МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

Ю. В. Ситникова

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 1 курсу усіх спеціальностей прискореної форми навчання)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2018

УДК 517.3(078)

Ситникова Ю. В. Вища математика. Інтегральне числення : конспект лекцій (для студентів 1 курсу усіх спеціальностей прискореної форми навчання) / Ю. В. Ситникова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 113 с.

Автор
канд. пед. наук, доц. Ю. В. Ситникова

Рецензенти:

Л. Б. Коваленко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова);

М. В. Сидоров, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики (Харківський національний університет радіоелектроніки).

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 1 від 31 серпня 2018 р.

Конспект складено з метою допомогти студентам усіх спеціальностей прискореної форми навчання під час вивчення теми «Інтегральне числення», яка розглядається в курсі вищої математики.

© Ю. В. Ситниковаа, 2018
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018

ЗМІСТ

Вступ……. 5
Лекція 1……. 6
1 Поняття первісної та невизначеного інтегралу……... 6
2 Властивості невизначеного інтегралу. Таблиця невизначених інтегралів……. 9
3 Інтегрування методом заміни змінної ……..... 14
4 Інтегрування деяких функцій, що містять квадратних тричлен……. 15
Завдання для самоконтролю за *Лекцією 1*…… 18
Лекція 2……. 21
1 Метод інтегрування частинами…….. 21
2 Інтегрування найпростіших дробових раціональних функцій...…….. 24
3 Інтегрування раціонального дробу за допомогою розкладання його на прості дроби……. 28
Завдання для самоконтролю за *Лекцією 2*…… 32
Лекція 3……. 35
1 Інтегрування тригонометричних функцій …..... 35
2 Інтегрування деяких видів ірраціональностей. Тригонометричні підстановки……... 39
3 Інтеграли від функцій, що не виражаються через елементарні функції……..... 43
Завдання для самоконтролю за *Лекцією 3*…… 45
Лекція 4……. 48
1 Введення поняття визначеного інтегралу, означення та його властивості ...……... 48
2 Обчислення визначеного інтегралу. Теорема Ньютона–Лейбніца. Основні методи інтегрування визначеного інтегралу..……... 55

3 Невласні інтеграли: по нескінченному проміжку (першого роду) та від необмежених функцій (другого роду)…… 58
Завдання для самоконтролю за *Лекцією 4*……. 65
Лекція 5…….. 68
1 Геометричні застосування визначеного інтегралу: обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги кривої ……..…….. 68
2 Обчислення об’єму тіла обертання та площі його поверхні……. 78
3 Фізичні застосування визначеного інтегралу: маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас плоскої дуги…….. 84
4 Методи наближеного обчислення визначених інтегралів…… 90
Завдання для самоконтролю за *Лекцією 5*…… 94
Відповіді на завдання для самоконтролю…….. 98
Список рекомендованих джерел……. 99
Додатки……. 101
Додаток А Основні формули тригонометрії ……... 101
Додаток Б Таблиця похідних функції…….. 104
Додаток В Основні диференціали…… 106
Додаток Г Таблиця невизначених інтегралів…….. 107
Додаток Д Зображення деяких кривих та їх рівняння…… 109

.

ВСТУП

Конспект лекцій розроблено згідно з програми нормативної навчальної дисципліни «Вища математика» та робочої навчальної програми підготовки бакалавра за усіма спеціальностями, який розраховано для студентів денної прискореної форми навчання.

Теоретичний матеріал структуровано та узгоджено з аудиторними лекційними заняттями, що проводяться під час вивчення теми «Інтегральне числення».

Конспект лекцій містить теоретичний матеріал необхідний студентам для засвоєння основних знань з цієї теми та питання для самоперевірки. В конспекті розміщено значну кількість прикладів розв’язання типових задач, а також задач прикладного характеру, спрямованих на практичне застосування та закріплення отриманих знань для вирішення професійно-орієнтованих задач.

У додатках, наприкінці конспекту лекцій, розташовані додаткові відомості та матеріали.

Для більш поглибленого вивчення та пошуку довідникової інформації подано посилання на джерела, в яких можна знайти більш детальну інформацію про ті або інші математичні положення або доведення теорем, не представлених у цьому конспекті.

ЛЕКЦІЯ 1

План лекції:

1. Поняття первісної та невизначеного інтегралу.
2. Властивості невизначеного інтегралу. Таблиця невизначених інтегралів.
3. Інтегрування методом заміни змінної.
4. Інтегрування деяких функцій, що містять квадратний тричлен

1 Поняття первісної та невизначеного інтегралу

Як відомо, під час вирішення багатьох питань науки та техніки виникає потреба відшукати задану функцію за відомою похідної. Іншими слова, необхідно відновити функцію за похідною. Наприклад, знаючи, що швидкість матеріальної точки $v(t)$ є функція від часу t, ми зможемо з'ясувати шлях $s(t)$, який пройшла ця точка в залежності від часу t.

Задачу, в якій було задано функцію $F(x)$ і необхідно було знайти її похідну $f(x) = F'(x)$ нами було вирішено під час вивчення теми «Диференціальне числення» (для повторення цієї теми ви можете звернутися до відповідних джерел [7-10]). Тепер ми будемо розглядати обернену задачу, коли задана функція $f(x)$ й потрібно відшукати таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнюватиме $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Означення 1. Функція $F(x)$ називається *первісною* від функції $f(x)$ на проміжку X, якщо для всіх точок цього проміжку виконується рівність: $F'(x) = f(x)$.

Означення 2. Відшукання для функції всіх її первісних називається її інтегруванням, в цьому й полягає одна з задач інтегрального числення.

Наприклад, знайдемо первісну для функції $f(x)=x^2$. Згідно з означенням, такою функцією можна назвати $F(x)=\frac{x^3}{3}$, тому що $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{3x^2}{3}=x^2$. Але такими ж первісним функція водночас є функції $\frac{x^3}{3}-7$, $\frac{x^3}{3}+7$, …, оскільки похідна від цих функцій також дорівнює $f(x)=x^2$. Перевірити це ми можемо, якщо виконаємо операцію диференціювання, яка є зворотною:

$$\left(\frac{x^3}{3}-7\right)'=\left(\frac{x^3}{3}\right)'-(7)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-0=x^2, \qquad \left(\frac{x^3}{3}+7\right)'=x^2.$$

Таким чином, як висновок, ми можемо сформулювати наступну теорему.

Теорема 1. Якщо $F_1(x)$ та $F_2(x)$ дві первісних від функції $f(x)$ на проміжку X, то різниця між ними дорівнює постійному числу.

Наслідок з цієї теореми такий, що, якщо для деякої функції $f(x)$ первісною є функція $F(x)$, то будь-яка інша первісна має вигляд $F(x)+C$, де $C=const$.

Означення 3. Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x)+C$ називають *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначають символом $\int f(x)dx$, тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{, якщо } F'(x) = f(x),$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

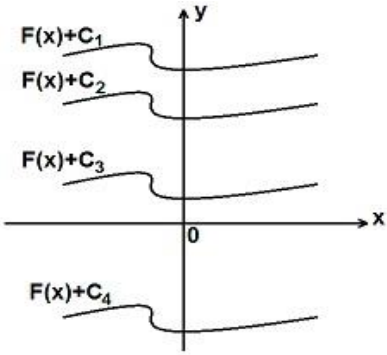

Рисунок 1.1

З геометричної точки зору, невизначений інтеграл є сукупністю кривих (рисунок 1.1), кожну з яких отримано завдяки зсуву однієї з кривих паралельно самій собі вниз або вгору, тобто вздовж осі ординат. Таким чином, невизначений інтеграл – це сімейство функції $y = F(x) + C$.

Отже, невизначений інтеграл для функції $f(x) = x^2$ має вигляд

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Зауваження 1. Під знаком інтегралу пишуть диференціал шуканої первісної функції, а не її похідну (зверніть увагу, у нашому прикладі це $x^2 dx$).

Зауваження 2. Не для будь-якої функції існує невизначений інтеграл. Первісна (а, отже, й невизначений інтеграл) існує у тому випадку, коли функція $f(x)$ неперервна на проміжку X. Первісна від елементарних функцій можливо й не буде представлена за допомогою кінцевого числа елементарних функцій.

Зауваження 3. Як відомо, похідна функції $y = F(x)$ визначає кутовий коефіцієнт дотичної до відповідного графіку функції. Тож, задачу відшукання первісної $F(x)$ для заданої функції $f(x)$ можна тлумачити як задачу, в якій потрібно знайти таку криву $y = F(x)$ для якої має сенс заданий закон зміни кутового коефіцієнту дотичної, тобто:

$$tg\alpha = f(x) = F'(x).$$

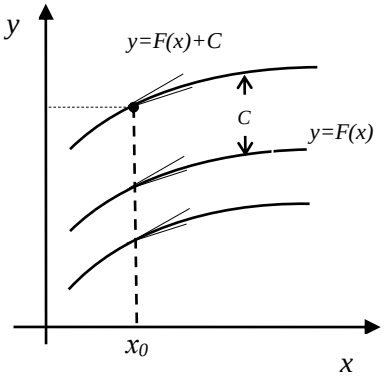

Рисунок 1.2

Якщо $y = F(x)$ є однією з таких кривих (рисунок 1.2), то усі інші ми можемо отримати завдяки зсуву вдовж осі ординат (на довільну величину відрізка C). Для того, щоб виокремити таку криву з усього різноманіття кривих, достатньо, наприклад, задати координати точки (x_0, y_0) через яку вона має пройти. Ці значення x_0, y_0 називають початковими значеннями для змінних x та y. Початкова умова для нашої кривої $y_0 = F(x_0) + C$ отримаємо $C = y_0 - F(x_0)$.

2 Властивості невизначеного інтегралу. Таблиця невизначених інтегралів

Властивості невизначеного інтегралу:

1. Похідна від невизначеного інтегралу дорівнює

підінтегральній функції, що є наслідком означення 3

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Диференціал від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральному виразу

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

3. Невизначений інтеграл від диференціалу деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Зауваження 4. Згідно з властивостями 2 та 3, знак диференціалу d та знак інтегралу $\int$ скорочуються, але за властивістю 3 до первісної $F(x)$ слід додати константу C.

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми неперервних функцій дорівнює сумі їх невизначених інтегралів

$$\int\left[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx.$$

5. Постійний множник можна винести за знак невизначеного інтегралу

$$\int C \cdot f(x)dx = C\int f(x)dx.$$

Теорема 2. Якщо аргумент підінтегральної функції лінійний відносно змінної, то справедливі такі формули:

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C,\ b = const,$$

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C,\ a = const,$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Надамо таблицю основних та додаткових невизначених інтегралів.

Таблиця 1.1 – Таблиця невизначених інтегралів

Основні невизначені інтеграли			
1	$\int 0\,du = C$	5	$\int \sin u\ du = -\cos u + C$
2	$\int u^{\alpha}\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	6	$\int \cos u\ du = \sin u + C$
2а	$\int du = u + C$	7	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\ u + C$
2б	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	8	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\ ctg\ u + C$
2в	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	9	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$
3	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	10	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+b}} = \ln\left\lvert u+\sqrt{u^2+b}\right\rvert + C$
4	$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	11	$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\ arctg\frac{u}{a} + C$
4а	$\int e^u\,du = e^u + C$	12	$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$
Додаткові невизначені інтеграли			
1	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert tg\frac{u}{2}\right\rvert + C$	2	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
3	$\int tg\,u\ du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	4	$\int ctg\,u\ du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
5	$\int sh\,u\ du = ch\,u + C$	6	$\int ch\,u\ du = sh\,u + C$

Продовження таблиці 1.1

7	$\int \frac{du}{ch^2 u} = th\, u + C$	8	$\int \frac{du}{sh^2 u} = -\, cth\, u + C$
9	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\; du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \ln\left\| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\| + C$		
10	$\int \sqrt{a^2 - u^2}\; du = \frac{1}{a} u \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{u}{a} + C$		
11	$\int e^{au} \sin bu\; du = \frac{-b e^{au} \cos bu + a e^{au} \sin bu}{a^2 + b^2} + C$		
12	$\int e^{au} \cos bu\; du = \frac{a e^{au} \cos bu + b e^{au} \sin bu}{a^2 + b^2} + C$		

Завдяки вищезазначеним властивостям та представленій таблиці невизначених інтегралів можемо виконувати безпосереднє інтегрування**.**

Приклад 1. Знайти невизначені інтеграли

$$\text{а)}\ \int \left(x^3 + \sqrt[4]{x} - \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} \right) dx,\ \text{б)}\ \int \frac{dx}{\sqrt{7 - 9x^2}}.$$

Розв'язання: а) застосуємо властивості 5, 4 невизначеного інтегралу та таблицю 1 (формула 2):

$$\int \left(x^3 + \sqrt[4]{x} - \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} \right) dx = \int x^3 dx + \int \sqrt[4]{x} dx - \int \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\, dx = \int x^3 dx + \int x^{1/4} dx -$$

$$-2\int x^{-3/5} dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^{1/4+1}}{1/4+1} - 2\frac{x^{-3/5+1}}{-3/5+1} + C = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^{5/4}}{5} - \frac{10x^{2/5}}{2} + C =$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{4\sqrt[4]{x^5}}{5} - \frac{10\sqrt[5]{x^2}}{2} + C;$$

б) застосуємо формулу 9 з основної таблиці невизначених інтегралів, але попередньо виконаємо деякі перетворення

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(\frac{7}{9}-x^2\right)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{7}{9}-x^2\right)}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{\sqrt{7}} + C .$$

Приклад 2. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \cos 3x dx$; б) $\int 3^{5-2x} dx$; в) $\int \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x} dx$.

Розв'язання: а) під час знаходження цього інтегралу слід звернути увагу, що аргумент функції $3x$, а диференціал змінної x. Тож, звертаючи увагу на твердження теореми 2, та з таблиці основних інтегралів будемо мати таку відповідь

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C ;$$

б) візьмемо до уваги твердження теореми 2 та таблицю основних невизначених інтегралів, отримаємо:

$$\int 3^{5-2x} dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{5-2x}}{\ln 3} + C ;$$

в) виконаємо почленнє ділення та використаємо властивість 4, враховуючи теорему 2:

$$\int \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x} dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{\sin 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x}\right) dx = \int dx + \int ctg 2x dx =$$

$$= x + \frac{1}{2}\ln\left|\sin 2x\right| + C .$$

3 Інтегрування методом заміни змінної

Метод заміни змінної полягає в тому, щоб за допомогою введення нової змінної заданий інтеграл привести до табличного. Застосовуються цей метод у випадках, коли підінтегральний вираз містить функцію разом з її похідною (додатки Б, В):

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \left| \begin{matrix} t=\varphi(x), \\ dt=\varphi'(x)dt \end{matrix} \right| = \int f(t)dt = F(t)+C = F(\varphi(x))+C$$

або

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x=\varphi(t); \\ dx=\varphi'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = H(t)+C =$$

$$= \left| t=\varphi^{-1}(x) \right| = H\left(\varphi^{-1}(x)\right)+C\ .$$

Зауваження 5. Обирати функцію $x=\varphi(t)$ слід так, щоб можна було знайти отриманий невизначений інтеграл, тобто $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл: $\int \frac{e^{tg2x}}{\cos^2 2x}dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{e^{tg2x}}{\cos^2 2x}dx = \int e^{tg2x}\frac{1}{\cos^2 2x}dx = \left| \begin{matrix} t=tg2x, \\ dt=\frac{2}{\cos^2 2x}dx \,\Big|:2, \\ \frac{dt}{2}=\frac{1}{\cos^2 2x}dx \end{matrix} \right| = \int e^t\frac{dt}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{tg2x}+C\ .$$

Цей метод є основним методом інтегрування. У деяких випадках, коли ми користуємось іншими методами, виникає потреба у застосуванні цього методу як допоміжного. Успіх реалізації цього методу полягає у правильному виборі заміни змінної, завдяки якій процес інтегрування спрощується та як скоріше приводить нас до правильної відповіді.

Розглянемо деякі інтеграли, технологія знаходження яких базується на вивчених нами методах інтегрування.

4 Інтегрування деяких функцій, що містять квадратний тричлен.

Розглянемо інтегрування виразів, що містять у знаменнику квадратний тричлен, тобто інтеграли виду

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Знаходження інтегралів виду I_1, I_2 приводиться до основних невизначених інтегралів у таблиці 1.1 (формули 9-12), для цього необхідно в знаменнику вираз $ax^2 + bx + c$ доповнити до повного квадрату, а саме:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + R\right),\ R = -\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}.$$

Приклад 4. Знайти $\int \frac{dx}{3x^2 - 6x + 9}$.

Розв'язання. Доповнимо до повного квадрату вираз у

знаменнику

$$\int \frac{dx}{3x^2-6x+9}=\int \frac{dx}{3\left(x^2-2x+3\right)}=\int \frac{dx}{3\left(\left(x^2-2x+1\right)-1+3\right)}=\int \frac{dx}{3\left(\left(x-1\right)^2+2\right)}=$$

після цього, виконавши заміну змінної $t=x-1$, ми зможемо отриманий інтеграл привести до вигляду табличного інтегралу з основної таблиці невизначених інтегралів (формула 11)

$$=\begin{vmatrix} t=x-1 \\ dt=dx \end{vmatrix}=\int \frac{dt}{3\left(t^2+2\right)}=\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C\ .$$

Знаходження інтегралів виду

$$I_3=\int \frac{\left(Ax+B\right)dx}{ax^2+bx+c}\quad I_4=\int \frac{\left(Ax+B\right)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

виконуємо так:

по-перше, знаходимо похідну від квадратного тричлену, що розташований у знаменнику:

$$\left(ax^2+bx+c\right)'=2ax+b\ ;$$

по-друге, завдяки тотожнім перетворенням приводимо знайдену похідну до лінійного виразу, що містив заданий інтеграл у чисельнику: $\frac{A}{2a}\left(2ax+b\right)-\frac{Ab}{2a}+B=Ax+B$;

по-третє, отриманий вираз підставляємо у чисельник, розбиваємо інтеграл на суму двох інтегралів та знаходимо кожен окремо:

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) - \frac{Ab}{2a} + B}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)}{ax^2+bx+c} dx + \int \frac{-\frac{Ab}{2a}+B}{ax^2+bx+c} dx.$$

Приклад 4. Знайти $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{3x^2-6x+9}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{3x^2-6x+9}} = \left| \begin{array}{l} \left(3x^2-6x+9\right)' = 6x-6, \\ \frac{1}{3}(6x-6)+2+1 = 2x+1 \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{3}(6x-6)+2+1}{\sqrt{3x^2-6x+9}} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{(6x-6)}{\sqrt{3x^2-6x+9}} dx + \int \frac{2+1}{\sqrt{3x^2-6x+9}} dx = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \frac{1}{3}\int \frac{(6x-6)}{\sqrt{3x^2-6x+9}} dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x^2-6x+9, \\ dt = (6x-6)dx \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}\sqrt{t} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3x^2-6x+9} + C;$$

$$I_2 = 3\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+9}} = \left| \begin{array}{l} 3x^2-6x+9 = 3\left(x^2-2x+3\right) = \\ = 3\left((x-1)^2+2\right), \ t = x-1, dt = dx \end{array} \right| = \frac{3}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}} \ln\left|t + \sqrt{t^2+2}\right| + C = \frac{3}{\sqrt{3}} \ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2+2}\right| + C;$$

$$I_1 + I_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3x^2-6x+9} + \frac{3}{\sqrt{3}} \ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2+2}\right| + C.$$

Завдання для самоконтролю за *лекцією 1*

1. Вставити пропущене слово.

_____ множник можна виносити за знак невизначеного інтегралу.

V1. Сталий; V2. Змінний; V3. Додатний; V4. Загальний; V5. Інша відповідь.

2. Завдяки яким властивостям невизначеного інтегралу можна виконувати безпосереднє інтегрування.

V1. Усі; V2. 3 та 4; V3. 4 та 5; V4. 2 та 3; V5. Інша відповідь.

3. Вставити пропущене слово.

Функція, похідна якої на деякому проміжку дорівнює нулю, _____ на цьому проміжку.

V1. від'ємна; V2. додатна; V3. стала; V4. змінна; V5. Інша відповідь.

4. Під знаком інтегралу пишуть

V1. функцію; V2. похідну функції; V3. диференціал функції; V3. первісну функцію; V5. Інша відповідь.

5. Визначити, які з наведених нижче інтегралів табличні

V1. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$; V2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+5}}$; V3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^5}}$; V4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^5}+3}$.

6. Невизначений інтеграл $\int \cos^4 x \cdot \sin x dx$ дорівнює

V1. $\frac{\cos^5 x}{5}+C$; V2. $-\frac{\cos^5 x}{5}+C$; V3. $5cos^5 x+C$;

V4. $-4cos^3 x+C$; V5. Інша відповідь.

7. Встановити відповідність між заданим інтегралом за запропонованими відповідями. Серед заданих варіантів відповідностей оберіть правильний.

Заданий інтеграл	Запропонована відповідь	Варіанти відповідності (v)
1) $\int \frac{dx}{\cos^2(x/2)}$	а) $\frac{1}{2}\ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$	V1. 1-а, 2-г, 3-б, 4-в
2) $\int \frac{dx}{4x^2+1}$	б) $\frac{1}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right\rvert + C$	V2. 1-а, 2-г, 3-б, 4-в
3) $\int \frac{dx}{\cos(x/2)}$	в) $2tg(x/2)+C$	V3. 1-в, 2-г, 3-а, 4-б
4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$	г) $\frac{1}{2}arctg(2x)+C$	V4. Інша відповідь

8. Невизначений інтеграл $\int \sqrt{\frac{\arccos 3x}{1-9x^2}}dx$ дорівнює

V1. $-\frac{1}{3}\arcsin^{\frac{1}{2}} 3x + C$; V2. $-\frac{2\sqrt{(\arccos 3x)^3}}{3} + C$;

V3. $\frac{-2}{3\sqrt{\arccos 3x}} + C$; V4. $-\frac{2\sqrt{(\arccos 3x)}}{3} + C$.

9. Заміна змінної у невизначеному інтегралі може відбуватись за схемою:

V1. $t = \varphi(x)$, $dt = dx$; V2. $x = \varphi(t)$, $dx = dt$;

V3. $x = \varphi(t)$, $dx = d\varphi(t)$; V4. Інша відповідь.

10. Повний квадрат для виразу $x^2 - 6x + 5$ має вигляд

V1. $(x-3)^2-4$; V2. $(x-2)^2-4$;

V3. $(x-2)^2+4$; V4. Інша відповідь.

11. Невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ дорівнює

V1. $\arcsin\frac{x+1}{2}+C$; V2. $\frac{1}{4}\ln\frac{x+1}{x-3}+C$;

V3. $\ln\left|x+1+\sqrt{3-2x-x^2}\right|+C$; V4. $arctg\frac{x+1}{2}+C$.

12. Знайти невизначені інтеграли:

1) $\int \frac{(x-1)dx}{5-2x^2}$; 2) $\int \frac{dx}{(2x^2+1)arctg(x\sqrt{2})}$; 3) $\int \frac{5^{\sqrt{2x}}dx}{\sqrt{x}}$;

4) $\int \frac{dx}{x^2+4x+14}$; 5) $\int \frac{dx}{x^2+4x+14}$; 6) $\int \frac{(7x-1)dx}{\sqrt{2-x^2-3x}}$.

ЛЕКЦІЯ 2

План лекції:

1. Метод інтегрування частинами.
2. Інтегрування найпростіших дробових раціональних функцій.
3. Інтегрування раціонального дробу за допомогою розкладання його на прості дроби.

1 Метод інтегрування частинами

У випадках, коли підінтегральний вираз представлено як добуток двох функцій, одна з яких алгебраїчна (наприклад, степенева функція x^n), а друга – трансцендентна (логарифмічна, показникова, тригонометрична або обернена тригонометрична), то застосовують *метод інтегрування частинами*.

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – дві неперервні функції, які мають неперервні похідні. Тоді, як відомо, диференціал добутку цих функцій має вид

$$d(u \cdot v) = vdu + udv .$$

Проінтегруємо обидві части

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv ,$$

або

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du .$$

Остання формула і є формулою *інтегрування частинами*.

Застосовувати цю формулу доцільно тоді, коли інтеграл праворуч простіший, ніж той, що ліворуч, або

йому подібний. Як правило, за u вибирають функцію, яка спрощується при диференціюванні. Тоді за dv – те, що залишилось, але ця частина має містити dx та бути інтегрованою. Функцію v знаходять у явному вигляді як одну з первісних $\int dv$ (поклавши $C=0$).

Зауваження 1. Частина dv не повинна містити такі функції, як логарифмічні, обернені тригонометричні, бо тоді не буде виконувати умова про інтегрованість цієї частини.

Зауваження 2. Іноді метод інтегрування частинами необхідно застосовувати декілька разів. А інколи, його застосування приводить до початкового інтегралу, в цьому випадку, такі інтеграли називають *зворотніми*.

Розглянемо декілька прикладів. Застосування методу інтегрування частинами.

Приклад 1. Знайти невизначені інтеграли:

$$\text{а) } \int x\cdot 2^{3x}dx\,;\ \text{б) } \int x^2\cdot \ln x dx\,;\ \text{в) } \int e^x\cdot \cos 2x dx\,.$$

Розв'язання:

$$\text{а) } \int x\cdot 2^{3x}dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \\ dv = 2^{3x}dx, \\ du = dx, \\ v = \int 2^{3x}dx = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2^{3x}}{\ln 2} \end{array} \right| = uv - \int v du = x\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{3x}}{\ln 2} -$$

$$-\frac{1}{3\ln 2}\int 2^{3x}dx = \frac{x\cdot 2^{3x}}{3\ln 2} - \frac{1}{3\ln 2}\cdot\frac{2^{3x}}{3\ln 2} + C\,;$$

б) $\int x^2 \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \\ dv = x^2 dx, \\ du = \dfrac{dx}{x}, \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right| = \dfrac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \dfrac{x^3}{3} . \dfrac{dx}{x} = \dfrac{x^3}{3} \cdot \ln x - \dfrac{x^3}{9} + C$;

в) $\int e^x \cdot \cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x, \\ dv = \cos 2x dx, \\ du = e^x dx, \\ v = \dfrac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \dfrac{e^x}{2} \sin 2x - \dfrac{1}{2} \int \sin 2x \cdot e^x dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} u = e^x, \\ dv = \sin 2x dx, \\ du = e^x dx, \\ v = -\dfrac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = \dfrac{e^x}{2} \sin 2x - \dfrac{1}{2} \left(-\dfrac{e^x}{2} \cos 2x + \dfrac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx \right) =$$

$$= \dfrac{e^x}{2} \sin 2x + \dfrac{e^x}{4} \cos 2x - \dfrac{1}{4} \int e^x \cos 2x dx.$$

Як бачимо, ми повернулися до заданого інтегралу, тобто заданий інтеграл був зворотнім. Знайдемо вираз для цього інтегралу. Перенесемо невизначені інтеграли ліворуч та отримаємо остаточну відповідь

$$\dfrac{5}{4} \int e^x \cos 2x dx = \dfrac{e^x}{2} \sin 2x + \dfrac{e^x}{4} \cos 2x;$$

$$\int e^x \cos 2x dx = \dfrac{2e^x}{5} \sin 2x + 5e^x \cos 2x + C.$$

2 Інтегрування найпростіших дробових раціональних функцій.

Розглянемо ще один приклад знаходження невизначеного інтегралу $\int x \cdot \ln(4x+5)dx$.

Для знаходження цього інтегралу застосуємо також метод інтегрування частинами. Виберемо за $u = \ln(4x+5)$, тоді $dv = xdx$. Виконаємо додаткові обчислення:

$$du = \left(\ln(4x+5)\right)' dx = \frac{4dx}{4x+5}; \quad v = \int dv = \int xdx = \frac{x^2}{2}.$$

Застосуємо формулу $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, підставляючи відомі вирази

$$\int x \cdot \ln(4x+5)dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(4x+5) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{4dx}{4x+5} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(4x+5) - \int \frac{2x^2 dx}{4x+5}.$$

Розглянемо окремо рішення інтегралу $\int \frac{2x^2 dx}{4x+5}$. Підінтегральною функцією є *дробово-раціональна функція* $\frac{2x^2}{4x+5}$ у якої в чисельнику та знаменнику знаходяться многочлени, які мають різний порядок. У чисельнику вираз $2x^2$ – це многочлен другого порядку, а у знаменнику $4x+5$ – многочлен першого порядку. Питання постає таке: як ми маємо проінтегрувати цю функцію? Але перш ніж шукати відповідь на це питання, пригадаємо поняття раціонального дробу та з'ясуємо як інтегрувати найпростіші раціональні дроби

Означення 1. Раціональним дробом (дробово-раціональною функцією) називається відношення двох много-

членів $P_m(x)/Q_n(x)$, де $P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_{m-1}x+a_m$ многочлен степеня m, $Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_{n-1}x+b_n$ многочлен степеня n.

Якщо степінь m чисельника нижче степеня знаменника n, то дріб називається *правильним*, якщо, навпаки, $m>n$ або $m=n$, то дріб – *неправильний*.

Як нам відомо з курсу шкільної математики будь-який неправильний раціональний дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можна представити у вигляді суми цілої частини та правильного дробу, тобто:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=G_{m-n}(x)+\frac{R_k(x)}{Q_n(x)},$$

причому цей розклад єдиний.

У такому розкладі $G_{m-n}(x)$ – це многочлен, який називають *цілою частиною* раціонального дробу, а $\frac{R_k(x)}{Q_n(x)}$ – правильний дріб, тобто $k<n$. Многочлени $G_{m-n}(x)$ і $R_k(x)$ – відповідно частка й остача від ділення «кутом» $P_m(x)$ на $Q_n(x)$.

Приклад 1. Виділити цілу частину неправильного дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^4-3x^2+5x+4}{(x+4)(x-2)}$ і подати його у вигляді суми цілої частини та правильного дробу.

Розв'язання. Для виділення цілої частини застосуємо ділення «кутом» многочлена на многочлен, але спочатку розкриємо дужки у знаменнику, виконавши множення, та

представимо результат у стандартному вигляді в порядку спадання степенів: $Q(x)=(x+4)(x-2)=x^2+2x-8$; поділимо

$$
\begin{array}{l|l}
_\,x^4+0x^3-3x^2+5x+4 & \underline{x^2+2x-8} \\
\underline{x^4+2x^3-8x^2} & x^2-2x+9 \\
\quad _-2x^3+5x^2+5x+4 & \\
\quad \underline{-2x^3-4x^2+16x} & \\
\qquad _\,9x^2-11x+4 & \\
\qquad \underline{9x^2+18x-72} & \\
\qquad\qquad -29x+76 &
\end{array}
$$

Таким чином,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=x^2-2x+9+\frac{-29x+76}{x^2+2x-8}$$

або

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=x^2-2x+9+\frac{-29x+76}{(x+4)(x-2)}.$$

Зауваження 3. Виділення цілої частини неправильного раціонального дробу інколи можна зробити простіше, виконавши алгебраїчні перетворення чисельника.

Отже, як з’ясувалося, наша функція $\frac{2x^2}{4x+5}$ є неправильним раціональним дробом. Знаючи, що неправильний дріб можна представити у вигляді суми цілої та дробової частини, спробуємо виділимо цілу частину в неправильному раціональному дробу $\frac{2x^2}{4x+5}$. Для цього

поділимо «кутом» чисельник $2x^2$ на знаменник $4x+5$, а потім запишемо цей дріб $\frac{2x^2}{4x+5}$ у вигляді суми цілої та дробової частини:

$$
\begin{array}{r|l}
-2x^2 & 4x+5 \\ \cline{2-2}
2x^2+\frac{5}{2}x & \frac{1}{2}x-\frac{5}{8} \\ \cline{1-1}
-\frac{5}{2}x & \\
-\frac{5}{2}x-\frac{25}{8} & \\ \cline{1-1}
\frac{25}{8} &
\end{array}
$$

Отже, $\frac{2x^2}{4x+5}=\frac{x}{2}-\frac{5}{8}+\frac{25/8}{4x+5}$. Проінтегрувати таку функцію можна, якщо окремо знайти інтеграл від кожного доданку, з властивістю 4 невизначеного інтегралу (див. лекцію 1). Маємо остаточно:

$$\int\frac{2x^2dx}{4x+5}=\int\frac{x}{2}dx-\int\frac{5}{8}dx+\int\frac{25/8}{4x+5}dx=\frac{x^2}{4}-\frac{5x}{8}+\frac{25}{8}\cdot\frac{1}{4}\ln|4x+5|+C\,.$$

Приклад 2. Знайти невизначений інтеграл $\int\frac{x^4}{x^2+1}dx$.

Розв'язання. Виділимо цілу частину неправильного дробу $\frac{x^4}{x^2+1}$ і подамо його у вигляді суми цілої частини (многочлена) та правильного дробу Скористаємося алгебраїчними перетвореннями (зауваження 3):

$$\frac{x^4}{x^2+1}=\frac{x^4-1+1}{x^2+1}=\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}.$$

Проінтегруємо та отримаємо відповідь

$$\int\frac{x^4}{x^2+1}dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int x^2dx-\int dx+\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{x^3}{3}-x+arctgx+C.$$

Інтегрування многочленів процес не дуже складний, найбільші труднощі зустрічаються під час інтегрування правильних раціональних дробів. Для інтегрування правильних раціональних дробів використовують метод розкладання на найпростіші дробі, згідно з твердженням, що будь-який правильний раціональний дріб можна представити у вигляді суми найпростіших дробів.

3 Інтегрування раціонального дробу за допомогою розкладання його на прості дробі

Означення 2. Правильні раціональні дробі виду:

$$\frac{A}{x-a};\ \frac{A}{(x-a)^n};\ \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c};\ \frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

називають *елементарними (найпростішими) дробами* відповідно I, II, III, IV типу.

Як відомо, будь-який многочлен можна записати у вигляду добутку лінійних та квадратичних множників з дійсними коефіцієнтами, тобто

$$Q(x)=(x-a)^k\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)^t\cdot\ldots.$$

Кожному множнику $(x-a)^k$ у розкладанні знаменника

$Q(x)$ відповідає в розкладання дробі $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ k доданкам суми найпростіших дробів виду II

$$\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\frac{A_{k-2}}{(x-a)^{k-2}}+\ldots+\frac{A_1}{(x-a)};$$

а кожному множнику $(x^2+px+q)^t$ відповідає сума t найпростіших дробів IV

$$\frac{A_t x+B_t}{\left(x^2+px+q\right)^t}+\frac{A_{t-1}x+B_{t-1}}{\left(x^2+px+q\right)^{t-1}}+\ldots+\frac{A_1 x+B_1}{\left(x^2+px+q\right)}.$$

Постійні $A_k, A_{k-1},\ldots,A_1$ та $A_t, A_{t-1},\ldots,A_1$ знаходять методом невизначених коефіцієнтів або методом визначених значень (часткових значень).

У випадку коли множники у розкладанні знаменника мають кратність 1 (тобто, $k=1$, $t=1$), то сума найпростіших дробів буде складатися з найпростіших дробів I й II видів, наприклад:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{5x+4}{(x+4)(x-2)(x^2+1)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Таким чином, інтегрування правильних раціональних дробів полягає в тому, що, виконавши розкладання на множники знаменника дробу та розклавши на найпростіші дробі, заданий інтеграл заміняємо сумою інтегралів від найпростіших дробів.

Приклад 3. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\displaystyle\int\frac{4x^2+5x+8}{(x+2)^2(x-1)}dx$; б) $\displaystyle\int\frac{5x+4}{(x+4)(x-2)(x^2+1)}dx$.

Розв'язання: а) $\int \frac{4x^2+5x+8}{(x+2)^2(x-1)}dx =$

$$= \int \left(\frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{x-1} \right) dx = \int \frac{A(x-1)+B(x+2)(x-1)+C(x+2)^2}{(x-1)(x+2)^2} dx =$$

Для знаходження постійних скористаємось методом окремих значень. Для цього знайдемо корені знаменника. Оскільки число 2 кратний корінь, то третє значення змінної x виберемо довільним чином

$$= \left| \begin{array}{c} A(x-1)+B(x+2)(x-1)+C(x+2)^2 = 4x^2+5x+8, \\ (x-1)(x+2)^2 = 0,\ x=1,\ x=-2,\ x=-1, \\ x=1,\ 9C=17,\ C=\frac{17}{9}, \\ x=-2,\ -3A=14,\ A=\frac{-14}{3}, \\ x=-1,\ -2A-2B+C=9,\ -2B=\frac{-20}{9}, B=\frac{10}{9} \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(\frac{-14/3}{(x+2)^2} + \frac{10/9}{(x+2)} + \frac{17/9}{x-1} \right) dx = \frac{14}{9(x+2)} + \frac{10}{9}\ln|x+2| + \frac{17}{9}\ln|x-1| + C;$$

б) $\int \frac{5x+4}{(x+4)(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{A}{x+4} + \frac{Bx+D}{x^2+1} \right) dx =$

$$= \int \frac{A(x^2+1)+(Bx+D)(x+4)}{(x+4)(x^2+1)} dx =$$

якщо розкрити дужки у чисельнику, то отримаємо

$$= \int \frac{Ax^2+A+Bx^2+Dx+4Bx+4D}{(x+4)(x^2+1)} dx =$$

скористаємось методом невизначених коефіцієнтів. Для цього прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях

змінної чисельника заданої дробі до коефіцієнтів дробі, яку ми отримали, починаючи від найстаршого степеня до найменшого, тож:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0, B=-4, \\ x^1 & D+4B=5, D=21, \\ x^0 & \qquad A=4, \end{array}$$

знаходимо інтеграл

$$\int\left(\frac{4}{x+4}+\frac{-4x+21}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{4}{x+4}dx-\int\frac{4xdx}{x^2+1}+\int\frac{21dx}{x^2+1}=4\ln|x+4|+$$

$$-2\int\frac{2xdx}{x^2+1}+21\cdot arctgx+C_1=4\ln|x+4|-2\ln\left|x^2+1\right|+21\cdot arctgx+C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл

$$I=\int\frac{-x^2+x-8}{(x^2+2x+2)(x-2)}dx.$$

Розв'язання. З огляду на розкладання знаменника (зверніть увагу, що многочлен x^2+2x+2 не має дійсних коренів, тому він не може бути представлений у вигляді добутку лінійних множників), маємо

$$I=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+2x+2}+\int\frac{C\,dx}{x-2}.$$

Тут $-x^2+x-8=(Ax+B)(x-2)+C(x^2+2x+2)$.

Використаємо комбінацію методу окремих значень і методу невизначених коефіцієнтів. Нехай $x=2$ (дійсний корінь), маємо $10C=-10$, $C=-1$; нехай $x=0$ (довільно взяте значення), тоді $-2B+2C=-8$; $B=4+C=3$. Прирівнявши коефіцієнти при x^2, маємо $A+C=-1$;

$A=-1-C=0$. Отже,

$$I=\int\frac{3dx}{x^2+2x+2}-\int\frac{dx}{x-2}=3\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}-\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=3arctg\,(x+1)-\ln|x-2|+C.$$

Більше прикладів можна знайти у [1; 6; 7; 9; 10] зі списку літератури.

Завдання для самоконтролю за *лекцією 2*

1. До яких із вказаних інтегралів слід застосувати інтегрування частинами:

V1. $\int x\ln x dx$; V2. $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$; V3. $\int\frac{1}{x}dx$; V4. $\int\frac{\ln x}{x}dx$; V5. інша відповідь.

2. До яких із вказаних інтегралів не слід застосувати інтегрування частинами:

V1. $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$; V2. $\int\frac{xdx}{e^{x^2}}$; V3. $\int x\ln x dx$; V4. $\int\arcsin x dx$; V1. інша відповідь.

3. Функцію $\frac{P(x)}{Q(x)}$ вважають раціонально-дробовою, якщо

V1. $P(x)$ та $Q(x)$ довільні функції; V2. $P(x)$ та $Q(x)$ многочлени; V3. $P(x)$ довільна функція, а $Q(x)$ многочлен; V4. $P(x)$ многочлен, а $Q(x)$ довільна функція; V5. інша відповідь.

4. Правильний раціональний дріб інтегрується шля-

хом:

V1. розкладання чисельника на множники; V2. розкладання чисельника і знаменника на множники; V3. розкладання раціонального дробу на суму елементарних дробів; V4. ділення чисельника і знаменника на старший степінь; V5. інша відповідь.

5. Що треба зробити, якщо раціональний дріб неправильний

V1. розкладання чисельника на множники; V2. розкладання раціонального дробу на суму елементарних дробів; V3. поділити чисельник на знаменник; V4. ділення чисельника і знаменника на старший степінь; V5. інша відповідь.

6. Невизначений інтеграл $\int (x+3)\cos x dx$ дорівнює

V1. $(x+3)\sin x - \cos x + C$; V2. $-\sin x \cdot \frac{(x+3)^2}{2} + C$;

V3. $\sin x - \cos x(x+3) + C$; V4. $\cos x + (x+3)\sin x + C$;

V5. інша відповідь.

7. Інтеграл що має вигляд $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ зводиться до табличного шляхом:

V1. виділення під коренем повного квадрату; V2. піднесення до квадрата; V3. заміни змінної; V4. інтегрування частинами; V5. інша відповідь.

8. Невизначений інтеграл $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ дорівнює

V1. $-\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x} + C$; V2. $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$;

V3. $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x^2}+C$; V4. $-\frac{\ln x^2}{x}+\frac{1}{x}+C$; V5. інша відповідь.

9. Вставити пропущене слово.

Неправильний раціональний дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можна представити у вигляді _____ цілої частини та правильного дробу

V1. різниці; V2. суми; V3. добутку; V4. частки; V5. Інша відповідь.

10. Як називають інтеграл, якщо під час його знаходження було отримано початковий інтеграл?

V1. обернений; V2. зворотній; V3. заданий; V4. початковий; V5. Інша відповідь.

11. Знайти невизначені інтеграли

1) $\int\frac{(2x^2-3x-3)dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}$; 2) $\int x\operatorname{arctg}2x dx$; 3) $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$;

4) $\int\frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^3+5x}dx$; 5) $\int\frac{xdx}{(1-x)^2(1+x^2)}$; 6) $\int(x^3+3x-1)\ln x dx$;

7) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+5x-1}}$; 8) $\int\frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+5}}$; 9) $\int\frac{xdx}{\sqrt{3x^2-2x+4}}$.

ЛЕКЦІЯ 3

План лекції:

1. Інтегрування тригонометричних функцій.
2. Інтегрування деяких видів ірраціональностей. Тригонометричні підстановки.
3. Інтеграли від функцій, що не виражаються через елементарні функції.

1 Інтегрування тригонометричних функцій

Розглядаючи питання інтегрування функцій, не слід забувати про тригонометричні функції, які відіграють важливу роль в техніці та різноманітних науково-практичних дослідженнях.

Будемо вивчати питання знаходження інтегралу виду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx .$$

Як бачимо вираз $R(\sin x, \cos x)$ є раціональний від тригонометричних функцій, оскільки усі тригонометричні функції можна представили через $\sin x$ та $\cos x$.

У випадку, коли у виразі $R(\sin x, \cos x)$ функції $\sin x$ та $\cos x$ мають непарні степені краще застосовувати тригонометричну підстановку $u = tg\frac{x}{2}$, яку називають *універсальною тригонометричною підстановкою*.

Враховуючи зазначену вище підстановку, спробуємо знайти вирази для функцій синуса та косинуса. За тригонометричними формулами половинного кута (додаток А), отримаємо такі вирази для $\sin x$ та $\cos x$:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2tg\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2};$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1-tg^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Повертаючись до підстановки $u = tg\frac{x}{2}$ та розв'язуючи тригонометричне рівняння, отримаємо $x = 2arctgu$, та знайдемо диференціал

$$dx = \left(2arctgu\right)' du = \frac{2du}{1+u^2}.$$

Зокрема для знаходження інтегралів виду $\int\frac{dx}{a\cos x + b\sin x + d}$ й застосовують цю підстановку, завдяки якій цей інтеграл перетворюється у інтеграл від раціонального дробу.

Приклад 1. Знайти інтеграл: $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$.

Розв'язання. $\int\frac{dx}{3+5\cos x} = \left| \begin{array}{c} u = tg\frac{x}{2},\ dx = \frac{2du}{1+u^2}, \\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \end{array} \right| =$

$$= \int\frac{2du}{(1+u^2)\left(3+5\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} = \int\frac{2du}{8-2u^2} = \int\frac{2du}{8-2u^2} = \int\frac{du}{4-u^2} = -\int\frac{du}{u^2-4} =$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right|+C.$$

Якщо ж степені функцій $\sin x$ та $\cos x$ парні, то зручніше користовувати підстановку $u=tgx$, тоді $dx=\frac{du}{1+u^2}$, $\sin^2 x=\frac{u^2}{1+u^2}$, $\cos^2 x=\frac{1}{1+u^2}$ (вивести ці формули самостійно). А також для інтегралів виду $\int R(tgx)dx$, в яких підінтегральна функція є раціональною функцією від tgx.

Приклад 2. Знайти інтеграл: $\int\frac{dx}{\sin^2 x-3\cos^2 x}$.

Розв'язання. $\int\frac{dx}{\sin^2 x-3\cos^2 x}=$

$$=\left|\begin{array}{c} u=tgx,\ dx=\frac{du}{1+u^2}, \\ \sin^2 x=\frac{u^2}{1+u^2},\ \cos^2 x=\frac{1}{1+u^2}\end{array}\right|=\int\frac{du}{u^2-3}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{tgx-\sqrt{3}}{tgx+\sqrt{3}}+C.$$

Знаходження інтегралу підінтегральна функція якого складається з добутку $\sin x$ та $\cos x$, а саме інтеграл виду $\int\sin^m x\cdot\cos^n x dx$, де $m,n\in Z$ залежить від показників степеня, а отже:

1) якщо $m,n>0$ та або m або n непарне, то використовують підстановку $u=\sin x$ $(u=\cos x)$;

Приклад 3. Знайти $\int\sin^3 x\cos^2 x dx$.

Розв'язання. Виокремимо множник $\sin x$:

$$\int \sin^3 x\cos^2 x dx = \int \sin^2 x\cos^2 x \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = \cos x,\ \ du = -\sin x dx, \\ -du = \sin x dx,\ \ \sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-u^2 \end{array} \right| = -\int \left(1-u^2\right)u^2 du =$$

$$-\int u^2 du + \int u^4 du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C .$$

2) якщо $m,n > 0$ та m, n – парні, то застосовують формули пониження порядку, як то:

$$\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right) = \cos^2 x ,\ \ \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right) = \sin^2 x ;$$

Приклад 4. Знайти $\int \cos^4 2x dx$.

Розв'язання. $\int \cos^4 2x dx = \int \cos^2 2x \cdot \cos^2 2x dx =$

$$\int \frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right)\cdot \frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right)dx = \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 4x + \cos^2 4x\right)dx = \frac{1}{4}\int dx +$$

$$+\frac{1}{4}\int \cos 4x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 4x dx = \frac{x}{4} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{1}{8}\int \left(1+\cos 8x\right)dx = \frac{x}{4} +$$

$$+\frac{\sin 4x}{16} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 8x}{64} + C .$$

3) якщо $m,n < 0$ та їх сума парне число, то застосовують підстановку $u = tgx\ \left(u = ctgx\right)$, яка дозволяє привести інтеграл до суми інтегралів від степеневих функцій;

Приклад 5. Знайти $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$.

Розв'язання. Як бачимо степені функцій $\sin x$ та $\cos x$ є від'ємними, тому скористаємось підстановкою $u = tgx$ та отримаємо

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \left| \begin{array}{c} u = tgx, \ \ dx = \dfrac{du}{1+u^2}, \\ \sin^2 x = \dfrac{u^2}{1+u^2}, \ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+u^2}. \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\left(1+u^2\right)^{3/2}\left(1+u^2\right)^{1/2} du}{\left(1+u^2\right)u^3} = \int \frac{1+u^2}{u^3} du = \int \frac{du}{u^3} + \int \frac{du}{u} = \frac{-1}{2u^2} + \ln u + C =$$

$$= \frac{-1}{2tg^2 x} + \ln\left|tgx\right| + C.$$

4) у випадку, коли один з показників степені дорівнює нулю, а інший від'ємний, то застосовують універсальну тригонометричну підстановку;

5) у випадку, коли показників степені $\sin x$ та $\cos x$ дорівнює одиниці, застосовуються формули перетворення добутку у суму та різницю (додаток А).

Приклад 6. Знайти інтеграл: $\int \cos 2x \sin 3x dx$.

Розв'язання. $\int \cos 2x \sin 3x dx =$

$$= \int \frac{1}{2}\left[\sin\left(2x+3x\right) + \sin\left(3x-2x\right)\right] dx = \frac{1}{2}\int \left[\sin 5x + \sin x\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 5x dx + \frac{1}{2}\int \sin x dx = -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

2 Інтегрування деяких видів ірраціональностей. Тригонометричні підстановки

Звернемо увагу також на інтегрування деяких виразів, що містять ірраціональність. По-перше, розглянемо випадки, коли підкореневий вираз *лінійний*, тобто має вигляд $ax+b$, де $a, b = const$.

Нехай ми маємо знайти інтеграл такого вигляду, як

$$\int R(x, \sqrt[k_1]{ax+b}, \sqrt[k_2]{ax+b}, \sqrt[k_3]{ax+b})dx,$$

тоді доцільно користуватися підстановкою $ax+b=t^n$, де $n = НСК(k_1, k_2, k_3)$, звідси отримаємо:

$$x = \frac{1}{a}\left(t^n - b\right),\ dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt.$$

Приклад 7. Знайти $\int \frac{\sqrt{x-3}dx}{\sqrt[3]{x-3}+2}$.

Розв'язання. $\int \frac{\sqrt{x-3}dx}{\sqrt[3]{x-3}+2} = \left| \begin{array}{c} x-3=t^6, \\ x=t^6+3,\ dt=6t^5dt \end{array} \right| = 6\int \frac{t^8}{t^2+2}dt.$

Оскільки підінтегральною функцією є неправильний дріб, то потрібно виділити цілу частину (зробити це самостійно), а потім окремо проінтегрувати правильні дробі. У результаті отримаємо таку відповідь

$$\frac{\sqrt[6]{(x-3)^7}}{7} - \frac{2\sqrt[6]{(x-3)^5}}{5} + \frac{4\sqrt{x-3}}{3} - 8\sqrt[6]{x-3} + \frac{16}{\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt[6]{x-3}}{\sqrt{2}} + C.$$

По-друге, розглянемо інтеграли в яких підінтегральна ірраціональна функція *нелінійна*, а саме інтеграли виду

$I_1 = \int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)dx$, $I_2 = \int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, $I_3 = \int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$,

які завдяки тригонометричним підстановкам $x = atgt$ (або $x = actgt$), $x = \frac{a}{\sin t}$ (або $x = \frac{a}{\cos t}$), $x = a\sin t$ (або $x = a\cos t$) відповідно приводяться до інтегралів від тригонометричних функцій.

Приклад 8. Знайти $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Розв'язання: підінтегральна функція містить нелінійний ірраціональний вираз виду $\sqrt{a^2-x^2}$, тому скористаємось відповідною триногометричною підстановкою

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left| \begin{array}{c} x = 2\sin t, \\ dx = 2\cos t dt, \\ 4-x^2 = 4-4\sin^2 t = 4\cos^2 t. \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(2\sin t)^2 2\cos t dt}{\sqrt{4\cos^2 t}} = \int \frac{(2\sin t)^2 2\cos t dt}{2\cos t} = 2\int \sin^2 t dt =$$

як бачимо, ми дійшли до інтегралу від тригонометричної функції $\sin x$ у парній степені, тому застосуємо формули зниження порядку (додаток А), отримаємо:

$$= 2\int \frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt = \int dt - \int \cos 2t dt = t - \frac{\sin 2t}{2} + C =$$

повернемось до первинної змінної x

$$= \left| \begin{array}{c} \textit{враховуючи} \\ t = \arcsin \frac{x}{2} \end{array} \right| = \arcsin \frac{x}{2} - \frac{\sin 2\left(\arcsin \frac{x}{2}\right)}{2} + C.$$

Розглянемо інтеграл виду $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$. Знайти первісну для такого інтегралу можна завдяки спеціальній підстановці $x = \frac{1}{t}$, після якої можна буде привести його до інтегралу від раціональної функції.

Приклад 9. Знайти $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}} =$

$$= \left| \begin{array}{c} x = \frac{1}{t}, \\ dx = -\frac{dt}{t^2}, \\ x^2 - x + 1 = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + 1 = \frac{1-t+t^2}{t^2} \end{array} \right| = \int \frac{-dt/t^2}{(1/t)\sqrt{(1-t+t^2)/t^2}} =$$

$$= \int \frac{-dt}{1-t+t^2} = -\int \frac{dt}{t^2 - t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1} = -\int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C = \left| \begin{array}{c} враховуючи \\ t = \frac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2-x}{x\sqrt{3}} + C.$$

Означення. Вираз $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, де m, n, p, a, b – сталі величини, називають *диференціальним біномом*.

Теорема. Інтеграл від диференціального бінома

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$$

якщо m, n, p – раціональні числа, приводиться до інтегралу від раціональної функції й виражається через елементарні функції в наступних випадках:

1) p ціле число (тобто додатне, від'ємне або нуль);

2) $\frac{m+1}{n}$ ціле число (тобто додатне, від'ємне або нуль);

3) $\frac{m+1}{n}+p$ ціле число (тобто додатне, від'ємне або нуль).

Приклад 10. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)} = \int x^{-\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)^{-1} dx$.

Як бачимо $m=-\frac{2}{3}$, $n=\frac{2}{3}$, $p=-1$; оскільки $p=-1$ (ціле число), покладемо $x^{\frac{2}{3}}=t$, тоді $x=t^{\frac{3}{2}}$, $dx=\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}dt$ та виконаємо перетворення підінтегрального виразу:

$$=\int t^{-1}(t+1)^{-1}\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{3}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}(t+1)^{-1}dt=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)}=$$

$$=\left|\begin{array}{c} t=u^2. \\ dt=2udu, \\ 1+t=1+u^2 \end{array}\right|=\frac{3}{2}\int\frac{2udu}{u\left(u^2+1\right)}=3\int\frac{du}{u^2+1}=3arctgu+C=$$

$$=3arctg\sqrt{t}+C=3arctg\sqrt{x^{2/3}}+C=3arctg\sqrt[3]{x}+C.$$

Більш детальну інформацію та інші приклади інтегрування тригонометричних й ірраціональних функцій можна знайти у [1; 6; 7; 8; 10; 11] зі списку літератури.

3 Інтеграли від функцій, що не виражаються через елементарні функції

У зауваженні на лекції 1 нами було зазначено, що не завжди первісна, навіть тоді, коли вона існує, може бути в

кінцевому виді представлена через елементарні функції, тож розглянемо такі функції. Такими функціями є первісні представлені такими інтегралами, як, наприклад:

$\int e^{x^2}dx$ – інтеграл Пуасона, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ – інтегральний синус,

$\int \frac{\cos x}{x}dx$ – інтегральний косинус, $\int \frac{dx}{\ln x}$ – інтегральний логарифм, $\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$ – інтеграли Френеля,

$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}dx$ – еліптичний інтеграл.

Очевидним є той факт, що первісна для таких інтегралів є деякою новою функцією, яка не може бути представлена як комбінація кінцевого числа елементарних функцій.

Так, наприклад, одна з таких первісних $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{x^2}dx + C$, яка обертається в нуль, якщо змінна x дорівнює нулю, називається *функцією Лапласа* й позначається $\Phi(x)$. Тож,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{x^2}dx + C, \text{ якщо } \Phi(0) = 0.$$

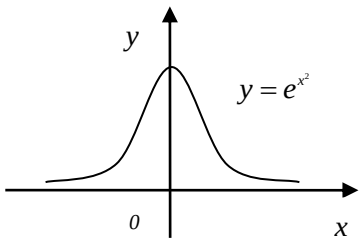

Рисунок 3.1

Ця функція вивчена достатньо добре та складені таблиці її значень для різних значень змінної x. На рисунках 3.1 та 3.2 зображено графіки підінтегральної функції $y = e^{x^2}$ та функції Лапласа $y = \Phi(x)$.

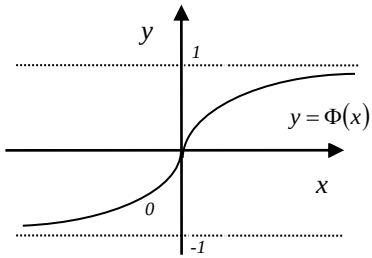

Рисунок 3.2

Еліптичним інтегралом, який позначають $E(x)$, є така первісна з первісних $\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}dx+C$, яка обертається в нуль коли значення змінної $x=0$, причому $k<1$. Тобто,

$$E(x)=\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}dx+C_2\text{, якщо } E(0)=0.$$

Та для цієї функції також складені таблиці значень для різних значень змінної x та параметру k, який називають *модулем*. Аргумент x трактується як кут, виражається у градусах, але й k (правильний дріб!) розглядається як синус деякого кута, який подається в таблиці замість модуля, й також, у градусах.

Таким чином, ми бачимо, що вищезазначені функції плідно досліджуються за їх інтегральними виразами та застосовуються в науці, хоча не можуть бути представлені через кінцеве число елементарних функцій. Слід також розуміти, що ми можемо зустріти подібні функції й під час звичайного інтегрування.

Завдання для самоконтролю за *лекцією 3*

1. Раціональний $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ дріб вважається правильним, якщо степені многочленів:

V1. рівні;V2. степінь чисельника більше за степінь знаменника; V3. степінь чисельника менша за степінь

знаменника; V4. відрізняються на один; V5. інша відповідь.

2. Які з наведених нижче інтегралів приводяться до інтегрування раціональних дробів:

V1. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$; V2. $\int R(x, \sqrt[k_1]{ax+b})dx$; V3. $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$; V4. $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + d}$; V5. інша відповідь.

3. Інтеграл $\int R(x, \sqrt[k_1]{x^{m_1}}, \sqrt[k_2]{x^{m_2}}, \sqrt[k_3]{x^{m_3}})dx$ раціоналізується підстановкою $x = t^n$, де n

V1. сума чисел k_1, k_2, k_3; V2. найбільше з чисел k_1, k_2, k_3; V3. найменше з чисел k_1, k_2, k_3; V4. найменше спільне кратне k_1, k_2, k_3; V5. інша відповідь.

4. Інтеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ береться за допомогою підстановки:

V1. $x = t^2$; V2. $x = \frac{1}{t}$; V3. $t = ax^2 + c$; V4. $t = \sqrt{ax^2+c}$; V5. інша відповідь.

5. Невизначений інтеграл $\int \sqrt{1+2x}dx$ дорівнює

V1. $\frac{1}{\sqrt{1+2x}} + C$; V2. $\frac{2\sqrt{1+2x}}{3} + C$; V3. $\frac{2\sqrt{(1+2x)^3}}{3} + C$; V4. $\frac{\sqrt{(1+2x)^3}}{3} + C$; V5. інша відповідь.

6. У яких випадках інтеграл $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ раціоналізується

V1. $\frac{m+1}{n}$ ціле число V2. $\frac{n+1}{m}$ ціле число; V3. p ціле число; V4. $\frac{n+1}{m}+p$ ціле число V5. інша відповідь.

7. Невизначений інтеграл $\int\frac{dx}{2x^2+3x+3}$ дорівнює

V1. $\frac{1}{2}arctg\frac{2x}{3}+C$; V2. $\ln\left|x-\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3}{2}}\right|+C$;

V3. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{4x-3}{4x+3}\right|+C$; V4. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|+C$; V5. інша відповідь.

8. Визначити інтеграли для знаходження яких потрібно застосувати тригонометричні підстановки

V1. $\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2-5x+2}}$; V2. $\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2+7}}$; V3. $\int\frac{xdx}{\sqrt{4x^2+7}}$;

V4. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^3-9}}$ V5. інша відповідь.

9. Знайти невизначені інтеграли: а) $\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2-5x+2}}$;

б) $\int\frac{\sin^3 2x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$; в) $\int\frac{\sqrt{x^2+16}}{x^2}dx$; г) $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x-1}$;

д) $\int\frac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$; е) $\int\sin^6 2xdx$; ж) $\int\frac{dx}{2\sin^2 x+7\cos^2 x}$.

ЛЕКЦІЯ 4

План лекції:

1. Введення поняття визначеного інтегралу, означення та його властивості.
2. Обчислення визначеного інтегралу. Теорема Ньютона–Лейбніца. Основні методи інтегрування визначеного інтегралу
3. Невласні інтеграли: по нескінченному проміжку (першого роду) та від необмежених функцій (другого роду).

1 Введення поняття визначеного інтегралу, означення та його властивості

Розглянемо задачу щодо знаходження площі криволінійної трапеції. Нехай ми маємо криволінійну трапецію $ABCD$ (рисунок 4.1), що обмежена зверху лінією $y = f(x)$, при цьому функція задана на відрізку $[a;b]$ та додатна, $f(x) > 0$. Знайдемо площу S криволінійної трапеції. Основа цієї трапеції належить осі $0x$, праворуч та ліворуч відповідно обмежена прямими $x = a$, $x = b$ та зверху – кривою $y = f(x)$. Як відомо зі шкільного курсу математики, площа фігури дорівнюватиме сумі площин декількох фігур з яких вона складається. Тож,

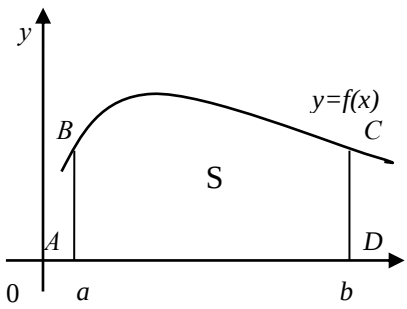

Рисунок 4.1

будь-який багатокутник можна розбити на трикутники або прямокутники. Потім за допомогою граничного переходу за площами правильних вписаних та описаних багатокутників можна визначити площу, але при цьому слід враховувати геометричні властивості фігури.

Для вирішення поставленої задачі, обчислення площі зазначеної фігури (рисунок 4.1), розіб'ємо відрізок $[a;b]$ точками $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$. У кожній точці ділення проведемо перпендикуляр до перетину з графіком функції $y = f(x)$ (рисунок 4.2, а). Таким чином, трапецію буде розбито на n частинних трапецій. На кожному відрізку $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$,…, $[x_{n-1}, x_n]$ виберемо довільну точку ξ_i та проведемо прямі, які паралельні осі $0y$, до перетину з лінією $y = f(x)$ й отримаємо значення функції в цій точці, тобто $f(\xi_i)$ (рисунок 4.2, б).

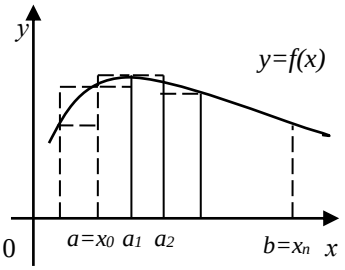

Рисунок 4.2, а

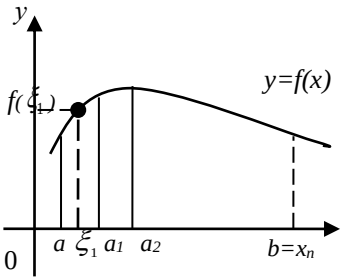

Рисунок 4.2, б

Складемо суму, що матиме вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

та будемо її називати *інтегральною сумою* для функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Ця сума залежить як від способу розбиття так й від вибору точок ξ_i. Очевидно, що вираз $f(\xi_i)\Delta x_i$ є площею прямокутника, а їх сума є не що інше як площа сходинкової фігури. Площа такої фігури буде вважатися наближеним значенням площі заданої криволінійної трапеції $ABCD$. Зрозуміло, що це значення буде тим більш точнішим, чим більшою буде кількість точок розбиття (n) та чим меншим буде довжина частинного інтервалу (Δx_i), на які розбивається відрізок.

Далі буде доведено, що будь-яка фігура, яка відповідає наведеним у прикладі умовам криволінійній трапеції $ABCD$, матиме площу в наведеному вищі сенсі.

Розглянемо ще одну задачу, яка полягає у визначенні маси лінійного неоднорідного стриженя, який належить осі $0x$ та обмежується відрізком $[a;b]$. Щільністю розподілу маси вздовж стриженя нехай буде неперервна функція від x: $\rho(x)$.

Для вирішення цієї задачі повторимо дії з задачі знаходження площі трапеції. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ точками x_i $(i = 1,...n)$ та довільним чином виберемо точку на кожному з отриманих частинних відрізків, це точки ξ_i. Оскільки всередині відрізку $[x_{i-1};x_i]$ функція щільності $\rho(x)$ змінюється достатньо мало, то масу частини стриженя на цьому відрізку можна вважати такою, що приблизно дорівнює $\rho(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = \Delta x_i - \Delta x_{i-1}$. Тоді маса усього стриженя m буде приблизно дорівнювати сумі усіх його частин:

$\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i$. Щоб досягти більш точного значення, слід перейти до границі, коли найбільший частинний відрізок прямує до нуля, тобто

$$m = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i .$$

Означення 1. Якщо границя інтегральної суми при $\max \Delta x_i$, що прямую до нуля, існує, кінцева та не залежить від способу вибору точок Δx_i та точок ξ_i, то цю границю називають *визначеним інтегралом від функції* $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ та позначають $\int_a^b f(x)dx$. Сама функція $f(x)$ називається *інтегрованою* на відрізку $[a;b]$, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i ,$$

$a;b$ – нижня та верхня границі інтегрування відповідно.

Підсумовуючи вищевикладене та беручи до уваги наведене означення визначеного інтегралу, ми можемо стверджувати, що площа плоскої фігури, яка обмежена зверху графіком неперервної функції $y = f(x) > 0$, знизу віссю $0x$, праворуч та ліворуч відповідно прямими $x = a$, $x = b$ є невизначений інтеграл

$$S = \int_a^b f(x)dx . \qquad (4.1)$$

Поняття визначеного інтегралу є важливим інструментом математичного дослідження та допомагає вирішенню різноманітних задач геометрії, фізики, економіки і т.п.,

як: обчислення площі фігури, обчислення маси стриженя, обчислення роботи змінної сили, знаходження шляху за відомою швидкістю та інші.

Теорема 1. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Зауваження 1. Якщо відрізок $[a;b]$, на якому задана функція $y = f(x)$, можна розбити на кінцеве число частинних відрізків, на кожному з яких вона неперервна чи монотонна, то така функція інтегрована на цьому відрізку.

Властивості визначеного інтегралу.

1. Постійний множник можна винести за знак визначеного інтегралу:

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx, \; c = const.$$

2. Визначений інтеграл від суми (або різниці) функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від кожного доданку:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

3. Якщо функція $y = f(x)$ інтегрована на кожному з відрізків $[a;c]$, $[c;b]$ ($a < c < b$), то вона інтегрована на відрізку $[a;b]$ та

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \pm \int_c^b f(x)dx, \; c \in [a;b].$$

4. Згідно з означенням визначеного інтегралу маємо:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \; \int_a^a f(x)dx = 0.$$

5. Якщо на відрізку $[a;b]$, $a<b$, функції $y=f(x)$ та $y=g(x)$ інтегровані та задовольняють на цьому відрізку нерівності $f(x)\le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx .$$

6. Справедлива нерівність

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx , \ (a\le b),$$

або у випадку, коли a необов'язково менше за b

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|dx\right| .$$

7. Похідна від визначеного інтегралу

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot dx\right)' = f(x) .$$

8. Теорема про середнє.

Теорема 2 (*про оцінку визначеного інтегралу*). Значення визначеного інтегралу міститься між добутком найменшого та найбільшого значення підінтегральної функції на довжину інтегралу інтегрування:

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a) ,$$

де m, M – найменше та найбільше значення функції $f(x)$

$$m \le f(x) \le M .$$

Геометричний зміст теореми полягає в тому, що площа криволінійної трапеції $aABCb$ (рисунок 4.3) більша площі прямокутника з основою що дорівнює основі цієї

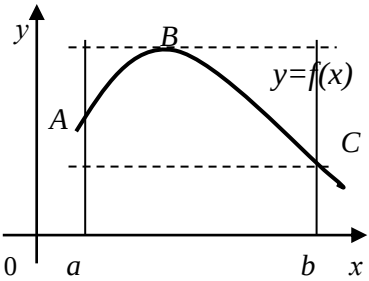

Рисунок 4.3

трапеції і висотою, що дорівнює найменшої ординаті трапеції (ординаті точки C), та менша за площу прямокутника з такою ж основою і висотою, що дорівнює найбільшій ординаті (ординаті точки B).

Приклад 1. Оцінити визначений інтеграл $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}$.

Розв'язання: Функція $\sin x$ на відрізку $\left[\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$ приймає відповідні значення $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$, тож функція $\frac{\sin x}{x}$ прийматиме значення $\frac{\sin \pi/4}{\pi/4}$ та $\frac{\sin \pi/2}{\pi/2}$ і буде спадаючою

$$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\sin \pi/2}{\pi/2} < \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} < \frac{\sin \pi/4}{\pi/4}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right);$$

$$\frac{\sin \pi/2}{\pi/2}\cdot\frac{\pi}{4} < \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx < \frac{\sin \pi/4}{\pi/4}\cdot\frac{\pi}{4};$$

$$1\cdot\frac{2\pi}{4\pi} < \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx < \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4\pi}{4\pi};$$

$$\frac{1}{2} < \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тож, як бачимо, значення заданого визначеного інтегралу знаходиться між числами $0{,}5$ та $0{,}7$.

2 Обчислення визначеного інтегралу. Формула Ньютона–Лейбніца. Основні методи інтегрування визначеного інтегралу

Для обчислення визначених інтегралів користуються формулою Ньютона–Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,,\ F'(x) = f(x)\,. \qquad (4.2)$$

Приклад 2. Обчислити визначені інтеграли:

$$\text{а)}\ \int_1^2 5^{4-3x}dx\,;\ \text{б)}\ \int_0^2\left(\sqrt[3]{x} + \frac{7}{x+3}\right)dx\,.$$

Розв'язання:

$$\text{а)}\ \int_1^2 5^{4-3x}dx = -\frac{1}{3}\cdot\frac{5^{4-3x}}{\ln 5}\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{3\ln 5}\left(5^{-2} - 5\right) = \frac{24}{75\ln 5}\,;$$

$$\text{б)}\ \int_0^2\left(\sqrt[3]{x} + \frac{7}{x+3}\right)dx = \int_0^2 x^{1/3}dx + 7\int_0^2\frac{dx}{x+3} = \frac{3x^{4/3}}{4}\Bigg|_0^2 +$$

$$+7\cdot\ln|x+3|\Big|_0^2 == \frac{3\cdot 2^{4/3}}{4} - 0 + 7\cdot\ln 5 - 7\cdot\ln 3 = \frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{2} + 4\ln\frac{5}{3}.$$

Розглянемо метод заміни змінної у визначеному інтегралі.

Метод заміни змінної у визначеному інтегралі виконується на тих самих умовами як й в невизначеному, але зверніть увагу на наступне зауваження.

Зауваження 2. Під час введення нової змінної у визначеному інтегралі слід вказати нові границі інтегрування, тому повертатися до первинної змінної не має сенсу.

Приклад 3. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6}$.

Розв'язання: $$\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6} = \int_0^1 \frac{x^2dx}{1+\left(x^3\right)^2} = \left| \begin{array}{c} t = x^3, \\ dt = 3x^2dx, \\ t_a = 1, \\ t_b = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3} arctgt\Big|_0^1 = \frac{1}{3} arctg1 - \frac{1}{3} arctg0 = \frac{\pi}{12}.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$.

Розв'язання: $$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = 3\sin t,\ \ t = \arcsin\frac{x}{3}, \\ dx = 3\cos t dt, \\ 9-x^2 = 9\cos^2 t, \\ t_a = \arcsin\frac{0}{3} = 0, \\ t_b = \arcsin\frac{3}{3} = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9\cos^2 t} \cdot 3\cos t dt = 9\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \left(1+\cos 2t\right) dt =$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} dt + \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2t dt = \frac{9}{2} t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{9}{4}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{9}{2}\pi.$$

Також використовується й метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Формула приймає такий вигляд

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \ln(x+1)dx$.

Розв'язання: $\int_0^1 \ln(x+1)dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln(x+1), \\ dv = dx, \\ du = \dfrac{dx}{x+1}, \\ v = x \end{array} \right| =$

$$= x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{x+1} = \ln 2 - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx = \ln 2 -$$

$$-\int_0^1 \frac{x+1}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \ln 2 - x\Big|_0^1 + \ln(x+1)\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1 .$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi/2} e^{4x}\cos 5x\, dx$.

Розв'язання: застосуємо метод інтегрування частинами

$$\int_0^{\pi/2} e^{4x}\cos 5x\, dx == \left| \begin{array}{c} u = \cos 5x, \\ dv = e^{4x}dx, \\ du = -5\sin 5x\, dx, \\ v = \dfrac{1}{4}e^{4x} \end{array} \right| =$$

$$=\frac{1}{4}e^{4x}\cos 5x\Big|_0^{\pi/2}-+\frac{5}{4}\int_0^{\pi/2}e^{4x}\sin 5x\,dx==\left|\begin{array}{c} u=\sin 5x, \\ dv=e^{4x}dx, \\ du=5\cos 5x\,dx, \\ v=\frac{1}{4}e^{4x} \end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\left(\frac{1}{4}e^{4x}\sin 5x\Big|_0^{\pi/2}--5\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}e^{4x}\cos 5x\,dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{5e^{2\pi}}{16}-\frac{25}{16}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}e^{4x}\cos 5x\,dx.$$

Як бачимо це зворотній інтеграл, тож після перетворень про які йшла мова в лекції 2, отримаємо відповідь:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}e^{4x}\cos 5x\,dx=\frac{5e^{2\pi}-4}{41}.$$

3 Невласні інтеграли: по нескінченному проміжку (першого роду) та від необмежених функцій (другого роду)

Натепер нами вивчене поняття визначеного інтегралу $\int_a^b f(x)dx$ для випадку кінцевого проміжку $[a;b]$ та обмеженої функції $f(x)$.

Розглянемо інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $[a;+\infty)$, тобто для $x\ge a$, інтегрованої у будь-якій точці його частини $[a;A]$, тобто $\int_a^A f(x)dx$.

Означення 2. Границя інтегралу $\int_a^A f(x)dx$ (кінцева або

нескінчена), коли $A \to +\infty$ називається інтеграл від функції $f(x)$ з границями інтегрування від a до $+\infty$ та позначається

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx .$$

У випадку коли границя кінцева, то кажуть, що інтеграл *збігається*, а функція $f(x)$ інтегрованою на нескінченому проміжку $[a;+\infty)$. У протилежному випадку, цей інтеграл *розбігається*. Визначений інтеграл того вигляду є *невласним інтегралом першого роду* або називають *невласний інтеграл з необмеженими границями*. Аналогічно визначається невласний інтеграл: $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A \to -\infty} \int_A^b f(x)dx$.

Усі методи інтегрування розглянуті нами раніше можуть бути використані під час дослідження невласних інтегралів на збіжність.

Приклад 7. З'ясувати чи збігається заданий інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{2x^2+1}.$$

Розв'язання: застосуємо метод заміни змінної та візьмемо до уваги наведене вище означення невласного інтегралу на нескінченому проміжку $[a;+\infty)$, отримаємо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{2x^2+1} = \left| \begin{array}{c} t = 2x^2+1, \\ dt = 4xdx, \\ \dfrac{dt}{4} = xdx, \\ t_a = 1,\ t_b = \infty \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{A \to \infty} \int_1^A \frac{dt}{t} = \lim_{A \to \infty} \ln t \Big|_1^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty}(\ln A) - \lim_{A\to\infty}(\ln 1) = \lim_{A\to\infty}(\ln A) = \infty .$$

Заданий інтеграл розбігається, оскільки ми отримали нескінчену границю.

Приклад 8. З'ясувати чи збігається заданий інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$$

Розв'язання: згідно з означенням маємо:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A x^{-5}dx = \lim_{A\to+\infty} \left.\frac{x^{-4}}{-4}\right|_1^A = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{-4A^4} + \frac{1}{4}\right),$$

враховуючи, що $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{4A^4} = 0$, ми отримаємо остаточну відповідь для нашого інтегралу:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{4}.$$

Отже, заданий інтеграл збігається.

Зауваження 3. Якщо $|f(x)| \le \varphi(x)$ та інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ збігається, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ також збігається *(ознака порівняння)*.

Приклад 9. За допомогою ознаки порівняння показати, що інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^9}}$ збігається.

Розв'язання: виконаємо деякі перетворення у підінтегральній функції, а саме

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^9}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^9\left(1+x^9\right)}{x^9}}}=\frac{1}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^9}}}.$$

Коли $x\to+\infty$ існує функція $\varphi(x)=\frac{1}{x^3}$ така, що

$$\frac{1}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^9}}}<\frac{1}{x^3},$$

дослідимо на збіжність невласний інтеграл першого роду від функції $\varphi(x)$, тобто

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{dx}{x^3}=-\lim_{A\to+\infty}\left.\frac{1}{2x^2}\right|_1^A=\frac{1}{2},$$

який, як бачимо, збігається. Тоді, згідно з ознакою збіжності, робимо висновок, що заданий інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^9}}$ також збігається та його значення менше за $0{,}5$.

Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на всій числовій осі, то можна розглядати невласний інтеграл на проміжку $(-\infty;+\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{+\infty}f(x)dx.$$

Цю рівність слід розуміти у такому сенсі: якщо кожен з невласних інтегралів праворуч збігаються, то, згідно з означенням, й інтеграл ліворуч збігається.

Геометричний зміст збіжного невласного інтегралу,

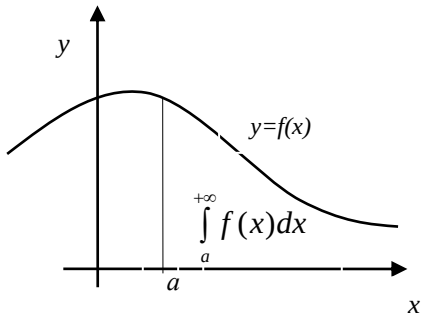

Рисунок 4.4

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$, у випадку коли $f(x) \geq 0$, слід розуміти як площу необмеженої (нескінченої) області, яка розташована між лініями $y = f(x)$, $x = a$ та віссю абсцис $y = 0$ (рисунок 4.4). Якщо інтеграл розбігається, то говорити про площу фігури не можна.

Наприклад, нескінченій трапеції, що обмежена гіперболою $y = \frac{1}{x}$, додатною віссю абсцис та прямою $x = 1$, не можна визначити площу, оскільки

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{+\infty} = \infty .$$

Невласні інтеграли першого роду часто зустрічаються в механіці та електростатиці у зв'язку з обчисленням потенціалу.

Наприклад, нехай ми маємо матеріальну точку масою m, яка рухається з початкової точки з абсцисою $x = 1$ у нескінченість. Визначимо роботу сили тяжіння P. Для відшукання роботи цієї сили, пригадаємо як вона визначається. Згідно з законом Ньютона величина сили тяжіння знаходиться $P = k\frac{m}{x^2}$, де k – стала, а робота, щодо переміщення точки з початкової до будь-якої точки – з формули

$$A = -k\int_1^{\infty} \frac{m}{x^2}dx = -km$$

Мінус виникає тому, що напрямок сили тяжіння протилежний руху матеріальної точки, тому з цієї ж причини робота буде також від'ємною. Якщо точка буде рухатися у протилежному напрямку, то знак роботи зміниться на додатний.

Така робота називається *потенціалом сили тяжіння* матеріальної точки.

Розглянемо тепер невласні інтеграли другого роду або, як їх ще називають, інтеграли від функцій, що мають не скінчені розриви.

Означення 3. Невласним інтегралом другого роду від функції $f(x)$ неперервної, коли $a \le x < b$ та необмеженої коли $x \to b$, називається границя інтегралу $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, коли $\varepsilon \to 0$, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \ \varepsilon > 0.$$

Якщо вказана границя існує, то невласний інтеграл збігається, навпаки – розбігається.

Аналогічно, якщо функція $f(x)$ має нескінчений розрив на лівому кінці $x = a$ проміжку $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Якщо функція $f(x)$ має нескінчений розрив у деякій точці c, $a < c < b$, тоді за означенням маємо:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Якщо обидва інтеграли у правій частині збігаються, то інтеграл ліворуч також збігається; якщо хоча б один з них розбігається – розбігається.

Приклад 10. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^4}}$.

Розв'язання: на відрізку $[-1;1]$ існує точка $x = 0$, в якій підінтегральна функція $\frac{1}{\sqrt{x^4}}$ має розрив, то скористаємось вищезазначеним та запишемо заданий інтеграл у вигляді суми таких інтегралів:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} .$$

З'ясуємо питання збіжності для кожного з них окремо:

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} = -3;$$

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}} = -3 .$$

Таким чином, ми отримали, що обидва інтеграли збігаються, звідси робимо висновок, що заданий інтеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^4}}$ збігається також.

Зауважимо, що якщо лінія $y = f(x)$ має у точці $x = b$ асимптоту, то обмежена нею трапеція буде нескінченою.

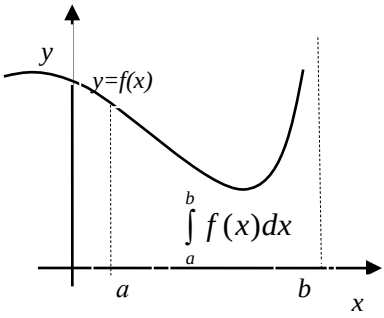

Рисунок 4.5

Як це зображено на рисунку 4.5.

Якщо існує невласний інтеграл від функції $f(x)$, то вважають, що він визначає площу нескінченої трапеції, у протилежному випадку трапеція площі не має.

Завдання для самоконтролю за *лекцією 4*

1. Яка з вказаних нижче задач не приводить до поняття визначеного інтегралу:

V1. задача про площу криволінійної трапеції; V2. задача про кутовий коефіцієнт дотичної до кривої; V3. задача про роботу змінної сили; V4. задача про масу неоднорідного лінійного стержня; V5. інша відповідь.

2. Вставити пропущене слово.

Під час введення нової змінної у визначеному інтегралі слід _____

V1. не вказувати нові границі інтегрування; V2. залишити без змін границі інтегрування; V3. вказати нові границі інтегрування та повернутися до старої змінної; V4. вказати нові границі інтегрування; V5. інша відповідь.

3. Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі має вигляд

V1. $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$; V2. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$; V3. $\int_a^b udv = uv - \int_a^b vdu$;

V4. $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int vdu$; V5. інша відповідь.

4. Якщо функція $f(x)$ визначена й інтегрована на проміжку $[a;A]$, такого, що $A \geq a$, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається

V1. визначеним інтегралом; V2. невизначеним інтегралом; V3. невласним інтегралом 2-го роду; V4. невласним інтегралом 1-го роду; V5. інша відповідь.

5. Щоб інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ був невласним 2-го роду підінтегральна функція $f(x)$ на $[a;b]$ має бути

V1. обмеженою; V2. необмеженою; V3. визначеною; V4. неперервною; V5. інша відповідь.

6. Невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ буде збіжним, якщо буде збіжним:

V1. кожний з інтегралів $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ та $\int_0^{+\infty} f(x)dx$;

V2. хоча б один з інтегралів $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ та $\int_0^{+\infty} f(x)dx$;

V3. $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$; V4. $\int_0^{+\infty} f(x)dx$; V5. інша відповідь.

7. Якщо на відрізку $[a;b]$, $a < b$, функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ інтегровані та задовольняють на цьому відрізку нерівності $f(x) \leq g(x)$, то

V1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$; V2. $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$;

V3. $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$; V4. $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = 0$;

V5. інша відповідь.

8. Вставити пропущене слово.

Визначений інтеграл від суми функцій дорівнює _____ визначених інтегралів від кожної функції.

V1. добутку; V2. частці; V3. різниці; V4. сумі; V5. інша відповідь.

9. Вставити пропущене слово.

Значення визначеного інтеграла _____ від позначення змінної інтегрування.

V1. залежить; V2. не залежить; V3. залежить від обраного методу інтегрування; V4. інколи не залежить; V5. інша відповідь.

10. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10}$; б) $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln x}$; в) $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$.

ЛЕКЦІЯ 5

План лекції:

1 Геометричні застосування визначеного інтегралу: обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги кривої.

2 Обчислення об'єму тіла обертання та площі його поверхні

3 Фізичні застосування визначеного інтегралу: маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центра мас плоскої дуги.

4 Методи наближеного обчислення визначених інтегралів.

1 Геометричні застосування визначеного інтегралу: обчислення площі плоскої фігури, довжини дуги кривої

Як було з'ясовано на лекції 4, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ це число, яке дорівнює площі криволінійної трапеція (формула 4.1). Ця трапеція зверху обмежена кривою $y = f(x)$, знизу віссю абсцис, праворуч та ліворуч прямими $x = a$, $x = b$ (дивись рисунок 4.1).

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = 0$, $x = \ln 2$.

Розв'язання. Для знаходження площі цієї фігури застосуємо формулу $S = \int_a^b f(x)dx$. Як відомо з умови задачі $0 \le x \le \ln 2$, $f(x) > 0$. Тож, обчислення площі заданої фігу-

ри полягає у звичайному обчисленні визначеного інтегралу, а саме:

$$S=\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=\left|\begin{array}{c}\sqrt{e^x-1}=t, e^x-1=t^2\\ e^x=t^2+1, \ln e^x=\ln\left(t^2+1\right)\\ x=\ln\left(t^2+1\right), dx=\dfrac{2tdt}{t^2+1}\\ t_a=0, t_b=1\end{array}\right|=2\int_0^1\frac{t^2}{t^2+1}dt=$$

$$=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2\left(t-arctgt\right)\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}\ \text{(кв.од.)}.$$

Продовжимо розглядати питання обчислення площі плоскої фігури. Нехай фігура (рисунок 5.1) площу якої потрібно знайти обмежена такими лініями:

$$y=f(x)\ \left(f(x)<0\right),\ x=a\ ,\ x=b\ ,$$
$$y=0\ .$$

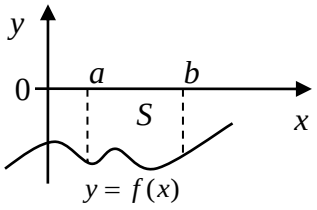

Рисунок 5.1

Як бачимо з рисунку 5.1, ця фігура розташована під віссю абсцис, тому площу такої фігури слід знаходити за формулою (5.1):

$$S=-\int_a^b f(x)dx\,. \qquad (5.1)$$

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=x-2$, $x=0$, $x=2$.

Розв'язання. Фігура, площу якої ми будемо шукати,

зображена на рисунку 5.2. Згідно з формулою (5.1) обчислимо її площу:

$$S = -\int_0^2 (x-2)dx = -\frac{(x-2)^2}{2}\Bigg|_0^2 =$$

$$= -\frac{(2-2)^2}{2} + \frac{(0-2)^2}{2} = \frac{1}{2} \text{ (кв.од.).}$$

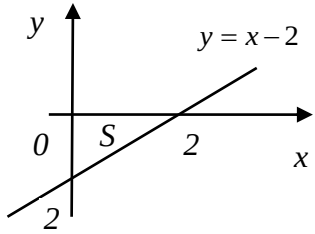

Рисунок 5.2

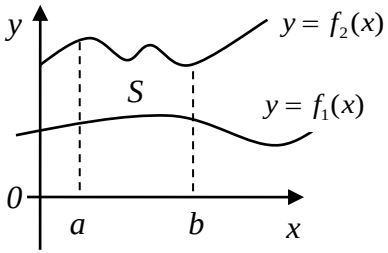

Рисунок 5.3

Нехай задана фігура, яка обмежена лініями $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \le f_2(x)$) (рисунок 5.3), тоді площу фігури визначають за формулою (5.2):

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \quad (5.2)$$

Приклад 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 4 - x^2$, $y = 3x$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рисунок 5.4) та знайдемо границі інтегрування. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 3x; \end{cases}$$

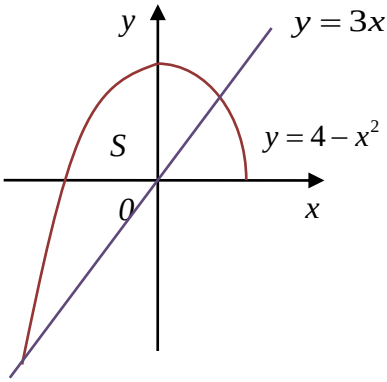

Рисунок 5.4

$$\begin{cases} x^2+3x-4=0, \\ y=3x; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=-4, x_2=1, \\ y=3x; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=-4, x_2=1, \\ y_1=-12, y_2=3. \end{cases}$$

Знаходимо площу фігури за формулою (5.2):

$$S=\int_{-4}^{1}\left[4-x^2-3x\right]dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{-4}^{1}=4-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-$$

$$-\left(-16+\frac{64}{3}-16\right)=\frac{77}{6} \text{ (кв.од.).}$$

Якщо на відрізку $[a;b]$ функція $y=f(x)$, що зверху обмежує криволінійну трапецію, є кусочно-монотонною (рисунок 5.5), при цьому $c\in[a;b]$, то площу шуканої фігури слід знаходити, як

$$S=S_1+S_2=\int_a^c f_1(x)dx+\int_c^b f_2(x)dx\,. \qquad (5.3)$$

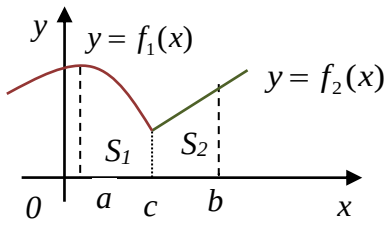

Рисунок 5.5

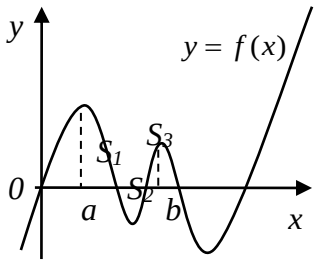

Рисунок 5.6

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана неперервна функція $y=f(x)$ загального виду (рисунок 5.6). Припустимо, що відрізок $[a;b]$ можна розбити на кінцеве число інтервалів,

таких що на кожному з них функція $y = f(x)$ буде знакосталою й не дорівнюватиме нулю, тоді площу фігури знаходимо так

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx. \qquad (5.4)$$

Приклад 4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 4/x$, $y = x$, $x = 4$, $x = 0$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру (рисунок 5.7).

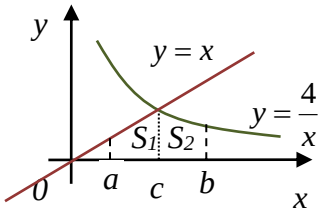

Рисунок 5.7

Як бачимо $y = f(x)$, яка обмежує задану фігуру, є кусочно-монотонною, верхня лінія складається з двох ліній: прямої $y = x$ та гіперболи $y = 4/x$. Тож, для знаходження площі заданої фігури скористаємось формулою (5.3). Спочатку знайдемо координати точки перетину графіків функцій, для цього прирівняємо їх:

$$y = 4/x,\ y = x,\ x = 4/x,\ x - 4/x = 0,\ x^2 - 4 = 0,\ x = \pm 2.$$

Таким чином, маємо три значення $a = 0$, $b = 4$, $c = 2$, але значення $x = -2$ не задовольняє умові задачі (як це видно з рисунку 5.7). Отже, площа заданої фігури обчислюється так:

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^2 x dx + \int_2^4 \frac{4}{x} dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 + 4\ln x\Big|_2^4 = 2 + 4\ln 2 \text{ (кв.од.)}.$$

Приклад 5. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $\begin{cases} y = 4\sin t, \\ x = 6\cos t; \end{cases}$ $y = 2\sqrt{3}$, ($y \geq 2\sqrt{3}$).

Зауваження 1. Як бачимо одна з ліній (яка є еліпсом) задана *параметричними рівняннями*: $y = y(t)$, $x = x(t)$, тому у таких випадках ми будемо використовувати формулу (5.5):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt\,. \qquad (5.5)$$

Розв'язання. Побудуємо задану фігуру (рисунок 5.8).

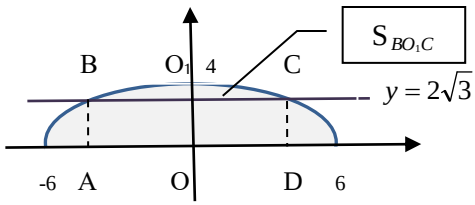

Рисунок 5.8

Фігура, площу якої нам потрібно знайти є фігура BO_1C. Її площа це є різниця між площею фігури ABO_1CD та площею фігури $ABCD$. Фігура $ABCD$ є прямокутником, площу якого знайти легко, якщо відомі величини його сторін. Сторона $AB = CD = a$ дорівнює ординаті точок B та C, а оскільки ці точці знаходяться на прямій $y = 2\sqrt{3}$, то їх ордината $2\sqrt{3}$, а отже: $a = 2\sqrt{3}$. Сторона $AD = b = AO + OD$, величина $AO = OD$ та дорівнює абсцисі точки D. Знайдемо її. Абсциса цієї точки така сама як й абсциса точки C, яка лежить одночасно на прямій $y = 2\sqrt{3}$ та на еліпсі, рівняння якого нам відомо. Ординату точки C ми знаємо, тож

підставимо її в рівняння еліпсу, отримаємо:

$$\begin{cases} 2\sqrt{3} = 4\sin t, \\ x = 6\cos t; \end{cases} \begin{cases} t = \pi/3, \\ x = 6\cos t; \end{cases} \begin{cases} t = \pi/3, \\ x = 6\cos \pi/3; \end{cases} x = 3.$$

Отримали, що $AO = OD = 3$, тоді $AD = b = 6$.

Площа прямокутника $ABCD$ тоді дорівнюватиме:

$$S_{ABCD} = a \cdot b = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ (кв.од.)}$$

Для знаходження площі фігури ABO_1CD скористаємось тим фактом, що вона є симетричною фігурою, та знайдемо лише половину цієї площі, як то площу фігури O_1CDO за допомогою формули (5.5). Спочатку знайдемо диференціал функції $x = x(t)$, тобто:

$$dx = (6\cos t)' dx = -6\sin t dt,$$

тоді площу фігури O_1CDO знайдемо так:

$$S_{O_1CDO} = -\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = -\int_{\pi/3}^{\pi/2} 4\sin t \cdot (-6\sin t)dt =$$

(мінус ми ставимо тому, що обхід від точки C $(t = \frac{\pi}{3})$ до точки O_1 $(t = \frac{\pi}{2})$ відбувається у протилежному напряму руху годинникової стрілки)

$$= 12\int_{\pi/3}^{\pi/2} 2\sin^2 t dt = 12\int_{\pi/3}^{\pi/2} (1 - \cos 2t)dt = 12t\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} - 6\sin 2t\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = 2\pi + 3\sqrt{3},$$

отже, площі фігури ABO_1CD

$$S_{ABO_1CD} = 2S_{O_1CDO} = 2\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right) \text{ (кв. од.).}$$

Остаточно площа шуканої фігура BO_1C знайдемо так:

$$S_{BO_1C} = S_{ABO_1CD} - S_{ABCD} = 4\pi + 6\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 4\pi - 6\sqrt{3}\ ,$$

$$S_{BO_1C} = 4\pi - 6\sqrt{3}\ \text{(кв.од.)}.$$

Приклад 5. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $\rho = \cos\varphi$ та $\rho = \sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/2$.

Зауваження 2. Лінії, які обмежують фігуру площу якої нам потрібно знайти, задано в полярній системі координат, то в якості основної фігури прийматимемо так званий *криволінійний сектор*. Через це для знаходження площі цієї фігури будемо застосовувати відповідну формулу:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi, \text{ де } \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\ .$$

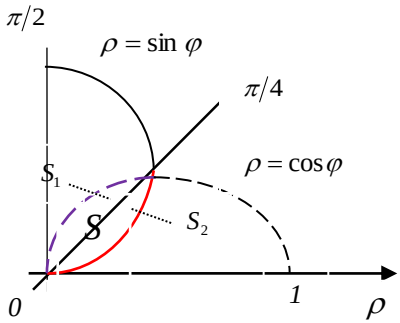

Рисунок 5.9

Розв'язання. Побудуємо цю фігуру в полярній системі координат та визначимо точки перетину цих ліній, які й будуть границями інтегрування. Як бачимо з рисунку 5.9, площа заданої фігури може бути знайдена як сума двох площин S_1 та S_2. Тож, спочатку знайдемо окремо ці площина, а потім обчислимо їх суму.

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{4}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{16},$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1+\cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{4}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{16},$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{8} \text{ (кв.од.)}.$$

Нехай $y = f(x)$ неперервна функція разом зі своїми похідними $f'(x)$. Такі лінії будемо називати *гладкими* (рисунок 5.10).

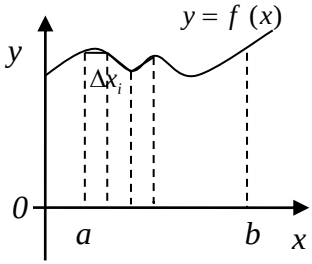

Рисунок 5.10

Довжиною дуги кривої називатимемо границю, до якої прямує довжина вписаної в неї ламаної під час необмеженого зростання числа її ланцюжків, за умови прямування довжини найбільшого з них до нуля.

Якщо ми будемо розраховувати довжину кожного з цих ланцюжків й додавати їх, ми прийдемо до визначеного інтегралу. Тож, визначений інтеграл застосовують для обчислення довжини дуги кривої.

Тоді, якщо задана функція $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, то довжина дуги обчислюється за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx; \qquad (5.6)$$

якщо задана функція $y = \phi(t)$, $x = \varphi(t)$ $t \in [\alpha;\beta]$, то довжина дуги обчислюється за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt\,; \qquad (5.7)$$

якщо задана функція $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$, то довжина дуги обчислюється за формулою:

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi\,. \qquad (5.8)$$

Обчислення довжини дуги називають *спрямленням*.

Приклад 6. Обчислити довжину однієї арки циклоїди (зображення лінії подано у додатку Д), якщо вона задана параметричними рівняннями:

$$y = 2(1 - \cos t)\,,\ x = 2(t - \sin t)\,.$$

Розв'язання: задана функція є параметричною, то для обчислення довжини арки циклоїди скористаємось формулою (5.7). Перш за все знайдемо похідні y'_t та x'_t:

$$y'_t = 2\sin t\,,\ x'_t = 2(1 - \cos t)\,,\ x'^2 + y'^2 = 8 - 8\cos t = 16\sin^2 t/2\,.$$

Точка, що рухається, описує одну арку циклоїди, коли параметр t змінюється від нуля до 2π (додаток Д). Знайдемо довжину цієї арки:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{16\sin^2 t/2}\, dt = 4\int_{0}^{2\pi} \sin t/2\, dt = -8\cos\frac{t}{2}\Big|_{0}^{2\pi} =$$

$$= -8\cos\frac{2\pi}{2} + 8\cos 0 = 16 \text{ (од. довжини).}$$

Приклад 7. Знайти довжину кардіоїди $\rho = 3(1 + \cos\varphi)$ (додаток Д).

Розв'язання: змінюючи полярний кут φ від 0 до π, ми отримаємо половину шуканої довжини дуги. Знайдемо ρ' та обчислимо довжину:

$$\rho' = 3(1+\cos\varphi)' = -3\sin\varphi,$$

$$\rho^2 + \rho'^2 = 9(1+\cos\varphi)^2 + 9\sin^2\varphi = 18(1+\cos\varphi) = 9\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi = 2\int_0^{\pi}\sqrt{9\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 6\int_0^{\pi c}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 12$$

(од. довжини).

2 Обчислення об'єму тіла обертання та площі його поверхні

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана неперервна знакопостійна функція $y = f(x)$. Знайдемо об'єм тіла, отриманого обертанням фігури навколо осі абсцис (рисунок 5.11).

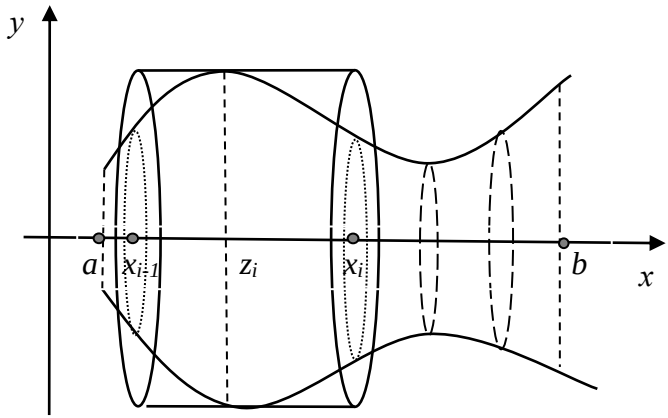

Рисунок 5.11

Для знаходження об'єму скористаємось методом проектування криволінійної трапеції на вісь абсцис. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на елементарні відрізки довільними точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, та на кожному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ довільним чином виберемо z_i $i = 1,2,...n$. Тоді деяке наближення для шуканого об'єму дасть сума

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(z_i)\Delta x_i$$

– це об'єм циліндра з висотою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ та радіусом основи $f(z_i)$.

Очевидно, що наближення до шуканого об'єму V_x буде тим ближчим, чим менша довжина відрізка розбиття Δx_i, тому шуканий об'єм V_x знайдемо як границю

$$V_x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(z_i)\Delta x_i,$$

де $\max \Delta x_i$ – максимальна довжина відрізка розбиття. А це і є визначений інтеграл, тобто

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (5.9)$$

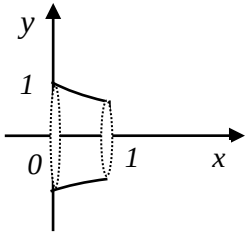

Рисунок 5.12

Приклад 8. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням фігури, обмеженої лініями

$$y = e^{-2x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1.$$

Розв'язання. Побудуємо тіло, яке буде отримано під час обертання фігури, обмеженої зазначеними лініями (рисунок 5.12). Обчислимо його об'єм

$$V_x = \pi\int_0^1 \left(e^{-2x}\right)^2 dx = \frac{-\pi}{4} e^{-4x}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{e^4}\right) \text{ (куб.од).}$$

Інколи для обчислення об'єму тіла обертання навколо осі ординат зручніше користуватися іншою формулою (5.10), яку легко отримати завдяки заміні змінної x на y у формулі (5.9), тобто:

$$V_y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy \text{ або } V_y = 2\pi\int_a^b xf(x)dx. \qquad (5.10)$$

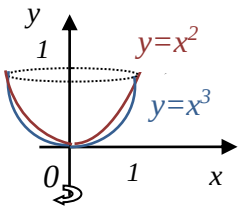

Рисунок 5.13

Приклад 9. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = x^3$.

Розв'язання. Об'єм тіла (рисунок 5.13), яке отримано обертанням фігури знаходимо як різницю між зовнішнім об'ємом $V_{зовн}$, який утворює лінія $y = x^3$ та об'ємом внутрішнім $V_{вн}$, який утворює лінія $y = x^2$.

$$V_y = \pi\int_0^1 \left[\left(y^{1/3}\right)^2 - \left(y^{1/2}\right)^2\right]dy = \pi\left(\frac{3x^{5/3}}{5} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10} \text{ (куб.од).}$$

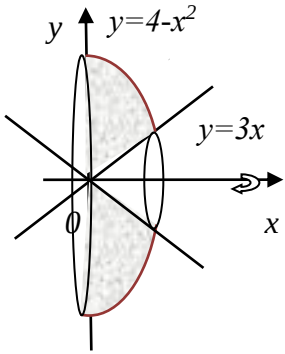

Рисунок 5.14

Приклад 10. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням фігури, обмеженої лініями

$y = 4 - x^2$, $y = 3x$, $x = 0$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру обмеженої лініями $y = 4 - x^2$, $y = 3x$, $x = 0$ (рисунок 5.14). Як бачимо,

об'єм шуканого тіла треба знаходити як різницю між більшим (об'єм зовнішнього тіла) та меншим (об'ємом внутрішнього тіла) об'ємами. Але спочатку знайдемо точки перетину графіків заданих функцій. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 3x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 3x - 4 = 0, \\ y = 3x; \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 3, y_2 = -12, \\ x_1 = 1, x_2 = -4. \end{cases}$$

Друга точка з координатами $(-4;-12)$ не задовольняє умові задачі, оскільки тіло обмежено віссю ординат. Отже, $a = 0$, $b = 1$ – границі інтегрування. Знайдемо поступово $V_{зовн}$ та $V_{вн}$, застосовуючи формулу (5.9):

$$V_{зовн} = \pi\int_0^1 \left(4 - x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^1 \left(16 - 2x^2 + x^4\right)dx = \pi\left(16x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{203\pi}{15}(куб.од); \quad V_{вн} = \pi\int_0^1 9x^2 dx = 3\pi x^3\Big|_0^1 = 3\pi \text{ (куб.од)}.$$

Остаточно: $V_x = \dfrac{203\pi}{15} - 3\pi = \dfrac{158\pi}{15}$ (куб.од).

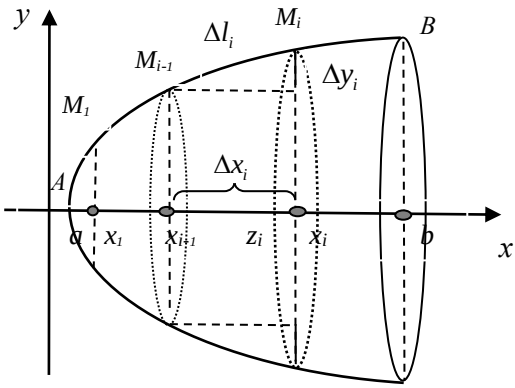

Рисунок 5.15

Нехай нам дана поверхня, яка утворена обертанням кривої $y = f(x)$ навколо осі $0x$ (рисунок 5.15). Визначимо площу цієї поверхні на відрізку $[a;b]$. Функцію

$y = f(x)$ будемо вважати неперервною та такою що має неперервну похідну в усіх точках цього відрізку. Скористаємось тим же методом розбиття відрізку $[a;b]$ довільними точками x_i та проведемо хорди AM_1, M_1M_2, …, $M_{i-1}M_i$, $M_{n-1}B$ довжини яких позначимо через Δl_1, Δl_2, …, Δl_n. Зрозуміло, що кожна хорда довжини Δl_i під час обертання опише усічений конус (рисунок 5.16), поверхня якого ΔS_{n_i} дорівнюватиме

$$\Delta S_{n_i} = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta l_i .$$

Але

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^{\,2} + \Delta y_i^{\,2}} = \Delta x_i \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^{\,2}}{\Delta x_i^{\,2}}} .$$

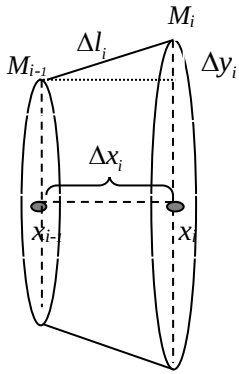

Рисунок 5.16

Згідно з теоремою Лагранжа, отримаємо:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \equiv f'(z_i), \text{ де } x_{i-1} \le z_i \le x_i ;$$

тоді

$$\Delta S_{n_i} = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta x_i \sqrt{1 + f'^2(z_i)} .$$

Площа поверхні буде утворюватися описаною ламаною, яка складатиметься з окремих ланцюгів (хорд), тому вона дорівнює сумі:

$$S_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta x_i \sqrt{1 + f'^2(z_i)}$$

або

$$S_n = \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \sqrt{1 + f'^2(z_i)} \Delta x_i .$$

Границя цієї суми, коли найбільший з ланцюгів ламаної Δx_i прямує до нуля й називається *площею поверхні обертання*. Хоча зазначена нами сума не є інтегральною сумою, оскільки тут з'являються декілька точок відрізку (x_i, x_{i-1}, z_i), але доведено, що границя цієї суми таки дорівнює границі інтегральної суми для функції $y = f(x)$. Тож, остаточно для обчислення площі поверхні обертання застосовують таку формулу:

$$S_n = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x) \right)^2} dx . \qquad (5.11)$$

Приклад 11. Обчислити площу поверхні сферичного поясу, який утворено обертанням навколо осі $0x$ дуги кола з центром у початку координат та радіусом 5.

Розв'язання. Як відомо рівняння кола з центром у початку координат та радіусом 5 має такий вигляд: $x^2 + y^2 = 25$, тоді $y^2 = 25 - x^2$, функція, яка задана неявно, а її похідна дорівнює: $yy' = -x$, $y' = \frac{-x}{y} = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$.

Обчислимо площу сферичного поясу за формулою (5.11):

$$S_n = 2\pi \int_a^b \sqrt{25 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} \right)^2} dx = 2\pi \int_a^b 25 dx = 50\pi (b - a) .$$

Якщо вважати вираз $(b - a)$ висотою H цього поясу,

то отримаємо, що $S_n = 50\pi H$, у випадку, коли $H = 2r = 10$, площа сфери дорівнює $S_n = 500\pi$.

3 Фізичні застосування визначеного інтегралу: маса, статичні моменти, моменти інерції та координати центру мас плоскої дуги

Маса неоднорідного стриженя, розташованого на відрізку $[a;b]$ осі $0x$ та має лінійну щільність $\rho(x)$, яка є неперервною функцією на цьому відрізку, обчислюється за формулою

$$m = \int_a^b \rho(x)dx. \qquad (5.12)$$

Приклад 12. Обчислити масу частини стриженя, який має щільність $\rho(x) = x^3 + x$, на відрізку $[1;2]$. (Виконати самостійно).

Якщо дуга плоскої кривої задана рівнянням $y = f(x)$, де $x \in [a;b]$ та має щільність $\rho(x)$, $x \in [a;b]$, то *статичні моменти* M_x, M_y цієї *дуги* відносно координатних осей обчислюю відповідно за формулами:

$$M_x = \int_a^b \rho(x) f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx,\ M_y = \int_a^b \rho(x)x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx. \quad (5.13)$$

У випадку, якщо крива, щільність якої однорідна $\rho(x) = 1$, буде задана параметричними рівняннями $y = \phi(t)$, $x = \varphi(t)$ $t \in [t_1;t_2]$, то формули матимуть наступний вигляд:

$$M_x = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t)\sqrt{(\phi'(t))^2 + (\varphi'(t))^2}\,dt\,,$$

$$M_y = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\sqrt{(\phi'(t))^2 + (\varphi'(t))^2}\,dt\,. \qquad (5.14)$$

В аналітичній геометрії було розглянуто задачу знаходження координат центру тяжіння системи матеріальних точок як середнє арифметичне відповідних координат точок. Ми матимемо систему матеріальних точок $A_i(x_i, y_i)$, кожна з яких має певну масу m_i $(i = 1,2...,n)$. Координати центру тяжіння цієї системи $O(x_c, y_c)$ знайдуться за формулами:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},\ y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (5.15)$$

При цьому добутки $x_i m_i$ та $y_i m_i$, тобто добуток маси точки на відстань (для точок, що розташовані по одну сторону від осі ця відстань береться зі знаком плюс, а по іншу сторону – зі знаком мінус) цієї точки від деякої осі, називаються *статичними моментами точки* A_i відносно осі. Суму статичних моментів точок називають *статичним моментом системи*. Таким чином, центр тяжіння можна визначити як таку точку, що у випадку зосередження всієї маси системи в цій точці, її статичний момент відносно будь-якої осі дорівнює відповідному статичному моменту всієї системи. $\sum_{i=1}^{n} m_i$ – це маса дуги, яка складається з мас

окремих частин цієї дуги, кожна з яких може бути знайдена як добуток щільності на довжину цієї частини. Таким чином, маса дуги знаходиться за формулою $m = \int_a^b \rho(x)dl$, де dl диференціал дуги, який обчислюється з огляду на спосіб завдання рівняння лінії (дивись: обчислення довжини дуги кривої).

Координати центру тяжіння однорідної пластинки (якщо $\rho(x) = 1$) обчислюються так:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx},$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx}. \qquad (5.16)$$

Приклад 13. Визначити координати центру тяжіння однорідної дуги астроїди $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ (додаток Д), яка розташована у першій чверті.

Розв'язання. Для зручності обчислення запишемо рівняння заданої астроїди (додаток Д) у вигляді параметричних рівнянь, тобто

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}.$$

Знайдемо масу дуги за формулою

$$m=\int_a^b dl=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\phi'(t)\right)^2+\left(\varphi'(t)\right)^2}dt,$$

$$\phi'(t)=\left(\sin^3 t\right)'=3\sin^2 t\cos t,\ \varphi'(t)=\left(\cos^3 t\right)'=-3\cos^2 t\sin t;$$

$$m=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\phi'(t)\right)^2+\left(\varphi'(t)\right)^2}dt=3\int_0^{\pi/2}\sin t\cos tdt=\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2tdt=\frac{3}{2}.$$

Тепер обчислимо статичні моменти M_x, M_y цієї дуги:

$$M_y=\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t)\sqrt{\left(\phi'(t)\right)^2+\left(\varphi'(t)\right)^2}dt=3\int_{t_1}^{t_2}\sin t\cos^4 tdt=\frac{3}{5},$$

$$M_x=\int_{t_1}^{t_2}\phi(t)\sqrt{\left(\phi'(t)\right)^2+\left(\varphi'(t)\right)^2}dt=3\int_{t_1}^{t_2}\sin^4 t\cos tdt=\frac{3}{5}$$

Тоді

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{3/5}{3/2}=\frac{2}{5},\ y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{3/5}{3/2}=\frac{2}{5},$$

А отже координати центру тяжіння: $O\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$.

Для системи матеріальних точок $A_i(x_i,y_i)$, масою m_i ($i=1,2...,n$), можна визначити поняття моменту інерції та вказати формули для їх обчислення. Моменти інерції дуги плоскої кривої $y=f(x)$, де $x\in[a;b]$ та яка має щільність $\rho(x)$, $x\in[a;b]$ відносно координатних осей обчислюється за формулами:

$$I_x=\int_a^b\rho(x)f^2(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx,\quad I_y=\int_a^b\rho(x)x^2\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx;$$

а також відносно точки початку координат:

$$I_O = \int_a^b \rho(x)\left[x^2 + f^2(x)\right]\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (5.17)$$

Якщо крива, щільність якої однорідна, тобто $\rho(x)=1$, буде задана параметричними рівняннями $y=\phi(t)$, $x=\varphi(t)$ $t\in\left[t_1;t_2\right]$, то моменти інерції відносно осей координат обчислюють за формулами:

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t)\sqrt{\left(\phi'(t)\right)^2+\left(\varphi'(t)\right)^2}\,dt,\ I_y = \int_{t_1}^{t_2} \varphi^2(t)\sqrt{\left(\phi'(t)\right)^2+\left(\varphi'(t)\right)^2}\,dt.$$

Момент інерції криволінійної трапеції відносно осей та початку координат буде мати вигляд:

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \left|f(x)\right| f^2(x)dx,\ I_y = \int_a^b \left|f(x)\right| x^2 dx,$$

$$I_0 = \frac{1}{3}\int_a^b \left|f(x)\right|\left[x^2 + \frac{1}{3}f^2(x)\right]dx. \qquad (5.18)$$

Приклад 14. Обчислити момент інерції еліпсу $y=4\sin t$, $x=3\cos t$ відносно осі $0y$.

Розв'язання. Застосуємо формулу

$$I_y = \int_a^b \left|f(x)\right| x^2 dx.$$

Візьмемо до уваги, що еліпс є центральносиметричною фігурою, а також те, що $-4\le x\le 4$ або для параметру матимемо $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$, з огляду на вищесказане ми будемо вести обчислення на проміжку $0\le t\le\frac{\pi}{2}$, тобто розглянемо чверть еліпсу, отримаємо:

$$I_y = -4\int_0^{\pi/2} 4\sin t(3\cos t)^2(-3\sin t)dt = 108\int_0^{\pi/2} 4\sin^2 t\cos^2 t dt =$$

$$= 54\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt = 54\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = 27\pi .$$

Продовжуючи досліджувати питання застосування визначеного інтегралу в фізиці пригадаємо, що тиск рідини на занурену в неї у горизонтальному положенні пластину на глибину h від поверхні рідини обчислюється за законом Паскаля: $P = \rho ghS$, де g – прискорення вільного падіння ($g = 9{,}8\, м/c^2$), ρ – щільність рідини, S – площа пластини (обчислення якої є геометричним застосуванням визначеного інтегралу). Якщо пластина занурена в рідину в вертикальному положенні, то сила тиску рідини на одиницю площі змінюється з глибиною занурення. Тиск рідини на вертикальну пластину, обмежену лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ обчислюється також за допомогою визначеного інтегралу, а саме за формулою (5.19):

$$P = \rho g\int_a^b xf(x)dx . \qquad (5.19)$$

Тиск рідини на вертикальну пластину, обмежену лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ обчислюється за формулою:

$$P = \rho g\int_a^b x\left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx . \qquad (5.20)$$

Приклад 15. Знайти силу тиску рідини на пластину, вертикально занурену в рідину, якщо пластина має форму

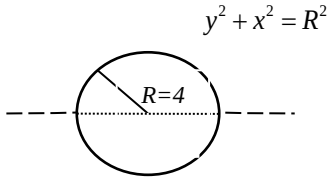

Рисунок 5.17

напівкола радіусом 4, діаметр якого знаходиться на поверхні води (рисунок 5.17).

Розв'язання. Сила тиску рідина на напівколо чисельно дорівнює подвійному тиску яке зазнає чверть цього кола. Рівняння його дуги має вид: $y = \sqrt{16 - x^2}$, тоді знайдемо за формулою (5.20) шуканий тиск:

$$P = 2\rho g \int_0^4 x\sqrt{16 - x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = 16 - x^2, \\ dt = -2x\,dx, \\ t_a = 16,\ t_b = 0 \end{array} \right| = \rho g \int_0^{16} \sqrt{t}\,dt = \frac{128\rho g}{3}.$$

4 Методи наближеного обчислення визначених інтегралів

Для обчислення визначеного інтегралу від неперервної функції $y = f(x)$ та визначеної на відрізку $[a;b]$, коли її первісна відома зазвичай можна користуються формулою Ньютона-Лейбніца (4.2). Нажаль, інколи первісна може бути невідомою і тоді постає питання про наближене обчислення визначених інтегралів. Існує декілька способів досягнення мети, а саме: квадратурні формули прямокутників та трапецій (формула лівих прямокутників, формула правих прямокутників, формула трапецій) та квадратурна формула Симпсона (формула парабол). Розглянемо їх.

Вираз

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \qquad (5.21)$$

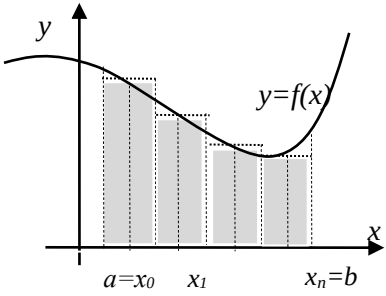

Рисунок 5.18

називається *квадратурною формулою прямокутників*.

Таким чином, шукана площа фігури (рисунок 5.18), що обмежена віссю абсцис, кривою $y = f(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$ приблизно дорівнює сумі площ прямокутників.

Зауваження 3. Якщо функція $f(x)$ додатна і зростаюча, то *формула лівих прямокутників* (5.22)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N}\left(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}\right) \qquad (5.22)$$

відповідає площі сходинкової фігури, яка складається з вписаних прямокутників; а *формула правих прямокутників* (5.23):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N}\left(y_1 + y_2 + ... + y_n\right) \qquad (5.23)$$

відповідає площі сходинкової фігури, яка складається з описаних прямокутників.

Похибка при обчисленні за формулою прямокутників буде тим меншою, чим більшим буде число ділень N (тобто чим меншим буде крок $\Delta x = \frac{b-a}{N}$)

Інший спосіб наближеного обчислення визначеного інтегралу який приводить до квадратурної формули трапецій. Полягає він в тому, що відрізок $[a;b]$ розбивається на

рівні частини точками $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{N}$ та наближено обчислюється визначений інтеграл за *формулою трапецій*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}. \qquad (5.24)$$

За формулою (5.24) площа криволінійної фігури наближено вичерпується площами прямолінійних трапецій.

Зрозуміло, що число N обирається довільним чином, але слід пам'ятати, що чим більшим буде це число, та як наслідок крок $\Delta x = \dfrac{b-a}{N}$ буде меншим, тим з більшою точністю сума у правій частині формули (5.24) буде наближуватися до значення визначеного інтегралу у лівій частині формули (5.24).

У випадку, коли відрізок $[a;b]$ розбитий на парне число рівних частин, тобто $N = 2m$ ($m = 1,2,..$), площу криволінійної трапеції, що визначається лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, можна замінити площею криволінійної трапеції, яка знаходиться під графіком параболи $L(x)$ (рисунок 5.19).

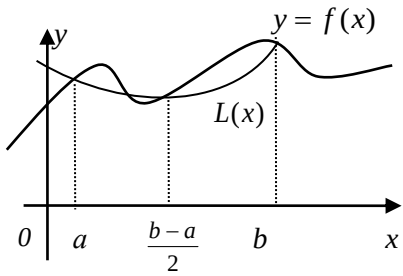

Рисунок 5.19

Для цього можна скористатися *квадратурною формулою Симпсона:*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3N}\Big(f(x_0)+f(x_n)+4(f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{n-1}))+$$

$$+2(f(x_2)+f(x_4)+...+f(x_{n-2}))\Big). \qquad (5.25)$$

Зауваження 4. З точки зору практичного застосування складність обчислень що за формулами прямокутників що за формулою Симпсона однакова. Але, якщо функція $f(x)$ достатньо гладка, то похибка наближення за формулою Симпсона при достатньо великому N значно менша за відповідну похибку за формулою прямокутників.

Приклад 16. Обчислити інтеграл $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}dx$ за допомогою формул трапеції та формул Симпсона, розбивши відрізок інтегрування на 10 частин (обчислення проводити з округленням до третього десяткового знаку). Відповіді порівняти.

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок інтегрування $[0;2]$ на десять рівних части, тобто маємо: $a=0$, $b=2$, $N=10$.

$$\Delta x = \frac{b-a}{N} = \frac{2-0}{10} = 0{,}2 .$$

Згідно з формулою $x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{N}$ отримаємо значення аргументів:

$x_0 = 0+0\cdot 0{,}2 = 0$; $x_1 = 0+1\cdot 0{,}2 = 0{,}2$; $x_2 = 0+2\cdot 0{,}2 = 0{,}4$;

$x_3 = 0+3\cdot 0{,}2 = 0{,}6$; $x_4 = 0+4\cdot 0{,}2 = 0{,}8$; $x_5 = 0+5\cdot 0{,}2 = 1$;

$x_6 = 0+6\cdot 0{,}2 = 1{,}2$; $x_7 = 0+7\cdot 0{,}2 = 1{,}4$; $x_8 = 0+8\cdot 0{,}2 = 1{,}6$;

$x_9 = 0+9\cdot 0{,}2 = 1{,}8$; $x_{10} = 0+10\cdot 0{,}2 = 2$.

Обчислимо значення підінтегральної функції $y=\sqrt{1+x^3}$ при кожному значенні x:

$y_0=\sqrt{1+0^3}=1$; $y_1=\sqrt{1+(0{,}2)^3}=1{,}003$; $y_2=\sqrt{1+(0{,}4)^3}=1{,}032$;

$y_3=\sqrt{1+(0{,}6)^3}=1{,}103$; $y_4=\sqrt{1+(0{,}8)^3}=1{,}23$; $y_5=\sqrt{1+1^3}=1{,}414$;

$y_6=\sqrt{1+(1{,}2)^3}=1{,}652$; $y_7=\sqrt{1+(1{,}4)^3}=1{,}935$; $y_8=\sqrt{1+(1{,}6)^3}=2{,}257$;

$y_8=\sqrt{1+(1{,}8)^3}=2{,}614$; $y_{10}=\sqrt{1+(2)^3}=3$.

За формулою трапецій (5.24) заданий інтеграл наближено буде дорівнювати:

$$\int_0^2\sqrt{1+x^3}dx\approx 0{,}2\left(\frac{1+3}{2}+1{,}003+1{,}032+1{,}103+1{,}23+\right.$$

$$\left.+1{,}414+1{,}652+1{,}935+2{,}257+2{,}614\right)\approx 3{,}248.$$

За формулою Симпсона (5.25):

$$\int_0^2\sqrt{1+x^3}dx\approx\frac{2}{30}\left(3+4\cdot(1{,}003+1{,}103+1{,}414+1{,}935+2{,}614)+\right.$$

$$\left.+2\cdot(1{,}032+1{,}23+1{,}652+2{,}257)\right)\approx 0{,}066\cdot 47{,}618\approx 3{,}142\ .$$

Даний інтеграл можна обчислити тільки наближеними методами.

Завдання для самоконтролю за *лекцією 5*

1. Вставити пропущене слово.

Якщо $y=f(x)$ неперервна функція разом зі своїми похідними $f'(x)$, то таку лінію називають _____

V1. гладкою; V2. прямою; V3. кривою; V4. правльною; V5. інша відповідь.

2. Встановити невірні твердження.

Визначений інтеграл застосовують для обчислення:

V1. площі трапеції ; V2. моменту сили; V3. моменту інерції; V4. щільності пластини; V5. усі вірні.

3. Площа криволінійної трапеції, розташованої під віссю $0x$, тобто обмежена кривою $y = f(x)$, при цьому $f(x) \le 0$, буде

V1. додатною; V2. від'ємна; V3. нульова; V4. неможливо обчислити; V5. інша відповідь

4. Площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою, заданою рівняннями $y = y(t)$, $x = x(t)$, де $t_1 \le t \le t_2$, та віссю , $0x$ обчислюється за формулою:

V1. $S = \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx$; V2. $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x(t)dt$; V3. $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)dt$;

V4. $S = \int_{t_1}^{t_2} y'(t) \cdot x'(t)dt$; V5. інша відповідь.

5. Інтеграл $\int_a^a f(x)dx$ дорівнює:

V1. 1; V2. $f(x)$; V3. ∞; V4. 0; V5. інша відповідь.

6. Довжина дуги кривої, яка задана в полярних координатах обчислюється за формулою:

V1. $l = \int_{\phi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi$; V2. $l = \int_{\phi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi$; V3. $l = \int_{\phi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 + \rho^2} d\varphi$;

V4. $l=\int\limits_{\phi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho'^2+1}d\varphi$; V5. інша відповідь.

7. Яка з наведених формул не належить до формул наближеного обчислення визначеного інтегралу:

V1. формула прямокутників; V2. формула трапецій; V3. формула Ньютона-Лейбніца; V4. формула Симпсона; V5. інша відповідь.

8. Площа поверхні, утвореної обертанням кривої, заданої рівнянням $y=f(x)$, де $a\le x\le b$, навколо осі $0x$, обчислюється за формулою:

V1. $S_n=2\pi\int\limits_a^b\sqrt{1+f^2(x)}dx$; V2. $S_n=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f^2(x)}dx$;

V3. $S_n=2\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$; V4. $S_n=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$;

V5. інша відповідь.

9. Сила тиску рідина (питома вага якої c) на вертикальну пластину, яка знаходиться в рідині, обчислюється за формулою:

V1. $P=\frac{1}{c}\int\limits_a^b xf(x)dx$; V2. $P=c\int\limits_a^b x^2f(x)dx$; V3. $P=c\int\limits_a^b xf'^2(x)dx$;

V4. $P=c\int\limits_a^b xf(x)dx$; V5. інша відповідь.

10. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: а) $y^2=9x$, $y=-3x$; б) $y=\frac{-x^2}{4}$, $y=\sqrt{-2x}$, $x=-2$.

11. Обчислити об’єм тіла, отриманого обертання фігури обмеженої лініями $4x^2+9y^2=1$, $3y+2x=1$.

12. Знайти поверхню тіла обертання дуги синусоїди $y = \sin x$, якщо $0 \le x \le 2\pi$.

13. Обчислити роботу, яку потрібно витратити, щоб викачати воду з вертикальної циліндричної діжки, радіус основи якої R, висота H.

14. Знайти центр тяжіння поверхні напівкулі.

15. Обчислити довжину дуги евольвенти кола від точки $A(t=0)$ до точки $M(t=2)$ (*примітка*: рівняння цієї лінії можна знайти у додатку Д).

16. Обчислити (з точністю до 0,0001) довжину дуги кривої $\rho = 1 - \sin\varphi$, якщо $-\frac{\pi}{2} \le \varphi - \frac{\pi}{6}$.

17. Обчислити об'єм тіла обертання фігури $\rho = 2(1+\cos\varphi)$ навколо полярної осі.

18. Обчислити об'єм тіла обертання фігури, утвореної між лініями $2y = x^2$ та $2y + 2x - 3 = 0$, навколо осі абсцис.

19. Обчислити об'єм тіла обертання астроїди у якої $a = 7$ навколо осі ординат (*примітка*: рівняння цієї лінії можна знайти у додатку Д).

ВІДПОВІДІ
на завдання для самоконтролю

лекція 1

1. V1; **2**. V5; **3**. V3; **4**. V3; **5**. V1, V3; **6**. V2; **7**. V3; **8**. V2; **9**. V3; **10**. V1, **11**. V1.

лекція 2

1. V1, V2; **2**. V2; **3**. V2; **4**. V3; **5**. V3; **6**. V4; **7**. V1; **8**. V2; **9**. V2, **10**. V2.

лекція 3

1. V3; **2**. V1, V2, V4; **3**. V4; **4**. V2; **5**. V4; **6**. V1, V3; **7**. V3; **8**. V2.

лекція 4

1. V2; **2**. V5; **3**. V1; **4**. V3; **5**. V2; **6**. V1; **7**. V2; **8**. V4; **9**. V2.

лекція 5

1. V1; **2**. V2, V4; **3**. V1; **4**. V3; **5**. V4; **6**. V2; **7**. V3; **8**. V4; **9**. V4; **12.** $4\pi\left(\sqrt{2}+\ln\sqrt{2}+1\right)$; **13.** $\dfrac{\pi c R^2 H^2}{2}$; **14**. на осі симетрії на відстані $\dfrac{R}{2}$ від основи; **15.** $2a$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа : для втузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – [11-е изд., стер.] – СПб. : Лань, 2005. – 736 с.

2. Васильченко І. П. Вища математика для економістів : підручник / І. П. Васильченко. – [2-ге вид., випр.] – Київ : Знання, 2004. – 454 с.

3. Вища математика : підручник / [В. А. Домбровський та ін.] ; за ред. М. І. Шинкарика. – Тернопіль : Видавництво Карп'юка, 2003. – 480 с.

4. Высшая математика для экономистов : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – [2-е изд., перераб. и доп.] – М. : ЮНИТИ, 2001. – 471 с.

5. Гусак А. А. Справочное пособие по решению задач: математический анализ / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 1998. – 228 с.

6. Долгіх В. М. Вища математика для економістів : практикум : у 4 ч. / В. М. Долгіх, Т. І. Малютіна, К. А. Дахер ; Державний вищий навчальний заклад «Українська академія банківської справи Національного банку України». – Суми : ДВНЗ «УАБС НБУ», 2009. – Ч. 3. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. Ряди. – 129 с.

7. Колосов А. І. Вища математика для економістів : у 2-х модулях : конспект лекцій (для студентів 1 курсу денної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 «Економіка підприємства» і 6.030509 «Облік і аудит») / А. І. Колосов, А. В. Якунін, Ю. В. Ситникова. – Харків :

ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2014. – Модуль 2. – 237 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/40510/.

8. Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики (для студентів 1, 2 курсів денної та заочної форм навчання за напрямами підготовки 6.060101 – Будівництво, 6.050702 – Електромеханіка, 6.050701 – Електротехніка та електротехнології) / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова; Харків. нац. ун-т міськ. госпва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – Частина 2. – 141 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/42486/.

9. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : для втузов : у 2-х т. / Н. С. Пискунов. – [13-е изд.] – М. : Наука, 1985. – Том 1. – 432 с.

10. Ситникова Ю. В. Вища математика : конспект лекцій з дисципліни (для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання спеціальності 241 Готельно-ресторанна справа) / Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 158 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/46339/1/2017

11. Тестові завдання з вищої математики : навчальний посібник / С. І. Гургула, В. М. Мойсишин, В. О. Воробйова та ін. ; за ред. С. І. Гургули, В. М. Мойсишина. – Івано-Франківськ : Факел, 2008. – 737 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Основні формули тригонометрії

Тригономет-ричні тотожності	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$; $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$; $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$
Формули додавання	$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$; $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$; $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$; $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$; $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$; $\operatorname{ctg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}$; $\operatorname{tg}(x-y) = \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$; $\operatorname{ctg}(x-y) = \dfrac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y}$

Формули подвійного аргументу	$\sin 2x = 2\sin x\cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$; $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$; $\operatorname{ctg} 2x = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$
Формули половинного аргументу	$\sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2}$; $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$; $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$; $\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$; $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$; $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1-\cos x} = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$
Формули зниження степеня	$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$
Формули перетво-рення суми в добуток	$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$; $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$; $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$; $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

Формули перетво-рення добутку в суму	$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]$; $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right]$; $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y)+\sin(x+y)\right]$
Запис тригономе-тричних функцій через тангенс половинного кута	$\sin x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$; $\cos x = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$; $\mathrm{tg}\ x = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$; $\mathrm{ctg}\ x = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{2\ \mathrm{tg}\frac{x}{2}}$
Формули зведення	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$; $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x$; $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x$; $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$; $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$; $\sin(2\pi+x)=\sin x$; $\cos(2\pi+x)=\cos x$; $\sin(2\pi-x)=-\sin x$; $\cos(2\pi-x)=\cos x$; $\sin(\pi+x)=-\sin x$; $\cos(\pi+x)=-\cos x$;

ДОДАТОК Б

Таблиця похідних функції

Формули похідних		
Ч.ч.	Функція	Похідна
1	2	3
1	Стала функція	$C' = 0$
2	Степенева функція	$\left(u^a\right)' = a u^{a-1} \cdot u'$
2а	x	$x' = 1$
2б	$\sqrt{u}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
2в	$\frac{1}{u}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
3	Показникова функція	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
3а	Експонента	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
4	Логарифмічна функція	$\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
4а	Натуральний логарифм	$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
5	Синус	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
6	Косинус	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$

1	2	3
7	Тангенс	$(tg\ u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
8	Котангенс	$(ctg\ u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
9	Арксинус	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
10	Арккосинус	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11	Арктангенс	$(arctg\ u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
12	Арккотангенс	$(arcctg\ u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

ДОДАТОК В

Основні диференціали

$dC = 0$	$d(\sin u) = \cos u \; du$
$d(u^{\alpha}) = \alpha u^{\alpha-1} du$	$d(\cos u) = -\sin u \; du$
$d(au + b) = a \; du$	$d(tg\, u) = \dfrac{du}{\cos^2 u}$
$d(au^2 + bu + c) = = (2au + b) \; du$	$d(ctg\, u) = -\dfrac{du}{\sin^2 u}$
$d(\sqrt{u}) = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$	$d(\arcsin u) = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
$d(\ln u) = \dfrac{du}{u}$	$d(\arccos u) = -\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
$d(a^u) = a^u \ln a \; du$	$d(arctgu) = \dfrac{du}{1+u^2}$
$d(e^u) = e^u \; du$	$d(arcctgu) = -\dfrac{du}{1+u^2}$

ДОДАТОК Г

Таблиця невизначених інтегралів

Основні невизначені інтеграли			
1	$\int 0\,du = C$	5	$\int \sin u\ du = -\cos u + C$
2	$\int u^{\alpha}\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	6	$\int \cos u\ du = \sin u + C$
2а	$\int du = u + C$	7	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\ u + C$
2б	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	8	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\ ctg\ u + C$
2в	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	9	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$
3	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	10	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + b}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + b}\right\rvert + C$
4	$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	11	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\ arctg\frac{u}{a} + C$
4а	$\int e^u\,du = e^u + C$	12	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ \ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$
Додаткові невизначені інтеграли			
1	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert tg\frac{u}{2}\right\rvert + C$	2	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
3	$\int tg\,u\ du = -\ \ln\lvert\cos u\rvert + C$	4	$\int ctg\,u\ du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$
5	$\int sh\,u\ du = ch\,u + C$	6	$\int ch\,u\ du = sh\,u + C$
7	$\int \frac{du}{ch^2 u} = th\ u + C$	8	$\int \frac{du}{sh^2 u} = -\ cth\ u + C$

9	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\ du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \ \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$
10	$\int \sqrt{a^2 - u^2}\ du = \frac{1}{a} u \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \ \arcsin \frac{u}{a} + C$
11	$\int e^{au} \sin bu\ du = \frac{-b e^{au} \cos bu + a e^{au} \sin bu}{a^2 + b^2} + C$
12	$\int e^{au} \cos bu\ du = \frac{a e^{au} \cos bu + b e^{au} \sin bu}{a^2 + b^2} + C$

ДОДАТОК Д

Зображення деяких кривих та їх рівняння

Циклоїда $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

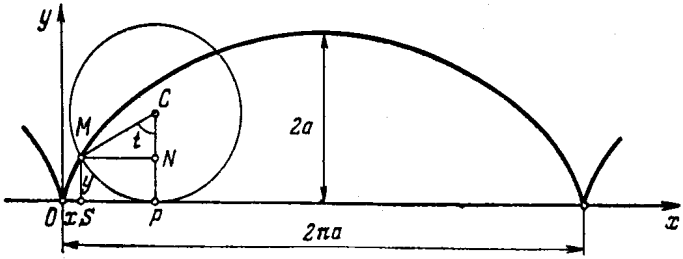

Рисунок Д.1

Астроїда: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ або $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

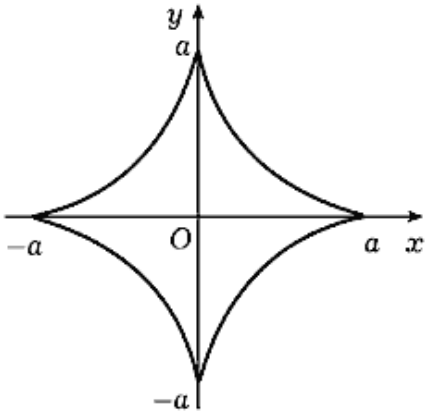

Рисунок Д.2

Кардіоїда $\rho = a(1+\cos\varphi)$

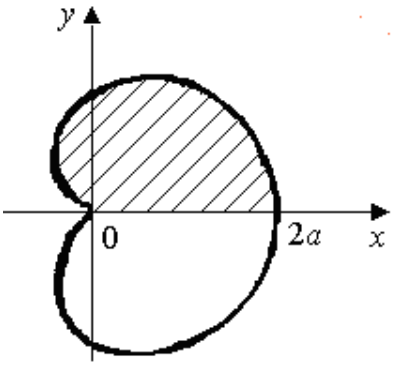

Рисунок Д.3

Евольвента кола $\begin{cases} x = a(t\sin t + \cos t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$

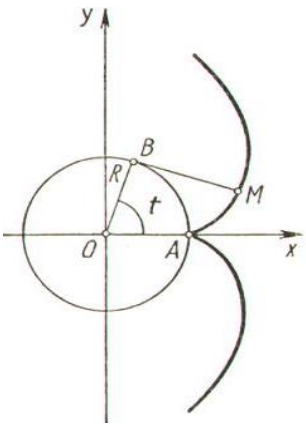

Рисунок Д.4

Логарифмічна спіраль $\rho = ae^{k\varphi}$

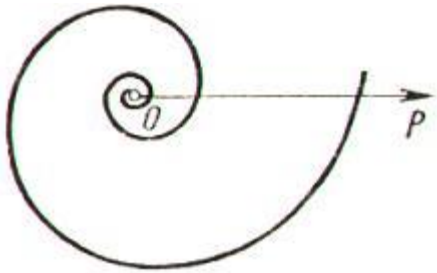

Рисунок Д.5

Трипелюсткова троянда $\rho = a\sin 3\varphi$

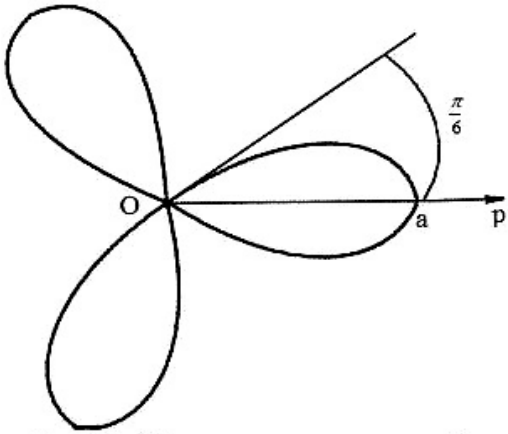

Рисунок Д.6

Спіраль Архімеда $\rho = a\varphi$

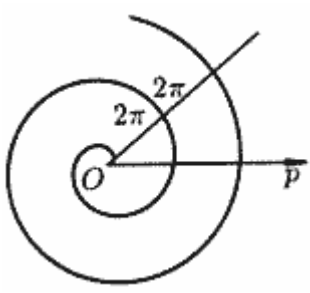

Рисунок Д.7

Декартів лист $x^3 + y^3 = 3axy$ або $\rho = \dfrac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^2\varphi}$

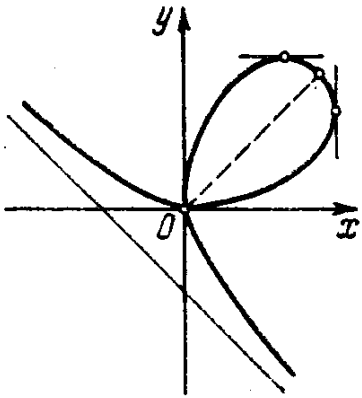

Рисунок Д.8

Строфоїда пряма $y = \pm x\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$,

(a - відстань до асимптоти, $a = S0$)

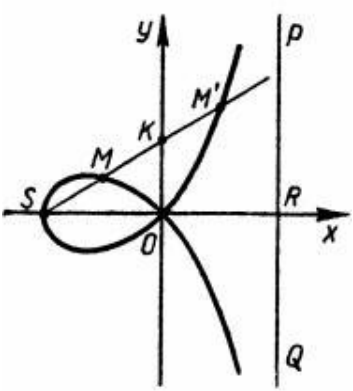

Рисунок Д.9

Лемніската Бернулі $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$,

(c - відстань між фокусами) або $\rho = c\sqrt{\cos\varphi}$

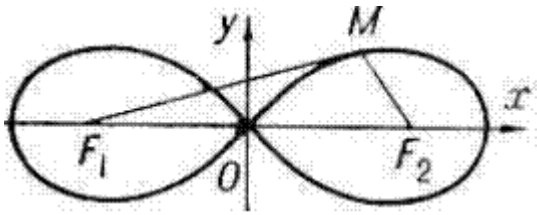

Рисунок Д.10

Навчальне видання

СИТНИКОВА Юлія Валеріївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 1 курсу усіх спеціальностей прискореної форми навчання)

Відповідальний за випуск *А. В. Якунін*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Ю. В. Ситникова*

План 2018, поз. 107 Л

Підп. до друку 07.09.2018. Формат 60 × 84/16.
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 3,7.
Тираж 50 пр. Зам. № .

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.