МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. Бекетова

Л. Б. Коваленко

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ МЕНЕДЖЕРІВ

Підручник

2-ге видання, перероблене та доповнене

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2019

УДК 51-7:005(075)
К56

Рецензенти:

$\boxed{\textit{Колосов А. І.}}$**,** доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова ;

Щелкунова Л. І., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури

Рекомендовано до друку Вченою радою ХНУМГ ім. О. М. Бекетова (протокол № 12 від 6 липня 2018 р.)

Коваленко Л. Б.

К56 Вища математика для менеджерів : підручник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – 2-ге вид., перероб. та допов. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 341 с.

ISBN 978-966-695-476-6

У підручнику розглядаються основні розділи вищої математики. Підручник містить найважливіші теоретичні відомості, приклади їхнього застосування для розв’язання задач. Особливістю підручника є наочна ілюстрація застосування розділів вищої математики, що вивчаються в курсі, у розв’язанні задач з економічним змістом. 2-ге видання доповнено розділами із застосуванням методів лінійної алгебри, математичного аналізу у розв’язанні прикладних задач за фахом.

Розрахований на студентів менеджерських спеціальностей.

УДК 51-7: 005(075)

ISBN 978-966-695-476-6

З М І С Т

Передмова

Навчальний посібник побудований за модульною технологією навчання згідно з робочими програмами курсу «Вища та прикладна математика (Вища математика)». Доступне, коректне подання теоретичного матеріалу супроводжується детальними ілюстраціями, великою кількістю прикладів для практичного закріплення вивченого. Особливістю поданого підручника є наочне доведення необхідності у вивчанні саме запропонованих тем: кожен розділ супроводжується розгляданням задач з економічним змістом. Цей прийом дозволяє переконати читача у неперервності освіти, у зв'язку фундаментальних дисциплін з вузькими спецкурсами.

Сучасні програми навчання приділяють велику увагу самостійний, позааудиторній роботі студентів, тому частина запропонованого у посібнику теоретичного матеріалу може бути винесена на самостійний розгляд студентами.

Основою цього підручника є цикли лекцій з вищої математики, що читаються на факультеті менеджменту Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Посібник призначений для студентів-менеджерів інженерно-економічних вузів, а також може використовуватися для самоосвіти.

Розділ 1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1 Визначники

Визначення 1.1. Визначником n-го порядку називається число Δ_n, яке записано у вигляді квадратної таблиці чисел:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.1)$$

Позначають визначник ще як $\det$ від $determinate$ - «визначати», або $|a_{ij}|$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Визначення 1.2. Числа a_{ij} -називаються ***елементами визначника***, де i - номер рядка, а j – номер стовпця.

Елементи a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... , a_{nn} утворюють головну діагональ визначника.

Основні властивості визначників:

1. Величина визначника не зміниться, якщо елементи рядків та стовпців змінити місцями.
2. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) дорівнюють нулю, такий визначник дорівнює нулю.
3. Якщо визначник має два однакових рядка (стовпця), такий визначник дорівнює нулю.
4. Якщо визначник має два пропорційні рядка (стовпця), такий визначник дорівнює нулю.
5. Якщо два рядки (стовпця) переставити місцями, то дістанемо визначник супротивного знаку.
6. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на число $k \neq 0$, то величина визначника зміниться у k разів.

7. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на одне й те саме число та додати до відповідних елементів іншого рядка (стовпця), то величина визначника не зміниться.

8. Якщо всі елементи i-того рядка (стовпця) визначника подати у вигляді суми двох додатків $a_i' + a_i''$ $(i = \overline{1,n})$, то визначник можна подати у вигляді суми двох визначників, у яких всі рядки (стовпці), крім i-того, такі самі, як у початковому визначнику, а i-тий рядок (стовпець) одного з визначників складається з елементів a_i', а другого – з елементів a_i''.

Наше завдання – навчитися обчислювати визначники, тобто «знаходити число». Правило обчислення визначників базується на таких поняттях, як «мінор» та «алгебраїчне доповнення».

Визначення 1.3. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n-1)$ порядку, який утворюється з початкового визначника закресленням i-того рядка і j-того стовпця.

Визначення 1.4. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Для визначників другого та третього порядків існують прості та легкі для запам’ятовування схеми обчислення. Познайомимося з ними.

Визначник другого порядку обчислюється так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \qquad (1.2)$$

Запам’ятати це легко за допомогою схеми (рис. 1.1) та за правилом: «добуток множників, що розташовані на головній діагоналі береться з тим самим знаком, а добуток множників, що розташовані на бічній діагоналі – з протилежним».

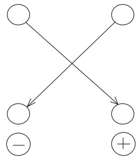


Рисунок 1.1 – Схема обчислення визначників 2-го порядку

Приклад 1.1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв’язання:

$$\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 4 - 5\cdot 7 = -12 - 35 = -47.$$

Визначник третього порядку обчислюється за правилом Саррюса (правилом трикутників або правилом «зірочки»):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (1.3)$$

Запам’ятати це легко за допомогою схеми (рис. 1.2) та за правилом «з тим самим знаком беремо добуток елементів, що розташовані на головній діагоналі та на двох трикутниках, які будуємо так, щоб одна з сторін трикутника була паралельна головній діагоналі, яку утворюють елементи a_{11}, a_{22}, a_{33}, та всі елементи були на різних рядках та в різних стовпцях; з протилежним знаком беремо добуток елементів, що розташовані на бічній діагоналі, яку утворюють елементи a_{13}, a_{22}, a_{31}, та на двох трикутниках, які будуємо так, щоб одна зі сторін трикутника була паралельна бічній діагоналі та всі елементи були на різних рядках та в різних стовпцях».

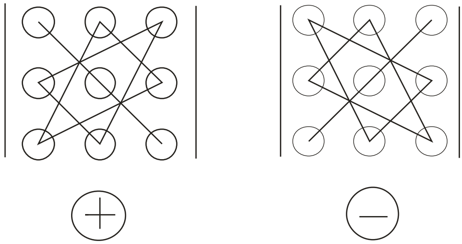


Рисунок 1.2 – Схема обчислення визначників 3-го порядку.

Приклад 1.2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4 \cdot 1 -$$

$$-(-3) \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 0 \cdot 1 =$$

$$= 20 + 0 - 12 - 12 - 20 - 0 = -24.$$

Для обчислення визначників більш високих порядків таких зручних та легких для запам'ятовування схем не існує. Нам на допомогу прийде загальне правило обчислення визначника ὲ-го порядку.

Визначення 1.5. Визначник ὲ-го порядку дорівнює сумі ὲ добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}. \qquad (1.4)$$

Подане правило має назву: ***розкриття визначника за елементами рядка (стовпця)***.

Приклад 1.3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, розкриваючи його: а) за елементами 4-го рядка; б) за елементами 3-го стовпця.

Розв'язання:

а) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 4-го рядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+2 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+2 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot (0 + 4 + 0 - 0 + 2 - 60) +$$

$$+2 \cdot (0 + 12 + 0 - 0 + 4 - 40) + 4 \cdot (4 - 36 + 0 - 0 - 12 + 8)$$

$$+2 \cdot (20 + 0 + 4 - 6 - 0 - 60) = -2 \cdot (-54) + 2 \cdot (-24) +$$

$$+4 \cdot (-36) + 2 \cdot (-42) = 108 - 48 - 144 - 84 = -168.$$

б) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 3-го стовпця:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{\text{٥٨١}} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+5 \cdot (-1)^{\text{١٨١}} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{\text{٢٨١}} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-8 + 4 - 24 + 8 - 8 + 12) +$$

$$+5 \cdot (8 + 24 + 0 - 0 - 24 - 16) +$$

$$+4 \cdot (4 - 36 + 0 - 0 - 12 + 8) =$$

$$= -1 \cdot (-16) + 5 \cdot (-8) + 4 \cdot (-36) = 16 - 40 - 144 = -168.$$

Із розв’язання цього приклада можемо зробити декілька висновків. По-перше, яким би способом ми не обчислювали визначник, відповідь буде незмінна. По-друге, обчислюючи визначник четвертого порядку, розкриваючи його за елементами рядка (стовпця), ми вимушені обчислювати чотири визначника третього порядку. По-третє, розкриваючи визначник за елементами третього стовпця, ми замість чотирьох визначників обчислили три, тому що один з елементів стовпця – нульовий. Отже, чим більше нулів у рядку (стовпці), тим менше обчислювань ми вимушені робити. Але не завжди за умовою ми маємо нульові елементи в визначниках.

Згадаємо сьому властивість визначників. Якщо ми зможемо підібрати множники так, щоб додаючи помножені елементи одного рядка (стовпця) до елементів іншого рядка (стовпця), отримати нульові елементи (крім одного), то обчислення визначника ε-го порядку зведеться до обчислення добутку одного елемента на визначник $(\varepsilon - 1)$-го порядку з урахуванням знаку. Скористаємось сьомою властивістю визначників для їхнього обчислення, розкладаючи останній за елементами рядка (стовпця) з попереднім отриманням нулів.

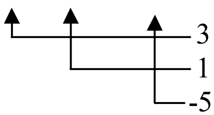
До розглядання прикладу, зробимо зауваження: 1)якщо отримуємо нулі в рядку, працюємо з стовпцями, якщо отримуємо нулі в стовпці, працюємо з рядками; 2) щоб уникнути необхідності працювати з дрібними множниками, будемо обирати елементи 1 або -1 (якщо є така можливість).

Приклад 1.4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, попередньо отримуючи нулі та розкриваючи його: а) за елементами 3-го рядка; б) за елементами 3-го стовпця.

Розв'язання:

а) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 3-го рядка, попередньо отримавши нулі. Оберемо елемент 1. Щоб отримати в 3-му рядку всі інші елементи нульовими, 4-тий стовпець (у якому знаходиться обрана одиниця) помножимо на 3 та додамо до 1-го стовпця, помножимо на 1 та додамо до 2-го стовпця, помножимо на -5 та додамо до 3-го стовпця:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 16 & 6 & -20 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & -14 & 2 \end{vmatrix} =$$



$$= 1 \cdot (-1)^{\text{١٨٢}} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 16 & 6 & -20 \\ 8 & 4 & -14 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-168 - 480 - 64 + 48 + 160 + 672) = -168;$$

б) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 3-го стовпця, попередньо отримав нулі. Оберемо елемент -1. Щоб отримати в 3-му стовпці всі інші елементи нульовими, 1-ший рядок (в якому знаходиться обрана -1) помножимо на 5 та додамо до 3-го рядка, помножимо на -4 та додамо до 4-го рядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 \;\; -4 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ 7 & 14 & 0 & 1 \\ -6 & -10 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 7 & 14 & 1 \\ -6 & -10 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(112 - 12 - 280 + 336 + 40 - 28) = -168.$$

1.2 Матриці

1.2.1 Основні визначення

Визначення 1.6. Матрицею $A = (a_{ij})$ називається прямокутна таблиця чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1.5)$$

яка складається з m рядків та n стовпців.

Визначення 1.7. Числа a_{ij} називаються ***елементами матриці***, де i - номер рядка $(i = \overline{1,m})$, а j – номер стовпця $(j = \overline{1,n})$.

Визначення 1.8. Матриця, число рядків якої дорівнює числу стовпців, називається ***квадратною*** матрицею.

Визначення 1.9. Квадратна матриця, всі елементи головної діагоналі якої, дорівнюють *1*, а всі інші – *0*, називається ***одиничною***, та позначається як

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.6)$$

Визначення 1.10. Дві матриці A і B називаються ***рівними***, якщо вони однакового розміру та відповідні елементи a_{ij} і b_{ij} цих матриць дорівнюють один одному.

1.2.2 Операції над матрицями

1. ***Додавання (різниця) матриць.*** Додавати (віднімати) можна лише матриці однакового розміру.

Визначення 1.11. Сумою (різницею) двох матриць A і B розміру $m \times n$ називається матриця того же розміру, кожен елемент якої є сумою (різницею) елементів відповідних матриць A і B:

$$A + B = C, \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \qquad (1.7)$$

$$A - B = D, \qquad d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}. \qquad (1.8)$$

Приклад 1.5. Знайти суму та різницю матриць

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 4+(-2) & -5+2 & 2+(-1) \\ 3+3 & 1+0 & -7+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 4-(-2) & -5-2 & 2-(-1) \\ 3-3 & 1-0 & -7-4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}.$$

2. ***Множення матриць на число.*** Множити на число можна матриці довільного розміру.

Визначення 1.12. Добутком матриці A на число λ називається матриця B, кожен елемент якої є добутком числа λ на відповідний елемент матриці A:

$$B = \lambda \cdot A, \qquad b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}. \qquad (1.9)$$

Приклад 1.6. Знайти добуток матриці $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & 9 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = 7$.

Розв'язання:

$$B = 7 \cdot A = \begin{pmatrix} 7\cdot(-5) & 7\cdot 6 \\ 7\cdot 2 & 7\cdot 9 \\ 7\cdot 0 & 7\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 42 \\ 14 & 63 \\ 0 & -28 \end{pmatrix}.$$

3. ***Множення матриць.*** Множити можна матриці лише в тому випадку, якщо число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої. У добутку отримаємо матрицю, у якої стільки рядків, скільки у першої матриці, і стільки стовпців, скільки у другої.

Визначення 1.13. Добутком матриць $A[m \times n]$ і $B[n \times k]$ називається матриця $C[m \times k]$, елементи якої обчислюються за правилом

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot b_{lj}, \quad (1.10)$$

де $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, k}$.

Схематично розмір отриманої матриці можна зобразити у такий спосіб (рис. 1.3):

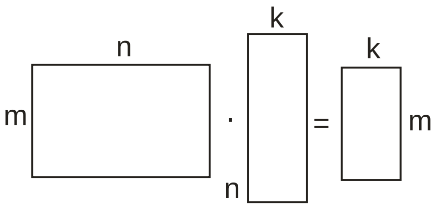


Рисунок 1.3 – Розмір матриці-добутку

Що стосується правила для обчислення елементів матриці-добутку, то його схематично можна зобразити так (рис. 1.4):

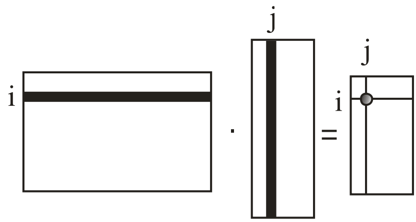


Рисунок 1.4 – Правило обчислення елементів матриці-добутку

Щоб отримати елемент c_{ij}, необхідно скласти суму добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A та j-го стовпця матриці B. Під час виконання цього завдання радимо користуватися олівцем та гумкою, закреслюючи відповідні рядки першої та стовпці другої матриць.

Зауваження: У загальному випадку операція множення матриць не комутативна, тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$, навіть коли це можливо.

Приклад 1.7. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти добуток матриць $A \cdot B$ і $B \cdot A$, якщо це можливо.

Розв’язання:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-7) \cdot (-4) & 2 \cdot 0 + (-7) \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + (-7) \cdot 5 \\ 1 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) & 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-4) & 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 & 4 \cdot (-2) + 6 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 + 28 & 0 - 7 & -4 - 35 \\ 3 - 20 & 0 + 5 & -2 + 25 \\ 12 - 24 & 0 + 6 & -8 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -7 & -39 \\ -17 & 5 & 23 \\ -12 & 6 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 & 3 \cdot (-7) + 0 \cdot 5 + (-2) \cdot 6 \\ -4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 4 & (-4) \cdot (-7) + 1 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 + 0 - 8 & -21 + 0 - 12 \\ -8 + 1 + 20 & 28 + 5 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -33 \\ 13 & 63 \end{pmatrix}.$$

У розглянутому прикладі можливі були операції множення $ö \cdot ő$ і $ő \cdot ö$. У результаті ми отримали матриці не тільки з різними елементами, але й різного розміру: у першому випадку ми отримали матрицю розміром 3×3, а в другому - 2×2.

Зауваження: Для квадратних матриць однакового порядку операція множення матриць можлива завжди.

Якщо $ö$ і $ő$ - дві квадратні матриці $è$-го порядку, то їхній добуток $ö \cdot ő$ – матриця $è$-го порядку. Виникає питання, а чи пов’язані між собою визначники цих матриць?

Теорема 1.1. Визначник добутку двох квадратних матриць $è$-го порядку дорівнює добутку визначників матриць-множників.

Доведення цієї теореми виходить за межі курсу, що розглядається. Перевіримо її результати на прикладі.

Приклад 1.8. Дано матриці $ö = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ і

$ő = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}$. Знайти визначники матриць $ö$, $ő$ і $ö \cdot ő$.

Розв’язання:

$ö \cdot ő =$

$$= \begin{pmatrix} 5+3+32 & 1-1+8 & 2+0-48 \\ 10+0+20 & 2+0+5 & 4+0-30 \\ 15+3+16 & 3-1+4 & 6+0-24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 8 & -46 \\ 30 & 7 & -26 \\ 34 & 6 & -18 \end{pmatrix};$$

$$ΏΩòö = \begin{matrix} 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{matrix} = 0 - 15 - 16 - 0 + 5 + 8 = -18;$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -30 + 0 - 6 - 8 - 0 - 18 = -62;$$

$$\det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 40 & 8 & -46 \\ 30 & 7 & -26 \\ 34 & 6 & -18 \end{vmatrix} = -5\,040 - 7\,072 - 8\,280 +$$

$$+10\,948 + 4\,320 + 6\,240 = 1\,116;$$

$$\det A \cdot \det B = -18 \cdot (-62) = 1\,116.$$

Як бачимо, $\det A \cdot \det B = \det(A \cdot B)$.

4. ***Транспонування матриць***. Нехай A - матриця розміром $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Визначення 1.14. Матриця, що утворюється з матриці A заміною рядків стовпцями (або навпаки), називається ***транспонованою*** матрицею відносно матриці A і позначається A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.11)$$

Приклад 1.9. Знайти транспоновану матрицю A^T відносно матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & -7 \\ 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв’язання:

$$A^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -7 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. *Обернена матриця*

Визначення 1.15. Нехай A – квадратна матриця n-го порядку. Квадратна матриця A^{-1} (n-го порядку) називається ***оберненою*** до A, якщо

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Визначення 1.16. Квадратна матриця A n-го порядку називається ***невиродженою***, якщо її визначник $\det A$ відрізняється від нуля, у протилежному випадку матриця називається ***виродженою***.

Теорема 1.2. Будь-яка невироджена матриця A має єдину обернену матрицю A^{-1}.

Обернену матрицю будемо знаходити за схемою:

1) обчислюємо визначник матриці $\det A$;
2) знаходимо транспоновану матрицю A^T;
3) обчислюємо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці;
4) записуємо обернену матрицю за правилом:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A^T_{11} & A^T_{12} & \dots & A^T_{1n} \\ A^T_{21} & A^T_{22} & \dots & A^T_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^T_{n1} & A^T_{n2} & \dots & A^T_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.12)$$

5) виконуємо перевірку, обчисливши $A \cdot A^{-1} = E$ або $A^{-1} \cdot A = E$.

Приклад 1.10. Знайти матрицю, обернену до

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 6\\ 2 & 2 & 4\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\det A=\begin{vmatrix}-3 & 0 & 6\\ 2 & 2 & 4\\ 5 & 1 & -2\end{vmatrix}=12+0+12-60-0+12=-24;$$

$$A^T=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 5\\ 0 & 2 & 1\\ 6 & 4 & -2\end{pmatrix};$$

$$A^T_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-4-4=-8;$$

$$A^T_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 6 & -2\end{vmatrix}=-(0-6)=6;$$

$$A^T_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ 6 & 4\end{vmatrix}=0-12=-12;$$

$$A^T_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-(-4-20)=24;$$

$$A^T_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 6 & -2\end{vmatrix}=6-30=-24;$$

$$A^T_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 6 & 4\end{vmatrix}=-(-12-12)=24;$$

$$A^T_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2-10=-8;$$

$$A^T_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-(-3-0)=3;$$

$$ö¦_{١١} = (-1)^{١٨١} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 0 = -6.$$

$$ö^{٩٠} = -\frac{٥}{٠٢}\begin{pmatrix} -8 & 6 & -12 \\ 24 & -24 & 24 \\ -8 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$ö^{٩٠} \cdot ö = -\frac{٥}{٠٢}\begin{pmatrix} -8 & 6 & -12 \\ 24 & -24 & 24 \\ -8 & 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{٥}{٠٢}\begin{pmatrix} 24 + 12 - 60 & 0 + 12 - 12 & -48 + 24 + 24 \\ -72 - 48 + 120 & 0 - 48 + 24 & 144 - 96 - 48 \\ 24 + 6 - 30 & 0 + 6 - 6 & -48 + 12 + 12 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{٥}{٠٢}\begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Ό.$$

Отже, перевірка показала, що обернена матриця знайдена правильно.

Відповідь: $ö^{٩٠} = -\frac{٥}{٠٢}\begin{pmatrix} -8 & 6 & -12 \\ 24 & -24 & 24 \\ -8 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$

1.2.3 Ранг матриці. Елементарні перетворення

Нехай дано прямокутну матрицю $ö$ розміром $ά \times ὲ$:

$$ö = \begin{pmatrix} ὤ_{٥٥} & ὤ_{٥٠} & \dots & ὤ_{٥ح} \\ ὤ_{٠٥} & ὤ_{٠٠} & \dots & ὤ_{٠ح} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ὤ_{ج٥} & ὤ_{ج٠} & \dots & ὤ_{جح} \end{pmatrix}.$$

(В окремому випадку можлива рівність $m = n$, тобто матриця A може бути квадратною).

Нехай k - довільне натуральне число, що не перевищує m і n. Оберемо в A довільним способом k рядків із номерами $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ та k стовбців із номерами $j_1 < j_2 < \dots < j_k$. З елементів матриці A, що розташовані на перетині обраних k рядків і k стовпців, утворимо визначник:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}.$$

Цей визначник називається мінором k –го порядку матриці.

Визначення 1.17. Рангом матриці A $(\operatorname{rang} A)$ називається таке ціле число r, що серед мінорів r-го порядку матриці A є хоча б один такий, що відрізняється від нуля, а всі мінори $(r + 1)$-го порядку (якщо їх можна скласти) дорівнюють нулю.

Метод знаходження рангу матриці за визначенням 1.17 називається ***«методом відокремлених мінорів»***. Розберемо цей метод на прикладі.

Приклад 1.11. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

На перетині, наприклад, першого рядка і першого стовпця розташований елемент $-5 \neq 0$. Отже ранг матриці не менший від одиниці.

З елементів, що розташовані, наприклад, на перетині перших двох рядків і перших двох стовпців, утворимо мінор (визначник) другого порядку:

$\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -15 - 0 = -15 \neq 0$, Отже, ранг матриці не менший від двох.

З елементів, що розташовані, наприклад, на перетині трьох рядків і перших трьох стовпців, утворимо мінор (визначник) третього порядку:

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -120 + 4 + 0 - 24 - 0 + 20 = -120 \neq 0.$$

Отже, ранг матриці не менший від трьох. Визначник четвертого порядку скласти неможливо, тому що матриця ö має 3 рядки та чотири стовпці. Тому ранг матриці дорівнює трьом.

Відповідь: ìώἐΏö = 3.

Визначення 1.18. Під ***елементарними перетвореннями*** матриці маємо такі операції:

1) множення будь-якого рядка (стовпця) матриці на число, що відрізняється від нуля;
2) додавання до елементів одного рядка (стовпця) матриці відповідних елементів другого рядка (стовпця), що помножені на одне й теж саме число;
3) заміна місцями двох рядків (стовпців).

Зауваження. Елементарні перетворення обернені, тобто якщо матриця ő отримана з матриці ö за допомогою деякого елементарного перетворення, то і матриця ö може бути отримана з матриці ő за допомогою деякого елементарного перетворення (що називається оберненим).

Теорема 1.3. Елементарні перетворення не змінюють ранг матриці, тобто якщо $A \to B$ то $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$.

Цією теоремою можна скористатися для обчислення рангу матриці. Для знаходження рангу матриці розміру $m \times n$ необхідно за допомогою елементарних перетворень звести початкову матрицю до вигляду, у якому всі елементи дорівнюють одиниці або нулю. Ранг матриці буде дорівнювати числу відмінних від нуля елементів перетвореної матриці.

Цей метод знаходження рангу матриці називається ***«методом елементарних перетворень».*** Розберемо цей метод на прикладі.

Приклад 1.12. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -7 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-3)\ (-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

Другий стовпець перемістили на місце першого, а третій стовпець поділили на 2. Наступний крок: перший рядок помножили на (-3) і додали до другого рядка; перший рядок помножили на (-2) і додали до третього рядка.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 15 & -5 & 18 \\ 0 & 12 & 0 & 15 \end{pmatrix} \sim$$

5

-2

7

Перший стовпець має один елемент, що дорівнює 1, а інші елементи дорівнюють нулю. Цей стовпець послідовно помножимо на 5, -2 та 7 і додамо до другого, третього та четвертого стовпців. Отримаємо у першому рядку одиницю, а решту нулі.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -5 & 18 \\ 0 & 12 & 0 & 15 \end{pmatrix} \sim$$

: (-5)

Третій стовпець поділимо на -5 і одержимо в ньому 2 нулі і одну одиницю. Третій стовпець помножимо на -15 і -18 та додамо до другого і третього стовпців. Отримаємо у другому рядку три нульових елементи і одну одиницю.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 18 \\ 0 & 12 & 0 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 15 \end{pmatrix} \sim$$

(-15)

(-18)

Другий стовпець поділимо на 12, а четвертий стовпець поділимо на 15. Отримаємо два однакових стовпця. Від четвертого стовпця віднімемо другий і отримаємо нульовий стовпець

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо три відмінних від нуля елементи перетвореної матриці, тому ранг матриці ὂ дорівнює трьом.

Відповідь: ìώὲΏὂ = 3.

1.2.4 Застосування матриць для розв'язання задач з економіки

На практиці для аналізу, систематизації, планування роботи фірми, підприємства, галузі народного господарства часто користуються таблицями – матрицями. З їх допомогою і ми спробуємо навчитися розв'язувати нескладні задачі з економіки, а саме: обчислювати обсяги продукції декількох видів за визначений часовий інтервал; приріст обсягів виробництв; вартість виробленої продукції; виручку по підприємствах (регіонах, галузях) тощо. Наведемо приклади розв'язання таких типових задач.

Задача 1. Нехай в деякій галузі m підприємств випускають n видів продукції. Матриця $A[m \times n]$ задає обсяги продукції на кожному підприємстві в першому кварталі, а матриця $B[m \times n]$ - у другому. Фактично елементи цих матриць a_{ij}, b_{ij} – це обсяги на i-тому заводі продукції j-го виду в першому і другому кварталах відповідно. Знайти:

а) ***обсяг продукції*** за перший період;

б) ***приріст обсягів продукції*** за другий період порівняно з першим за видами та по підприємствах;

Розв'язання:

а) $C = A + B$, де $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$;

б) $D = B - A$, де $d_{ij} = b_{ij} - a_{ij}$.

Зауважимо, що додатні d_{ij} свідчать про те, що на даному підприємстві i обсяг виробництва j збільшився, а від'ємні - що зменшився, нульові – не змінився;

Приклад 1.13. Задачу 1 розв'яжемо, якщо обсяг виробленої продукції трьома підприємствами чотирьох видів продукції в першому та другому кварталах задані матрицями A і B відповідно:

$$ö = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & 14 & 6 \\ 9 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad ő = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 12 & 7 \\ 10 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: Тут $ὲ = 3$, $ά = 4$.

а) $ő = ö + ő = \begin{pmatrix} 5 & 16 & 13 & 11 \\ 2 & 4 & 26 & 13 \\ 19 & 4 & 2 & 14 \end{pmatrix}$;

б) $Ὸ = ő - ö = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Підприємство виробляє $ὲ$ типів продукції, обсяги виробництва задаються матрицею $ö[1 \times ὲ]$. Вартість реалізації одиниці ῗ-го типа продукції в ῗ-му регіоні задана матрицею $ő[ὲ \times ῗ]$, де ῗ - число регіонів, у яких реалізується продукція. Знайти ő - ***матрицю виручки по регіонах***.

Розв'язання: Матриця виручки по регіонах знаходиться за формулою

$$ő = ö \cdot ő. \qquad (1.13)$$

Зауважимо, що $\tilde{ῶ}_{ج} = \sum ῶ \cdot \tilde{ῶ}$ - виручка ῗ-підприємства в ῗ-му регіоні.

Приклад 1.14. Підприємство виробляє чотири типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею ö. Ця продукція реалізується в п'яти регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею ő:

$$ö = (420 \quad 350 \quad 780 \quad 205), \quad ő = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Знайти ő - матрицю виручки по регіонах.

Розв'язання: Знайдемо матрицю виручки по регіонах:

$$ő = ö \cdot ő = (420 \quad 350 \quad 780 \quad 205) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 6 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= (7\,495 \quad 4\,605 \quad 6\,210 \quad 10\,770 \quad 10\,670).$$

Задача 3. Підприємство виробляє ά типів продукції, використовуючи ὲ видів ресурсів. Норми затрат ресурсу ῏–го товару на виробництво одиниці продукції ῏–го типу задані матрицею ὂ[ὲ × ά]. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу ὢ, яка задана матрицею ὢ[ά × 1]. Нехай вказана вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці ὒ[1 × ὲ]. Знайти:

а) ῟ - ***матрицю повних затрат ресурсів*** кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) ő - ***повну вартість*** усіх витрачених ресурсів за певний період.

Розв'язання:

а) матриця повних затрат знаходиться за формулою:

$$῟ = ὂ \cdot ὢ; \tag{1.14}$$

б) повна вартість усіх витрачених ресурсів знаходиться за формулою:

$$ő = ὒ \cdot ῟ \quad \text{або} \quad ő = ὒ \cdot ὂ \cdot ὢ. \tag{1.15}$$

Приклад 1.15. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи п’ять видів ресурсів. Норми затрат ресурсу ῗ–го товару на виробництво одиниці продукції ῗ–го типу задані матрицею ö = $\begin{matrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 7 \\ 6 & 8 & 4 \end{matrix}$. Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею ω̈ = $\begin{matrix} 275 \\ 148 \\ 356 \end{matrix}$, а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці

ῦ = $(25 \quad 40 \quad 76 \quad 100 \quad 95)$. Знайти:

а) ‴Y - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) ő - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

Розв’язання:

а) ‴Y = ö · ω̈ = $\begin{matrix} 1100 + 888 + 2848 \\ 825 + 444 + 2492 \\ 1375 + 148 + 0 \\ 550 + 1332 + 2492 \\ 1650 + 1184 + 1424 \end{matrix} = \begin{matrix} 4836 \\ 3761 \\ 1523 \\ 4374 \\ 4258 \end{matrix}$,

отже, за заданий період буде використано 4 836 одиниць ресурсів першого виду, 3 761 – другого виду і т.д.;

б) ő = ῦ · ‴Y = $(25 \quad 40 \quad 76 \quad 100 \quad 95) \cdot \begin{matrix} 4836 \\ 3761 \\ 1523 \\ 4374 \\ 4258 \end{matrix} =$

= 120 900 + 150 440 + 115 748 + 437 400 + 404 510 =

= 1 228 998.

(грошових одиниць).

1.3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь та методи їхнього розв’язання

1.3.1 Основні визначення

Визначення 1.19. Система m ***лінійних рівнянь*** з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1.16)$$

де числа a_{ij} називаються коефіцієнтами системи; b_i - вільними членами; $x_1, x_2, \dots, x_n$ - невідомими.

Визначення 1.20. Сукупність n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ називається ***розв’язком системи*** (1.16), якщо заміна невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ відповідно, кожне рівняння системи перетворює в тотожність.

Визначення 1.21. Система рівнянь називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв’язок, і ***несумісною***, якщо вона не має жодного розв’язка.

Визначення 1.22. Сумісна система рівнянь називається ***визначеною***, якщо має єдиний розв’язок, і ***невизначеною***, якщо розв’язків більш, ніж один.

Визначення 1.23. Система рівнянь (1.16) називається ***однорідною***, якщо всі числа b_i дорівнюють нулю; і ***неоднорідною***, якщо хоча б одне з b_i відмінно від нуля.

Стосовно кожної системи лінійних алгебраїчних рівнянь можна поставити такі запитання:

1) чи сумісна система лінійних рівнянь?
2) у випадку сумісності, як визначити кількість розв'язків?
3) як розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь?

Відповіді на всі запропоновані питання нам надасть теорія лінійних алгебраїчних рівнянь.

1.3.2 Теорема Крамера

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1.17)$$

Визначення 1.24. Визначник, що складений з коефіцієнтів при невідомих a_{ij} системи (1.17), називається ***визначником системи*** Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.18)$$

Визначення 1.25. Δ_j - це визначник, що отримується з визначника системи Δ заміною j-го стовпця вільними членами системи:

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1.19)$$

Теорема Крамера. Якщо визначник Δ системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими відрізняється від нуля, то така система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (1.20)$$

Формули (1.20) мають назву ***формул Крамера***.

Зауваження. Недоцільно використання формул Крамера у системах з великою кількістю невідомих, тому що це вимагає від нас обчислення $n + 1$ визначника n порядку. Тому формули Крамера найчастіше використовують для розв'язання систем 2 - 4 порядків.

Приклад 1.13. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за правилами Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -10. \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 11 \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -20 + 18 + 4 + 15 + 6 + 16 = 39;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & 3 & -1 \\ -10 & 5 & 2 \\ 11 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 90 + 66 - 40 + 55 - 72 - 60 = 39;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -9 & -1 \\ 1 & -10 & 2 \\ 3 & 11 & -2 \end{vmatrix} = 40 - 54 - 11 - 30 - 18 - 44 = -117;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1 & 5 & -10 \\ 3 & -4 & 11 \end{vmatrix} = 110 - 90 + 36 + 135 - 33 - 80 = 78;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-117}{39} = -3; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{78}{39} = 2.$$

Перевірка. Підставимо отримані значення, наприклад, у перше рівняння системи: $2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) - 2 = -9$. Ми отримали тотожність.

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = -3$; $x_3 = 2$.

1.3.3 Метод послідовного виключення невідомих. Метод Гауса

Нехай дано систему m лінійних рівнянь з n невідомими (1.16). Розглянемо матрицю A системи (1.16) та її розширену матрицю $\tilde{A}$ (матрицю, що складається з елементів матриці A та стовпця вільних членів B):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.21}$$

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{1.22}$$

Метод Гауса розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь складається в тому, що за допомогою елементарних перетворень її зводять до вигляду, коли матриця A системи стає трапецеподібною. Після того як матриця A стала трапецеподібною з легкістю можна відповісти на запитання про сумісність системи та кількість розв'язків. Зводити матрицю системи до трапецеподібної форми будемо в такий спосіб. Спочатку в усіх рівняннях системи, крім першого вилучимо невідому x_1; потім в усіх рівняннях, крім першого і другого, – невідому x_2 і так далі.

Оскільки кожному елементарному перетворенню системи відповідає елементарне перетворення розширеної матриці системи (і навпаки), то замість системи (для скорочення запису) будемо працювати з розширеною матрицею цієї системи, виконуючи перетворення лише над рядками.

Зауваження. Метод Гауса використовують для розв'язання систем із будь-якою кількістю невідомих, тому що зі зростанням n кількість обчислень зростає незначно.

Для ілюстрації методу Гауса розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1.13. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання: Поставимо у відповідність системі розширену матрицю A:

$$ö = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -2 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-3)\ (-2)\ (-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -13 & 4 & -6 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(-5) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -13 & 4 & -6 & 17 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -13 & 4 & -6 & 17 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 13\ \ 3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(-9) \\ :4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 17/12 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 3 \\ \cdot 12/17 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, з останнього рівняння маємо: ω̇٢ = 0.

Третій рядок розширеної матриці прочитаємо як

3ω̇١ + 2ω̇٢ = 3.

Підставимо знайдене значення ω̇٢, отримаємо: 3ω̇١ + 2 · 0 = 3;   ω̇١ = 1.

З другого рядка маємо ω̇. − ω̇١ = −2;

ω̇. − 1 = −2;   ω̇. = −1.

І, нарешті, з першого рядка розширеної матриці

ω̇٥ + 4ω̇. − 2ω̇١ + ω̇٢ = −4,

з урахуванням знайдених ω̇., ω̇١ ω̇٢:

$$x_1 + 4\cdot(-1) - 2\cdot 1 + 0 = -4,$$

маємо $x_1 = 2$. Після перевірки можемо записати відповідь.

Відповідь: $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; $x_4 = 0$.

Приклад 1.14. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -3 \\ 4x_1 + 13x_2 - 22x_3 + 11x_4 = 7 \\ -2x_1 - 7x_2 + 12x_3 - 9x_4 = -3 \end{cases}.$$

Розв'язання: Поставимо у відповідність системі розширену матрицю ö:

$$ö = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 6 & -3 \\ 4 & 13 & -22 & 11 & 7 \\ -2 & -7 & 12 & -9 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1\ (-4)\ 2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1)\ \ 1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, ми отримали систему $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$

Останні два рівняння перетворилися в рівняння вигляду:

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 0.$$

Ці рівняння задовольняються за будь-яких значень невідомих, тому їх можна відкинути. Щоб задовольнити другому рівнянню, ми можемо для x_3 і x_4 обрати будь-які значення | і ᛏ, тоді значення для x_2 визначиться однозначно: $x_2 - 2\cdot c_1 + 7\cdot c_2 = -1$; $x_2 = -1 + 2c_1 - 7c_2$.

З першого рівняння

$$x_1 + 3\cdot(-1 + 2c_1 - 7c_2) - 5c_1 + c_2 = 2$$

також однозначно визначимо $x_1 = 5 - c_1 + 20c_2$. Остання система рівносильна початковій, тому формули

$$x_1 = 5 - c_1 + 20c_2;$$
$$x_2 = -1 + 2c_1 - 7c_2;$$
$$x_3 = c_1;$$
$$x_4 = c_2.$$

при вільних c_1 і c_2 дають нам всі розв'язки системи. Як бачимо, їх нескінчена множина.

Приклад 1.15. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_4 = 0 \\ -3x_1 + 13x_2 - 5x_3 - 8x_4 = -6 \\ 5x_1 + 11x_2 + 11x_3 + 8x_4 = 11 \end{cases}.$$

Розв'язання: Поставимо у відповідність системі розширену матрицю $\bar{A}$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 13 & -5 & -8 & -6 \\ 5 & 11 & 11 & 8 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-2)\ \ 3\ \ (-5) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right).$$

Отже, задана за умовою система рівносильна наступній:

$$\sim \begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_2 - 4x_3 + 3x_4 &= -2 \\ 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\ 0 &= 9 \end{aligned}.$$

Ця система несумісна, тому що її останнє рівняння

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 9$$

не може бути задоволене ніякими значеннями невідомих.

Відповідь: система несумісна.

1.3.4 Матричний метод

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (1.17). Поставимо у відповідність системі (1.17) матричне рівняння

$$A \cdot X = B, \qquad (1.23)$$

де A - матриця коефіцієнтів при невідомих;
X - стовпець невідомих;
B - стовпець вільних членів.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Будемо вважати, що визначник A (визначник матриці A) системи (1.17) відрізняється від нуля. За теоремою Крамера така система має єдиний розв'язок. З іншого боку, для невиродженої матриці A існує обернена матриця A^{-1}.

Помножимо обидві частини рівності (1.23) зліва на A^{-1}. Така операція можлива, тому що A^{-1} - квадратна матриця n-го порядку, а матриці-стовпці X і B мають розмір $n \times 1$. Отримаємо

$$A^{-1} \cdot (AX) = (A^{-1} \cdot A)X = EX = X = A^{-1} \cdot B.$$

Отже, щоб розв'язати систему (1.17), подану у вигляді (1.23), необхідно обчислити

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (1.24)$$

Зауваження. Як і у випадку використання формул Крамера, матричний метод не застосовують під час розв'язання систем з великою кількістю невідомих, тому що це вимагає від нас обчислення одного визначника n порядку (визначник матриці A) та n визначників $(n-1)$-го порядку (алгебраїчні доповнення).

Приклад 1.16. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -11 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання: Запишемо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 20 - 2 - 1 - 15 - 16 = -20 \neq 0,$$

тобто матриця невироджена і обернена до неї існує. Транспонуємо матрицю:

$$A^{T} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 5 = -7;$$
$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(8 + 1) = -9;$$
$$A_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 20 - 1 = 19;$$
$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 5) = -1;$$
$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7;$$
$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -(-15 - 2) = 17;$$
$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3;$$
$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 + 4) = -1;$$
$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11.$$

Множник $(-1)^{i+j}$ тут враховано.

Отже, обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -7 & -9 & 19 \\ -1 & -7 & 21 \\ -3 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Скористаємося формулою (1.24):

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -7 & -9 & 19 \\ -1 & -7 & 21 \\ -3 & -1 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 77 - 117 + 0 \\ 11 - 91 + 0 \\ 33 - 13 + 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -40 \\ -80 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Маємо: $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $x_3 = -1$.

1.3.5 Умова сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорема Кронекера – Капеллі

Питання сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1.16) повністю розв'язується такою теоремою.

Теорема Кронекера – Капеллі. Для того щоб система лінійних алгебраїчних рівнянь (1.16) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці A дорівнював рангу її розширеної матриці $\bar{A}$, тобто $rang\,A = rang\,\bar{A}$.

Із теореми Кронекера – Капеллі (у випадку сумісності системи) легко отримати відповідь на питання про кількість розв'язків системи.

Теорема про кількість розв'язків системи. Нехай для системи m лінійних рівнянь з n невідомими (1.16) виконується умова сумісності, тобто ранг матриці A дорівнює рангу її розширеної матриці $\bar{A}$. Тоді, якщо ранг матриці дорівнює кількості невідомих $(r = n)$, то система є визначеною і має єдиний розв'язок. Якщо ранг матриці менше кількості невідомих $(r < n)$, тоді система невизначена і має нескінчену кількість розв'язків, а саме: деяким $(n - r)$ невідомим, які будемо називати ***базовими,*** можна надати довільні значення, тоді r невідомі, що залишились (їх будемо називати ***вільними***), визначаються вже однозначно через базові.

1.3.6 Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай дано однорідну систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} . \qquad (1.25)$$

Однорідна система завжди сумісна, тому що завжди має такий розв'язок:

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = 0, \dots, x_n = 0.$$

Цей розв'язок називається ***нульовим*** (або ***тривіальним***). Будь-який інший розв'язок (якщо він існує), у якому хоча б один невідомий відрізнявся від нуля, називається ***ненульовим*** (або ***нетривіальним***).

Теорема 1.4. Для того щоб однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь (1.25) мала нетривіальний розв'язок, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи був менше числа невідомих $(r < n)$.

У випадку, коли число рівнянь дорівнює числу невідомих $(m = n)$, умова $(r < n)$ відповідає тому, що визначник системи дорівнює нулю $(\Delta = 0)$.

Приклад 1.17. Розв'язати систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання: Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -7 & -2 \end{vmatrix} = -24 + 12 + 70 + 45 - 8 - 56 = 39 \neq 0.$$

Ранг матриці системи дорівнює 3 $(\operatorname{rang} A = 3)$ і співпадає з числом невідомих. За умовою теореми 1.4 така система має лише тривіальний розв'язок. Отже,

Відповідь: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0.$

Приклад 1.18. Розв'язати систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання: Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 3 + 6 - 18 + 1 + 4 = 0.$$

Ранг матриці менший 3, тому за умовою теореми 1.4 така система має нетривіальний розв'язок. Знайдемо його, виключивши одне з рівнянь, наприклад третє:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Нехай $x_3 = c$, де c - довільне число. Виразимо x_1 і x_2 через $x_3 = c$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -3c \\ x_1 + 2x_2 = c \end{cases}.$$

Розв'яжемо отриману систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3c & -1 \\ c & 2 \end{vmatrix} = -6c + 5 = -5c;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3c \\ 1 & c \end{vmatrix} = 2c + 3c = 5c.$$

Отже маємо: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5c}{5} = -c;\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5c}{5} = c.$

Відповідь: $x_1 = -c;\ x_2 = c;\ x_3 = c;\ c \in R.$

1.3.7 Власні вектори та власні числа матриці

Нехай дана квадратна матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Визначення 1.26. Ненульовий вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ називається ***власним вектором*** матриці A, якщо існує таке ненульове число λ, що $AX = \lambda X$.

Число λ при цьому називається ***власним числом*** вектора X відносно матриці A.

Визначення 1.27. Матриця $A - \lambda E$ називається ***характеристичною матрицею*** матриці A, многочлен $|A - \lambda E|$ називається ***характеристичним многочленом*** матриці A, а рівняння $|A - \lambda E| = 0$ - ***характеристичним рівнянням*** матриці A.

Теорема 1.5. Власними числами матриці A є корені характеристичного рівняння $|A - \lambda E| = 0$ і лише вони.

Координати власного вектора X, які відповідають власному значенню λ, знаходяться з розв'язку однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Приклад 1.19. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання: Знайдемо матрицю $A - \lambda E$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Запишемо характеристичне рівняння

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(2-\lambda)(-3-\lambda)(-2-\lambda) + 3 + 2(-3-\lambda) + 5(-2-\lambda) = 0;$$

$$-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0;$$

або $$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0;$$

$$(\lambda + 1)^3 = 0;$$

звідси маємо власне число матриці $\lambda = -1$.

Власний вектор матриці знайдемо з системи (1.26):

$$(A - \lambda E)X = 0$$

або підставивши значення власного числа $\lambda = -1$

$$(A + E)X = 0.$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ -x_1 \qquad\quad - x_3 = 0. \end{cases}$$

Обчислимо визначник цієї однорідної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6 + 3 - 4 - 5 = 0.$$

Він дорівнює нулю, отже, ранг матриці менший кількості невідомих, тому за умовою теореми 1.4 така система має нетривіальний розв'язок. Знайдемо його, виключивши одне з рівнянь, наприклад третє:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Нехай $x_3 = c$, де c - довільне число. Виразимо x_1 і x_2 через $x_3 = c$:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = -2c; \\ 5x_1 - 2x_2 = -3c. \end{cases}$$

Розв'яжемо її, наприклад, за правилами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 5 = -1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2c & -1 \\ -3c & -2 \end{vmatrix} = 4c - 3c = c;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2c \\ 5 & -3c \end{vmatrix} = -9c + 10c = c;$$

$$x_1 = -c; \quad x_2 = -c; \quad x_3 = c.$$

Отже, власний вектор матриці $\vec{x} = \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.3.8 Застосування систем лінійних алгебраїчних рівнянь для розв'язання економічних задач

У попередньому розділі ми познайомилися з методами розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Знання цих методів та навички щодо їх використання знадобляться нам у розв'язанні прикладних економічних задач. Складати системи алгебраїчний рівнянь за умовою задачі ми навчилися ще в курсі середньої школи. Наше завдання навчитися розв'язувати отримані системи методами лінійної алгебри.

Приклад 1.20. Кондитерська фабрика спеціалізується на випуску трьох видів виробів: тістечок, рулетів та кексів. Водоночас на виробництві використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3. Норми затрат сировини на кожну одиницю виробів та об'єм затрат сировини на 1 день задані таблицею 1.1. Знайти щоденний об'єм випуску кожного виду кондитерських виробів.

Таблиця 1.1 – Норми та об'єми затрат сировини

Вид сировини	Норми затрат на одну одиницю виробів			Затрати сировини за 1 день
	Тістечка	Рулети	Кекси	
S_1	5	3	4	3 800
S_2	2	2	1	1 500
S_3	3	3	2	2 400

Розв'язання: Зрозуміло, що як невідомі виступає шукана кількість кожного виду кондитерських виробів. Тому позначимо x_1 - об'єм випуску тістечок, x_2 – об'єм випуску рулетів, x_3 - об'єм випуску кексів. У відповідності до таблиці 1.1 можна записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3800 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1500 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2400 \end{cases}.$$

Розв'яжемо систему, наприклад, методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 9 + 24 - 24 - 12 - 15 = 2;$$

$$\Delta_{o} = \begin{vmatrix} 3\,800 & 3 & 4 \\ 1\,500 & 2 & 1 \\ 2\,400 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 15\,200 + 7\,200 + 18\,000 - 19\,200 -$$

$$-9\,000 - 11\,400 = 800;$$

$$\Delta_{.} = \begin{vmatrix} 5 & 3\,800 & 4 \\ 2 & 1\,500 & 1 \\ 3 & 2\,400 & 2 \end{vmatrix} = 15\,000 + 11\,400 + 19\,200 - 18\,000 -$$

$$-15\,200 - 12\,000 = 400;$$

$$\Delta_{١} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3\,800 \\ 2 & 2 & 1\,500 \\ 3 & 3 & 2\,400 \end{vmatrix} = 24\,000 + 13\,500 + 22\,800 - 22\,800 -$$

$$-14\,400 - 22\,500 = 600;$$

$$\dot{\omega}_{o} = \frac{\Delta_{و}}{\Delta} = \frac{۶ يي}{.} = 400; \quad \dot{\omega}_{o} = \frac{\Delta_{و}}{\Delta} = \frac{۲ يي}{.} = 200; \quad \dot{\omega}_{o} = \frac{\Delta_{و}}{\Delta} = \frac{۴ يي}{.} = 300.$$

Отже, кондитерська фабрика щоденно випускає 400 тістечок, 200 рулетів і 300 кексів.

Приклад 1.21. Два заводи поставляють автомобілі для двох автогосподарств, потреби яких відповідно 350 та 250 машин. Перший завод випустив 400 машин, а другий - 200 машин. Відомі витрати на транспортування машин із заводів у кожне автогосподарство (см. табл. 1.2).

Таблиця 1.2 – Витрати та транспортування машин із заводів в автогосподарства

Завод	Витрати на перевозку в автогосподарство, грош. од.	
1	10	25
2	15	30

Мінімальні витрати на транспортування складають 10750 грошових одиниць. Визначити оптимальний план перевозки машин.

Розв'язання: Поставимо у відповідність умовам задачі систему

$$\begin{array}{l} \dot\omega_{\circ\circ} + \dot\omega_{\circ .} = 400 \\ \dot\omega_{.\circ} + \dot\omega_{..} = 200 \\ \dot\omega_{\circ\circ} + \dot\omega_{.\circ} = 350 \\ \dot\omega_{\circ .} + \dot\omega_{..} = 250 \\ 10\dot\omega_{\circ\circ} + 25\dot\omega_{\circ .} + 15\dot\omega_{.\circ} + 20\dot\omega_{..} = 9\,250, \end{array}$$

де $\dot\omega_{\circ\circ}$ і $\dot\omega_{\circ .}$ – кількість машин, які потрібно перевезти з першого заводу в перше та друге автогосподарства відповідно, а $\dot\omega_{.\circ}$ і $\dot\omega_{..}$ - кількість машин, які потрібно перевезти з другого заводу в перше та друге автогосподарства відповідно. Розв'яжемо систему методом Гауса. Для цього випишемо розширену матрицю и виконаємо елементарні перетворення:

$$\ddot{o} = \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 & (-1)\ (-10) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 350 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 & \\ 10 & 25 & 15 & 20 & 9\,250 & \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 & \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -50 & :(-1) \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 & \\ 0 & 15 & 15 & 20 & 5\,250 & :5 \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 & (-1)\ (-3) \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 50 & \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 1\,050 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 & \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \end{pmatrix} \sim$$

Бачимо, що, поділивши третій рядок розширеної матриці на (-1), отримаємо рядок, який співпадає з п'ятим. Виключаємо його, отже, маємо

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 300 \end{pmatrix} (-3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -300 \end{pmatrix}$$

Поділивши четверте рівняння на (-2) маємо

$\dot{\omega}_{..} = 150;$

з третього рівняння отримаємо

$\dot{\omega}_{.o} + \dot{\omega}_{..} = 200;$ $\qquad$ $\dot{\omega}_{.o} = 200 - \dot{\omega}_{..} = 200 - 150 = 50;$

підставивши результат у друге рівняння знаходимо

$\dot{\omega}_{o.} + \dot{\omega}_{..} = 250;$ $\qquad$ $\dot{\omega}_{o.} = 250 - \dot{\omega}_{..} = 250 - 150 = 100;$

і, нарешті, з першого рівняння маємо

$\dot{\omega}_{oo} + \dot{\omega}_{o.} = 400;$ $\qquad$ $\dot{\omega}_{oo} = 400 - \dot{\omega}_{o.} = 400 - 100 = 300.$

Остаточно маємо оптимальний план транспортування машин:
$\dot{\omega}_{oo} = 300;$ $\dot{\omega}_{o.} = 100;$ $\dot{\omega}_{.o} = 50;$ $\dot{\omega}_{..} = 150.$

Приклад 1.22. У кожному з трьох банків, між якими вибирає вкладник, нараховується свій щорічний відсоток на депозитний вклад. Вкладник має суму в 6000 грошових одиниць. Якщо $\frac{\text{٥}}{\text{١}}$ вкладу він розмістить у банку 1, $\frac{\text{٥}}{\text{٠}}$ - у банку 2, а решту – у банку 3, наприкінці року сума вкладу зросте до 7 250 грош. од. Якщо $\frac{\text{٥}}{\text{۴}}$ вкладу покласти у банк 1, $\frac{\text{٠}}{\text{١}}$ - у банк 2, та $\frac{\text{٥}}{\text{۴}}$ - у банк 3, то сума, яку може отримати вкладник зросте до 7 200 грош. од. У випадку, коли схема розміщення вкладів: $\frac{\text{٥}}{\text{٠}}$ - у перший банк, $\frac{\text{٥}}{\text{۴}}$ - у другий банк, $\frac{\text{٥}}{\text{١}}$ - у третій банк, то сума, отримана наприкінці року складала би 7250 грош. од. Визначити ставку по депозитах кожного банку.

Розв'язання: Як невідомі оберемо ставку по депозитах в першому, другому та третьому банках відповідно. Частини вкладу знаходяться множенням числа на звичайний дріб, наприклад, $\frac{\text{٥}}{\text{١}}$ вкладу знаходиться як $\frac{\text{٥}}{\text{١}} \cdot 6\,000 = 2\,000$ грош. од. Тому система лінійних алгебраїчних рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} 2\,000\text{ὼ}_{\text{٥}} + 3\,000\text{ὼ}_{\text{٠}} + 1\,000\text{ὼ}_{\text{١}} = 7\,250 \\ 1\,000\text{ὼ}_{\text{٥}} + 4\,000\text{ὼ}_{\text{٠}} + 1\,000\text{ὼ}_{\text{١}} = 7\,200. \\ 3\,000\text{ὼ}_{\text{٥}} + 1\,000\text{ὼ}_{\text{٠}} + 2\,000\text{ὼ}_{\text{١}} = 7\,250 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Крамера. Зауважимо, що обчислювати визначники, виконуючи множення чотиризначних чисел, у яких три знаки – нулі, не дуже зручно, тому скористаємося властивістю 6 визначників і винесемо спільні множники кожного із стовпців за знак визначника.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\,000 & 3\,000 & 1\,000 \\ 1\,000 & 4\,000 & 1\,000 \\ 3\,000 & 1\,000 & 2\,000 \end{vmatrix} = 10^{\text{٧}} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 10^{\text{٧}}(16 + 9 + 1 - 12 - 6 - 2) = 6 \cdot 10^{\text{٧}};$$

$$\Delta_{\text{٥}} = \begin{vmatrix} 7\,250 & 3\,000 & 1\,000 \\ 7\,200 & 4\,000 & 1\,000 \\ 7\,250 & 1\,000 & 2\,000 \end{vmatrix} = 10^{\text{۵}} \begin{vmatrix} 725 & 3 & 1 \\ 720 & 4 & 1 \\ 725 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 10^{\text{۵}}(5\,800 + 2\,175 + 720 - 2\,900 - 4320 - 725) =$$

$$= 750 \cdot 10^5 = 7{,}5 \cdot 10^7;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2\,000 & 7\,250 & 1\,000 \\ 1\,000 & 7\,200 & 1\,000 \\ 3\,000 & 7\,250 & 2\,000 \end{vmatrix} = 10^5 \begin{vmatrix} 2 & 725 & 1 \\ 1 & 720 & 1 \\ 3 & 725 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 10^5 (2\,880 + 2175 + 725 - 2\,160 - 1\,450 - 1\,450) =$$

$$= 720 \cdot 10^5 = 7{,}2 \cdot 10^7;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2\,000 & 3\,000 & 7\,250 \\ 1\,000 & 4\,000 & 7\,200 \\ 3\,000 & 1\,000 & 7\,250 \end{vmatrix} = 10^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 725 \\ 1 & 4 & 720 \\ 3 & 1 & 725 \end{vmatrix} =$$

$$= 10^5 (5\,800 + 6\,480 + 725 - 8\,700 - 2\,175 - 1\,440) =$$

$$= 690 \cdot 10^5 = 6{,}9 \cdot 10^7;$$

$$\omega_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7{,}5 \cdot 10^7}{6 \cdot 10^7} = 1{,}25;$$

$$\omega_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7{,}2 \cdot 10^7}{6 \cdot 10^7} = 1{,}2;$$

$$\omega_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6{,}9 \cdot 10^7}{6 \cdot 10^7} = 1{,}15.$$

З розв’язання системи робимо висновок, що перший банк відкриває депозити під 25 %, другий – під 20 %, а третій – під 15 %.

1.3.9 Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки

Метою балансового аналізу є відповідь на запитання, яке виникає в макроекономіці в зв’язку з оцінкою ефективності ведення багатогалузевого господарства: яким має бути об’єм виробництва кожної з n галузей, щоб задовольнити всі потреби в продукції цієї галузі? Разом із тим кожна з галузей є як виробником, так і користувачем і своєї, і виробленої іншими галузями, продукції.

Зв'язок між галузями зазвичай відображається в таблицях міжгалузевого балансу (у нашій термінології – у матрицях), а математична модель, яка дозволяє її аналізувати, розроблена в 1936 р. американським економістом В. Леонтьєвим.

Міжгалузевий баланс (модель «затрати – випуск») у міжнародній трактовці – це різновид балансових побудов, які характеризують міжгалузеві зв'язки, пропорції та структуру суспільного виробництва. Він інтегрується в систему національних рахунків, дозволяє характеризувати ефективність виробництва, ціноутворення, вплив факторів економічного зростання. З створення методології аналізу методом «затрати – випуск» та його практичне застосування у 1973 р. В. Леонтьєв був удостоєний Нобелевської премії за досягнення у сфері економіки.

Познайомимося з основними визначеннями та формулами.

Визначення 1.28. Рівняння вигляду $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i$ $(i = 1,2,\dots n)$ називаються ***співвідношеннями балансу***, де x_i - об'єми валового продукту i-тої галузі для невиробничого споживання, x_{ij} - об'єм продукції i -тої галузі, що споживаються в процесі виробництва j-тою галуззю $(j = 1,2,\dots n)$.

Співвідношення балансу можуть бути записані:

а) у вигляді $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i$ $(i = 1,2,\dots n)$ (1.27)

де

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i, j = 1,2,\dots,n) \qquad (1.28)$$

- ***коефіцієнти прямих витрат***, які вказують на витрати продукції i-тої галузі на виробництво одиниці продукції j-тої галузі;

б) у матричному вигляді

$$X = AX + Y \tag{1.29}$$

або

$$(E - A)X = Y \tag{1.30}$$

$$\text{де } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{1.31}$$

де X - вектор валового випуску;
Y - вектор кінцевого продукту;
A - матриця прямих витрат.

Головне завдання міжгалузевого балансу полягає у знаходженні такого вектора валового випуску X, який за відомої матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y.

Вектор X валового випуску знаходиться за формулою:

$$X = (E - A)^{-1}Y = BY, \tag{1.32}$$

де матриця $B = (E - A)^{-1}$ називається ***матрицею повних витрат***, кожен елемент b_{ij} якої показує величину валового випуску продукції i-тої галузі, яка необхідна для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту j-тої галузі $y_j = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Зауваження. Матриця $A \geq 0$ називається ***продуктивною***, якщо для будь-якого вектора $Y \geq 0$ існує розв'язок $X \geq 0$ рівняння (1.30).

Матриця A продуктивна, якщо $a_{ij} \geq 0$ для будь-яких $i, j = 1,2, \ldots, n$ та $\max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ існує номер j такий, що $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Визначення 1.29. Чистою продукцією галузі називається різниця між валовою продукцією цієї галузі і витратами продукції всіх галузей на виробництво цієї галузі.

Скористаємося наведеними визначеннями для розв’язання задач.

Приклад 1.23. У таблиці 1.3 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 1.3 – Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,4	0,35	400
	Галузь 2	0,2	0,15	300

Знайти:

1) плановані об’єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний об’єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 30 %.

Розв’язання:

1) запишемо матрицю коефіцієнтів прямих витрат A і вектор кінцевої продукції Y:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}35 \\ 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix}; \qquad Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що матриця продуктивна, тому що всі її елементи додатні та сума елементів в кожному рядку і в кожному стовпці менше одиниці.

Щоб знайти матрицю повних витрат, знайдемо матрицю $E - A$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,4 & 0,35 \\ 0,2 & 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,35 \\ -0,2 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

Звідси матриця повних витрат $B = (E - A)^{-1}$ знаходиться за добре відомою нам схемою знаходження оберненої матриці:

$$\det(E - A) = \begin{vmatrix} 0,6 & -0,35 \\ -0,2 & 0,85 \end{vmatrix} = 0,51 - 0,07 = 0,44;$$

$$(E - A)' = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 \\ -0,35 & 0,85 \end{pmatrix};$$

$$A'_{11} = 0,85; \quad A'_{12} = 0,35; \quad A'_{21} = 0,2; \quad A'_{22} = 0,6;$$

$$B = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,44} \begin{pmatrix} 0,85 & 0,35 \\ 0,25 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,93 & 0,80 \\ 0,57 & 1,36 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо вектор валового продукту X за формулою (1.32):

$$X = B \cdot Y = \begin{pmatrix} 1,93 & 0,80 \\ 0,57 & 1,36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 772 + 240 \\ 228 + 408 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1012 \\ 636 \end{pmatrix}$$

Перший рядок матриці X відповідає галузі 1, а другий – галузі 2.

Міжгалузеві поставки x_{ij} знайдемо за формулою (1.28):

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$$

$$x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0,4 \cdot 1012 = 404,8;$$

$$x_{12} = a_{12} \cdot x_2 = 0,35 \cdot 636 = 222,6;$$

$\dot{\omega}_{.\circ} = \ddot{\omega}_{.\circ} \cdot \dot{\omega}_{\circ} = 0{,}2 \cdot 1012 = 202{,}4;$

$\dot{\omega}_{..} = \ddot{\omega}_{..} \cdot \dot{\omega}_{.} = 0{,}15 \cdot 636 = 95{,}4.$

Чиста продукція галузі дорівнює різниці між валовою продукцією цієї галузі і витратами продукції всіх галузей на виробництво цієї галузі.

Отже, витрати продукції всіх галузей на виробництво:

- першої галузі

$$\dot{\omega}_{\circ\circ} + \dot{\omega}_{.\circ} = 404{,}8 + 202{,}4 = 607{,}2;$$

- другої галузі

$$\dot{\omega}_{\circ.} + \dot{\omega}_{..} = 222{,}6 + 95{,}4 = 318{,}0.$$

Остаточно маємо чисту продукцію

- першої галузі: $1\,012 - 607{,}2 = 404{,}8;$
- другої галузі: $636 - 318 = 318.$

Всі отримані результати зведені в таблиці 1.4:

Таблиця 1.4 – Результати обчислення планованих об'ємів валової продукції галузей, міжгалузевих поставок, чистої продукції галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція	Валова продукція
		Галузь1	Галузь2		
Виробництво	Галузь1	404,8	222,6	400	1012
	Галузь2	202,4	95,4	300	636
Чиста продукція		404,8	318		
Валова продукція		1012	636		

2) знайдемо вектор кінцевого споживання Y, з урахуванням того, що кінцеве споживання першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 30 %:

$$Y = \begin{pmatrix} 400 \cdot 1{,}1 \\ 300 \cdot 1{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440 \\ 390 \end{pmatrix}.$$

Останнє дає можливість знайти вектор валового випуску X, який за відомої матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y.

Скористаємося формулою (1.29):

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1{,}93 & 0{,}80 \\ 0{,}57 & 1{,}36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 440 \\ 390 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 849{,}2 + 312 \\ 250{,}8 + 530{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1161{,}2 \\ 781{,}2 \end{pmatrix}$$

1.3.10 Лінійна модель обміну

Для ілюстрації застосування методів лінійної алгебри розглянемо також ***модель лінійного обміну*** (або ***модель міжнародної торгівлі***).

Нехай в процесі міжнародного обміну (торгівлі) приймають участь n країн $S_1, S_2, \dots, S_n$, національний дохід кожної з яких дорівнює відповідно $x_1, x_2, \dots, x_n$. Позначимо коефіцієнтами a_{ij} частку національного доходу, яку країна S_j витрачає на купівлю товарів у країни S_i. Будемо вважати, що весь національний дохід витрачається на купівлю товарів або всередині країни, або імпортується з інших країн, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \tag{1.33}$$

Визначення 1.30. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називається ***структурною матрицею торгівлі***. Відповідно до (1.33), сума елементів будь-якого стовпця цієї матриці дорівнює 1.

Для будь-якої країни S_i $(i = 1,2,\dots,n)$ виручка від внутрішньої та зовнішньої торгівлі обчислюється за формулою:

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n. \qquad (1.34)$$

Для збалансованої торгівлі необхідна бездефіцитність торгівлі кожної із країн S_i, тобто виручка від торгівлі кожної з країн має бути не менше її сукупного національного доходу:

$$p_i \geq x_i \quad (i = 1,2,\dots,n).$$

Якщо вважати, що $p_i > x_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$, то отримаємо систему нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n > x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n > x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n > x_n, \end{cases} \qquad (1.35)$$

Виконаємо додавання всіх нерівностей системи (1.35), після групування доданків отримаємо

$$x_1(a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2}) +$$

$$\dots + x_n(a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn}) > x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Враховуючи, що згідно з (1.33) вирази у дужках дорівнюють одиниці, ми доходимо до протиріччя:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n > x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Таким чином, нерівність $p_i > x_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$ неможлива, тому умова $p_i \geq x_i$ набуває вигляду $p_i = x_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$. З погляду економіки це логічно, тому що всі країни не можуть одночасно отримувати прибуток.

Якщо введемо вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ національних доходів країн, отримаємо матричне рівняння

$$AX = X, \qquad (1.36)$$

де X - матриця-стовпець з координат вектора x.

Отже, задача зводиться до знаходження власного вектора матриці A, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$.

Приклад 1.24. Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Знайти національні доходи країн для збалансованої торгівлі.

Розв'язання: Знайдемо власний вектор x, який відповідає власному значенню $\lambda = 1$. Для цього розв'яжемо рівняння $(A - E)X = 0$ або

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв’яжемо однорідну систему. Для цього обчислимо визначник системи:

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}=0$$

Він дорівнює нулю. Отже, система має безліч розв’язків.

Позначимо $x_3 = c$, і запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{1}{3}c; \\ \frac{1}{4}x_1 - x_2 = -\frac{1}{3}c; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}c & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3}c & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}c + \frac{1}{6}c = \frac{1}{2}c;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{3}c \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{3}c \end{vmatrix} = \frac{1}{4}c + \frac{1}{12}c = \frac{1}{3}c;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{5}c; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{15}c; \quad x_3 = c.$$

Отже, збалансована торгівля трьох країн можлива, якщо вектор національних доходів цих країн дорівнює $x = \left(\frac{4}{5}c; \frac{8}{15}c; c\right)$, тобто за їх відношення $\frac{4}{5} : \frac{8}{15} : 1$ або $12 : 8 : 15$.

Контрольні запитання

1. Що таке визначник? Як визначається порядок визначника?

2. Надайте визначення мінору та алгебраїчному доповненню.

3. Як обчислюються визначники другого та третього порядку? Наведіть приклади.

4. Сформулюйте правила обчислення визначників розкладанням їх за рядком (стовпцем), з попереднім отриманням нулів у рядку (стовпці). Наведіть приклади.

5. Подайте визначення матриці.

6. Які операції над матрицями Ви знаєте? Сформулюйте необхідні умови та правила виконання дій над матрицями. Наведіть приклади.

7. Надайте визначення рангу матриці. Які способи обчислення рангу матриці ви знаєте? Наведіть приклади.

8. Надайте визначення системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Що називається розв’язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь?

9. Подайте визначення сумісних та несумісних, визначених та невизначених систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

10. Які системи називаються однорідними (неоднорідними)?

11. Сформулюйте теорему Кронекера – Капеллі. На які основні питання вона відповідає?

12. Як обчислюються власні вектори та власні числа матриці.

13. Назвіть відомі вам методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Опишіть недоліки та переваги

кожного з методів.

14. Опишіть метод Крамера розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Для розв’язання яких систем рекомендують його використовують?

15. Опишіть матричний метод розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Для розв’язання яких систем рекомендують його використання?

16. Опишіть метод Гауса розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Для розв’язання яких систем рекомендують його використовувати?

17. Як розв’язувати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь?

18. Наведіть приклади застосування матриць у задачах з економічним змістом.

19. Наведіть приклади застосування систем лінійних алгебраїчних рівнянь в задачах з економічним змістом.

20. Сформулюйте модель Леонтьєва багатогалузевої економіки. Якою є головна задача міжгалузевого балансу

21. Яка матриця називається продуктивною?

22. Подайте визначення матриць прямих та повних витрат.

23. Як визначається чиста продукція галузі?

24. Сформулюйте лінійну модель обміну.

25. Яку властивість має структурна матриця торгівлі?

26. Запишіть матричне рівняння для визначення співвідношення національних доходів країн за їх збалансованої торгівлі.