могли хотя бы приближенно характеризовать наблюдаемый процесс или явление.

Помимо нормального закона, рассмотренного выше, существует еще целая группа других законов. Рассмотрим вначале закон Вейбулла, предложенного шведским исследователем в 1951 году.

Распределение Вейбулла – это двухпараметрическое семейство абсолютно непрерывных распределений, имеющих вид:

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{-\beta}}, \tag{4.1}$$

где θ и β – задаваемые заранее параметры;

x – значение случайной величины.

Плотность распределения $P(x)$ определяется путем дифференцирования уравнения (4.1); находится первая производная от функции распределения $F(x)$:

$$P(x) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{-\beta+1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{-\beta}}. \tag{4.2}$$

В зависимости от значений θ и β определяется характер плотности распределения, приведенный на рисунке 4.1.

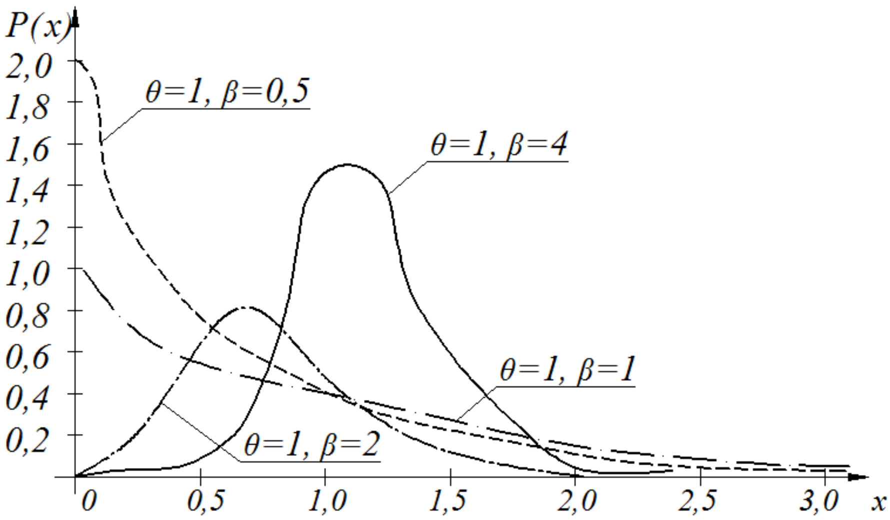

Рисунок 4.1 – Общий вид распределения плотности по В. Вейбуллу в зависимости от параметров θ и β

Закон Вейбулла используют при исследовании материалов, имеющих хрупкое разрушение (высокопрочные камни и высокопрочный бетон). При рассмотрении кривых на рисунке 4.1 могут появиться так называемые гамма-функции, имеющие вид

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{\,x-1}\cdot e^{-\,t}\,dt. \tag{4.3}$$

Для гамма-функции $\Gamma(n+1)=n!$

Представляет определенный интерес и закон распределения случайных величин, предложенный Э. Гумбелем в 1927–1932 годах.

Этот так называемый закон распределения экстремальных значений случайных функций (наибольших и наименьших). Чаще всего определяются три наибольших значений и три наименьших.

Интегральный закон распределения по предложению Э. Гумбеля имеет двойную экспоненциальную зависимость и выглядит следующим образом:

$$P(x)=e^{-\,e^{\left(\frac{\alpha-x}{\beta}\right)}}. \tag{4.4}$$

Плотность распределения вероятности будет иметь вид:

$$P(x)=\frac{dP(x)}{dx}=\frac{1}{\beta}e^{\left(\frac{\alpha-x}{\beta}\right)-e^{\left(-\frac{\alpha-x}{\beta}\right)}}, \qquad (4.5)$$

при этом $\beta > 0$, $-\infty < x < \infty$ и $-\infty < \alpha < \infty$.

Параметры α и β связаны с математическим ожиданием $\alpha(\bar{x})$ и дисперсией $D=\sigma^2$ следующими формулами:

$$a=\alpha+0{,}5776\beta, \\ \sigma^2=1{,}645\beta^2. \qquad (4.6)$$

Представляет интерес распределение крайних значений случайной величины *X*. Вероятность распределения максимальных значений обозначим $P_{nn}(x)$, а минимальных $P_{n1}(x)$, тогда

$$P_{nn}(x)=nP^{n-1}(x)p(x), \qquad (4.7)$$

$$P_{n1}(x)=n[1-P(x)]^{n-1}\cdot p(x). \qquad (4.8)$$

Плотность вероятностей крайних значений приведена на рисунке 4.2 [12].

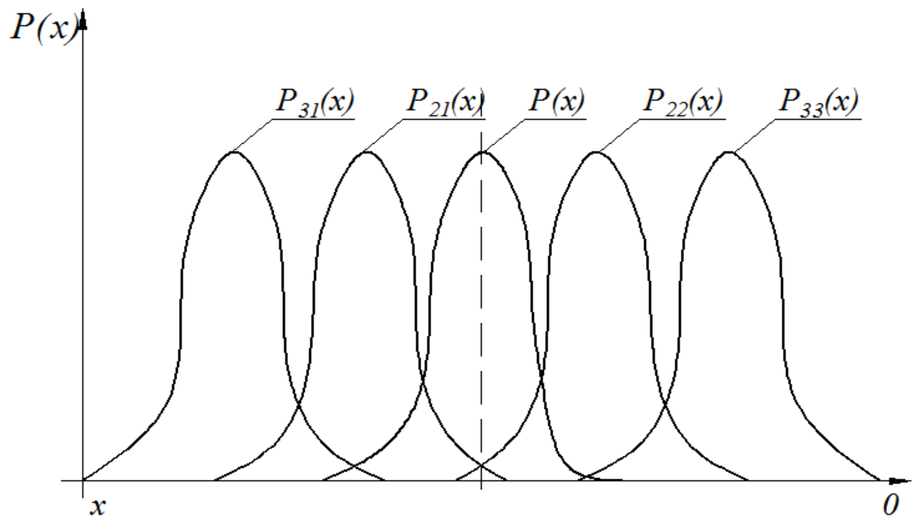

Рисунок 4.2 – Плотность вероятностей распределения максимальных и минимальных случайных величин, исходя из формул (4.7) и (4.8)

2 Закон распределения Пуассона

В теории надежности наряду с нормальным законом распределения, а также законами В. Вейбулла и Э. Гумбеля широкое применение имеет закон Пуассона.

Этот закон описывает количество событий, которые происходят на протяжении одинакового времени, независимо друг от друга, с постоянной интенсивностью. Иногда закон Пуассона называют законом редких явлений.

Случайная величина будет распределена за законом Пуассона, если вероятность того, что она приобретет определенное значение *m*, будет определяться формулой:

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda \cdot t} (m = 0, 1, 2, \dots n), \tag{4.9}$$

где λ – некоторая положительная величина, которую называют параметром закона Пуассона или показателем интенсивности отказов.

Основные параметры развития случайных величин для закона Пуассона выглядят следующим образом:

а) математическое ожидание

$$M(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda \cdot t}; \tag{4.10}$$

б) дисперсия случайной величины, распределенная по закону Пуассона:

$$D(x) = \lambda; \quad \lambda \cong \frac{1}{\bar{x}}, \tag{4.11}$$

где $\bar{x}$ – среднее значение случайной величины.

График зависимости вероятности события *m* от его определенного значения показан на рисунке 4.3.

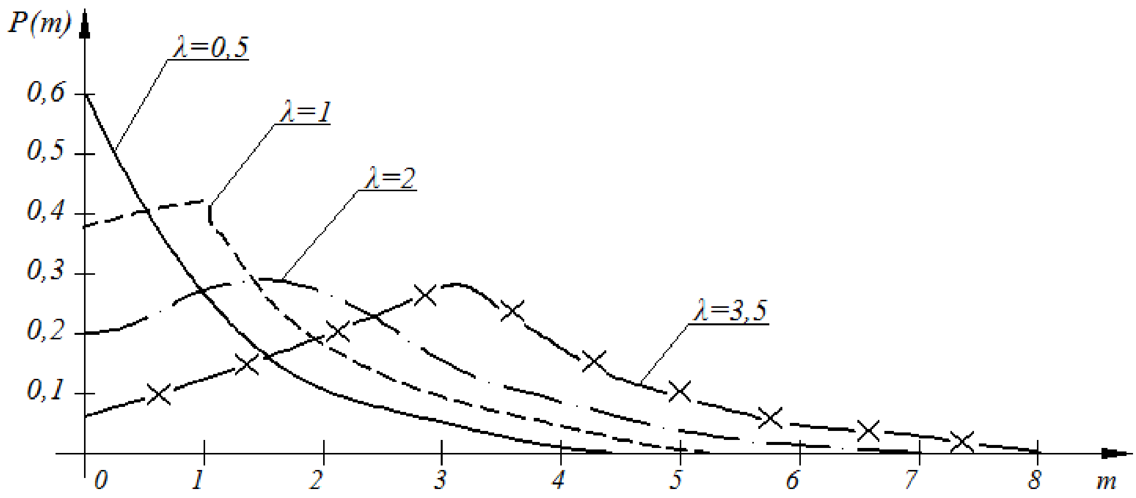

Рисунок 4.3 – Зависимость вероятности события *m* от значения *m* при различных λ

Вероятность того, что случайная величина *X*, распределенная по закону Пуассона, приобретет значение, не меньшее, чем заданная $X_к$, записывается так

$$R_k = P(x >> x_k). \tag{4.12}$$

Вероятность R_k можно вычислить как сумму вероятностей P_m:

$$R_k = P_k + P_{k+1} + P_{k+2} + \ldots + P_{k+n} = \sum_{m=k}^{\infty} P_{mi}. \tag{4.13}$$

В отдельных задачах надежности используют упрощенный показательный закон Пуассона в следующем виде:

$$R(t) = e^{-\lambda \cdot t}, \tag{4.14}$$

где λ – показатель интенсивности отказов, который может определяться по формуле:

$$\lambda = \frac{\Delta n(t)}{n}, \tag{4.15}$$

$\Delta n(t)$ – количество элементов, вышедших из строя за время t;

n – общее количество наблюдаемых элементов или событий.

3 Примеры практического применения закона Пуассона в задачах надежности

Рассмотрим несколько примеров применения закона Пуассона в задачах надежности.

Пример 1. В железобетонной арке имеются металлические подвески, поддерживающие горизонтальную затяжку. Из опыта использования этих подвесок известно, что на 1 000 подвесок могут выйти из строя по различным причинам 2 подвески в течение 10 лет. Найти вероятность того, что одна затяжка проработает безотказно 50 лет. Из условия задачи λ = 2 : 1 000 = 0,002. Вероятность безотказной работы может быть определена по формуле (4.14)

$$R(t) = e^{-0,002 \cdot 50} = e^{-0,1} = \frac{1}{e^{0,1}} = \frac{1}{1,105} = 0,904.$$

То есть показатель надежности достаточно высокий. Из приведенного примера можно оценить влияние параметра λ на надежность работы конструкции. Чем меньше показатель λ, тем выше надежность работы конструкции. При λ = 0,02 · 50 = 1 показатель надежности падает до 0,368, что является очень маленькой надежностью.

Пример 2. Завод-изготовитель отправляет на базу 5000 легко повреждаемых изделий. Вероятность того, что в дороге может повредиться какое-то изделие составляет $P(x) = 0{,}0003$. Найти вероятность того, что на базу могут поступить три поврежденных изделия.

При решении данной задачи вначале определим λ:

$$\lambda = P(x) \cdot n = 0{,}0003 \cdot 5000 = 1{,}5.$$

Затем воспользуемся общий формулой закона Пуассона (4.9) при значении $m = 3$:

$$P_{5000}^{(3)}(t = 1) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda \cdot t} = \frac{1{,}5^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} e^{-1{,}5 \cdot 1} = \frac{3{,}375}{6} \cdot \frac{1}{4{,}4817} = 0{,}1255,$$

т. е. вероятность повреждения деталей небольшая, но тем не менее возможна.

ЛЕКЦИЯ 5

СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ, КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

План лекции:

1. Случайные функции и их основные характеристики.
2. Корреляционные функции и их свойства.
3. Выбросы случайной функции.

1 Случайные функции и их основные характеристики

Наряду с понятием случайных однородных событий или случайных величин рассматривается в теории вероятностей и понятие **случайных функций** [12, 14, 15].

Случайной называют функцию, значение которой для каждого аргумента есть случайная величина. Если аргументом является время, то случайную функцию называют **случайным процессом**.

Существуют случайные функции с однородностью, т. е. их вероятностные характеристики не меняются при каких-либо сдвигах аргумента. Такие случайные функции называются стационарными. Рассмотрим несколько примеров случайных функций. Процесс твердения бетона во времени происходит для различных образцов по разным функциям. На рисунке 5.1 приведены различные функции твердения для бетонных образцов 15х15х15 см.

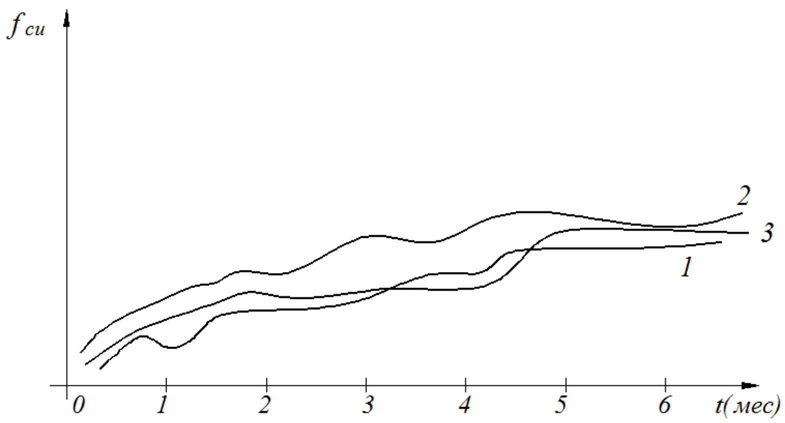

Рисунок 5.1 – Различные функции твердения бетона во времени для трех образцов (1, 2, 3) размерами 15 х 15 х 15 см

Другими словами, для одного и того же класса бетона процесс твердения происходит по результатам определения прочности бетона в виде случайных функций.

При движении самолета от пункта А в пункт Б скорость движения V во времени меняется. Это связано с метеорологическими условиями, составом топлива, командами диспетчерской службы и другими условиями. За весь интервал движения от t_1 до t_2 скорость движения самолета не является постоянной величиной, хотя время прибытия в конечный пункт Б может быть фиксированной величиной в заданных пределах (рис. 5.2).

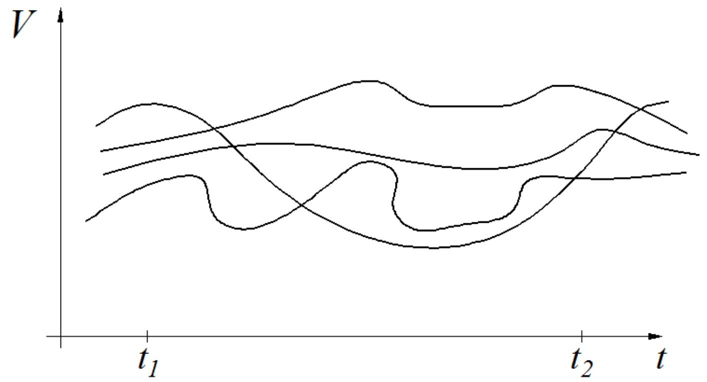

Рисунок 5.2 – Случайные функции скорости самолета V
от времени движения в пути *t*

На рисунке 5.3 приведен пример изменения прочности арматуры на фиксированном участке l_1-l_2, это может быть отрезок, длиной 2, 3 или 4 м. Данная прочность представляет собой также случайную функцию.

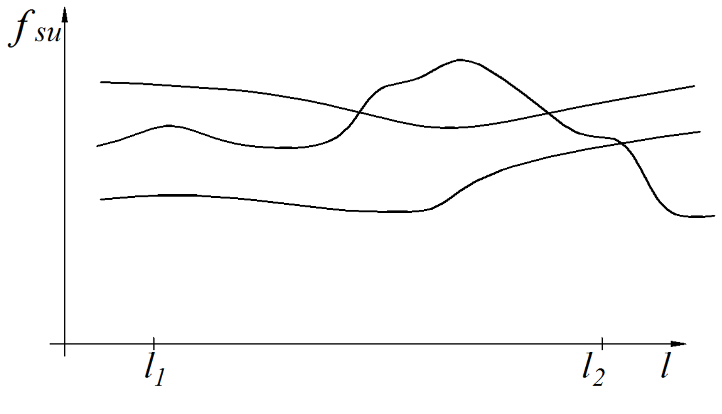

Рисунок 5.3 – Измененные прочности арматурного стержня
на участке от l_1 до l_2

Если аргументом в случайной функции является время, то случайную функцию называют случайным процессом.

В случайных функциях может быть один аргумент, а может быть несколько. Например, состояние атмосферы зависит от внешнего атмосферного давления, направления ветра, температуры среды, расположения наблюдаемой точки и других факторов.

При дальнейшем изучении мы ограничимся только одним аргументом, и в качестве такого аргумента будет служить время t.

Получение конкретных значений случайной функции для рассматриваемого аргумента t можно рассматривать как совокупность ее **реализаций**.

Чаще всего обозначается случайная функция через $X(t)$, а если другой аргумент, например, длина l, тогда обозначается случайная функция $X(l)$.

Реализации функции $X(t)$ обозначают строчными буквами $x_1(t)$; $x_2(t)$; $x_3(t)$ и т. д.

Случайная функция $X(t)$ имеет все те же характеристики, что и случайная величина – математическое ожидание, дисперсию и стандарт.

Математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называют неслучайную величину $m_x(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента t равно математическому ожиданию сечения, соответствующего этому же фиксированному значению аргумента t:

$$m_x(t) = M[X(t)]. \tag{5.1}$$

Геометрически математическое ожидание случайной функции можно представить, как условно «среднюю кривую», вокруг которой расположены другие кривые – реализации (рис. 5.4).

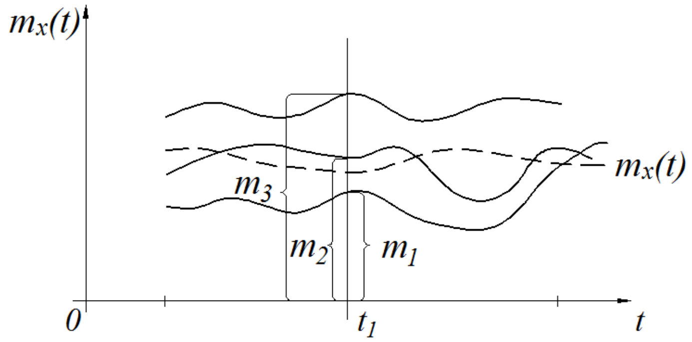

Рисунок 5.4 – Условное представление математического ожидания случайной функции *X(t)*

Основные свойства математического ожидания сводятся к следующим:

а) математическое ожидание неслучайной функции равно самой неслучайной функции

$$m_x(t)M[X]=M[X]; \tag{5.2}$$

б) неслучайный множитель $\varphi(t)$ можно вынести за знак математического ожидания

$$M[\varphi(t)X(t)]=\varphi(t)[M(X(t)]=m_x(t)\cdot\varphi(t); \tag{5.3}$$

в) математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожиданий слагаемых

$$M[X(tx)+Y(ty)]=m_x(t)+m_y(t). \tag{5.4}$$

Дисперсией случайной функции *X(t)* называют неслучайную неотрицательную функцию $D_x(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента *t* равно дисперсии сечения, соответствующему этому же фиксированному значению аргумента:

$$D_x(t)=D[x(t)]. \tag{5.5}$$

Дисперсия характеризует степень рассеивания возможных реализаций (кривых) вокруг математического ожидания случайной функции (средней кривой). При фиксированном значении аргумента (t) дисперсия характеризует степень рассеивания возможных значений (ординат) сечения вокруг математического ожидания сечения (или средней ординаты).

Пример. Найти дисперсию $D_x(t)$ функции $X(t) = U\sin t$, где U – случайная величина, при этом $D(u)$ – дисперсия заданного сечения, равна 6.

Неслучайный множитель *sin t* можно вынести за знак дисперсии, но предварительно возведя его в квадрат (см. формулу 3.5).

$$D_x(t) = D[X(t)] = D[U\,sint] = sin^2 t D[u] = 6 sin^2 t.$$

Средним квадратическим отклонением (стандартом) случайной функции называют квадратный корень из дисперсии

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}. \qquad (5.6)$$

2 Корреляционные функции и их свойства

В ряде случаев общих характеристик случайных функций, т. е. математического ожидания, дисперсии, стандарта, недостаточно для оценки (всесторонней) случайной функции.

В этом случае прибегают к понятию корреляционной функции.

Рассмотрим некоторую случайную функцию $X(t)$. При двух фиксированных значениях аргумента, например, $t = t_1$ и $t = t_2$ получим в сечениях систему двух случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$, существует при этом понятие **корреляционного момента**, который равен произведению этих величин:

$$M(t_1, t_2) = M[x(t_1) \cdot x(t_2)]. \qquad (5.7)$$

Введем понятие центрированной случайной функции, которая представляет собой аналог центрированной случайной величины $\overset{o}{x} = x - m_x$, тогда корреляционный момент

$$M(\overset{o}{x}(t_1)\overset{o}{x}(t_2)) = M[\overset{o}{x}(t_1) \cdot \overset{o}{x}(t_2)]. \qquad (5.8)$$

Каждая пара чисел t_1 и t_2 определяет систему двух случайных величин, а каждой такой системе соответствует ее корреляционный момент; это означает, что корреляционный момент случайной функции есть функция (неслучайная) двух независимых аргументов t_1 и t_2, ее обозначают $K_x(t_1, t_2)$

$$K_x(t_1 t_2) = M[\overset{o}{x}(t_1) \cdot \overset{o}{x}(t_2)], \tag{5.9}$$

при $t_1 = t_2$,

$$K_x(t_1, t_2) = M[\overset{o}{x}(t)]^2 = D_x(t) \tag{5.10}$$

Достаточно знать корреляционную функцию, чтобы найти дисперсию случайной функции.

Пример. Задана случайная функция $X(t) = U \cdot t$, где U случайная величина, при этом известно, что $M(U) = 4$; $D(U) = 10$. Определить: корреляционную функцию; дисперсию заданной случайной функции.

Определим математическое ожидание случайной функции

$$m_x(t) = M[X(t)] = M[U \cdot t] = tM(U) = 4t.$$

Найдем центрированную функцию:

$$X(t) = X(t) - m_x(t) = Ut - 4t = t(U - 4).$$

Отсюда для аргументов t_1 и t_2

$$\overset{o}{x}(t_1) = (U-4)t_1; \qquad \overset{o}{x}(t_2) = (U-4)t_2.$$

Искомая корреляционная функция:

$$K_x(t_1, t_2) = M[\overset{o}{x}(t_1) \cdot \overset{o}{x}(t_2)] = M[(U-4)t_1 \cdot (U-4)t_2] = t_1 t_2 M[(U-4)^2].$$

$M[(U-4)^2]$ – это дисперсия функции U, она по условию задачи равна 10. Тогда $K_x(t_1, t_2) = 10t_1 \cdot t_2$

Для определения дисперсии случайной функции необходимо приравнять $t_1 = t_2 = t$, отсюда $D_x(t) = 10t^2$.

Стандарт для случайной функции $\sigma_x(t) = \sqrt{10t^2} = t\sqrt{10}$.

Если используются две случайные величины $X(t)$ и $Y(t)$ в случайных функциях, то используется корреляционный момент μ_{xy}, который равный:

$$\mu_{xy}(K_{xy}) = [x_i - M(x)][y_j - M(y)]p(x_i, y_j). \tag{5.11}$$

Степень линейной зависимости двух случайных функций определяется коэффициентом корреляции:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \tag{5.12}$$

где σ_x и σ_y – стандарты корреляционной функции для x и y.

Величину r_{xy} можно определить по формуле:

$$r_x(t_1,t_2) = \frac{K_x(t_1,t_2)}{\sqrt{K_x(t_1,t_1)}\sqrt{K_x(t_2,t_2)}} \tag{5.13}$$

Пример. Найти коэффициент корреляции случайной функции $X(t)$ по ее известной корреляционной функции $K_x(t_1,t_2) = 5\cos(t_2 - t_1)$.

При решении данной задачи используем формулу (5.13)

$$r_x(t_1,t_2) = \frac{5\cos(t_1 - t_2)}{\sqrt{5\cos(t_1 - t_1)}\sqrt{5\cos(t_2 - t_2)}} = \frac{5\cos(t_2 - t_1)}{\sqrt{5\cdot 1}\sqrt{5\cdot 1}} = \cos(t_2 - t_1) \tag{5.14}$$

Свойства корреляционной функции

1. При перестановке аргументов корреляционная функция не меняется:

$$K_x(t_1,t_2) = K_x(t_2,t_1) \tag{5.15}$$

2. Прибавление к случайной функции X(t) неслучайного слагаемого φ(t) не изменяет ее корреляционной функции:

Если $$y(t) = X(t) + \varphi(t),$$

то $$K_y(t_1,t_2) = K_x(t_1,t_2) \tag{5.16}$$

3. Абсолютная величина корреляционной функции не превышает среднего геометрического дисперсий, соответствующих сечений:

$$\left|K_x(t_1,t_2)\right| \le \sqrt{D_x(t_1)\cdot D_x(t_2)} \tag{5.17}$$

3 Выбросы случайной функции

В случайных функциях можно в отдельных промежутках времени наблюдать отдельные резкие скачки, которые называются «выбросами» (рис. 5.5).

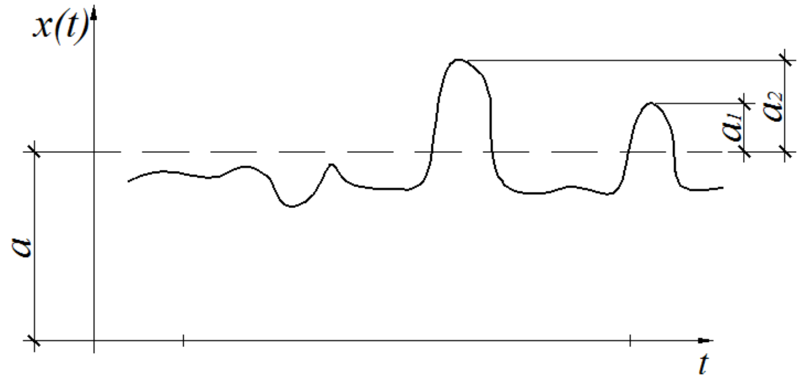

Рисунок 5.5 – Общий вид выбросов a_1 и a_2 для случайной функции *x(t)*

Очень важно оценить вероятность таких выбросов в течение заданного времени *t*. Скорость такого выброса можно оценить, получив первую производную от *x(t)*. Тогда вероятность выброса определяется по формуле:

$$p(a/t) = \int_0^\infty p(a, v/t) v \cdot dv, \tag{5.18}$$

где $v(t) = x'(t)$.

Вероятность непоявления выброса можно оценить по упрощенной зависимости:

$$Q = e^{-N_a}, \tag{5.19}$$

где *Na* – количество выбросов за определенное время.

Например, в течение 10 лет наблюдалось 2 неблагоприятных выброса. Тогда, вероятность непоявления выбросов можно оценить по формуле (5.19):

$Q(t) = e^{-2} = \dfrac{1}{2{,}713^2} = 0{,}135$, т. е. вероятность невысокая.

ЛЕКЦИЯ 6
ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

План лекции:

1. Характеристика принципа Марковского процесса.
2. Однородная цепь, переходные вероятности, матрица перехода.
3. Эмпирические распределения на основании статистических данных.

1 Характеристика принципа Марковского процесса

В ряде случаев можно наблюдать не один какой-то результат или процесс, а целую группу процессов, событий, явлений, при этом значения этих процессов носят произвольные величины. Вся эта группа событий, явлений представляет какую-то систему, имеющую определенную связь или не имеющую.

Для анализа работы и расчета надежности отдельных конструкций или зданий в целом при переменных режимах загружения очень часто используют так называемые **простые цепи Маркова** [12, 15].

Случайный процесс $X(t)$, который приобретает конечное множество значений x_1, x_2, …, x_n в каждый равноудаленный промежуток времени t_1, t_2, …, t_n будет простой цепью Маркова, если при любом времени t_i закон распределения ординат процесса $X(t)$ не зависит от значений ординат предыдущих $x(t_{i-1})$, $x(t_{i-2})$, $x(t_{i-3})$ и его можно полностью описать законом определения предыдущей ординаты $x(t_{i-1})$. Другими словами, дискретная случайная последовательность состояний некоторой системы называется марковским случайным процессом, когда для каждого момента времени вероятность какого-либо состояния системы зависит только от состояния системы в данный момент и не зависит от того, каким образом эта система пришла в это состояние.

Вероятность того, что простая цепь Маркова в момент времени t_j приобретает значения x_j при условии, что в момент времени t_k она имела значение x_k:

$$p[x(t_j) = x_j / x(t_k) = x_k] = p_{x_j x_k}(t_j, t_k). \tag{6.1}$$

Общей цепью Маркова называют последовательность каких-то испытаний или состояний, в каждом из которых система принимает только одно из k состояний полной возможной группы состояний, при этом условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s-том испытании система будет находиться в состоянии j, при условии, что после (s-1)-го испытания она находилась в состоянии i, не зависит от результатов остальных, ранее произведенных испытаний.

Цепью Маркова **с дискретным временем** называют цепь, изменение состояний которой происходит в определенные фиксированные моменты времени.

Цепью Маркова **с непрерывным временем** называют цепь, изменение состояний которой происходит в любые случайные возможные моменты времени.

Рассмотрим простейший пример, состоящий в том, что условный предмет (кубик или пластинка) лежит на горизонтальной плоскости. Под воздействием толкателя или удара снизу заданная частица А будет перемещаться на заданной плоскости в моменты времени t_1, t_2, t_3, …, t_n. С вероятностью $\boldsymbol{p}$ частица A смещается вправо и с вероятностью $1-p$ влево (рис. 6.1).

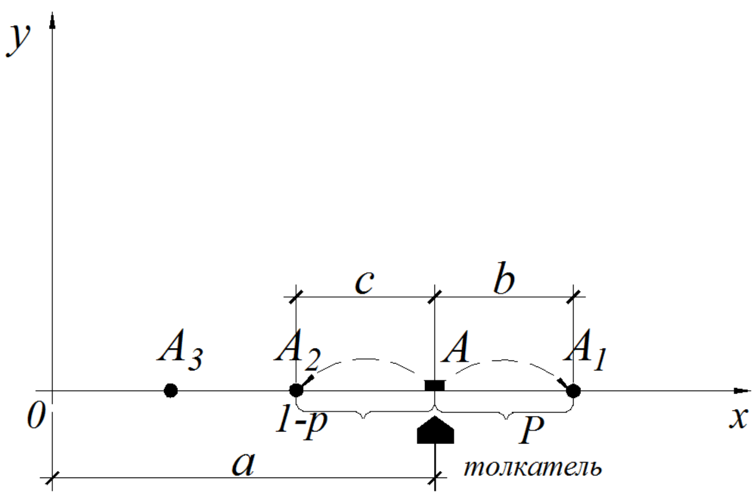

Рисунок 6.1 – Случайное перемещение точки A в положение A_1 или A_2 при ударе ее снизу толкателем

Положение (абсцисса и ордината) точки *A* (условного кубика или пластинки) после толчка снизу зависит от того, где она находилась в исходном состоянии, т. е. от абсциссы *a*, и не зависит то того, как она пришла в это исходное состояние. В дальнейшем времени при последующих толчках точка из положения A_2 может переместиться в точку A_3, которая не зависит от предыдущих положений A_1 и A_2. Таким образом, случайное «блуждание» точки *A* является примером однородной цепи Маркова с дискретным временем.

2 Однородная цепь, переходные вероятности, матрица перехода

Однородной называется цепь Маркова, если условная вероятность $p_{ij}(s)$, т. е. переход из состояния *i* в состоянии *j*, не зависит от порядка и номера испытания. Поэтому вместо $p_{ij}(s)$ можно сокращенно писать для однородной цепи Маркова p_{ij}.

Существует несколько теорий для цепей Маркова. Мы ограничимся рассмотрением только теории конечных однородных цепей Маркова. В этой теории важное значение имеет понятие **переходной вероятности**.

Переходной вероятностью p_{ij} называют условную вероятность того, что из состояния *i* (в котором система оказалась в результате некоторого испытания, безразлично какого номера) в итоге следующего испытания система перейдет в состояние *j*.

Таким образом, в обозначении p_{ij} первый индекс указывает номер предшествующего состояния, в второй – номер последующего состояния. Например, p_{11} – вероятность перехода из первого состояния в первое, т. е. система вернулась в исходное состояние; p_{23} – вероятность перехода из второго состояния в третье. Пусть число состояний конечное, заранее известное и равно *к*. Тогда возможно несколько переходных вероятностей, соответствующих количеству *к*. В этом случае используется матрица перехода, которую можно обозначить буквой P_1 и она содержит все переходные вероятности [15, 16]:

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \cdots & p_{2n} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \cdots & p_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & p_{k3} \cdots & p_{kn} \end{vmatrix}. \tag{6.2}$$

Так как в каждой строке матрицы помещены вероятности событий (перехода из одного и того же состояния i в любое возможное состояние j), которые образуют полную группу, то сумма вероятностей этих событий равна единице. Другими словами, сумма переходных вероятностей каждой строки матрицы перехода равна единице:

$$\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1 (j = 1, 2, 3 \ldots k). \tag{6.3}$$

Рассмотрим пример матрицы перехода системы, которая может находится в трех состояниях:

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{vmatrix} 0{,}5(p_{11}) & 0{,}2(p_{12}) & 0{,}3(p_{13}) \\ 0{,}4(p_{21}) & 0{,}5(p_{22}) & 0{,}1(p_{23}) \\ 0{,}6(p_{31}) & 0{,}3(p_{32}) & 0{,}1(p_{33}) \end{vmatrix}. \tag{6.4}$$

Здесь $p_{11} = 0{,}5$ – вероятность перехода из состояния $i = 1$ в это же состоянии $j = 1$; $p_{21} = 0{,}4$ – вероятность перехода из состояния $i = 2$ в состояние $j = 1$. Аналогичный смысл имеют и остальные элементы матрицы.

В рассмотрении цепей Маркова представляет особый интерес так называемое **равенство Маркова**.

Обозначим $P_{ij(n)}$ вероятность того, что в результате n шагов (испытаний) система перейдет из состояния i в состоянии j. Например, $P_{25(10)}$ – вероятность перехода за 10 шагов из второго состояния в пятое. Отметим, что при n=1 получим переходные вероятности:

$$P_{ij(1)} = p_{ij}. \tag{6.5}$$

Поставим перед собой задачу: зная переходные вероятности p_{ij}, найти вероятности $P_{ij(n)}$ перехода системы из состояния i в состоянии j за n шагов. Введем промежуточное состояние r. Тогда за m шагов система перейдет в состояние r с вероятностью $P_{ir(m)}$, после чего за оставшиеся n-m часов из промежуточного состояния r она перейдет в состояние j с вероятностью $P_{rj(n-m)}$. По формуле полной вероятности

$$P_{ij(n)} = \sum_{r=1}^{k} p_{ir(m)} \cdot p_{rj(n-m)}. \quad (6.6)$$

Эту формулу и называют равенством Маркова.

Например, для шага 2

$$P_{ij(2)} = \sum_{r=1}^{k} P_{ir(1)} P_{rj(2-1)},$$

или

$$P_{ij(2)} = \sum_{r=1}^{k} p_{ir} \, p_{rj}. \quad (6.7)$$

Таким образом, по формуле (6.7) можно найти все вероятности $P_{ij(2)}$, следовательно, и саму матрицу P_2. Так как непосредственное использование формулы (6.7) может оказаться утомительным, а матричное исчисление ведет к цели быстрее, запишем вытекающее из формулы (6.7) соотношение в матричной форме:

$$\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_1^{\,2};$$

в общем виде данная запись будет иметь вид:

$$\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{P}_1^{\,n}. \quad (6.8)$$

Пример. Задана матрица перехода $\boldsymbol{P}_1 = \begin{vmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{vmatrix}$. Найти матрицу перехода $\boldsymbol{P}_2$.

Воспользовались формулой (6.8), можно записать

$$\boldsymbol{P_2} = \begin{vmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{vmatrix}$$

Далее, перемножая эти матрицы, получим:

$$\gamma_{11} = 0,4 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 03 = 0,34; \ \gamma_{12} = 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,7 = 0,66$$

$$\gamma_{21} = 0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,3 = 0,33; \ \gamma_{22} = 0,3 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,7 = 0,67.$$

Окончательно получим

$$\boldsymbol{P}_2 = \begin{vmatrix} 0,34 & 0,66 \\ 0,33 & 0,67 \end{vmatrix}. \quad (6.9)$$

3 Эмпирические распределения на основании статистических данных

Случайные величины могут получаться путем задания их теоретически, а могут они получаться в результате каких-то экспериментальных исследований или целенаправленных наблюдений.

Методы описания и анализа экспериментальных данных, полученных при наблюдении за случайными величинами, относятся к разряду математической статистики. В отличие от теории вероятностей, которая оперирует параметрами теоретического распределения случайных величин, математическая статистика имеет дело с правилами получения, обработки и изображением эмпирических (экспериментальных) распределений. В этом случае задача сводится к приближенному определению неизвестных параметров распределения и к оценке надежности полученных значений. Например, если предварительно известно, что исследуемое распределение случайных величин близко подходит к нормальному закону распределения, тогда задача сводится к определению математического ожидания и дисперсии, а точнее – к надежности границ, в которых эти параметры лежат с наперед заданной точностью.

Если получены n результатов со значениями x_1, x_2, x_3, …, x_n, которые образуют какой-то вариационный ряд, то вначале эти значения группируются с небольшими интервалами отклонений, затем определяются средние относительные частоты повторений для каждого интервала и графически могут быть представлены на рисунке 6.2 в виде трех модификаций: гистограмм (а), полигонов (б), кумулятивной кривой (в) (рис. 6.2).

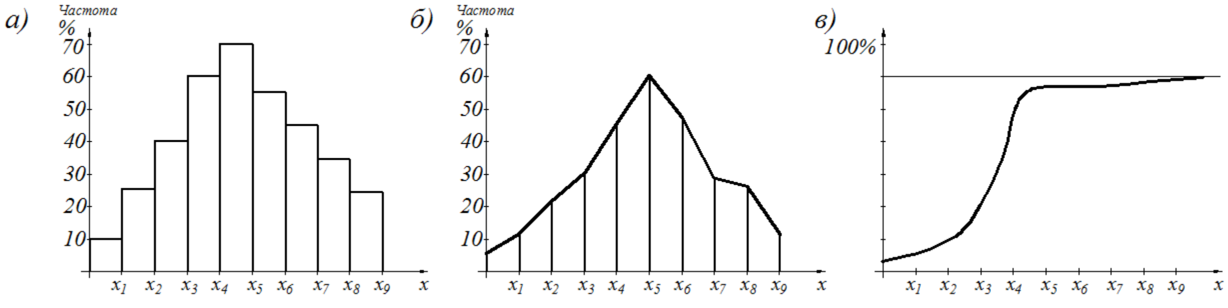

Рисунок 6.2 – Возможное распределение полученных экспериментальных данных

Полученные гистограмма или полигон соответствуют кривой распределения плотности вероятности, кумулятивная кривая (статистическая функция распределения) соответствует теоретической **функции распределения**. Основными параметрами эмпирического распределения являются: – среднее арифметическое значение; – среднее квадратическое отклонение (стандарт) и дисперсия.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad \sigma^2(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = D(x). \tag{6.10}$$

Наряду с приведенной дисперсией D(x) по формуле (6.10) существует в практике анализа экспериментальных исследований так называемая смещенная оценка дисперсии и несмещенная. Последняя определяется по формуле:

$$D(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2. \tag{6.11}$$

В этом случае разница между математическим ожиданием *M(x)* и дисперсий *D(x)* становится незначительной.

Коэффициент изменчивости экспериментальной величины $\nu = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ аналогичен коэффициенту вариации $\nu = \frac{\sigma(x)}{\bar{x}}$.

ЛЕКЦИЯ 7
СОПОСТАВЛЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ И ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ДАННЫХ. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

План лекции:

1. Оценка степени совпадения теоретического и экспериментального распределений. Критерии Колмогорова и Пирсона.
2. Закон больших чисел. Неравенство и теорема П. Л. Чебышева.
3. Теорема Бернулли и его формула.

1 Оценка степени совпадения теоретического и экспериментального распределений. Критерии Колмогорова и Пирсона

Сопоставление эмпирического и теоретического распределений плотности или их функций – весьма ответственная и сложная задача. Можно получить эмпирическую кривую, вовсе не похожую на предыдущую, если использовать измененные вариационные ряды, в этом случае не будет совпадения экспериментальных и теоретических графиков или кривых.

Существует целый ряд способов оценки близости совпадений распределений (эмпирического и теоретического), которые называют **критериями согласия**.

Одним из таких критериев может служить **критерий Колмогорова**. Данный критерий дает возможность сделать вывод о близости теоретической функции распределения *P(x)* к эмпирической функции $\overline{P}(x)$ по наибольшей разнице между ними:

$$D_n = max\,|\,P(x) - \overline{P}(x)\,|. \qquad (7.1)$$

Если функции *P(x)* и $\overline{P}(x)$ непрерывны, а число *n* (количество результатов) достаточно велико, то вероятность того, что отклонение $D_n\sqrt{n}$ превысит заданное значение λ, может быть определена по формуле:

$$P(D_n\sqrt{n} > \lambda) = 1 - \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} (-1)^{\alpha} \cdot e^{-2\alpha^2\lambda^2}, \qquad (7.2)$$

где λ – уровень значимости;

$\sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} (-1)^{\alpha} \cdot e^{-2\alpha^2\lambda^2} = K_x$ – функция критерия согласия.

Величина K_x протабулирована и приведена во многих справочниках. Практическое применение критерия Колмогорова состоит в вычислении математической разности D_n и определении вероятности расхождения по формуле:

$$P(D > D_n) = 1 - K_x(D_n\sqrt{n}) \qquad (7.3)$$

Если эта разность мала (например, меньше 0,1) то есть D_n=0.05, то это означает, что существует маловероятное отклонение, которое нельзя объяснить случайностью измеренных результатов. Расхождение между $P(x)$ и $\overline{P}(x)$ считают существенным, если вероятность, посчитанная по формуле (7.3), объясняется случайным характером измеренной величины. Если n имеет большое значение, сравнительно незначительные отклонения могут свидетельствовать об отсутствии согласования между эмпирическим распределением и выбранной теоретической кривой.

Другой способ оценки критерия согласия основывается на использовании χ^2 – распределения Пирсона.

Начальными данными для использования критерия Пирсона есть количество наблюдений n и значения какого-то m_i в i-том интервале. Определив оценку параметров в теоретическом распределении P(x), вычисляют вероятности попадания в каждый из интервалов (x_{i-1}, x_i):

$$P_i = P(x_i) - P(x_{i-1}),$$

а потом находят величину

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i}. \qquad (7.4)$$

После этого определяется величина χ^2 без индекса q по формуле:

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 . \qquad (7.5)$$

Производится сравнение параметров χ_q^2 и χ^2. Если вероятность совпадения мала, то разность между экспериментальной и теоретической кривой значительна и требуется другая теоретическая кривая. Если же вероятность совпадения велика, то совпадение теоретической и экспериментальной кривых вполне возможно [12, 14].

2 Закон больших чисел. Неравенство и теорема П. Л. Чебышева

Как известно, нельзя заранее уверенно предвидеть, какое из возможных значений примет случайная величина в итоге испытания; это зависит от многих причин и обстоятельств, учесть которые сложно и порой невозможно. Но оказывается, что при некоторых сравнительно широких условиях испытаний или наблюдений суммарное поведение достаточно большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится даже закономерным.

Для практики очень важно знание условий, при выполнении которых совокупное действие очень многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, так как позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия указываются в теоремах, носящих общее название **закона больших чисел**. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли (наряду с этими имеются и другие теоремы, которые в данном конспекте не рассматриваются). Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли – простейшим. Рассмотрим вначале более употребительное неравенство П. Л. Чебышева [15, 27].

Неравенство П. Л. Чебышева справедливо для дискретных и непрерывных случайных величин.

Рассмотрим дискретную случайную величину X, заданную таблицей распределения:

$$X \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \ldots x_n$$

$$p \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3 \ldots p_n$$

Для данного распределения всегда можно найти математическое ожидание $M(x)$.

Поставим перед собой задачу оценить вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания M(x) не превышает по абсолютной величине положительного числа ε. Если ε достаточно мало, то мы оценим таким образом вероятность того, что X примет значения, достаточно близкие к своему математическому ожиданию M(x).

В этом случае неравенство П. Л. Чебышева формулируется следующим образом:

Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, будет не меньше, чем число $1-\frac{D(x)}{\varepsilon^2}$, где $D(x)$ – дисперсия случайной величины X.

Метаматически неравенство П. Л. Чебышева выглядит в виде формулы:

$$P(|x-M(x)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(x)}{\varepsilon^2}. \qquad (7.6)$$

<u>*Пример 1.*</u> Используя неравенство П. Л. Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина X отклонится от своего математического ожидания не менее, чем на 3 среднеквадратического отклонения, т. е. на $\varepsilon=3\sigma$.

Решение. Так как $D(x)=\sigma^2$, то можно неравенство (7.6) записать в следующем виде:

$$P(|x-M(x)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2};$$

Правая часть неравенства равна $1-\frac{1}{9}=0{,}889$, то есть мы определили вероятность того, что величина X отклонится от $M(x)$ на 3σ с надежностью 0,889, иными словами, с большой степенью надежности.

Пример 2. Строящийся объект состоит из 10 основных несущих конструкций (колонны, ригели, плиты перекрытий, диафрагмы, стены, лестницы, шахты лифтов, связи, пилоны, фундаменты). Вероятность отказа (выхода из строя) каждого элемента за время T равна 0,05. Оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется меньше 2, т. е. $\varepsilon = 2$.

Для *решения* данной задачи используем неравенство П. Л. Чебышева и свойства математического ожидания (формула 2.19) для биноминального распределения и свойства дисперсии (формула 3.7).

Обозначим через X дискретную случайную величину, т. е. число отказавших элементов за время T. Вероятность отказа каждого $p = 0{,}05$. Величина математического ожидания $M(x) = np = 10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5$.

Дисперсия для этого случая $D(x) = npq = M(x)(1\text{-}p) = 0{,}5\cdot(1\text{-}0{,}05) = 0{,}475$;

$q = 1 - p$ – это вероятность отказов.

Теперь можно воспользоваться неравенством П. Л. Чебышева:

$$P(|\,x-0{,}5\,|<2) \geq 1-\frac{0{,}475}{2^2}; \qquad 1-\frac{0{,}475}{4}=0{,}88.$$

Мы получим вероятность того, что разность между числом отказавших элементов и математическим ожиданием отказов, составляющая менее 2, равна 0,88, т. е. достаточно высокая.

К данной задаче следует выполнить определенное замечание, имеющее практическое значение.

События $|x\text{-}0{,}5|<2$ и $|x\text{-}0{,}5|>2$ противоположны, поэтому сумма их вероятностей равна единице, тогда, чтобы оценить условие, при котором сумма отказов будет больше 2, нужно воспользоваться неравенством $P(|x\text{-}0{,}5|>2) = 1\text{-}0{,}88 = 0{,}12$, то есть вероятность такого события небольшая.

Перейдем к рассмотрению полной теоремы Чебышева П. Л. [27].

Если x_1, x_2, x_3, $\ldots x_n$ – попарно или просто независимые случайные величины и при этом дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа С), то как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства

$$\left|\frac{x_1+x_2+\ldots x_n}{n}-\frac{M(x_1)+M(x_2)+\ldots+M(x_n)}{n}\right|<\varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико (от 100 и более).

Другими словами, по условию данной теоремы можно сделать запись в таком виде:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}-\frac{M(x_1)+M(x_2)+\ldots M(x_n)}{n}\right|<\varepsilon\right\}=1\,. \qquad (7.7)$$

Можно теперь полную теорему П. Л. Чебышева сформировать следующим образом: если рассматривать достаточно большое число независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым.

На практике часто бывает, что случайные величины имеют одно и то же математическое ожидание. Очевидно, что если вновь допустить, что дисперсии этих величин ограничены, то к ним будет применима теорема П. Л. Чебышева.

Эта теорема часто применяется при различных измерениях, при этом используется выборочный метод, сущность которого состоит в том, что по сравнительно небольшой случайной выборке судят о всей совокупности исследуемых объектов.

Например, привезли на стройплощадку определенный объем песка. Взяли несколько проб для определения физико-механических характеристик этого песка, получили случайные числа, но, если эти числа вписываются в теорему П. Л. Чебышева, то можно гарантировать надежность полученных результатов [10].

3 Теорема Бернулли и его формула

В законе больших чисел немаловажное значение имеет теорема Я. Бернулли.

Рассмотрим *n* независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна *p*(0, …1). Можно ли предвидеть, какова примерно будет относительная частота появления события *A*? Положительный ответ на этот вопрос дает теорема Якоба Бернулли (1713 г.), которая получила название «закона больших чисел» и положила начало теории вероятностей как науке.

Эта теорема формулируется следующим образом: если в каждом из независимых испытаний *n* вероятность появления события *A* постоянна и равна *p*, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности *p* по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточной велико: от 100 и более.

Другими словами, если ε – сколь угодно малое положительное число, то при соблюдении выше приведенной теоремы имеет место равенство:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1\,. \qquad (7.8)$$

Данная теорема легко доказывается с учетом теоремы Чебышева, $\frac{m}{n}$ – относительная частота появления события *A* при *n* испытаниях, *m* – число появлений события *A* в *n* испытаниях.

В теореме Бернулли речь идет о том, что анализируется вероятность того, что при достаточно большом числе испытаний относительная частота $\frac{m}{n}$ будет как угодно мало отличаться от постоянной вероятности появления события А в каждом испытании. Равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{m}{n}\right) = p$ по теореме Бернулли не имеет места.

В данном случае затрагиваются вопросы «сходимости по вероятности». Если $\frac{m}{n}$ стремится при $n \to \infty$ к p как пределу в смысле обычного анализа, то начиная с некоторого $n = N$ и для всех последующих значений n неуклонно выполняется неравенство $\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$; если же $\frac{m}{n}$ стремится по вероятности к р при $n \to \infty$, то для отдельных значений n неравенство может не выполняться.

В ряде задач используется неполная теорема Бернулли, а только частное ее представление, которое называется формулой Бернулли.

Если в n независимых испытаниях событие A наступает K раз, тогда нужно сложить вероятности получения всех «удачных» комбинаций. Вероятности получения всех «удачных» комбинаций могут быть одинаковыми и тогда они равны: $p^k \cdot q^{(n\text{-}k)}$, где $q = 1\text{-}p$. Общее количество удачных комбинаций равно $C_n^{\,k}$, поэтому окончательную вероятность можно получить в формуле:

$$P_n(k) = P_{k.n} = C_n^k p^k q^{n-k} . \tag{7.9}$$

Рассмотрим *пример* использования формулы Бернулли [16].

Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Какая будет большая вероятность выиграть: две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не принимаются).

Решение. Так как шахматисты равносильны, то вероятность выигрыша в каждой партии равна $\frac{1}{2}$, вероятность проигрыша также равна $\frac{1}{2}$, т. е $p = \frac{1}{2};\ q = \frac{1}{2}$. Так как вероятность выигрыша постоянна и безразлично в какой последовательности будут выиграны партии, то можно применить формулу Бернулли (7.9).

Для вероятности выигрыша 2 партий из 4:

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4\,!}{2\,!(4-2)}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}37.$$

Для вероятности выигрыша 3 партий из 6:

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6\,!}{3\,!(6-3)}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = 0{,}312.$$

Следовательно, вероятность выигрыша 2 партий из 4 более высокая, чем вероятность выигрыша 3 партий из 6-ти; 0,37 > 0,312.

ЛЕКЦИЯ 8
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УСЕЧЕННОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ НАДЕЖНОСТИ

План лекции:

1. Графическое представление интервальной функции распределения.
2. Математическое представление вероятности отказа для независимых случайных величин.
3. Пример расчета железобетонной балки на надежность с использованием усеченных интервальных функций.

1 Графическое представление интервальной функции распределения

Во многих задачах надежности графики функций распределения вероятностей либо принимаются заранее известными или их принимают на основании проведенных исследований (нормальный закон Гаусса, закон В. Вейдулла, закон Э. Гумбеля, закон Пуассона и другие). Однако в ряде случаев этот закон не может быть точно описан, так как недостаточно имеется статистических данных. В этом случае можно принять определенные границы существования реального закона функции распределения и тем самым подстраховать себя от возможных выходов за пределы принятых границ и обеспечить таким образом надежность работы какой-либо системы.

Для общих задач с неизвестным законом функции распределения вероятности можно использовать неравенство П. Л. Чебышева, которое записывается в виде:

$$P\{|x - M(x)| \le \varepsilon\} \ge 1 - \frac{D(x)}{\varepsilon^2}. \tag{8.1}$$

Данную запись можно несколько видоизменить, если дисперсию D(x) приравнять среднеквадратическому отклонению $D(x) = \sigma^2$. Тогда (8.1) будет выглядеть следующим образом:

$$P\{|x - M(x)| \le \varepsilon\sigma^2\} \le \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Для дальнейшего анализа надежности какого-либо процесса или события важны допустимые границы функций распределения вероятностей, которые можно представить с использованием неравенства П. Л. Чебышева [26].

Если известны средние значения случайной величины или ее математическое ожидание $M(x)$, а также дисперсия и среднеквадратическое отклонение $\sigma^2(x)$ случайной величины x, то ее функция распределения (т. е. распределение случайной величины) вероятностей $F_x(x)$ принадлежит множеству всех возможных функций распределения вероятностей с границами в виде нижнего $\underline{F}_x(x)$ и верхнего $\overline{F}_x(x)$ графиков распределения. Эти граничные функции распределения связаны с исследуемой функцией распределения $F_x(x)$ следующим условиями:

$$\underline{F}_x(x) < F_x(x) < \overline{F}_x(x) \tag{8.2}$$

Рассмотрим на рисунке 8.1 возможное распределение функции $F_x(x)$, истинное распределение которой неизвестно.

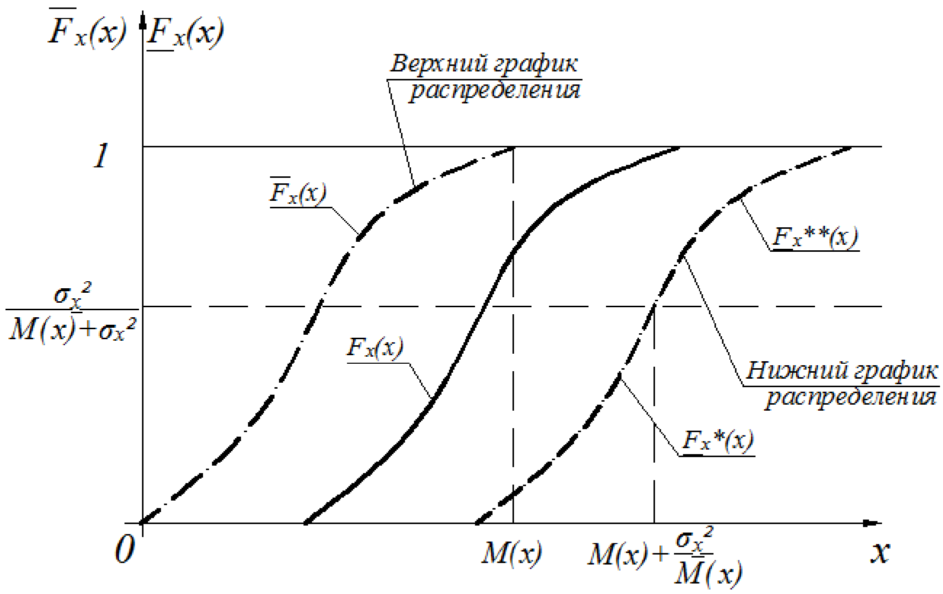

Рисунок 8.1 – Функции распределения $\underline{F}_x^*(x)$, $\underline{F}_x^{**}(x)$, $F_x(x)$, $\overline{F}_x(x)$

График функции распределения $F_x(x)$, который нас интересует, находится между верхним графиком распределения $\overline{F}_x(x)$ и нижним графиком распределения $\underline{F}_x(x)$, который на рисунке 8.1 представлен в виде верхнего участка $\underline{F}_x^{**}(x)$ и нижнего $\underline{F}_x^{*}(x)$. Важным моментом в изображении графиков распределения является то обстоятельство, чтобы истинный график не вышел за пределы верхней и нижней границ, а положения этих границ определяются математическими расчетами величин вероятностей безотказной работы.

2 Математическое представление вероятности отказа для независимых случайных величин

В теории надежности широко используются понятия отказа и безотказной работы какого-либо элемента или сооружения. Отказ обозначается буквой Q, безотказная работа буквой P. Взаимосвязаны эти понятия соотношением $P = 1\text{-}Q$ или $Q = 1\text{-}P$. Учитывая, что усеченная интервальная функция связаны с верхней и нижней границами функции распределения, то безотказная работа будет определяться по формулам:

$$\underline{P} = 1 - \overline{Q} \text{ и } \overline{P} = 1 - \underline{Q} \ .$$

Истинное значение надежности находится внутри интервала $\left[\underline{P},\ \overline{P}\right]$.

Известно, что вероятность отказа для стохастических независимых случайных величин x_i определяется по формуле:

$$Q = \iint\limits_{V} \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i) dx_i, \qquad (8.3)$$

где V – область отказа; n – число случайных величин; $f_i(x_i)$ – функция плотности распределения вероятности случайных величин x_i.

Обозначим через X внешний силовой фактор, действующий на заданную конструкцию, через Y – несущую способность конструкции. Тогда условие события отказа запишется как $X > \mathrm{Y}$, т. е. внешняя нагрузка больше несущей способности конструкции.

Предположим, что на конструкцию действуют постоянная и переменная нагрузки, представляющие собой стационарный случайный процесс, который описывается нормальным законом распределения:

$$F_x(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx, \tag{8.4}$$

где m_x и σ_x – математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение (стандарт) случайной величины x.

Функция плотности распределения вероятности есть не что иное, как первая производная от функции распределения $F_x(x)$ по аргументу x:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_x} \cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \tag{8.5}$$

Для описания случайной величины Y (прочности) используется так называемая усеченная интервальная функция распределения вероятностей для нижнего и верхнего предельных распределений:

нижнее распределение / верхнее распределение

$$\underline{F}_y(y) = \begin{cases} 0, \text{ если } y < m_y \\ \dfrac{y-m_y}{y-a_y}, \text{ при } m_y \le y < b_y \\ 1, \text{ при } y \ge b_y; \end{cases} \quad \overline{F}_y(y) = \begin{cases} 0, \text{ если } y < a_y \\ \dfrac{b_y-m_y}{b_y-y}, \text{ при } a_y \le y < m_y \\ 1, \text{ при } y \ge m_y. \end{cases} \tag{8.6}$$

В этих формулах a_y и b_y – точные значения нижней и верхней границ изменчивости случайной величины Y; m_y – среднее значение случайной величины Y.

Графически функции $\underline{F}_y(y)$ и $\overline{F}_y(y)$ приведены на рисунке 8.2.

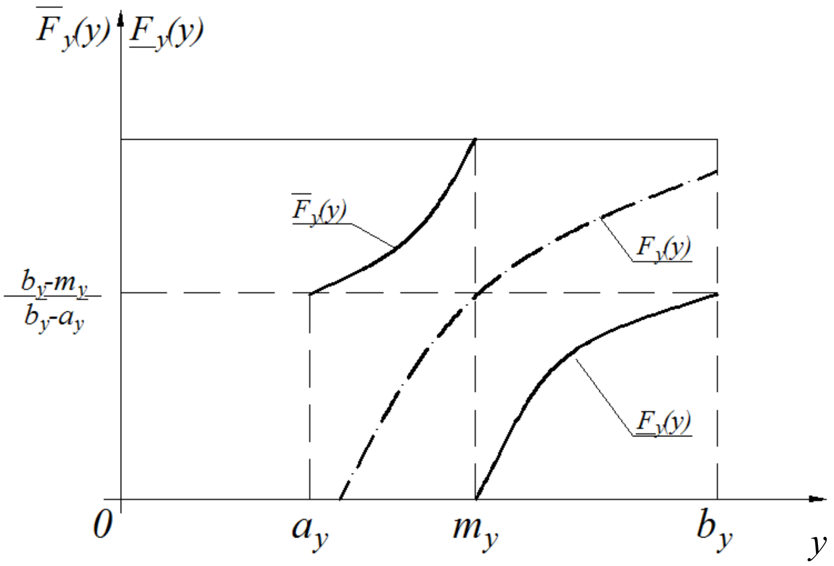

Рисунок 8.2 – Функции распределения вероятностей
$\underline{F}_y(y) < F_y(y) < \overline{F}_y(y),\ Fy(y)$ находится в средней части между $\underline{F}_y(y)$ и $\overline{F}_y(y)$

Соответствующие плотности распределения вероятностей могут быть получены как производные от $\underline{F}_y(y)$ и $\overline{F}_y(y)$ по аргументу *y*. Степень ответственности зданий будем характеризовать параметром δ, чем выше ответственность здания или конструкции, тем выше значение δ (δ = 0,7; 0,8; 0,9; 1,0).

Величина $\delta(y - a_y)$ называется функцией Дирака или импульсной функцией, сконцентрированной в точке a_y.

Плотности распределения обозначим для верхней и нижней границ соответственно $\overline{\rho}_y(y)$ и $\underline{\rho}_y(y)$.

Тогда значения плотностей в обозначенных пределах a_y и b_y на рисунке 8.2 могут быть записаны:

$$\underline{\rho}_y(y) = \begin{cases} 0, \text{ если } y < m_y \\ \dfrac{m_y - a_y}{(a_y - y)^2}, \text{ при } m_y < y < b_y \\ \dfrac{m_y - a_y}{b_y - a_y}\sigma(y - b_y), \text{ при } y = b_y \\ 0, \text{ при } y > b_y\ ; \end{cases} \qquad \overline{\rho}_y(y) = \begin{cases} 0, \text{ если } y > a_y \\ \dfrac{b_y - m_y}{b_y - a_y}\sigma(y - a_y), \text{ при } y = a_y \\ \dfrac{b_y - m_y}{(b_y - y)^2}, \text{ при } a_y < y < m_y \\ 1, \text{ при } y > m_y\ . \end{cases} \tag{8.7}$$

В дальнейшем можно использовать формулу (8.3) и формулу (8.5). При этом последняя формула должна учитываться для двух параметров: для параметра X (с полной и однозначной информацией), но при этом предусматривается условие $X>Y$.

Теперь формула (8.3) для каждого из параметров запишется:

$$\underline{Q} = \iint_V f_x(x)\underline{\rho}_y(y)dydx \quad \text{и} \quad \overline{Q} = \iint_V f_x(x)\overline{\rho}_y(y)dydx \tag{8.8}$$

Для $\underline{Q}$ используется нижняя функция плотности распределения $\underline{\rho}_y(y)$, так как из условия ($X > \underline{Y}$) видно, что с увеличением Y область отказа убывает, для Q подстановка функции плотности распределения $\overline{\rho}_y(y)$ меняется на противоположное. Формулы (8.8) можно упростить, заменив интегралы $\int_V \underline{\rho}_y(y)dy$ и $\int_V \overline{\rho}_y(y)dy$ функциями распределения $\underline{F}_y(y)$ и $\overline{F}_y(y)$.

Можно условно поменять обозначения аргументов, то есть y заменить на x, так как они одной физической природы (Шпете Г. Надежность несущих строительных конструкций ; пер. с нем. – М. : Стройиздат, 1994. – 228 с.).

$$\underline{Q} = \int_V f_x(x)\underline{F}_y(x)dx; \quad \overline{Q} = \int_V f_x(x)\overline{F}_y(x)dx \tag{8.9}$$

Итоговые расчетные формулы для определения вероятностей отказа с учетом формул (8.5), (8.8), (8.9) при $y = x$ примут такой вид:

$$\left.\begin{aligned} \underline{Q} &= \int_{m_y}^{b_y} \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{x-m_y}{x-a_y}dx + \int_{b_y}^{\infty} \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx \\ \overline{Q} &= \int_{a_y}^{m_y} \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{b_y-m_y}{b_y-x}dx + \int_{m_y}^{\infty} \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx \end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

Вероятность безотказной работы определится по известным формулам

$$\underline{P} = 1 - \overline{Q}, \quad \overline{P} = 1 - \underline{Q}.$$

Надежность находится в интервале $\left[\underline{P}, \overline{P}\right]$, в который попадет ее истинное значение.

3 Пример расчета железобетонной балки на надежность с использованием усеченных интервальных функций

Рассмотрим конкретный пример расчета железобетонной балки по критерию прочности арматуры.

Железобетонная балка является одним из распространенных элементов в зданиях и сооружениях. Балку можно представить как один элемент в системе или как самостоятельный элемент, состоящий из двух конструктивных частей: бетона и арматуры. Отказ балки, т. е. выход ее из строя, может произойти по одному из критериев работоспособности: прочности, жесткости, трещиностойкости.

Рассмотрим методику расчета надежности однопролетной балки прямоугольного сечения по критерию прочности арматуры на стадии проектирования, используя методику усеченных интервальных функций распределения. Балка имеет одиночное армирование в нижней зоне и загружена равномерно распределенной нагрузкой q.

Математическую модель предельного состояния по ДБН В.2.6-98:2009 [2] можем представить в упрощенном виде:

$$\widetilde{M} \le \widetilde{M}_{пред}$$

или

$$\frac{\widetilde{q} l_0^2}{8} \le \widetilde{f}_{yd}^{тек} A_s (d - 0{,}4x) \tag{8.11}$$

В этих формулах волнистой чертой «~» показана переменчивость значений конкретного параметра в процессе эксплуатации балки.

Принятые обозначения:

d – рабочая высота балки;

x – высота сжатой зоны бетона;

$\widetilde{f}_{yd}^{тек}$ – переменная прочность стали по пределу текучести;

$\widetilde{q}$ – переменная нагрузка;

величина сжатой зоны бетона $x = \frac{\widetilde{f}_{yd}^{тек} A_s}{f_{cd} \cdot b}$.

Параметры $\widetilde{q}$ и $\widetilde{f}_{yd}^{тек}$ – случайные величины.

Для сокращения записей и некоторого упрощения введем следующие обозначения

$$\widetilde{M}_{пред} = \widetilde{f}_{yd}^{тек} A_s (d - 0{,}4x) = Y \ (\text{несущая способность балки}),$$

$$\widetilde{M} = \frac{\widetilde{q} l_0^2}{8} = X \ (\text{внешний действующий момент}).$$

Условие события отказа запишется $X > Y$, т. е. внешняя нагрузка больше несущей способности балки по арматуре. Рассмотрим реальные механические характеристики арматурной стали А600С, приведенные в таблице 8.1 (табл. Б.2 прил. Б).

Таблица 8.1 – Механические характеристики арматурной стали А600С

Ф,мм	Предел текучести $f_{yd}^{тек}$, МПа	Максимальная прочность f_u, МПа	Относительное удлинение		Угол изгиба при диаметре оправки $c = 3d$
			σ_s, %	σ_y, %	
12	$\frac{799}{727-840}$	$\frac{860}{810-920}$	$\frac{15{,}56}{13{,}0-18{,}3}$	$\frac{5{,}1}{3{,}0-8{,}0}$	180°
14	$\frac{763}{750-777}$	$\frac{832}{820-843}$	$\frac{18{,}5}{18{,}0-19{,}0}$	$\frac{9{,}0}{9{,}0-9{,}0}$	180°
98	$\frac{794}{708-854}$	$\frac{894}{798-948}$	$\frac{15{,}0}{13{,}0-18{,}0}$	$\frac{4{,}33}{4{,}0-5{,}0}$	170°

В данной таблице над чертой приведены средние значения $f_{yd}^{тек}$ под чертой – точные крайние значение для пяти испытанных образцов одного диаметра.

Вероятность отказа может быть определена по формулам (8.10) с учетом верхнего и нижнего предела распределения.

Математическое ожидание для балки с заданной нагрузкой $m_x = 700$МПа, стандарт по нагрузке $\sigma_x = 70$МПа. Диапазон изменения прочности арматуры $Y \in [727,\ 840]$ МПа, т. е. можно принять $a_y = 727$МПа; $b_y = 840$МПа. Зададим промежуточные значения для $x = 765$МПа, для $y = 750$МПа. Математическое ожидание для координаты y примем $m_y = 805$МПа.

Для нижнего предела распределения формулы (8.10) подставим значения заданных параметров m_x, σ_x, a_y, b_y, m_y.

$$\underline{Q} = \int_{805}^{840} \frac{1}{70\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(765-700)^2}{2\cdot 70^2}} \cdot \frac{765-805}{765-727} dx + \int_{840}^{\infty} \frac{1}{70\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(765-700)^2}{2\cdot 70^2}} dx =$$

$$= 0{,}0057 \cdot e^{-0{,}431} \times \left(-\frac{40}{38}\right) x \Big|_{805}^{840} + 0{,}0057 \cdot e^{-0{,}431} \cdot x \Big|_{840}^{900} =$$

$$= -0{,}006 \cdot 0{,}649(840-805) + 0{,}0057 \cdot 0{,}649(900-840) =$$

$$= -0{,}136 + 0{,}222 = 0{,}085 .$$

Аналогично определяем величину $\overline{Q} = 0{,}292$.

Вероятность отказа находится в пределах $\underline{Q} = 0{,}085;\quad \overline{Q} = 0{,}292$.

Надежность рассматриваемой железобетонной балки по прочности арматуры будет равна $\overline{P} = 1 - 0{,}085 = 0{,}915;\quad \underline{P} = 1 - 0{,}292 = 0{,}708$, т. е. в заданном интервале прочности [727, 840 МПа] надежность достаточно высокая.

ЛЕКЦИЯ 9
МОДЕЛИРОВАНИЕ СХЕМ НАДЕЖНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ

План лекции:

1. Последовательное соединение элементов в модели строительных конструкций.
2. Параллельное соединение элементов в модели строительных конструкций.
3. Смешанное последовательно-параллельное соединение элементов модели строительных конструкций.
4. Сопоставление последовательного и параллельного соединения элементов строительных конструкций.

1 Последовательное соединение элементов в модели строительных конструкций

Различные технические системы, в том числе и строительные конструкции, и даже целиком здания и сооружения, можно смоделировать условно при помощи теории вероятности. В частности, рассмотрим одноэтажную двухпролетную раму промышленного здания с шарнирным закреплением ригелей с колоннами (рис. 9.1) [12].

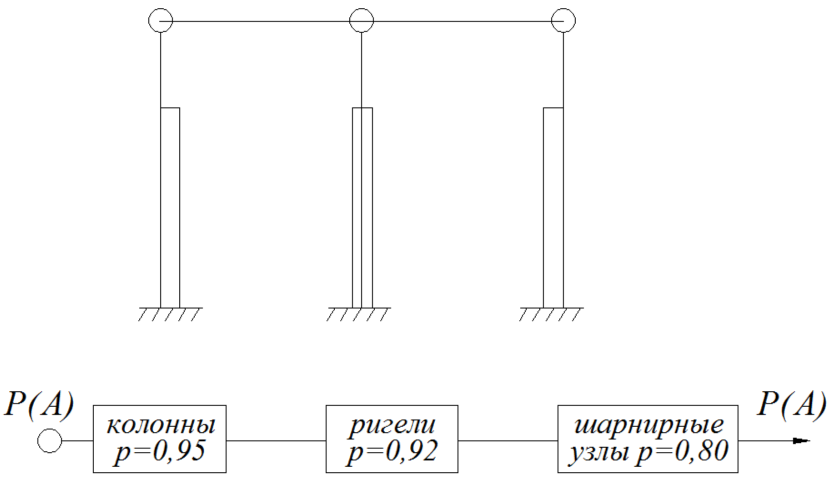

Рисунок 9.1 – Условная модель надежности одноэтажного промздания

Наиболее ответственными элементами в данном здании являются три компонента: колонны, ригели, шарнирные узловые соединения. Выход из строя каждого элемента (его отказ) приведет к выходу из строя всей системы. Соответственно нарушается надежность всей системы, всего промздания.

При этом всегда необходимо учитывать временной фактор и наличие статистических данных о надежности работы каждого элемента за этот промежуток времени. Например, период времени 40, 50, 60 и более лет.

В данном моделировании чаще всего используют три основные схемы моделей надежности: последовательное соединение, параллельное соединение и смешанное. Такой принцип моделирования чем-то напоминает соединение электрических цепей, где изложенный принцип является закономерным и необходимым.

Рассмотрим в начале последовательное соединение элементов в теории надежности работы общепринятых конструктивных схем. Приведенная модель на рисунке 9.1 явно подчеркивает зависимость работоспособности всей системы от работоспособности каждого элемента. Разрушение любого из них, независимо от порядка выключена из работы отдельного элемента, приведет к разрушению всей системы. Такой принцип моделирования надежности будет соответствовать последовательному соединению.

Обозначим работоспособность системы на рисунке 9.1 буквой A. Тогда B_i будет соответствовать событию работоспособности i-го элемента. Вся система будет работоспособна только тогда, когда работоспособны все ее элементы:

$$A = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot \ldots \cdot B_n = \prod_{i=1}^{n} B_i \,, \tag{9.1}$$

$\prod_{i=1}^{n} B_i$ – полное произведение работоспособности i-тых элементов.

Поскольку все события B_i между собой независимы, то вероятность события А определяется как произведение вероятности событий p_i:

$$P(A) = \prod_{i=1}^{n} p_i \tag{9.2}$$

Для рассмотренного выше примера для одноэтажной двухпролетной рамы:

$$P(A) = 0{,}95 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}8 = 0{,}6992 \approx 0{,}7.$$

Следует иметь в виду, чем больше элементов в заданной модели с последовательным соединением элементов, тем меньше ее надежность.

Графически можно представить зависимость надежности рассматриваемой модели от количества входящих в нее элементов на рисунке 9.2 [12].

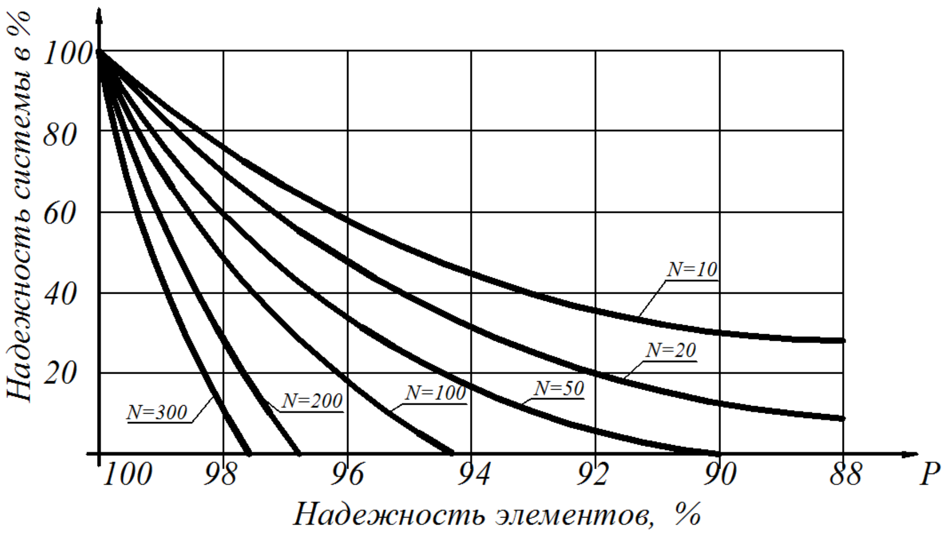

Рисунок 9.2 – Зависимость надежности смоделированной системы от количества элементов N при последовательном их соединении

Наилучшие показатели надежности системы получаются, если количество входящих в нее элементов находится в пределах четырех-пяти элементов.

2 Параллельное соединение элементов в модели строительных конструкций

Параллельное соединение конструктивных элементов в заданной системе предусматривает независимую работу одного элемента от другого при работоспособности полной системы, не связанной выходом из строя (отказом) какого-либо одного или даже группы элементов. Отказ всей системы при параллельном соединении входящих в нее элементов может произойти только тогда, когда откажет последний элемент в рассматриваемой группе составных элементов.

Примером моделирования надежности при параллельной схеме работы заданной системы может служить трехкомпонентное монолитное железобетонное перекрытие, состоящее из монолитной плиты, второстепенных балок и главных балок.

Выход из строя монолитной плиты не приведет к полному обрушению перекрытия, выход из строя второстепенной балки также не приведет к обрушению перекрытия, хотя и существенно ухудшит эксплуатационные показатели перекрытия. А вот выход из строя главных балок приведет к полному обрушению всего перекрытия или значительного его участка.

Аналогию можно привести для электрической цепи с параллельным подключением светильников. Нарушение работы одного светильника не приведет к отключению остальных светильников.

На рисунке 9.3 приведена условная схема моделирования надежности работы произвольной системы с параллельным подключением отдельных элементов.

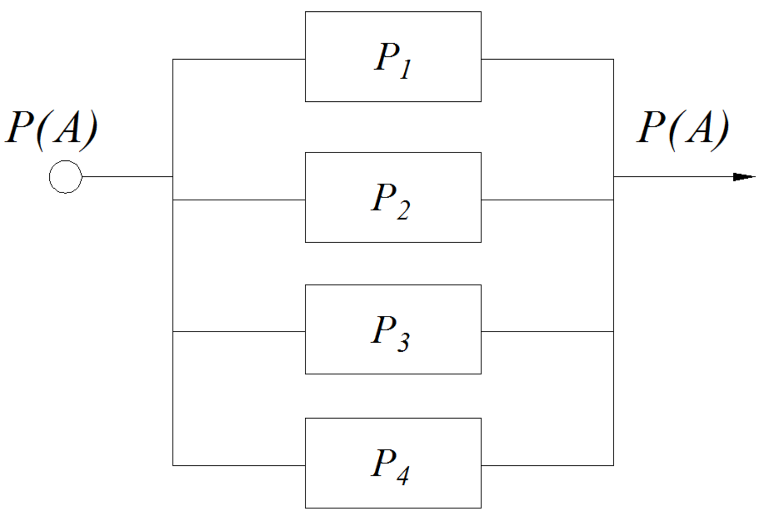

Рисунок 9.3 – Параллельное моделирование надежности произвольной системы

Каждый i-тый элемент имеет вероятность безотказной работы p_i. Отказ всей системы с параллельным соединением элементов наступает только тогда, когда отказывает последний элемент.

Обозначим работоспособность всей системы за определенный промежуток времени T буквой A. Работоспособность каждого i-того элемента за тот же промежуток времени обозначим буквой B_i.

Нас будет интересовать в рассматриваемой схеме не только работоспособность отдельных элементов и всей системы, а событие противоположное этим событиям, т. е. неработоспособность. Тогда $\overline{A}, \overline{B}_1, \overline{B}_2, \overline{B_n}$ будут события, противоположные A, B_1, B_2, B_n

Вероятность события $\overline{B}_i$, противоположное событию B_i, будет равна $\overline{B}_i = 1 - p_i$, и вся система будет только тогда неработоспособна, если будут неработоспособны все ее элементы.

$\overline{A} = \overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{B}_n$ – выход из строя всей системы. Вероятность события $\overline{A}$ можно определить по следующей формуле:

$$P(\overline{A}) = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) \ . \tag{9.3}$$

Если необходимо определить надежность заданный системы с параллельным соединением составных элементов с учетом ее безотказной работы, то следует воспользоваться зависимостью:

$$P(A) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) \ . \tag{9.4}$$

Данная зависимость служит математической моделью надежности при параллельном соединении элементов в рассматриваемой системе.

Анализ этой модели показывает, что при $n \to \infty$, вероятность безотказной работы системы $P(A) \to 1$, поскольку произведение $\prod_{i=1}^{n} (1 - p_i) \to 0$.

Таким образом, ввод в систему дополнительных параллельных ветвей (элементов) способствует повышению надежности системы в целом [12].

В отдельных строительных зданиях или сооружениях иногда прибегают к дублированию или даже к троированию отдельных конструктивных элементов.

Отказ системы (ненадежность), состоящей из несколько параллельно функционирующих элементов, равен произведению отказов соответствующих элементов. Параллельное соединение часто называют резервированием системы, ее страховкой.

Графически влияние количества элементов N на надежную и, следовательно, безопасную работу заданной системы можно проследить на рисунке 9.4.

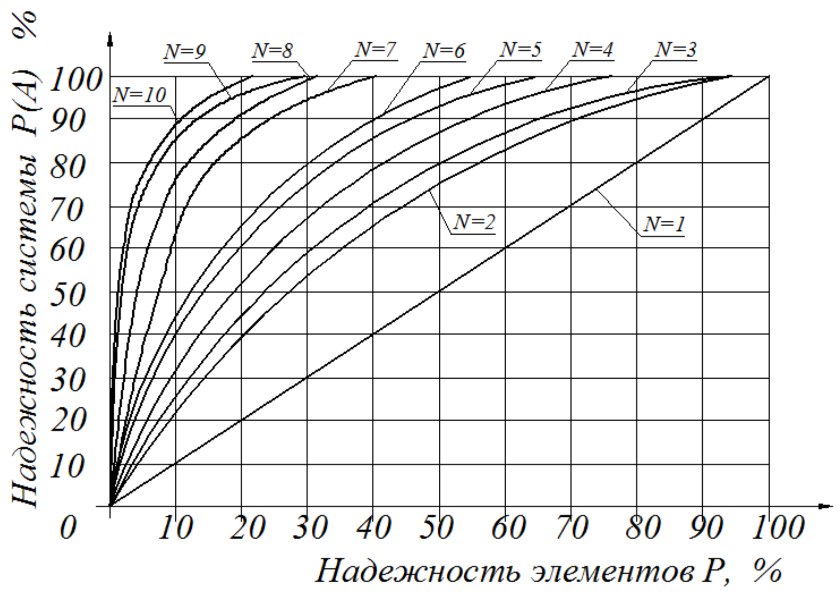

Рисунок 9.4 – Повышение безопасной работы системы при увеличении количества составных элементов N

3 Смешанное последовательно-параллельное соединение элементов модели строительных конструкций

Наряду с последовательной и параллельной схемами моделирования надежности конструктивных систем существует так называемая **смешанная** схема моделирования.

Реальные технические строительные конструктивы, как правило, представляют собой сложные комбинации последовательных, параллельных и даже мостовых соединений. Для определения надежности при смешанным соединении можно пользоваться вышеизложенными зависимостями для последовательных и параллельных систем.

Для наглядности рассмотрим пример сборного железобетонного перекрытия, состоящего из 20 несущих балок с двумя участками плит перекрытия. Один участок выполнен из плит 1,5 х 6,0 м в количестве 60 плит, второй участок из плит 1,5 х 9,0 м в количестве 20 плит. Надежность работы балок *P(A)* = 0,95; надежность плит 1,5 х 6,0 м *P(B)* = 0,93 и надежность плит 1,5 х 9,0 м *P(C)* = 0,96. Требуется оценить общую надежность всего перекрытия P(D) = ? Срок эксплуатации 50 лет.

Схематически поставленную задачу можно представить в виде последовательно и параллельно соединенных блоков на рисунке 9.5.

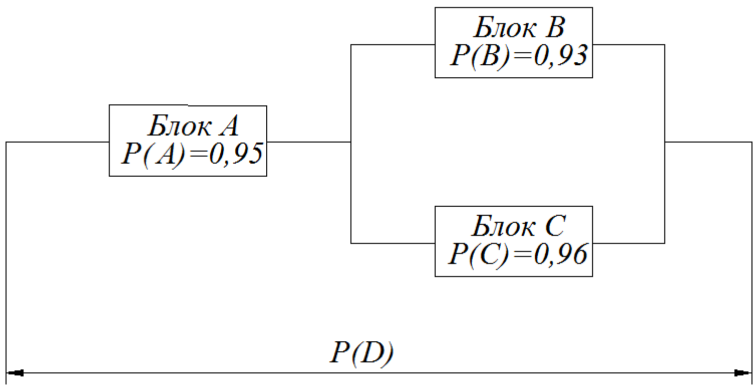

Рисунок 9.5 – Общий вид смешанной схемы расположения элементов при оценке надежности системы

В данном случае вначале следует определить надежность параллельно соединенных блоков *B* и *C*. Затем рассмотреть два последовательно соединенных блоков *A* и *BC*.

В зависимости от количества плит в блоках *B* и *C* можно определить и надежность работы каждого блока самостоятельно.

Для блока *B* (количество плит 60)

$$P(B) = 0{,}93^{60} = 0{,}93^{20} \cdot 0{,}93^{20} \cdot 0{,}93^{20} = 0{,}0128.$$

Для блока *C* (количество плит 20) $P(C) = 0{,}96^{20} = 0{,}96^{10} \cdot 0{,}96^{10} = 0{,}4420$. Отказ для ветвей *B* и *C*:

$$\overline{A}_B = 1 - 0{,}0128 = 0{,}9872\,; \qquad \overline{A}_C = 1 - 0{,}4420 = 0{,}5580\,.$$

Отказ двух элементов, соединенных параллельно, $A_{BC} = 0{,}982 \cdot 0{,}5580 = 0{,}5479$.

В свою очередь надежность (вероятность безотказной работы) составит, согласно формуле (9.4):

$$P(BC) = 1 - \overline{A}_{BC} = 1 - 0{,}5479 = 0{,}4520\,.$$

Определим надежность работы блока А.

$$P(A) = 0{,}95^{20} = 0{,}95^{10} \cdot 0{,}95^{10} = 0{,}358.$$

Общая надежность всей системы может быть определена как для последовательно соединенных двух блоков A и BC :

$$P(D) = P(A) \cdot P(BC) = 0{,}358 \cdot 0{,}4520 = 0{,}1618\,.$$

Ответ показывает, что надежность всего перекрытия, рассчитанного на эксплуатацию в течение 50 лет, невысокая и составляет всего лишь 16,18 %. В остальных случаях возможен выход из строя каких-либо элементов. Если же увеличить количество плит размером 1,5 x 9,0 м до 60 штук, то надежность упадет до 11 %.

4 Сопоставление последовательного и параллельного соединения элементов строительных конструкций

В некоторых задачах при анализе надежности существующей конструктивной схемы весьма полезно рассмотреть несколько вариантов моделей надежности, чтобы выбрать наиболее рациональный, подходящий для данной конструктивной схемы, либо наиболее опасный.

Рассмотрим некоторую систему, состоящую их трех основных элементов *D, E, F*. Надежность (безотказная работа) каждого из них в соответствии с имеющимися данными составляет: $P(D) = 0{,}92$; $P(E) = 0{,}95$; $P(F) = 0{,}96$. Вычислить надежность всей системы при параллельном и последовательном соединении элементов *D*, *E, F.*

Надежность при последовательном соединении элементов вычисляется довольно просто по формуле (9.2) [12, 15].

При параллельном соединении элементов необходимо рассмотреть все возможные варианты выхода из строя каждого из трех элементов:

1) при отсутствии отказов надежность всей системы будет равна

$$P(A)_1 = 0{,}92 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}96 = 0{,}84;$$

2) при отказе одного из трех элементов

$$P(A)_2 = 0{,}92 \cdot 0{,}95(1-0{,}96) = 0{,}034\ 96\ ,$$

$$P(A)_2 = 0{,}95 \cdot 0{,}96(1-0{,}92) = 0{,}072\ 96\ ,$$

$$P(A)_2 = 0{,}96 \cdot 0{,}92(1-0{,}95) = 0{,}044\ 16\ ,$$

3) при отказе двух элементов из трех

$$P(A)_3 = 0{,}96(1-0{,}92)(1-0{,}95) = 0{,}003\ 84\ ,$$

$$P(A)_3 = 0{,}92(1-0{,}95)(1-0{,}96) = 0{,}001\ 84\ ,$$

$$P(A)_3 = 0{,}95(1-0{,}96)(1-0{,}92) = 0{,}003\ 04\ ,$$

4) при отказе всех трех элементов (выход системы из строя)

$$P(A)_4 = (1 - 0{,}92)\ (1 - 0{,}95)\ (1 - 0{,}96) = 0{,}00016\ .$$

Для всех четырех вариантов сумма вероятностей выхода из строя должна составлять 1 :

$$\sum P(A)_{i=y} = 0{,}84 + (0{,}03496 + 0{,}07296 + 0{,}04416) +$$
$$+ (0{,}00384 + 0{,}00184 + 0{,}00304) + 0{,}00016 = 1.$$

Только четвертый вариант приведет к полному отказу работы всей системы, а следовательно, надежность при параллельном соединении элементов составит

$$P(A) = 1 - 0{,}000\ 16 = 0{,}999\ 84 \quad \text{или} \quad 99{,}98\ \%\ .$$

Этот показатель немного выше, чем надежность при последовательном соединении элементов (99,98 % >> 84 %).

ЛЕКЦИЯ 10
ТЕОРИЯ ВОЗМОЖНОСТЕЙ КАК ВАРИАНТ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

План лекции:

1. Основное определение теории возможностей и графическое представление функции распределения возможностей.
2. Разделение полной вероятности события на две составные части.
3. Определение граничных функций распределения случайных величин.

1 Основное определение теории возможностей и графическое представление функции распределения возможностей

Наряду с существующими методами расчета надежности (аналитический, графический с использованием интервальных функций, метод моделирования конструктивных решений и другие) используется так называемый **возможностный метод** [22, 23].

В этом методе рассматривается математическая теория, имеющая дело с особым типом неопределенности, которая является альтернативой теории вероятностей. Впервые предложил теорию возможностей профессор Лотфи Заде (Lotfi Zaden) в 1978 году в качестве расширения его теорий нечетких множеств и нечеткой логики. Раньше, в 1950-х годах, экономист Джордж Шекл предложил min/max-алгебру для описания степени потенциальных неожиданностей. И только в конце 1990-х годов профессор МГУ Ю. П. Пытьев предложил вариант теории возможностей, в котором возможность и необходимость определяются значениями счетно-аддитивного функционала или, проще, расчетным интегралом.

По содержанию смысл теоретико-возможностных методов существенно отличается от теоретико-вероятностных. Возможность события, в отличие от вероятности, которая оценивает частоту его появления в регулярном стохастическом (неопределенном) эксперименте, ориентирована на относительную оценку истинности данного события, его в какой-то мере предпочтительности в сравнении с любым другим. То есть содержательно могут быть истолкованы лишь отношения «больше», «меньше», «равно». Вместе с тем возможность не имеет событийно-частотной интерпретации (в отличие от вероятности), которая связывает ее с экспериментом. И тем не менее теория возможностей позволяет математически моделировать реальность на основе опытных фактов, знаний, гипотез, суждений исследователей.

Применительно к строительным конструкциям теория возможностей рассматривает два основных параметра: внешняя нагрузка, которая обозначается X, и потенциальное сопротивление конструкции, которое обозначается Y. Условие безопасной работы заданной системы (условие надежности) записывается в стандартной форме:

$$X \le Y \tag{10.1}$$

Во всех вероятностных методах расчета присутствует некоторая функция распределения случайных величин. В теории возможностей чаще всего используются максимальные и минимальные значения рассматриваемых параметров, то ли нагрузки, то ли расчетных характеристик материалов. В качестве аналогов распределения вводятся функции вида

$$\pi_x(x) = \exp^{-\left(\frac{x-a_x}{b_x}\right)^2}; \quad \pi_y(y) = \exp^{-\left(\frac{y-a_y}{b_y}\right)^2}. \tag{10.2}$$

В этих функциях $\pi_x(x)$ и $\pi_y(y)$ – параметры изменения нагрузки X и сопротивления конструкции (системы) Y.

Значения a_x, a_y, b_x, b_y определяются по формулам :

$$a_x = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}; \quad b_x = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{2\sqrt{-\ln\alpha}}; \tag{10.3}$$

$$a_y = \frac{Y_{max} + Y_{min}}{2}; \quad b_y = \frac{Y_{max} - Y_{min}}{2\sqrt{-ln\,\alpha}} \tag{10.4}$$

В формулах (10.3) и (10.4) X_{min} и X_{max} – наименьшее и наибольшее значения рассматриваемой величины X, то есть в конкретном случае это нагрузка P. Y_{min} и Y_{max} – наименьшее и наибольшее значения сопротивления материалов (системы), в нашем случае это расчетные сопротивления материалов $F(f_{cd}, f_{yd})$. Параметры P и F не являются постоянными, но всегда можно задать максимальные и минимальные их значения.

Существенное значение имеет параметр α в зависимостях для b_x и b_y (10.3, 10.4). Этот параметр определяет степень ответственности здания и в теории возможностей называется параметром среза; данный параметр предварительно задается и может иметь значения: $\alpha = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0{,}5$. Он зависит от числа измерений, точности измерений и других факторов.

Проанализируем график распределения возможности на рисунке 10.1.

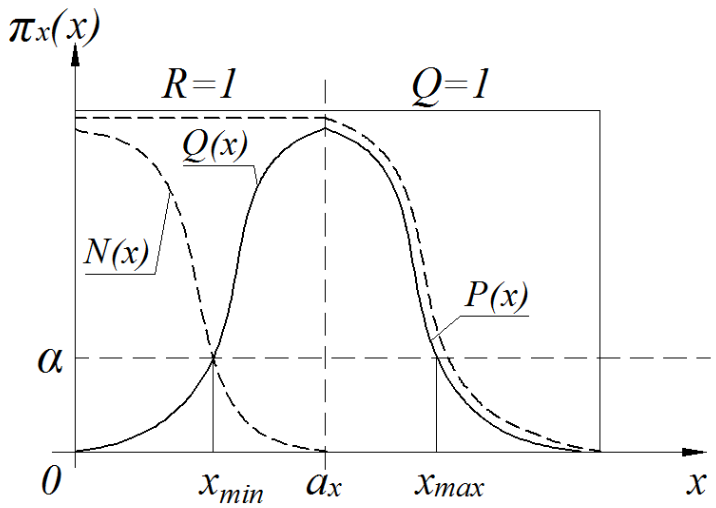

Рисунок 10.1 – Функция распределения возможностей $\pi_x(x)$

На данном графике различают две вероятности – одна $P(X \le x)$ и вторая $Q(X > x)$, при этом $P + Q = 1$. Дополнительно рассматривается параметр $N(x) = 1\text{-}Q(x)$, который называется необходимостью события $X = x$. В отличие от теории вероятностей X и Y называют **нечеткими переменными**.

2 Разделение полной вероятности события на две составные части

Теперь реализуем два графика переменных X и Y, то есть графики распределения $\pi_x(x)$ и $\pi_y(y)$ и оценим возможность появления отказа Q(x) для кривой распределения функции $\pi_x(x)$. Очевидно, что появление отказа можно ожидать в точке пересечения функций $\pi_x(x)$ и $\pi_y(y)$. Эта точка показана на рисунке 10.2.

Аналитически значение абсциссы x^* находят из решения уравнения

$$\left| e^{-\left(\frac{x-a_x}{b_x}\right)^2} \right| = \left| e^{-\left(\frac{x-a_y}{b_y}\right)^2} \right| \qquad (10.5)$$

или $\left| \frac{x-a_x}{b_x} \right| = \left| \frac{x-a_y}{b_y} \right|$ при выполнении условия $a_x < x^* < a_y$, как это показано на рисунке 10.2.

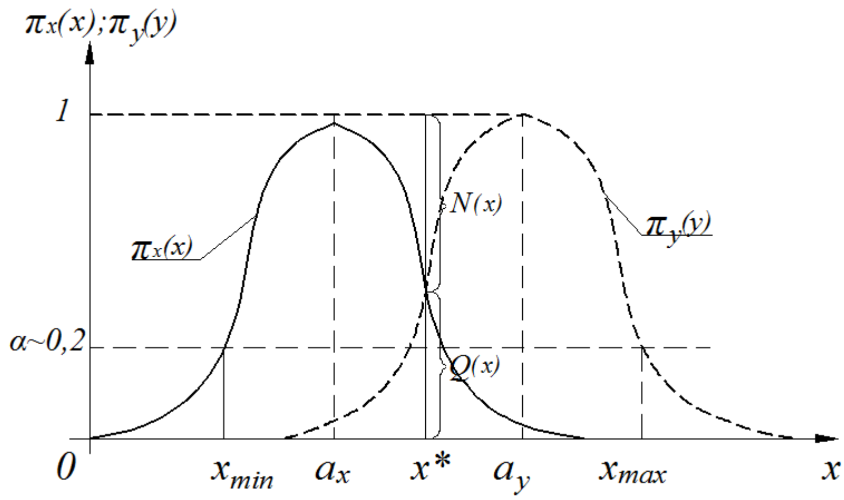

Рисунок 10.2 – Распределение возможностей $\pi_x(x)$ и $\pi_y(y)$ и определение появления отказа $Q(x)$ по кривой $\pi_x(x)$ или по $\pi_y(y)$ (величина $Q(x) = 1 - N(x)$)

3 Определение граничных функций распределения случайных величин

Рассмотрим второй вариант расчета надежности методом возможностей, когда число измерений параметров X и Y достаточно велико и позволяет сравнительно точно определить их средние значения или математические ожидания $M(x)$ и $M(y)$, а также среднеквадратические отклонения σ_x и σ_y. Однако функции распределения у них определить нельзя и проверить соответствие их по отношению к какому-либо принципу или критерию нет возможности.

В этом случае X и Y можно описывать известными распределениями, полученными на основе некоторых ограниченных функций, в частности, на основе неравенства П. Л. Чебышева.

Вид этих функций в форме границ множества распределений приведен на рисунке 10.3. Заштрихованная область – это все возможные множества распределений, которые не приводят к предельным критическим значениям рассматриваемых функций X и Y. Иными словами, не достигают предельных нагрузок P и предельных сопротивлений f – то ли бетона, то ли арматуры.

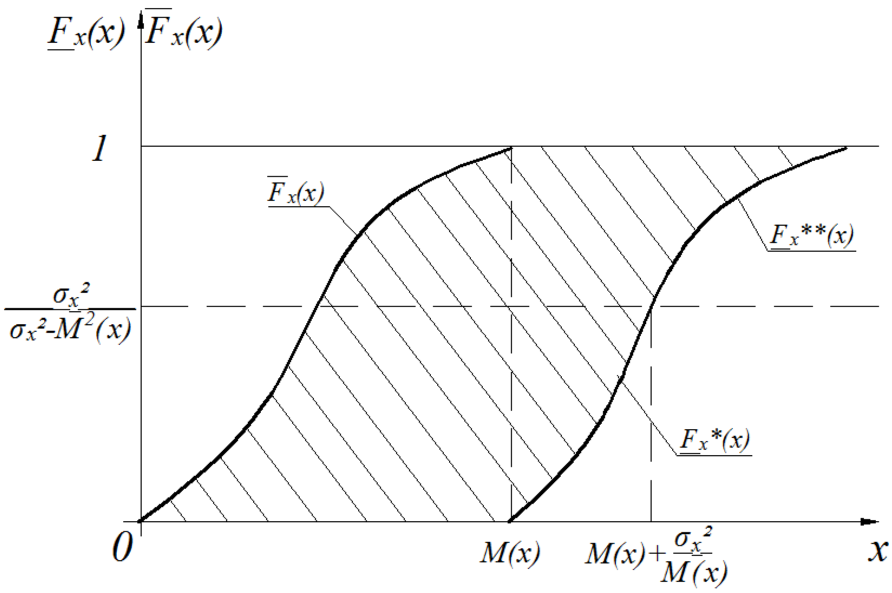

Рисунок 10.3 – Граничные функции распределения $\overline{F}_x(x)$, $\underline{F}_x^*(x)$, $\underline{F}_x^{**}(x)$

Нижняя $\underline{F}_x(x)$ и верхняя $\overline{F}_x(x)$ функции границ множества распределения случайной величины X могут быть представлены следующими формулами. При этом нижняя граница разбивается на два участка: в пределах рабочих значений – $\underline{F}_x^*(x)$, за пределами рабочих значений – $\underline{F}_x^{**}(x)$:

$$\overline{F}_x(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_x^2}{[M(x)-x]^2+\sigma_x^2}, \text{ если } x < M(x); \\ 1, \text{ если } x \geq M(x); \end{cases} \qquad (10.6)$$

$$\underline{F}_x(x)=\begin{cases} F_x^*(x)=\begin{cases} 0,\text{ если } x<M(x) \\ 1-\dfrac{M(x)}{x},\text{ если } M(x)\le x\le M_x+\dfrac{\sigma_x^2}{M(x)}; \end{cases} \\ F_x^{**}(x)=\dfrac{[M(x)-x]^2}{[M(x)-x]^2+\sigma_x^2},\text{ если } x>M(x)+\dfrac{\sigma_x^2}{M(x)}. \end{cases} \tag{10.7}$$

Немаловажную роль играют и плотности функций распределения вероятностей граничных функций распределения. Условные плотности распределения вероятностей граничных функций могут быть определены как первые производные от $\underline{F}_x(x)$ и $\overline{F}_x(x)$ по произвольной величине *x*.

Формулы плотностей распределения имеют следующий вид:

$$\overline{\rho}_x(x)=\begin{cases} 0,\text{ если } x<M(x) \\ \dfrac{M(x)}{x^2},\text{ если } M(x)\le x\le M(x)+\dfrac{\sigma^2}{M(x)}; \\ \dfrac{2(x-M(x))\sigma_x^2}{\left[(M(x)-x)^2+\sigma_x^2\right]^2},\text{ если } x>M(x)+\dfrac{\sigma^2}{M(x)}; \end{cases} \tag{10.8}$$

$$\overline{\rho}_x(x)=\begin{cases} \dfrac{2(M(x)-x)\cdot\sigma_x^2}{\left[(M(x)-x)^2+\sigma_x^2\right]^2},\text{ если } x<M(x); \\ 0,\text{ если } x\ge M(x). \end{cases} \tag{10.9}$$

По этим значениям $\underline{\rho}_x(x)$ и $\overline{\rho}_x(x)$ могут определяться и вероятности отказов по функциям нагрузок *X*. Аналогичные функции распределения вероятностей граничных функций распределения и плотностей распределения относятся и к случайной величине *Y*, то есть к сопротивлению материала *f*. В этом случае обозначения приобретают вид $\overline{F}_y(y)$ и $\underline{F}_y(y)$ и $\underline{\rho}_y(y)$ и $\overline{\rho}_y(y)$.

ЛЕКЦИЯ 11
ТЕОРИЯ НАДЕЖНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ. ОСНОВНАЯ ТЕРМИНОЛОГИЯ И ПРИНЦИПЫ РЕАЛИЗАЦИИ

План лекции:

1. Наиболее значимые аварии зданий и сооружений в последние годы.
2. Нормативная терминология, используемая в практике построения теории надежности.
3. Численные показатели надежности и способы их получения.

1 Наиболее значимые аварии зданий и сооружений в последние годы

К числу наиболее существенных аварий последних десятилетий, связанных с массовой гибелью людей, следует отнести следующие разновидности аварий: 1) разрушения и воздействия на людей вследствие различных климатических воздействий (землетрясения, цунами, извержения вулканов, торнадо, смерчи, резкое проседание грунта и другие); 2) аварии, связанные с непосредственным воздействием человека (человеческий фактор), террористические последствия, ошибки в процессе исполнения и контроля технологического процесса, военные действия, транспортные происшествия, недооценка ошибок в расчетах, проектировании, строительстве и эксплуатации; 3) аварии, связанные в нарушением установленного технологического режима или реконструкцией здания [19, 20].

Первые типы аварий, связанные с климатическими условиями Земли, происходят практически еженедельно, а в отдельных случаях и ежедневно. Среди наиболее известных аварий подобного типа можно назвать аварию на атомной электростанции в Японии «Фукусима-1», возникшей вследствие мощнейшего удара цунами в 2011 году. Станция вышла из эксплуатации, нанесен значительный материальный ущерб. В 2004 году из-за значительных снегопадов в Москве происходит обрушение аквапарка с гибелью людей и значительным количеством травмированных; в 2015 году вследствие непрогнозированного оседания грунта происходит аварийная подвижка зданий на Краснознаменном проспекте в г. Киеве. Интенсивные снегопады в 2010 году в г. Котовице (Польша) привели к обрушению выставочного павильона с гибелью и травмированием посетителей. Значительные человеческие жертвы были зафиксированы в Таиланде при воздействии цунами на курортное побережье. Очень часто наблюдаются на планете интенсивные ливневые потоки, обусловленные дождями и прорывами дамб и технологических трубопроводов и плотин, огромные убытки и человеческие жертвы приносят землетрясения.

К числу человеческих факторов следует отнести террористическое воздействие на два здания торговых центров в Нью-Йорке (здания «близнецы») в 2001 году, вследствие которого погибло более 3 000 человек. Недостаточное конструктивное решение этих двух зданий привело к существенному снижению надежности эксплуатации данных объектов и ослабленному противодействию террористическим воздействиям. Неграмотная эксплуатация атомной электростанции привела к трагическим последствиям в г. Чернобыле в 1986 году. Последствия этой трагедии ощущаются и в настоящее время. Катастрофические последствия вызывают военные действия, испытания нового оружия, создание сверхмощных средств разрушения.

Резкое нарушение технологического режима, ведущего к значительным материальным потерям, человеческим жертвам и загрязнению окружающей среды, служит серьезным сигналом для разработки соответствующих мероприятий по разработке кардинальных условий безопасной и надежной эксплуатации специальных объектов. Аварии на складах боеприпасов (г. Лозовая, Харьковской области в 2012 г., г. Балаклея, Харьковской области в 2017 г., г. Калиновка, Винницкая область в 2018 г. и другие) говорят о том, что на объектах повышенной опасности необходимо внедрять дублирующие мероприятия защиты, сигнализации и противодействия.

Во всех упомянутых случаях масштабных разрушений и гибели людей последствия аварий могли бы быть существенно уменьшены, если бы на стадиях проектирования, строительства и эксплуатации неукоснительно выполнялись требования по обеспечению безопасности, надежности, долговечности и живучести объектов гражданского, промышленного и военного строительства.

Такие требования четко изложены в нормативном документе ДБН В.1.2-14:2018 Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель і споруд [4].

На первом этапе изучения этого документа необходимо освоить основную терминологию, используемую в данных нормах.

2 Нормативная терминология, используемая в практике построения теории надежности

Определенные наименования и формулировки, изложенные в ДБН В.1.2-14:2018, необходимо усвоить для правильного понимания отдельных требований упомянутых норм. Перейдем непосредственно к следующим терминам:

1. **Отказ** – это событие, которое заключается в переходе через одно из предельных состояний, то есть либо это исчерпание несущей способности или потеря устойчивости, либо это недопустимые деформации или интенсивное трещинообразование. Различают два вида отказов: – отказ – срыв, т. е. такой отказ, после которого происходит аварийное разрушение с прямой угрозой для жизни людей и значительными материальными потерями; – отказ – препятствие, после которого происходит систематическое накопление дефектов, способствующих выходу конструкций из строя и развитию убытков материального плана.

2. **Безопасность** – свойство объекта или отдельной конструкции в процессе эксплуатации, а также в случае нарушения работоспособности не создавать угрозы для жизни и здоровья людей, а также угрозы для окружающей

среды. При этом учитывается отсутствие неоправданного риска, связанного с выходом объекта из эксплуатации.

3. **Безотказность** – свойство объекта непрерывно сохранять работоспособное состояние на протяжении заданного срока эксплуатации, при этом предусматривается проведение необходимых плановых и внеплановых ремонтно-профилактических работ.

4. **Долговечность** – свойство объекта или конструкции сохранять работоспособное состояние до наступления граничного состояния в условиях принятой системы технического обслуживания и надлежащего ремонта (текущего и капитального).

5. **Живучесть** – способность объекта сохранять ограниченное работоспособное состояние при наличии отдельных дефектов и повреждений, а также в условиях отказа отдельных компонентов объекта.

6. **Квантиль** – значение случайной величины, которая соответствует заданной вероятности безотказности для данного объекта.

7. **Мода** – значение случайной величины, что соответствует наибольшей плотности вероятности.

8. **Надежность** – свойство объекта или конструкции выполнять заданные функции на протяжении расчетного времени эксплуатации.

9. **Непропорциональное разрушение** – процесс глобального разрушения здания или сооружения вследствие какого-либо локального повреждения.

10. **Ремонтоспособность** – приспособление объекта к поддержанию и восстановлению работоспособного состояния с помощью технического обслуживания и ремонта.

Целый ряд других терминов и обозначений могут быть уточнены в процессе использования вышеуказанных норм.

Указанная надежность должна быть обеспечена на всех этапах жизненного цикла объекта, а именно:

1) на стадии изыскания и проектирования;

2) изготовления, транспортирования и сохранения строительных изделий;

3) освоения строительной площадки и возведения объекта, приема объекта в эксплуатацию;

4) использования объекта по назначению на протяжении расчетного времени эксплуатации, оценки технического состояния, проведения текущего и капитального ремонтов;

5) реконструкции и дальнейшего использования объекта в новых условиях;

6) ликвидации объекта.

Основным требованием, которое определяет надежность объекта, является его соответствие назначению и способности сохранять необходимые эксплуатационные качества на протяжении расчетного времени эксплуатации.

3 Численные показатели надежности и способы их получения

Количественно надежность оценивают с помощью показателей, которые выбирают и определяют, учитывая особенности конструктивного решения объекта, условия и режима эксплуатации и последствия отказов. Значения **показателей** надежности находят для заданных режимов и условий применения технического обслуживания, ремонтов, сохранения и транспортирования конструкций или сохранения здания в целом [12, 21].

Показатель надежности – количественная характеристика одного или нескольких свойств, которые описывают надежность объекта (здания, сооружения или отдельного элемента). Этот показатель количественно характеризует, какой мерой конкретному объекту присущи определенные свойства, что придают ему надежность.

Показатель надежности может иметь размерность, например, наработку на отказ (сутки, годы), а также срок службы в месяцах или годах, или не иметь ее (например, вероятность безотказной работы). Рассматривая показатели надежности, необходимо иметь в виду следующие характеристики показателей надежности (т. е. они бывают разные). В основном определяются четыре показателя:

1) название (например, средняя наработка до отказа, вероятность безотказной работы, вероятность до первого отказа и т.п.);

2) числовое значение (которое меняется в зависимости от условий эксплуатации объекта, стадии его создания или существования, формулировка сути этой величины, которая содержит указание о способе определения числового значения);

3) формулируется суть данной величины;

4) размерность (часы, месяцы, годы, другое количество или безразмерность).

Все четыре элемента (название, числовое значение, формулировки, размерность) образуют единое понятие показателя надежности.

Чаще всего надежность описывают семьей показателей, к которой относятся:

– вероятность безотказной работы и дальность отказа;

– средняя наработка до первого отказа;

– средняя наработка до общего отказа;

– интенсивность потока отказов;

–параметр потока отказов.

Наиболее существенными являются два первых показателя, на которых необходимо остановиться подробнее.

Вероятность безотказной работы определенного объекта или элемента в промежутке времени от 0 до t (за время t) можно условно записать:

$$P(t) = P(0,t) = P\{T \geq t\} = 1 - F(t), \tag{11.1}$$

где T – случайное время работы (наработка до отказа) ;

$P(0,t)$ – вероятность того, что объект проработает безотказно на протяжении времени t, или вероятность того, что время работы объекта до отказа окажется большим чем заданное время t;

$F(t)$ – функция распределения случайной величины T.

Статистическое определение вероятности безотказной работы может быть записано аналогично вероятностному:

$$\overline{P}(t)=\overline{P}(0,t)=\frac{N(t)}{N(0)}=1-\frac{n(t)}{N(0)}, \tag{11.2}$$

где $\overline{P}(0,t)$ – отношение количества объектов, которые проработали безотказно до момента времени *t*, к количеству объектов, исправных в начальный период времени $t=0 \to N(0)$;

$N(t)$ – количество объектов, исправных в начальный период t и не вышедших из строя;

$N(0)$ – общее количество объектов;

$n(t)$ – количество отказов объектов за время *t*.

Из (11.1) и (11.2) выходит противоположное понятие – вероятность отказов объекта в интервале времени 0, *t*:

$$Q(t)=Q(0,t)=P\cdot\{T<t\}=F(t); \qquad Q(t)=1-P(t), \tag{11.3}$$

где $Q(0,t)$ – вероятности того, что объект откажет на протяжении заданного времени t, начав работу с $t=0$, или вероятность того, что случайное время работы объекта до отказа *T* окажется меньшим, чем заданное время *t*, $Q(t) = 1 - P(t)$.

Средняя наработка до первого отказа T_m определяется как математическое ожидание (среднее значение) времени работы объекта до первого отказа:

$$T_m=M(T_i)=\int_0^\infty xf(x)dx=\int_0^\infty xdQ(x)=\int_0^\infty P(x)dx, \tag{11.4}$$

где T_i – реализация наработки для *i*-го объекта (при множестве объектов каждый объект выходит из строя в свое время).

Среднее эмпирическое время наработки:

$$\overline{T}_m=\frac{1}{N(0)}=\sum_{i=1}^{N(0)}T_i, \tag{11.5}$$

где $N(0)$ – начальное количество объектов при $t = 0$.

ЛЕКЦИЯ 12
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ БЕЗОПАСНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

План лекции:

1. Средняя наработка на отказ для восстанавливаемых объектов.
2. Интенсивность потока отказов и параметр потока отказов.
3. Среднее время восстановления и гамма-ресурс.

1 Средняя наработка на отказ для восстанавливаемых объектов

Для восстановления объектов, то есть для таких, которые после возникновения отказа подлежит обязательному восстановлению в конкретной ситуации, кроме перечисленных ранее показателей надежности, необходимо определять среднюю наработку на отказ. Обозначим этот временной показатель буквой T_m. Его величина может быть определена по формуле:

$$T_m = \frac{t}{\Omega(t)}, \qquad (12.1)$$

где t – время наблюдения возможных отказов;

$\Omega(t)$ – математическое ожидание количества отказов за время t.

Эквивалентное формуле (12.1) статистическое определение средней наработки на отказ [12]:

$$T_m = \frac{\sum_{j=1}^{N} R_j(t) \sum_{k=1}^{R_j(t)} T_{jk}}{\sum_{j=1}^{N} R_j(t)}, \qquad (12.2)$$

где N – общее количество наблюдаемых однотипных объектов;

$R_j(t)$ – суммарное количество отказов за время работы t;

T_jk – реализация времени работы (наработка) j-го объекта между двумя соседними отказами [(k-1) и k].

Для периода работы объекта в интервале от t_1 и t_2 наработку на отказ статистически определяют следующим образом:

$$\overline{T}_m = \frac{t_2 - t_1}{\overline{\Omega}(t_2) - \overline{\Omega}(t_1)}, \qquad (12.3)$$

где $\overline{\Omega}(t)$ – среднее количество отказов за время t.

Очевидно, что с увеличением t, а следовательно, и возраста объекта увеличится и $\overline{\Omega}$, а параметр $\overline{T}_m$ уменьшится.

К показателям долговечности принадлежат средний срок службы, срок службы до капитального ремонта и межремонтный срок службы.

Средним сроком службы или средним ресурсом (средним временем сохранности) до наступления предельного состояния объекта называют величину:

$$T_m = M\{T_i\} = \int_0^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_0^{\infty} [1 - F(t)]dt = \int_0^{\infty} P(x)dt, \qquad (12.4)$$

где $f(t)$ – плотность распределения ресурса;

$F(t)$ – функция распределения ресурса до определенного состояния.

Среднее время восстановления работоспособного состояния – это математическое ожидание (среднее значение) времени восстановления работоспособного состояния:

$$V_m = M\{v\} = \int_0^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_0^{\infty} (1 - F_v(t))dt, \qquad (12.5)$$

где $f(t)$ – плотность распределения времени восстановления;

$F_v(t)$ – функция распределения времени восстановления.

На рисунке 12.1 показана схематически последовательность процессов работоспособности и восстановления какого-либо объекта [12].

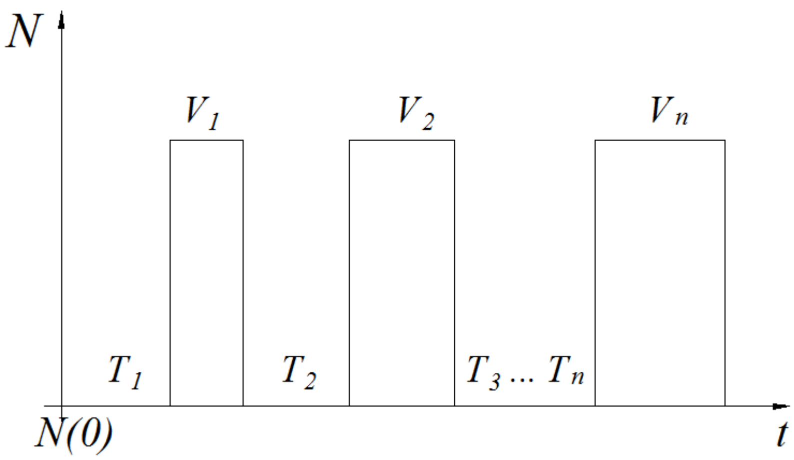

Рисунок 12.1 – Случайный процесс, который соответствует поочередным интервалам работоспособности и восстановления объекта :

T_i – отрезок времени работы; V_i – отрезок времени восстановления

2 Интенсивность потока отказов и параметр потока отказов

Для определения вероятности отказов очень часто используется понятие интенсивности потока отказов λ(t). Данная величина в момент времени t может быть определена по следующей формуле:

$$\lambda(t) = \frac{1}{1-F(t)}\frac{dF(t)}{dt} = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{f(t)}{P(t)}, \qquad (12.6)$$

где $\lambda(t)$ – плотность вероятности возникновения отказа объекта на момент времени t при условии, что до этого времени отказа не было;

$f(t)$ – плотность вероятности отказа на момент времени t.

Соответствующее статистическое определение:

$$\overline{\lambda}(t) = \frac{n(t+\Delta t)-n(t)}{N(t)\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{N(t)\Delta t} = \frac{\Delta n(t,\Delta t)}{N(t)\Delta t}, \qquad (12.7)$$

где $\overline{\lambda}(t)$ – соотношение количества отказов в интервале времени $(t,\ t+\Delta t)$ к произведению количества исправных объектов $N(t)$ в момент времени t на продолжительность интервала времени Δt;

$\Delta n(t,\Delta t)$ – количество объектов, которые отказали в интервале времени $(t, t+\Delta t)$.

Следует выделить отдельным параметром величину потока отказов. Этот параметр обозначается $w(t)$ и характеризует среднее количество отказов, ожидаемых в небольшом интервале времени:

$$w(t) = \Omega'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M[r(t+\Delta t)] - M[r(t)]}{\Delta t} \; . \qquad (12.8)$$

Величины $\Omega(t)$ и $w(t)$ связаны соотношением

$$\Omega(t) = \int_0^t w(x)dx \qquad (12.9)$$

Для N однотипных объектов количество отказов за время t или статистическая оценка функции восстановления

$$\overline{\Omega}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} R_j(t_i) \, , \qquad (12.10)$$

где $R_j(t_i)$ – суммарное количество отказов j-го объекта за время t;

N – количество объектов.

3 Среднее время восстановления и гамма-ресурс

Среднее время восстановления объекта зависит от многих факторов и вычислять его по упрощенной формуле (12.5) будет недостаточно корректно. Параметры V_1, V_2, ... V_n не всегда можно описать законом распределения, отсюда и некоторые сложности в объективной оценке процесса восстановления (ремонт, замена узлов, наличие специалистов, учет влияния температурно-климатических условий и т. п.).

Поэтому в теории надежности все чаще используется понятие гамма-ресурса, который интегрально характеризует безотказность, долговечность и сохраняемость объекта или конструкции, иногда его называют гамма-процентный ресурс, если показатель долговечности определяется в процентах.

Гама-процентный ресурс является регламентным показателем, при достижении которого объект должен быть либо остановлен для ремонта и профилактики, либо должен быть заменен на новый. Несоблюдение гамма-процентного ресурса существенно влияет на безопасность технических систем и, в частности, строительных конструкций.

Гамма-процентный ресурс – это наработка объекта во времени, на протяжении которого он не достигает предельного состояния с заданной вероятностью ***γ***, выраженной в процентах [12]:

$$1 - P(T_{\gamma_{\%}}) = 1 - \int_{0}^{T\gamma_{\%}} f(t)dt = P_{\gamma}(T), \qquad (12.11)$$

где $f(t)$ – плотность вероятности распределения наработки.

При определении гамма ресурса могут рассматриваться восстанавливаемые объекты и невосстанавливаемые.

Для восстанавливаемых объектов при заданном сроке службы t_{ser} величина гамма-ресурса может быть определена по формуле:

$$t_{\gamma} = \frac{\left[(t_{ser} - ct_2 - (c+1)(\overline{T}_1 - \beta_{\gamma}\sigma(T_1))\right]}{c+1}, \qquad (12.12)$$

где c – количество плановых ремонтов;

t_2 – продолжительность одного ремонта;

$\overline{T}_1$ и $\sigma(T_1)$ – соответственно среднее значение и стандарт промежутка времени, на протяжении которого работоспособность объекта не снижается;

β_{γ} – заданный квантиль принятого распределения.

Если же рассматривается невосстанавливаемый объект, то гамма – процентная наработка, которая соответствует вероятности безотказной работы $\gamma_{\%}$, может быть определена из уравнения:

$$t_{\gamma} = T_m - \beta_{\gamma}\sigma(T_m) \ , \qquad (12.13)$$

где $\beta\gamma$ можно определить с помощью табулированной функции Лапласа:

$$F_0(\beta_{\gamma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\beta_{\gamma}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \gamma \ ; \qquad F_0(\beta_{\gamma}) = 0{,}5 + \Phi(\beta_{\gamma}). \qquad (12.14)$$

По заданной величине γ можно определить $\beta\gamma$, при этом $F_0(-\beta_{\gamma}) = 1 - F_0(\beta_{\gamma})$.

В целом ряде задач необходимо задаться законом распределения ресурса рассматриваемого объекта или конструкции. При условии нормального закона распределения этого ресурса вероятность безотказной работы данного элемента может определяться по упрощенной формуле:

$$P(t) = F_0(x) = F_0\left\{\frac{T_{cp} - t}{T_{cp} \cdot v}\right\}. \quad (12.15)$$

где T_{cp} – средняя величина гамма-ресурса по времени;

v – коэффициент вариации;

t – время, которое интересует расчетчика.

Гамма-процентный ресурс в этом случае может быть определен по зависимости

$$T_\gamma + T_{cp}(1 - xv), \quad (12.16)$$

где x определяется в зависимости от $\gamma = F_0(x)$ по специальным таблицам.

Если же распределение вероятности ближе к закону Вейбулла-Гнеденко, т. е.

$$P(t) = e^{-\left(\frac{tK_в}{T_{cp}}\right)^{\frac{1}{в}}}, \quad (12.17)$$

тогда гамма-процентный ресурс может быть вычислен по формуле:

$$T_\gamma = \frac{T_{cp}}{K_в}\left\{\ln\frac{1}{\gamma}\right\}^{\frac{1}{в}}, \quad (12.18)$$

где $K_в$ и $в$ определяются в зависимости от коэффициента вариации v (соответствующие таблицы в литературе).

Графически определение гамма-процентного ресурса можно проследить на рисунке 12.2.

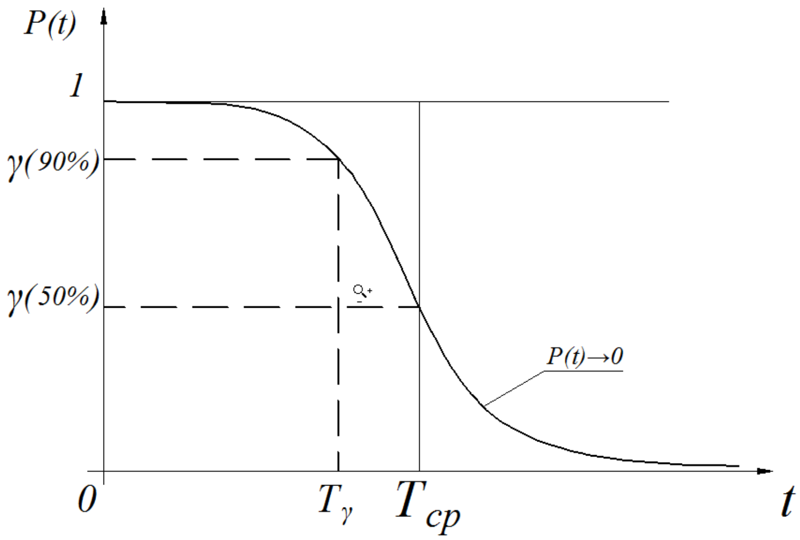

Рисунок 12.2 – Общий вид кривой убыли ресурса P(t) при заданном законе распределения параметров объекта : γ – интересующий гамма-ресурс; T_γ – соответствующее ему время безотказной работы

Для построения кривой или ломаной убыли ресурса во времени необходимо иметь вариационный ряд сроков эксплуатации объекта или конструкции в безотказном режиме. При этом необходимо иметь определенные статистические данные и количество объектов. Чем больше будет таких объектов, тем точнее можно определить гамма-процентный ресурс, то есть резерв надежной эксплуатации.

ЛЕКЦИЯ 13
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ БЕЗОПАСНОСТИ β_s В ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ

План лекции:

1. Назначение и общая запись формулы характеристики безопасности β_s.
2. Определение безотказной работы технической системы, состоящей из n элементов, зависящих друг от друга.
3. Определение вероятности безотказной работы однопролетной одноэтажной рамы с использованием параметра β_s.

1 Назначение и общая запись формулы характеристики безопасности βs

Выстраивая теорию безопасности строительных конструкции, все расчетные величины делят на две основные группы. Первую группу условно называют параметрами прочности (R). Она содержит в себе все характеристики, которые относятся к свойствам самой конструкции (прочность, геометрию, соединение элементов, композицию и другие). Вторую группу называют параметрами нагрузки (F). К ней принадлежат характеристики внешних воздействий на конструкцию. Такое разделение расчетных величин оправдано тем, что между этими группами обычно нет корреляционной (статистической) связи.

Разделение переменных величин на две основные группы дает возможность сформулировать задачу расчета конструкций на безопасность в виде требования об исполнении с некоторой достаточно высокой вероятностью неравенство вида:

$$R - F = S > 0, \tag{13.1}$$

где R – обобщенная прочность конструкции;

F – обобщенная нагрузка;

S – резерв прочности.

В общем случае нагрузка и прочность – случайные функции времени, но когда задан срок службы сооружения, то время в большинстве случаев можно из расчета исключить и считать, что R и F не случайные функции, а случайные величины с определенными законами распределения. Вероятность неравенства (13.1) представляет собой вероятность неразрушения конструкции, то есть $P(x) = 1 - Q(x)$, где $Q(x)$ – вероятность разрушения или отказа. В свою очередь, вероятность разрушения или отказа может быть определена по формуле:

$$Q = \int_{-\infty}^{0} P_s)s)ds = Q(0)\,, \tag{13.2}$$

где $Ps(s)$ – распределение плотности вероятности резерва прочности.

При произвольных законах распределения R и F, исходя из правила суммирования случайных величин, можно неравенство (13.1) представить в виде:

$$\overline{S} = \overline{R} - \overline{F}\,, \tag{13.3}$$

где $\overline{S}$, $\overline{R}$, $\overline{F}$ – математические ожидания резерва прочности, нагрузки (усилия) и сопротивления (прочности).

Если между нагрузкой и прочностью нет статистической связи, то величину дисперсии двух случайных величин можно записать $D(x+y) = D(x)+D(y)$ или применительно к стандарту:

$$\sigma_{(x,y)} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\ . \tag{13.4}$$

Используя принятые обозначения для нагрузки и прочности, стандарт резерва прочности будет иметь вид

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_F^2}\ . \tag{13.5}$$

Если же величину корреляционной связи между R и F можно как-то оценить, то дисперсия резерва прочности (стандарт) может быть определена так:

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_F^2 - 2K_{RF}} = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_F^2 - 2r_{RF}\cdot\sigma_R\cdot\sigma_F}\,, \tag{13.6}$$

где σ_S, σ_R, σ_F – стандарты соответственно резерва прочности, нагрузки и сопротивления материалов;

K_{RF} – корреляционная функция (ковариация) случайных величин сопротивления R и нагрузки F, определенная по формуле (5.11), лекция 5;

r_{RF} – коэффициент корреляции случайных величин R и F, определяется по формуле (5.12), лекция 5.

Количество стандартов σ_S, которое вкладывается в интервале от $S = 0$ до $S = \overline{S}$, называется характеристикой безопасности и обозначается β_S. Эта величина обратная вариации резерва прочности и определяется так:

$$\beta_S = \frac{\overline{S}}{\sigma_S} = \frac{1}{v_S}. \qquad (13.7)$$

Вероятность разрушения в этом случае может быть записана в виде

$$Q = Q_S(0) = Q_S(\overline{S} - \overline{S}) = Q(\overline{S} - \beta_S \sigma_S) \ . \qquad (13.8)$$

В случае, если существует корреляционная связь между нагрузкой F и сопротивлением конструкции R, можно записать:

$$\beta_S = \frac{\overline{R} - \overline{F}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_F^2 - 2K_{RF}}} = \frac{\overline{R} - \overline{F}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_F^2 - 2r_{RF}\sigma_R\sigma_F}}. \qquad (13.9)$$

В большинстве случаев статистической (корреляционной) связи между R и F нет, поэтому формулу (13.9) можно упростить:

$$\beta_S = \frac{\overline{R} - \overline{F}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_F^2}}. \qquad (13.10)$$

При нормальном законе распределения случайной величины S формулу (13.8) можно переписать в виде

$$Q = Q(S < 0) = Q(0) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{0 - \overline{S}}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} - \Phi(\beta_S), \qquad (13.11)$$

где $\Phi(\beta_S)$ – известный интеграл вероятности (функция Лапласа), который приведен в лекции 3, формула (3.18). Отсюда вероятность неразрушения конструкции или объекта :

$$P = P(S > 0) = \frac{1}{2} + \Phi(\beta_S). \qquad (13.12)$$

В таблице 13.1 приведены соотношения между характеристикой безопасности β_S и показателями вероятности P (неразрушения) и вероятностью Q (разрушения), $P + Q = 1$ [12].

Таблица 13.1 – Соотношение между параметрами β_S и P(β_S) и Q(β_S)

β_S	0	1	1,64	1,96	2	2,58	3	3,1	3,3	4
P(β_S)	0,5	0,841	0,95	0,975	0,977	0,995	0,998	0,999	0,9995	0,99997
Q(β_S)	0,5	0,159	0,05	0,025	0,023	0,005	0,002	0,001	0,0005	$3{,}2\cdot10^{-6}$

Величина β_S, как правило, не превышает 5, так как даже для этой величины вероятность безопасной работы конструкции очень велика, практически приближается к 1.

2 Определение безотказной работы технической системы, состоящей из n элементов, зависящих друг от друга

Представляет большой интерес задачи, в которых рассматривается не один элемент с оценкой его безопасной работы, а несколько элементов, в этом случае необходимо учитывать комплексные параметры коэффициента корреляции, а также интегральную функцию безопасной работы всей системы.

В практических задачах разнотипные основные несущие элементы или их соединения могут быть структурированы по разным типам моделей: последовательное соединение, параллельное соединение или смешанное. Чаще всего различают две группы систем: раздельного резервирования, которая состоит из последовательно-параллельного соединения элементов и общего резервирования, которая состоит из параллельно-последовательного соединения элементов. На рисунке 13.1 показаны эти два варианта соединения.

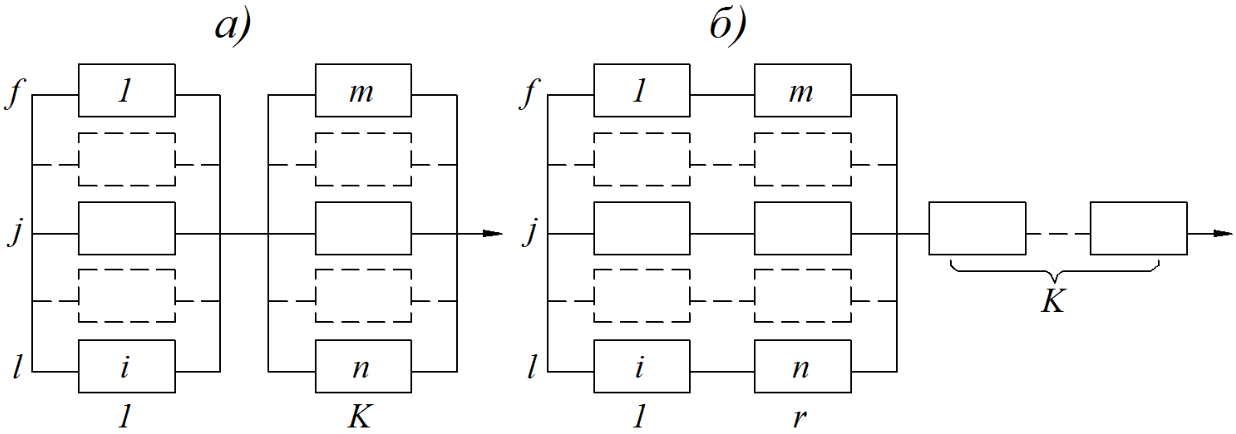

Рисунок 13.1 – Структурные схемы с последовательно-параллельным соединением элементов (а) и параллельно-последовательном соединением элементов (б); *f*, *j*, *l*, *k* – подсистемы; 1…, *i*…, …*m*, …*n* – элементы

Вероятность безотказной работы системы с последовательно-параллельным соединением элементов (рис. 13.1, а) можно определить по формуле:

$$P_S(t) = \prod_{i=1}^{K} P_i(t) = \prod_{i=1}^{K} \left\{ r_c \left[P_J(t) \right]_{\max} + (1 - r_c) \left[1 - \prod_{j=1}^{l} (1 - P_j(t)) \right] \right\}, \quad (13.13)$$

где K – количество последовательно соединенных независимых подсистем;

r_c – обобщенный коэффициент корреляции подсистемы;

l – количество параллельно соединенных зависимых элементов в j-ой подсистеме.

Для параллельно-последовательно соединенных элементов (рис. 13.1, б) вначале рассматривают вероятностные показатели подсистем, которые состоят из последовательно соединенных элементов, а потом расчет выполняют как для системы, состоящей из соединенных параллельно элементов.

Вероятность безотказной работы такой системы можно определить по формуле:

$$P_S(t) = r \left[P_j(t) \right]_{\max} + (1 - r) \left[1 - \prod_{j=1}^{l} (1 - P_j(t)) \right], \quad (13.14)$$

где вероятность безотказной работы j-ой системы, которая состоит из К последовательно соединенных элементов:

$$P_j(t) = r_c[P_i(t)]_{\min} + (1-r_c)\prod_{i=1}^{K} P_i(t).$$

Для системы, состоящей из n элементов, вероятность безотказной работы с параллельным соединением элементов можно определить по зависимости

$$P_S(t) = r \cdot P_i(t)_{\max} + (1-r)\left[1 - \prod_{i=1}^{n}(1-P_i(t))\right], \tag{13.15}$$

где

$$r = r_m\left\{2 - \left[r_m + \frac{(1-r_m)(3-\lg n)}{1-0{,}1r_m^2(3-\lg n)^2}\right]\right\}; \tag{13.16}$$

r_m – среднее значение коэффициента корреляции:

$$r_m = \frac{2}{n(n-1)\sum_{i}^{j} rij}, \tag{13.17}$$

где n – количество элементов в системе.

Формулы (13.15), (13.16), (13.17) были предложены Д. П. Кудзисом [18] и реализованы во многих практических задачах обеспечения надежности строительных конструкций, зданий и сооружений.

3 Определение вероятности безотказной работы однопролетной одноэтажной рамы с использованием параметра βs

Рассмотрим пример расчета безопасной работы однопролетной, одноэтажной рамы с шарнирным соединением ригеля с колоннами. Расчетная модель рамы приведена на рисунке 13.2. Здесь же приведена блок-схема последовательно-параллельной системы соединения элементов рамы для определения вероятности безотказной работы всей системы.

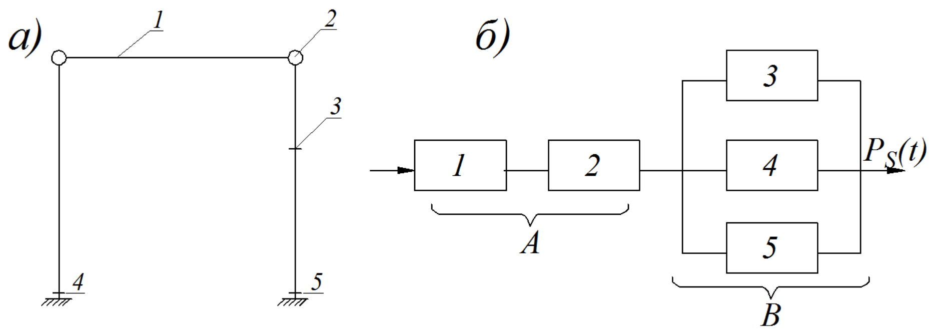

Рисунок 13.2 – Расчетная модель рамы для определения вероятности ее безотказной работы: а) – статическая схема рамы; б) – блок-схема рамы для расчета вероятности ее безотказной работы

Отказ приведенной на рисунке 13.2 системы может произойти в двух случаях: – произойдет разрушение ригеля (подсистема *A*); – произойдет разрушение колонны в трех местах (подсистема *B*), ригель может разрушиться в сечениях «1» или «2» (последовательное соединение), колонна в сечениях «3», «4», «5» (параллельное соединение).

Требуется определить вероятность безотказной работы рамы $P_S(t)$, если показатели вероятности безотказной работы сечений заданы следующими величинами: $p_1 = 0{,}998$; $p_2 = 0{,}996$; $p_3 = 0{,}951$; $p_4 = 0{,}920$; $p_5 = 0{,}959$; соответствующие коэффициенты корреляции (нагрузка, прочность) для ригеля и колонн $r_{12} = 0{,}34$; $r_{34} = 0{,}8$; $r_{35} = 0{,}7$; $r_{45} = 0{,}93$ при условии нормального закона распределения параметров функции надежности.

Вначале проанализируем подсистему А (последовательное соединение).

Обобщенный коэффициент корреляции для этой подсистемы определяется по формуле (13.16) :

$$r = 0{,}34\left\{2 - \left[0{,}34\frac{(1-0{,}34)(3-\lg 2)}{1-0{,}1\cdot 0{,}34^2(3-\lg 2)^2}\right]\right\} \approx 0.$$

Вероятность безотказность работы в этом случае находим по формуле

$$P_A(t) = P(t_i)\cdot P(t_2);$$

$$P_A(t) = 0{,}998\cdot 0{,}996 = 0{,}994.$$

Теперь перейдем к рассмотрению подсистемы В (колонна).

Определяем среднее значение коэффициента корреляции по формуле (13.17):

$$r_m = \frac{0{,}8 + 0{,}7 + 0{,}93}{3} = 0{,}81.$$

Обобщенный коэффициент корреляции:

$$r = 0{,}81\left\{2 - \left[0{,}81 + \frac{(1 - 0{,}81)(3 - \lg 3)}{1 - 0{,}1 \cdot 0{,}81^2 (3 - \lg 3)^2}\right]\right\} = 0{,}21.$$

Вероятность безотказной работы блока В, формула (13.15)

$P_B(t)$ = 0,21·0,959 + (1 - 0,21)[1 - (1 - 0,951)(1 - 0,920)(1 - 0,959)] = 0,983 1 .

Для всей системы вероятность безотказной работы

$$P_S(t) = P_A(t)\, P_B(t) = 0{,}994 \cdot 0{,}983\,1 = 0{,}976\,2.$$

Общий показатель надежности для одноэтажной рамы с шарнирным соединением ригеля с колоннами

$$P_S(t) = 0{,}976\,2.$$

Параметры нагрузки и прочностные характеристики элементов приведены обобщенно в виде показателей вероятности безотказной работы, т. е. $R > F$ (см. формулу 13.1).

ЛЕКЦИЯ 14
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАСЧЕТА НА НАДЕЖНОСТЬ СБОРНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

План лекции:

1. Сбор статистических данных о внешних нагрузках и сопротивлениях материалов для заданного элемента.
2. Определение коэффициентов корреляции.
3. Расчет вероятности безотказной работы сборной железобетонной многопустотной плиты и железобетонной балки.

1 Сбор статистических данных о внешних нагрузках и сопротивлениях материалов для заданного элемента

При определении надежности (безотказности работы) строительных конструкций очень важно иметь статистические данные о величинах возможных нагрузок и величинах возможных прочностных характеристиках материалов, то есть применительно к железобетонным конструкциям это параметры f_{cd} и f_{yd} – расчетное сопротивление бетона и арматуры (прил. А, Б).

Наличие статистических данных о нагрузках позволяет обработать их и установить определенный закон распределения. Можно в упрощенном виде принимать среднее значение нагрузок, исключив два-три минимальных значения. В расчет надежности включается не сама внешняя нагрузка, а ее модификация в виде внешнего усилия, представленного либо сосредоточенной силой N, либо изгибающим моментом M, либо крутящим моментом $M_{кр}$, либо другим усилием, которые зависят от расчетной схемы конструкции или расчетной модели всего сооружения. Данные усилия чаще всего обозначаются $\overline{N}$, $\overline{M}$, $\overline{M}_{кр}$, $\overline{V}$ [1].

Когда оценивается прочностная характеристика конструкции, тогда используется внутреннее усилие сопротивления (несущая способность), выраженное через прочностные характеристики материалов и геометрические параметры сечений. При этом для железобетонных конструкций может использоваться как прочностная характеристика бетона f_{cd}, так и прочностная характеристика арматурной стали f_{yd}, в зависимости от того, насколько изменчивы эти характеристики [2].

Так, для определения несущей способности изгибаемого элемента можно использовать зависимость $M = f_{yd} A_s (d - 0{,}4x)$ или $M = f_{cd} bx(d - 0{,}4x)$. В каждом из этих вариантов при известной величине переменных значений f_{cd} или f_{yd} будут изменяться и величины моментов M_i. Если рассматривается центрально растянутый железобетонный элемент, тогда для оценки степени надежности этого элемента учитывается только величина f_{yd}, потому что бетон в данном случае не влияет на прочностную характеристику конструкции.

Только после определения степени изменчивости внешнего усилия и степени изменчивости несущей способности рассматриваемой конструкции можно решать вопрос о надежности эксплуатации данного элемента. Чтобы не использовать одинаковые обозначения для внешних нагрузок и внутреннего сопротивления, используют обобщенные показатели: для внешних нагрузок это F, для внутреннего сопротивления это R. С учетом статистических данных по этим параметрам добавляют над символами верхнюю черту, то есть $\overline{F}$ и $\overline{R}$. И уже в расчете показателей надежности принимается, что исходные силовые параметры $\overline{F}$ и $\overline{R}$ известны, их можно использовать в базовых формулах и показателях надежности.

2 Определение коэффициентов корреляции

Учитывая, что в последующих расчетах присутствует величина корреляционной связи между нагрузкой и сопротивлением рассматриваемой конструкции, то необходимо оценивать эту величину, исходя из анализа значений F и R. При этом обязательно учитывается параметр S-резерв прочности [12].

В большинстве практических задач корреляционная связь между внешней нагрузкой и внутренним сопротивлением конструкции отсутствует. Если же F и R корреляционно (статистически) зависимые величины, тогда рассматривают функцию их общего распределения $p(R, F)$, заменяя в ней R на $S + F$. В этом случае распределение плотности вероятности резерва прочности $P_s(S)$ может быть записано в виде

$$P_s(S) = \int_{-\infty}^{\infty} p(S+F, F)dF \tag{14.1}$$

или

$$P_s(S) = \int_{-\infty}^{\infty} p(R, R-S)dR \tag{14.2}$$

Если между нагрузкой и прочностью (несущей способностью) нет статистической связи, то стандарт резерва прочности может быть определен по упрощенной формуле:

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_F^2}\,, \tag{14.3}$$

где σ_R и σ_F – соответственно стандарты сопротивления конструкции и внешней нагрузки.

Если же величину корреляционной связи между F и R можно как-то оценить, тогда дисперсия резерва прочности может быть вычислена по формуле:

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_F^2 - 2r_{RF} \cdot \sigma_R \cdot \sigma_F}\,, \tag{14.4}$$

где r_{RF} – коэффициент корреляции, определяемый по зависимости

$$r_{RF} = \frac{K_{RF}}{\sigma_R \cdot \sigma_F}\,. \tag{14.5}$$

Величина K_{RF} (центральный момент второго порядка, ковариация) вычисляется в соответствии с формулой (5.11) следующим образом:

$$K_{RF} = [R - M(R)][F - M(F)] \cdot p(R, F)\,, \tag{14.6}$$

где $M(R)$ – математическое ожидание случайной величины сопротивления конструкции;

$M(F)$ – математическое ожидание случайной величины внешней нагрузки.

Положительная корреляционная зависимость нагрузки и прочности конструкции ($K_{RF} > 0$) свидетельствует о том, что для более прочных элементов с большей вероятностью можно ожидать относительно больших нагрузок. Это относится в большинстве случаев к статически неопределимым системам.

Отрицательная корреляционная зависимость нагрузки и прочности конструкции ($K_{RF} < 0$) возникает тогда, когда менее прочные элементы воспринимают большую нагрузку. Например, этот случай возможен при появлении объемных сжимающих сил в конструкциях, ослабленных технологическими отверстиями.

3 Расчет вероятности безотказной работы сборной железобетонной многопустотной плиты и железобетонной балки

Рассмотрим конкретный пример определения вероятности безотказной работы сборной железобетонной многопустотной плиты размером в плане 1,5 х 6,0 м. Равномерно распределенная внешняя нагрузка на плиту создает моменты: M_1 = 125кН·м; M_2 = 135кН·м; M_3 = 160кН·м; M_4 = 175кН·м. Несущая способность по арматуре (с учетом разброса прочностных характеристик стали) для плиты составляет M_{R1} = 185кН·м; M_{R2} = 195кН·м; M_{R3} = 200кН·м. Стандарты по нагрузке $\sigma_M^2 = 110 кH^2 \cdot м^2$, по прочности $\sigma_R^2 = 146\, кH^2 \cdot м^2$. Корреляционный момент K_{RM} = 42,4 $кH^2 \cdot м^2$.

Так как между внешней нагрузкой и внутренним сопротивлением плиты существует определенная корреляционная зависимость, то необходимо на первом этапе определить коэффициент корреляции r_{RM} (формула 14,5):

$$r_{RM} = \frac{42{,}4}{\sqrt{146} \cdot \sqrt{110}} = 0{,}315\,.$$

Теперь можно вычислить характеристику безопасности β_S, пользуясь формулой (13.9):

$$\beta_s = \frac{\overline{R} - \overline{F}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_F^2 - 2r_{RM} \cdot \sigma_R \cdot \sigma_F}}\,.$$

Для определения обобщенных параметров $\overline{R}$ и $\overline{F}$ найдем их усредненные значения, исходя из приведенных для них параметров в условии задачи. Для внешнего момента минимальное значение M_1 в расчет вводить не будем.

$$\overline{F} = (135 + 160 + 175) : 3 = 156{,}66 кН \cdot м .$$

Среднее значение внутреннего сопротивления плиты:

$$\overline{R} = (185 + 195 + 200) : 3 = 193{,}33 кН \cdot м \;;$$

$$\beta_S = \frac{193{,}3 - 156{,}66}{\sqrt{146 + 110 - 2 \cdot 0{,}315 \cdot 12{,}083 \cdot 10{,}488}} = \frac{36{,}667}{13{,}085} = 2{,}802 \;.$$

Вероятность неразрушения конструкции (вероятность безотказной работы) может быть определена с использованием интеграла вероятности (функции Лапласа) $\Phi(\beta_S)$:

$$P = P(S > 0) = 0{,}5 + \Phi(\beta_S) \;,$$

$$P(S > 0) = 0{,}5 + \Phi(2{,}802) = 0{,}5 + 0{,}4974 = 0{,}9974 \;.$$

Если рассматривать общепринятую нормированную величину вероятности в строительстве *P(S>0)* = 0,95, то выполненный расчет показывает, что вероятность безотказной работы сборной железобетонной плиты превышает нормированную величину 0,997 4 > 0,95.

Рассмотрим работу главных железобетонных балок под воздействием внешней нагрузки от второстепенных железобетонных балок с внешней переменной нагрузкой. Определим вероятность безотказной работы балок по изгибающему моменту в случае разрушения по бетону и арматуре, распределения внешних усилий и сопротивления балок характеризуются кривыми нормального распределения.

Исходные данные: $\overline{M} = 226\, кН \cdot м$; $\overline{R}_1 = 334 кН \cdot м$; $\overline{R}_2 = 498\, кН \cdot м$; $\sigma_M^2 = 1\,300 кН^2 \cdot м^2$; $\sigma_{R_1}^2 = 725 кН^2 \cdot м^2$; $\sigma_{R_2}^2 = 5\,925 кН^2 \cdot м^2$;

$K_{R_1,R_2} = 1\,377{,}5 кН^2 \cdot м^2$; $K_{M_1,M_2} = \sigma_M^2 = 1\,300 кН^2 \cdot м^2$.

Между $\overline{R}$ и $\overline{M}$ имеется корреляционная связь, так как $K_{R_1,R_2} \neq 0$ и $K_{M_1,M_2} \neq 0$. В этом случае коэффициент корреляции

$$r_{RM} = \frac{1\,377{,}5 + 1\,300}{\sqrt{725 + 1\,300} \cdot \sqrt{5\,925 + 1\,300}} = 0{,}7 \ ;$$

$$\sigma_{R_1} = \sqrt{725} = 26{,}93 кН \cdot м ; \quad \sigma_{R_2} = \sqrt{5\,925} = 79{,}97 кН \cdot м \ ;$$

$$\sigma_M = \sqrt{1\,300} = 36{,}06 \ .$$

Определим характеристики безопасности β_{S1} и β_{S2} для двух значений сопротивления материалов-бетона и арматуры.

$$\beta_{S_1} = \frac{334 - 226}{\sqrt{725 + 1\,300}} = 2{,}4 ; \quad \beta_{S_2} = \frac{498 - 226}{\sqrt{5\,925 + 1\,300}} = 3{,}2 .$$

Обобщенный коэффициент корреляции r определим по формуле (13.16):

$$r = 0{,}7\left\{2 - \left[0{,}7 + \frac{(1 - 0{,}7)(3 - lg\,2)}{1 - 0{,}1 \cdot 0{,}7^2 (3 - lg\,2)^2}\right]\right\} = 0{,}029 \ .$$

Величина вероятности безотказной работы балки по бетону

$P(S_1 > 0) = 0{,}5 + \Phi(2{,}4) = 0{,}5 + 0{,}491\,8 = 0{,}991\,8$

Вероятность безотказной работы балки по арматуре

$P(S_2 > 0) = 0{,}5 + \Phi(3{,}2) = 0{,}5 + 0{,}499\,3 = 0{,}999\,2$

Для учета совместной безопасной работы балки с учетом надежности по бетону и по арматуре:

$P(S > 0) = 0{,}029 \cdot 0{,}991\,8 + (1 - 0{,}029) \cdot 0{,}991\,8 \cdot 0{,}999\,2 = 0{,}991\,2.$

Если принять, что $r = 0$, то можно определить вероятность безопасной работы балки по упрощенной зависимости

$P(S > 0) = 0{,}9918 \cdot 0{,}9993 = 0{,}991\,1.$

В данном случае результаты расчета практически не отличаются друг от друга, что свидетельствует о равнозначности выполненных расчетов.

Значения интеграла вероятности $\Phi(\beta_S)$ определяются из табулированной таблицы (Прил. 2).

ЛЕКЦИЯ 15
УЧЕТ НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ ЗДАНИЙ И КЛАССИФИКАЦИЯ КАТЕГОРИЙ ПОСЛЕДСТВИЙ

План лекции:

1. Основные принципы учета непропорционального обрушения в задачах расчета зданий на надежность.
2. Классификация зданий и сооружений на категории последствий вследствие выхода их из эксплуатации.
3. Методика определения категорий последствий для зданий и сооружений.

1 Основные принципы учета непропорционального обрушения в задачах расчета зданий на надежность

В современных условиях весьма актуальной является проблема оценки несущей способности как всего здания, так и его отдельных элементов в условиях развития непропорционального (прогрессирующего) обрушения [20, 28].

Под термином непропорционального обрушения подразумевается распространение локального какого-либо повреждения здания в виде цепной реакции на остальные части здания, что в конечном итоге может привести к обрушению значительной части объекта или всего здания в целом. Причиной такого разрушения может послужить какая-либо аварийная ситуация, которая, как правило, не рассматривается при общепринятом проектировании. В качестве примеров можно назвать следующие аварийные ситуации: террористические акты, диверсии, наезды автотранспорта, землетрясения, пожары, взрывы газа, внезапные нарушения технологических процессов, климатические катаклизмы и другие явления.

Вопросы предотвращения последствий непропорционального обрушения малоэтажных строений; инженерных сооружений, фортификационных объектов и других приобретают все большее и большее значение в связи с массовыми авариями последних лет и значительными человеческими жертвами.

Четких и дифференцированных рекомендаций для решения этой проблемы на сегодня не существует, но частично разработанные рекомендации по учету непропорционального обрушения для отдельных видов зданий можно найти в периодической литературе и в ряде ведомственных нормативов [4, 6, 18, 20, 28].

Для упрощения расчетов разработан ряд программных комплексов (SCADOffice, ЛИРА-9, ANSYS, STARK-ES и другие), в основу которых положен метод конечных элементов и предусмотрен отдельный модуль: «прогрессирующее обрушение». Расчет выполняется на особое загружение при наиболее опасной схеме локального разрушения, которую предлагает сам проектировщик.

В качестве вариантов возможных схем разрушения можно рассмотреть для многоэтажных каркасных зданий схемы, приведенные на рисунке 15.1.

Наряду с указанными расчетными ситуациями возможны и другие усложненные или упрощенные аварийные ситуации. И в каждой из возможных расчетных ситуаций определяется особенность поведения основных несущих конструкций, способность здания сохранять свою устойчивость или полностью потерять эту устойчивость.

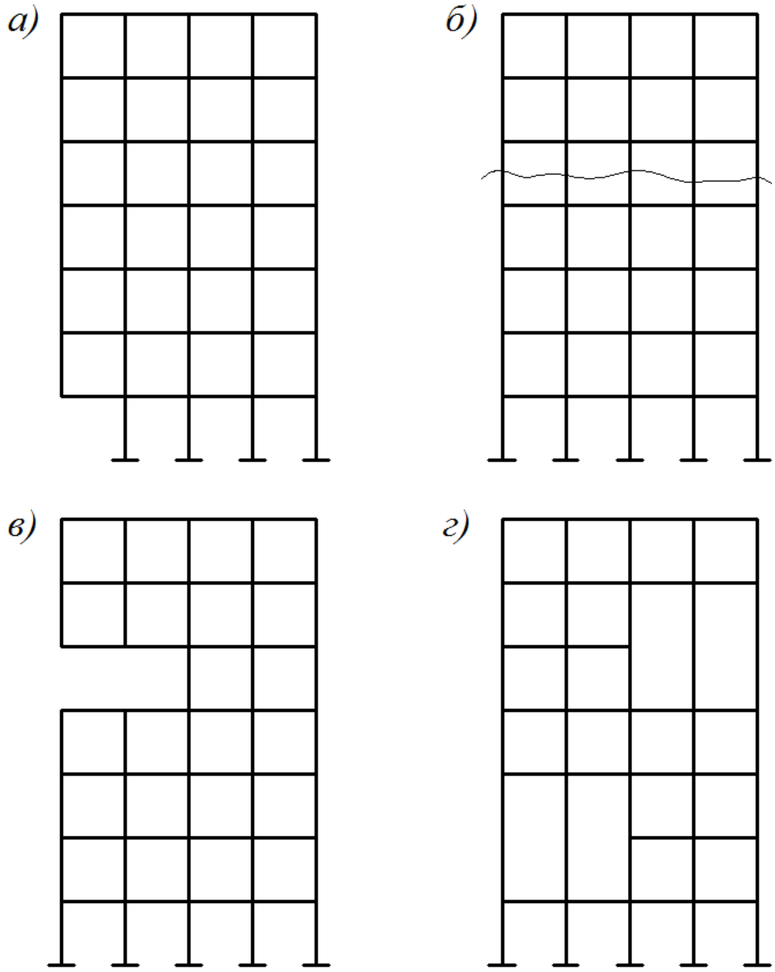

Рисунок 15.1 – Возможные аварийные расчетные ситуации:

а) – выход из строя колонн первого этажа;

б) – срез здания на произвольном этаже;

в) – локальный выход из строя колонн произвольного этажа;

г) – разрушение перекрытий произвольных этажей.

В практике проектирования должны выбираться две-три расчетные схемы, наиболее вероятные для конкретных условий эксплуатации здания и внешних климатических условий, а затем производится оценка величины усилий во всех элементах здания при учете заданных повреждений.

На основании выполненных расчетов принимается несколько способов предотвращения влияния эффекта непропорционального обрушения на все здание. К их числу можно отнести:

– общее упрочнение здания путем повышения прочности основных несущих элементов (повышение класса бетона, класса арматуры, марки стали);

– местное усиление наиболее ослабленных участков здания, которые попадают в зону разрушения;

– обеспечение прочности и устойчивости основных несущих конструкций (конструкции типа А и А1) и их взаимоподдержка в случае возникновения локальных разрушений;

– устройство дополнительных горизонтальных элементов жесткости в виде «аутригерных этажей» или дополнительных объединяющих элементов (связей, диафрагм и других).

В расчетах на непропорциональное обрушение очень важное значение имеет коэффициент динамичности $\boldsymbol{\gamma_d}$, который может быть определен по формуле:

$$\gamma_d = \frac{K_{pl}}{K_{pl} - 0{,}5}, \qquad (15.1)$$

где K_{pl} – коэффициент пластичности, равный отношению полного прогиба элемента к его граничному значению.

Если пластические деформации элемента незначительные, тогда $K_{pl} = 1$, а это означает, что величина $\gamma_d = 2$ и величина динамического влияния при непропорциональном обрушении максимальна.

В программных комплексах оценка предельного напряженного состояния элементов здания, испытывающих влияние непропорционального обрушения, производится с помощью так называемого коэффициента использования ограничений K_{max}. Этот коэффициент представляет собой отношение усилий при практическом внешнем загружении $N_ф$ (с учетом влияния непропорционального обрушения) к теоретической несущей способности этого элемента Nт:

$$K_{max} = \frac{N_Ф}{N_Т}. \qquad (15.2)$$

Если K_{max} для конкретного элемента превышает единицу, то этот элемент подлежит либо усилению, либо конструктивному изменению.

Существенное влияние на величину K_{max} оказывает коэффициент динамичности γd, поэтому данный коэффициент должен определяться с учетом реальных характеристик исходных материалов, необоснованное его увеличение приводит к неверным результатам оценки несущей способности элементов каркаса.

2 Классификация зданий и сооружений на категории последствий вследствие выхода их из эксплуатации

Нормативные документы ДБН В.1.2 – 14:2018 и ДБН В.2.2 – 24:2009 [3, 4] строго регламентирующие необходимость проведения соответствующих расчетов на непропорциональное обрушение для зданий и сооружений с определенными категориями последствий (ответственности).

Рассмотрим подробнее классификацию зданий и сооружений на категории последствий вследствие выхода их из эксплуатации.

Категории последствий (классы ответственности) объектов определяются уровнем возможного материального ущерба и социальных потерь, связанных с прекращением эксплуатации или с потерей целостности объекта.

Возможные социальные потери при отказе объекта должны оцениваться в зависимости от следующих факторов риска потерь:

– опасность для здоровья и жизни людей;
– резкое ухудшение экологической среды в прилегающей к объекту местности (при разрушении хранилищ токсических жидкостей или газов, отказ очистных сооружений систем центрального водоотведения);
– потеря достопримечательностей истории и культуры или других духовных ценностей общества;
– прекращение функционирования систем и сетей связи, энергообеспечения, транспорта или других элементов жизнеобеспечения населения либо безопасности общества;
– невозможность организовать оказание помощи потерпевшим при авариях и стихийных бедствиях;
– угроза обороноспособности и национальной безопасности страны.

Возможные материальные потери должны оцениваться затратами, связанными как с необходимостью восстановления объекта, который вышел из эксплуатации, так и сопутствующими убытками (убытки от остановки производства, потерянная выгода).

Рекомендуется разделять все здания и сооружения на три категории последствий СС3, СС2, СС1. Определение этих категорий (классов) можно выполнять в соответствии с таблицей 15.1 При этом соответствие хотя бы одному требованию таблицы будет основанием для определения категории последствий объекта.

Таблица 15.1 – Классы последствий объектов

Класс последствий объекта	Характеристики возможных последствий отказа объекта				
	Возможная опасность при количестве людей			Объём возможного материального убытка в минимальном размере заработной платы	Прекращение функционирования инженерно-транспортной инфраструктуры, уровень влияния
	Для людей, которые находятся постоянно на объекте	Для людей, которые периодически бывают на объекте	Для жизнедеятельности людей, которые находятся вне объекта		
СС3 Значительные последствия	Свыше 400	Более 1 000	Свыше 50 000	Свыше 50 000 М.Р.З.П. (грн)	Общегосударственный
СС2 Средние последствия	От 50 до 400 включительно	От 100 до 1 000 включительно	Свыше 100 до 50 000 включительно	Свыше 2 500 до 50 000 включительно М.Р.З.П. (грн)	Региональный, местный
СС1 Незначительные последствия	До 50 включительно	До 100 включительно	До 100 включительно	До 2 500 включительно М.Р.З.П. (грн)	Объектный

Возможные убытки оцениваются исходя из прогнозированного сценария планируемой аварии, с учетом предусмотренных проектом мероприятий относительно локализации возможной аварии (например, разделение объекта на обособленные, независимые части).

Возможные варианты аварий были изложены в предыдущем вопросе данной лекции, по своему назначению эти аварии могут подразделяться на проектные аварии (ПА) и максимально возможные аварии (МВА).

3 Методика определения категорий последствий для зданий и сооружений

Рассмотрим методику определения категорий последствий (классов последствий) для простейших зданий и сооружений.

В основу методики расчета категорий последствий для произвольного объекта строительства положен нормативный документ ДСТУ-Н Б В.1.2-16:2013 [5, 6].

При определении количества человек, которым может угрожать опасность для жизни или здоровью, считают, что на объекте находятся люди и пребывают там больше 8 часов в сутки, но не меньше 150 дней в году (в общем не менее 1200 часов в году).

Опасностью для жизнедеятельности людей, которые находятся вне объекта, является нарушение нормальных условий их жизнедеятельности более чем на трое суток.

Убытки от разрушения или повреждения основных фондов рассчитывают исходя из затрат их остаточной стоимости, то есть балансовой стоимости с учетом амортизации. Принимается, что отказ происходит на момент среднего значения установленного срока эксплуатации T_{ef}, поэтому остаточную стоимость рассчитывают на этот момент времени. Убытки от возможного разрушения основных фондов можно определить по формуле [5]:

$$\Phi = c\sum_{i}^{n} P_i\left(1-\frac{1}{2}T_{ef}\times K_{a,i}\right), \qquad (15.3)$$

где Φ – прогнозируемые затраты (тыс. грн);

c – коэффициент, что учитывает относительную долю основных фондов, которые полностью теряются во время аварии. Значения c можно оценивать при анализе сценария развития аварии. Предварительно можно принимать c = 0,45–0,5;

P_i – стоимость i-го вида основных фондов, которые могут быть потеряны, подразумевается общая стоимость рассматриваемого фонда (тыс. грн);

T_{ef} – среднее значение установленного срока эксплуатации основных фондов;

$K_{a,i}$ – коэффициент амортизационных отчислений i-го вида основных фондов;

n – количество видов основных фондов.

Особенности определения класса последствий для линейных объектов инженерно-сетевой или инженерно-транспортной инфраструктуры могут быть регламентированы отраслевыми специальными нормами.

Рассмотрим пример определения класса последствий для инженерного сооружения в виде отдельно размещенного резервуара для хранения дизельного топлива.

Резервуар имеет объём 5 000 $м^3$ и не является частью резервуарного парка. Он принадлежит к потенциально опасным объектам; расположен резервуар в Винницкой области [6].

Постоянный обсуживающий персонал состоит из трех человек, периодически присутствовать может еще 10 человек. Вокруг резервуара нет построек с наличием людей и отсутствуют какие-либо обстоятельства, что могут привести к появлению значительного количества людей.

Отказ резервуара может привести к следующим негативным последствия:

а) убытки от разрушения самого резервуара (потеря основных фондов);

б) убытки от потери запасов нефтепродуктов, которые хранятся в резервуаре;

в) значительные убытки от нанесения экологического вреда от разлива нефтепродуктов.

Финансовые потери от разрушения и повреждения основных фондов непроизводственного назначения определяются по формуле (15.3)

Для заданных условий задачи:

- количество видов основных фондов $n = 1$;
- коэффициент, учитывающий относительную часть основных фондов, которые полностью теряются, $c = 0{,}45$;
- срок эксплуатации резервуара $T_{ef} = 40$ лет;
- коэффициент амортизационных отчислений $K_a = 0{,}025$ (может приниматься в пределах 0,015–0,03);
- сметная стоимость резервуара по данным проекта-аналога составляет 15 млн. грн.

Подставляем эти параметры в формулу (15.3).

$$Ф = 0{,}45 \cdot 15\ 000\ 000\left(1 - \frac{40}{2} \cdot 0{,}025\right) = 3{,}375\ млн\ грн.$$

Убытки от потери запасов нефтепродуктов, которые хранятся в резервуаре, при цене дизельного топлива 28 грн/л = 28 000 грн/$м^2$:

28 000x5 000 = 140 млн грн.

Потери от нарушения плодородия сельскохозяйственных угодий ($P_{с/у}$) рассчитываются на основании нормативных показателей убытков для разных видов сельскохозяйственных угодий областей Украины и АР Крым.

$$P_{с/у} = H \text{ x } П,$$

где H – норматив убытков для разных видов сельскохозяйственных угодий;

$П$ – площадь в гектарах, которая выводится из пользования.

Для Винницкой области характерной зоной являются пастбища, цена 1га равна 228,3 тыс. грн. Значения стоимости других угодий можно найти в Постановлении Кабмина Украины от 15 февраля 2002 г. №175 «Про затвердження Методики оцінки збитків від наслідків надзвичайних ситуацій техногенного і природного характеру» [11].

Разлив дизельного топлива рассчитываем, исходя из толщины жидкости в зоне разлива, которую условно можно принять равной 1 см.

$$П = 5000:0{,}01 = 500\,000\ м^2 = 50 га\ .$$

Общие материальные потери от разлива нефтепродуктов составят:

$$P_{с/у} = 228\,300 \cdot 50 = 11{,}415 \text{ млн грн.}$$

С учетом всех финансовых потерь:

$$З_{общ} = 3{,}375 + 140 + 11{,}415 = 154{,}79 \text{ млн грн.}$$

Величина минимальной заработной платы составляет 4137 грн. Количество этих зарплат будет равно

154 790 000:4137 = 37416 м.р.з.п.

По данному показателю, согласно таблице 15.1, величина минимальных размеров заработной платы не превышает 50 000, следовательно, класс последствий для заданного резервуара соответствует СС2 (средние последствия).

В случае расположения этого резервуара в непосредственной близости к жилым районам класс последствий может быть повышен до СС3.

Примеры определения категорий последствий для других объектов и, в частности, для жилых домой можно найти в Методическом пособии [6].

Контрольные вопросы к материалам конспектов лекций

Лекция 1

1. Основные виды событий и их определение.
2. Базовое определение теории вероятности и ее математическая трактовка.
3. Использование теории вероятности в различных отраслях человеческой деятельности.
4. Краткая история развития теории вероятности.
5. Прикладная комбинаторика в теории вероятности.
6. Примеры использования перестановок P.
7. Примеры использования размещения A.
8. Примеры использования сочетаний C, связь между C, A, P.

Лекция 2

1. Сущность геометрической вероятности.
2. Задача Бюффона.
3. Определение случайной величины и вероятность ее появления.
4. Теорема сложения вероятности случайных величин.
5. Теорема произведения вероятностей случайных величин.
6. Формула полной вероятности ожидаемых событий.
7. Формула Бейеса.
8. Математическое ожидание и среднее значение случайной величины.
9. Основные теоремы для математического ожидания.

Лекция 3

1. Определение меры рассеивания случайной величины, дисперсия, стандарт.
2. Описание закономерностей развития случайных величин. Нормальный закон Гаусса.
3. Характеристика функции распределения и ее простейшая запись.
4. Плотность распределения случайной величины и ее вид в нормальном законе распределения.

5. Получение интеграла Лапласа, исходя из нормального закона распределения.
6. Вычисление случайной величины в заданных пределах X_2 и X_1 с помощью интеграла Лапласа.
7. Пример использования интеграла Лапласа для определения вероятности появления события $P(A)$. Табуляция значений интеграла Лапласа.

Лекция 4

1. Закон распределения вероятности случайной величины по формуле В. Вейбулла.
2. Закон распределения вероятности случайной величины по формуле Э. Гумбеля.
3. Закон редких событий Пуассона.
4. Характеристика параметра Пуассона λ, которая отражает интенсивность отказов.
5. Графики взаимосвязи вероятности $P(m)$ от значения m при различных λ ($m = 0 \div 10$).
6. Применение закона Пуассона в задачах надежности.
7. Определение вероятности получения ожидаемого результаты с помощью формулы $P_n^m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda t}$.

Лекция 5

1. Понятие случайной функции, примеры случайных функций.
2. Математическое ожидание случайной функции.
3. Дисперсия случайной функции и ее математическая запись, стандарт случайной функции.
4. Корреляционные функции. Запись корреляционного момента.
5. Определение корреляционного момента для двух случайных величин $X(t)$ и $Y(t)$.
6. Определение степени зависимости двух случайных величин с

помощью коэффициента корреляции.

7. Основные свойства корреляционной функции.
8. Понятие о «выбросах» в случайных функциях.

Лекция 6

1. Характеристика распределения случайных величин в Марковском процессе. Простейшие цепи Маркова.
2. Цепи Маркова с дискретным и непрерывным временем.
3. Что такое переходная вероятность в цепях Маркова?
4. Матрица прихода и ее определение.
5. Пример вычисления простейшей матрицы перехода второго порядка.
6. Математическая статистика в задачах экспериментальных исследований.
7. Характеристика гистограмм, полигонов и кумулятивных кривых.

Лекция 7

1. Анализ и сопоставление экспериментальных и теоретических данных в научных исследованиях.
2. Оценка степени совпадения теоретического и экспериментального распределения по критерию согласия Колмогорова.
3. Критерий степени совпадения (критерий согласия) Пирсона χ^2.
4. Закон больших чисел. Неравенство П. Л. Чебышева.
5. Теорема П. Л. Чебышева.
6. Теорема Бернулли.
7. Формула Бернулли для определения вероятности заданного события при известном значении частоты его повторения.
8. Примеры применения формулы Бернулли.

Лекция 8

1. Невозможность в ряде случаев использовать существующие законы распределения случайных величин.
2. Задание нижней и верхней границ распределения интересующего события.

3. Понятие интервальных функций в задачах расчета надежности строительных конструкций.
4. Усеченная интервальная функция распределения вероятностей для параметра нагрузки или прочности конструкции.
5. Интегральные формулы определения отказа с известными функциями и плотностями распределения.
6. Варианты использования усеченных интегральных функций при расчете надежности железобетонных балок.
7. Вероятность отказа при итоговом расчете надежности железобетонных элементов.

Лекция 9

1. Моделирование схем надежности различных элементов заданных систем и зданий в целом.
2. Последовательное соединение элементов в модели разнотипных строительных конструкций.
3. Параллельное соединение элементов в модели разнотипных строительных конструкций.
4. Смешанное последовательно-параллельное соединение элементов модели здания или сооружения.
5. Формулы для определения вероятности безотказной работы системы при последовательном и параллельном моделировании элементов заданной системы.
6. Повышение безопасной работы системы при увеличении количества составных элементов N.
7. Привести примеры моделирования схем надежности различных участков здания.

Лекция 10

1. Теория возможностей как альтернатива теории вероятностей.
2. Использование максимальных и минимальных параметров рассматриваемых случайных величин.

3. График распределения возможностей, параметр среза α и его роль в оценке степени значимости объекта.
4. Что такое нечеткие переменные?
5. Как определяется область множеств распределений, которые не приводят к предельным критическим значениям функций X и Y.
6. Определение характерных точек в граничных функциях распределения $\overline{F}_x(x)$ и $\underline{F}^*_x(x)$.
7. Определение плотностей распределения для граничных функций $\underline{F}_x(x)$ и $\overline{F}_x(x)$.

Лекция 11

1. Разновидности аварий зданий и сооружений по климатическим, техногенным и человекофакторным причинам.
2. Основная терминология, используемая в нормативной документации при оценке надежности и безопасности зданий и сооружений.
3. Из чего состоит жизненный цикл здания или сооружения?
4. Перечислить показатели надежности объектов, чем определяются эти показатели по своему содержанию.
5. Вероятность безотказной работы определенного объекта $P(t) = P(0,t) = \ldots$
6. Средняя наработка доя первого отказа T_m.
7. Роль статистических данных при расчете показателей надежности объекта.

Лекция 12

1. Сформулировать понятие «средняя наработка на отказ».
2. Охарактеризовать объекты, для которых существенным фактором в оценке надежности, является восстановление.
3. Как определяется средняя наработка на отказ для зданий, имеющих определенное количество отказов за время работы t.
4. Среднее время восстановления объекта.

5. Интенсивность потока отказов $\lambda(t) = \dfrac{f(t)}{1 - F(t)}$.
6. Понятие гамма-ресурса в теории надежности.
7. Построение графика убыли ресурса $P(t)$ при наличии данных о законе распределения параметров объекта (срок службы, время эксплуатации, скорость движения, наработка за время t и другие).

Лекция 13

1. Практический подход в определении надежности конструкций, узлов, участков и всего здания в целом.
2. Характеристика безопасности β_s и ее математическая запись.
3. Взаимосвязь характеристики безопасности и коэффициента вариации резерва прочности конструкции.
4. Определение вероятности неразрушения конструкции или объекта с помощью интеграла Лапласа.
5. Вероятность безотказной работы произвольной системы с последовательно-параллельным соединением элементов.
6. Как определяется среднее значение коэффициента корреляции и использование его в параметре r (обобщенный коэффициент корреляции) формулы Д. П. Курдзиса .
7. Привести пример расчетной модели рамы для определения ее безотказной работы.

Лекция 14

1. Сбор статистических данных с внешних нагрузок.
2. Сбор статистических данных о несущей способности элемента или всей системы.
3. Определение стандарта резерва прочности σ_s при отсутствии корреляционной связи между внешней нагрузкой и несущей способностью элемента.
4. Определение стандарта резерва прочности σ_s при наличии корреляционной связи между внешней нагрузкой и несущей

способностью элемента.

5. Вычисление центрального момента второго порядка, ковариации.
6. Привести пример вычисления характеристики безопасности β_s при известных $\overline{R}$ и $\overline{F}$, σ_R^2 и σ_F^2, а также K_{RF}.
7. Задавшись величиной β_s, вычислить вероятность безопасной работы железобетонной балки по бетону и по арматуре.

Лекция 15

1. Понятие непропорционального обрушения зданий и сооружений.
2. Способы противодействия непропорциональному обрушению
3. Влияние коэффициента динамичности γ_d на развитие процесса непропорционального (прогрессирующего) обрушения систем.
4. Категории последствий (ответственности) зданий и сооружений. Основные параметры, определяющие эти категории.
5. Методика вычисления материального ущерба от выхода здания или сооружения из строя.
6. Возможные последствия от выхода из строя объекта, представляющего опасность для окружающей среды.
7. Привести примеры объектов категорий (классов) последствий СС1, СС2, СС3.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Нормативные

1 Нагрузки и воздействия : ДБН В.1.2-2:2006. – Введен в действие 01.01.2007 г. – Киев : Минстрой Украины, 2006. – 60 с.

2 Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення : ДБН В.2.6-98:2009. – Чинний від 01.07.2011. – Київ: Мінрегіонбуд України, 2011. – 71 с.

3 Проектування висотних житлових і громадських будинків : ДБН В.2.2-24:2009. – Чинний від 01.09.2009. – Київ : Мінрегіонбуд України, 2011. – 109 с.

4 Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель і споруд : ДБН В.1.2-14:20018. – Чинний від 01.01.2019. – Київ : Мінрегіонбуд України, 2018. – 30 с.

5 Визначення класу наслідків (відповідальності) та категорії складності об’єктів будівництва : ДСТУ-Н Б В.1.2-16:2013. – Чинний від 14.05.2013. – Київ : Мінрегіон України, 2013.- 37 с.

6 Деякі особливості визначення класу наслідків (відповідальності) та категорії складності об’єктів будівництва : Методичний посібник – WORLD BANK GROUP. – JFK. квітень, 2016. 46 с.

7 Будівництво в сейсмічних районах України : ДБН В.1.1-12:2-14. – Чинний від 01.10.2014. – Київ : Мінрегіонбуд України, 2014. – 118 с.

8 Основні вимоги до будівель і споруд. Безпека експлуатації : ДБН В.1.2-9:2008. – Чинний від 01.09.2008. – Київ : Мінрегіонбуд України, 2008. – 27 с.

9 Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об’єктів. Прогини і переміщення. Вимоги проектування : ДСТУ Б В.1.2-3:2006. – Чинний від 01.06.2006. – Київ : Мінрегіонбуд України, 2006. – 46 с.

10 Основи і фундаменти будівель та споруд : ДБН В.2.1-10:2018. – Чинний від 01.01.2019. – Київ : Мінрегіонбуд України, 2018. – 35 с.

11 Про затвердження Методики оцінки збитків від наслідків надзвичайних ситуацій техногенного і природнього характеру : Постанова КМУ від 15.02.2002 №175 (зі змінами 862-2003п від 04.06.2003) – Київ : КМУ, 2002. – 68 с.

Основные

12 Барашиков А. Я. Надійність будівель і споруд : навч. посіб. / А. Я. Барашиков, М. Д. Сирота. – Київ : ІСДО, 1993. – 204 с.

13 Вайнберг А. И. Методика расчета вероятности разрушения высоконапорных сталежелезобетонных водоводов. / А. И. Вайнберг,

К. О. Рыжиков *// Збірник наукових праць Полтавського національного університету ім. Ю. Кондратюка*. – 2015. – Вип. 2. – С. 31–41.

14 Вентцель Е. С. Теория вероятностей : учебник. – М. : Наука, 1964. – 576 с.

15 Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статика : учеб. пособ. – М. : Юрайт, 2012. – 479 с.

16 Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособ. – М. : «Высшая школа», 1975. – 334 с.

17 Кичаева О. В. Методика вероятностей оценки превышения предельных деформаций системы «здание-основание». / О. В. Кичаева *// Материалы международной конференции : Сборник статей. – Белорусский национальный технический университет,* 2018. – С. 105–113.

18 Кудзис А. П. Оценка надежности железобетонных конструкций : монография. – Вильнюс : Мокслас, 1985. – 156 с.

19 Назаров Ю. П., До проблеми забезпечення живучості будівельних конструкцій при аварійних впливах / Ю. П. Назаров, О. С. Городецький, В. М. Симбіркін // *Будівельна механіка і розрахунок споруд.* – 2009. – №4. – С. 5–9.

20 Перельмутер А. В. Про розрахунки споруд на прогресуюче обвалення. // *Вісник МГСУ*. – 2008. – №1, – С. 119–128.

21 Пічугін С. Ф. Оцінка надійності залізобетонних балок з вуглепластиковим зовнішнім армуванням. / С. Ф. Пічугін // *Будівництво. Матеріалознавство. Машинобудування. Серія : Інноваційні технології життєвого циклу об'єктів житлово-комунального промислового і транспортного призначення*. – 2014. – Вип. 77. – С. 153–157.

22 Пытьев Ю. П. Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применения. / Ю. П. Пытьев. – М. : Физматлит, 2007. – 464 с.

23 Пытьев Ю. П. Вероятность, возможность и субъективное моделирование в научных исследованиях. / Ю. П. Пытьев. – М. : Физматлит, 2018. – 296 с.– ISBN 978-5-9221-1766-1.

24 Ржаніцин А. Р. Теорія розрахунку будівельних конструкцій та надійність. М. : Стройздат, 1978. – 239 с.

25 Самойленко Н. И. Теория вероятностей : учебник / Н. И. Самойленко, А. Н. Кузнецов, А. Б. Костенко. – Харьков : Издательство НТМТ, 2009. – 199 с.

26 Уткин В. С. Расчет надежности железобетонной колонны по критерию прочности на стадии эксплуатации / В. С. Уткин, О. В. Ярігина // *Бетон и железобетон*. – 2014. – № 4. – С.14–16.

27 Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений – Т.3. Математический

анализ. – М.; Л.: Изд-во АНСССР, 1948. – 412 с.

28 Шаповалов О. М. Експериментальне дослідження напружено-деформованого стану залізобетонної будівлі у разі прогресуючого обвалення. / О. М. Шаповалов, В. В. Руденко // *Східноєвропейський журнал передових технологій*. – Харків. – 2015. – Вип. 5/7(77). –С. 4–9.

29 Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з навчальної дисципліни «Забезпечення надійності експлуатації будівельних конструкцій» [Електронний ресурс] : для студентів 5, 6 курсів денної та заочної форм навчання, а також слухачів другої вищої освіти спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. О. М. Шаповалов, Н. О. Псурцева. – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 37 с.– Режим доступу: https://eprints.kname.edu.ua/46297/, вільний (дата звернення: 11.06.2019). – Назва з екрана.

30 Шпете Г. Надежность несущих строительных конструкций (перевод с немецкого). – Москва : Стройиздат, 1994. – 228 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А.1 – Прочностные и деформационные характеристики бетона

	Класс прочности бетона											Аналитическая зависимость / пояснение
	C8/10	C12/15	C16/20	C20/25	C25/30	C30/35	C32/40	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60	
$f_{ck,\ cube}$ (Мпа)	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	
$f_{cm,\ cube}$ (Мпа)	13	19	25	32	38	45	51	58	64	71	77	$f_{cm,\ cube}=f_{ck,cub}\ /\ (1\text{-}1{,}64V_c)$*)
$f_{ck,\ prism}$ (Мпа)	7,5	11	15	18,5	22	25,5	29	32	36	39,5	43	
f_{cd} (Мпа)	6,0	8,5	11,5	14,5	17	19,5	22	25	27,5	30	33	$f_{cd}=f_{ck}\ /\ \gamma_c$
f_{ctm} (Мпа)	1,2	1,6	1,9	2,2	2,6	2,8	3,0	3,2	3,5	3,8	4,1	
$f_{ctk,\ 0,05}$ (Мпа)	0,8	1,1	1,3	1,5	1,8	2,0	2,1	2,2	2,5	2,7	3,0	$f_{ctk,0,05}=0{,}7\ f_{ctm}$ 5% выборки
$f_{ctk,\ 0,95}$ (Мпа)	1,6	2,0	2,5	2,9	3,4	3,6	3,9	4,2	4,6	4,9	5,3	$f_{ctk,0,95}=1{,}3\ f_{ctm}$ 95% выборки
E_{cm} (Мпа)	18	23	27	30	32,5	34,5	36	37,5	39	39,5	40	
$E_{ck,}$ (Мпа)	15	20	23	26	29	31	32	34	35	36	37	
E_{cd} (Мпа)	12,6	16,3	20	23	25	27	28,5	30,5	32	33	34	
$\varepsilon_{c1,\cdot\ ck}$ (‰)	1,57	1,61	1,66	1,71	1,76	1,81	1,86	1,90	1,94	1,98	2,02	
$\varepsilon_{c1,\cdot\ cd}$ (‰)	1,56	1,58	1,62	1,65	1,69	1,72	1,76	1,80	1,84	1,87	1,91	
$\varepsilon_{cu1,\cdot\ ck}$ (‰)	4,50	4,40	4,15	3,85	3,55	3,25	3,00	2,83	2,63	2,50	2,40	
$\varepsilon_{cu1,\cdot\ cd}$ (‰)	3,75	3,70	3,59	3,44	3,28	3,10	2,93	2,72	2,57	2,43	2,29	
$\varepsilon_{c3,\cdot\ ck}$ (‰)	0,50	0,55	0,65	0,71	0,76	0,82	0,91	0,94	1,03	1,10	1,16	$\varepsilon_{c3,\cdot\ ck}=f_{ck,prism}\ /\ E_{ck}$
$\varepsilon_{c3,\cdot\ cd}$ (‰)	0,48	0,52	0,58	0,63	0,68	0,72	0,77	0,83	0,86	0,91	0,97	$\varepsilon_{c3,\cdot\ cd}=E_{cd}$
$\varepsilon_{cu3,\cdot\ ck}$ (‰)	4,05	3,96	3,73	3,46	3,20	2,93	2,70	2,55	2,37	2,25	2,16	$\varepsilon_{cu3,\cdot\ ck}=0{,}9\varepsilon_{cu1,ck}$
$\varepsilon_{cu3,\cdot\ cd}$ (‰)	3,38	3,33	3,23	3,10	3,00	2,80	2,64	2,45	2,31	2,19	2,06	$\varepsilon_{cu3,\cdot\ cd}=0{,}9\varepsilon_{cu1,cd}$
* – Величинаы $f_{cm,\ cube}$ в таблице приведены исходя из значения коэффициента вариации V_c, который равен 13,5%												

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Таблица Б.1 – Прочностные и деформативные характеристики арматуры

Характеристики арматуры	Класс арматуры				
	A240C	A400C	A500C		B500
			ø8-22	ø25-40	
f_{yk} , (Мпа)	240	400	500		500
f_{ywd} , (Мпа)	170	285	300		300
E_s , (Мпа)	$2{,}1\cdot10^5$	$2{,}1\cdot10^5$	$2{,}1\cdot10^5$		$1{,}9\cdot10^5$
ε_{ud}	0,025	0,025	0,02		0,012

Таблица Б.2 – Характеристические значения сопротивления деформационных характеристик предварительно напряженной арматуры

Класс арматуры	Характеристики арматуры			
	f_{pk}, МПа	$f_{p0,1k}$, МПа	E_p, МПа	ε_{uk}
A600,A600C	630	575	190 000	0,02
A800, A800CK	840	765	190 000	0,018
A1000	1050	955	190 000	0,018
Bp1200	1260	1145	190 000	0,016
Bp1300	1365	1240	190 000	0,016
Bp1400	1470	1335	190 000	0,016
Bp1500	1575	1430	190 000	0,016
K1400 (K-7)	1470	1335	180 000	0,014
K1500 (K-7)	1575	1430	180 000	0,014
K1500 (K-19)	1575	1430	180 000	0,014

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Таблица В.1 – Значения интеграла ошибок Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
1	2	3	4	5	6	7	8
0,00	0,000 0	0,32	0,122 5	0,64	0,238 9	0,96	0,331 5
0,01	0,004 0	0,33	0,129 3	0,65	0,242 2	0,97	0,334 0
0,02	0,006 0	0,34	0,133 1	0,66	0,245 4	0,98	0,336 5
0,03	0,012 0	0,35	0,136 8	0,67	0,248 6	0,99	0,3385 9
0,04	0,016 0	0,36	0,140 6	0,68	0,251 7	1,00	0,341 3
0,05	0,019 9	0,37	0,144 3	0,69	0,254 9	1,01	0,343 8
0,06	0,023 9	0,38	0,148 0	0,70	0,258 0	1,02	0,346 1
0,07	0,027 9	0,39	0,151 7	0,71	0,261 1	1,03	0,348 5
0,08	0,031 9	0,40	0,155 4	0,72	0,264 2	1,04	0,350 8
0,09	0,035 9	0,41	0,159 1	0,73	0,267 3	1,05	0,353 1
0,10	0,039 8	0,42	0,162 8	0,74	0,270 3	1,06	0,355 4
0,11	0,043 8	0,43	0,166 4	0,75	0,273 4	1,07	0,357 7
0,12	0,047 8	0,44	0,170 0	0,76	0,276 4	1,08	0,359 9
0,13	0,051 7	0,45	0,173 6	0,77	0,279 4	1,09	0,362 1
0,14	0,557	0,46	0,177 2	0,78	0,282 3	1,10	0,364 3
0,15	0,059 6	0,47	0,180 8	0,79	0,285 2	1,11	0,366 5
0,16	0,063 6	0,48	0,184 4	0,80	0,288 1	1,12	0,368 6
0,17	0,067 5	0,49	0,187 9	0,81	0,291 0	1,13	0,370 8
0,18	0,071 4	0,50	0,191 5	0,82	0,293 9	1,14	0,372 9
0,19	0,075 3	0,51	0,195 0	0,83	0,296 7	1,15	0,374 9
0,20	0,079 3	0,52	0,198 5	0,84	0,299 5	1,16	0,377 0
0,21	0,083 2	0,53	0,201 9	0,85	0,303 2	1,17	0,379 0
0,22	0,087 1	0,54	0,205 4	0,86	0,305 1	1,18	0,381 0
0,23	0,091 0	0,55	0,208 8	0,87	0,307 8	1,19	0,383 0
0,24	0,094 8	0,56	0,212 3	0,88	0,310 6	1,20	0,384 9
0,25	0,098 7	0,57	0,215 7	0,89	0,313 3	1,21	0,386 9
0,26	0,102 6	0,58	0,219 0	0,90	0,315 9	1,22	0,388 3
0,27	0,106 4	0,59	0,222 4	0,91	0,318 6	1,23	0,390 7
0,28	0,110 3	0,60	0,225 7	0,92	0,321 2	1,24	0,392 5
0,29	0,114 1	0,61	0,229 1	0,93	0,323 8	1,25	0,394 4
0,30	0,117 9	0,62	0,232 4	0,94	0,326 4		
0,31	0,121 7	0,63	0,235 7	0,95	0,328 9		

Продолжение таблицы В.1

1	2	3	4	5	6	7	8
1,26	0,396 2	1,59	0,444 1	1,92	0,472 6	2,50	0,493 8
1,27	0,398 0	1,60	0,445 2	1,93	0,473 2	2,52	0,494 1
1,28	0,399 7	1,61	0,446 3	1,94	0,473 8	2,54	0,494 5
1,29	0,401 5	1,62	0,447 4	1,95	0,474 4	2,56	0,494 8
1,30	0,403 2	1,63	0,448 4	1,96	0,475 0	2,58	0,495 1
1,31	0,404 9	1,64	0,449 5	1,97	0,475 6	2,60	0,495 3
1,32	0,406 6	1,65	0,450 5	1,98	0,476 1	2,62	0,495 6
1,33	0,408 2	1,66	0,451 5	1,99	0,476 7	2,64	0,495 9
1,34	0,409 9	1,67	0,452 5	2,00	0,477 2	2,66	0,496 1
1,35	0,411 5	1,68	0,453 5	2,02	0,478 3	2,68	0,496 3
1,36	0,413 1	1,69	0,454 5	2,04	0,479 3	2,70	0,496 5
1,37	0,414 7	1,70	0,455 4	2,06	0,480 3	2,72	0,496 7
1,38	0,416 2	1,71	0,456 4	2,08	0,481 2	2,74	0,496 9
1,39	0,417 7	1,72	0,457 3	2,10	0,482 1	2,76	0,497 1
1,40	0,419 2	1,73	0,458 2	2,12	0,483 0	2,78	0,497 3
1,41	0,420 7	1,74	0,459 1	2,14	0,483 8	2,80	0,497 4
1,42	0,422 2	1,75	0,459 9	2,16	0,484 6	2,82	0,497 6
1,43	0,423 6	1,76	0,460 8	2,18	0,485 4	2,84	0,497 7
1,44	0,425 1	1,77	0,461 6	2,20	0,486 1	2,86	0,497 9
1,45	0,426 5	1,78	0,462 5	2,22	0,486 8	2,88	0,498 0
1,46	0,427 9	1,79	0,463 3	2,24	0,487 5	2,90	0,498 1
1,47	0,429 2	1,80	0,464 1	2,26	0,488 1	2,92	0,498 2
1,48	0,430 6	1,81	0,464 6	2,28	0,488 7	2,94	0,498 4
1,49	0,431 9	1,82	0,465 6	2,30	0,489 3	2,96	0,498 5
1,50	0,433 2	1,83	0,466 4	2,32	0,489 8	2,98	0,498 6
1,51	0,434 5	1,84	0,467 1	2,34	0,490 4	3,00	0,498 65
1,52	0,435 7	1,85	0,467 8	2,36	0,490 9	3,20	0,499 31
1,53	0,437 0	1,86	0,468 6	2,38	0,491 3	3,40	0,499 66
1,54	0,438 2	1,87	0,469 3	2,40	0,491 8	3,60	0,499 811
1,55	0,439 4	1,88	0,469 9	2,42	0,492 2	3,80	0,499 928
1,56	0,440 6	1,89	0,470 6	2,44	0,492 7	4,00	0,499 968
1,57	0,441 8	1,90	0,471 3	2,46	0,493 1	4,50	0,499 997
1,58	0,442 9	1,91	0,471 9	2,48	0,493 4	5,00	0,499 997

Навчальне видання

ШАПОВАЛОВ Олександр Микитович

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НАДІЙНОСТІ ЕКСПЛУАТАЦІЇ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 4–5 курсів денної та заочної форм навчання, а також до самостійної роботи студентів освітнього рівня «магістр» за спеціальністю 192 – Будівництво та цивільна інженерія)

(рос. мовою)

Відповідальний за випуск *Н. О. Псурцева*
За авторською редакцією
Комп’ютерне верстання *Н. В. Липова*.

План 2017, поз.1Л

Підп. до друку 14.06.2019. Формат 60 х 84/16.

Друк на різографі. Ум. друк. арк. 4,2

Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.