

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ТА КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

з навчальної дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

(для студентів 1 курсу заочної форми навчання спеціальностей
073 – Менеджмент, 241 – Готельно-ресторанна справа,
242 – Туризм)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2019

Методичні рекомендації та контрольні роботи з дисципліни «Вища математика» (для студентів 1 курсу заочної форми навчання спеціальностей 073 – Менеджмент, 241 – Готельно-ресторанна справа, 242 – Туризм) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад: Л. Б. Коваленко, Г. А. Кузнецова, С. М. Мордовцев, А. В. Якунін. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. - 155 с.

Укладачі: канд. фіз-мат. наук, доц. Л. Б. Коваленко,
ст. викл. Г. А. Кузнецова,
канд. техн. наук, доц. С. М. Мордовцев,
канд. техн. наук, доц. А. В. Якунін

Рецензент

С.М. Ламтюгова, кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри вищої математики Харківського
національного університету міського господарства
імені О. М. Бекетова.

*Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол
№ 9 від 25.03.2019.*

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА	7
Розділ 1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА	8
1.1 Визначники	8
1.2 Матриці	12
1.2.1 Основні визначення	12
1.2.2 Операції над матрицями	13
1.3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь та методи їхнього розв'язання	19
1.3.1 Основні визначення	19
1.3.2 Теорема Крамера	20
1.3.3 Матричний метод	22
1.3.4 Метод послідовного виключення невідомих. Метод Гауса	25
1.3.5 Застосування систем лінійних алгебраїчних рівнянь для розв'язання економічних задач	30
1.4 Модель Леонтєва багатогалузевої економіки	36
1.5 Лінійна модель обміну	40
Розділ 2 ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ	44
2.1 Границя функції	44
2.2 Нескінченно малі та нескінченно великі величини та їхні властивості	44
2.3 Основні теореми про границі функції	45
2.4 Невизначеності. Розкриття деяких типів невизначеностей	46
2.5 Важливі границі та їхні застосування	51
Розділ 3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ	55
3.1 Похідна та диференціал	55
3.1.1 Визначення похідної	55
3.1.2 Основні правила диференціювання	55

3.1.3	Похідна складної функції	56
3.1.4	Таблиця похідних	57
3.1.5	Похідні вищих порядків	62
3.1.6	Диференціал функції	63
3.2	Граничний аналіз економічних процесів	64
3.3	Поводження функції в інтервалі	68
3.3.1	Ознаки монотонності функції	68
3.3.2	Екстремуми функції	68
3.3.3	Схема дослідження функції на монотонність та екстремум	69
3.3.4	Опуклість та угнутість функцій. Точки перегину	71
3.3.5	Схема дослідження функції на опуклість, угнутість і точки перегину	73
3.3.6	Асимптоти функції	75
3.3.7	Загальна схема дослідження функції	79
3.4	Застосування похідної в задачах з економічним змістом	84
Розділ 4 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ		
	ЗМІННОЇ. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.	87
4.1	Первісна	87
4.2	Таблиця невизначених інтегралів. Простіші прийоми інтегрування	89
4.3	Метод заміни змінної	91
4.4	Інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен	93
4.4.1	Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ або $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	93
4.4.2	Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$ або $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$	95
4.5	Інтегрування раціональних дробів	97
4.5.1	Інтегрування раціональних дробів, корні знаменника яких дійсні та різні	98

4.5.2 Інтегрування раціональних дробів, корні знаменника яких дійсні та серед яких є кратні	100
4.5.3 Інтегрування раціональних дробів, серед коренів знаменника якого є комплексні	102
4.6 Інтегрування частинами	104
4.7 Визначений інтеграл	108
4.8 Властивості визначеного інтегралу	108
4.9 Обчислення визначеного інтегралу. Формула Ньютона - Лейбниця	109
4.10 Заміна змінної у визначеному інтегралі.	111
4.11 Інтегрування частинами визначених інтегралів	112
4.12 Деякі геометричні застосування визначених інтегралів	113
4.12.1 Обчислення площі плоскої фігури	113
4.12.2 Обчислення довжини дуги плоскої кривої	115
4.12.3 Обчислення об'єму тіла	116
4.13 Застосування визначних інтегралів для розв'язання задач економіки	118
 СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	 123
 ДОДАТОК А Завдання для модульного контролю	 124
ДОДАТОК Б Зразок оформлення роботи	153

ПЕРЕДМОВА

Методичні рекомендації побудовані за модульною технологією навчання згідно з робочими програмами курсу «Вища та прикладна математика (Вища математика)». Доступне, коректне подання теоретичного матеріалу супроводжується детальними ілюстраціями, великою кількістю прикладів для практичного закріплення вивченого.

Сучасні програми навчання приділяють велику увагу самостійній, позааудиторній роботі студентів, тому в методичних рекомендаціях особлива увага приділяється доступному поданню теоретичного матеріалу, необхідного для розв'язання запропонованих завдань.

Методичні рекомендації та контрольні роботи з вищої математики розроблені для студентів 1 курсу заочної форми навчання спеціальностей 073 – Менеджмент, 241 – Готельно-ресторанна справа, 242 – Туризм, що навчаються в Харківському національному університеті міського господарства імені О. М. Бекетова.

Розділ 1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1 Визначники

Визначення 1.1. **Визначником** n -го порядку називається число Δ_n , яке записано у вигляді квадратної таблиці чисел:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.1)$$

Позначають визначник ще як \det від *determinate* – «визначати», або $|a_{ij}|$ ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$).

Визначення 1.2. Числа a_{ij} – називаються **елементами визначника**, де i – номер рядка, а j – номер стовпця. Елементи $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ утворюють головну діагональ визначника.

Наше завдання – навчитися обчислювати визначники, тобто «знаходити число». Правило обчислення визначників базується на таких поняттях, як мінор та алгебраїчне доповнення.

Визначення 1.3. **Мінором** M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник $(n - 1)$ -го порядку, який утворюється з початкового визначника закресленням i -того рядка і j -того стовпця.

Визначення 1.4. **Алгебраїчним доповненням** A_{ij} елемента a_{ij} називається добуток $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Для визначників другого та третього порядків існують прості та легкі для запам'ятовування схеми обчислення.

Визначник другого порядку обчислюється так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Запам'ятати це легко за допомогою схеми (рис. 1.1) та за правилом «добуток множників, що розташовані на головній діагоналі береться з тим самим знаком, а добуток множників, що розташовані на бічній діагоналі – з протилежним».

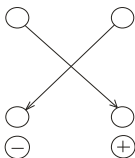


Рисунок 1.1 – Схема обчислення визначника другого порядку

Приклад 1.1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання: $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 4 - 5 \cdot 7 = -12 - 35 = -47$.

Визначник третього порядку обчислюється за правилом Саррюса (правилом трикутників):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Запам'ятати це легко за допомогою схеми (рис. 1.2) та за правилом «з тим самим знаком беремо добуток елементів, що розташовані на головній діагоналі та на двох трикутниках, які будуємо так, щоб одна з сторін трикутника була паралельна головній діагоналі, яку утворюють елементи a_{11}, a_{22}, a_{33} , та всі елементи були на різних рядках та в різних стовпцях; з протилежним знаком беремо добуток елементів, що розташовані на бічній діагоналі, яку утворюють елементи a_{13}, a_{22}, a_{31} , та на двох трикутниках, які будуємо так, щоб одна зі сторін трикутника була паралельна бічній діагоналі та всі елементи були на різних рядках та в різних стовпцях».

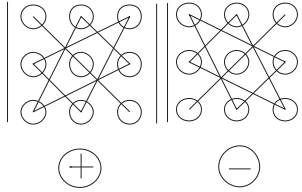


Рисунок 1.2 – Схема обчислення визначника третього порядку

Приклад 1.2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 4 \cdot 1 - \\ -(-3) \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 0 \cdot 1 = \\ = 20 + 0 - 12 - 12 - 20 - 0 = -24.$$

Для обчислення визначників більш високих порядків таких зручних та легких для запам'ятовування схем не існує. Нам на допомогу прийде загальне правило обчислення визначника n -го порядку.

Визначення 1.5. Визначник n -го порядку дорівнює сумі n добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot A_{kj}. \quad (1.2)$$

Подане правило має назву: **розкриття визначника за елементами рядка (стовпця)**.

Приклад 1.3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$,

розкриваючи його: а) за елементами 4-го рядка; б) за елементами 3-го стовпця.

Розв'язання:

а) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 4-го рядка:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + \\ & + 2 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \\ & + 2 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot (0 + 4 + 0 - 0 + 2 - 60) + \\ & + 2 \cdot (0 + 12 + 0 - 0 + 4 - 40) + 4 \cdot (4 - 36 + 0 - 0 - 12 + 8) \\ & + 2 \cdot (20 + 0 + 4 - 6 - 0 - 60) = -2 \cdot (-54) + 2 \cdot (-24) + \\ & + 4 \cdot (-36) + 2 \cdot (-42) = 108 - 48 - 144 - 84 = -168. \end{aligned}$$

б) обчислимо визначник, розкриваючи його за елементами 3-го стовпця:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ -3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + \\ & + 5 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ & = -1 \cdot (-8 + 4 - 24 + 8 - 8 + 12) + \\ & + 5 \cdot (8 + 24 + 0 - 0 - 24 - 16) + \\ & + 4 \cdot (4 - 36 + 0 - 0 - 12 + 8) = \\ & = -1 \cdot (-16) + 5 \cdot (-8) + 4 \cdot (-36) = 16 - 40 - 144 = -168. \end{aligned}$$

1.2 Матриці

1.2.1 Основні визначення

Визначення 1.6. **Матрицею** $A = \|a_{ij}\|$ називається прямокутна таблиця чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

яка складається з m рядків та n стовпців.

Визначення 1.7. Числа a_{ij} називаються **елементами матриці**, де i – номер рядка ($i = \overline{1, m}$), а j – номер стовпця ($j = \overline{1, n}$).

Визначення 1.8. Матриця, число рядків якої дорівнює числу стовпців, називається **квадратною** матрицею.

Визначення 1.9. Квадратна матриця, всі елементи головної діагоналі якої, дорівнюють 1 , а всі інші – 0 , називається **одиначною**, та позначається як

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Визначення 1.10. Дві матриці A і B називаються **рівними**, якщо вони однакового розміру та відповідні елементи a_{ij} і b_{ij} цих матриць рівні.

1.2.2 Операції над матрицями

Додавання (різниця) матриць. Додавати (віднімати) можна лише матриці однакового розміру.

Визначення 1.11. Сумою (різницею) двох матриць A і B розміру $m \times n$ називається матриця того самого розміру, кожен елемент якої є сумою (різницею) елементів відповідних матриць A і B :

$$A + B = C, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \quad (1.5)$$

$$A - B = D, \quad d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}. \quad (1.6)$$

Приклад 1.5. Знайти суму та різницю матриць

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 4 + (-2) & -5 + 2 & 2 + (-1) \\ 3 + 3 & 1 + 0 & -7 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 4 - (-2) & -5 - 2 & 2 - (-1) \\ 3 - 3 & 1 - 0 & -7 - 4 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}.$$

Множення матриць на число.

Визначення 1.12. Добутком матриці A на число λ називається матриця B , кожен елемент якої є добутком числа λ на відповідний елемент матриці A :

$$B = \lambda \cdot A, \quad b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}.$$

Приклад 1.6. Знайти добуток матриці $A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & 9 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ на число $\lambda = 7$.

Розв'язання:

$$B = 7 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 \cdot (-5) & 7 \cdot 6 \\ 7 \cdot 2 & 7 \cdot 9 \\ 7 \cdot 0 & 7 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 42 \\ 14 & 63 \\ 0 & -28 \end{pmatrix}.$$

Множення матриць. Множити можна матриці лише в тому випадку, якщо число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої. У добутку отримаємо матрицю, у якій стільки рядків, скільки у першій матриці, і стільки стовпців, скільки у другій.

Визначення 1.13. Добутком матриць $A [m \times n]$ і $B [n \times k]$ називається матриця $C [m \times k]$, елементи якої обчислюються за правилом

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj} \quad (1.7)$$

(де $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, k}$).

Схематично розмір отриманої матриці можна зобразити у такий спосіб:

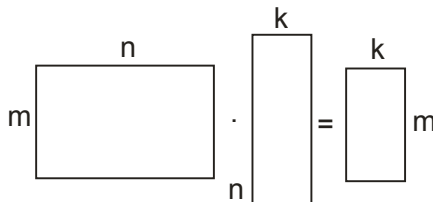


Рисунок 1.3 – Визначення розміру матриці-добутку

Що стосується правила для обчислення елементів матриці-добутку, то його схематично можна зобразити так (рис. 1.4):

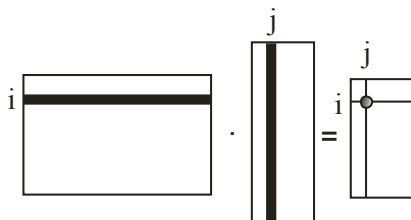


Рисунок 1.4 – Правило обчислення елементів матриці-добутку

Щоб отримати елемент c_{ij} , необхідно скласти суму добутків відповідних елементів i -го рядка матриці A та j -го стовпця матриці B . При виконанні цього завдання радимо користуватися олівцем та гумкою, закреслюючи відповідні рядки першої та стовпці другої матриць.

Зауваження: У загальному випадку операція множення матриць не комутативна, тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$, навіть коли це можливо.

Приклад 1.7. Дано матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти добуток матриць $A \cdot B$ і $B \cdot A$, якщо це можливо.

Розв'язання:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-7) \cdot (-4) & 2 \cdot 0 + (-7) \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + (-7) \cdot 5 \\ 1 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) & 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-4) & 4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 & 4 \cdot (-2) + 6 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 + 28 & 0 - 7 & -4 - 35 \\ 3 - 20 & 0 + 5 & -2 + 25 \\ 12 - 24 & 0 + 6 & -8 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -7 & -39 \\ -17 & 5 & 23 \\ -12 & 6 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 & 3 \cdot (-7) + 0 \cdot 5 + (-2) \cdot 6 \\ -4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 4 & (-4) \cdot (-7) + 1 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 + 0 - 8 & -21 + 0 - 12 \\ -8 + 1 + 20 & 28 + 5 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -33 \\ 13 & 63 \end{pmatrix}.$$

У розглянутому прикладі можливі були операції множення $A \cdot B$ і $B \cdot A$. В результаті ми отримали матриці не тільки з різними елементами, але й різного розміру: у першому випадку ми отримали матрицю розміром 3×3 , а в другому – 2×2 .

Зауваження: Для квадратних матриць однакового порядку операція множення матриць можлива завжди.

Транспонування матриць. Нехай A - матриця розміром $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Визначення 1.14. Матриця, що утворюється з матриці A заміною рядків стовпцями (або навпаки), називається **транспонованою** матрицею відносно матриці A і позначається A^T :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Приклад 1.9. Знайти транспоновану матрицю A^T відносно матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & -7 \\ 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$A^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -7 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця.

Визначення 1.15. Нехай A – квадратна матриця n -го порядку. Квадратна матриця A^{-1} (n -го порядку) називається **оберненою** до A , якщо

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Визначення 1.16. Квадратна матриця A n -го порядку називається **невиродженою**, якщо її визначник $\det A$ відрізняється від нуля, в протилежному випадку матриця називається **виродженою**.

Теорема 1.2. Будь-яка невивроджена матриця A має єдину обернену матрицю A^{-1} .

Обернену матрицю будемо знаходити за схемою:

- 1) обчислюємо визначник матриці $\det A$;
- 2) знаходимо транспоновану матрицю A^T ;
- 3) обчислюємо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці;
- 4) записуємо обернену матрицю за правилом:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \dots & A_{1n}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \dots & A_{2n}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}^T & A_{n2}^T & \dots & A_{nn}^T \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

5) виконуємо перевірку, обчислив $A \cdot A^{-1} = E$ або $A^{-1} \cdot A = E$.

Приклад 1.10. Знайти матрицю, обернену до

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12 + 0 + 12 - 60 - 0 + 12 = -24;$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8;$$

$$A_{12}^T = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -(0 - 6) = 6;$$

$$A_{13}^T = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 12 = -12;$$

$$A_{21}^T = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 20) = 24;$$

$$A_{22}^T = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24;$$

$$A_{23}^T = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(-12 - 12) = 24;$$

$$A_{31}^T = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 10 = -8;$$

$$A_{32}^T = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-3 - 0) = 3;$$

$$A_{33}^T = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 0 = -6.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} -8 & 6 & -12 \\ 24 & -24 & 24 \\ -8 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} -8 & 6 & -12 \\ 24 & -24 & 24 \\ -8 & 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} 24 + 12 - 60 & 0 + 12 - 12 & -48 + 24 + 24 \\ -72 - 48 + 120 & 0 - 48 + 24 & 144 - 96 - 48 \\ 24 + 6 - 30 & 0 + 6 - 6 & -48 + 12 + 12 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Отже, перевірка показала, що обернена матриця знайдена вірно.

$$\text{Відповідь: } A^{-1} = -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} -8 & 6 & -12 \\ 24 & -24 & 24 \\ -8 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

1.3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь та методи їх розв'язання

1.3.1 Основні визначення

Визначення 1.17. Система t лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1.10)$$

Визначення 1.23. Δ_k - це визначник, що отримується з визначника системи Δ заміною k -го стовпця вільними членами системи:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.13)$$

Теорема Крамера. Якщо визначник Δ системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими відрізняється від нуля, то така система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \quad (1.14)$$

Формули (1.14) мають назву *формул Крамера*.

Зауваження. Недоцільно використання формул Крамера у системах з великою кількістю невідомих, тому що це вимагає від нас обчислення $n + 1$ визначника n порядку. Тому формули Крамера, частіше за все, використовують для розв'язання систем 2 – 4 порядків.

Приклад 1.11. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за правилами Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -10. \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 11 \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -20 + 18 + 4 + 15 + 6 + 16 = 39;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & 3 & -1 \\ -10 & 5 & 2 \\ 11 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 90 + 66 - 40 + 55 - 72 - 60 = 39;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -9 & -1 \\ 1 & -10 & 2 \\ 3 & 11 & -2 \end{vmatrix} = 40 - 54 - 11 - 30 - 18 - 44 = -117;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -9 \\ 1 & 5 & -10 \\ 3 & -4 & 11 \end{vmatrix} = 110 - 90 + 36 + 135 - 33 - 80 = 78;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-117}{39} = -3; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{78}{39} = 2.$$

Перевірка. Підставимо отримані значення, наприклад, в перше рівняння системи: $2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) - 2 = -9$. Ми отримали тотожність.

$$\text{Відповідь: } x_1 = 1; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = 2.$$

1.3.3. Матричний метод

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (1.11). Поставимо у відповідність системі (1.11) матричне рівняння

$$A \cdot X = B, \tag{1.15}$$

де A – матриця коефіцієнтів при невідомих, X – стовпець невідомих, B – стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Будемо вважати, що визначник A (визначник матриці A) системи (1.11) відрізняється від нуля. За теоремою Крамера така система має єдиний розв'язок. З іншого боку, для невідродженої матриці A існує обернена матриця A^{-1} .

Помножимо обидві частини рівності (1.15) зліва на A^{-1} . Така операція можлива, тому що A^{-1} - квадратна матриця n -го порядку, а матриці-стовпці X і B мають розмір $n \times 1$. Отримаємо

$$A^{-1} \cdot (AX) = (A^{-1} \cdot A)X = EX = X = A^{-1} \cdot B.$$

Отже, щоб розв'язати систему (1.11), представлену у вигляді (1.15), необхідно обчислити

$$X = A^{-1} \cdot B \quad (1.16)$$

Зауваження. Як і у випадку використання формул Крамера, матричний метод не застосовують при розв'язанні систем з великою кількістю невідомих, оскільки це вимагає від нас обчислення одного визначника n порядку (визначник матриці A) та n визначників $(n - 1)$ -го порядку (алгебраїчні доповнення).

Приклад 1.12. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -11 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання. Запишемо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 20 - 2 - 1 - 15 - 16 = -20 \neq 0,$$

тобто матриця невідроджена й обернена до неї існує.
Транспонуємо матрицю:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення до кожного елемента транспонованої матриці:

$$A_{11}^T = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 5 = -7;$$

$$A_{12}^T = - \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(8 + 1) = -9;$$

$$A_{13}^T = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 20 - 1 = 19;$$

$$A_{21}^T = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 5) = -1;$$

$$A_{22}^T = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 1 = -7;$$

$$A_{23}^T = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -(-15 - 2) = 17;$$

$$A_{31}^T = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3;$$

$$A_{32}^T = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 + 4) = -1;$$

$$A_{33}^T = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11.$$

Множник $(-1)^{i+j}$ тут враховано.

Отже обернена матриця має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} -7 & -9 & 19 \\ -1 & -7 & 21 \\ -3 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Скористаємося формулою (1.16):

$$\begin{aligned}
 X &= A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} -7 & -9 & 19 \\ -1 & -7 & 21 \\ -3 & -1 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 &= -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 77 - 117 + 0 \\ 11 - 91 + 0 \\ 33 - 13 + 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} -40 \\ -80 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Маємо: $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $x_3 = -1$.

1.3.4 Метод послідовного виключення невідомих. Метод Гауса

Нехай дано систему m лінійних рівнянь з n невідомими (1.10). Розглянемо матрицю A системи (1.10) та її розширену матрицю \tilde{A} (матрицю, що складається з елементів матриці A та стовпця вільних членів B):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right). \quad (1.18)$$

Метод Гауса розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь складається в тому, що за допомогою елементарних перетворень її зводять до вигляду, коли матриця \tilde{A} системи стає трапецеподібною. Після того як матриця \tilde{A} стала трапецеподібною з легкістю можна відповісти на запитання про сумісність системи та кількість розв'язків. Зводити матрицю системи до трапецеподібної форми будемо в такий спосіб. Спочатку в усіх рівняннях системи, крім першого вилучимо

невідому x_1 ; потім в усіх рівняннях, крім першого і другого, – невідому x_2 і так далі.

Оскільки кожному елементарному перетворенню системи відповідає елементарне перетворення розширеної матриці системи (і навпаки), то замість системи (для скорочення запису) будемо працювати з розширеною матрицею цієї системи, виконуючи перетворення лише над рядками.

Зауваження. Метод Гауса використовують для розв'язання систем із будь-якою кількістю невідомих, тому що зі зростанням n кількість обчислень зростає незначно.

Для ілюстрації методу Гауса розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1.13. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання: Поставимо у відповідність системі розширену матрицю \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -2 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -2 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{(-3)} \\ \xleftarrow{(-2)} \\ \xleftarrow{(-1)} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -13 & 4 & -6 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 10 \end{array} \right) : (-5) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -13 & 4 & -6 & 17 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 10 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{(-3)} \\ \xleftarrow{(-2)} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -13 & 4 & -6 & 17 \\ 0 & -3 & 7 & -3 & 10 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow 13 \cdot 3 \\ \leftarrow 3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} :(-9) \\ :4 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-1) \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 17/12 & 0 \end{array} \right) \cdot 3 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \cdot 12/17$$

Отже, з останнього рівняння маємо: $x_4 = 0$.

Третій рядок розширеної матриці прочитаємо як

$$3x_3 + 2x_4 = 3.$$

Підставимо знайдене значення x_4 , отримаємо: $3x_3 + 2 \cdot 0 = 3$; $x_3 = 1$.

З другого рядка маємо $x_2 - x_3 = -2$;
 $x_2 - 1 = -2$; $x_2 = -1$.

І, нарешті, з першого рядка розширеної матриці

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -4,$$

з урахуванням знайдених x_2, x_3, x_4 :

$$x_1 + 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 + 0 = -4,$$

маємо $x_1 = 2$. Після перевірки можемо записати відповідь.

Відповідь: $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; $x_4 = 0$.

Приклад 1.14. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -3 \\ 4x_1 + 13x_2 - 22x_3 + 11x_4 = 7 \\ -2x_1 - 7x_2 + 12x_3 - 9x_4 = -3 \end{cases}$$

Розв'язання. Поставимо у відповідність системі розширену матрицю \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 6 & -3 \\ 4 & 13 & -22 & 11 & 7 \\ -2 & -7 & 12 & -9 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{1} (-4) \cdot 2 \\ \xrightarrow{1} \leftarrow \\ \xrightarrow{1} \leftarrow \\ \xrightarrow{1} \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{(-1)} 1 \\ \xrightarrow{(-1)} \leftarrow \\ \xrightarrow{(-1)} \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Отже, ми отримали систему $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$.

Останні два рівняння перетворилися в рівняння вигляду:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0.$$

Ці рівняння задовольняються за будь-яких значень невідомих, тому їх можна відкинути. Щоб задовольнити другому рівнянню, ми можемо для x_3 і x_4 обрати будь-які значення α і β , тоді значення для x_2 визначиться однозначно: $x_2 - 2 \cdot \alpha + 7 \cdot \beta = -1$; $x_2 = -1 + 2\alpha - 7\beta$.

З першого рівняння

$$x_1 + 3 \cdot (-1 + 2\alpha - 7\beta) - 5\alpha + \beta = 2$$

також однозначно визначимо $x_1 = 5 - \alpha + 20\beta$. Остання система рівносильна початковій, тому формули

$$\begin{aligned}x_1 &= 5 - \alpha + 20\beta; \\x_2 &= -1 + 2\alpha - 7\beta; \\x_3 &= \alpha; \\x_4 &= \beta.\end{aligned}$$

при вільних α і β дають нам всі розв'язки системи. Як бачимо, їх нескінченна множина.

Приклад 1.15. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса:

$$\begin{cases}x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\2x_1 - 5x_2 + 7x_4 = 0 \\-3x_1 + 13x_2 - 5x_3 - 8x_4 = -6 \\5x_1 + 11x_2 + 11x_3 + 8x_4 = 11\end{cases}$$

Розв'язання. Поставимо у відповідність системі розширену матрицю \tilde{A} :

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 13 & -5 & -8 & -6 \\ 5 & 11 & 11 & 8 & 11 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{(-2)} \\ \xleftarrow{3} \\ \xleftarrow{(-5)} \end{array} \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xleftarrow{(-1)} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right).\end{aligned}$$

Отже, задана за умовою система рівносильна такій:

$$\begin{cases}x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -2 \\4x_2 + x_3 - 2x_4 = -3 \\0 = 9\end{cases}$$

Ця система несумісна, оскільки її останнє рівняння

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 9$$

не може бути задоволене ніякими значеннями невідомих.

Відповідь: система несумісна.

1.3.5 Застосування систем лінійних алгебраїчних рівнянь для розв'язання економічних задач

У попередньому розділі ми познайомилися з методами розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Знання цих методів та навички щодо їх використання знадобляться нам у розв'язанні прикладних економічних задач. Складати системи алгебраїчних рівнянь за умовою задачі ми навчилися ще в курсі середньої школи. Наше завдання навчитися розв'язувати отримані системи методами лінійної алгебри.

Приклад 1.16. Кондитерська фабрика спеціалізується на випуску трьох видів виробів: тістечок, рулетів та кексів. Водночас на виробництві використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3 . Норми затрат сировини на кожну одиницю виробів та об'єм затрат сировини на 1 день задані таблицею 1.1. Знайти щоденний об'єм випуску кожного виду кондитерських виробів.

Таблиця 1.1 – Норми та об'єми затрат сировини

Вид сировини	Норми затрат на одну одиницю виробів			Затрати сировини за 1 день
	Тістечка	Рулети	Кекси	
S_1	5	3	4	3 800
S_2	2	2	1	1 500
S_3	3	3	2	2 400

Розв'язання. Зрозуміло, що як невідомі виступає шукана кількість кожного виду кондитерських виробів. Тому позначимо x_1 – об'єм випуску тістечок, x_2 – об'єм випуску рулетів, x_3 – об'єм випуску кексів. Відповідно до таблиці 1.1 можна записати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3\,800 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\,500 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2\,400 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему, наприклад, методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 9 + 24 - 24 - 12 - 15 = 2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3\,800 & 3 & 4 \\ 1\,500 & 2 & 1 \\ 2\,400 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 15\,200 + 7\,200 + 18\,000 - 19\,200 - \\ -9\,000 - 11\,400 = 800;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3\,800 & 4 \\ 2 & 1\,500 & 1 \\ 3 & 2\,400 & 2 \end{vmatrix} = 15\,000 + 11\,400 + 19\,200 - 18\,000 - \\ -15\,200 - 12\,000 = 400;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3\,800 \\ 2 & 2 & 1\,500 \\ 3 & 3 & 2\,400 \end{vmatrix} = 24\,000 + 13\,500 + 22\,800 - 22\,800 - \\ -14\,400 - 22\,500 = 600;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{800}{2} = 400; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{400}{2} = 200; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{600}{2} = 300.$$

Отже, кондитерська фабрика щоденно випускає 400 тістечок, 200 рулетів і 300 кексів.

Приклад 1.17. Два заводи поставляють автомобілі для двох автогосподарств, потреби яких відповідно 350 та 250 машин. Перший завод випустив 400 машин, а другий - 200 машин. Відомі витрати на транспортування машин із заводів у кожне автогосподарство (см. табл. 1.2).

Таблиця 1.2 – Витрати та транспортування машин із заводів в автогосподарства

Завод	Витрати на перевезку в автогосподарство, грош. од.	
	1	2
1	10	25
2	15	30

Мінімальні витрати на транспортування становлять 10 750 грошових одиниць. Визначити оптимальний план перевозки машин.

Розв'язання. Поставимо у відповідність умовам задачі систему

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} & & & = 400 \\ & x_{21} + x_{22} & & = 200 \\ x_{11} + & & x_{21} & = 350 \\ & x_{12} + & & x_{22} = 250 \\ 10x_{11} + 25x_{12} + 15x_{21} + 20x_{22} & & & = 9\ 250, \end{cases}$$

де x_{11} і x_{12} – кількість машин, які потрібно перевезти з першого заводу в перше та друге автогосподарства відповідно, а x_{21} і x_{22} – кількість машин, які потрібно перевезти з другого заводу в перше та друге автогосподарства відповідно. Розв'яжемо систему методом Гауса. Для цього випишемо розширену матрицю і виконаємо елементарні перетворення:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 \\ 10 & 25 & 15 & 20 & 9\ 250 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-1) \quad (-10) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 15 & 15 & 20 & 5250 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ :(-1) \\ \leftarrow \\ :5 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 50 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & 1050 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-1) \quad (-3) \\ \leftarrow \quad \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \end{array} \right) \sim$$

Бачимо, що, поділивши третій рядок розширеної матриці на (-1), отримаємо рядок, який співпадає з п'ятим. Виключаємо його, отже, маємо

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 300 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-3) \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -300 \end{array} \right)$$

Поділивши четверте рівняння на (-2) маємо

$$x_{22} = 150;$$

з третього рівняння отримаємо

$$x_{21} + x_{22} = 200; \quad x_{21} = 200 - x_{22} = 200 - 150 = 50;$$

підставивши результат у друге рівняння знаходимо

$$x_{12} + x_{22} = 250; \quad x_{12} = 250 - x_{22} = 250 - 150 = 100;$$

і, нарешті, з першого рівняння маємо

$$x_{11} + x_{12} = 400; \quad x_{11} = 400 - x_{12} = 400 - 100 = 300.$$

Остаточно маємо оптимальний план транспортування машин:
 $x_{11} = 300$; $x_{12} = 100$; $x_{21} = 50$; $x_{22} = 150$.

Приклад 1.18. У кожному з трьох банків, між якими вибирає вкладник, нараховується свій щорічний відсоток на депозитний вклад. Вкладник має суму в 6 000 грошових одиниць. Якщо $\frac{1}{3}$ вкладу він розмістить у банку 1, $\frac{1}{2}$ – у банку 2, а решту – у банку 3, наприкінці року сума вкладу зросте до 7 250 грош. од. Якщо $\frac{1}{6}$ вкладу покласти у банк 1, $\frac{2}{3}$ – у банк 2, та $\frac{1}{6}$ – у банк 3, то сума, яку може отримати вкладник зросте до 7 200 грош. од. У випадку, коли схема розміщення вкладів: $\frac{1}{2}$ – у перший банк, $\frac{1}{6}$ – у другий банк, $\frac{1}{3}$ – у третій банк, то сума, отримана наприкінці року складала би 7250 грош. од. Визначити ставку по депозитах кожного банку.

Розв'язання. Як невідомі оберемо ставку по депозитах у першому, другому та третьому банках відповідно. Частини вкладу знаходяться множенням числа на звичайний дріб, наприклад, $\frac{1}{3}$ вкладу знаходиться як $\frac{1}{3} \cdot 6\,000 = 2\,000$ грош. од. Тому система лінійних алгебраїчних рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} 2\,000x_1 + 3\,000x_2 + 1\,000x_3 = 7\,250 \\ 1\,000x_1 + 4\,000x_2 + 1\,000x_3 = 7\,200. \\ 3\,000x_1 + 1\,000x_2 + 2\,000x_3 = 7\,250 \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Крамера. Зауважимо, що обчислювати визначники, виконуючи множення чотиризначних чисел, у яких три знаки – нулі, не дуже зручно, тому скористаємося властивістю 6 визначників і винесемо спільні множники кожного із стовпців за знак визначника.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\,000 & 3\,000 & 1\,000 \\ 1\,000 & 4\,000 & 1\,000 \\ 3\,000 & 1\,000 & 2\,000 \end{vmatrix} = 10^9 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 10^9(16 + 9 + 1 - 12 - 6 - 2) = 6 \cdot 10^9;$$

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{vmatrix} 7\,250 & 3\,000 & 1\,000 \\ 7\,200 & 4\,000 & 1\,000 \\ 7\,250 & 1\,000 & 2\,000 \end{vmatrix} = 10^7 \begin{vmatrix} 725 & 3 & 1 \\ 720 & 4 & 1 \\ 725 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 10^7(5\,800 + 2\,175 + 720 - 2\,900 - 4\,320 - 725) = \\ &= 750 \cdot 10^7 = 7,5 \cdot 10^9;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2\,000 & 7\,250 & 1\,000 \\ 1\,000 & 7\,200 & 1\,000 \\ 3\,000 & 7\,250 & 2\,000 \end{vmatrix} = 10^7 \begin{vmatrix} 2 & 725 & 1 \\ 1 & 720 & 1 \\ 3 & 725 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 10^7(2\,880 + 2\,175 + 725 - 2\,160 - 1\,450 - 1\,450) = \\ &= 720 \cdot 10^7 = 7,2 \cdot 10^9;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \begin{vmatrix} 2\,000 & 3\,000 & 7\,250 \\ 1\,000 & 4\,000 & 7\,200 \\ 3\,000 & 1\,000 & 7\,250 \end{vmatrix} = 10^7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 725 \\ 1 & 4 & 720 \\ 3 & 1 & 725 \end{vmatrix} = \\ &= 10^7(5\,800 + 6\,480 + 725 - 8\,700 - 2\,175 - 1\,440) = \\ &= 690 \cdot 10^7 = 6,9 \cdot 10^9;\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7,5 \cdot 10^9}{6 \cdot 10^9} = 1,25;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7,2 \cdot 10^9}{6 \cdot 10^9} = 1,2;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6,9 \cdot 10^9}{6 \cdot 10^9} = 1,15.$$

З розв'язання системи робимо висновок, що перший банк відкриває депозити під 25 %, другий – під 20 %, а третій – під 15 %.

1.4 Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки

У попередньому розділі ми познайомилися з методами розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Знання цих методів та навички в їх використанні знадобляться нам у розв'язанні прикладних економічних задач. Познайомимося з основними визначеннями та формулами.

Визначення 1.24. Рівняння вигляду $x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) називаються **співвідношеннями балансу**, де x_i – об'єми валового продукту i -тої галузі для невикористаного споживання, x_{ij} – об'єм продукції i -тої галузі, що споживаються в процесі виробництва j -тою галуззю ($i = 1, 2, \dots, n$).

Співвідношення балансу можуть бути записані:

$$\text{а) у вигляді } x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.19)$$

де

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.20)$$

– **коефіцієнти прямих витрат**, які вказують на витрати продукції i -тої галузі на виробництво одиниці продукції j -тої галузі;

б) у матричному вигляді

$$X = AX + Y \quad (1.21)$$

$$\text{або} \quad (E - A)X = Y, \quad (1.22)$$

$$\text{де} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

X – вектор валового випуску, Y – вектор кінцевого продукту, A – матриця прямих витрат.

Головна задача міжгалузевого балансу складається у знаходженні такого вектора валового випуску X , який при відомій матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y .

Вектор X валового випуску знаходиться за формулою:

$$X = (E - A)^{-1}Y = SY, \quad (1.24)$$

де матриця $S = (E - A)^{-1}$ називається **матрицею повних витрат**, кожен елемент s_{ij} якої показує величину валового випуску продукції i -тої галузі, яка необхідна для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту j -тої галузі $y_j = 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Зауваження. Матриця $A \geq 0$ називається **продуктивною**, якщо для будь-якого вектора $Y \geq 0$ існує розв'язок $X \geq 0$ рівняння (1.20).

Матриця A продуктивна, якщо $a_{ij} \geq 0$ для будь-яких $i, j = 1, 2, \dots, n$ та $\max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$ існує номер j такий, що $\sum_{i=1}^n a_{ij} < 1$.

Визначення 1.25. Чистою продукцією галузі називається різниця між валовою продукцією цієї галузі й витратами продукції всіх галузей на виробництво цієї галузі.

Скористаємося наведеними визначеннями для розв'язання задач.

Приклад 1.19. У таблиці 1.1 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 1.3 - Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях)

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,4	0,35	400
	Галузь 2	0,2	0,15	300

Знайти:

- 1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
- 2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 30 %.

Розв'язання:

- 1) запишемо матрицю коефіцієнтів прямих витрат A і вектор кінцевої продукції Y :

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,35 \\ 0,2 & 0,15 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що матриця продуктивна, тому що всі її елементи додатні та сума елементів у кожному рядку і в кожному стовпці менше одиниці.

Щоб знайти матрицю повних витрат, знайдемо матрицю $E - A$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,4 & 0,35 \\ 0,2 & 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,35 \\ -0,2 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

Звідси матриця повних витрат $S = (E - A)^{-1}$ знаходиться за добре відомою нам схемою знаходження оберненої матриці:

$$\det(E - A) = \begin{vmatrix} 0,6 & -0,35 \\ -0,2 & 0,85 \end{vmatrix} = 0,51 - 0,07 = 0,44;$$

$$(E - A)^T = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 \\ -0,35 & 0,85 \end{pmatrix};$$

$$A_{11}^T = 0,85; \quad A_{12}^T = 0,35; \quad A_{21}^T = 0,2; \quad A_{22}^T = 0,6;$$

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,44} \begin{pmatrix} 0,85 & 0,35 \\ 0,25 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,93 & 0,80 \\ 0,57 & 1,36 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо вектор валового продукту X за формулою (1.24):

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1,93 & 0,80 \\ 0,57 & 1,36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 772 + 240 \\ 228 + 408 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1012 \\ 636 \end{pmatrix}.$$

Перший рядок матриці X відповідає галузі 1, а другий – галузі 2. Міжгалузеві поставки x_{ij} знайдемо за формулою (1.20):

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$$

$$x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0,4 \cdot 1012 = 404,8;$$

$$x_{12} = a_{12} \cdot x_2 = 0,35 \cdot 636 = 222,6;$$

$$x_{21} = a_{21} \cdot x_1 = 0,2 \cdot 1012 = 202,4;$$

$$x_{22} = a_{22} \cdot x_2 = 0,15 \cdot 636 = 95,4.$$

Чиста продукція галузі дорівнює різниці між валовою продукцією цієї галузі і витратами продукції всіх галузей на виробництво цієї галузі.

Отже, витрати продукції всіх галузей на виробництво:

- першої галузі

$$x_{11} + x_{21} = 404,8 + 202,4 = 607,2;$$

- другої галузі

$$x_{12} + x_{22} = 222,6 + 95,4 = 318,0.$$

Остаточно маємо чисту продукцію

- першої галузі: $1012 - 607,2 = 404,8$;
- другої галузі: $636 - 318 = 318$.

Усі отримані результати зведені в таблиці 1.4:

Таблиця 1.4 - Плановані об'єми валової продукції галузей

Галузь		Споживання		Кінцева продукція	Валова продукція
		Галузь 1	Галузь 2		
Вироб- ництво	Галузь1	404,8	222,6	400	1012
	Галузь2	202,4	95,4	300	636
Чиста продукція		404,8	318		
Валова продукція		1012	636		

2) знайдемо вектор кінцевого споживання Y , з урахуванням того, що кінцеве споживання першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 30 %:

$$Y = \begin{pmatrix} 400 \cdot 1,1 \\ 300 \cdot 1,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440 \\ 390 \end{pmatrix}.$$

Останнє дає можливість знайти вектор валового випуску X , який при відомій матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y .

Скористаємося формулою (1.24):

$$X = S \cdot Y = \begin{pmatrix} 1,93 & 0,80 \\ 0,57 & 1,36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 440 \\ 390 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 849,2 + 312 \\ 250,8 + 530,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1161,2 \\ 781,2 \end{pmatrix}$$

1.5 Лінійна модель обміну

Для ілюстрації застосування методів лінійної алгебри розглянемо також *модель лінійного обміну* (або *модель міжнародної торгівлі*).

Нехай у процесі міжнародного обміну (торгівлі) приймають участь n країн S_1, S_2, \dots, S_n , національний дохід кожної з яких дорівнює відповідно x_1, x_2, \dots, x_n . Позначимо коефіцієнтами a_{ij} частку національного доходу, яку країна S_j витрачає на купівлю товарів у країни S_i . Будемо вважати, що

весь національний дохід витрачається на купівлю товарів або всередині країни, або імпортується з інших країн, тобто

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.25)$$

Визначення 1.25. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називається **структурною матрицею торгівлі**. Відповідно до (1.25), сума елементів будь-якого стовпця цієї матриці дорівнює 1.

Для будь-якої країни S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) виручка від внутрішньої та зовнішньої торгівлі обчислюється за формулою:

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n. \quad (1.26)$$

Для збалансованої торгівлі необхідна бездефіцитність торгівлі кожної із країн S_i , тобто виручка від торгівлі кожної з країн має бути не менше її сукупного національного доходу:

$$p_i \geq x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Якщо вважати, що $p_i > x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), то отримаємо систему нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n > x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n > x_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n > x_n \end{cases} \quad (1.27)$$

Виконаємо додавання всіх нерівностей системи (1.27), після групування доданків отримаємо

$$\begin{aligned} x_1(a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n}) + x_2(a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n}) + \dots \\ \dots + x_n(a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn}) > x_1 + x_2 + \dots + x_n \end{aligned}$$

Враховуючи, що згідно з (1.25) вирази у дужках дорівнюють одиниці, ми доходимо до протиріччя:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n > x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Отже, нерівність $p_i > x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) неможлива, тому умова $p_i \geq x_i$ набуває вигляду $p_i = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). З погляду економіки це логічно, тому що всі країни не можуть одночасно отримувати прибуток.

Якщо введемо вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ національних доходів країн, отримаємо матричне рівняння

$$AX = X, \quad (1.28)$$

де X – матриця-стовпець з координат вектора x .

Отже, задача зводиться до знаходження власного вектора матриці A , який відповідає власному значенню $\lambda = 1$.

Приклад 1.20. Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Знайти національні доходи країн для збалансованої торгівлі.

Розв'язання. Знайдемо власний вектор x , який відповідає власному значенню $\lambda = 1$. Для цього розв'яжемо рівняння $(A - E)X = 0$ або

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо однорідну систему. Для цього обчислимо визначник системи:

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = 0$$

Він дорівнює нулю. Отже, система має безліч розв'язків.

Позначимо $x_3 = k$, і запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{1}{3}k; \\ \frac{1}{4}x_1 - x_2 = -\frac{1}{3}k; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}k & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3}k & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}k + \frac{1}{6}k = \frac{1}{2}k;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{3}k \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{3}k \end{vmatrix} = \frac{1}{4}k + \frac{1}{12}k = \frac{1}{3}k;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{5}k; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{15}k; \quad x_3 = k.$$

Отже, збалансована торгівля трьох країн можлива, якщо вектор національних доходів цих країн дорівнює $x = \left(\frac{4}{5}k; \frac{8}{15}k; k\right)$, тобто за їх відношення $\frac{4}{5} : \frac{8}{15} : 1$ або 12:8:15.

Розділ 2 ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ

2.1 Границя функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай незалежна змінна x нескінченно наближається до числа x_0 . Так може статися, що відповідне значення функції $y = f(x)$ нескінченно наближається до деякого числа A . Тоді кажуть, що число A – границя функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Визначення 2.1. Число A називається **границею функції** $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для всіх значень x , які достатньо мало відрізняються від числа x_0 , відповідні значення функції $y = f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A . Границю функції позначають

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A. \quad (2.1)$$

2.2 Нескінченно малі і нескінченно великі величини та їх властивості

Визначення 2.2. Функція $y = f(x)$ називається **нескінченно великою** величиною при $x \rightarrow x_0$, якщо для всіх значень x , які достатньо мало відрізняються від x_0 , відповідні значення функції за абсолютною величиною перебільшують будь-яке наперед задане як завгодно велике додатне число:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty. \quad (2.2)$$

Тобто якщо для будь-якого наперед заданого як завгодно великого додатного числа M можна підібрати таке додатне число δ , що для всіх x , які задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$, буде справедлива і нерівність $|f(x)| > M$, то $y = f(x)$ буде нескінченно великою величиною при $x \rightarrow x_0$.

Наприклад, функції $y = \frac{1}{x-2}$ при $x \rightarrow 2$; $y = \frac{5}{x^2}$ при $x \rightarrow 0$; $y = 4^x$ при $x \rightarrow \infty$ є нескінченно великими.

Зауваження 1. Не можна змішувати поняття дуже великого числа з нескінченно великою величиною! Наприклад, число $10^{10^{10}}$ є величиною колосальною, але є сталою величиною і не прямує до нескінченності.

Визначення 2.3. Функція $y = f(x)$ називається **нескінченно малою** величиною при $x \rightarrow x_0$, якщо її границя при $x \rightarrow x_0$ прямує до нуля:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0. \quad (2.3)$$

Наприклад, функції $y = (x - 2)^3$ при $x \rightarrow 2$; $y = 4(x + 3)$ при $x \rightarrow -3$; $y = 5^x$ при $x \rightarrow -\infty$ є нескінченно малими.

Зауваження 2. Не можна змішувати поняття дуже малого числа з нескінченно малою величиною! Єдине число, яке ми вважаємо нескінченно малою величиною є 0, тому що границя константи дорівнює самій константі.

2.3 Основні теореми про границі функції

Теорема 1. Границя алгебраїчної суми кінцевого числа доданків дорівнює сумі границь доданків:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (u_1 + u_2 + \dots + u_n) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} u_1 + \lim_{x \rightarrow x_0} u_2 + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} u_n. \quad (2.4)$$

Теорема 2. Границя добутку кінцевого числа множників дорівнює добутку границь множників:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0} (u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n) = \\ & = \lim_{x \rightarrow x_0} u_1 \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} u_2 \cdot \dots \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} u_n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Наслідок 1. Сталий множник можна виносити за знак границі:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot u = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} u. \quad (2.6)$$

Теорема 3. Границя частки дорівнює частці цих границь, якщо границя знаменника відрізняється від нуля:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u}{v} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} u}{\lim_{x \rightarrow x_0} v}, \text{ якщо } \lim_{x \rightarrow x_0} v \neq 0. \quad (2.7)$$

2.4 Невизначеності.

Розкриття деяких типів невизначеностей

Визначення 2.4. Дріб, в якому і чисельник, і знаменник є змінними величинами, які прямують до нуля, називається **невизначеністю** типу $\frac{0}{0}$. Знаходження границі такого дробу називається **розкриттям невизначеності**.

Зауваження 1. Крім невизначеності $\frac{0}{0}$ є також невизначеності: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ , ∞^{0^∞} , 0^0 ..

Зауваження 2. При обчисленні границь нам часто прийдеться працювати з нескінченно малими та нескінченно великими величинами. Спробуємо узагальнити вивчені поняття та властивості у таблиці 2.1. Відзначимо, що дії з

нескінченно малими та нескінченно великими величинами мають умовний характер.

Таблиця 2.2 – «Дії» з нескінченно малими та нескінченно великими величинами

$a \cdot 0 = 0$	$a \cdot \infty = \infty$
$\frac{0}{a} = 0$	$\frac{\infty}{a} = \infty$
$\frac{a}{0} = \infty$	$\frac{a}{\infty} = 0$

1. Невизначеність типу $\frac{0}{0}$, що задана відношенням двох многочленів.

Правило. Щоб розкрити невизначеність типу $\frac{0}{0}$, що задана у формі

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + K}{Lx^m + Mx^{m-1} + \dots + P},$$

необхідно і в чисельнику, і в знаменнику виділити критичний множник $(x - a)$ і скоротити дріб на нього.

Зауваження 1. Критичний множник $(x - a)$ обов'язково виділиться і в чисельнику, і в знаменнику, оскільки $(x - a)$ є коренем обох многочленів, звідси прямує, що з наслідку теореми Бізу обидва многочлени можуть бути поділені на $(x - a)$ без залишку.

Зауваження 2. Можливо, що операцію скорочення на критичний множник прийдеться виконувати декілька разів.

Формули, що використовуються:

- розкладання квадратного тричлена на множники:
 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1, x_2 – корні квадратного тричлена;
- формули скороченого множення:
 - а) різниця квадратів: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;

б) сума (різниця) кубів:
 $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;

в) квадрат суми (різниці):
 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

г) куб суми (різниці):
 $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 2ab^2 \pm b^3$ і т.п.

Приклад 2.1. Обчислити границю функції $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 8}$.

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. У чисельнику розкладемо квадратний тричлен на множники, а в знаменнику скористаємося формулою суми кубів: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 8} = \left| \frac{0}{0} \right| =$
 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-3)}{(x^2 - 2x + 4)} = -\frac{5}{12}$.

2. Невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$, що задана відношенням двох многочленів.

Правило. Щоб розкрити невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$, що задана відношенням двох многочленів, необхідно і чисельник, і знаменник скоротити на найбільшу степінь многочленів, що входить у функцію.

Приклад 2.2. Обчислити границю функції

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 - 7x + 4}{2x^3 + 3x - 6}$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Скоротимо і чисельник, і знаменник на найбільший степінь $-x^3$, скористаємося таблицею 2.1, маємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 - 7x + 4}{2x^3 + 3x - 6} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{2 + \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^3}} = \frac{5}{2}$$

Приклад 2.3. Обчислити границю функції

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - 4x^3 + 9}{x^3 + 8x^2 - 4x}$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Скоротимо і чисельник, і знаменник на найбільший степінь $-x^5$, маємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - 4x^3 + 9}{x^3 + 8x^2 - 4x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x^2} + \frac{9}{x^5}}{\frac{1}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{4}{x^5}} = \frac{3}{0} = \infty.$$

Приклад 2.4. Обчислити границю функції

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x - 1}{5x^3 - 3x^2 - 12}$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$. Скоротимо і чисельник, і знаменник на найбільший степінь $-x^3$, маємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x - 1}{5x^3 - 3x^2 - 12} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{5 - \frac{3}{x} - \frac{12}{x^3}} = \frac{0}{5} = 0.$$

Якщо уважно проаналізувати розв'язання прикладів 2.2–2.4, можна відзначити цікаву закономірність: результат визначається співвідношенням максимальних степенів многочленів чисельника і знаменника. Узагальнимо ці спостереження у вигляді формули:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + K}{Lx^m + Mx^{m-1} + \dots + P} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \begin{cases} \infty, & n > m \\ 0, & n < m \\ \frac{A}{L}, & n = m \end{cases} \quad (2.8)$$

Зауваження. При обчисленні більш складних границь ми зможемо використовувати (2.8) не запобігаючи попередніх обчислень.

3. Невизначеності типу $\frac{0}{0}$ або $\infty - \infty$, що задані ірраціональними виразами

Правило. Щоб розкрити неvizначеності типу $\frac{0}{0}$ або $\infty - \infty$ у функціях, які мають ірраціональності, необхідно належним образом позбутися ірраціональності.

Формули, що використовуються: формули скороченого множення і, за необхідності, розкладання квадратного тричлена на множники (см. п. 1).

Приклад 2.5. Обчислити границю функції

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{\sqrt{x+4} - 3}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо неvizначеність типу $\frac{0}{0}$. Чисельник розкладемо на множники, а щоб позбутися ірраціональності у знаменнику, скористаємося формулою різниці квадратів. Помножимо і чисельник, і знаменник на множник $\sqrt{x+4} + 3$, звідси маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{\sqrt{x+4} - 3} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x-1)(\sqrt{x+4}+3)}{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x-1)(\sqrt{x+4}+3)}{x+4-3^2} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x-1)(\sqrt{x+4}+3)}{x-5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} (x-1)(\sqrt{x+4}+3) = 4 \cdot 6 = 24. \end{aligned}$$

Приклад 2.6. Обчислити границю функції

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{\sqrt{2x+11} - 3}.$$

Розв'язання. Підставимо граничне значення аргументу, отримаємо неvizначеність типу $\frac{0}{0}$. У цій функції маємо ірраціональність і в чисельнику, і в знаменнику. Щоб позбутися

іраціональності і чисельник, і знаменник одночасно помножимо на $(\sqrt{x+5}+2)$ і $(\sqrt{2x+11}+3)$. Отже маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{2x+11}-3} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)(\sqrt{2x+11}+3)}{(\sqrt{2x+11}-3)(\sqrt{2x+11}+3)(\sqrt{x+5}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+5-4)(\sqrt{2x+11}+3)}{(2x+11-9)(\sqrt{x+5}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt{2x+11}+3)}{2(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{2x+11}+3)}{2(\sqrt{x+5}+2)} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

2.5 Важливі границі та їх застосування

Перша важлива границя

Теорема. Функція $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ при $\alpha \rightarrow 0$ має границю, яка дорівнює 1:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1. \quad (2.9)$$

Приклад 2.7. Обчислити границю функції $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \sin ax}{a \cdot x} = \left[\begin{array}{l} y = ax \\ y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a \cdot \sin y}{y} = \\ &a \cdot 1 = a. \end{aligned}$$

Приклад 2.8. Обчислити границю функції $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin ax}{x \cdot \sin bx} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin bx} = \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Приклад 2.9. Обчислити границю функції $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{x}$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{x} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} \cdot \frac{1}{\cos ax} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos ax} = a \cdot 1 = a. \end{aligned}$$

Приклад 2.10. Обчислити границю функції $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left| \frac{0}{0} \right| =$
 $\left[\begin{array}{l} x = \sin y \\ \arcsin x = \arcsin(\sin y) = y \\ y \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$

Приклад 2.11. Обчислити границю функції

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x - \sin^2 x}{7x^2}.$$

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x - \sin^2 x}{7x^2} = \left| \frac{0}{0} \right| =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x - \sin x)(\sin 5x + \sin x)}{7x^2} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \cos 3x \cdot 2 \sin 3x \cos 2x}{7x^2} =$
 $= \frac{4}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x \cdot \cos 2x =$
 $= \frac{4}{7} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{24}{7}.$

Приклад 2.12. Обчислити границю функції

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \operatorname{tg} x.$$

Розв'язання. Застосовувати першу важливу границю можна лише за умови, що аргумент функції прямує до нуля. Оберемо нову змінну, яка буде прямувати до нуля, зробимо відповідні перетворення

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \operatorname{tg} x = |0 \cdot \infty| = \left[\begin{array}{l} y = \frac{\pi}{2} - x \\ y \rightarrow 0 \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - y \right) = \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \operatorname{ctg} y =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \cdot \cos y}{\sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \cos y = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ми розглянули багато прикладів на застосування першої важливої границі і можемо зробити деякі висновки. По-перше, завдання на обчислення границі за допомогою першої важливої границі потребують від нас знання основних

тригонометричних формул і вміння їх правильно застосовувати; по-друге, наслідки першої важливої границі (деякі з них ми вже довели) можна застосовувати нарівні з самою теоремою.

Наслідки першої чудової границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} x}{x} = 1$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$.

Друга важлива границя

Теорема. Функція $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \rightarrow \infty$ має границю, яка дорівнює e :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (2.10)$$

Зауваження. За допомогою другої важливої границі розкриваються невизначеності типу 1^∞ .

Приклад 2.13. Обчислити границю функції

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^x.$$

Розв'язання. Скористаємося другою важливою границею: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^x = |1^\infty| = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right)^4 = e^4$.

Приклад 2.14. Обчислити границю функції

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x-2}\right)^{5x}.$$

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x-2}\right)^{5x} = |1^\infty| =$
 $= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{7}}\right)^{\frac{7}{x-2} \cdot 5x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{35x}{x-2}} = e^{35}.$

Приклад 2.15. Обчислити границю функції

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-3}{4x+5} \right)^{6x-1}.$$

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-3}{4x+5} \right)^{6x-1} = |1^\infty| =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4x-3}{4x+5} - 1 \right)^{6x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4x-3-4x-5}{4x+5} \right)^{6x-1} =$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-8}{4x+5} \right)^{\frac{4x+5}{-8} \cdot (6x-1)} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8(6x-1)}{4x+5}} = e^{-12}.$$

Приклад 2.16. Обчислити границю функції

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3)[\ln(5x + 2) - \ln(5x - 4)].$$

Розв'язання. Звернемо увагу, що в даному прикладі ми змушені позбавлятися невизначеності типу $|\infty - \infty|$. Як ми зауважили, що друга важлива границя допомагає позбавлятися невизначеності типу $|1^\infty|$. Але, згадав властивості логарифмів, нам вдасться звести дану границю до другої важливої границі.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3)[\ln(5x + 2) - \ln(5x - 4)] = |\infty - \infty| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3) \ln \left(\frac{5x+2}{5x-4} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{5x+2}{5x-4} \right)^{(2x+3)} =$$

$$= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+2}{5x-4} \right)^{(2x+3)} = |1^\infty| =$$

$$= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5x+2}{5x-4} - 1 \right)^{(2x+3)} =$$

$$= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{5x-4} \right)^{\frac{5x-4}{6} \cdot (2x+3)} \right) =$$

$$= \ln e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6(2x+3)}{5x-4}} = \ln e^{\frac{12}{5}} = \frac{12}{5} \ln e = \frac{12}{5}.$$

Розділ 3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.1 Похідна та диференціал

3.1.1 Визначення похідної

Визначення 3.1. Похідною даної функції називається границя відношення приросту функції до приросту незалежної змінної при довільному прямуванні цього приросту до нуля, якщо така границя існує:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (3.1)$$

3.1.2 Основні правила диференціювання

Похідна суми

Теорема 3.1. Похідна алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі похідних доданків.

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'} \quad (3.2)$$

Похідна добутку

Теорема 3.2. Похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу і похідної другої функції на першу:

$$\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'} \quad (3.3)$$

Наслідок. Справедливі формули

$$\boxed{(C \cdot u)' = C \cdot u'}. \quad (3.4)$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}}. \quad (3.5)$$

Похідна частки

Теорема 3.3. Похідна частки двох функцій дорівнює дробу, знаменник якого дорівнює квадрату дільника, а

чисельник – різниці між добутком похідної діленого на дільник і добутком діленого на похідну дільника:

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}. \quad (3.6)$$

Наслідок. Справедлива формула $\boxed{\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c \cdot v'}{v^2}}$. (3.7)

3.1.3. Похідна складної функції

Теорема 3.4. Похідна складної функції дорівнює похідній даної функції по проміжному аргументу, помноженої на похідну цього аргументу по незалежній змінній.

$$\boxed{y' = f'_u \cdot u'_x} \quad (3.8)$$

Похідна складної функції дорівнює добутку похідних від функцій, що її складають.

Приклад 3.1. Знайти похідну функції

$$y = (15 - \sqrt[3]{2x^7 - 3})^{11}.$$

Розв'язання. Представимо цю функцію у вигляді ланцюжка $y = u^{11}$, $u = 15 - \sqrt[3]{v}$, $v = 2x^7 - 3$, отримаємо

$$\begin{aligned} y' &= (u^{11})' \cdot (15 - \sqrt[3]{v})' \cdot (2x^7 - 3)' = 11u^{10} \cdot \frac{1}{3}v^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 \cdot 7x^6 = \\ &= \frac{154}{3} (15 - \sqrt[3]{2x^7 - 3})^{10} \cdot \frac{x^6}{\sqrt[3]{(2x^7 - 3)^2}}. \end{aligned}$$

3.1.4 Таблиця похідних

Організуємо нашу таблицю у такий спосіб: ліворуч розташуємо формули для обчислення похідних простих функцій, а праворуч – складних. Незважаючи на те, що ці

формули начебто дублюють один одного, але, на наш погляд, таке подання формул полегшує знаходження похідних, і ми спробуємо в цьому переконати на прикладах, які розглянемо після запису таблиці.

Приклад 3.2. Знайти похідну функції

$$y = 7x^5 - 15 \log_3 x - 4 \cdot 2^x + 3 \arctg x - 11.$$

Розв'язання. Функція представлена у вигляді алгебраїчної суми, тому кожний із доданків будемо диференціювати окремо, пам'ятаємо, що сталий множник можна виносити за знак похідної. Кожний з доданків – проста функція, тому скориставшись таблицею похідних, маємо:

$$\begin{aligned} y' &= 7(x^5)' - 15(\log_3 x)' - 4 \cdot (2^x)' + 3(\arctg x)' - (11)' = \\ &= 7 \cdot 5x^4 - 15 \cdot \frac{1}{x \ln 3} - 4 \cdot 2^x \cdot \ln 2 + 3 \cdot \frac{1}{1+x^2} - 0 = \\ &= 35x^4 - \frac{15}{x \ln 3} - 4 \cdot 2^x \ln 2 + \frac{3}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Приклад 3.3. Знайти похідну функції

$$y = (7 \arcsin x - 15) \cdot (2 \ln x + 3x^2).$$

Розв'язання. Функція представлена у вигляді добутку. Скористаємося формулою (3.3). Для цього розіб'ємо функцію на $u = 7 \arcsin x - 15$ і $v = 2 \ln x + 3x^2$. Знайдемо u' і v' :

$$u' = \frac{7}{\sqrt{1-x^2}}; \quad v' = \frac{2}{x} + 6x.$$

За формулою (3.3) маємо:

$$y' = \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (2 \ln x + 3x^2) + (7 \arcsin x - 15) \cdot \left(\frac{2}{x} + 6x \right).$$

Таблиця 3.1 – Таблиця похідних

$y = f(x)$	$y = f(u(x))$
$C' = 0$	
$x' = 1$	
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Приклад 3.4. Знайти похідну функції $y = \frac{2e^x - \cos x}{5tgx + 8}$.

Розв'язання. Функція представлена у вигляді частки. Скористаємося формулою (3.6). Для цього розіб'ємо функцію на $u = 2e^x - \cos x$ і $v = 5tgx + 8$. Знайдемо u' і v' :

$$u' = 2e^x + \sin x; \quad v' = \frac{5}{\cos^2 x}.$$

За формулою (3.6) маємо:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2e^x + \sin x) \cdot (5tgx + 8) - (2e^x - \cos x) \cdot \frac{5}{\cos^2 x}}{(5tgx + 8)^2} = \\ &= \frac{(2e^x + \sin x) \cdot (5tgx + 8) \cdot \cos^2 x - 5(2e^x - \cos x)}{(5tgx + 8)^2 \cdot \cos^2 x}. \end{aligned}$$

Приклад 3.5. Знайти похідну функції

$$y = \ln \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}).$$

Розв'язання. Функція, похідну якої нам запропонували знайти, складна. Тут є і степенева, і показникова, і логарифмічна, і обернена тригонометрична функції. З якої функції почати диференціювання? Ланцюжок складної функції, який ми можемо скласти, дуже великий. Тому радимо скористатися таким прийомом: будемо промовляти кожного разу послідовність, в якій утворювалася надана функція; диференціювати ми завжди будемо в оберненому порядку. Тут можна провести аналогію процесу одягання – роздягання: ми завжди одягаємося в одному порядку, а роздягаємося в оберненому.

Промовимо, що потрібно зробити, щоб знайти y за наданою формулою:

- помножимо x на 3;
- аргумент $3x$ возведемо до експоненти;
- з одиниці віднімемо отриману функцію;
- візьмемо корінь квадратний з цього виразу;
- додамо одиницю;

- обчислимо арктангенс;
- візьмемо логарифм отриманого виразу.

Отже, знаходження функції ми закінчили логарифмом, тому й диференціювати почнемо з логарифму.

Скористаємося формулою $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$. Де за u приймемо: $u = \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})$.

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})} \cdot (\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}))'$$

Читаємо наш список в оберненому порядку. Тепер будемо диференціювати арктангенс, а за u приймемо

$$u = 1 + \sqrt{1 - e^{3x}}$$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})} \cdot \frac{1}{1 + (1 + \sqrt{1 - e^{3x}})^2} \cdot (1 + \sqrt{1 - e^{3x}})'$$

Продовжуємо диференціювання. Похідна від сталої дорівнює нулю, а корінь квадратний продиференціюємо за формулою

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u', \text{ де } u = 1 - e^{3x}.$$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})} \cdot \frac{1}{1 + (1 + \sqrt{1 - e^{3x}})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{3x}}} \cdot (1 - e^{3x})'$$

Тепер похідна від експоненти:

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{1 - e^{3x}})} \cdot \frac{1}{1 + (1 + \sqrt{1 - e^{3x}})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - e^{3x}}} \cdot (-e^{3x}) \cdot (3x)'$$

Остаточно маємо:

$$y' = -\frac{3e^{3x}}{2\sqrt{1 - e^{3x}} \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{1 - e^{3x}}) (1 + (1 + \sqrt{1 - e^{3x}})^2)}$$

Кожного разу при диференціюванні складних функцій ми будемо діяти аналогічно.

Приклад 3.6. Знайти похідну функції

$$y = \sin^4 5x \cdot \log_7(\operatorname{tg} 3x + 18).$$

Розв'язання. Функція представлена у вигляді добутку. Скористаємося формулою (3.3):

$$u = \sin^4 5x; v = \log_7(tg3x + 18).$$

$$\begin{aligned} u' &= 4\sin^3 5x \cdot (\sin 5x)' = 4\sin^3 5x \cdot \cos 5x \cdot (5x)' = \\ &= 20\sin^3 5x \cos 5x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{(tg3x+18)\ln 7} \cdot (tg3x + 18)' = \frac{1}{(tg3x+18)\ln 7} \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot (3x)' = \\ &= \frac{3}{\cos^2 3x(tg3x+18)\ln 7}. \end{aligned}$$

Остаточно маємо:

$$y' = 20\sin^3 5x \cos 5x \cdot \log_7(tg3x + 18) + \frac{3\sin^4 5x}{\cos^2 3x(tg3x+18)\ln 7}.$$

Приклад 3.7. Знайти похідну функції $y = \frac{5^{\arccctg 8x^3}}{\ln^2(\cos 9x)}$.

Розв'язання. Функція представлена у вигляді частки. Скористаємося формулою (3.6): $u = 5^{\arccctg 8x^3}$; $v = \ln^2(\cos 9x)$.

$$\begin{aligned} u' &= 5^{\arccctg 8x^3} \cdot \ln 5 \cdot (\arccctg 8x^3)' = \\ &= 5^{\arccctg 8x^3} \cdot \ln 5 \cdot \left(-\frac{1}{1+(8x^3)^2}\right) \cdot (8x^3)' = \\ &= -\frac{5^{\arccctg 8x^3} \cdot \ln 5 \cdot 24x^2}{1+64x^6}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v' &= 2\ln(\cos 9x) \cdot (\ln(\cos 9x))' = 2\ln(\cos 9x) \cdot \frac{1}{\cos 9x} \cdot (\cos 9x)' = \\ &= 2\ln(\cos 9x) \cdot \frac{1}{\cos 9x} \cdot (-\sin 9x) \cdot (9x)' = -18\ln(\cos 9x) \cdot tg 9x. \end{aligned}$$

Остаточно маємо:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-\frac{5^{\arccctg 8x^3} \cdot \ln 5 \cdot 24x^2}{1+64x^6} \ln^2(\cos 9x) - 5^{\arccctg 8x^3} \cdot (-18\ln(\cos 9x) \cdot tg 9x)}{(\ln^2(\cos 9x))^2} = \\ &= \frac{6 \cdot 5^{\arccctg 8x^3} \cdot \ln(\cos 9x) (3tg 9x \cdot (1+64x^6) - 4x^2 \ln 5 \cdot \ln(\cos 9x))}{\ln^4(\cos 9x)} = \\ &= \frac{6 \cdot 5^{\arccctg 8x^3} (3tg 9x \cdot (1+64x^6) - 4x^2 \ln 5 \cdot \ln(\cos 9x))}{\ln^3(\cos 9x)}. \end{aligned}$$

3.1.5 Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ у деякому інтервалі незалежної змінної x . Похідна від отриманої функції (якщо вона існує) називається похідною другого порядку або другою похідною від функції і позначається $f''(x)$.

За визначенням похідної

$$f''(x) = [f'(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Отже, якщо існує ця границя, то існує і друга похідна функції $y = f(x)$.

Саме так визначається і похідна третього порядку (як похідна від другої похідної) і так далі. Тому можемо дати визначення.

Визначення 3.2. Похідною n -го порядку $f^{(n)}(x)$ називається похідна від похідної $(n - 1)$ -го порядку

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}. \quad (3.9)$$

Похідні вищих порядків мають велике прикладне значення для визначення фундаментальних понять математики, фізики тощо. Так, наприклад, згадаємо, що поняття похідної ми вводили розв'язуючи задачу про швидкість руху матеріальної точки. Похідна ж другого порядку характеризує швидкість зміни швидкості, або прискорення функції. Зауважимо, що надалі ми ще скористаємося похідними вищих порядків для дослідження функцій.

Приклад 3.8. Знайти третю похідну функції $y = x^3 \arctg x$ і обчислити її значення у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Згідно з визначенням, нам необхідно поступово знайти похідні першого, другого (як похідну від

першої похідної) і третього (як похідну від другої похідної) порядку:

$$\begin{aligned}
 y' &= 3x^2 \cdot \operatorname{arctg}x + x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} = 3x^2 \cdot \operatorname{arctg}x + \frac{x^3}{1+x^2}; \\
 y'' &= (y')' = 6x \cdot \operatorname{arctg}x + 3x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{3x^2(1+x^2) - x^3 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \\
 &= 6x \cdot \operatorname{arctg}x + \frac{3x^2}{1+x^2} + \frac{3x^2 + 3x^4 - 2x^4}{(1+x^2)^2} = \\
 &= 6x \cdot \operatorname{arctg}x + \frac{3x^2 + 3x^4 + 3x^2 + x^4}{(1+x^2)^2} = 6x \cdot \operatorname{arctg}x + \frac{4x^4 + 6x^2}{(1+x^2)^2}; \\
 y''' &= (y'')' = 6 \cdot \operatorname{arctg}x + 6x \cdot \frac{1}{1+x^2} + \\
 &+ \frac{(16x^3 + 12x)(1+x^2)^2 - (4x^4 + 6x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \\
 &= 6 \cdot \operatorname{arctg}x + \frac{6x}{1+x^2} + \frac{4x(1+x^2)[(4x^2+3)(1+x^2) - (4x^4+6x^2)]}{(1+x^2)^4} = \\
 &= 6\operatorname{arctg}x + \frac{6x}{1+x^2} + \frac{4x(4x^2+3+4x^4+3x^2-4x^4-6x^2)}{(1+x^2)^3} = \\
 &= 6\operatorname{arctg}x + \frac{6x(1+x^2)^2 + 4x(x^2+3)}{(1+x^2)^3} = \\
 &= 6\operatorname{arctg}x + \frac{2x(3x^4+8x^2+9)}{(1+x^2)^3}.
 \end{aligned}$$

Обчислимо значення отриманої функції у точці x_0 :

$$y'''(x_0) = y'''(0) = 0.$$

3.1.6 Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна і диференційована при певних значеннях незалежного аргументу:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Визначення 3.3. Головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту незалежної змінної, називається *диференціалом функції*:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Приріст Δx незалежної змінної називається її **диференціалом** dx :

$$\Delta x = dx.$$

Отже, остаточно маємо:

Диференціал функції дорівнює її похідної, помноженій на диференціал незалежної змінної:

$$\boxed{dy = f'(x)dx}. \quad (3.10)$$

Бачимо, що якщо відома похідна, легко знайти диференціал, та навпаки, якщо відомий диференціал, відразу знаходимо похідну. Тому дії знаходження похідної та диференціала мають спільну назву – **диференціювання**.

3.2 Граничний аналіз економічних процесів

Застосування похідної при розв'язанні економічних задач дозволяє отримувати граничні характеристики економічних об'єктів та процесів, таких як, наприклад, гранична виручка, корисність, продуктивність тощо. Ці граничні характеристики визначають швидкість зміни економічного об'єкта або процесу.

Нехай витрати виробництва y будемо розглядати як функцію продукції, x , що випускається, тобто $y = C(x)$.

Визначення 3.4. Граничні витрати виробництва, які характеризують приріст змінних затрат на виробництво додаткової одиниці продукції – це похідна від функції продукції, що випускається:

$$y' = C'(x). \quad (3.11)$$

Середні витрати є витратами на випуск одиниці продукції:

$$y_1 = \frac{c(x)}{x}. \quad (3.12)$$

Нехай функція $u(t)$ описує виробництво продукції y за час t .

Визначення 3.5. Похідна від об'єму виробленої продукції за часом $u'(t_0)$ є **продуктивність праці** в момент часу t_0 .

Введемо поняття функцій витрат та збереження. Нехай x – національний дохід, $C(x)$ – функція споживання (частина доходу, що споживається), а $S(x)$ – функція збереження (частина доходу, що зберігається), тоді

$$x = C(x) + S(x). \quad (3.13)$$

Диференціюємо обидві частини (3.13), маємо

$$\frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx} = 1 \quad (3.14)$$

де $\frac{dC}{dx}$ – гранична прихильність до споживання;

$\frac{dS}{dx}$ – гранична прихильність до збереження.

Визначення 3.6. Еластичність – це міра реагування однієї змінної величини на зміну другої. Еластичність функції наближено вказує, на скільки відсотків зміниться одна змінна величина в результаті зміни іншої на 1 %.

Еластичність функції визначають за формулою:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'_x \quad \text{або} \quad E_x(y) = x \cdot T_y, \quad (3.15)$$

де $T_y = (\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'_x$ – **відносна швидкість зміни (темп)** функції.

Поняття еластичності функції застосовують при аналізі попиту і пропозиції від ціни товару (**цінова еластичність**). Вона характеризує реакцію попиту або пропозиції на зміну ціни

і визначає, на скільки відсотків наближено зміниться попит або пропозиція при зміні ціни на 1 %.

Якщо еластичність попиту $|E_x(y)| > 1$, то попит є **еластичним**, якщо $|E_x(y)| = 1$ – **нейтральним**, а якщо $|E_x(y)| < 1$ – **нееластичним** відносно ціни.

Приклад 3.9. Функція витрат виробництва продукції деякої фірми має вигляд $y = 1,2x^3 + 0,3x^2 - 4x + 120$ (грошових одиниць). Знайти середні та граничні витрати виробництва і обчислити їх значення при $x = 20$.

Розв'язання.

Середні витрати:

$$y_1(x) = \frac{C(x)}{x} = 1,2x^2 + 0,3x - 4 + \frac{120}{x};$$

$$y_1(20) = 1,2 \cdot 400 + 0,3 \cdot 20 - 4 + \frac{120}{20} = 488.$$

Граничні витрати:

$$y'(x) = C'(x) = 3,6x^2 + 0,6x - 4;$$

$$y'(20) = 3,6 \cdot 400 + 0,6 \cdot 20 - 4 = 1\,448.$$

З отриманих результатів можемо зробити висновок, що на даному рівні виробництва (кількості продукції, що випускається) середні витрати на виробництво однієї одиниці продукції складають 488 грошових одиниць, а збільшення об'єму на одну одиницю продукції буде коштувати фірмі 1 448 грошових одиниць.

Приклад 3.10. Об'єм виробництва побутової техніки деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 4t + 3\,250$ (одиниць), де t – календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року ($t = 0$); б) у першому кварталі ($t = 3$); в) в другому кварталі ($t = 6$); г) у третьому кварталі ($t = 9$); д) наприкінці року ($t = 12$).

Розв'язання:

Продуктивність праці – похідна від об'єму виробництва:

$$z(t) = u'(t) = 2t^2 - 5t + 4 \text{ (од./міс.)}$$

Швидкість зміни продуктивності праці – похідна від продуктивності праці:

$$v_z = z'(t) = 4t - 5 \text{ (од./міс.}^2\text{)}$$

Темп зміни продуктивності праці – логарифмічна похідна від продуктивності праці:

$$T_z = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{4t-5}{2t^2-5t+4} \text{ (од./міс.)}$$

а) $t = 0$:

$$z(0) = 4 \text{ (од./міс.)}; v_z(0) = -5 \text{ (од./міс.}^2\text{)}; T_z(0) = -\frac{5}{4} \text{ (од./міс.)};$$

б) $t = 3$:

$$z(3) = 18 - 15 + 4 = 7 \text{ (од./міс.)}; v_z(3) = 12 - 5 = 7 \text{ (од./міс.}^2\text{)}; T_z(3) = 1 \text{ (од./міс.)};$$

в) $t = 6$:

$$z(6) = 72 - 30 + 4 = 46 \text{ (од./міс.)}; v_z(6) = 24 - 5 = 19 \text{ (од./міс.}^2\text{)}; T_z(6) = \frac{19}{46} \text{ (од./міс.)};$$

г) $t = 9$:

$$z(9) = 162 - 45 + 4 = 121 \text{ (од./міс.)}; v_z(9) = 36 - 5 = 31 \text{ (од./міс.}^2\text{)}; T_z(9) = \frac{31}{121} \text{ (од./міс.)};$$

д) $t = 12$:

$$z(12) = 288 - 60 + 4 = 232 \text{ (од./міс.)}; v_z(12) = 48 - 5 = 43 \text{ (од./міс.}^2\text{)}; T_z(12) = \frac{43}{232} \text{ (од./міс.)}$$

3.3 Поведінка функції в інтервалі

3.3.1 Ознаки монотонності функції

Теорема 3.5. Для того щоб диференційована на інтервалі (a, b) функція $y = f(x)$ зростала (спадала) на цьому інтервалі, необхідно і достатньо, щоб в усіх точках цього інтервалу похідна функції була невід'ємною, тобто $f'(x) \geq 0$ (неодотатной $f'(x) \leq 0$).

3.3.2 Екстремуми функції

Особливу увагу потрібно приділити тим значенням незалежної змінної x , які відокремлюють інтервал зростання від інтервалу спадання або інтервал спадання від інтервалу зростання функції (рис. 3.1).

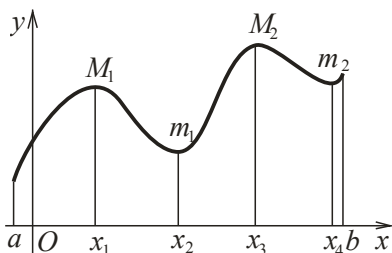


Рисунок 3.1 – Інтервали монотонності функції

Визначення 3.7. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 . Точка x_0 називається точкою **максимуму** функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0)$ є найбільше значення функції $y = f(x)$ в деякому околі точки x_0 (рис. 3.2, а).

Визначення 3.8. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 . Точка x_0 називається точкою **мінімуму** функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0)$ є найменше значення функції в деякому околі точки x_0 (рис. 3.2, б).

Точки максимуму та мінімуму називаються точками *екстремуму* функції.



Рисунок 3.2 – Екстремуми функції: а – максимум; б – мінімум

Теорема 3.6 (необхідна ознака екстремуму). Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції, то похідна функції в цій точці або дорівнює нулю: $f'(x_0) = 0$, або не існує.

Теорема 3.7 (достатня ознака існування екстремуму функції). Точка x_0 є точкою екстремуму функції $y = f(x)$, якщо при переході x через x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак на протилежний; при зміні знака $+$ на $-$ точка x_0 є точкою максимуму, при зміні $-$ на $+$ точка x_0 є точкою мінімуму.

3.3.3 Схема дослідження функції на монотонність та екстремуми

Вкажемо послідовність дій для з'ясування інтервалів монотонності та екстремумів функції як у кінцевому, так і в нескінченному інтервалі.

1. З'ясуємо область визначення функції (ОВФ).
2. Знайдемо критичні точки, похідна в яких дорівнює нулю $f'(x) = 0$ або не існує.
3. Нанесемо на числову вісь (або в таблицю) точки, похідна в яких дорівнює нулю або не існує, та точки, в яких функція не існує. Таким чином ми розіб'ємо числову вісь на часткові інтервали, в кожному з яких похідна не змінює знак. Ці інтервали є інтервалами монотонності функції.

4. З'ясуємо знак похідної в кожному з часткових інтервалів, для цього достатньо встановити знак у будь-якій точці обраного інтервалу. За знаком похідної визначаємо характер поведінки функції в кожному з інтервалів монотонності: якщо $f'(x) > 0$, то функція зростає, якщо $f'(x) < 0$ - спадає.

5. Прослідкуємо за зміною знака похідної при переході зліва направо через границі інтервалів монотонності функції і з'ясуємо, які з критичних точок є мінімумами, а які – максимумами. Може так статися, що деяка точка не є точкою екстремуму функції. Це може статися, якщо в двох суміжних інтервалах, які поділяються вказаною критичною точкою, похідна має однаковий знак.

6. Підставимо у функцію $y = f(x)$ значення незалежної змінної, в яких ми встановили існування екстремуму і обчислимо екстремальні значення функції.

Приклад 3.11. Дослідити функцію $y = \frac{x^3}{x+1}$ на монотонність та екстремуми.

Розв'язання.

Встановимо область визначення функції (ОВФ):

$$x + 1 \neq 0; \quad x \neq -1, \text{ тобто } x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty).$$

Знайдемо похідну функції: $y' = \frac{3x^2(x+1) - x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}$.

Знайдемо критичні точки $y' = 0$; $\frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} = 0$; $x_1 = 0, x_2 = -\frac{3}{2}$.

З'ясуємо знак першої похідної в отриманих часткових інтервалах, встановимо характер поведінки функції. Результати досліджень зведемо у таку таблицю:

x	$(-\infty; -\frac{3}{2})$	$-\frac{3}{2}$	$(-\frac{3}{2}; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	+	0	-	не існує	-	0	+
y	зростає	$y_{max} = \frac{27}{4}$	спадає		спадає	$y_{min} = 0$	зростає

або на числову пряму (рис. 3.3):

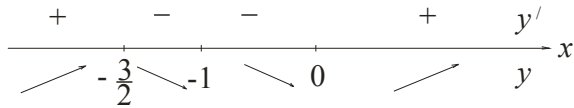


Рисунок 3.3 – Дослідження функції на монотонність та екстремуми

Отже, функція зростає на інтервалі $x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (0; +\infty)$, спадає на інтервалі $x \in (-\frac{3}{2}; -1) \cup (-1; 0)$. У точці $x = -\frac{3}{2}$ функція має максимум: $y_{max} = \frac{27}{4}$, а в точці $x = 0$ – мінімум: $y_{min} = 0$.

3.3.4 Опуклість та угнутість функцій. Точки перегину

Визначення 3.9. Дуга називається **опуклою**, якщо вона перетинається з будь-якою своєю січною не більш, ніж в двох точках.

Якщо дуга опукла, вона цілком розташована по одну сторону від дотичної, проведеної в будь-якій точці. Опукла дуга може обертатися як опуклістю вгору (рис. 3.4, а), або донизу (рис. 3.4, б).

Лінії, обернені опуклістю вгору, називаються **опуклими** (опукла дуга розташована під дотичною); лінії, обернені опуклістю донизу, називаються **угнутими** (опукла дуга розташована над дотичною).

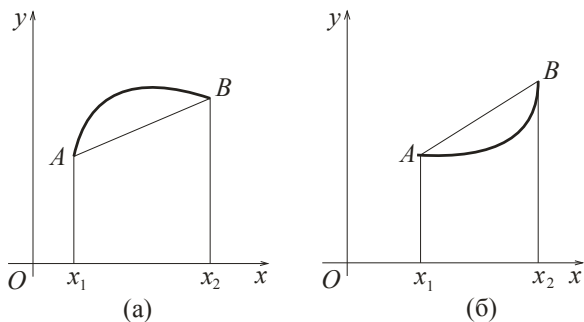


Рисунок 3.4 – Графіки опуклої (а) та угнутої (б) функції

Особливу роль грають точки, які відділяють інтервали опуклості і угнутості функції.

Визначення 3.10. Точкою перегину функції називається точка лінії, яка відділяє опуклу дугу від угнутої.

У точці перегину функції дотична перетинає лінію; в околі цієї точки лінія розташована по обидві сторони від дотичної.

З'ясуємо ознаки опуклості та угнутості функції та умови існування точок перегину.

Теорема 3.8. Для того щоб двічі диференційована на інтервалі (a, b) функція $y = f(x)$ була опукла (угнута) на цьому інтервалі, необхідно і достатньо, щоб в усіх точках цього інтервалу друга похідна функції була від'ємною, тобто $f''(x) \geq 0$ (додатною $f''(x) \leq 0$).

Теорема 3.9 (необхідна умова існування точок перегину). Якщо в точці x_0 перегину функції $y = f(x)$ існує друга похідна, то вона дорівнює нулю: $f''(x_0) = 0$.

Теорема 3.10 (достатня умова існування точок перегину). Точка (x_0, y_0) (якщо в цій точці виконується необхідна умова) є точкою перегину лінії $y = f(x)$, якщо друга похідна функції $f''(x)$ змінює знак при переході x через x_0 .

3.3.5 Схема дослідження функції на опуклість, угнутість і точки перегину

Вкажемо послідовність дій для з'ясування інтервалів опуклості, угнутості і точок перегину.

1. З'ясуємо область визначення функції (ОВФ).
2. Знайдемо критичні точки, тобто точки, друга похідна в яких дорівнює нулю $f''(x) = 0$ або не існує.
3. Нанесемо на числову вісь (або в таблицю) критичні точки та точки, в яких функція не існує. Таким чином ми розіб'ємо числову вісь на часткові інтервали, в кожному з яких друга похідна не змінює знак. Ці інтервали є інтервалами опуклості або угнутості функції.
4. З'ясуємо знак другої похідної в кожному з часткових інтервалів, для чого достатньо встановити знак у будь-якій точці обраного інтервалу. За знаком другої похідної визначаємо характер поведінки функції в кожному з інтервалів: якщо $f''(x) > 0$, то функція угнута, якщо $f''(x) < 0$ – опукла.
5. Простежимо за зміною знака другої похідної при переході через границі інтервалів опуклості й угнутості функції та з'ясуємо, які з критичних точок є точками перегину функції. Може так статися, що деяка критична точка не є точкою перегину функції. Це може статися, якщо в двох суміжних інтервалах, які поділяються вказаною критичною точкою, друга похідна має однаковий знак.
6. Підставимо у функцію $y = f(x)$ значення незалежної змінної, в яких ми встановили існування точок перегину й обчислимо їх ординати.

Приклад 3.12. Дослідити функцію на опуклість, угнутість і знайти точки перегину функції $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.

Розв'язання. ОВФ: $x \in R$.

Знайдемо першу та другу похідні функції:

$$y' = 4x^3 - 36x^2 + 96x; \quad y'' = 12x^2 - 72x + 96.$$

Знайдемо критичні точки:

$$y'' = 0; \quad 12x^2 - 72x + 96 = 0 \mid : 12.$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0; \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Винесемо результати досліджень або в таку таблицю

x	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y''	+	0	-	0	+
y	угнута	$y_{т.п.} = 62$	опукла	$y_{т.п.} = 206$	угнута

або на числову вісь (рис. 3.5):

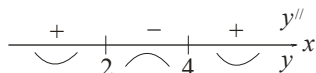


Рисунок 3.5 – Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину

Отже, функція опукла на інтервалі $x \in (2; 4)$, угнута на інтервалі $x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$. У точках $x = 2$ і $x = 4$ функція має перегин.

3.3.6 Асимптоти функції

Визначення 3.11. Пряма лінія A називається **асимптотою** лінії L , якщо відстань від точки лінії L до прямої A прямує до нуля при нескінченному віддаленні цієї точки від початку координат.

Можливі випадки існування **вертикальної** та **похилої** асимптот. Розглянемо кожен із них.

Нехай лінія $y = f(x)$ має **вертикальну асимптоту**. Її рівняння буде $x = x_0$, звідси, згідно з визначенням асимптоти обов'язково виконується умова $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$.

Отже, якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad (3.16)$$

то лінія $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту

$$x = x_0. \quad (3.17)$$

Взаємне розташування нескінченної вітки функції та її вертикальної асимптоти можна з'ясувати дослідженням знака нескінченності, до якої прямує $f(x)$, коли x прямує до x_0 ліворуч або праворуч. Можливі варіанти розташування вертикальної асимптоти і графіка функції зображені на рисунку 3.6.

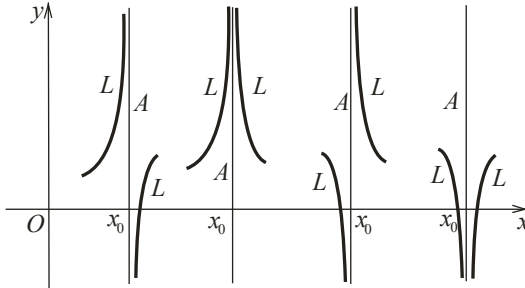


Рисунок 3.6 – Вертикальні асимптоти функції

Нехай лінія $y = f(x)$ має *похилу асимптоту*. Рівнянням такої асимптоти буде $y = kx + b$. За визначенням асимптоти відстань MN_1 точки M на лінії L від асимптоти A (см. рис. 3.7) прямує до нуля при $x \rightarrow \infty$. Розглянемо замість відстані MN_1 відстань MN , тобто різницю між ординатами точок M і N , які мають ту саму абсцису. Зрозуміло, що ці відстані одночасно прямують до нуля при $x \rightarrow \infty$.

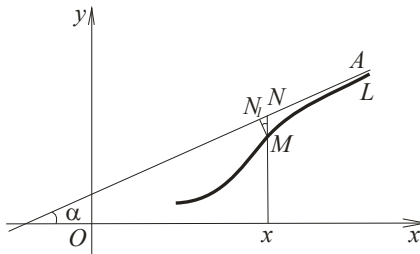


Рисунок 3.7 – Похила асимптота функції

Ордината точки M дорівнює значенню функції $f(x)$, а ордината точки N – значенню лінійної функції $y = kx + b$.

Звідси

$$MN = [f(x) - (kx + b)].$$

З цього виходить, що якщо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$$

то лінія $y = f(x)$ має асимптоту $y = kx + b$, тобто знаходження похилої асимптоти зводиться до знаходження таких чисел k і b , що

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - b] = 0. \quad (3.18)$$

звідси справедливо, що

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ – нескінченно мала при $x \rightarrow \infty$. Поділимо обидві частини рівності на x і перейдемо до границі при $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right).$$

З $\frac{b}{x} \rightarrow 0$ і $\frac{\alpha(x)}{x} \rightarrow 0$ виходить, що

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k. \quad (3.19)$$

Отже, якщо існує така кінцева границя (3.19), то існує і похила асимптота.

Знайдемо b з (3.18):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b. \quad (3.20)$$

Якщо існують кінцеві границі (4.51), (4.52), то лінія $y = f(x)$ має похилу асимптоту

$$y = kx + b. \quad (3.21)$$

Зауваження. Якщо $k = 0$, то похила асимптота перетворюється в горизонтальну:

$$y = b, \quad \text{де} \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x). \quad (3.22)$$

Приклад 3.13. Знайти асимптоти функції $y = \frac{e^{x-5}}{2x+3}$.

Розв'язання: ОВФ: $2x + 3 \neq 0$; $x \neq -\frac{3}{2}$;

$$x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

Знайдемо вертикальну асимптоту. Візьмемо точку розриву функції $x = -\frac{3}{2}$ і перевіримо виконання умови (3.16):

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{e^{x-5}}{2x+3} = \infty.$$

Отже, пряма $x = -\frac{3}{2}$ є вертикальною асимптотою функції.

Знайдемо похилу асимптоту. Для цього обчислимо границі (3.19), (3.20) при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^{x-5}}{2x+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x-5}}{2x^2+3x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x-5}}{4x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x-5}}{4} = \infty; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^{x-5}}{2x+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-5}}{2x^2+3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(2x^2+3x)e^{-(x-5)}} = \frac{1}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Зауважимо, що обчислюючи границю при $x \rightarrow \infty$ ми двічі скористалися правилом Лопітала, щоб уникнути невизначеності. Разом із тим кінцевої границі не отримали, тому при $x \rightarrow \infty$ похилої асимптоти не існує. При $x \rightarrow -\infty$ невизначеності не виникло; замість обчислення $e^{-\infty}$, ми перемістили експоненту в знаменник і отримали кінцеву границю $k = 0$. А цей випадок відповідає горизонтальній асимптоті. Обчислимо b при $x \rightarrow -\infty$:

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-5}}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(2x+3)e^{-(x-5)}} =$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0.$$

Отже, при $x \rightarrow -\infty$ існує горизонтальна асимптота $y = 0$.

3.3.7 Загальна схема дослідження функції

Спробуємо об'єднати попередньо отримані знання для дослідження функції та побудови її графіка. Пропонуємо таку схему:

1. **Область визначення функції (ОВФ).**
2. **Точки перетину з осями координат.** Нагадаємо, що з віссю Ox лінія перетинається, якщо $y = 0$; а з віссю Oy , якщо $x = 0$.
3. **Інтервали знакопостійності.** На числовій осі необхідно відзначити точки перетину з віссю Ox і точки, у яких функція не існує (ОВФ). Обчислимо знак функції в кожному з отриманих інтервалів. Там, де $y > 0$ графік функції розташовано в верхній напівплощині, де $y < 0$ – у нижній.
4. **Парність (непарність) функції.** Нагадаємо, що функція парна, якщо виконується умова $y(-x) = y(x)$; непарна – якщо $y(-x) = -y(x)$. Якщо не виконується ні одна з цих умов, функція загального положення. Ця інформація дуже корисна при побудові графіка функції: графік парної функції

симетричний відносно осі ординат, а графік непарної функції – відносно початку координат.

5. **Періодичність.** Якщо функція періодична, то $y(x + T) = y(x)$, де $T \neq 0$ – період функції.

6. **Дослідження функції на монотонність та екстремуми** (дослідження за допомогою першої похідної). Схема цього дослідження наведена в п. 4.4.3.

7. **Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину** (дослідження за допомогою другої похідної). Схема цього дослідження наведена в п. 4.4.6.

8. **Асимптоти функції.** См. п. 4.4.7.

9. **Графік функції.** Графік функції будується за результатами попередніх досліджень. Під час побудови нас цікавить поведінка функції на інтервалах і у критичних точках. Через те графік, який ми отримуємо, має якісний характер.

Приклад 3.14. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ і побудувати її графік.

Розв'язання. Проведемо дослідження за запропонованою схемою.

1. ОВФ: $x^2 - 4 \neq 0; \quad x \neq \pm 2; \quad x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

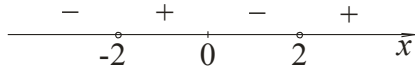
2. Знайдемо точки перетину з осями координат:

Ox : $y = 0; \quad \frac{x^3}{x^2-4} = 0; \quad x = 0$. Отже, функція перетинає вісь

Ox у початку координат $O(0,0)$.

Oy : $x = 0; \quad y = \frac{0}{0-4} = 0$. Функція перетинає вісь Oy теж у початку координат $O(0,0)$.

3. Нанесемо на числову вісь точки перетину графіка з віссю Ox та точки, у яких функція не існує; обчислимо знак функції на кожному інтервалі:



Отже, функція додатна на інтервалі $x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$ і від'ємна на інтервалі $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$.

4. Перевіримо функцію на парність:

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-4} = -\frac{x^3}{x^2-4} = -y(x).$$

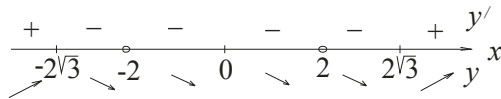
З цього виходить, що функція непарна.

5. Функція неперіодична.

6. Дослідимо функцію на монотонність на екстремуми. Знайдемо першу похідну та критичні точки:

$$y' = \frac{3x^2(x^2-4)-x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}; \quad y' = 0: \quad x_{1,2,3} = \begin{cases} 0; \\ -2\sqrt{3}; \\ 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Нанесемо критичні точки та точки, у яких функція не існує на числову вісь, обчислимо знак першої похідної в кожному з отриманих інтервалів:



Обчислимо значення функції в екстремальних точках:

$$y_{min} = y(2\sqrt{3}) = \frac{(2\sqrt{3})^3}{(2\sqrt{3})^2-4} = 3\sqrt{3};$$

$$y_{max} = y(-2\sqrt{3}) = \frac{(-2\sqrt{3})^3}{(-2\sqrt{3})^2-4} = -3\sqrt{3}.$$

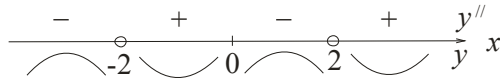
Функція зростає на інтервалах $x \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$, спадає на інтервалах $x \in (-2\sqrt{3}; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 2\sqrt{3})$. В точці $M_1(-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$ функція набуває максимуму, а в точці $M_2(2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$ – мінімуму.

7. Дослідимо функцію на опуклість, угнутість та знайдемо точки перегину. Знайдемо другу похідну, критичні точки та винесемо ці точки разом із точками розриву функції на числову вісь:

$$y'' = \frac{(4x^3 - 24x)(x^2 - 4)^2 - (x^4 - 12x^2)2(x^2 - 4)2x}{(x^2 - 4)^4} =$$

$$= \frac{4x(x^2 - 4)[(x^2 - 6x)(x^2 - 4) - (x^4 - 12x^2)]}{(x^2 - 4)^4} = \frac{4x(2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3},$$

$$y'' = 0; \quad \frac{4x(2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} = 0; \quad x = 0.$$



Знайдемо ординату точки перегину функції:

$$y_{\text{т.п.}} = y(0) = \frac{0}{0-4} = 0.$$

Функція опукла на інтервалах $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$ і угнута на інтервалах $x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$; $P(0; 0)$ - точка перегину функції.

8. Знайдемо асимптоти функції.

У функції є дві точки розриву $x = -2$ і $x = 2$. Перевіримо, чи будуть лінії $x = -2$ і $x = 2$ вертикальними асимптотами функції:

$$\lim_{x \rightarrow -2} y(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} y(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \infty.$$

Наприклад, лінії $x = -2$ і $x = 2$ є вертикальними асимптотами функції.

Знайдемо похилі асимптоти:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{3x^2 - 4} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x}{6x} = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - 1 \cdot x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{2x} = \frac{2}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Отже, похила асимптота задається рівнянням $y = x$.

9. Усі отриманні знання про поведження функції у графіку (рис. 3.8):

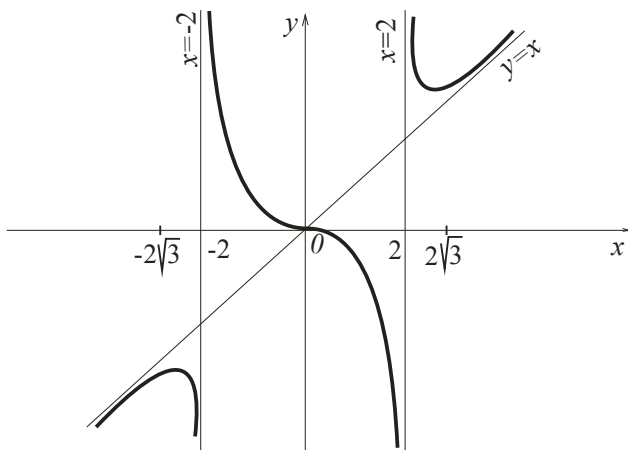


Рисунок 3.8 – Графік функції

3.4 Застосування похідної в задачах з економічним змістом

Поняття похідної може бути використано у розв’язанні прикладних задач економіки. Введемо основні поняття.

Нехай відома **функція витрат** $C(x)$, яка визначає необхідні витрати для виробництва x одиниць даного продукту. **Прибуток виробництва** $P(x)$ визначається як різниця між **доходом** $D(x)$ від виробництва x одиниць продукту і функцією витрат:

$$P(x) = D(x) - C(x). \quad (3.23)$$

Середні витрати $A(x)$ при виробництві x одиниць продукції визначаються як

$$A(x) = \frac{C(x)}{x}. \quad (3.24)$$

Граничні витрати $M(x)$ на виробництво x одиниць продукції згідно з поняттям похідної будемо визначати як

$$M(x) = C'(x). \quad (3.25)$$

Оптимальним значенням виробництва для виробника є те значення x одиниць продукції, при якому прибуток $P(x)$ є найбільшим. Тому для визначення величини оптимального значення виробництва, необхідно розв'язати задачу про найбільше значення функції.

Приклад 3.15. Виробнича фірма мінімізує середні витрати, які в результаті дорівнюють 50 грн/один. Чому при цьому дорівнюють граничні витрати?

Розв'язання. З (3.24) маємо: $C(x) = A(x) \cdot x = 50x$. За формулою (3.25) граничні витрати є похідна від функції витрат. Після її обчислення маємо:

$$M(x) = C'(x) = 50.$$

Отже, граничні витрати дорівнюють 50 грн./один.

Приклад 3.16. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 , за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 19$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 22 + 7x + x^3$.

Розв'язання. За формулою (3.23) прибуток визначається як $P(x) = D(x) - C(x) = 19x - 22 - 7x - x^3 = 12x - 22 - x^3$. Оптимальне значення випуску – значення, при якому прибуток є найбільшим. Розв'яжемо задачу про найбільше значення функції. Знайдемо похідну: $P'(x) = 12 - 3x^2$.

Розв'яжемо рівняння $P'(x) = 0$. Тобто $12 - 3x^2 = 0$. Критичні точки: $x_{1,2} = \pm 2$. За умовою задачі зрозуміло, що мають сенс лише додатні значення, отже $x_0 = 2$. У цій точці функція набуває максимуму (за результатами дослідження знаків похідної), тому оптимальне значення випуску дорівнює $x_0 = 2$.

Приклад 3.17. Доход від виробництва продукції з використанням x одиниць ресурсів дорівнює $D(x) = 80\sqrt{x}$. Вартість одиниці ресурсів складає 4 умовних одиниці. Яку кількість ресурсів треба придбати, щоб прибуток був найбільшим?

Розв'язання. За формулою (3.16) прибуток визначається як $P(x) = D(x) - C(x) = 80\sqrt{x} - 4x$.

Розв'яжемо задачу про найбільше значення функції. Для цього обчислимо похідну: $P'(x) = \frac{40}{\sqrt{x}} - 4$. Розв'яжемо рівняння $P'(x) = 0$. Тобто, $\frac{40}{\sqrt{x}} - 4 = \frac{40 - 4\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$, $\sqrt{x} = 10$. Критична точка: $x = 100$. Після з'ясування знаків похідної в кожному з часткових інтервалів, встановимо, що в цій точці функція набуває максимуму. Отже, необхідно придбати 100 одиниць ресурсів, щоб прибуток був найбільшим.

Приклад 3.18. На початковому етапі виробництва фірма мінімізує середні витрати, при цьому функція витрат має вигляд $C(x) = 10 + 2x + \frac{5}{2}x^2$. Подалі ціна на одиницю товару встановлюється на рівні $p = 37$. На скільки одиниць товару фірмі потрібно збільшити виробництво? На скільки при цьому збільшаться середні витрати?

Розв'язання. За формулою (3.24) функція середніх витрат виробництва має вигляд $A(x) = \frac{10}{x} + 2 + \frac{5}{2}x$. Знайдемо мінімальне значення цієї функції:

$$A'(x) = -\frac{10}{x^2} + \frac{5}{2}; \quad A'(x) = 0; \quad \frac{-20x^2 + 5}{2x^2} = 0;$$

$$x^2 = 4; \quad x = \pm 2. \text{ Отже } x_0 = 2.$$

$$\text{Граничні витрати (3.25): } M(x) = C'(x) = 2 + 5x.$$

Відомо, що прибуток (3.23) визначається як:

$$P(x) = D(x) - C(x) = 37x - C(x).$$

Продиференціюємо такий вираз:

$$P'(x) = 37 - C'(x) = 37 - M(x) = 37 - 2 - 5x = 35 - 5x.$$

Знайдемо критичну точку:

$$P'(x) = 0; \quad 35 - 5x = 0; \quad x = 7.$$

Отже, оптимальне значення кількості товару $x_{\text{опт.}} = 7$. З цього прямує, що необхідно збільшити виробництво на 5 одиниць ($\Delta x = x_{\text{опт.}} - x_0$).

З'ясуємо середні витрати виробництво

$$A(2) = \frac{10+4+10}{2} = 12;$$

$$A(7) = \frac{10+14+\frac{5}{2} \cdot 49}{7} = \frac{293}{14};$$

$$\Delta A = \frac{293}{14} - 12 = \frac{125}{14}.$$

Отже, середні витрати зміняться на $\frac{125}{14}$.

Розділ 4 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

4.1 Первісна

У попередніх розділах, коли вивчали диференціювання, розв'язували таку задачу: як знайти похідну даної функції? Зараз поставимо перед собою обернену задачу: як знайти функцію, якщо відома її похідна?

Визначення 4.1. Первісною від функції $f(x)$ називається функція $F(x)$, похідна від якої дорівнює даній функції:

$$F'(x) = f(x). \quad (4.1)$$

Приклад 4.1. Знайти первісну функції $f(x) = x^3$.

Розв'язання. За визначенням 4.1 функція $\frac{1}{4}x^4$ є первісною, оскільки $(\frac{1}{4}x^4)' = x^3$. Але й $\frac{1}{4}x^4 - 17$ і $\frac{1}{4}x^4 + 5$ теж є первісними, тому що $(\frac{1}{4}x^4 - 17)' = x^3$; $(\frac{1}{4}x^4 + 5)' = x^3$.

Теорема. Будь-яка неперервна функція має нескінченну множину первісних, до того ж будь-які дві з них відрізняються на сталу величину.

Визначення 4.2. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x) + C$ називається **невизначеним інтегралом** від функції $f(x)$ і позначається як $\int f(x)dx$. Функцію $f(x)$ називають **підінтегральною функцією**, вираз $f(x)dx$ – **підінтегральним виразом**, знак \int – **знаком інтегралу**.

Визначення 4.3. Знаходження всіх первісних функції називається **невизначеним інтегруванням** (далі просто **інтегруванням**) цієї функції.

За визначенням 4.1 маємо **основні властивості невизначеного інтегралу**:

- $(\int f(x)dx)' = f(x)$;
- $d \int f(x)dx = f(x)dx$;
- $\int f'(x)dx = f(x) + C$;
- $\int df(x) = f(x) + C$.

4.2 Таблиця невизначених інтегралів. Простіші прийоми інтегрування

У таблиці 4.1 безпосередньо зведені формули, необхідні для інтегрування. Ці формули випливають з формул

диференціювання основних елементарних функцій. Будь-яка з наведених формул легко перевіряється диференціюванням.

Зауваження. У таблиці 4.1 буква u може позначати як незалежну змінну x , так і неперервну диференційовану функцію $u = u(x)$ аргументу x . Справедливість цього зауваження ми доведемо пізніше.

Теорема 4.1. Інтеграл від алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі інтегралів:

$$\int (u + v)dx = \int udx + \int vdx. \quad (4.2)$$

Теорема 4.2. Константу можна виносити за знак інтегралу:

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx. \quad (4.3)$$

Теорема 4.3 (про інваріантність формул інтегрування). Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд, якщо замінити незалежну змінну будь-якою диференційованою функцією від незалежної змінної, тобто якщо

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{то} \quad \int f(u)du = F(u) + C.$$

Теорема 4.4. Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, то справедливі формули:

$$\text{а) } \int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C; \quad (4.4)$$

$$\text{б) } \int f(x + b)dx = F(x + b) + C; \quad (4.5)$$

$$\text{в) } \int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C. \quad (4.6)$$

Таблиця 4.1 - Основна таблиця інтегралів

1	$\int du = u + C$
2	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
3	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
4	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$
5	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
6	$\int e^u du = e^u + C$
7	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$
8	$\int \cos u = \sin u + C$
9	$\int \sin u = -\cos u + C$
10	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$
11	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$
12	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$
13	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$
14	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C$
15	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C$

Проілюструємо застосування наведених теорем при безпосередньому інтегруванні.

Приклад 4.2. Знайти невизначений інтеграл

$$\int (3x^5 + 8)(6x - 7x^3) dx.$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int (3x^5 + 8)(6x - 7x^3) dx &= \int (18x^6 + 48x - 21x^8 - 56x^3) dx = \\ &= 18 \int x^6 dx + 48 \int x dx - 21 \int x^8 dx - 56 \int x^3 dx = \\ &= \frac{18}{7} x^7 + 24x^2 - \frac{7}{3} x^9 - 14x^4 + C. \end{aligned}$$

4.3 Метод заміни змінної

Познайомимося з найпоширенішим методом інтегрування – *методом заміни змінної*. Диференціювати елементарні функції за допомогою таблиці інтегралів не складно. Для вдалого використання результатів теореми, вираженого формулами (4.4) – (4.6) необхідні великі навички, щоб швидко звести інтеграл до табличного. Але й ці формули не охоплюють усіх можливих ситуацій. Спробуємо навчитися встановлювати підстановку (в кожному окремому випадку), за допомогою якої інтеграл може бути зведений до табличного. Допоможе нам в цьому така теорема.

Теорема 4.5. Якщо функція $f(x)$ має первісну $F(x)$

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

а функція $x = \varphi(t)$, то функція $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ має первісну

$$F(\varphi(t)) \text{ і } \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int f(x) dx|_{x=\varphi(t)}. \quad (4.7)$$

Приклад 4.3. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \sin(4x - 3) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання: } \int \sin(4x - 3) dx &= \left[\begin{array}{l} u = 4x - 3 \\ du = 4dx \\ dx = \frac{1}{4} du \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \int \sin u du = -\frac{1}{4} \cos u + C = -\frac{1}{4} \cos(4x - 3) + C. \end{aligned}$$

Зауважимо, що розв'язати цю задачу можна і за формулою (4.6), а саме

$$\int \sin(4x - 3) dx = -\frac{1}{4} \cos(4x - 3) + C,$$

тобто, враховуючи лінійність аргументу, за знак визначеного інтегралу виноситься коефіцієнт, обернений до коефіцієнту при x .

Приклад 4.4. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{7x^2+4}$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання: } \int \frac{dx}{7x^2+4} &= \left[\begin{array}{l} u^2 = 7x^2 \\ u = \sqrt{7}x \\ du = \sqrt{7}dx \\ dx = \frac{1}{\sqrt{7}} du \end{array} \right] = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{du}{u^2+4} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} + C = \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}x}{2} + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.5. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-3x^2}}$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання: } \int \frac{xdx}{\sqrt{8-3x^2}} &= \left[\begin{array}{l} u = 8 - 3x^2 \\ du = -6xdx \\ xdx = -\frac{1}{6} du \end{array} \right] = -\frac{1}{6} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \\ &= -\frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{u} + C = -\frac{1}{3} \sqrt{8 - 3x^2} + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.6. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2} \arcsin 5x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Розв'язання: } \int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2} \arccos^4 5x} &= \left[\begin{array}{l} u = \arccos 5x \\ du = -\frac{5dx}{\sqrt{1-25x^2}} \\ \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}} = -\frac{1}{5} du \end{array} \right] = \\
 &= -\frac{1}{5} \int \frac{du}{u^4} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{u^{-3}}{(-3)} + C = \frac{1}{15 \arccos^3 5x} + C.
 \end{aligned}$$

4.4 Інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен

4.4.1 Інтеграл, які мають вигляд $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ або $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

При інтегруванні запропонованих функцій за допомогою формул (12–15) таблиці 4.1 нам заважає доданок, який містить першу степінь незалежної змінної. Зрозуміло, що для того, щоб скористатися основною таблицею інтегралів, нам необхідно виділити повний квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \pm k^2,$$

де $k^2 = c - \frac{b^2}{4a}$. Знак плюс або мінус береться залежно від того, чи буде другий доданок додатним або від'ємним. Зробимо заміну змінної $t = \sqrt{|a|} \left(x + \frac{b}{2a} \right)$. За формулою (4.7) отримаємо

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dt}{\pm t^2 \pm k^2} \quad \text{або} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int \frac{dt}{\sqrt{\pm t^2 \pm k^2}}.$$

Зауважимо, що перед t^2 стоїть знак плюс, якщо $a > 0$, і знак мінус, якщо $a < 0$. Отримані інтегралі є табличними (формули (12–15) таблиці 4.1). Після інтегрування повертаємося до початкової змінної.

Не для всіх читачів процедура виділення повного квадрату є простою, а запам'ятовувати отриману формулу не

варто. При розв'язанні наступних прикладів, ми приведемо простіший прийом виділення повного квадрату. Для користування їм потрібно лише згадати добре відомі формули «квадрат суми» або «квадрат різниці»:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$$

Приклад 4.7. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 15}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у виразі, який стоїть у знаменнику підінтегральної функції. Для цього підпишемо під квадратним тричленом (доданок під доданком) формулу «квадрат різниці» (обираємо формулу за знаком доданку з першим степенем незалежної змінної). Поставимо у відповідність перші два доданки, звідки знайдемо a і b . Додамо та віднімемо в початковому виразі величину, яка дорівнює b^2 (згідно з формулою). Отже, маємо:

$$x^2 - 6x + 15 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 15 = (x - 3)^2 + 6;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2;$$

$$\begin{bmatrix} a^2 = x^2 & 2ab = 6x \\ a = x & 2xb = 6x \\ & b = 3 \end{bmatrix}.$$

Підставимо отриманий вираз у початковий інтеграл і скористаємося методом заміни змінної:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 15} &= \int \frac{dx}{(x - 3)^2 + 6} = \left[\begin{matrix} u = x - 3 \\ du = dx \end{matrix} \right] = \int \frac{du}{u^2 + 6} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{6}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{\sqrt{6}} + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.8. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}$.

Розв'язання: Виділимо повний квадрат у виразі, який стоїть під коренем в знаменнику підінтегральної функції. Для цього потрібно зробити деякі перетворення, а саме:

- переписати доданки в порядку спадання степеня незалежної змінної;

- винести за дужки знак мінус:

- виділити повний квадрат у виразі, який опинився у дужках, за допомогою формули «квадрат суми»;

- змінити знак кожного доданку отриманого виразу на протилежний.

Отже, маємо: $3 - 4x - x^2 = -(x^2 + 4x - 3) = 7 - (x + 2)^2$.

Підставимо отриманий вираз у початковий інтеграл і скористаємося методом заміни змінної:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{7-(x+2)^2}} = \left[\begin{array}{l} u = x + 2 \\ du = dx \end{array} \right] = \int \frac{du}{\sqrt{7-u^2}} = \\ &= \arcsin \frac{u}{\sqrt{7}} + C = \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{7}} + C. \end{aligned}$$

4.4.2 Інтеграл, які мають вигляд

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx \quad \text{або} \quad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

Розглянемо інтеграл більш загального вигляду. Заважимо, що в чисельнику розташовано многочлен першого порядку, а в знаменнику (або в підкореновому виразі знаменника) – многочлен другого порядку. За правилами диференціювання, похідна від многочлену другого порядку – многочлен першого порядку. Тобто за структурою чисельник підінтегрального виразу повторює диференціал знаменника (або підкоренового виразу знаменника), відрізнятися ці вирази можуть лише коефіцієнтами.

Приведемо методику інтегрування таких інтегралів на прикладі інтегралу $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$. Візьмо диференціал знаменника: $d(ax^2 + bx + c) = (2ax + b)dx$. Сформуємо в чисельнику диференціал знаменника. Для цього виконаємо тотожні перетворення чисельника:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx &= A \int \frac{x+\frac{B}{A}}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b-b+\frac{2aB}{A}}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax+b)+\left(\frac{2aB}{A}-b\right)}{ax^2+bx+c} dx. \end{aligned}$$

Отриманий інтеграл представимо у вигляді двох інтегралів:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c} dx + \frac{A\left(\frac{2aB}{A}-b\right)}{2a} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

перший з яких методом заміни змінної зводиться до інтегралу $\int \frac{du}{u}$ (формула 7 таблиці 4.1), а другий – до вже розглянутого вище інтегралу $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

Зауважимо, що інтеграли $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ знаходяться аналогічно. Різниця полягає лише у виборі формул інтегрування. Перший з отриманих інтегралів методом заміни змінної зводиться до інтегралу вигляду $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$ (формула 3 таблиці 4.1), а другий – до вже розглянутого вище інтегралу $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Приклад 4.9. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x-4}{x^2+10x-3} dx$.

Розв'язання. Оцінімо диференціал знаменника

$$d(x^2 + 10x - 3) = (2x + 10)dx.$$

Сформуємо в чисельнику диференціал знаменника. Для цього виконаємо у ньому тотожні перетворення:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-4}{x^2+10x-3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-8}{x^2+10x-3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+10-10-8}{x^2+10x-3} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+10}{x^2+10x-3} dx - \frac{18}{2} \int \frac{dx}{x^2+10x-3} = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Знайдемо отримані інтеграли:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 10}{x^2 + 10x - 3} dx = \left[u = x^2 + 10x - 3 \right] = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \\ = \frac{1}{2} \ln u + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 10x - 3| + C;$$

$$I_2 = -9 \int \frac{dx}{x^2 + 10x - 3} = -9 \int \frac{dx}{(x + 5)^2 - 28} = \left[u = x + 5 \right] = \\ = -9 \int \frac{du}{u^2 - 28} = -9 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{u - 2\sqrt{7}}{u + 2\sqrt{7}} \right| + C = -\frac{9}{4\sqrt{7}} \ln \left| \frac{x + 5 - 2\sqrt{7}}{x + 5 + 2\sqrt{7}} \right| + C.$$

Остаточо маємо:

$$\int \frac{x-4}{x^2+10x-3} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 10x - 3| - \frac{9}{4\sqrt{7}} \ln \left| \frac{x+5-2\sqrt{7}}{x+5+2\sqrt{7}} \right| + C.$$

4.5 Інтегрування раціональних дробів

Розглянемо методику інтегрування одного з найважливіших класів елементарних функцій – **раціональних функцій**. Будь-яка елементарна функція $R(x)$ може бути представлена у вигляді дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени: $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Нагадаємо, що якщо максимальний степінь чисельника менший за максимальний степінь знаменника ($m < n$), дріб називається **правильним**, якщо максимальний степінь чисельника більший або дорівнює максимальному степеню знаменника ($m \geq n$), дріб називається **неправильним**. Якщо $m \geq n$, то виконавши операцію ділення многочленів, будь-який неправильний дріб може бути представлений у вигляді суми многочлену (ціла частина) і правильного дроби (отриманий многочлен – результат ділення; чисельник отриманого правильного дроби – залишок від ділення):

$$R(x) = N(x) + \frac{P_{n-1}(x)}{Q_n(x)}.$$

Нагадаємо читачеві процедуру ділення многочленів.

Приклад 4.10. Знайти цілу частину і залишок алгебраїчного дробу $\frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1}$.

Розв'язання: Поділимо чисельник на знаменник

$$\begin{array}{r} -x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1 \quad \Big| \quad x^2 + x + 1 \\ \underline{x^4 + x^3 + x^2} \\ -2x^3 + x^2 + x \\ \underline{2x^3 + 2x^2 + 2x} \\ -x^2 - x + 1 \\ \underline{-x^2 - x - 1} \\ -2. \end{array}$$

Отже, $N(x) = x^2 + 2x - 1$ – ціла частина, число (-2) – залишок.

Остаточно маємо: $\frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1} = x^2 + 2x - 1 - \frac{2}{x^2+x+1}$.

Інтегрування многочлену $N(x)$ – не складна процедура, проблема полягає в інтегруванні правильного раціонального дробу.

4.5.1 Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та різні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має дійсні різні корені:

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n). \quad (4.9)$$

У такому випадку раціональний дріб може бути розкладений на найпростіші дробі

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a_1} + \frac{B}{x-a_2} + \dots + \frac{C}{x-a_n}. \quad (4.10)$$

Інтеграл від такого дробу зводиться до

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A \int \frac{dx}{x-a_1} + B \int \frac{dx}{x-a_2} + \dots + C \int \frac{dx}{x-a_n} =$$

$$= A \ln|x - a_1| + B \ln|x - a_2| + \dots + C \ln|x - a_n|.$$

Приклад 4.11. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$.

Розв'язання. Раціональний дріб неправильний. Виділимо цілу частину:

$$-\frac{x^3 + 0x^2 + 0x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} \Big|_1^{x^3-5x^2+6x}$$

$$\frac{5x^2 - 6x + 1}{5x^2 - 6x + 1}.$$

Отже, початковий інтеграл набуває вигляду

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx = \int \left(1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}\right) dx = \int dx + \int \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} dx.$$

З'ясуємо корені знаменника:

$$x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 5x + 6) = x(x - 2)(x - 3).$$

Зрозуміло, що корені знаменника дійсні й різні: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$. Розкладемо раціональний дріб на суму елементарних дробів:

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти A, B, C . Для цього приведемо праву частину до спільного знаменника:

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)}.$$

Знаменники ліворуч та праворуч однакові, тому достатньо дорівняти чисельники:

$$5x^2 - 6x + 1 = A(x - 2)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(x - 2).$$

Взагалі для знаходження невідомих коефіцієнтів користуються методом невизначених коефіцієнтів, при якому дорівнюють коефіцієнти ліворуч та праворуч при однакових степенях x . До цього метода ми ще звернемося пізніше, а у випадку дійсних і різних коефіцієнтів знаменника набагато швидше знаходяться коефіцієнти при підстановці відомих коренів знаменника. Нехай x послідовно дорівнює 0, 2, 3. Маємо:

$$\begin{aligned} \underline{x = 0} &\Rightarrow 1 = 6A; & A &= \frac{1}{6}; \\ \underline{x = 2} &\Rightarrow 20 - 12 + 1 = -2B; & B &= -\frac{9}{2}; \\ \underline{x = 3} &\Rightarrow 45 - 18 + 1 = 3C; & C &= \frac{28}{3}. \end{aligned}$$

Початковий інтеграл дорівнює сумі чотирьох інтегралів з відповідними коефіцієнтами. Обчислимо останні:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx &= \int dx + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x} - \frac{9}{2} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{28}{3} \int \frac{dx}{x-3} = \\ &= x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x-2| + \frac{28}{3} \ln|x-3| + C. \end{aligned}$$

4.5.2 Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та серед яких є кратні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має дійсні корені, серед яких є кратні:

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_n)^{\alpha_n}. \quad (4.11)$$

У такому випадку раціональний дріб може бути розкладений на найпростіші дробі так:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{B}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \frac{C}{(x-a_1)^{\alpha_1-2}} + \dots + \frac{D}{x-a_1} + \dots + \frac{E}{x-a_n}. \quad (4.12)$$

Отже, зрозуміло, що кореню a_i кратності α_i відповідає α доданків; кожен наступний дріб має степінь на одиницю меншу від попереднього і так до першого. Інтегрування отриманих дробів виконується за формулами 2, 7 таблиці 4.1. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад 4.12. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{3x^2 + 30x - 25}{x^3 + 5x^2} dx.$$

Розв'язання: Раціональний дріб правильний. Знайдемо корені знаменника і розкладемо його на множники. Для цього винесемо спільний множник за дужки: $x^3 + 5x^2 = x^2(x + 5)$.

Отже, знаменник має корень $x = 0$ кратності 2; і корень $x = -5$ кратності 1.

$$\text{Розкладемо дріб на простіші: } \frac{3x^2 + 30x - 25}{x^3 + 5x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+5}.$$

Приведемо дробі до спільного знаменника і дорівняємо чисельники:

$$3x^2 + 30x - 25 = A(x + 5) + Bx(x + 5) + Cx^2.$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти. Для цього підставимо відомі нам корені до отриманої тотожності. Відомих нам різних коренів два, а невідомих коефіцієнтів – три. Розв'язати цю проблему можна за допомогою наступної «хитрощі»: підставимо у тотожність будь-яке число; отримаємо вираз, який містить всі коефіцієнти; підставимо вже відомі два коефіцієнти; знайдемо звідси невідомий третій:

$$\begin{aligned} \underline{x = 0} &\Rightarrow -25 = 5A; & A &= -5; \\ \underline{x = -5} &\Rightarrow 75 - 150 - 25 = 5C; & C &= -4; \\ \underline{x = 1} &\Rightarrow 3 + 30 - 25 = 6A + 6B + C; \\ &8 = -30 + 6B - 4; & B &= 7. \end{aligned}$$

Перепишемо початковий інтеграл у вигляді:

$$\int \frac{3x^2 + 30x - 25}{x^3 + 5x^2} dx = -5 \int \frac{dx}{x^2} + 7 \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{dx}{x+5} = \\ = \frac{5}{x} + 7\ln|x| - 4\ln|x+5| + C.$$

4.5.3 Інтегрування раціональних дробів, серед коренів знаменника якого є комплексні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$,
знаменник якого має комплексні різні корені:

$$Q(x) = (x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_sx + q_s). \quad (4.13)$$

У такому випадку раціональний дріб набуває вигляду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx+C}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{Dx+E}{x^2+p_sx+q_s}. \quad (4.14)$$

Обчисленню інтегралів такого вигляду ми приділили достатньо уваги у розділі 4.4. Тому відразу звернемося до прикладів.

Приклад 4.13. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{8x^2 - 22x + 35}{(x-4)(x^2+9)} dx.$$

Розв'язання. Раціональний дріб правильний. З'ясуємо корені знаменника. Знаменник має один дійсний корень $x = 4$ і два комплексних, які знаходяться з розв'язання рівняння $x^2 = -9$ (розв'язання таких рівнянь виходить за межі курсу, що вивчається). Тому при розкладанні раціонального дроби звернемося до формул (4.10) і (4.14):

$$\frac{8x^2 - 22x + 35}{(x-4)(x^2+9)} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx+C}{x^2+9}.$$

Приведемо дробі до спільного знаменника і дорівняємо чисельники:

$$8x^2 - 22x + 35 = A(x^2 + 9) + (Bx + C)(x - 4).$$

Лише один невідомий коефіцієнт ми можемо знайти за вивченим прийомом:

$$x = 4: \quad 128 - 88 + 35 = 25A; \quad A = 3.$$

Настав час познайомитися з методом невизначених коефіцієнтів. Розкриємо дужки у правій частині тотожності і дорівняємо коефіцієнти при однакових степенях ліворуч і праворуч, отримаємо систему з трьох рівнянь з трьома невідомими. Розв'язати її можна будь-яким методом, вивченим у розділі 1.3, а можна підставити знайдений коефіцієнт у перше і друге рівняння. Отже маємо

$$8x^2 - 22x + 35 = Ax^2 + 9A + Bx^2 + Cx - 4Bx - 4C;$$

$$\begin{array}{l} x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 8 = A + B \\ -22 = C - 4B \\ 35 = 9A - 4C \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} B = 8 - A = 8 - 3 = 5 \\ C = 4B - 22 = 20 - 22 = -2 \end{array}$$

Знайдемо інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{8x^2 - 22x + 35}{(x-4)(x^2+9)} dx &= 3 \int \frac{dx}{x-4} + \int \frac{5x-2}{x^2+9} dx = 3 \int \frac{dx}{x-4} + 5 \int \frac{xdx}{x^2+9} - \\ &- 2 \int \frac{dx}{x^2+9} = 3 \int \frac{dx}{x-4} + \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} - 2 \int \frac{dx}{x^2+9} = \\ &= 3 \ln|x-4| + \frac{5}{2} \ln|x^2+9| - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C. \end{aligned}$$

4.6 Інтегрування частинами

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ – неперервні диференційовані функції незалежної змінної. Диференціал їх добутку має вигляд

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Звідси $udv = d(uv) - vdu$.

Інтегруємо обидві частини отриманої рівності, маємо

$$\begin{aligned} \int udv &= \int d(uv) - \int vdu. \\ \text{або} \quad \int udv &= uv - \int vdu. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Сутність методу інтегрування частинами полягає в тому, що підінтегральний вираз $f(x)dx$ якось може бути представлений у вигляді добутку множників u і dv . Далі знаходимо v по відомому виразу dv шляхом інтегрування і потім беремо інтеграл $\int vdu$. Цей метод застосовують, якщо обидва ці інтеграли легко знаходяться, а заданий інтеграл безпосередньо знайти неможливо.

Метод інтегрування частинами надзвичайно важливий, він охоплює інтегрування великого класу функцій і має практичне застосування при розв'язанні прикладних задач.

Допоможемо читачеві зорієнтуватися у великому просторі запропонованих функцій за допомогою наступної підказки. Приведемо найпоширеніші ситуації, коли потрібно звертатися до метода інтегрування частинами. Але потрібно пам'ятати, що наведений перелік функцій ні в якому разі не охоплює всіх можливих підінтегральних виразів, а пропонує лише типові.

Отже, методом інтегрування частинами обчислюються інтеграли типу:

$$- \int P_n(x) \cdot \begin{matrix} \sin(ax + b) \\ \cos(ax + b) \\ \operatorname{tg}(ax + b) \\ \operatorname{ctg}(ax + b) \end{matrix} \cdot dx, \quad (u = P_n(x));$$

Зрозуміло, що береться одна з тригонометричних функцій.

$$\begin{aligned} - \int P_n(x) a^x dx, & \quad (u = P_n(x)); \\ - \int \log_a(ax + b) dx, & \quad (u = \log_a(ax + b)); \end{aligned}$$

- $\int P_n(x) \log_a(ax + b) dx; \quad (u = \log_a(ax + b));$
 $\arcsin(ax + b)$
- $\int \frac{\arccos(ax + b)}{\arctg(ax + b)} \cdot dx; \quad \left(u = \begin{pmatrix} \arcsin(ax + b) \\ \arccos(ax + b) \\ \arctg(ax + b) \\ \text{arcctg}(ax + b) \end{pmatrix} \right);$
 $\text{arcctg}(ax + b)$
- $\int P_n(x) \cdot \frac{\arcsin(ax + b)}{\arccos(ax + b)} \cdot dx; \quad \left(u = \begin{pmatrix} \arcsin(ax + b) \\ \arccos(ax + b) \\ \arctg(ax + b) \\ \text{arcctg}(ax + b) \end{pmatrix} \right);$
 $\text{arcctg}(ax + b)$
- і багато-багато інших...

Зауваження. Перший та другий тип інтегралів з даного переліку інтегрується частинами n разів; тобто кількість інтегрування частинами дорівнює степеню многочлена $P_n(x)$.

Приклад 4.14. Знайти невизначений інтеграл

$$\int (8x - 3)e^{5x} dx.$$

Розв'язання. За формулою (4.15) маємо

$$\begin{aligned} \int (8x - 3)e^{5x} dx &= \left[\begin{array}{ll} u = 8x - 3 & dv = e^{5x} dx \\ du = 8dx & v = \int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{5} (8x - 3)e^{5x} - \frac{8}{5} \int e^{5x} dx = \frac{1}{5} (8x - 3)e^{5x} - \frac{8}{25} e^{5x} + C = \\ &= \frac{1}{25} (40x - 15 - 8)e^{5x} + C = \frac{1}{25} (40x - 23)e^{5x} + C. \end{aligned}$$

Приклад 4.15. Знайти невизначений інтеграл

$$\int x^2 \cos 4x dx.$$

Розв'язання. Скористаємося формулою (4.15) і згадаємо зауваження. Маємо многочлен другого ступеня, отже інтегрувати частинами потрібно двічі:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos 4x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \quad dv = \cos 4x dx \\ du = 2x dx \quad v = \int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x \end{array} \right] = \\
&= \frac{1}{4} x^2 \sin 4x - \frac{1}{2} \int x \sin 4x dx = \left[\begin{array}{l} u = x \quad dv = \sin 4x dx \\ du = dx \quad v = -\frac{1}{4} \cos 4x \end{array} \right] = \\
&= \frac{1}{4} x^2 \sin 4x - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} x \cos 4x + \frac{1}{4} \int \cos 4x dx \right) = \\
&= \frac{1}{4} x^2 \sin 4x + \frac{1}{8} x \cos 4x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.
\end{aligned}$$

Приклад 4.16. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \operatorname{arctg}(x-1) dx.$$

Розв'язання. За формулою (4.15) маємо

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{arctg}(x-1) dx &= \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg}(x-1) \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \frac{dx}{x^2-2x+2} \quad v = x \end{array} \right] = \\
&= x \operatorname{arctg}(x-1) - \int \frac{x dx}{x^2-2x+2} = x \operatorname{arctg}(x-1) - I.
\end{aligned}$$

Отримали інтеграл того типу, який докладно розглянули у п. 4.4.2. Виконаємо потрібні перетворення:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2} \int \frac{(2x-2)+2dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-2)+2dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x+2} + \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \\
&= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2) + \operatorname{arctg}(x-1) + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Остаточно маємо: } \int \operatorname{arctg}(x-1) dx = \\
&= x \operatorname{arctg}(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2) - \operatorname{arctg}(x-1) + C.
\end{aligned}$$

Приклад 4.17. Знайти невизначений інтеграл

$$\int x \ln(2x + 3) dx.$$

Розв'язання. За формулою (4.15) маємо

$$\begin{aligned} \int x \ln(2x + 3) dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \ln(2x + 3) & dv = x dx \\ du = \frac{2 dx}{2x+3} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(2x + 3) - \int \frac{x^2 dx}{2x+3} = \frac{x^2}{2} \ln(2x + 3) - I. \end{aligned}$$

Отримали інтеграл I від неправильного раціонального дробу. Необхідно виділити цілу частину. Виконаємо операцію ділення многочленів:

$$\begin{array}{r} x^2 \\ - \left(x^2 + \frac{3}{2}x \right) \left| \frac{2x+3}{\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}} \right. \\ \hline -\frac{3}{2}x \\ - \left(-\frac{3}{2}x - \frac{9}{4} \right) \\ \hline \frac{9}{4} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Підставимо в інтеграл: } I &= \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{\frac{9}{4}}{2x+3} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int x dx - \frac{3}{4} \int dx + \frac{9}{4} \int \frac{dx}{2x+3} = \frac{x^2}{4} - \frac{3}{4}x + \frac{9}{8} \ln(2x + 3) + C. \end{aligned}$$

4.7 Визначений інтеграл

До поняття визначеного інтегралу приводить велика кількість прикладних задач математики, фізики, та інших наук, а саме – обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги, об'єму, роботи змінної сили, моментів інерції тощо.

Визначення 4.4. **Визначеним інтегралом** називається границя до якої прямує n -та інтегральна сума при прямуванні до

нуля довжини найбільшого часткового інтеграла. Позначається визначений інтеграл як

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S. \quad (4.16)$$

Тут функція $f(x)$ називається **підінтегральною функцією**; вираз $f(x)dx$ – **підінтегральним виразом**, а a і b – **граничами інтегрування**.

Якщо побудувати графік підінтегральної функції $y = f(x)$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ буде чисельно дорівнювати площі S криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю Ox .

4.8 Властивості визначеного інтегралу

Насамперед зауважимо, що визначений інтеграл від функції є число, яке відповідає даній функції згідно визначенню (4.16), тому це число не залежить від вибору позначення аргументу підінтегральної функції, тобто від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du. \quad (4.17)$$

Теорема 4.6 (про інтеграл суми). Визначений інтеграл від суми декількох функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій:

$$\begin{aligned} & \int_a^b (u(x) + v(x) + \dots + w(x))dx = \\ & = \int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx + \dots + \int_a^b w(x)dx. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Теорема 4.7 (про винесення постійного множника). Постійний множник можна виносити за знак інтеграла

$$\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx, \quad (4.19)$$

де C – константа.

Теорема 4.8 (про перестановку границь). Якщо верхню та нижню границі визначеного інтеграла переставити місцями, то знак інтеграла зміниться на протилежний:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (4.20)$$

Теорема 4.9 (про адитивність інтеграла). Нехай $a < c < b$. Якщо існує визначений інтеграл на відрізках $[a, c]$, $[c, b]$, то існує інтеграл і на відрізьку $[a, b]$, при цьому

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (4.21)$$

4.9 Обчислення визначеного інтеграла. Формула Ньютона – Лейбница

Теорема 4.10. Значення визначеного інтеграла дорівнює різниці значень будь-якої первісної від підінтегральної функції, обчисленої при $x = a$ і $x = b$, тобто границях інтегрування:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (4.22)$$

Формула (4.22) називається *формулою Ньютона-Лейбница*.

Приклад 4.18. Обчислити інтеграл $\int_1^3 \frac{5x^4 - 3x^2 - 7x + 13}{2x^2} dx$.

Розв'язання. Скористаємося формулою Ньютона – Лейбница і основними властивостями визначеного інтегралу

$$\int_1^3 \frac{5x^4 - 3x^2 - 7x + 13}{2x^2} dx = \frac{5}{2} \int_1^3 x^2 dx - \frac{3}{2} \int_1^3 dx - \frac{7}{2} \int_1^3 \frac{dx}{x} + \frac{13}{2} \int_1^3 \frac{dx}{x^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 - \frac{3x}{2} \Big|_1^3 - \frac{7}{2} \ln|x| \Big|_1^3 - \frac{13}{2x} \Big|_1^3 = \\
&= \frac{45}{2} - \frac{5}{6} - \frac{9}{2} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \ln 3 + \frac{7}{2} \ln 1 - \frac{13}{6} + \frac{13}{2} = 23 - \frac{7}{2} \ln 3.
\end{aligned}$$

Приклад 4.19. Обчислити інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x^3+x}$.

Розв'язання: Для обчислення визначеного інтегралу, згадаємо правило знаходження первісної від раціонального дробу

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{dx}{x^3+x} &= \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \\ 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x \\ 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx \\ x^2 \Big| 0 = A+B, \quad B = -A = -1 \\ x^1 \Big| 0 = C \\ x^0 \Big| 1 = A \end{array} \right] = \int_1^2 \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{xdx}{x^2+1} = \\
&= \ln|x| \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 2 = \\
&= \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 = \frac{1}{2} (\ln 2^3 - \ln 5) = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}.
\end{aligned}$$

4.10 Заміна змінної у визначеному інтегралі

Як і при знаходженні первісної при невизначеному інтегруванні, одним з найпоширеніших методів є метод заміни змінної. Але заміна змінної в визначеному інтегралі потребує більшої уваги. Нагадаємо, що за формулою (4.7) у невизначеному інтегралі має місце тотожність

$$\int f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(u)}.$$

Сформулюємо правило заміни змінної у визначеному інтегралі за допомогою наступної теореми.

Теорема 4.11. Якщо в інтервалі $[\alpha, \beta]$ функції $x = \varphi(u)$, $\varphi'(u)du$ і $f(\varphi(u))$ неперервні і $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u)du. \quad (4.23)$$

Зауваження 1. Перетворення підінтегрального виразу при заміні змінної у визначеному інтегралі відбувається саме так, як і у невизначеному. Нові ж границі інтегрування α і β є коренями рівнянь:

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b.$$

Зауваження 2. При заміні змінної у визначеному інтегралі повертатися до попередньої змінної не потрібно. Первісні обчислюються при нових границях інтегрування.

Приклад 4.20. Обчислити інтеграл $\int_0^1 (e^x - 1)^5 e^x dx$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання: } \int_0^1 (e^x - 1)^5 e^x dx &= \left[\begin{array}{l} u = e^x - 1 \\ du = e^x dx \\ u_{\text{н}} = e^0 - 1 = 0 \\ u_{\text{в}} = e^1 - 1 \end{array} \right] = \\ &= \int_0^{e-1} u^5 du = \frac{u^6}{6} \Big|_0^{e-1} = \frac{1}{6} (e-1)^6. \end{aligned}$$

4.11 Інтегрування частинами визначених інтегралів

Теорема 4.12. Нехай u і v - диференційовані функції незалежної змінної x на відрізьку $[a, b]$, тоді

$$\int_a^b u \cdot dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (4.24)$$

Формула (4.24) має назву **формули інтегрування частинами визначених інтегралів**.

Зауваження. У формулі (4.24) букви u і v означають представлення підінтегрального виразу $f(x)dx$ у вигляді $u(x) \cdot dv(x)$. Не треба плутати це представлення з заміною змінної, тому нових змінних і границь інтегрування при інтегруванні частинами не виникає.

Приклад 4.21. Обчислити інтеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$.

Розв'язання: За формулою (4.24) маємо

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x} &= \left[\begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x} \quad v = -ctgx \end{array} \right] = -x \cdot ctgx \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} + \\ &+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ctg x dx = -x \cdot ctgx \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} + \ln|\sin x| \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \\ &= -\frac{\pi}{3} ctg \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} ctg \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 4.22. Обчислити інтеграл $\int_1^e \ln^3 x dx$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (4.24).
Зауважимо, що інтегрувати частинами необхідно буде тричі:

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln^3 x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln^3 x \quad du = 3\ln^2 x \frac{dx}{x} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right] = x \cdot \ln^3 x \Big|_1^e - \\ &- 3 \int_1^e x \cdot \ln^2 x \cdot \frac{dx}{x} = \left[\begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad du = 2\ln x \frac{dx}{x} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right] = \\ &= e \cdot \ln^3 e - 1 \cdot \ln^3 1 - 3 \left(x \cdot \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e x \cdot \ln x \cdot \frac{dx}{x} \right) = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right] = e - 3e \cdot \ln^2 e + 3 \cdot \ln^2 1 + \end{aligned}$$

$$+6 \left(x \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{dx}{x} \right) = e - 3e + 6e \cdot \ln e - 6 \cdot \ln 1 -$$

$$-6x \Big|_1^e = -2e + 6e - 6e + 6 = 6 - 2e.$$

4.12 Деякі геометричні застосування визначених інтегралів

4.12.1 Обчислення площі плоскої фігури

За геометричним тлумаченням визначного інтегралу, площа криволінійної трапеції (рис. 4.1,а), яка обмежена кривою $y = f(x)$, лініями $x = a$ і $x = b$, і віссю Ox , обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (4.25)$$

Якщо плоска фігура обмежена лініями $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ (рис. 4.1,б), то для обчислення площі, необхідно знайти точки перетину кривих $x = a$ і $x = b$. Ці точки є границями інтегрування.

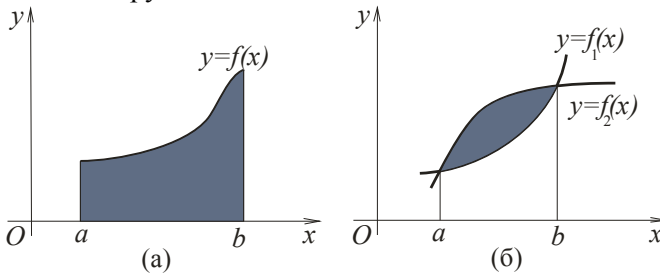
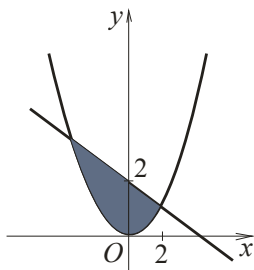


Рисунок 4.1 – Площа фігури

Шукана площа плоскої фігури може бути знайдена як різниця між площами криволінійних трапецій, обмежених лініями $y = f_1(x), y = 0, x = a, x = b$ і $y = f_2(x), y = 0, x = a, x = b$, тобто

$$S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (4.26)$$

Приклад 4.23. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = 2 - x$.



Розв'язання: Побудуємо фігуру (рис. 4.2). Знайдемо точки перетину кривих, для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2; \\ y = 2 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 2 - x; \\ x^2 + x - 2 = 0; \\ x_1 = -2; \quad x_2 = 1. \end{cases}$$

Отже, точки перетину $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$.

Рисунок 4.2 –
Площа фігури

Обчислимо площу за формулою (4.26):

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = -\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} + 2 + 4 - \frac{8}{3} = 4\frac{1}{2} \text{ (од}^2\text{)}. \end{aligned}$$

4.12.2 Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Нехай в декартовій системі координат задано неперервну криву $y = f(x)$ (рис. 4.3). Довжину дуги \overline{AB} цієї кривої, яка розташована в інтервалі між $x = a$ і $x = b$ обчислюється за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (4.27)$$

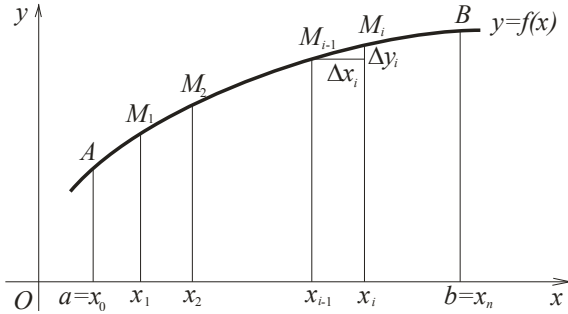


Рисунок 4.3 – Обчислення довжини дуги

Приклад 4.24. Знайти довжину лінії $y = \ln(1 - x^2)$, яка розташована між $x = 0$ і $x = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Для обчислення довжини дуги, скористаємося формулою (4.27). До підстановки у формулу виконаємо попередні обчислення, а саме

$$y' = -\frac{2x}{1-x^2};$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+2x^2+x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2};$$

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2-(1-x^2)}{1-x^2} dx = \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2} - \int_0^{\frac{1}{2}} dx = -\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_0^{\frac{1}{2}} - x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\ln \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \\ &= \ln 3 - \frac{1}{2} \text{ (од.)} \end{aligned}$$

4.12.3 Обчислення об'єму тіла

Нехай дано тіло, яке обмежено замкненою поверхнею, і нехай відома площа будь-якого його перетину площиною, паралельною осі Ox (рис. 4.4).

Будемо вважати, що площа такого перетину є відомою нам функцією $S(x)$.

Нехай все тіло обмежене двома площинами, перпендикулярними до осі Ox і відомо, що ці площини перетинають вісь Ox у точках $x = a$, $x = b$. Об'ємом тіла називається границя інтегральної суми за прямовання найбільшого відрізка до нуля, а числа $n \rightarrow \infty$:

$$V = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=0}^n S(x_i) \Delta x_i = \int_a^b S(x) dx. \quad (4.28)$$

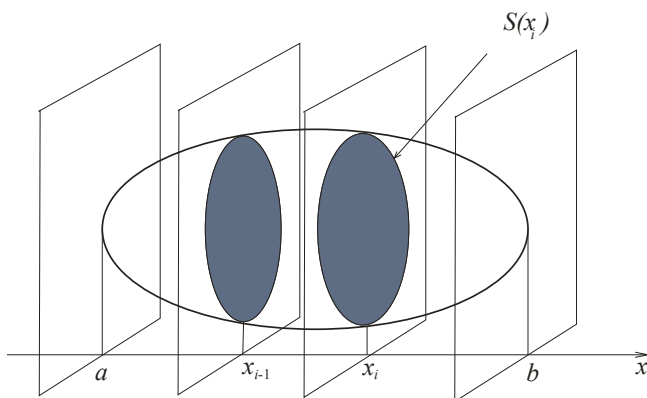


Рисунок 4.4 – Обчислення об'єму

Якщо тіло, об'єм якого ми шукаємо, отримане обертанням криволінійної трапеції, яка обмежена лінією $y = f(x)$ навколо осі Ox , то перпендикулярним перетином з

абсцисою x є коло, радіус якого дорівнює відповідній ординаті лінії $y = f(x)$. У такому випадку

$$S(x) = \pi \cdot y^2.$$

Звідси отримаємо формулу для обчислення об'єму тіла обертання:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (4.29)$$

Приклад 4.25. Знайти об'єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $y = x^3$, $y = 4x$ навколо осі Ox , де $x \geq 0$.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину ліній, які обмежують цю фігуру:

$$\begin{cases} y = x^3, \\ y = 4x \end{cases} \quad \begin{aligned} x^3 &= 4x; & x^3 - 4x &= 0 \\ x(x^2 - 4) &= 0; \\ x_1 = 0; & x_2 = 2; & x_3 &= -2. \end{aligned}$$

За формулою (4.29) маємо

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 [y_2^2(x) - y_1^2(x)] dx = \pi \int_0^2 (16x^2 - x^6) dx = \\ &= \pi \left(\frac{16x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^2 = \pi \left(\frac{128}{3} - \frac{128}{7} \right) = \frac{512}{21} \pi \text{ (од}^3\text{)}. \end{aligned}$$

4.13 Застосування визначених інтегралів для розв'язання задач економіки

Познайомимося з основними поняттями, необхідними нам для розв'язання задач економіки.

Нехай функція $z = f(x)$ описує *продуктивність* деякого виробництва за певний час. *Об'єм продукції* $Q(t_1, t_2)$, яка вироблена за проміжок часу $[t_1, t_2]$, обчислюється за формулою

$$Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt. \quad (4.30)$$

На продуктивність виробництва продукції може впливати багато різних факторів. Можливість урахування цих факторів, пов'язана з використанням функцій *Кобба – Дугласа*. В такому випадку функція $f(t)$ є добутком трьох множників

$$f(t) = a_0 A^\alpha(t) L^\beta(t) K^\gamma(t), \quad (4.31)$$

де $A(t)$, $L(t)$, $K(t)$ – величини затрат природних ресурсів, праці і капіталу (відповідно), a_0 , α , β , γ – деякі коефіцієнти.

Нехай дано функцію $y = f(x)$, яка характеризує нерівномірність розподілу доходів серед населення, де y – частинка сукупного доходу, яку отримує частинка x найбіднішого населення.

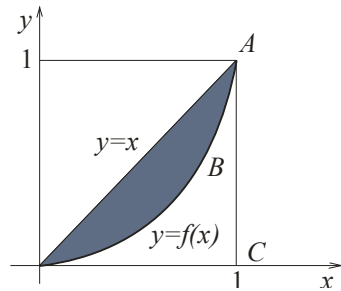


Рисунок 4.5 – Крива Лоренца

Графік цієї функції називається *кривою Лоренца* (рис. 4.5). Очевидно, що $0 \leq f(x) \leq x$ при $x \in [0; 1]$, а з цього прямує, що нерівномірність розподілу доходів тим більша, чим більша площа фігури OAB . Тому для кількісного аналізу нерівномірності розподілу доходів використовують *коефіцієнт Джині* k , який дорівнює відношенню площі фігури OAB і площі трикутника OAC :

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}. \quad (4.31)$$

Нехай крива $p = f(x)$ – крива попиту D на деякий товар і $p = g(x)$ – крива пропозиції S , де p – ціна на товар, а x – величина попиту (пропозиції). Точка перетину цих ліній (x_0, p_0)

має назву **точка ринкової рівноваги** (рис. 4.6). Прибуток від реалізації товару x_0 за рівноважною ціною p_0 дорівнює добутку $x_0 p_0$. Якщо ціна буде неперервно знижуватися від максимальної $p_D = f(0)$ до рівноважної p_0 (якщо задовольняється попит), то прибуток складає величину $\int_0^{x_0} f(x) dx$

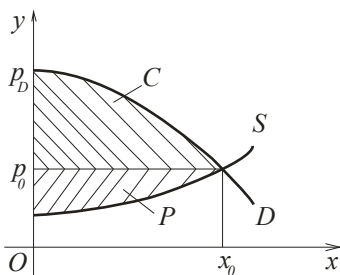


Рисунок 4.6 – Точка ринкової рівноваги

.

Величина коштів

$$C = \int_0^{x_0} f(x) dx - x_0 p_0, \quad (4.32)$$

яка зберігається користувачем, якщо товар продається за рівноважною ціною p_0 , називається **виграшем користувачів**.

Аналогічно, величина

$$P = x_0 p_0 - \int_0^{x_0} f(x) dx, \quad (4.33)$$

називається **виграшем постачальників**.

Приклад 4.26. Нехай зміна щоденної продуктивності праці деякого виробництва задана функцією $f(t) = -0,0054t^2 + 0,028t + 12,34$, де t то прибуток складає величину

$\int_0^{x_0} f(x)dx$ час у годинах. Знайти об'єм випуску продукції, яка вироблена за 8-годинний робочий день.

Розв'язання: За формулою (4.29) знайдемо об'єм $Q(t_1, t_2)$ продукції, виробленої за проміжок часу $[t_1, t_2]$:

$$\begin{aligned} Q(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} (-0,0054t^2 + 0,028t + 12,34)dt = \\ &= (-0,0018t^3 + 0,014t^2 + 12,34t) \Big|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned}$$

Обчислимо об'єм продукції, вироблений за 8-годинний робочий день:

$$\begin{aligned} Q(0,8) &= -0,0018 \cdot 8^3 + 0,014 \cdot 8^2 + 12,34 \cdot 8 = \\ &= -0,9216 + 0,896 + 98,72 = 98,6944 \text{ (од.)}. \end{aligned}$$

Приклад 4.27. Знайти об'єм виробленої деяким підприємством продукції за 10 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0,5t}$, $L(t) = (t + 2)^3$, $K(t) = (2t - 5)^2$, $a_0 = 3$, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. За формулами (4.29), (4.30) маємо

$$\begin{aligned} Q(0; 10) &= 3 \int_0^{10} e^t (t + 2)(2t - 5)dt = \\ &= 3 \int_0^{10} e^t (2t^2 - t - 10)dt = \left[\begin{array}{l} u = 2t^2 - t - 10 \\ dv = e^t dt \\ du = (4t - 1)dt \\ v = e^t \end{array} \right] = \\ &= 3e^t (2t^2 - t - 10) \Big|_0^{10} - 3 \int_0^{10} e^t (4t - 1)dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{l} u = 4t - 1 \\ dv = e^t dt \\ du = 4dt \\ v = e^t \end{array} \right] = 3e^{10}(200 - 10 - 10) - 3(-10) - \\
&- 3e^t(4t - 1) \Big|_0^{10} + 3 \cdot 4 \int_0^{10} e^t dt = 540e^{10} + 30 - \\
&- 117e^{10} - 3 + 12e^{10} - 12 = 435e^{10} + 15 \approx \\
&\approx 9\,581\,527,621.
\end{aligned}$$

Приклад 4.28. За даними досліджень про розподіл доходів в однієї з країн крива Лоренці може бути описана рівнянням $y = \frac{4x}{7-3x}$, де $x \in [0; 1]$. Обчислити коефіцієнт Джині k .

Розв'язання. Обчислимо площі фігур, які входять до формули (4.31). Отже площа трикутника дорівнює

$$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0,5 \text{ (од}^2\text{)}.$$

а площу фігури OAB знайдемо за формулою (4.26):

$$\begin{aligned}
S_{OAB} &= \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx = \int_0^1 \left(x - \frac{4x}{7-3x} \right) dx = \\
&= \int_0^1 \left(x + \frac{4(7-3x) - 7}{7-3x} \right) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{4}{3} - \frac{28}{3} \frac{1}{7-3x} \right) dx = \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x + \frac{28}{9} \ln|7-3x| \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{28}{9} \ln 4 - \frac{14}{9} \ln 7 = \\
&= \frac{11}{6} + \frac{28}{9} \ln \frac{4}{7} \approx 0,0923 \text{ (од}^2\text{)}.
\end{aligned}$$

Отже, коефіцієнт Джині дорівнює $k = \frac{0,0923}{0,5} = 0,1845$.

Приклад 4.29. Знайти вигоди постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 210 - x^2, \quad p = 12x + 50.$$

Розв'язання. Знайдемо точку ринкової рівноваги (x_0, p_0) з розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} p = 210 - x^2 \\ p = 12x + 50 \end{cases} \begin{cases} 210 - x^2 = 12x + 50; \\ x^2 + 12x - 160 = 0; \\ \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = -20 \end{cases} \end{cases} \text{ (не має сенсу)}$$

$$\Rightarrow x_0 = 8; \quad p_0 = 210 - 8^2 = 210 - 64 = 136.$$

Отже, точка ринкової рівноваги $x_0 = 8$, $p_0 = 136$.

Знайдемо вигоди користувачів (4.30):

$$\begin{aligned} C &= \int_0^8 (210 - x^2) dx - 8 \cdot 136 = \left(210x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^8 - 1088 = \\ &= 1680 - 170,67 - 1088 = 421,33 \text{ (грош. од.)}. \end{aligned}$$

Знайдемо вигоди постачальників (4.31):

$$\begin{aligned} P &= 8 \cdot 136 - \int_0^8 (12x + 50) dx = 1088 - (6x^2 + 50x) \Big|_0^8 = \\ &= 1088 - 384 - 400 = 304 \text{ (грош. од.)}. \end{aligned}$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Коваленко Л. Б. Вища математика для менеджерів : підручник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – 2-ге вид., перероб. та допов. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2019. – 341 с. – ISBN 978-966-695-476-6
2. Коваленко Л. Б. Збірник тестових завдань з вищої математики для менеджерів: навч. посіб. / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва.– Харків : ХНАМГ, 2010. – 423 с. – ISBN 978-966-695-183-3
3. Методичні вказівки та контрольні роботи з вищої математики (для студентів 1 курсу заочної форми навчання за напрямками підготовки 6.030601 – „Менеджмент”, 6.140101 – “Готельно-ресторанна справа”, 6.020107 – „Туризм”) / Харків. нац. акад. міськ. госп-ва ; уклад.: Л. Б. Коваленко, С. М. Мордовцев, Є. С. Пахомова. – Харків : ХНАМГ, 2011. – 119 с.
4. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – М. : Наука, 1985. -218 с.
5. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – М. : Наука, 1973. – 720 с.
6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа в 2 т.. Т. 1. / Л. Д. Кудрявцев – М. : Высшая школа, 1988. -712 с.
7. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н. С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – 430 с.
8. Станішевський С. О. Вища математика : навч. посібник / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 270 с.
9. Высшая математика для экономистов / Под редакцией Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2007. – 479 с.
10. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец – М. : Высшая школа, 1966. – 460 с.
11. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 383 с.
12. Ганич Д. І. Російсько-український, українсько-російський словник / Д. І. Ганич, І. С. Олійник – Київ : А.С.К., 1996. – 550 с.

ДОДАТОК А ЗАВДАННЯ ДЛЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ

Варіант 1

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - x_3 = -29 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10 \\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -11 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому кварталі задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 15 & 35 & 6 \\ 6 & 17 & 44 & 6 \\ 3 & 8 & 11 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 22 & 7 \\ 7 & 12 & 35 & 6 \\ 6 & 6 & 23 & 10 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

- а) обсяг продукції в першому півріччі;
- б) приріст обсягів продукції в другому кварталі порівнянно з першим по видам та по підприємствам;
- в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 3$ – курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i -го товару на виробництво одиниці продукції j -го типу задані матрицею A . Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X , а вартість кожного виду ресурсів у розрахунку на одиницю у вигляді матриці P :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 376 \\ 229 \\ 425 \end{pmatrix}, \quad P = (60 \quad 90 \quad 115 \quad 35).$$

Знайти:

а) S – матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C – повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. В таблиці 5.1 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 5.1 - Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях)

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,2	0,45	200
	Галузь 2	0,4	0,25	100

Знайти:

1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;

2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 25 %.

5. Обчислити границі:

а) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 - 49}{x^2 + 2x - 35}$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 49x + 3}{7x^2 + x + 15}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+1} - 3}{\sqrt{x-4} - 2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 5x}{\arcsin x}$.

6. Знайти похідні:

а) $y = (8x^2 - 15x^7) \cdot \arctg^4 6x$;

б) $y = \frac{5 \arccos 4x^9}{x^3 + 2x^7}$.

7. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 9t + 2130$ (одиниць), де t – календарний місяць року. Обчислити

продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року ($t = 0$); б) в першому півріччі ($t = 6$).

8. Дослідити функцію $y = \frac{2x}{1+x^2}$ на монотонність та екстремуми.

9. Дослідити функцію $y = 8x^3 - 3x^4$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

10. Визначити максимальний прибуток, який може отримати фірма-виробник, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 18$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 13 + 8x + x^2$.

11. Відомі функції попиту $q = \frac{10p+19}{p+4}$ і пропозиції $s = p + 4$, де q і s – кількість товару, що купується і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, — ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

12. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{\arcsin 6x\sqrt{1-36x^2}}$;

б) $\int \frac{dx}{x^2+10x-13}$;

в) $\int \frac{5x^2-2x+57}{(x+1)(x^2-8x+7)} dx$;

г) $\int (4x - 8) \sin 3x dx$.

13. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - 1) \cos x dx$.

14. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2$, $y = 2^x$, $x = 0$, $x = 2$.

15. Визначити об'єм випуску продукції за перші чотири години праці при продуктивності $f(t) = 33,52e^{-0,25t}$, де t - час у годинах.

16. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 6 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0,1t}$, $L(t) = (4t - 3)^4$, $K(t) = (t + 2)^5$, $a_0 = 3$, $\alpha = 10$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{5}$.

17. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 620 - x^2, \quad p = 25x + 20.$$

Варіант 2

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \\ 7x_1 + 3x_2 - x_3 = 26 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в третьому та четвертому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 15 & 9 & 25 \\ 12 & 8 & 17 & 31 \\ 21 & 6 & 23 & 29 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 & 15 & 10 & 30 \\ 11 & 10 & 18 & 31 \\ 20 & 9 & 22 & 25 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в другому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в четвертому кварталі в порівнянні з третім по видам та по підприємствам;

в) вартість виробленої продукції за четвертий квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 5$ — курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i -го товару на виробництво одиниці продукції j -го типу задані матрицею A . Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X , а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 3 \\ 5 & 9 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 12 & 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 225 \\ 390 \\ 128 \end{pmatrix}, \quad P = (45 \quad 65 \quad 90 \quad 35).$$

Знайти:

а) S — матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C – повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. В таблиці 5.2 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 5.2 – Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях)

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,3	0,35	300
	Галузь2	0,4	0,15	200

Знайти:

- 1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
- 2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 5 %.

5. Обчислити границі:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - x - 5}{x^2 - 6x + 5}$,

б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 + 6x^3 + 5}{2x^2 - 11x - 1}$,

в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{7}}{x^2 + x - 20}$,

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 3x}{4x^2}$.

6. Знайти похідні:

а) $y = (7x^9 - 11x^3) \cdot \arcsin^4 9x$;

б) $y = \frac{11 \cos 8x^7}{x^8 - 3x^4}$.

7. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{5}{3}t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 11t + 3420$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року ($t = 0$); б) у другому кварталі ($t = 6$).

8. Дослідити функцію $y = x + \frac{1}{x}$ на монотонність та екстремуми.

9. Дослідити функцію $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

10. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 112$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 9 + 4x + x^3$.

11. Відомі функції попиту $q = \frac{9p+48}{p+4}$ і пропозиції $s = p + 9$, де q і s – кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p – ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

12. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(3x-7)}}{3x-7} dx;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-7x-x^2}};$

в) $\int \frac{9x^2+30x-138}{(x-2)(x^2+x-20)} dx;$

г) $\int (5x + 4)e^{8x} dx.$

13. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln^5 x}}{x} dx;$

б) $\int_0^\pi x \sin \frac{x}{2} dx.$

14. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 2$ і прямою $y = 0$.

15. Визначити об'єм випуску продукції за перші дев'ять годин праці при продуктивності $f(t) = -0,0038t^2 - 0,052t + 41,12$, де t - час у годинах.

16. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 4 роки, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0,125t}$, $L(t) = (6t - 1)^3$, $K(t) = (t - 2)^2$, $a_0 = 9$, $\alpha = 9$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

17. Знайти виграти постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 550 - x^2, \quad p = 27x + 30.$$

Варіант 3

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 4x_3 = -2 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому півріччях задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 14 & 12 & 9 \\ 37 & 5 & 18 & 7 \\ 16 & 19 & 19 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 23 & 12 & 15 & 10 \\ 37 & 6 & 25 & 11 \\ 17 & 19 & 22 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції за рік;

б) приріст обсягів продукції в другому півріччі в порівнянні з першим по видам та по підприємствам;

в) вартість виробленої продукції за рік (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 9$ – курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i -го товару на виробництво одиниці продукції j -го типу задані матрицею A . Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X , а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 6 & 4 \\ 3 & 8 & 8 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 435 \\ 220 \\ 375 \end{pmatrix}, \quad P = (110 \quad 95 \quad 60 \quad 85).$$

Знайти:

а) S – матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C – повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. В таблиці 5.3 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 5.3 – Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях)

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,35	0,2	400
	Галузь2	0,25	0,5	200

Знайти:

- 1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
- 2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 5 %, а другої – на 10 %.

5. Обчислити границі:

а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 9x + 14}$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 6x - 7}{9x^3 + 8x^2 + 14}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2 + 5x}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{x^2 - 8x}$.

6. Знайти похідні:

а) $y = (2x^{14} - 5x^4) \cdot \arccos^2 4x$;

б) $y = \frac{8 \operatorname{tg} 13x^2}{x^3 + 3x^5}$.

7. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 4t + 1120$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) в першому півріччі ($t = 6$); б) наприкінці року ($t = 12$).

8. Дослідити функцію $y = \frac{3x^2-6}{3-2x}$ на монотонність та екстремуми.

9. Дослідити функцію $x^4 - 24x^2 + 12x$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

10. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 45$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 28 + 21x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

11. Відомі функції попиту $q = \frac{11p+50}{p+2}$ і пропозиції $s = p + 10$, де q і s – кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p – ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

12. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{e^{\sqrt{x-8}} dx}{\sqrt{x-8}}$;

б) $\int \frac{dx}{3x^2-6x-7}$;

в) $\int \frac{2x^2+58x-63}{x^3-7x^2} dx$;

г) $\int \ln(x+11) dx$.

13. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \cos x dx$.

14. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $3y = x^2$ і прямими $y = 0$, $x = 2$.

15. Визначити об'єм випуску продукції за перші вісім години праці при продуктивності $f(t) = 25,81e^{-0,125t}$, де t – час у годинах.

16. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 10 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{\frac{t}{3}}$, $L(t) = (4t-1)^2$, $K(t) = (t+5)^5$, $a_0 = 4$, $\alpha = 3$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{5}$.

17. Знайти вигоди постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 135 - x^2, \quad p = 15x + 35.$$

Варіант 4

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -9 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому кварталі задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 22 & 17 & 14 \\ 9 & 29 & 13 & 19 \\ 40 & 16 & 25 & 22 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 15 & 25 & 17 & 13 \\ 10 & 23 & 15 & 18 \\ 33 & 19 & 25 & 28 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в першому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в другому кварталі в порівнянні з першим по видам та по підприємствам;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 4$ – курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i -го товару на виробництво одиниці продукції j -го типу задані матрицею A . Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X , а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 8 \\ 7 & 3 & 1 \\ 9 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 650 \\ 285 \\ 445 \end{pmatrix}, \quad P = (205 \quad 90 \quad 110 \quad 85).$$

Знайти:

а) S – матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C – повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. В таблиці 5.4 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 5.4 – Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях)

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь 1	0,35	0,4	300
	Галузь 2	0,25	0,2	100

Знайти:

- 1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
- 2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 15 %.

5. Обчислити границі:

а) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 16}$;

б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^2 + 8x + 1}{4x^2 - 10x + 3}$;

в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{\sqrt{4x + 9} - 1}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 3x}{\sin 2x - \sin 4x}$.

6. Знайти похідні:

а) $y = (5x^8 + 4x^3) \cdot \text{ctg}^{11} 3x$;

б) $y = \frac{9 \sin 7x^3}{x^6 - 2x^4}$.

7. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{8}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 14t + 4410$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року ($t = 0$); б) у другому кварталі ($t = 6$).

8. Дослідити функцію $y = \frac{x^2}{\ln x}$ на монотонність та екстремуми.

9. Дослідити функцію $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 - 2x + 10$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

10. Визначити максимальний прибуток, який може отримати фірма-виробник, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 15$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 25 + 3x + x^2$.

11. Відомі функції попиту $q = \frac{9p+27}{p+2}$ і пропозиції $s = p + 3$, де q і s – кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p – ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

12. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5(x+7)}}{x+7} dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+6x+1}}$;

в) $\int \frac{5x^2+12x-62}{(x-1)(x^2+2x-8)} dx$;

г) $\int \arccos 3x dx$.

13. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$;

б) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(1-x^2) dx$.

14. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = -x^2 + 4x - 3$ і прямою $y = 0$.

15. Визначити об'єм випуску продукції за перші три години праці при продуктивності $f(t) = -0,0064t^2 + 0,013t + 54,11$, де t – час у годинах.

16. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 9 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0,5t}$, $L(t) = (5t - 1)^2$, $K(t) = (4t - 3)^3$, $a_0 = 8$, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{3}$.

17. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 110 - x^2, \quad p = 17x + 50.$$

Варіант 5

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 9x_3 = -4 \\ x_1 - 6x_2 - 5x_3 = -26 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в третьому та четвертому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 13 & 22 & 19 \\ 15 & 31 & 25 & 10 \\ 14 & 19 & 33 & 15 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 23 & 15 & 20 & 18 \\ 17 & 28 & 26 & 10 \\ 19 & 18 & 33 & 16 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в другому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в четвертому кварталі в порівнянні з третім по видам та по підприємствам;

в) вартість виробленої продукції за четвертий квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 6$ – курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i -го товару на виробництво одиниці продукції j -го типу задані матрицею A . Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X , а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 7 & 2 & 8 \\ 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 430 \\ 250 \\ 535 \end{pmatrix}, \quad P = (70 \quad 85 \quad 105 \quad 90).$$

Знайти:

а) S – матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) С – повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. В таблиці 5.5 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 5.5— Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях)

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,5	0,15	400
	Галузь2	0,1	0,35	300

Знайти:

- 1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
- 2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 5 %, а другої – на 25 %.

5. Обчислити границі:

а) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{125+x^3}{x^2-6x+5}$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3-7x^2-9}{4-2x+7x^3}$;

в) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+5x+6}{\sqrt{3x+10}-1}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin 5x}{6x}$.

6. Знайти похідні:

а) $y = (3x^9 - 9x^7) \cdot tg^3 8x$;

б) $y = \frac{8ctg 3x^5}{x^7-14x^5}$.

7. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{11}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 9t + 6510$ (одиниць), де t – календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) в першому півріччі ($t = 6$); б) наприкінці року ($t = 12$).

8. Дослідити функцію $y = \frac{x^2+2x-1}{2x+1}$ на монотонність та екстремуми.

9. Дослідити функцію $y = x^4 - 96x^2 + 315$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

10. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 84$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 7 + 9x + x^3$.

11. Відомі функції попиту $q = \frac{14p+17}{p+2}$ і пропозиції $s = p + 4$, де q і s – кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

12. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\arccos^7 8x}{\sqrt{1-64x^2}} dx;$

б) $\int \frac{dx}{4x^2-2x-3};$

в) $\int \frac{x^2-29x-180}{(x+5)(x^2-25)} dx;$

г) $\int x \arctg 5x dx.$

13. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx;$

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \sin x dx.$

14. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = 3 + 2x - x^2$ і прямою $y = x + 1$.

15. Визначити об'єм випуску продукції за перші дев'ять години праці при продуктивності $f(t) = -0,0071t^2 + 0,035t + 12,64$, де t - час у годинах.

16. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 8 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0,125t}$, $L(t) = (t+1)^4$, $K(t) = (3t+7)^5$, $a_0 = 2$, $\alpha = 8$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{5}$.

17. Знайти вигоди постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 380 - x^2, \quad p = 31x + 20.$$

Варіант 6

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -10 \\ 2x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 35 \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 = -3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому півріччях задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 30 & 29 \\ 10 & 18 & 28 & 22 \\ 9 & 14 & 35 & 31 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 32 & 30 \\ 8 & 17 & 15 & 19 \\ 13 & 20 & 33 & 28 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції за рік;

б) приріст обсягів продукції в другому півріччі в порівнянні з першим по видам та по підприємствам;

в) вартість виробленої продукції за рік (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 7$ – курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i -го товару на виробництво одиниці продукції j -го типу задані матрицею A . Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X , а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 8 \\ 6 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & 8 \\ 2 & 12 & 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 180 \\ 235 \\ 640 \end{pmatrix}, \quad P = (75 \quad 60 \quad 110 \quad 85).$$

Знайти:

а) S – матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C – повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. В таблиці 5.6 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 5.6 – Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях)

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,35	0,2	600
	Галузь2	0,25	0,1	300

Знайти:

- 1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
- 2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 20 %.

5. Обчислити границі:

а) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 64}{x^2 + 3x - 4}$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^2 + 6x + 20}{4x^3 + 7x^2 + 25x}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+15} - 2}{\sqrt{x+8} - 3}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg3x}{sin5x}$.

6. Знайти похідні:

а) $y = (4x^6 + 9x^5) \cdot \cos^{10} 4x$;

б) $y = \frac{\arccos x^5}{x^4 - 4x^5}$.

7. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{5}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 4t + 2340$ (одиниць), де t – календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року ($t = 0$); б) наприкінці року ($t = 12$).

8. Дослідити функцію $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$ на монотонність та екстремуми.

9. Дослідити функцію $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + 2x^2 - 2$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

10. При виробництві монополією x одиниць товару, ціна за одиницю $p(x) = 10 + \frac{6}{x}$. Визначити оптимальне для монополії значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується, якщо відома функція витрат $C(x) = 2 + 3x + \frac{x^2}{2}$.

11. Відомі функції попиту $q = \frac{8p+46}{p+9}$ і пропозиції $s = p + 2$, де q і s – кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p – ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

12. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{e^{\arctg 2x} dx}{1+4x^2};$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+9}};$

в) $\int \frac{9x^2+10x-57}{(x-1)(x^2+8x+15)} dx;$

г) $\int x \sin(4x + 9) dx.$

13. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(4+5x)^3}};$

б) $\int_0^2 x e^{-\frac{x}{2}} dx.$

14. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \cos 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

15. Визначити об'єм випуску продукції за перші вісім годин праці при продуктивності $f(t) = 19,83e^{-0,125t}$, де t - час у годинах.

16. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 15 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0,1t}$, $L(t) = (t - 1)^5$, $K(t) = (3t + 4)^2$, $a_0 = 3$, $\alpha = 10$, $\beta = \frac{1}{5}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

17. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 300 - x^2, \quad p = 7x + 40.$$

Варіант 7

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - x_3 = 43 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 27 & 9 \\ 19 & 6 & 33 & 9 \\ 25 & 5 & 29 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 18 & 9 & 20 & 11 \\ 20 & 4 & 32 & 10 \\ 25 & 6 & 30 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в першому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в другому кварталі в порівнянні з першим по видам та по підприємствам;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 10$ – курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i -го товару на виробництво одиниці продукції j -го типу задані матрицею A . Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X , а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 8 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 680 \\ 390 \\ 485 \end{pmatrix}, \quad P = (220 \quad 130 \quad 55 \quad 95).$$

Знайти:

а) S – матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C – повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. В таблиці 5.7 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 5.7 – Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях)

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,3	0,45	200
	Галузь2	0,1	0,55	300

Знайти:

- 1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
- 2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 30 %, а другої – на 5 %.

5. Обчислити границі:

а) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 36}$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 9x^2 + 5}{5x^2 + 9x - 12}$;

в) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{\sqrt{x+9} - \sqrt{3}}{x^2 + 4x - 12}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 5x - \cos^2 x}{x \cdot \operatorname{tg} 4x}$.

6. Знайти похідні:

а) $y = (5x^6 - 9x^3) \cdot \sin^7 6x$;

б) $y = \frac{3 \cdot e^{\sin^5 3x}}{x^{14} - 14x^8}$.

7. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{7}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 3t + 1250$ (одиниць), де t – календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) в другому кварталі ($t = 6$); б) у третьому кварталі ($t = 9$).

8. Дослідити функцію $y = \frac{e^{5-x}}{5-x}$ на монотонність та екстремуми.

9. Дослідити функцію $y = 2x^3 - 6x^2 + 3$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

10. Визначити максимальний прибуток, який може отримати фірма-виробник, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 11,5$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 5 + \frac{5x}{2} + \frac{x^2}{2}$.

11. Відомі функції попиту $q = \frac{3p+18}{p+6}$ і пропозиції $s = p + 1$, де q і s – кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p – ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

12. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt[5]{\ln(5x-3)} dx}{5x-3}$;

б) $\int \frac{dx}{x^2-8x+15}$;

в) $\int \frac{18x+48}{(x+2)(x^2+3x-10)} dx$;

г) $\int x e^{4x+7} dx$.

11. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$;

б) $\int_{-2}^2 (x-1) \sin \pi x dx$.

12. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{1-x}$, $y = x + 1$ і $y = 0$.

13. Визначити об'єм випуску продукції за перші дві години праці при продуктивності $f(t) = -0,0033t^3 + 0,76t + 62,76$, де t – час у годинах.

14. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 3 роки, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{\frac{t}{6}}$, $L(t) = (5t-1)^5$, $K(t) = (t+2)^3$, $a_0 = 2$, $\alpha = 6$, $\beta = \frac{1}{5}$, $\gamma = \frac{1}{3}$.

15. Знайти вигоди постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 260 - x^2, \quad p = 9x + 40.$$

Варіант 8

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 30 \\ 3x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 19 \\ 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 17 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в третьому та четвертому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 28 & 32 \\ 10 & 19 & 22 & 19 \\ 8 & 20 & 35 & 27 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 25 & 30 \\ 11 & 16 & 22 & 15 \\ 10 & 20 & 37 & 22 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в другому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в четвертому кварталі в порівнянні з третім по видам та по підприємствам;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 9$ – курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i -го товару на виробництво одиниці продукції j -го типу задані матрицею A . Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X , а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 9 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 190 \\ 485 \\ 335 \end{pmatrix}, \quad P = (75 \quad 95 \quad 130 \quad 60).$$

Знайти:

а) S – матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C – повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. В таблиці 5.8 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 5.8 – Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях)

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,35	0,2	600
	Галузь2	0,45	0,1	100

Знайти:

- 1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
- 2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 20 %.

5. Обчислити границі:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x^2 - 3x + 2}$;

б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 + 2x^2 - 9x}{3x^4 - 5x^2 + 16}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\sin^2 4x}$.

6. Знайти похідні:

а) $y = (9x^7 - 6x^4) \cdot \operatorname{arctg}^5 3x$;

б) $y = \frac{4 \cos 8x^{10}}{x^3 - 4x}$.

5. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 7t + 3550$ (одиниць), де t – календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року ($t = 0$); б) в третьому кварталі ($t = 9$).

6. Дослідити функцію $y = \ln(1 - x^2)$ на монотонність та екстремуми.

7. Дослідити функцію $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

8. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 20$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 6x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$.

9. Відомі функції попиту $q = \frac{12p+24}{p+1}$ і пропозиції $s = p + 9$, де q і s – кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p – ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

10. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 2x \cos^2 2x}$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+9}}$;

в) $\int \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+10x+25)} dx$;

г) $\int \arcsin 2x dx$.

11. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$;

б) $\int_0^2 x^2 e^{-2x} dx$.

12. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 4$ і прямою $y = 0$.

13. Визначити об'єм випуску продукції за перші чотири години праці при продуктивності $f(t) = 19,63e^{-0,25t}$, де t – час у годинах.

14. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 8 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0,2t}$, $L(t) = (t + 6)^5$, $K(t) = (3t + 1)^2$, $a_0 = 11$, $\alpha = 5$, $\beta = \frac{1}{5}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

15. Знайти вигоди постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 220 - x^2, \quad p = 17x + 20.$$

Варіант 9

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 29 \\ 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 28 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 = -5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в першому та другому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 7 & 44 & 9 \\ 27 & 9 & 40 & 7 \\ 30 & 8 & 28 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 30 & 9 & 44 & 10 \\ 30 & 10 & 42 & 7 \\ 28 & 8 & 31 & 6 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в першому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в другому кварталі в порівнянні з першим по видам та по підприємствам;

в) вартість виробленої продукції за перший квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 2$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i -го товару на виробництво одиниці продукції j -го типу задані матрицею A . Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X , а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 5 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 630 \\ 190 \\ 445 \end{pmatrix}, \quad P = (70 \quad 110 \quad 35 \quad 125).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) С - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. В таблиці 5.9 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 5.9 - Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях)

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,4	0,15	200
	Галузь2	0,1	0,35	100

Знайти:

- 1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
- 2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 10 %, а другої – на 15 %.

5. Обчислити границі:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 11x + 18}{x^2 + 3x - 10}$,

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - x - 11}{2x^5 + x^4 + 9x}$,

в) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{\sqrt{x+11} - 2}{x^2 + 6x - 7}$,

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 5x}{1 - \cos^2 3x}$.

6. Знайти похідні:

а) $y = (7x^8 - 19x^4) \cdot 2^{\operatorname{tg} x^5}$;

б) $y = \frac{6 \operatorname{arctg} 4x^7}{x^7 - 4x^5}$.

7. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - 8t + 1120$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року ($t = 0$); б) в третьому кварталі ($t = 9$).

8. Дослідити функцію $y = \frac{12 - 3x^2}{x^2 + 12}$ на монотонність та екстремуми.

9. Дослідити функцію $y = 4x^4 - 8x^2 + 5x$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

10. Визначити оптимальне для виробника значення випуску x_0 за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 70$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 9 + 16x + 2x^3$.

11. Відомі функції попиту $q = \frac{9p+52}{p+8}$ і пропозиції $s = p + 5$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

12. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt[4]{ctg^3 5x}}{\sin^2 5x} dx;$

б) $\int \frac{dx}{9x^2+6x+5};$

в) $\int \frac{5x^2-64x+83}{(x-7)(x^2+2x-3)} dx;$

г) $\int (4x - 9)e^{5x} dx.$

13. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}};$

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2-x) \sin 3x dx.$

14. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = 3 - 2x - x^2$ і віссю абсцис.

15. Визначити об'єм випуску продукції за перші сім годин праці при продуктивності $f(t) = 73,15e^{-\frac{t}{7}}$, де t - час у годинах.

16. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 5 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0,5t}$, $L(t) = (5t + 1)^3$, $K(t) = (t - 8)^2$, $a_0 = 6$, $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

17. Знайти вигоди постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 250 - x^2, \quad p = 16x + 25.$$

Варіант 10

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 4x_3 = -6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 17 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -33 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{а) за правилами Крамера;} \\ \text{б) матричним методом.} \end{array}$$

2. Нехай обсяги виробництва трьох підприємств чотирьох видів продукції в третьому та четвертому кварталах задаються матрицями A і B відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 15 & 11 \\ 24 & 9 & 12 & 18 \\ 19 & 7 & 20 & 16 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 22 & 15 \\ 22 & 11 & 19 & 10 \\ 17 & 5 & 18 & 16 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) обсяг продукції в другому півріччі;

б) приріст обсягів продукції в четвертому кварталі в порівнянні з третім по видам та по підприємствам;

в) вартість виробленої продукції за третій квартал (в умовних одиницях), якщо $\lambda = 7$ - курс умовної одиниці по відношенню до гривні.

3. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи чотири види ресурсів. Норми затрат ресурсу i -го товару на виробництво одиниці продукції j -го типу задані матрицею A . Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею X , а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці P :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 3 \\ 7 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 455 \\ 390 \\ 610 \end{pmatrix}, \quad P = (40 \quad 105 \quad 75 \quad 80).$$

Знайти:

а) S - матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C - повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

4. В таблиці 1.10 наведені коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях):

Таблиця 5.10 - Коефіцієнти прямих витрат і кінцева продукція галузей на запланований період (в умовних грошових одиницях)

Галузь		Споживання		Кінцева продукція
		Галузь 1	Галузь 2	
Виробництво	Галузь1	0,3	0,45	500
	Галузь2	0,2	0,35	300

Знайти:

- 1) плановані об'єми валової продукції галузей, міжгалузеві поставки, чисту продукцію галузей;
- 2) необхідний об'єм валового випуску кожної галузі, якщо кінцеве споживання продукції першої галузі збільшиться на 5 %, а другої – на 15 %.

5. Обчислити границі:

а) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 - 4}$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x^3 + 9x}{4x^3 + 6x^2 - 15}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1}-4}{\sqrt{x+1}-2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x \cdot \arcsin x}$.

6. Знайти похідні:

а) $y = (13x^6 - 8x) \cdot e^{\arccos x^5}$;

б) $y = \frac{4ctg 8x^{21}}{x^8 - 5x^3}$.

7. Об'єм виробництва продукції деякою фірмою виражається формулою $u(t) = \frac{5}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 14t + 2720$ (одиниць), де t - календарний місяць року. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темп її зміни: а) на початку року ($t = 0$); б) в другому кварталі ($t = 6$).

8. Дослідити функцію $y = \ln(9 - x^2)$ на монотонність та екстремуми.

9. Дослідити функцію $y = \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{7}x^7$ на опуклість, угнутість та точки перегину.

10. Визначити максимальний прибуток, який може отримати фірма-виробник, за умови, що весь товар реалізується за фіксованою ціною $p = 31$ за одиницю товару і відома функція витрат $C(x) = 68 + 7x + 2x^3$.

11. Відомі функції попиту $q = \frac{9p+41}{p+7}$ і пропозиції $s = p + 3$, де q і s - кількість товару, що покупається і пропонується на продаж відповідно на одиницю часу, p - ціна одиниці товару. Знайти: а) рівноважну ціну; б) еластичність попиту та пропозиції.

12. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{(2x-9)\ln^2(2x-9)}$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}$;

в) $\int \frac{x^2+11x+48}{(x+2)(x^2-2x-8)} dx$;

г) $\int (9x + 3) \cos 4x dx$.

13. Знайти визначені інтеграли:

а) $\int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - 1) \cos x dx$.

14. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ і прямою $y = x + 2$.

15. Визначити об'єм випуску продукції за перші чотири години праці при продуктивності $f(t) = 32,47e^{-0,25t}$, де t - час у годинах.

16. Знайти об'єм виробленої підприємством продукції за 5 років, якщо в функції Кобба-Дугласа $A(t) = e^{0,25t}$, $L(t) = (t - 1)^4$, $K(t) = (3t - 2)^3$, $a_0 = 5$, $\alpha = 4$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{3}$.

17. Знайти виграші постачальників та користувачів (при сталій ринковій рівновазі), якщо закони попиту та пропозиції мають відповідно вигляд:

$$p = 350 - x^2, \quad p = 76x + 30.$$

ДОДАТОК Б

Зразок оформлення модульної контрольної роботи

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА
імені О. М. Бекетова

К о н т р о л ь н а р о б о т а
з вищої та прикладної математики
(вищої математики)
студента (-тки) 1 курсу ЦЗН
групи _____

_____ (прізвище, ім'я, по-батькові студента)

Шифр студента _____ (номер залікової книжки)

Перевірив: _____ (прізвище, ім'я, по-батькові викладача)

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2019

Виробничо-практичне видання

Методичні рекомендації та контрольні роботи з навчальної
дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

*(для студентів I курсу заочної форми навчання за
спеціальностей 073 – Менеджмент,
241 – Готельно-ресторанна справа, 242 – Туризм)*

Укладачі: **КОВАЛЕНКО** Людмила Борисівна
КУЗНЕЦОВА Ганна Анатольєвна
МОРДОВЦЕВ Сергій Михайлович
ЯКУНІН Анатолій Вікторович

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *Л. Б. Коваленко*

План 2019, поз. 136 М

Підп. до друку 14.03.2019. Формат 60×84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 10,0
Тираж 60 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.