МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

К. А. Мамонов, Ю. Б. Радзінська

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
З ДИСЦИПЛІНИ

«МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ У ЗЕМЛЕУСТРОЇ»

(для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій)

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2018

Мамонов К. А. Конспект лекцій з дисципліни «Математичні методи і моделі у землеустрої» (для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій) / К. А. Мамонов, Ю. Б. Радзінська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 116 с.

Автори: д-р екон. наук, проф. К. А. Мамонов;
асист. Ю. Б. Радзінська

Рецензент канд. техн. наук, доц. І. С. Творошенко

Рекомендовано кафедрою земельного адміністрування та геоінформаційних систем, протокол № 11 від 2.03.2017.

ЗМІСТ

ВСТУП

В сучасних умовах господарювання України формування фундаментальних засад розвитку землеустрою є актуальним завданням. В цьому аспекті виникає необхідність використання інструментарію, який органічно поєднує математичні методи для вирішення економічних проблем з метою отримання кількісних оцінок і моделей в процесі прийняття ефективних управлінських рішень.

Для магістрів спеціальності «Геодезія та землеустрій» запропонована дисципліна «Математичні методи і моделі в землеустрої». В умовах трансформаційних процесів вивчення цієї дисципліни дає можливість спеціалістам в цій сфері заволодіти сучасними інструментами і підходами для формування фінансової й економічної політики, укріплення потенціалу підприємства та виробничої бази.

Зміст курсу «Математичні методи і моделі в землеустрої» для студентів спеціальності «Геодезія та землеустрій» представлено в темах:

1 Концептуальні аспекти оптимізаційного моделювання в землеустрої.

2 Оптимізаційні моделі в землеустрої: напрями формування та особливості застосування.

3 Задача лінійного програмування та методи її розв’язування.

4 Теорія достовірності та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач.

5 Цілочислове програмування.

6 Нелінійні оптимізаційні моделі в землеустрої.

7 Принципи побудови економетричних моделей. Парна лінійна регресія.

8 Лінійні моделі множинної регресії.

В рамках цього курсу ***виділяють 3 змістових модулів***:

1 Організація оптимізаційного моделювання в землеустрої.

2 Лінійне та нелінійне програмування в землеустрої.

3 Економетричне моделювання в землеустрої.

В результаті вивчення дисципліни студент повинен

Знати:

1 Методику побудови математичних моделей.

2 Методику побудови регресійних, просторово-регресійних та математичних моделей.

3 Методику побудови геоінформаційних моделей.

4 Фундаментальні економічні категорії та базові економіко-математичні методи.

5 Методику визначення оціночних моделей із застосуванням методів інтелектуального аналізу даних.

Вміти:

1 Будувати регресійні та просторово-регресійні моделі залежності попиту, пропозиції та ціни в залежності від географічних, екологічних, інфраструктурних чинників.

2 Розробляти оціночні моделі із застосуванням методів інтелектуального аналізу даних, зокрема методів нечітких множин.

3 Розробляти математичні і геоінформаційні моделі впливу рівня прояву екологічних факторів на вартість об’єктів нерухомості, в тому числі з використанням методів просторової регресії та еластичних оцінок.

4 Будувати математичні моделі прояву залежності цінових показників від економічних, соціальних, географічних, економічних чинників та характеристик ринку використовуючи різні методи аналізу.

5 Аналізувати базові знання фундаментальних розділів математики в обсязі, необхідному для володіння математичним апаратом у сфері землеустрою.

РОБОЧА ПРОГРАМА КУРСУ

Метою вивчення курсу є ознайомлення майбутніх фахівців з математичними методами, що застосовуються у землеустрої та застосування їх для розв’язання завдань щодо проблем землеустрою.

Завданнями курсу «Математичні методи і моделі в землеустрої» є:

– ознайомити студентів з методологічними основами та методами математичного моделювання та можливість їх використання в землеустрої;

– навчити студентів різним способам проведення вибіркових спостережень, визначення параметрів статистичної сукупності на основі вибірки;

– розвинути у студентів навички побудови регресійних моделей для мети оцінки вартості типових об’єктів нерухомості,

– навчити студентів розробляти оціночні моделі із застосуванням методів інтелектуального аналізу даних, зокрема методів нечітких множин.

Предметом курсу виступають методологія та інструментарій побудови і розв’язування детермінованих оптимізаційних задач.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1 ОРГАНІЗАЦІЯ ОПТИМІЗАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В ЗЕМЛЕУСТРОЇ

Тема 1 Концептуальні аспекти оптимізаційного моделювання в землеустрої

Визначення економіко-математичного моделювання. Ретроспективний аналіз розвитку економіко-математичного моделювання. Види моделей. Основні етапи моделювання. Випадкові події і величини, їх числові характеристики. Закони розподілу випадкової величини. Статистичні гіпотези та їх перевірка. Попередня обробка результатів спостережень і техніко-економічної інформації.

Тема 2 Оптимізаційні моделі в землеустрої: напрями формування та особливості застосування

Особливості економіко-математичних моделей оптимізації. Модель оптимального планування виробництва. Економіко-математичні моделі оптимізації випуску продукції підприємствами. Економіко-математичні моделі розподілу фінансових ресурсів. Розподіл капітальних вкладень по проектах. Задачі безумовної та умовної оптимізації та методи їх розв'язування.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2 ЛІНІЙНЕ ТА НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ В ЗЕМЛЕУСТРОЇ

Тема 3 Задача лінійного програмування та методи її розв'язування

Сутність лінійного програмування. Особливості задач лінійного програмування. Основні методи розв'язування задач лінійного програмування. Практичні аспекти вирішення задач лінійного програмування.

Тема 4 Теорія достовірності та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач

Теорія достовірності в економіко-математичному моделюванні. Достовірність. Міра достовірності результатів моделювання. Критерії оцінки достовірності результатів дослідження. Характеристика статистичної несуперечності. Аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач. Область допустимих рішень. Критерії оптимальності. Інтерпретація отриманих економічних результатів на основі аналізу лінійних моделей оптимізаційних задач.

Тема 5 Цілочислове програмування

Основні поняття і сутність цілочислового програмування. Алгоритм розв'язування задач цілочислового програмування. Метод Гомори. Метод віток і меж. Транспортна задача, її математичне формулювання і алгоритм вирішення.

Тема 6 Нелінійні оптимізаційні моделі в землеустрої

Сутність нелінійних оптимізаційних моделей в землеустрої. Використання нелінійних оптимізаційних моделей в економічних процесах. Методи формування нелінійних оптимізаційних моделей в землеустрої.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3 ЕКОНОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗЕМЛЕУСТРОЇ

Тема 7 Принципи побудови економетричних моделей. Парна лінійна регресія

Принципи побудови економетричних моделей. Критерії адекватності економетричної моделі. Сутність мультиколінеарності, напрями її виявлення. Парна лінійна регресія.

Тема 8 Лінійні моделі множинної регресії

Кількісна регресійна модель множинної регресії. Етапи побудови лінійної моделі множинної регресії. t-критерій Ст'юдента і F-критерій Фішера в множинному регресійному аналізі. Тест Дарбіна-Уотсона для оцінки адекватності економетричної моделі. Інтерпретація економетричної моделі.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1 ОРГАНІЗАЦІЯ ОПТИМІЗАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В ЗЕМЛЕУСТРОЇ

Тема 1 Концептуальні аспекти оптимізаційного моделювання в землеустрої

1.1 Основні визначення. Види моделей. Основні етапи моделювання.

1.2 Випадкові події і величини, їх числові характеристики.

1.3 Закони розподілу випадкової величини.

1.4 Статистичні гіпотези та їх перевірка.

1.5 Попередня обробка результатів спостережень і техніко-економічної інформації.

Поняття: економіко-математичне моделювання; модель; подія; випадкова величина; закон розподілу випадкової величини; випадкові помилки; система; імітація; економіко-математичні моделі.

Джерела: [5], [13], [14], [22], [23], [24], [26], [27], [37], [38], [39], [40], [49], [53], [61], [63], [64], [65], [67], [70], [72], [74], [78], [79], [80].

1.1 Основні визначення. Види моделей. Основні етапи моделювання

Математичні методи і моделі в землеустрої – це дисципліна, в якій формується система знань з методології та інструментарію побудови і використання різних типів оптимізаційних моделей в землеустрої. Теоретичним базисом математичних методів і моделей в землеустрої є системний аналіз, математичні закони, статистичні методи та інші.

Моделювання процесів в різних сферах діяльності людини здійснювалось ще з глибокої давнини. Методи моделювання використовувались стародавніми єгиптянами і греками в будівництві й архітектурі, технічному конструюванні. Намагання оцінити економічні процеси здійснив грецький філософ Аристотель. Проте формування методологічних аспектів і теоретичного базису використання математичних методів в економічних процесах з'явились значно пізніше.

Обґрунтування використання математичних методів в економіці починається з У. Петі (1623-1687 рр.). У передмові до «Політичної арифметики» він вказує на те, що «замість того, щоб використовувати слова» необхідно перейти до «мови чисел, важелів і мір» [53]. Слід вказати, що моделювання процесів в суспільному виробництві здійснив Ф. Кене (1694-1774 рр.), склавши економічну таблицю [27]. В замітках до трактату Д. Міля російський економіст

Н. Г. Чернишевський (1828-1889 рр.) вказує на використання в політичній економії математичних методів [72].

На початку 19 століття стрімкий розвиток промислового виробництва й зміни в економічних відносинах призвели до необхідності використання математичних методів в економічних процесах. З'являється «математична школа» засновником якої був О. Курно (1801-1877 рр.). Представники математичної школи Г. Госсен (1810-1859 рр.), В. Джевонс (1835-1882 рр.), Л. Вальрас (1834-1910 рр.), Г. Кассель (1866-944 рр.), Ф. Еджворд (1845-1926 рр.), В. Парето (1848-1923 рр.), В. Дмитрієв (1868-1913 рр.) розробили методологію та сформували систему проведення економічних досліджень математичними методами.

У ХХ столітті і до теперішнього часу математичні методи широко використовуються при розробці економічних моделей і прийнятті управлінських рішень як на макро, так і на мікро рівнях. Такі відомі економісти як Ч. Кобб і П. Дуглас, В. Рамсей, Джон фон Нейман, А. Вальд, Р. Фриш, Д. Кейнс, Е. Домар, Р. Харрод, Дж. Робинсон, Д. Мід, Э. Фелпс, В. Канторович, В. В. Новожилов, В. С. Немчинов, В. Леонтьєв вирішували складні економічні проблеми і досліджували процеси з використання математичних методів.

Ретроспективний аналіз розвитку економіко-математичного моделювання свідчить про його важливість і необхідність використання в економічних процесах, адаптуючи його до сучасних трансформаційних умов.

При моделюванні процесів землевпорядкування та оцінки нерухомості за допомогою математичних методів важливого значення набуває визначення моделі. ***Термін модель*** походить від латинської означає «зразок, норма, міра». По суті модель представляє собою аналогію, подібність явищ, процесів, об'єктів.

Таким чином, ***модель*** – це зображення об'єкта або системи в оригінальній або аналоговій формі, якими управляють і використовують для прийняття управлінських рішень. Прикладом моделей можуть бути макети машин, споруд, механізмів та інші. Ці моделі засновані на прямій подібності об'єктів.

В процесах оцінки нерухомості широко використовують моделі які побудовані на схожості поведінки системи, подібності їх реалізації на зміну дій.

Виділяють наступні види моделей: фізичні, символьні, аналітичні, словесно-описові, математичні, імітаційні, формальні, функціональні, теоретичні.

Математичне моделювання здійснюють за наступними етапами:

1) виявлення проблемних аспектів і особливостей досліджуваного процесу, його аналіз, ідентифікація і визначення достатньої структури для моделювання, формування мети і задач моделювання;

2) аналіз досліджуваних процесів, оцінка використаних ресурсів і потужностей необхідних для здійснення процесу оцінки нерухомості;

3) формування і обробка інформації щодо оцінки нерухомості;

4) побудова моделі на основі математичного інструментарію;

5) інтерпретація отриманої економіко-математичної моделі, уточнення і корегування її параметрів.

1.2 Випадкові події і величини, їх числові характеристики

З позиції теорії пізнання спостережувані в природі й суспільстві явища можна підрозділити на наступні види:

– достовірні (визначені), які обов’язково відбудуться, якщо буде здійснена певна сукупність умов, і приймуть умови, які явно можна передбачити;

– неможливі, які явно не відбудуться в певних умовах;

– випадкові, які при сукупності умов можуть відбутися або не відбутися, в результаті випробувань можуть прийняти будь-яке значення, причому невідомо, яке саме;

– невизначені, про які нічого не можна сказати відбудуться вони або не відбудуться, незалежно від створених умов.

Слід розрізняти випадкові події - факт і випадкові величини.

Під *«подією»* розуміється будь-яке (не обов’язково знаменне) явище. *Подія-факт* в кількісному і якісному відношенні може бути величиною невизначеною, оскільки про неї нічого не можна сказати наперед відомою вірогідністю, а випадкова величина пов’язана з характером, змістом досліджуваного процесу.

Величина називається випадковою, якщо вона формується під дією багатьох дрібних причин, не піддатливих до результату випробувань повному контролю і обліку, діючих відносно незалежно один від одного.

Математичне моделювання вивчає кількісні закони масових випадкових величин і явищ, але не ставить перед собою завдання передбачити, відбудеться одинична подія чи ні, – вона просто не в силах це зробити.

Одним з напрямів математичного моделювання є вивчення закономірностей масових однорідних випадкових подій. Випадкові величини підрозділяються на *дискретні (переривчасті) й безперервні*.

Дискретними називаються випадкові величини, які приймають окремі, строго визначені, ізольовані, кінцеві чисельні значення з певною вірогідністю, між якою не може бути проміжних (число робітників у бригаді, число перевезених за один рейс пасажирів і т. п.). При цьому число можливих значень дискретної випадкової величини може бути кінцевим і нескінченним.

Частіше зустрічаються *безперервні випадкові величини*, які можуть мати всі можливі значення в деякому кінцевому або нескінченному проміжку. Очевидно, число можливих значень безперервної випадкової величини нескінченне, наприклад, рівень собівартості перевезення одного пасажира, продуктивність праці і т. п.

Оскільки точність вимірювання або обліку завжди обмежена, то практично всі випадкові величини є дискретними.

Значна частина математичного моделювання пов’язана з необхідністю досліджувати і описувати велику сукупність об’єктів. Звичайно цю сукупність називають *генеральною*. Вона охоплює, наприклад, усіх мешканців великого міста, продукцію галузі народного господарства.

Якщо досліджувана сукупність об’єктів дуже численна або об’єкти вивчення труднодоступні, а також є інші причини, що не дозволяють вивчити всі об’єкти, то вдаються до вивчення якоїсь частини генеральної сукупності, що називається *вибіркою*.

Вибірка повинна бути представницькою або, як кажуть, репрезентативною. Якщо вибірка представляє не всю генеральну сукупність, а якусь її частину, то це називається зсувом вибірки. Зсув - одне з основних джерел помилок при використанні вибіркового методу.

В економіко-математичному моделюванні необхідно визначити вибірку, що складається з n однорідних одиниць (елементів). Число n називається обсяг вибірки. Одиницями вибірки можуть бути різні економічні процеси і явища, результати виробничо-господарської діяльності підприємств: продуктивність праці, собівартість продукції, фондовіддача, рентабельність та ін.

Чисельні значення, які приймає досліджувана ознака, називають варіантами. Зміна величини ознаки в статистичній сукупності називається *варіацією (коливається або розсіюванням)*.

Для того, щоб замінити в зареєстрованих значеннях процесу, що вивчається, будь-яку закономірність, їх треба привести до доступного для аналізу вигляду, тобто впорядкувати, класифікувати, систематизувати, згрупувати. Процес розчленовування досліджуваної сукупності на частини називається *угрупованням*.

Початковою базою для вивчення закономірностей тих чи інших явищ служать статистичні ряди розподілу, які будуються за якісними і кількісними ознаками.

Якщо ряди є послідовністю чисел, що характеризують зміну показника в часі, то вони називаються тимчасовими, а якщо показують розподіл одиниць сукупності, що вивчається, по окремих групах, виділених за певною ознакою, то варіаційними.

Число, що показує, скільки разів зустрічається та або інша одиниці сукупності, що вивчається, називається його частотою m.

Варіаційний ряд або ряд розподілу є таблицею, в якій в порядку убування або зростання перераховані можливі значення випадкової величини за вибіркою, що вивчається, з вказівкою їх частот.

Таблиця 1.1 – Значення випадкової величини

Значення випадкової величини	X_1	X_2	X_3	…	X_n
Частоти	m_1	m_2	m_3	…	m_n

Очевидно, що сума всіх частот дорівнює обсягу вибірки (1.1):

$$m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n = \sum_{i=0}^{n} m_i = n, \tag{1.1}$$

де n-загальне число спостережень.

Якщо різних значень випадкової величини багато, то ряди розподілу складаються в інтервальній формі. Різниця між верхньою X_i і нижньої X_{i-1} межами інтервалу називається його величиною:

$$\Delta X_i = X_i - X_{i-1}. \tag{1.2}$$

Число інтервалів не повинно бути надмірно великим. Для того, щоб можна краще проявити характерні особливості, пов'язані з природою величин, що вивчаються, рекомендується ділити проміжок варіації на 6÷16 інтервалів залежно від обсягу вибірки.

Отже, для визначення величини інтервалів необхідно різницю X_{max} і X_{min} (розмах варіювання) розділити на 6 – 16 залежно від числа спостережень:

$$\Delta x_i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{6 - 16}. \tag{1.3}$$

У літературі зустрічається і таке визначення розрахунку інтервалів, як використання формули Стерджеса (1.4):

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3.32 \ln n}. \tag{1.4}$$

Отримане значення інтервалу $_{\Delta}X$ звичайно округляють. За величину і особливо центр інтервалу приймається деяке «зручне число», що має невелике число значущих цифр, щоб полегшити надалі обчислення.

Запис інтервальних рядів розподілу поданий в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2 – Інтервальні ряди розподілу

Значення випадкових величин	$X_1 - X_2$	$X_2 – X_3$	$X_3 - X_4$	…	$X_{n-1} – X_k$
Частоти	m_1	m_2	m_3	…	m_k

Сума частот представлена наступним чином:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n. \tag{1.5}$$

Дослідження не обмежується побудовою ряду розподілу тієї або іншої випадкової величини. Необхідно знайти декілька величин, так званих статистичних характеристик, які відображали б властивості ряду розподілу в цілому, повніше характеризували б сукупність і властиві їй закономірності. Інакше кажучи, ставиться завдання знаходження такого значення випадкової величини, навколо якої групуються всі інші і зустрічаються найбільш часто. Найважливішим і найпоширенішим з них є середня арифметична, яка позначається символом $\bar{X}$. Якщо випадкова величина приймає n значень, то середня арифметична за незгрупованими даними є сумою її значень, розділеною на їх число:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{1.6}$$

Середня арифметична зважена за групованими даними обчислюється таким чином:

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + ... + x_k m_k}{\sum_{i=1}^{k} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}. \tag{1.7}$$

Середня арифметична, як і середня арифметична зважена, володіє тією властивістю, що сума відхилень значень випадкової величини від середньої арифметичної дорівнює нулю. Ця властивість дає можливість визначити середню арифметичну як центр угрупування випадкової величини.

Крім середнього значення ознаки важливо знати характер варіації, тобто як тісно концентруються всі значення елементів сукупності навколо середньої. З теоретичної точки зору самою відповідною мірою коливання ознаки служить *дисперсія* (від латинського *dispercia* – розсіяння), є квадратом відхилення дослідних даних від середнього значення за незгрупованими даними (1.8) та за згрупованими даними (1.9):

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i-1}^{k}(x_i - \bar{x})^2}{n}, \tag{1.8}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i-1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 m_i}{n} \tag{1.9}$$

Як бачимо, дисперсія випадкової величини в окремих випадках може мати нереальну розмірність. Для її усунення вводять середньоквадратичне відхилення, що розглядається в тих же одиницях вимірювання:

$$\sigma_2\sqrt{\sigma_x^2}\,. \tag{1.10}$$

Безрозмірним показником коливання випадкової величини є коефіцієнт варіації, який є відношенням $\sigma_x \ k \ \bar{x}$, відображеним у відсотках:

$$v_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} * 100\%\,. \tag{1.11}$$

Якщо дисперсія або коефіцієнт варіації великі, то це свідчить про значний розкид випадкової величини її середнього значення.

Випадкова величина характеризується двома основними параметрами:

– безліччю її можливих значень;

– вірогідністю того, що вона прийме ті чи інші значення з цієї множини.

Вірогідність є одним з основних понять математичної статистики. Вона є математичним визначенням об’єктивної можливості відбутися або не відбутися випадковому явищу.

При вивченні рядів розподілу використовують не тільки абсолютні значення появи випадкової величини m_i (частоти), але й відносні частоти, тобто $\frac{m}{n}$.

Згідно з теоремою Якова Бернуллі (1654–1705), що отримала назву «закону великих чисел» в статистиці, можна передбачати відносну частоту події.

Теорія Я. Бернуллі була опублікована в 1713 г. Стосовно вибірки вона формулюється так: з вірогідністю, скільки завгодно близькою до одиниці, можна стверджувати, що різниця між відносною частотою і часткою в генеральній сукупності при достатньо великому обсязі вибірки буде скільки завгодно мала.

Коротко теорема Я. Бернуллі записується так:

$$\frac{m}{n} \xrightarrow[m \to \infty]{вер} p . \tag{1.12}$$

З цього виходить, що вірогідність події А визначається за формулою:

$$\text{P (A)} = \frac{m}{n} . \tag{1.13}$$

Сума всіх відносних частот дорівнює 1, тобто

$$\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + ... + \frac{m_k}{n} = P_1 + P_2 + ... + P_k = \sum_{i=1}^{k} P_i = 1 . \tag{1.14}$$

З визначення вірогідності випливають *наступні її властивості*:

1 Вірогідність неможливої події дорівнює 1. При m=n

$$\text{P(A)} = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2 Вірогідність неможливої події дорівнює нулю. При m=0

$$P_a = \frac{m}{n} = \frac{o}{n} = 0.$$

3 Вірогідність випадкової події є позитивне число, укладене між нулем і одиницею.

Дійсно випадковій події сприяє лише частина із загального числа елементарних результатів випробувань. У цьому випадку $o < m < 1$, значить

$$0 < \frac{m}{n} < 1 \qquad 0 \le \text{P(A)} \le 1.$$

4 Вірогідність протилежної події дорівнює різниці між одиницею і вірогідністю даної події, тобто

$$\text{P(B)} = 1 - \text{P(A)}.$$

5 Якщо в результаті випробування повинне відбутися одне, і тільки одне з деяких подій $A_1, A_2, \ldots A_к$, то сума всієї вірогідності дорівнює одиниці, тобто

$$P_1(A_1) + P_2(A_2) + \ldots + P_k(A_k) = 1.$$

Одним з узагальнюючих результатів закону великих чисел є те, що при достатньо великому числі спостережень n середнє значення випадкової величини $\overline{X}$ приблизно дорівнює її математичному очікуванню, або $M_{(x)} = \overline{X}$. Така середня називається стохастичною.

З цього виходить, що математичне очікування дискретної випадкової величини є невипадкова (постійна) величина. Тим самим П. Л. Чебишев (1821–1894) довів, що сукупні дії великого числа чинників призводять до результату, майже не залежному від випадку.

У вузькому значенні слова під законом великих чисел розуміється ряд математичних теорем, в яких встановлюється факт наближення середніх показників у результаті великого числа спостережень до деяких постійних величин.

У широкому значенні слова зміст закону великих чисел полягає в тому, що при великому числі випадкових явищ їх середній результат практично перестає бути випадковим і може бути представлений з великою визначеністю

1.3 Закони розподілу випадкової величини

Законом розподілу випадкової величини називається співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

Найпростішою формою завдання такого закону служить таблиця, в якій перераховані можливі значення випадкової величини і відповідні їм ймовірності.

Таблиця 1.3 – Значення випадкової величини і відповідні їм ймовірності

X_1	X_2	X_3	…	X_n	Разом
P_1	P_2	P_3	…	P_n	$\sum_{i=1}^{n} Pi = 1$

Щоб надати ряду розподілу наочний вигляд, будують його графічне зображення у вигляді гістограми, полігону, кумуляти і огіви.

Табличний розподіл можливих значень випадкової величини і відповідних їй ймовірностей, графічне зображення кривих розподілу і аналітичний опис вказаної залежності є форми закону розподілу.

Криві розподілу можуть бути самої різної форми. Проте серед них слід виділити так звані одновершинні криві, що часто зустрічаються.

В економічних дослідженнях симетричні розподіли зустрічаються рідко. Набагато частіше вершина кривої знаходиться не в центрі, а дещо зміщена. Зустрічається також двопіковий розподіл. Його наявність свідчить про те, що розглядається неоднорідна сукупність.

Теоретичними розподілами в економічних дослідженнях головним чином закон є Пуассона, показовий, біномінальний, Ст'юдента, X_u^1 – квадрат, Лапласа, нормальний та ін.

Нормальний закон розподілу реалізується для випадкових величин, які формуються під сумарною дією багатьох незалежних поміж собою дрібних причин, дія кожної з яких мала в порівнянні із загальним результатом.

У математичній статистиці нормальний розподіл відіграє роль стандарту, з яким порівнюються інші розподіли.

Формула нормальної кривої має наступний вигляд:

$$Y = f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})}{2\sigma_x^2}}, \qquad (1.15)$$

де X – випадкова величина;

$\overline{X}$ – середнє арифметична або математичне очікування;

σ_x – середнє квадратичне відхилення;

$\pi = 3{,}14159$, $e = 2{,}71828$ – відомі константи.

Крива Гауса – Лапласа має горбоподібний вигляд і симетрично розташовується відносно вертикальної прямої (рис. 1.1). Центр угрупування випадкової величини і форму нормальної кривої визначають числові характеристики $\overline{X}$ і σ_x.

При $X = \overline{X}$ функція має максимум, що дорівнює

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}}. \qquad (1.16)$$

Симетрія кривої $X = \overline{X}$ вважається основною властивістю нормального розподілу: однакові відхилення значення випадкової величини від її середнього в обидві сторони зустрічаються однаково часто.

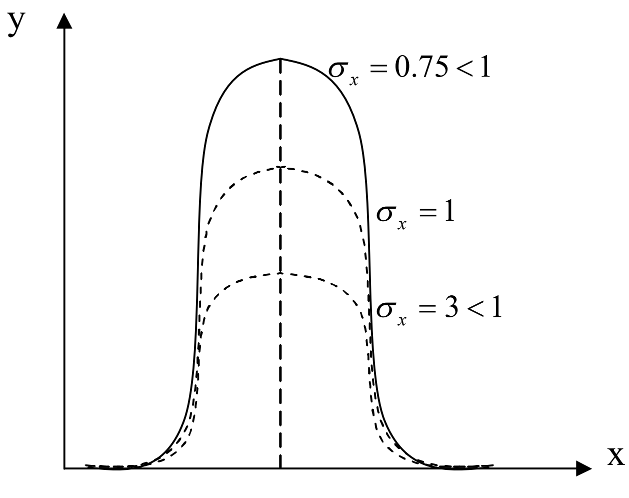


Рисунок 1.1 – Крива Гауса – Лапласа

При збереженні своєї загальної форми крива розподілу нормального закону може мати різний ступінь пологості й крутизни залежно від значення σ_x.

У математико-статистичних дослідженнях, незалежно від розмірності випадкової величини X, може бути визначена відносна частота.

По правому 3σ величина абсолютного відхилення випадкової величини від середнього по вибірці менше $\pm 3\sigma_x$ з вірогідністю 0,997. Лише 0,3 % всього Xi числа спостережень виходить з «трисигмових меж».

В інтервалі від $X - \sigma_x$ до $X + \sigma_x$ знаходиться 68,3 % спостережень, в інтервалі від $X - 2\sigma_x$ до $X + 2\sigma_x$ - 95,5 % спостережень. Як було сказане вище, максимум

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}. \qquad (1.17)$$

Оскільки площа диференційованої функції нормального розподілу дорівнює одиниці, то зі зростанням σ_x максимальна ордината нормальної кривої убуває, а сама крива стає більш пологою. Навпаки, з убуванням σ_x нормальна крива стає більш гостроверхою.

При $\overline{X} = 0$ і ух = 1 нормальну криву називають нормованою:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (1.18)$$

Величина $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ табульована і може бути визначена з відповідних математико-статистичних таблиць (диференціальна функція Лапласа). У цих таблицях наведені функції *f(x)*, відповідні позитивним значенням *X*. Для від'ємних *X* користуються тими ж таблицями, оскільки функція *f(x)* парна, тобто *f(-x)=f (x)*. У таблиці наводяться значення *f(x)* для *X* від 0 до 4 через 0,01.

Для того, щоб можна було користуватися готовими таблицями, потрібно криву нормального розподілу привести до стандартної форми. Стандартизація полягає в переході від випадкової величини *X*, має математичне очікування $\overline{X}$ і середньоквадратичне відхилення σ_x, до допоміжної величини називаної центрованим і нормованим відхиленням:

$$t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} \text{ чи } \Delta X = t\,\sigma_x \qquad (1.19)$$

Використовуючи відповідні таблиці значень, будують таблицю стандартизованого розподілу вірогідності.

Якщо на вісь абсцис нанести значення t, а на вісь ординат вірогідність P(t), то графічне зображення дає нормальну криву. Фізичне значення t означає, на скільки середньоквадратичних відхилень σ_x змінюється значення випадкової величини від її середнього значення $\overline{X}$.

1.4 Статистичні гіпотези та їх перевірка

При вибіркових обстеженнях допускаються різного роду похибки, при цьому розрізняють грубі, систематичні й випадкові помилки.

Грубі помилки за абсолютними величинами значно відрізняються від всього ряду помилок і підлягають виключенню з ряду спостережень.

Систематичні помилки є наслідком впливу певних чинників, що спотворюють результати вимірювань за певним законом у відомому напрямі. Вони викликані зносом засобів вимірювання, їх неправильною установкою, дією зовнішнього середовища і т.п.

Випадковими називають такі помилки, характер зміни яких не володіє видимою закономірністю. Кожна подальша помилка за абсолютним значенням може бути більше або менше попередньої.

Аналіз випадкових похибок ґрунтується на теорії випадкових помилок, яка дає змогу з певною гарантійною вірогідності обчислити дійсне значення шуканої величини.

В основі теорії випадкових помилок лежать наступні підтверджені досвідом висновки:

1. Різниця *у* значеннях характеристики вибіркової і генеральної сукупності складе помилку вибірки $\tilde{X}-\overline{X} = \varepsilon_x$, $\overline{\sigma}-\sigma_x=\varepsilon_\sigma$ і т.п. Ці помилки є випадковими величинами. Тому необхідно в кожному конкретному випадку визначити не тільки розмір помилки, але і надійність або гарантію того, що цей розмір не буде перевищений.

2. Вибіркові середні значення також симетрично розподіляються навкруги генеральної середньої, незалежно від характеру розподілу випадкової величини в генеральній сукупності.

Закономірність розподілу випадкових помилок спостережень описується нормальною кривою (рис. 1.2). Карл Гаус (1777–1855 рр.) використовував її як основу для теорії випадкових помилок вимірювань.

Вся площа під кривою дорівнює 1. Основна маса випадкових помилок групується навколо середнього значення, яке дорівнює 0.

На ділянці, обмеженій $\overline{X}+\sigma_x$, знаходиться 68,3% всіх спостережень; на ділянці, обмежений $\overline{X}+2\sigma_x$ і $\overline{X}-2\sigma_x$ –95,3%; на ділянці, обмеженій $\overline{X}+3\sigma_x$ і $\overline{X}-3\sigma_x$ –99,7 %.

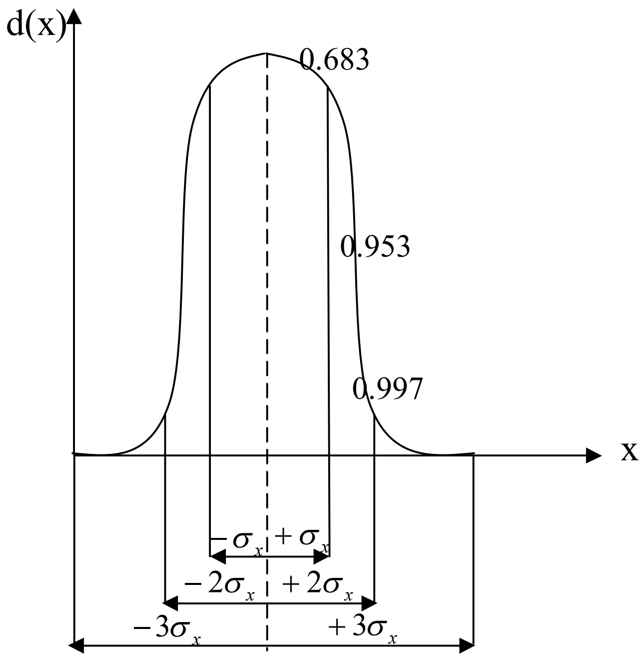


Рисунок 1.2 – Крива розподілу випадкових помилок спостережень

На основі характерних властивостей розподілу випадкових помилок спостережень можна зробити висновок, що при достатньо великому обсязі вибірки *n* її числові характеристики за вірогідністю наближаються до відповідних значень характеристики генеральної сукупності.

Рівень значущості звичайно вимірюється у відсотках і їх чисельне значення заснована на так званому принципі незалежності маловірогідних подій. На практиці звичайно приймають рівні значущості, що знаходяться між 0,01-0,05. Відповідно їх називають одновідсотковими, двовідсотковими і т.п.

З принципу неможливості маловірогідних подій випливає наступний висновок: якщо випадкова подія має вірогідність дуже близьку до одиниці, то практично можна вважати, що в одиничному випробуванні ця подія наступить ($P \geq 0{,}99$).

Припущення щодо закономірностей, які мають місце в генеральній сукупності, називається статистичною гіпотезою, а критерій її перевірки – статистичною характеристикою.

Як критерій перевірки вибирається деяка статистична характеристика. Припущення, що висувається, може бути помилковим, внаслідок вибіркової помилки, і має назву нульової гіпотези H_o.

Конкуруюча гіпотеза означає, що має місце суттєва відмінність між вибірковими значеннями в генеральній сукупності. Сформулювавши гіпотезу H_o, можна зіткнуться з чотирма ситуаціями:

– гіпотеза H_o правильна, а її забракували, оскільки характеристика потрапила в критичну область, тобто допущена помилка першого роду, вірогідність якої рівна рівню значущості α;

– гіпотеза правильна і її прийняли, оскільки характеристика потрапила в допустиму область, тобто рішення правильне;

– гіпотеза неправильна і її прийняли, оскільки характеристика потрапила в критичну область, тобто рішення правильне;

– гіпотеза неправильна, а її відкинули, оскільки характеристика потрапила в допустиму область. Допущена помилка другого роду, тобто прийнята невірна гіпотеза.

Отже, рівень значущості можна тлумачити як ризик вчинити помилку першого роду, тобто забракувати правильну вірну гіпотезу. В зв'язку з цим для ухвалення гіпотези рівень значущості призначають п'ятивідсотковий (α=0,05), а для бракування гіпотези – одновідсотковий (α=0,01).

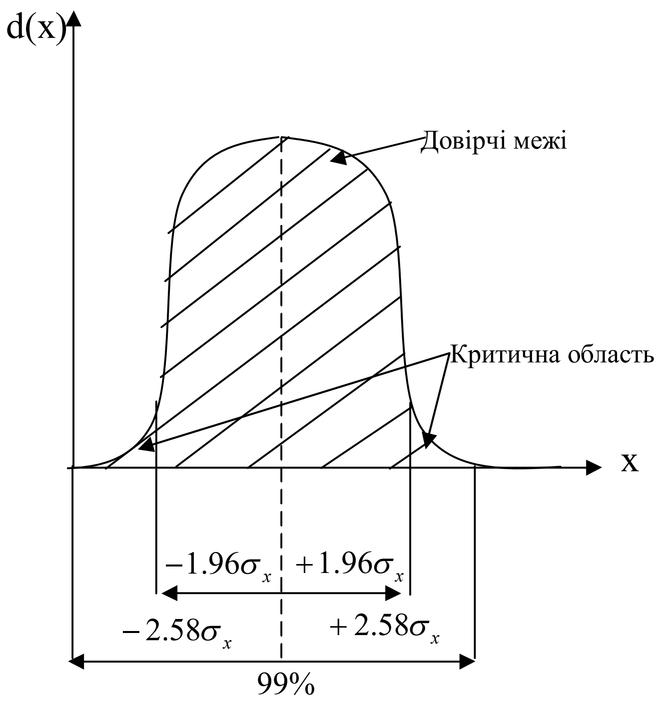


Рисунок 1.3 – Довірчі межі й критична область ряду розподілу

Областю ухвалення гіпотези називають сукупність значень вибраного критерію, при яких гіпотезу приймають, критичною областю – при значеннях критеріях, коли нульову гіпотезу відкидають (рис. 1.3).

Вибіркова середня є певне число, яке можна розглядати як випадкову величину. Отже можна говорити про її розподіл і про числові характеристики цього розподілу ($\overline{X}$, σ_x^2, σ_x та ін.).

Двостороння область, в яку повинне потрапити середнє значення генеральної сукупності, визначається довірчими межами при певному рівні значущості 2Ф(t) = 0,95 або за інтегральною функцією Лапласа t = 1,96.

Інтервал $X \pm 1{,}96\sqrt{\frac{\delta x^2}{n}}$ означає, що з вірогідністю Р = 0,95 генеральна середня потрапляє в довірчі межі, а з вірогідністю Р = 0,05 лежить зовні цих меж, тобто потрапляє в критичну область. Міра можливої відмінності між вибірковою середньою і середньою генеральної сукупності має назву *стандартної помилки*.

Слід мати на увазі, що вибіркові середні, як і випадкові помилки спостережень, симетрично розподіляються навколо генеральної середньої за умови, що обсяг вибірки складає n ≥ 30 спостережень. При малому обсязі вибіркових даних n ≥ 30 розподіл вибіркових середніх відрізняється від нормального тим більше, чим менше обсяг вибірки.

Межі довірчого інтервалу при малих вибірках n ≥ 30 обмежується коефіцієнтом t_α, який був запропонований в 1908 р. англійським математиком і хіміком В. С. Госсетом, який публікував свої роботи під псевдонімом «Ст'юдент» – студент. Надалі цей коефіцієнт отримав назву коефіцієнт Ст'юдента це спеціально розроблені таблиці з урахуванням обсягу вибірки).

Доцільно дотримуватися такої послідовності попередньої обробки результатів спостережень при n ≥ 30:

1 Результати спостережень записують в таблицю.

2 Обчислюють середнє значення $\overline{X}$ з n спостережень:

$$\overline{X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X}_{\text{i}}. \quad (1.20)$$

3 Визначають похибки окремих спостережень:

$\Delta X_i = \overline{X} - X_i$ та їх квадрати $(\Delta X_i)^2$.

4 Відсіюють спостереження, різко відмінні від інших. Для цього знаходять:

– середню квадратичну похибку:

$$\Delta\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}{n}} \quad (1.21)$$

– задаються значенням похибки α =0,95

– визначають коефіцієнт Ст'юдента t_α=(n) для заданої надійності Р і кількості спостережень n

– з находяться межі довірчого інтервалу (похибки результатів спостережень):

$$\Delta X = t_\alpha(n)\,\Delta\sigma_x,\ X = \overline{X} \pm \Delta X$$

– обчислюють відносну похибку вибіркових даних:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} * 100\% \quad (1.22)$$

1.5 Попередня обробка результатів спостережень і техніко-економічної інформації

Математичному моделюванню передує чітке уявлення суті задачі, що розв'язується, аналіз її змісту з використанням технологічної, економічної і інженерної логіки.

При цьому доцільно:

– вивчити літературу і узагальнити професійні знання про об'єкт дослідження;

– чітко сформулювати мету і завдання дослідження;

– визначити джерела, обсяг і методи отримання інформації;

– провести попередній якісний і кількісний математико-статистичний аналіз результатів спостережень.

При визначенні умов, що впливають на досліджуваний показник, слід дотримуватися апробованих *принципів якісного аналізу*:

– кожний чинник повинен бути теоретично обґрунтованим і змістовним, мати самостійне значення і не дублювати інші;

– вибіркові дані повинні мати точне кількісне вимірювання, бути однорідними і співставними в часі й просторі.

Об'єктивність математичного моделювання багато в чому залежить від показовості (репрезентативності) й однорідності вибіркових даних.

Заздалегідь обґрунтовується обсяг вибірки *n* або перевіряється достатність початкової інформації для отримання математико-статистичних моделей заданої точності й надійності.

За теоремою Ляпунова для різних незалежних вибірок достатньо великого обсягу n, отриманих з однієї і тієї ж генеральної сукупності, середнє арифметичне $\bar{Y}$ підкоряється нормальному закону розподілу з дисперсією σy^2, рівної 1/n-ї частини дисперсії випадкової величини. При цьому максимальне відхилення є вибірковою середньою $\bar{Y}$ від генеральної середньої Ў, має назву стандартної помилки і визначається за формулою:

$$Ў - \bar{Y} = t_\alpha \sqrt{\frac{\tau y^2}{n}}, \tag{1.23}$$

де t_α – значення змінної в стандартизованому масштабі

$$t_\alpha = \frac{Y_i - \bar{Y}}{\tau y} \tag{1.24}$$

визначається за інтегральною функцією Лапласа. Звідси

$$n = \frac{t_\alpha^{\ 2} \cdot \tau y^2}{\varepsilon^2}, \tag{1.25}$$

де n – кількість спостережень.

Розглянемо приклад. Встановити, при якому обсязі спостережень n вибірка є генеральною сукупністю, якщо P = 0,95 або 95%, ε = 0,85 і σy = 4,56?

Розв'язання

P = 2Ф(t_α) = 0,95 або Ф(t_α) = $\frac{0,95}{2}0,475$ за нормованою інтегральною функцією Лапласа знаходимо t_α = 1,96.

Звідси

$$n = \frac{t_\alpha^{\;2} \cdot \tau y^2}{\varepsilon^2} = \frac{1,96^2 \cdot 4,56^2}{0,85^2} = 35 \text{ спостережень.}$$

Виявлення спостережень, різко відмінних від основної маси вибіркових даних, ґрунтується на тому, що коли $\bar{Y}_i$ розподілені приблизно за нормальним законом, то найбільше відхилення від середнього значення за абсолютною величиною перевищує приблизно $3\sigma y^2$, тобто всі спостереження повинні розміщуватися в інтервалі

$$\bar{Y} - 3\tau_y \le y_i \le \bar{Y} + 3\tau_y .$$

Точніше, контроль приналежності до досліджуваної вибірки різко відмінних значень проводиться при рівні значущості α з урахуванням обсягу вибірки n. При цьому визначається

$$\phi(t_\alpha) = \sqrt[n]{1-\alpha} \; - 0,5,$$

а потім за таблицею інтегральної функції Лапласа знаходиться значення t_α і допустимий інтервал записується у вигляді

$$\bar{Y} - t_\alpha \tau_y < Y_i < \bar{Y} + t_\alpha \tau_y .$$

Розглянемо приклад. Є вибірка обсягом *n* = 150 спостережень. Середнє значення по вибірці $\bar{Y}$ = 12,86; середнє квадратичне відхилення σ_y^2 = 6,24; рівень значущості α = 0,05; максимальне значення ознаки y_{max} = 32,64, що вивчається; мінімальне – y_{min} = 3,42. Визначити можливість використання в подальших дослідженнях y_{max} і y_{min}.

Розв'язання

При заданому рівні $\phi(t_\alpha) = \sqrt[150]{1-0,05} - 0,5 = 0,4996$, t_α = 3,366.

Допустимий інтервал дорівнює

$$\bar{Y} - t_\alpha \tau_y = Y_i \le \bar{Y} + t_\alpha \tau_y = 12,86 - 3.366 \cdot 6.24 < Y_i < 12,86 + 3,366 \cdot 6,24 = -8,14 < Y_i < 33,86$$

Всі спостереження можуть бути використані при подальшій обробці.

У разі, якщо початкова інформація отримана по декількох об'єктах або групах, необхідно перевірити її однорідність. Така перевірка ґрунтується на гіпотезі рівності вибіркових середніх обсягами n_i і n_j, отриманих з однієї генеральної сукупності.

З теореми Чебишева, що зі збільшенням обсягу вибірки її середнє значення прагне за вірогідністю до генеральної середньої, тому випливає наступний висновок: якщо по декількох вибірках достатньо великого обсягу з однієї і тієї ж генеральної сукупності буде знайдено вибіркові середні $\bar{Y}_i$ і $\bar{Y}_j$, то вони будуть приблизно рівні між собою.

За умови незалежності вибірок і їх приналежності до єдиної нормально розподіленої генеральної сукупності для будь-яких двох вибірок i-ої і j-ої маємо ймовірність

$$\{|\bar{Y}_i - \bar{Y}_j|\} \le t_{ij}\sqrt{\frac{\tau_i^2}{n_i} + \frac{\tau_j^2}{n_j}} = 2\phi(t_{ij}), \tag{1.26}$$

де σ_i^2, σ_j^2 – вибіркові дисперсії;

n_i, n_j – обсяги вибірок.

Наявні різниці $\bar{Y}_i - \bar{Y}_j$ відносяться до відповідної стандартної помилки. Як критерій перевірки приймають нормовану різницю, яку обчислюють на основі співвідношення:

$$\frac{\bar{Y}_i - \bar{Y}_j}{\sqrt{\frac{\tau_i^2}{n_i} + \frac{\tau_j^2}{n_j}}} \le t_{ij},$$

що порівнюється з табличним значенням t_α, де $2\Phi(t_\alpha) = 1-\alpha$.

Гіпотеза однорідності вибіркових даних затверджується при $P=2\Phi(t_\alpha) = 0{,}95$ і менше, тобто $\alpha = 0{,}05$ і більше. Це означає, що при всіх значеннях $t_{ij} \le 1{,}96$ вся сукупність вихідних даних вважається приблизно однорідною і обробка може вестися по всьому масиву.

Розглянемо приклад. По двох об'єктах зібрана інформація з наступними кількісними характеристиками: $n_1 = 54$; $n_2 = 56$; $\bar{Y}_1 = 16{,}13$; $\bar{Y}_2 = 13{,}5$; $\sigma_{y1}^2 = 65{,}3$; $\sigma_{y2}^2 = 57{,}9$. Визначте рівень значимості при формуванні гіпотези про однорідність сукупності вибіркових даних.

Розв'язання

Визначаємо $t_{ij}(max)$ для y_1 і y_2: $t_{ij} = \dfrac{16{,}13 - 13{,}5}{\sqrt{\dfrac{65{,}3}{54} + \dfrac{57{,}9}{56}}} = 1{,}76$

Звідси $P = 2\Phi(1{,}76) = 0{,}92$ або 92%.

Гіпотеза про однорідність сукупності вибіркових даних затверджується з рівнем значущості $\alpha = 0{,}08$ або 8%.

Необхідність знання закону розподілу в кореляційному аналізі зумовлена насамперед обґрунтовуванням форми зв'язку між змінними.

Нормальний закон реалізується для випадкових величин, які формуються під сумарною дією багатьох відносно незалежних між собою причин, дія кожної з яких незначна в порівнянні із загальним результатом.

Результати спостережень обробляють в такій послідовності:

1 Вихідні дані розбиваються на інтервали і складають ряд розподілу функціональної ознаки y_i, визначають абсолютні й відносні частоти і будують гістограма розподілу;

2 Розраховують параметри закону розподілу $\bar{Y}$ і σ_y. Для спрощення рахункової роботи вводиться безрозмірна величина

$$y'_{ср} = \frac{Y_{i\,ср} - C_y}{\Delta y}, \tag{1.27}$$

де $Y_{iср}$ – деяке інтервальне значення функції;

C_y – інтервальне значення $Y_{iср}$, прийняте за центр угрупування;

Δy – інтервал зміни випадкової величини.

Дійсне значення $\bar{Y}$ и σ_y обчислюють на основі співвідношень $\bar{Y} = \bar{Y}'\Delta y + Cy$, $\tau_y{}^2 = \tau'_y{}^2 \cdot \Delta y^2$ и $\tau_y = \tau'_y \cdot \Delta y$.

3 Знаходять середнє інтервальне значення $Y_{iср}$ в стандартизованому масштабі, відповідне центрам інтервалів. За допомогою диференціальної функції Лапласа для кожного ti знаходять значення f(t);

4 Визначають ординати теоретичної кривої розподілу і за знайденими точками будують теоретичну криву:

$$Y_н = \frac{f(t)}{\tau_y}. \tag{1.28}$$

5 Оцінюють ступінь подібності теоретичної кривої з дослідженими даними. Оцінку ступеня згоди частіш за все проводять за допомогою критерію χ^2 – «хі-квадрат» Пірсона, який є спеціально підібраною випадковою величиною, що визначається за формулою

$$\chi'^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - \bar{m})^2}{\bar{m}_i}, \qquad (1.29)$$

де k – число інтервалів угрупування змінної;

$\bar{m}_i$ – емпіричні й теоретичні частоти.

6 Задаючись довірчим рівнянням значущості α=5%, за допомогою таблиці χ'^{2} – розподілу за числом ступенів свободи

$$f=K-(S+1), \qquad (1.30)$$

де K – число інтервалів;

S – ступінь свободи (для нормального розподілу S = 2($\bar{Y}$,σ_y), оскільки необхідно скласти 2 рівняння для знаходження теоретичного розподілу $\bar{Y}$ і σ_y).

7 Встановлюють критичне значення χ'^{2}, з якими порівнюють розрахункове значення.

Якщо обчислене значення χ'^{2} за дослідженими даними менше табличного, тобто воно потрапляє в область прийняття гіпотези H_0, то теоретична крива розподілу узгоджується з емпіричним розподілом. Якщо чисельне значення χ'^{2} перевершує табличне або рівне йому, тобто воно потрапляє в критичну область, дана гіпотеза H_0 про форму кривої розподіл відкидається.

Розглянемо приклад. Визначити закон розподілу витрат часу проходження рухомим складом маршруту між двома зупинками (хвил.) при n = 180 спостережень і y_{min} = 0,70, y_{max}1,57 хв. Розмір інтервалу складає 0,1. Побудуйте гістограму і полігон розподілу. Розрахуйте показники нормального закону розподілу.

Розв'язання

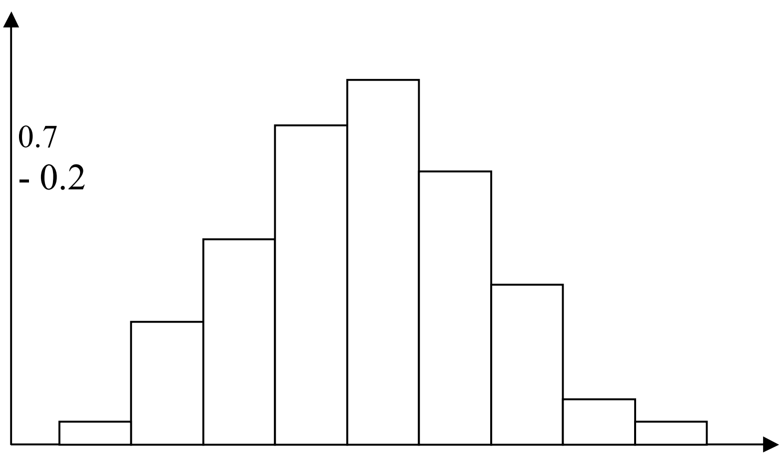


Рисунок 1.4 – Гістограма розподілу

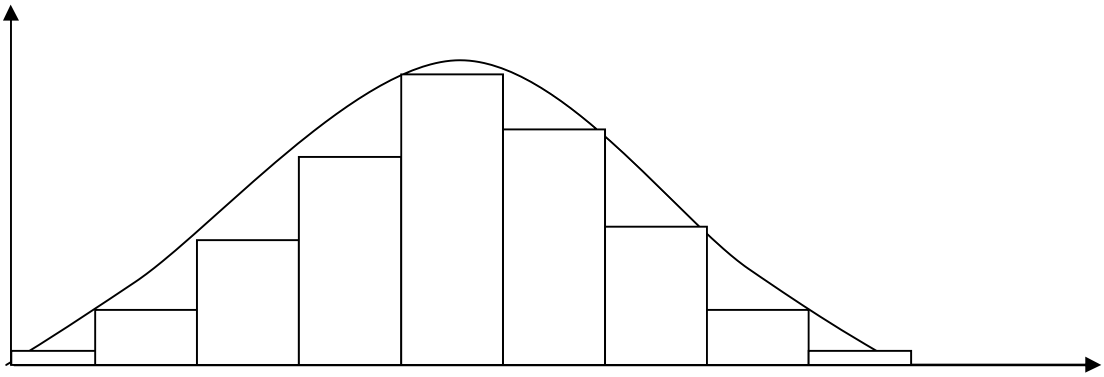


Рисунок 1.5 – Гістограма і полігон розподілу

На підставі даних, представлених в таблиці 1.4, отримуємо:

$$\bar{Y}' = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i y'_{cp}}{n} = -\frac{69}{180} = -0{,}38; \qquad \bar{Y} = \bar{Y}'\Delta y + C_y = (-0{,}38)\cdot 0{,}1 + 1{,}15 = 1{,}11;$$

$$\bar{Y}'^2_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{k} y'^2 m_i}{n} = \frac{481}{180} = 2{,}67;$$

1) $\tau_y'^2 = \tau_{cp}'^2 - \bar{y}'^2 = 2{,}97 - (-0{,}38)^2 = 2{,}57$

$$\tau_y^2 = \Delta y^2 \tau_y'^2 = 0{,}1^2 \cdot 2{,}57 = 0{,}025; \;\; \tau_y = \sqrt{0{,}025} = 0{,}159;$$

2) $\tau_y'^2 = \dfrac{(y_{cp}' - \bar{y}')^2 m_i}{n} = \dfrac{448{,}6316}{180} = 2{,}4924;$

$$\tau_y^2 = 0{,}1^2 \cdot 2{,}4924 = 0{,}025; \;\; \tau_y = \sqrt{0{,}025} = 0{,}159$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - \tilde{m}_i)^2}{m_i} = \frac{(3-3{,}36)^2}{3{,}36} + \frac{(13-11{,}9)^2}{11{,}9} + \ldots + \frac{(1-1{,}03)^2}{1{,}03} = 0{,}795$$

$$f = k - (S+1) = 9 - (2+1) = 6; \;\; \chi^2_{\text{рас}} < \chi^2_{\text{табл}}.\ 5\%.$$

Таким чином, теоретична крива розподілу зіставляється з емпіричним розподілом, що свідчить про наявність нормального розподілу.

Таблиця 1.4 – Розрахунок показників нормального закону розподілу

Інтервал Δy	Середнє значення інтервалу	Частота	Відносна частота	Умовні варіанти	Розрахунок середнього значення	Розрахунок дисперсії		Значення в стандартизовано му масштабі	Значення диференціальної функції	Емпіричні розрахунки	Ординати теоретичного розподілу	Розрахункові частоти
y_{k-1}-y_k	$y_{ср}$	m_i	m_i/n	$Y'_{ср}$	$m_i y'_{ср}$	$m_i y'^2_{ср}$	$(y'_{ср}-\bar{y}'_{ср})^2 m_i$	$t_i = \lvert\frac{y_{ср}-\bar{y}}{\tau_y}\rvert$	$f(t)$	$y_2 = \frac{m_i}{n\Delta y}$	$y_n = \frac{f(t)}{\tau_y}$	$m_i = y_n \cdot n\Delta y$
0,7 – 0,8	0,75	3	0,017	-4	-12	48	39,3132	2,26	0,031	0,17	0,195	3,36
0,8 – 0,9	0,85	13	0,072	-3	-39	117	89,2372	1,63	0,1057	0,72	0,665	11,90
0,9 – 1,0	0,95	30	0,167	-2	-60	120	78,7320	1,00	0,2420	1,67	1,522	27,40
1,0 – 1,1	1,05	40	0,222	-1	-40	40	15,3760	0,38	0,3712	2,22	2,385	42,03
1,1 – 1,2	1,15	41	0,228	0	0	0	0	0,25	0,3867	2,28	2,432	43,7
1,2 – 1,3	1,25	31	0,172	1	31	31	59,0364	0,88	0,2709	1,72	1,704	30,7
1,3 – 1,4	1,35	16	0,089	2	32	64	90,6304	1,50	0,1295	0,89	0,817	14,7
1,4 – 1,5	1,45	5	0,028	3	15	45	57,1220	2,13	0,0413	0,28	0,259	4,66
1,5 – 1,6	1,55	1	0,005	4	4	16	19,1844	2,75	0,0091	0,05	0,057	1,03

Тема 2 Оптимізаційні моделі в землеустрої: напрями формування та особливості застосування

2.1 Сутність математичних моделей оптимізації.

2.2 Загальна характеристика задач математичного програмування.

2.3 Види математичних моделей оптимізації.

Поняття: оптимізаційна задача; математичне програмування; методи математичного програмування; система обмежень в моделях оптимізації; види моделей оптимізації.

Джерела: [4], [5], [12], [16], [23], [26], [37], [40], [61], [63].

2.1 Сутність математичних моделей оптимізації

На якому рівні не знаходилося суспільне виробництво, які великі не були трудові, матеріальні й фінансові ресурси, перед господарськими керівниками завжди стоїть завдання найкращого використання виробничих ресурсів і потужностей. Тобто необхідно знайти оптимальне значення між представленими виробничими ресурсами. Для цього необхідно сформувати математичні моделі оптимізації шляхом розв'язання задачі оптимізації.

Розв'язати оптимізаційну задачу – це знайти оптимальне її розв'язування або встановити, що розв'язування немає. Методами розв'язування оптимізаційних задач є методи *математичного програмування*.

Уперше подібна задача у вигляді пропозиції щодо укладання національного плану перевезень, що дозволяє мінімізувати сумарний кілометраж, подана в роботі Л. М.Толстого (1930 р.). Екстремальна задача з мінімізації транспортних витрат була ним сформульована в 1939 р.

Одну з різновидів транспортної задачі в 1941 р. поставив американець Хічкок (проблема Хічкока). Але закінченого методу вирішення цієї задачі він не розробив.

У загальному вигляді задача математичного програмування сформульована в 1939 р. Л. В. Канторовичем. Він же запропонував метод множників, що дозволяє її вирішувати. Разом із М. К. Гавуриним у 1949 р. Л. В. Канторович розробив метод потенціалів, який і дотепер є найбільш поширеним методом вирішення транспортних задач.

Широко відомий метод вирішення задачі лінійного програмування - симплексний метод – був опублікований Д. Б. Данцигом у 1949 р. Вдалою модифікацією симплексного методу є диференціальний алгоритм, що логічно випливає з диференціального алгоритму вирішення загальної задачі математичного програмування.

Застосування математичних методів в оцінці землі та нерухомого майна на першому етапі ознаменувалося досить гострою дискусією фахівців «традиційної» школи та нового покоління. Однак тепер мало залишилося фахівців, які б прямо заперечували проти необхідності використання ефективних математичних методів при вирішенні важливих проблем.

Основними економічними передумовами постановки і вирішення задач методами математичного програмування для формування математичних моделей оптимізації слід вважати:

– широке використання математичних методів у сполученні із сучасними засобами електронно-обчислювальної техніки;

– можливість одержання необхідної і достовірної інформації;

– достатньо повна теоретична розробка методів вирішення задач математичного програмування [61].

2.2 Загальна характеристика задач математичного програмування

Математичне програмування відіграє винятково важливу роль у підготовці фахівців з землеустрою та оцінки землі та нерухомого майна. Використання математичних методів діяльності дозволяє вирішувати оптимальним способом багато задач організації, планування і управління. Іншими словами, це надійний інструмент для одержання найвищого ефекту в конкретних умовах.

Вираз *«математичне програмування»* слід розуміти як ітераційний пошук найкращого варіанта використання обмежених потужностей і ресурсів для досягнення поставлених цілей [61].

У математиці максимум і мінімум мають назву – екстремум, а задачі пошуку екстремуму називають екстремальними задачами. Ті припустимі рішення, при яких досягається оптимум, називають оптимальними, або екстремальними рішеннями. У загальному випадку екстремальна задача може мати одне, декілька, безліч, нескінченну безліч або жодне оптимальне рішення.

Змістовна постановка задачі повинна дозволяти переходити до строгої математичної моделі.

У загальному вигляді екстремальна задача формулюється наступним чином: знайти найбільше (максимальне) або найменше (мінімальне) значення деякої функції

$$Y(x_1,x_2, \dots ,x_n)$$

при умовах

$$f_i(x_1,x_2, \dots ,x_n) \le b_i \ (i = 1,m),$$

де y і f_i – задані функції,

b_i – дійсне число.

Наведене формулювання є узагальненням постановок ряду часткових задач математичного програмування, що можуть розрізнятися між собою як видом функцій y і f_i (лінійні, нелінійні, стохастичні), так і характером (дискретний, неперервний) змінних.

Функцію $Y(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, яку мінімізують або максимізують, називають цільовою функцією. Залежно від особливостей функцій y і f_i математичне програмування можна розподілити на ряд самостійних дисциплін, що вивчають і розробляють методи вирішення окремих класів екстремальних задач.

Задачі математичного програмування розподіляються на задачі лінійного і нелінійного програмування. При цьому якщо усі функції y і f_i є лінійними, то відповідна задача відноситься до класу задач лінійного програмування. Якщо ж хоча б одна із зазначених функцій є нелінійною, то відповідна задача належить до класу задач нелінійного програмування.

Окремими класами задач математичного програмування є *задачі цілочислового, параметричного і дрібно-лінійного програмування*.

У задачах цілочислового, або дискретного програмування частина або всі невідомі можуть приймати тільки цілочислові значення.

У задачах параметричного програмування цільова функція або функції обмежень, що визначають область можливих змін змінних, залежать від деяких параметрів.

У задачах дрібно-лінійного програмування цільова функція є відношення двох лінійних функцій, а функції, що визначають область припустимих рішень, також є лінійними.

Особливі класи становлять задачі стохастичного і динамічного програмування.

Стохастичне програмування використовують для вирішення задач, в яких обмеження миють імовірний, випадковий характер, тобто, необхідно враховувати вплив яких-небудь непередбачених обставин. У задачах стохастичного програмування може бути математичне очікування деякого показника.

За допомогою лінійного, нелінійного, цілочислового і стохастичного програмування вирішуються задачі, що зводяться до відшукання оптимального рішення без урахування можливої динаміки процесу, тобто без урахування чинника часу.

У динамічному програмуванні мають місце багатоетапні задачі, що вимагають оптимізації прийнятих рішень не як одиничного акту, а з урахуванням розвитку явища, його зміни в часі.

Переваги динамічного програмування:

– можливість поетапного аналізу результатів у процесі вирішення задачі, визначення оптимальної стратегії з урахуванням чинника часу;

– поглиблення раніше розроблених методів кількісного і якісного характеру дослідження процесів;

– більш об’єктивне, повне і точне вирішення завдань.

Таким чином, математичне програмування є важливим інструментарієм побудови математичних моделей оптимізації, що досліджує екстремальні задачі і розробляє методи вирішення. Математичне програмування як наука знаходиться в процесі постійного розвитку. Вченими всього світу розроблено багато методів для вирішення різних класів задач математичного програмування. Разом з тим багато задач ще не мають ефективних методів вирішення і чекають своїх дослідників.

Вирішення екстремальної задачі з землеустрою та оцінки землі та нерухомого майна складається з *наступних етапів*:

– побудови математичної моделі, тобто обґрунтування критерію оптимізації, виявлення і формалізації у вигляді системи рівнянь або нерівностей найбільш істотних обмежень задачі;

– вибору математичного методу, що дозволяє за кінцеве число кроків одержати шукане рішення з будь-якою заздалегідь заданою точністю, або вибору відповідної комп’ютерної технології;

– аналіз отриманих результатів з позицій можливого їхнього практичного застосування.

Критерієм оптимальності називається показник, за яким оцінюється міра ефективності плану. Критерій оптимальності повинен бути однозначним і мати кількісний вираз.

Для побудови математичної моделі найбільш часто використовуються задачі лінійного програмування. Тому розглянемо їх більш докладно.

Загальна задача лінійного програмування формулюється таким чином: знайти оптимум лінійної функції y(x), якщо на змінні задачі накладені лінійні обмеження у вигляді рівностей і нерівностей.

Аналітичний запис цього завдання має такий вигляд:

$$y(x)=c^T x + c_0 \underset{x\in\Omega\subset R^n}{\rightarrow} opt\,, \qquad (2.1)$$

$$\Omega:\quad A_1x + b_1 \le 0; \qquad (2.2)$$

$$A_2x + b_2 = 0; \qquad (2.3)$$

$$A_3x + b_3 \geq 0; \qquad (2.4)$$

$$x \geq 0, \qquad (2.5)$$

де *x* – *n* – мірний вектор дійсних змінних;

c – *n* – мірний вектор коефіцієнтів;

C_0 – вільний член у складі функції *y*;

A_1, A_2, A_3 – матриці коефіцієнтів лінійних систем розмірності $m_1 \times n$, $m_2 \times n$, $m_3 \times n$ відповідно, $m_2 < n$;

b_1, b_2 ,b_3 – вектори вільних членів обмежень розмірності $m_1 \times 1$, $m_2 \times 1$, $m_3 \times 1$ відповідно.

Часткові задачі лінійного програмування можуть не містити однієї або двох систем обмежень типу (2.2) – (2.4), все рівно яких. Крім того, замість умови невід'ємності (2.5) може мати місце двостороння або одностороння обмеженість змінних.

Задачу, складену з (2.1), (2.2) і (2.5), називають стандартною задачею лінійного програмування.

Канонічна, або основна задача лінійного програмування має такий вигляд:

$$y(x) = c^T x + c_0 \underset{x \in \Omega \subset R^n}{\longrightarrow} \max; \qquad (2.6)$$

$$\Omega\text{: } Ax + b = 0; \qquad (2.7)$$

$$x \geq 0, \qquad (2.8)$$

де *A* – матриця коефіцієнтів розмірності $m \times n$, $m < n$;

b – вектори вільних членів розмірності m × 1.

Очевидно, що обмеження-нерівність типу «≤« можна перетворити в обмеження-рівність додаванням до його лівої частини додаткової невід'ємної змінної, а кожне обмеження-нерівність типу «≥» – в обмеження-рівність шляхом вирахуванням з його лівої частини додаткової невід'ємної змінної. Задачу мінімізації лінійної функції *y* можна звести задачі максимізації шляхом множення останньої на *-1*. Таким чином задачу лінійної оптимізації (2.1) – (2.5) завжди можна перетворити в задачу (2.6) – (2.8) і навпаки.

Складання математичної моделі загальної задачі математичного програмування або її канонічної форми вимагає певних зусиль і кмітливості, досвід створення математичних моделей швидко накопичується. Досить мати практику вирішення декількох задач, щоб надалі не мати особливих труднощів при переході від змістовної постановки задачі лінійного програмування до формальної (аналітичної) [61].

2.3 Види математичних моделей оптимізації

При здійсненні господарської діяльності підприємством можуть бути сформовані наступні види математичних моделей оптимізації:

1 Економіко-математичні моделі оптимізації випуску продукції.

2 Економіко-математичні моделі розподілу фінансових ресурсів по оптимізації зростання потужностей підприємства.

3 Економіко-математична модель розподілу капітальних вкладень.

Економіко-математичні моделі оптимізації випуску продукції розробляються для максимізації прибутку від реалізації продукції. В загальному вигляді ця функція моделі має наступний вигляд:

$$F = \sum_{s=1}^{R} \sum_{i=1}^{n} P_{si} Q_{si} \to \max , \qquad (2.9)$$

де F – функція максимізації прибутку;

s – номер, вид виробляємої продукції;

R – кількість видів продукції;

i – номер підприємства;

n – кількість підприємств;

P_{si} – прибуток від реалізації одиниці продукції s на i-ому підприємстві;

Q_{si} – обсяг s виду продукції на i-ому підприємстві.

При цьому використовуються наступні обмеження:

1 Обсяг споживання ресурсів не повинен s виду продукції не повинен перевищувати загальний обсяг використаних ресурсів на підприємстві.

2 Обсяг s виду виробленої продукції дорівнює плану випуску цієї продукції.

3 Обсяг s виду виробленої продукції знаходиться між нижньою і верхньою границею виробництва цієї продукції на i-ому підприємстві.

4 Обсяг s виду виробленої продукції на i-ому підприємстві перевищує нуль.

В основі економіко-математичної моделі розподілу фінансових ресурсів по оптимізації зростання потужностей підприємства є наступна функція:

$$F = \sum_{i=1}^{\mathrm{k}} \sum_{j=1}^{n} (P_i + KV_i xKE \; + TV_{ij}) xO_{ij} \to \min , \qquad (2.10)$$

де $\mathrm{P_i}$ – вартість одиниці продукції i-го постачальника;

KV_i – капітальні витрати на одиницю готової продукції;

KE – коефіцієнт ефективності капітальних вкладень;

TV_{ij} – транспортні витрати по перевезенню одиниці продукції *i*-го постачальника *j* покупцю;

O_{ij} – обсяг поставок продукції *i*-го постачальника *j* покупцю.

При цьому вводяться наступні обмеження:

1 Обсяг поставок продукції *i*-го постачальника *j* покупцю не перевищує потужність *i*-го постачальника.

2Обсяг поставок продукції *i*-го постачальника *j* покупцю дорівнює попиту *j* покупця.

3Обсяг поставок продукції *i*-го постачальника *j* покупцю дорівнює або перевищує нуль.

При *побудові економіко-математичної моделі розподілу капітальних вкладень по проектам* враховується функція, яка полягає в максимізації можливого доходу від реалізації *j* варіанту капітальних вкладень ($D_j(s_j)$):

$$F = \sum_{j=1}^{p} D_j(s_j) \to \max , \qquad (2.11)$$

де p – загальна кількість проектів;

j – варіант (індекс) проекту капітальних вкладень;

D_j – можливий дохід від реалізації j варіанту капітальних вкладень.

Обмеження для виконання цієї функції наступні:

1 Загальна кількість варіантів капітальних вкладень повинна перевищувати або дорівнювати кількості видів продукції.

2 Обсяг капітальних вкладень по j варіанту не повинен перевищувати загальний річний обсяг капітальних вкладень.

3 Якщо обсяг виробляємої продукції досягає одиниці, то проект приймається, якщо цей обсяг дорівнює нулю – проект відхиляється.

В моделюванні використовують і розв’язують *задачі безумовної оптимізації*, в яких задається лише одна цільова функція. В задачах безумовної оптимізації не існує обмежень і граничних умов. У цих задачах поняття оптимуму та екстремуму збігаються, і для знаходження оптимуму в них застосовуються методи знаходження екстремуму. Слід відзначити, що найбільше або найменше значення це екстремум, а оптимум – оптимальне найбільше або найменше значення.

У цих задачах знаходять першу похідну функції, дорівнюють її до нуля, знаходять параметри моделі, знайти другу похідну і визначають її знак. Якщо друга похідна більша за 0, то точка *x* — мінімум функції.

Методами розв'язання задач умовної оптимізації:

1 Метод штрафних функцій, в якому мінімізується нова цільова функція, яка містить у собі першу цільову функцію та задані обмеження. При цьому визначається штрафна функція.

2 Метод Лагранжа – полягає у побудові функції виду:

$$L(x_x, x_2, X) = f(x_v\ x_2) + Xg(x_v\ x_2),$$

тобто, зведення задачі на умовний екстремум двох незалежних змінних до задачі на абсолютний екстремум функції L (xy, x_2, X) трьох незалежних змінних x_1, x_2, X. Функція Лагранжа є сумою цільової функції та функції обмеження, помноженої на нову незалежну змінну X (множник Лагранжа), яка має перший порядок. Для знаходження точок умовного локального екстремуму функції за наявності обмеження слід насамперед знайти критичні точки функції Лагранжа. Потім критичні точки функції Лагранжа потрібно скоротити на координати X. Потім кожну одержану скорочену точку необхідно проаналізувати, чи є вона точкою умовного екстремуму функції за даних обмеженнях чи ні.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2
ЛІНІЙНЕ ТА НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ В ЗЕМЛЕУСТРОЇ

Тема 3 Задача лінійного програмування та методи її розв'язування

3.1 Сутність і методи лінійного програмування.

3.2 Особливості задач лінійного програмування та практичні аспекти їх вирішення.

3.3 Транспортна задача. Формулювання і алгоритм вирішення.

Поняття: лінійне програмування; симплекс-метод; метод внутрішніх крапок; цільова функція; класична модель транспортної задачі; модель реальної транспортної задачі; метод північно-західного кута

Джерела: [14], [26], [29], [47], [50], [56], [61], [63], [64], [67], [80]

3.1 Сутність і методи лінійного програмування

Лінійне програмування використовує математичний інструментарій, який базується на теорії і методах вирішення задач про екстремуми лінійних функцій, що задаються системами лінійних рівнянь.

Найбільш універсальним методом лінійного програмування є *диференціальний алгоритм*, що логічно випливає з диференціального алгоритму загальної задачі математичного програмування. Диференціальний алгоритм, як і широко відомий симплекс-метод, дозволяє вирішувати будь-які задачі лінійного програмування. Однак для деяких класів задач лінійного програмування доцільно використовувати більш прості методи. Так, для вирішення задач із кількістю змінних, рівною двом, використовують *графічний метод,* що відзначається простотою і наочністю, але потребує графічних побудов. Для вирішення задач лінійного програмування, відомих як транспортні, використовують *метод потенціалів*.

Методичною основою обчислювальних процедур будь-якого методу є принцип аналізу і послідовного поліпшення деякого початкового плану розподілу і використання ресурсів. План поліпшують доти, поки не буде знайдений найкращий (оптимальний) варіант. Іншими словами, спочатку складається деякий початковий план, що аналізується за конкретними строго розробленими правилами. На підставі аналізу визначаються можливість і напрямок поліпшення початкового варіанта плану. Потім обчислюється новий план, що піддається такому ж аналізу і подальшому поліпшенню, тобто наближенню до оптимуму. Обчислювальний процес продовжується доти, поки аналіз не покаже неможливість дальшого поліпшення.

Симплекс-метод використовується до вирішення будь-якої задачі лінійного програмування. *Сутність симплекс-методу* полягає в тому, що, відправляючись з деякої довільної вершини багатокутника обмежень, переходять до обчислення тільки такої вершини, в якій значення лінійної форми буде більше, ніж в попередній. Решта варіантів не обчислюється. Так при кінцевому порівняно малому числі кроків може бути знайдений оптимальний план. Таким чином, проводиться впорядкований перебір вершин, при якому відбувається постійне збільшення лінійної форми. В цьому аспекті симплексний метод називається також методом послідовного поліпшення плану.

Вирішення задач лінійного програмування симплекс-методом полягає:

– по-перше, в розробці базового рішення на оптимальність. Якщо воно оптимальне, то задача вирішена, в іншому випадку виконують другий етап;

– по-друге, визначаються вектор $\vec{A}_k$, який повинен бути введений в базис, і вектор $\vec{A}_r$, який повинен бути виключений з нього, тобто виходить новий базисний план з великим значенням лінійної форми. Щоб знайти вектори $\vec{A}_k$ і $\vec{A}_r$, заміна яких забезпечує найбільше зростання лінійної форми, виразимо всі вектори, що не входять в базис, через базисні вектори

$$\vec{A}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{A}_i, \tag{3.1}$$

де a_{ij} – проекції вектора $\vec{A}_j$ на вектор $\vec{A}_i$.

Запишемо систему обмежень у векторній формі в наступному вигляді:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \vec{A}_i - \theta \vec{A}_k + \theta \vec{A}_k = \vec{B}.$$

Оскільки

$$\vec{A}_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \cdot \vec{A}_i,$$

то

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - \theta a_{ik}) \vec{A}_i + \theta \vec{A}_k = \vec{B}. \tag{3.2}$$

Співвідношення (3.2) дає рішення тільки у тому випадку, коли коефіцієнти при векторах $\vec{A}_i$ і $\vec{A}_k$ нового базису будуть ненегативними, тобто

$$x_i' = x_i - \theta a_{ik} \geq 0 \quad \text{і} \quad \theta \geq 0. \tag{3.3}$$

Відповідне нове значення лінійної форми прийме вигляд

$$L_1 = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \theta a_{ik}) c_i + \theta c_k = \sum_{i=1}^{m} x_i c_i + \theta \left(c_k - \sum_{i=1}^{m} a_{ik} c_i \right). \tag{3.4}$$

Позначимо

$$d_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} c_i - c_j. \tag{3.5}$$

Значення лінійної форми в новій вершині багатокутника рішення можна знайти з рівняння

$$L_1(\vec{X}) = L(\vec{X}) - \theta d_j. \tag{3.6}$$

Величину d_j називають *оцінкою плану*. В симплексному методі параметри d_j відіграють важливу роль: їх знаки дозволяють визначити, чи є опорний план оптимальним. Якщо $dj \geq 0$ для всіх j, то даний опорний план є оптимальним, оскільки на підставі (3.6) і зважаючи на $\theta \geq 0$ перехід до будь-якої нової вершини веде до убування лінійної форми. Якщо опорний план неоптимальний, то можливі два випадки:

1 Є хоча б один індекс $j = k$ для якого $d_k < 0$ і всі відповідні компоненти

$$a_{ik} \le 0 \; (i = \overline{1, m}).$$

В цьому випадку лінійна форма не обмежена зверху і задача нерозв'язна.

2 Для деяких j $d_j < 0$ і для кожного такого j, принаймні, одна з проекцій $a_{ij} > 0$. Тоді при переході до наступної вершини лінійна форма зростає і план поліпшується. Для найшвидшого зростання L необхідно в базис включити той вектор $\vec{A}_k$, для якого оцінка $d_k < 0$ і максимальна по модулю, а вектор $\vec{A}_r$, для якого значення позитивно і мінімально, виключити.

Також при лінійному програмуванні використовують методи еліпсоїдів, метод внутрішніх крапок, методи логарифмічних бар'єрних функцій нелінійного програмування. В цих методах вирішення задач лінійного програмування здійснюється шляхом пошуку уздовж траєкторій в просторі змінних задачі, що не проходять через вершини багатокутника.

3.2 Особливості задач лінійного програмування та практичні аспекти їх вирішення

Задачам лінійного програмування властиві наступні особливості:

1 Цільова функція є зваженою лінійною сумою від невідомих змінних x_i вигляду:

$$J = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \max(\min) \tag{3.7}$$

де c_i – коефіцієнти цільвої функції. Таку цільову функцію часто називають лінійною формою.

2 Обмеження, що накладаються на область можливих рішень, мають вид лінійної рівності або нерівності:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{3.8}$$

де a_{ij}, b_i – значення показників цільової функції, причому величини a_{ij}, x_i, b_i позитивні.

3.3 Транспортна задача. Формулювання і алгоритм вирішення

В аспекті вирішення задач лінійного програмування розглянемо математичне формулювання і алгоритм розв'язання транспортної задачі.

Змістовна постановка задачі: Однорідний продукт, зосереджений у m пунктах відправлення в кількостях a_1, a_2, ... a_m одиниць відповідно, необхідно доставити в кожний із n пунктів призначення в кількості b_1, b_2, ... b_n одиниць відповідно. Вартість (відстань) перевезення одиниці продукту з i-го пункту відправлення j-й пункт призначення дорівнює c_{ij} і відома для кожного маршруту. Нехай x_{ij} – кількість продукту, перевезеного з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Задача полягає у визначенні таких розмірів x_{ij} для всіх маршрутів, при яких сумарна вартість (відстань) перевезень була б мінімальною.

Математична модель задачі:

Позначимо:

c_{ij} – тарифи (вартість, час, відстань) перевезення одиниці вантажу з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення;

a_i – запаси вантажу в i-му пункті відправлення;

b_i – потреба у вантажі в j-му пункті призначення;

x_{ij} – кількість одиниць вантажу, перевезеного з 1-го пункту відправлення в j-й пункт призначення.

Тоді математична модель транспортної задачі про планування перевезень має такий вигляд:

$$y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \xrightarrow[x_{ij} \in \Omega]{} min \tag{3.9}$$

$$\Omega : f_i = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \ , \ \overline{j = 1,n;} \tag{3.10}$$

$$f_{n+i} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \overline{i = 1, m;} \tag{3.11}$$

$$x_{ij} \geq 0; \overline{i = 1,m;} \ \overline{j = 1,n.} \tag{3.12}$$

Тут (3.9) – цільова функція, що визначає вартість перевезень усього вантажу. Саме екстремальне (мінімальне) значення цієї функції необхідно знайти в задачі. Причому значення змінних x_{ij}, при яких цільова функція досягає свого мінімуму, повинні належати області припустимих рішень **Ω**.

Вирази (3.10) – (3.12) визначають область припустимих рішень **Ω**. При цьому вираз (3.10) відбиває потреби у вантажі в пунктах призначення, вираз (3.11) визначає запаси вантажів у пунктах відправлення, а вираз (3.12) відокремлює негативну область значень x_{ij}, в яку дані змінні не можуть потрапляти за своїм фізичним змістом.

Вирази (3.10)-(3.12) називаються обмеженнями задачі лінійного програмування. Вирішення задачі (частковий набір значень змінних x_i) називається припустимим, якщо воно одночасно задовольняє всім обмеженням задачі. Вирішення задачі називається оптимальним, якщо воно забезпечує оптимум (у даному випадку мінімум) функції цілі.

Вважатимемо, що функції $y, f_1, f_2, \ldots, f_n$ – неперервні лінійні функції, задані на евклідовому просторі R^n. Дані функції мають місце, коли перевезений вантаж є рідиною, сипкою речовиною, дрібними заготівлями або дрібною неспакованою продукцією. Такий вантаж характеризується параметрами, що являють собою вагу, довжину (погонні метри), площу (квадратні метри), об'єм і т.п.

Якщо загальна потреба у вантажі в пунктах призначення дорівнює запасу вантажу в пунктах відправлення, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (3.13)$$

то модель такої транспортної задачі називається *закритою*. У противному випадку – *відкритою*.

Теорема 1.1 Для можливості розв'язання транспортної задачі необхідно і достатньо, щоб запаси вантажу в пунктах відправлення були рівні потребам у вантажі в пунктах призначення, тобто щоб виконувалася рівність (3.13).

У випадку перевищення запасу над потребою, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i \rangle \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводиться фіктивний (n+1)-й пункт призначення з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. При цьому відповідні тарифи вважаються рівними нулю:$c_{i,n+1}=0$ (i=1,m) . Така задача буде вже транспортною задачею, для якої умова (3.13) виконується.

Аналогічно, якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i \langle \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводиться фіктивний (m+1)-й пункт відправлення з запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. При цьому відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c_{m+1,j}=0$ (j=1,n). Така задача буде вже транспортною задачею, для якої умова (3.13) виконується.

Далі будемо розглядати закриту модель транспортної задачі. Якщо ж модель конкретної задачі є відкритою, то, виходячи зі сказаного вище, її необхідно перетворити так, щоб виконувалася рівність (3.13).

У відкритій моделі область припустимих значень (за інших рівних умов) значно ширше, тому цільова функція досягає кращих значень або, принаймні, не гірше.

Особливості вирішення закритої транспортної задачі:

Визначення 1.1 Усяке невід'ємне рішення систем лінійних рівнянь (3.10) і (311) , що обумовлене матрицею X={x_{ij}], i=1,m, j=1,n, називається планом транспортної задачі.

Визначення 1.2 План X^* = [x^*_{ij}], i=1,m, j=1,n, при якому функція (3.9) приймає своє мінімальне значення, називається оптимальним планом транспортної задачі.

Число змінних x_{ij} у транспортній задачі з m пунктами відправлення і n пунктами призначення дорівнює mn, а число рівнянь у системах (3.10) і (3.11) дорівнює m+n. Оскільки передбачається, що виконується умова (3.13), то число лінійно незалежних рівнянь дорівнює m+n-1. Отже, опорний план транспортної задачі може мати не більше m+n-1 відмінних від нуля невідомих.

Визначення 1.3 План X^* = [x^*_{ij}], i = 1,m, j = 1,n є опорним не виродженим, якщо в ньому кількість відмінних від нуля компонентів у точності дорівнює m+n-1, а якщо менше – то виродженим.

Для визначення опорного плану існує декілька методів. Один з них - метод північно-західного кута - буде розглянутий нижче.

Як і для всякої задачі лінійного програмування, оптимальним план транспортної задачі є також опорним планом. Для визначення оптимального плану транспортної задачі можна використовувати диференціальний алгоритм, симплекс-метод та інші універсальні методи. Однака через виняткову практичну важливість цієї задачі і специфіку її обмежень (кожна невідома входить лише в два рівняння систем (3.10) і (3.11), а коефіцієнти при невідомих дорівнюють одиниці) для визначення оптимального плану транспортної задачі розроблені спеціальні методи. Один з них – метод потенціалів.

За звичаєм вихідні дані транспортної задачі записують у вигляді таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані транспортної завдання

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення					
		1	2	…	j	…	n
		Потреби					
		b_1	b_2	…	b_1	…	b_n
1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
i	a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…
m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Визначення початкового опорного плану транспортної задачі: Вирішення транспортної задачі починають із знаходження будь-якого опорного плану. Для цього розроблені специфічні методи. Один з них одержав у літературі назву «метод північно-західного кута». Іноді його називають також «діагональним методом», «методом перехідних приступів» і т. ін.

Сутність методу полягає в тому, що опорний план знаходять за m+n-1 кроками, на кожному з яких у таблиці транспортної задачі заповнюють одну клітку. Заповнення однієї клітки забезпечує цілком або задоволення потреби у вантажі одного з пунктів призначення (відповідно до того, в стовпці якого знаходиться клітка), або вивіз вантажу з одного з пунктів відправлення (відповідно з того, в рядку якого знаходиться клітка).

Заповнення таблиці слід починати з лівого верхнього квадрата (північно-західного кута). З позиції цього квадрата порівнюють запас вантажу в першому пункті відправлення з потребою першого пункту призначення. Вибирають менший розмір і записують у даний квадрат, який з цього моменту стає «зайнятим». Якщо в клітку записується потреба пункту призначення, то з подальшого розгляду виключають відповідний стовпець таблиці і переходять у ліву сусідню клітку. Якщо в клітку записується запас пункту відправлення, то з подальшого розгляду виключають відповідний рядок таблиці і переходять у сусідню клітку, що знаходиться нижче заповненої.

У новій клітці для частини таблиці, що залишилася, повторюють процедуру першого кроку з урахуванням зміни запасу вантажу одного з І відправників або потреби у вантажі одного з одержувачів у результаті попереднього кроку.

Після m + n - 2 описаних вище кроків одержують задачу з одним пунктом відправлення і одним пунктом призначення. При цьому залишається вільною тільки одна клітка, а запаси пункту відправлення дорівнюватимуть потребам пункту призначення. Заповнення цієї клітки, тобто здійснення (m + n - 1)-го кроку приводить до шуканого опорного плану.

Слід зауважити, що в процесі використання методу північно-західного кута може трапитися, що потреби у вантажі чергового пункту призначення рівні запасам чергового пункту відправлення. У цьому випадку з подальшого розгляду виключають або стовпець, або рядок, тобто тільки що-небудь одне. Таким чином, запаси відповідного пункту відправлення, або потребу відповідного пункт призначення вважають рівними нулю. Цей нуль записують у чергову клітку, яка заповнюється [61].

Зазначені вище умови гарантують одержання m + n - 1 зайнятих кліток, у яких знаходяться компоненти опорного плану.

Опорний план перевезень повинен відповідати таким вимогам:

– по-перше, кількість зайнятих маршрутів (кліток) повинно бути на одиницю менше суми числа постачальників т і числа споживачів п, тобто повинна дорівнювати значенню m + n - 1;

– по-друге, не повинно бути жодного зайнятого маршруту (клітки), що опинився: б єдиним і в рядку, і в стовпці таблиці.

Визначення оптимального опорного плану транспортної задачі:

Для відзначення оптимального плану транспортної задачі розроблено декілька методів. Найбільш часто використовується *метод потенціалів*. Метод припускає, що вже відомий якийсь опорний план. Його можна одержати, наприклад, розглянутим методом північно-західного кута. Вихідний опорний план необхідно перевірити на оптимальність.

Теорема 1.2 Якщо для деякого опорного плану

$$X^* = [x^*_{ij}],\ i = 1,m,\ j = 1,n$$

транспортної задачі з заданими тарифами перевезень c_{ij} існують такі числа $\alpha_i(i=1,m)$ і $\beta_j(j=1,n)$, що

$$\beta_i - \alpha_j = c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} > 0 \qquad (3.14)$$

$$\text{і} \quad \beta_i - \alpha_j \le c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} = 0 \qquad (3.15)$$

для всіх i = 1,m і j = 1,n, то $X^* = [x^*_{ij}]$ - оптимальний план.

Визначення 1.4 Числа $\alpha_i(i = 1,m)$ і $\beta_j(j = 1,n)$ називаються потенціалами відповідно пунктів відправлення і пунктів призначення.

Теорема 1.2 дозволяє побудувати алгоритм знаходження рішення транспортної задачі. Він являє собою наступне.

Нехай знайдений опорний план транспортної задачі. Для кожного з пунктів відправлення і призначення визначають потенціали $\alpha_i(i=1,m)$ і $\beta_j(j=1,n)$ із системи рівнянь

$$\beta_i - \alpha_j = c_{ij} \qquad (3.16)$$

Так як число заповнених кліток дорівнює n+m-1, то система (3.16) із n + m невідомими містить n + m - 1 рівнянь. Оскільки число невідомих перевищує на одиницю число рівнянь, одне з невідомих потрібно взяти рівним довільному числу, наприклад $\alpha_1 = 0$, і знайти послідовно із системи (3.16) значення інших невідомих.

Після того, як усі потенціали знайдені, дія кожною з вільних кліток визначають числа $\alpha_{ij} = \beta_i - \alpha_j - c_{ij}$. Якщо серед чисел α_{ij} немає позитивних, то знайдений опорний план є оптимальним. Якщо ж для деякої вільної клітки $\alpha_{ij} > 0$, то опорний план , що перевіряється , не є оптимальним, і треба перейти до нового опорного плану. Для цього розглядають усі вільні клітки, для яких $\alpha_{ij} > 0$, і вибирають ту, для якої число α_{ij} максимальне. Обрану клітку необхідно заповнити.

Заповнюючи обрану клітку, треба змінити обсяги перевезень, записаних у ряді інших зайнятих клітках і зв'язаних з обраною циклом.

Визначення 1.5 Циклом у таблиці транспортної задачі *називається замкнута ломана лінія*, вершини якої розташовані в зайнятих клітках таблиці, а ланки - уздовж рядків і стовпів, причому в кожній вершині циклу зустрічаються рівно дві ланки, одна з яких знаходиться в рядку, а інша – у стовпці.

Якщо ломана лінія, що складає цикл, перетинається сама із собою, то точка самоперетину не є вершиною.

При правильній побудові опорного плану для будь-якої вільної клітки можна побудувати тільки один цикл. Після того як для обраної вільної клітки він побудований, необхідно перейти до нового опорного плану. Для цього треба перемістити вантажі в межах кліток, що утворюють цикл. Переміщення роблять за такими правилами:

– кожній з кліток, пов'язаних циклом з обраною вільною кліткою, і приписують знак «+» або «-», причому вільній клітці – знак плюс, а всім іншим кліткам – по черзі знаки мінус і плюс;

– у вільну клітку переносять менше з чисел x_{ij}, що знаходяться в мінусових клітках, і одночасно це число додають до відповідних чисел, і що знаходяться «плюсових» клітках, і віднімають із чисел, що знаходяться в «мінусових» клітках. Клітка, що раніше була вільною, стає зайнятою, а «мінусова» клітка, в якій стояло мінімальне число x_{ij}, стає вільною.

У результаті зазначених вище переміщень вантажів у межах кліток, пов'язаних циклом з обраною вільною кліткою, визначають новий опорний план транспортної задачі. Число зайнятих кліток залишається рівним $n+m-1$. Якщо в зайнятих «мінусових» клітках циклу є два і більше однакових мінімальних чисел x_{ij}, то звільняють тільки одну з таких кліток, а інші залишають зайнятими з нульовими постачаннями.

Отриманий новий опорний план транспортної задачі перевіряють на оптимальність. Для цього визначають потенціали пунктів відправлення і призначення і знаходять числа $\alpha_{ij} = \beta_i - \alpha_j - c_{ij}$ для всіх вільних кліток. Якщо серед цих чисел не буде позитивних, то це означає, що новий опорний план є оптимальним. Якщо ж є позитивні числа, то І необхідно перейти до нового опорного плану. У результаті ітераційного плану кінцевого числа переходів одержують оптимальний план процесу задачі.

Таким чином, процес знаходження рішення транспортної задачі методом потенціалів включає наступні етапи:

1-й етап. Знаходять опорний план.

2 й етап. Знаходять потенціали пунктів відправлення; і призначення.

3-й етап. Визначають числа α_{ij} для кожної вільної клітки. Якщо серед них немає позитивних, то отримано оптимальний план транспортної задачі, у противному разі переходять до нового опорного плану.

4-й етап. Вибирають серед позитивних чисел α_{ij} максимальне, будують для відповідної вільної клітки цикл перерахування і роблять зсув за циклом, одержуючи при цьому новий опорний план. Далі переходять до 2-го етапу.

Розглянемо приклад вирішення транспортної задачі методом потенціалів.

Приклад вирішення транспортної задачі методом потенціалів:

Приклад 1.1 Три заводи, що виготовляють бетоні конструкції, постачаються цементом з чотирьох складів. Попит заводів b_j відповідно дорівнює 280, 90 і 180 тис.т/міс. Пропускна здатність складів a_i,- відповідно становить 200, 150, 80 і 120 тис.т/міс. Відстані перевезень (у км)

із i-го складу на j-й завод подані в матриці $C = \left[c_{ij}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 6 & 8 & 9 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Потрібно скласти план перевезень цементу зі складів на заводи, що задовольняв би пропускним спроможностям складів і потребам заводу, а сумарний пробіг вантажного транспорту був би мінімальним.

Розв’язання

Позначимо через x_{ij} – кількість цементу, який щомісяця потрібно доставляти щомісяця на j-го завод з i-го складу. Тоді математична модель задачі має вигляд:

$$y = x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 6x_{21} + 8x_{22} + 9x_{23} + 2x_{31} + 7x_{32} + 4x_{33} + 4x_{41} + x_{42} + 11x_{43} \xrightarrow[x_{ij} \in \Omega]{} min\ ; \quad (3.17)$$

$$\Omega: \quad x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41} = 280; \quad (3.18)$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42} = 90; \quad (3.19)$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43} = 180; \quad (3.20)$$

$$x_{11}+x_{12}+x_{13} = 200; \quad (3.21)$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23} = 150; \quad (3.22)$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33} = 80; \quad (3.23)$$

$$x_{41}+x_{42}+x_{43} = 120; \quad (3.24)$$

$$x_{ij} \geq 0. \quad (3.25)$$

Тут (3.17) – цільова функція, (3.18) – (3.20) – обмеження задачі! що визначають місячні запаси цементу на складах, (3.21) – (3.24) – обмеження задачі, що визначають місячну потребу в цементі на заводах (3.25) – обмеження, що визначає неможливість негативних значень для постачань цементу на заводи.

1-й крок. *1-й етап.* Використовуючи метод північно-західного кута, знайдемо опорне рішення транспортної задачі (3.17) – (3.25).

Відповідно до цього методу заповнюємо таблицю, починаючи лівого верхнього квадрата. Порівнюємо запас вантажу в першому пункті відправлення (200 тис.т/міс.) із потребою першого пункту призначення (280 тис.т/міс.). Вибираємо меншу величину (200) і записуємо її в даний квадрат. Оскільки весь запас у першому пункті відправлення вичерпаний, то з подальшого розгляду виключаємо перший рядок і переходимо в сусідню клітку, що знаходиться нижче заповненої. У новій клітці для частини таблиці, що залишилася, повторюємо процедуру заповнення верхньої лівої клітки, але з урахуванням того, що потреба першого пункту призначення зменшилася на 200 тис.т/міс. і стала рівною 80 тис.т/міс. Тобто порівнюємо запас другого пункту відправлення (150 тис.т/міс.) із новою потребою першого пункту призначення (80 тис т/міс). Вибираємо меншу величину(80) і записуємо її в нову клітку.

Оскільки потреба у вантажі в першому пункті призначення повністю задоволена, то з подальшого розгляду виключаємо перший стовпець і переходимо в сусідню клітку, що знаходиться справа від тільки що заповненої. Для нової верхньої лівої клітки частини таблиці, що залишилася, повторюємо процедуру заповнення з урахуванням зміни запасу в другому пункті відправлення на 50 тис.т/міс. І так доти, поки не буде заповнено m+n-2 кліток.

Остання (m+n-2)-я клітка заповнюється механічно – у неї записується залишкова потреба останнього пункту призначення або залишковий запас останнього пункту відправлення. В умовах задачі це величина 120. Усі проміжні результати по знаходженню початкового опорного плану $X_0 = \begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 80 & 70 & 0 \\ 0 & 20 & 60 \\ 0 & 0 & 120 \end{pmatrix}$ відображені в таблиці. 3.2. Ці результати в таблиці виділені напівжирним шрифтом.

Для початкового опорного плану обчислюємо значення цільової функції (3.17):

$$y_0 = 1x200+6x80+8x70+7x20+4x60+11x120 = 2940 \text{ тис.т/міс.}$$

Це значення буде використано на наступних кроках для контролю просування до оптимуму. Значення цільової функції повинно послідовно зменшуватися з кожним кроком.

Таблиця 3.2 – Проміжні результати по знаходженню початкового опорного плану

Пункт відправлення	Запас вантажу	Пункт призначення			Потенціал пункту відправлення α_i
		1	2	3	
		Потреба			
		280	90	180	
1	200	1 200	5	3	0
2	150	6 80	8 70	9	-5
3	80	2	7 - 20	4 + 60	-4
4	120	4	1 +	11 - 120	-11
Потенціал пункту призначення β_i		1	3	0	

2-й етап. Знайдений опорний план перевіряємо на оптимальність. У зв'язку з там знаходимо потенціали пунктів відправлення і призначення із системи

β_1-α_1 = 1, β_2-α_2 = 8, β_3-α_3 = 4,

β_1-α_2 = 6, β_2-α_3 = 7, β_3-α_4 = 11.

що містить шість рівнянь із сімома невідомими. Вважаючи α_1 = 0, знаходимо β_1 = 1, α_2 = -5, β_2 = 3, α_3 = -4, β_3 = 0, α_3 = -11. Записуємо знайдені потенціали в таблиці 3.2.

3-й етап. Для кожної вільної клітки обчислюємо числа $\alpha_{ij} = \beta_i$-α_j-c_{ij}: α_{12} = -2, α_{13} = -3, α_{23} = -4, α_{31} = 3, α_{41} = 8, α_{42} = 13.

Записуємо знайдені числа у відповідні вільні клітки таблиці 3.2 і вміщуємо їх у рамочки, щоб відрізняти їх від іншої інформації в таблиці Тому що серед чисел α_{ij} є позитивні, то опорний план X_0 не є оптимальним.

4-й етап. Серед позитивних чисел α_{ij} вибираємо максимальне: α_{42} = 13. Для відповідної вільної клітки будуємо цикл, а саму клітку позначаємо знаком «+». У таблиці 3.2 зайняті клітки, що складають цикл, виділені сірим фоном. Потім позначаємо знаками «-» і «+» по черзі інші клітки циклу, слідуючи уздовж ломаної лінії циклу.

Найменшим із чисел x_{ij} у «мінусових» клітках є x_{32} (20). Дана клітка стає вільною, а інші клітки циклу змінюють свої значення в такий спосіб: $X_{42} = 20$, $x_{43} = 120\text{-}20 = 100$, $x_{33} = 60+20 = 80$.

У результаті зроблених перетворень одержуємо новий опорний план

$$X_1 = \begin{pmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 80 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \\ 0 & 20 & 100 \end{pmatrix}$$

При такому опорному плані функція цілі (3.17) стає рівною 2680 тис.т/міс, що менше вихідного значення 2940 тис.т/міс.

На цьому закінчується 1-й крок оптимізації. На наступному кроці процедура 1-го кроку повторюється, але без 1-го етапу.

2-й крок. Аналізуємо новий опорний план (табл. 3.3) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо таку систему рівнянь:

$\beta_1\text{-}\alpha_1 = 1$, $\beta_2\text{-}\alpha_2 = 8$, $\beta_2\text{-}\alpha_4 = 1$,

$\beta_1\text{-}\alpha_2 = 6$, $\beta_3\text{-}\alpha_3 = 4$, $\beta_3\text{-}\alpha_4 = 11$.

Вважаючи $\alpha_1 = 0$, знаходимо $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = -5$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_4 = 2$, $\beta_3 = 13$, $\alpha_3 = 9$. Для кожної вільної клітки обчислюємо числа α_{ij}: $\alpha_{12} = -2$, $\alpha_{13} = 10$, $\alpha_{23} = 9$, $\alpha_{31} = -10$, $\alpha_{32} = -13$, $\alpha_{41} = -5$.

Тому що серед чисел α_{ij} є позитивні ($\alpha_{13} = 10$, $\alpha_{23} = 9$), то опорний план X_1 не є оптимальним.

Таблиця 3.3 – Новий опорний план

Пункт відправлення	Запас вантажу	Пункт призначення			Потенціал пункту відправлення α_i
		1	2	3	
		Потреба			
		280	90	180	
1	200	1 - 200	5	3 +	0
2	150	6 + 80	8 - 70	9	-5
3	80	2	7	4 80	9
4	120	4	1 + 20	11 - 100	2
Потенціал пункту призначення β_i		1	3	13	

Серед позитивних чисел α_{ij} вибираємо максимальне: $\alpha_{13} = 10$. Для відповідної вільної клітки будуємо цикл, а саму клітку позначає знаком «+». У таблиці 3.3 зайняті клітки, що складають цикл, виділені рим фоном. Потім позначаємо вузлові клітки циклу по черзі знаками «-» і «+».

Найменшим із чисел x_{ij} у «мінусових» клітках є x_{23} (70). Дана клітка стає вільною, а інші клітки циклу змінюють свої значення в так спосіб: $x_{11} = 200-70 = 130$, $x_{13} = 70$, $x_{21} = 80+70 = 150$, $x_{42} = 20+70=90$, $x_{43} = 100-70 = 30$.

У результаті виконаних перетворень одержуємо новий опори план

$$X_2 = \begin{pmatrix} 130 & 0 & 70 \\ 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \\ 0 & 90 & 30 \end{pmatrix}$$

При такому опорному плані функція (3.17) стає рівною 1980 тис.т/міс, що значно менше попереднього значення 2680 тис.т/міс.

3-й крок. Аналізуємо новий опорний план (табл. 3.4) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо наступну систему рівнянь:

$\beta_1-\alpha_1 = 1$, $\beta_1-\alpha_2 = 6$, $\beta_2-\alpha_4 = 1$,

$\beta_3-\alpha_1 = 3$, $\beta_3-\alpha_3 = 4$, $\beta_3-\alpha_4 = 11$.

Вважаючи $\alpha_1=0$, знаходимо $\beta_1 = 1$, $\beta_3 = 3$, $\alpha_2 = -5$, $\beta_3 = 4$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = -8$, $\beta_2 = -7$. Для кожної вільної клітки обчислюємо числа α_{ij}: $\alpha_{12} = -12$, $\alpha_{22} = -10$, $\alpha_{23} = -1$, $\alpha_{31} = -1$, $\alpha_{32} = -14$, $\alpha_{41} = 5$. Оскільки серед чисел α_{ij} одне позитивне ($\alpha_{41} = 5$), то опорний план X_2 не є оптимальним.

Таблиця 3.4 – Новий опорний план

Пункт відправлення	Запас вантажу	Пункт призначення			Потенціал пункту відправлення α_i
		1	2	3	
		Потреба			
		280	90	180	
1	200	1 - 130	5	3 + 70	0
2	150	6 150	8	9	-5
3	80	2	7	4 80	0
4	120	4 +	1 90	11 - 30	-8
Потенціал пункту призначення β_i		1	-7	3	

Для відповідної вільної клітки (нижньої, лівої) будуємо цикл, а саму клітку позначаємо знаком «+». У таблиці 3.4 зайняті клітки, що складають цикл, виділені сірим фоном. Потім позначаємо вузлові клітки циклу по черзі знаками «-» і «+». Найменшим із чисел x_{ij} у «мінусових» клітках є x_{43} (30). Дана клітка стає вільною, а інші клітки циклу змінюють свої значення в такий спосіб: x_{11} = 130- - 30=100, x_{13} = 70+30 = 100, x_{14} = 30.

У результаті зроблених перетворень одержуємо новий опорі план

$$X_4 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 100 \\ 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \\ 30 & 90 & 0 \end{pmatrix}$$

При такому опорному плані функція (3.17) стає рівною 1830 тис.т/міс, що менше попереднього значення 1980 тис.т/міс.

4-й крок. Аналізуємо новий опорний план (табл. 3.5) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо наступну систему рівнянь:

$\beta_1 - \alpha_1 = 1$, $\beta_1 - \alpha_2 = 6$, $\beta_1 - \alpha_4 = 4$,

$\beta_3 - \alpha_1 = 3$, $\beta_3 - \alpha_3 = 4$, $\beta_2 - \alpha_4 = 1$.

Вважаючи $\alpha_1 = 0$, знаходимо $\beta_1 = 1$, $\beta_3 = 3$, $\alpha_2 = -5$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = -3$, $\beta_2 = -2$. Для кожної вільної клітки обчислюємо числа α_{ij}: $\alpha_{12} = -7$, $\alpha_{2\,2} = -4$, $\alpha_{23} = -1$, $\alpha_{31} = 0$, $\alpha_{32} = -8$, $\alpha_{41} = -5$. Тому що серед чисел α_{ij} і немає строго позитивних, то опорний план X_3 є оптимальним.

Таблиця 3.5 – Новий опорний план

Пункт відправлення	Запас вантажу	Пункт призначення			Потенціал пункту відправлення α_i
		1	2	3	
		Потреба			
		280	90	180	
1	200	1 100	5	3 100	0
2	150	6 150	8	9	-5
3	80	2	7	4 80	-1
4	120	4 30	1 90	11	-3
Потенціал пункту призначення β_i		1	-2	3	

Різновиди транспортних задач

Розглянута математична модель (3.9) – (3.12) є класичною моделлю транспортної задачі. У реальній практиці економіста і менеджера, як правило, транспортна задача зустрічається в дещо іншій постановці. Математична модель реальної транспортної задачі може відрізнятися від класичної або видом цільової функції, або видом обмежень, або характером змінних, або будь-яким сполученням перерахованих відмінностей одночасно.

Розглянемо декілька модифікацій транспортної задачі.

Транспортна задача про розподіл випуску продукції

При комплексному вирішенні проблеми виробництва і реалізації продукції виникає задача, що полягає у визначенні такого плану випуск і перевезень готової продукції, при якому досягаються мінімальні пні витрати на її виготовлення і доставку споживачам.

Для вирішення даної задачі розглядається повна собівартість виробництва одиниці продукції на кожному підприємстві (S_i) і транспортні витрати (S_{ij}), що залежать від типу застосовуваних транспортних засобів і районів розташування заводів-виробників і споживачів.

Математична модель такої задачі має вигляд:

$$y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(S_i + S_{ij}\right)x_{ij} \xrightarrow[x_{ij}\in\Omega]{} min \qquad (3.26)$$

$$\Omega : f_i = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \;,\; \overline{j = 1,n;} \qquad (3.27)$$

$$f_{n+i} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \overline{i = 1, m;} \qquad (3.28)$$

$$x_{ij} \geq 0; \overline{i = 1,m;}\; \overline{j = 1,n.} \qquad (3.29)$$

$$x_{ij} = int; \overline{i = 1,m;}\; \overline{j = 1,n.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.30)$$

Якщо за умовою задачі потрібні ще капітальні вкладення в засоби транспорту, то показником ефективності служать приведені витрати, (3.26) матиме вигляд

$$y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(s_i + s_y + E_n k_i)\cdot x_{ij} \to \min \qquad (3.31)$$

E_n – нормативний коефіцієнт ефективності капітальних вкладень;

к – питомі капітальні вкладення, що приводяться на одиницю перевезень.

Виконуючи підстановку $C_{ij} = s_i + s_{ij_i}$ в цільову функцію (3.26) і підстановку $C_{ij} = s_i + s_{ij} + E_n k_i$ в цільову функцію (3.31), задача (3.26) – (3-30) і задача (3.31), (3.27) – (3.30) відповідно приводяться до класичної транспортної задачі, що може бути вирішена методом потенціалів.

Розподільна транспортна задача про вибір засобів доставки вантажу

Змістовна постановка задачі. Нехай через j = 1,2, ...,n позначено пункти, що мають вантажі для перевезень об'ємами a_j відповідно. Є m засобів доставки вантажу (видів транспорту). Вантажопідйомність i-го засобу доставки складає p_i а наявний його парк дорівнює b_i, i = 1,2,...,m... Вантажі підлягають доставці в один центральний пункт (склад). Витрати при здійсненні однією одиницею i-го засобу доставки від j-го пункту до складу дорівнюють C_{ij}. Потрібно скласти найбільш оптимальний план доставки.

Математична модель задачі. Позначимо через X_{ij} кількість засобів доставки i-го типу, що відправляється j-го пункту. Тоді математична модель розподільної транспортної задачі про вибір транспортних засобів має вигляд:

$$y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min \tag{3.32}$$

$$\Omega : \sum_{i=1}^{m} p_i \, x_{ij} \geq a_j \, , \, j = \overline{1,n} \tag{3.33}$$

$$\sum_{l=1}^{n} x_{ij} \leq, b_i \, , i = \overline{1,m} \tag{3.34}$$

$$x_{ij} \geq o; i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n} \tag{3.35}$$

$$x_{ij} = int; i = \overline{1,m; i}; \; j = \overline{1,n} \tag{3.36}$$

Цільова функція (3.32) визначає сумарні витрати на доставку в вантажу на центральний склад. Вираз (3.33) вказує на необхідність вивезення всього вантажу з пунктів відправлення. Обмеження (3.34) вказує те, що кількість використовуваних засобів доставки не повинна перевищувати їхній наявний парк.

Поява параметра p_i,- у системі обмежень (3.33) перешкоджає зведенню математичної моделі завдання до моделі класичної. Тому вирішувати її методом потенціалів неможливо. Вирішення даної задачі класичними методами лінійного програмування також неможливе через цілочисельність змінних x_{ij}. Вирішення задачі можна одержати методом відсікання (шляхом введення в задачу додаткових обмежень у вигляді нерівностей Гомори), однак процедура вирішення різко ускладнюється. Тому вирішення задачі найбільш доцільно покласти на програм; Solver (Пошук рішення) інформаційної системи Microsoft Excel.

Транспортна задача про двоетапне перевезення вантажу

Змістовна постановка задачі. Однорідний вантаж потрібно доставити з т пунктів відправлення в п пунктів призначення. При доставці в пункти призначення вантажі можуть бути спочатку доставлені на р перевалочних пунктів. Задано вартості перевезень C_y з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення і перевалочний пункт, а також вартості перевезення з кожного перевалочного пункту в пункт призначення.

Математична модель завдання. Позначимо:

C_{ij} – вартість перевезення одиниці вантажу з i-го пункту відправлення j-й пункт призначення, $i=\overline{1,v}, \quad j=\overline{1,n};$;

C_{ik} – вартість перевезення одиниці вантажу з i-го пункту відправлення в k-й перевалочний пункт $i=\overline{1,m}, \quad k=\overline{1,p};$;

C_{kj} – вартість перевезення одиниці вантажу з к-го перевалочного пункту j-й пункт призначення $k=\overline{1,p}, \quad j=\overline{1,n};$

a_i – запаси вантажу в i-м пункті відправлення;

b_i – потреба у вантажі j-м пункті призначення;

c_k – місткість k-го перевалочного пункту;

X_{ij} – кількість вантажу, перевезеного з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення;

Y_{ik} – кількість вантажу, перевезеного з i-го пункту відправлення в k-й перевалочний пункт;

Z_{kj} – кількість вантажу, перевезеного з k-го перевалочного пункту в j-й пункт призначення.

Математична модель задачі з урахуванням вище наведених позначень може бути подана у вигляді задачі лінійного програмування:

$$y=\sum_{i-1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}*x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}c_{ik}*y_{ik}+\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}c_{kj*z_{kj}}\to\min_{x_{ij},y_{ik},z_{kj}\in\Omega} \quad ; \tag{3.37}$$

$$\Omega: \quad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}+\sum_{k=1}^{p}y_{ik}\le a_i, \quad i=\overline{1,m}; \tag{3.38}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}+\sum_{k=1}^{p}z_{kj}\ge p_j, \quad j=\overline{1,n}; \tag{3.39}$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_{ik}\le c_k, \quad k=\overline{1,p}; \tag{3.40}$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_{ik}=\sum_{j=1}^{n}z_{kj}, \quad k=\overline{1,p}; \tag{3.41}$$

$$x_{ij} \geq o;\ y_{ik} \geq o;\ z_{kj} \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},\ k = \overline{1,p}, \qquad (3.42)$$

Тут цільова функція (3.37) складається з витрат трьох видів: на уставку частини вантажу з пунктів відправлення в пункти призначення, маючи перевалочні пункти; на перевезення частини вантажу з пункт призначення в перевалочні пункти; на доставку вантажу з перевалочних пунктів у пункти призначення.

Система обмежень (3.38) говорить про те, що сумарні об’єми вантажів, що вивозяться з пунктів відправлення, не можуть перевищувати запаси вантажів у цих пунктах. Система обмежень (3.39) свідчить про те, що сумарні об’єми вантажів, що надходять у пункти призначення, не можуть бути менше відповідних потреб пунктів призначення. Система обмежень (3.40) означає, що сумарне завезення вантажів на кожний перевалочний пункт не може перевищувати його місткості. Система обмежень (3.41) вказує на те, що весь вантаж із перевалочних пунктів повинен бути вивезений повністю.

Як і в попередній задачі, математична модель (3.37) – (3.42) не може бути приведена до класичної. Тому вирішення задачі найбільш доцільно покласти на програму Solver (Пошук рішення) інформаційної системи Microsoft Excel.

Транспортна задача про двоетапне перевезення вантажу декількох видів

Змістовна постановка завдання. Вантаж, що включає *q* видів продукції, потрібно доставити з т пунктів відправлення в n пунктів призначення. При доставці в пункти призначення вантажі можуть бути спочатку доставлені на q перевалочних пунктів. Задано вартості перевезень для кожного виду вантажу з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення і перевалочний пункт, а також вартості перевезення з кожного перевалочного пункту в кожний пункт призначення.

Математична модель завдання. Позначимо:

C_{ijl} – вартість перевезення одиниці 1-го виду вантажу з г-го пункту відправлення в у-й пункт призначення, $i = \overline{1.m},\ \ j = \overline{1,n},\ \ l = \overline{1,q};$

C_{ikl} – вартість перевезення одиниці l-го виду вантажу з і-го пункту відправлення в к-й перевалочний пункт, $i = \overline{1.m},\ \ k = \overline{1,p},\ \ l = \overline{1,q};$

C_{kjl} – вартість перевезення одиниці l-го виду вантажу з k-го перевалочного пункту в j-й пункт призначення, $k = \overline{1,p},\ \ j = \overline{1,n},\ \ l = \overline{1,q};$

a_{il} – запаси l-го виду вантажу в i-м пункті відправлення;

b_{jl} – потреба в l-м виді вантажу j-м пункті призначення;

c_{kl} – місткість k-го перевалочного пункту стосовно l-го виду вантажу;

x_{ijl} – кількість l-го виду вантажу, перевезеного з i-го пункту відправлення j-й пункт призначення;

y_{ikl} – кількість l-го виду вантажу, перевезеного з i-го пункту відправлення k -й перевалочний пункт;

z_{kil} – кількість l-го виду вантажу, перевезеного з k-то перевалочного пункту j-й пункт призначення.

Математична модель задачі з урахуванням вище приведених позначень може бути подана у вигляді задачі лінійного програмування:

$$y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q} c_{ijl} * x_{ijl} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} c_{ikl} * y_{ikl} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q} c_{kjl} * z_{kjl} \to \min_{x_{ijl}, y_{ikl}, z_{ikl} \in \Omega} \qquad (3.43)$$

$$\Omega: \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ijl} + \sum_{k=1}^{p} y_{ikl} \le a_{il}, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (3.44)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijl} + \sum_{k=1}^{p} z_{kjl} \ge b_{jl}, \quad j = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,q}; \qquad (3.45)$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ikl} \le c_{kl}, \qquad k = \overline{1,p}, \quad l = \overline{1,q}; \qquad (3.46)$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ik} = \sum_{j=1}^{n} z_{kj}, \quad k = \overline{1,p}, \quad l = \overline{1,q}; \qquad (3.47)$$

$$x_{ijl} \ge o; \quad y_{kjl} \ge o; \quad i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}, \ k = \overline{1,p}, \ l = \overline{1,q}; \qquad (3.48)$$

Математична модель задачі відрізняється від попередньої тільки там, що вона враховує різновид вантажів.

Транспортна задача про двоетапне перевезення вант декількох видів за запитами споживачів

Існує модифікація транспортної задачі двоетапного перевезення вантажів декількох видів, у якій кількість вантажу в пунктах відправлення не фіксована. Вона залежить від запитів споживачів.

Математична модель задачі. Позначимо:

c_{ijl} – вартість перевезення одиниці l-го виду вантажу з i-го пункту відправлення j-й пункт призначення, $i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1.n}, \ \ l = \overline{1,q};$

c_{ikl} – вартість перевезення одиниці l-го виду вантажу з i-го пункту відправлення в k-й перевалочний пункт, $i = \overline{1,m}, \; k = \overline{1,p}, \; l = \overline{1,p};$

c_{kjl} – вартість перевезення одиниці l-го виду вантажу з k-го перевалочного пункту в j-й пункт призначення, $k = \overline{1,p}, \; j = \overline{1,n}, \; l = \overline{1,q};$

t_{il} – витрати на виробництво l-го виду вантажу в 2-м пункті відправлення;

b_{jl} – потреба в l-м виді вантажу в j-м пункті призначення;

c_{kl} – місткість k-то перевалочного пункту стосовно l-го вантажу;

x_{ijl} – кількість l-го виду вантажу, перевезеного з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення;

y_{ikl} – кількість l-го виду вантажу, перевезеного з i-го пункту відправлення в k-й перевалочний пункт;

z_{kjl} – кількість l-го виду вантажу, перевезеного з k-го перевалочного пункту в j-й пункт призначення;

s_{il} – кількість виробленого l-го виду вантажу в i-м пункті відправлення.

Математичну модель задачі з урахуванням вище наведених значень можна подати у вигляді задачі лінійного програмування:

$$y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q} c_{ijl} * x_{ijl} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} c_{ikl} * y_{ikl} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q} c_{kjl} * z_{kjl} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{q} t_{il} s_{il} \to \min_{x_{ijl}, y_{ikl}, z_{kjl}, s_{it} \in \Omega} \tag{3.49}$$

$$\Omega: \; \sum_{j=1}^{n} x_{ijl} + \sum_{k=1}^{p} y_{ikl} \le s_{it}, \quad i = \overline{1,m}, \; l = \overline{1,q}; \tag{3.50}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijl} + \sum_{k=1}^{p} z_{kjl} \ge b_{jl}, \quad j = \overline{1,n}, \; l = \overline{1,q}; \tag{3.51}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ikl} \le c_{kl}, \quad k = \overline{1,p}, \; l = \overline{1,q}; \tag{3.52}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ik} = \sum_{j=1}^{n} z_{kj}, \quad k = \overline{1,p}. \; l = \overline{1,q}; \tag{3.53}$$

$$x_{ijl} \ge 0; \; y_{ikl} \ge 0; \; z_{kjl} \ge 0, \; s_{il} \ge 0, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}, \; k = \overline{1,p}, \; l = \overline{1,p}. \tag{3.54}$$

Цільова функція в математичній моделі (3.49) – (3.54) відрізняється від цільової функції (3.43) тільки тим, що враховує витрати на виробництво продукції (вантажу) в пунктах відправлення.

Транспортна задача про закриття підприємства

Змістовна постановка задачі. Виробниче об’єднання складається з n заводів і m складів. Задано потреби складів у продукті й вартості на перевезення продуктів з кожного заводу на кожний склад. Задані фіксовані вартості функціонування заводів і можливості заводів по виробництву продукту. Виробниче об’єднання розглядає можливість закриття одного або декількох заводів. Це повинно зменшити витрати на перевезення. Які заводи, якщо це доцільно, повинні бути закриті?

Математичне формулювання завдання. Позначимо:

c_{ij} – вартості перевезення j-го заводу на i-й склад;

d_i – потреби i-го складу в продукті, i=1,…,m;

a_j – можливість j-го заводу по виробництву продукту;

e_i – фіксована вартість функціонування j-го заводу;

z_j – булєве число, що показує, чи потрібно закрити j-й завод (значення 0), чи залишити його працювати (значення 1);

x_{ij} – кількість перевезеного товару з j-го заводу на i-й склад.

Тоді математична модель транспортної задачі про закриття заводу може бути подана у такому вигляді:

$$y = \sum_{j=1}^{n}\left(z_j * e_j + \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \right) \to \min_{z_j, x_{ij}, \in \Omega} \qquad (3.55)$$

$$\Omega: \ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le z_j a_j, \quad j = \overline{1,n}; \qquad (3.56)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge d_i, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (3.57)$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = \overline{1,m}; \quad j\overline{1,n}; \qquad (3.58)$$

$$z_j \in \{0,1\}; \quad j = \overline{1,n}, \qquad (3.59)$$

Тут цільова функція (3.55) визначає загальні витрати виробничої об’єднання на функціонування заводів і транспортування готової продукції на склади. Обмеження (3.56) визначає можливості заводів з виробництва продукції. Обмеження (3.57) визначають потреби складів у готовій продукції.

Тема 4 Теорія достовірності та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач

4.1 Теорія достовірності в математичному моделюванні.

4.2 Аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач.

Поняття: достовірність; авторизованість; авторитетність; інформативність; свідомість; кореляційне відношення; середня помилка; міра достовірності результатів моделювання; статистичний критерій Уилкоксона; статистичний критерій χ^2 – Пірсона; статистичний критерій Колмогорова-Смірнова; метод відношення правдоподібності; метод сценаріїв; модифікований критерій Колмогорова-Смірнова і Мізеса; статистична несуперечність; область допустимих рішень; критерій оптимальності.

Джерела: [2], [4], [7], [12], [18], [30], [43], [48], [52], [55], [56], [60], [66], [75], [80], [91].

4.1 Теорія достовірності в математичному моделюванні

Для розуміння теоретичних аспектів і прикладних напрямів використання теорії достовірності важливе значення має визначення поняття «достовірність».

Термін *достовірність* використовується в теорії ймовірності, логіці, гносеології та праві й визначається як характеристика обґрунтованого, доказового, безперечного і як синонім істини.

Існують ще декілька визначень поняття «достовірність».

Достовірність – це форма існування істини, яка обґрунтована будь-яким способом [91]. В словнику термінів логіки *достовірність* визначається як обґрунтованість, доказовість знання.

З позиції теорії ймовірності *достовірність* визначається як поняття, що відображає упевненість суб'єкта в правильності своєї оцінки ймовірності настання тієї або іншої події [55].

Теорія достовірності спрямована на вирішення проблеми визначення достовірності проведеного дослідження для подальшого використання його результатів. У цьому аспекті важливе значення має оцінка достовірності інформації, яка використовується в дослідженні, і оцінка достовірності результатів дослідження.

Оцінка достовірності інформації – це складане завдання. Слід зазначити, що, наприклад, експерт, який формулює висновки щодо економічних питань, може помилятись або свідомо вводити в оману. Тому необхідно не тільки оцінювати подану інформацію, а і її джерела. У зв'язку з цим вводиться такі терміни: авторизованість, авторитетність, інформативність та свідомість.

Авторизованість – це прив'язка наданих даних до визначеного джерела. Як джерело можуть бути використані посилання на сайт, книгу та ін.

Авторитетність – характеристика джерела даних. Якщо експерт не посилається на джерело, а говорить від першої особи, оцінюється авторитетність самого експерта.

Інформативність показує кількість нових даних у відповіді, які відносяться до питання.

Свідомість – показує, наскільки зрозуміло висвітлені питання.

При оцінці достовірності результатів дослідження необхідно враховувати те, що достовірним можна вважати результат, допустима погрішність якого не виходить за різницю між розрахунковим значенням моделі і отриманим значенням:

$$\left|\hat{y} - y_i\right| \le \varepsilon , \tag{4.1}$$

$\hat{y}$ – розрахункове значення моделі;

y_i – вихідне значення економічного показника моделі;

ε – величина допустимої погрішності.

Саме виникнення значної погрішності результатів дослідження призводить до зниження достовірності результатів моделювання.

У цілому погрішність виникає у зв'язку з:

1 неадекватністю моделі;

2 помилками розрахунку показників і параметрів моделі;

3 низькою якістю інформації, яка використовується для моделювання.

Для визначення факту наявності або відсутності помилок, використовують спосіб, який полягає в порівнянні рішення з аналітичними рішеннями. Цей спосіб використовується при наявності значної кількості різних аналітичних рішень. Проте, екстраполювати результати оцінки одного порівняння на всі можливі рішення й параметри моделі досить загрозливо, оскільки в кожному конкретному випадку можуть виникати відхилення, особливо при зміні параметрів.

Досить часто використовується спосіб, коли розрахунок одного і того ж параметру відбувається декількома способами. Цей спосіб дає можливість визначити погрішності практично для всіх комбінацій параметрів моделі.

Розглянемо приклад визначення достовірності на основі розробленої математичної моделі.

Розроблена лінійна модель виду

$$\frac{K'}{K} = 0{,}326 - 0{,}212xP_в - 0{,}08xPз\ , \qquad (4.2)$$

де $\frac{K'}{K}$ – індикатор розвитку (відношення нового капіталу до інвестованого капіталу);

$P_в$ – рівень витрат;

$P_з$ – рівень матеріальних запасів.

Встановіть достовірність розрахунків моделі (4.2) на основі встановленої погрішності. Вихідні статистичні дані представлених економічних показників представлено в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Вихідні статистичні дані показників моделі (4.2)

№ спостереження	$\frac{K'}{K}$	$Р_в$	$Р_з$
1	0,113	0,957	0,042
2	0,09	-1,052	0,057
3	0,092	1,047	0,052
4	0,083	1,075	0,066
5	0,069	1,113	0,09
6	0,067	1,123	0,099
7	0,069	1,118	0,094
8	0,08	1,085	0,071
9	0,081	1,09	0,066
10	0,009	1,354	0,137
11	0,016	1,33	0,127
12	0,024	1,302	0,118
13	0,031	1,269	0,113
14	0,048	1,198	0,108
15	0,05	1,193	0,104
16	0,055	1,174	0,099
17	0,057	1,165	0,099
18	0,063	1,146	0,094
19	0,063	1,141	0,094
20	0,074	1,113	0,075
21	0,075	1,108	0,071
22	0,08	1,09	0,066
23	0,082	1,08	0,061

Розв'язання

Визначення оцінок індикатора розвитку та помилки розрахунків моделі (4.2) представимо в таблиці 4.2

Таблиця 4.2 – Розрахунок оцінок індикатора розвитку та помилки

№ спосте-реження	$\frac{K'}{K}$	Параметри моделі (4.2)				$\sum\left(\left(\frac{K'}{K}\right)' - \frac{K'}{K}\right)$
		0,326	-(0,212 x $Р_в$)	-(0,08 x $Р_з$)	$\left(\frac{K'}{K}\right)'$	
1	0,113	0,326	-0,203	-0,009	0,114	0,001
2	0,09	0,326	-0,223	-0,012	0,091	0,001
3	0,092	0,326	-0,222	-0,011	0,093	0,001
4	0,083	0,326	-0,228	-0,014	0,084	0,001
5	0,069	0,326	-0,236	-0,019	0,071	0,002
6	0,067	0,326	-0,238	-0,021	0,067	0
7	0,069	0,326	-0,237	-0,020	0,069	0
8	0,08	0,326	-0,230	-0,015	0,081	0,001
9	0,081	0,326	-0,231	-0,014	0,081	0
10	0,009	0,326	-0,287	-0,029	0,01	0,001
11	0,016	0,326	-0,282	-0,027	0,017	0,001
12	0,024	0,326	-0,276	-0,025	0,025	0,001
13	0,031	0,326	-0,269	-0,024	0,033	0,002
14	0,048	0,326	-0,254	-0,023	0,049	0,001
15	0,05	0,326	-0,253	-0,022	0,051	0,001
16	0,055	0,326	-0,249	-0,021	0,056	0,001
17	0,057	0,326	-0,247	-0,021	0,058	0,001
18	0,063	0,326	-0,243	-0,020	0,063	0
19	0,063	0,326	-0,242	-0,020	0,064	0,001
20	0,074	0,326	-0,236	-0,016	0,074	0
21	0,075	0,326	-0,235	-0,015	0,076	0,001
22	0,08	0,326	-0,231	-0,014	0,081	0,001
23	0,082	0,326	-0,229	-0,013	0,084	0,002
$\sum$	1,471	х	х	х	1,492	0,021

В результаті розрахунків встановлено, що помилка розрахунків складає 0,021 тис. грн./тис. грн. або 2,1%. Таке значення свідчить про високий рівень достовірності розрахунків параметрів лінійної моделі, оскільки значення помилки наближається до нуля.

З теорії статистики відомо, якщо рівень помилки складає від 0 до 5%, то результати розрахунків можна вважати достовірними.

Слід вказати, що для визначення ступеня достовірності результатів математичного дослідження необхідно для кожної відносної або середньої величини розрахувати відповідну *середню помилку*.

Середня помилка дозволяє визначити межі, в яких з відповідною ймовірністю може знаходиться значення показників розробленої моделі. При оцінці достовірності визначається і середня помилка різниці між двома середніми або відносними величинами:

$$M_{ррізниці} = \sqrt{M_i^2 + M_2^2}\,, \tag{4.3}$$

де M_i^2, M_2^2 – квадрати середніх помилок.

Якщо різниця середніх величин більше середньої помилки різниці в 2,5-3,0 рази, то з відповідною ймовірністю можна стверджувати, що різниця середніх (відносних) величин не випадкова, а залежить від будь-якої визначеної причини.

Для встановлення достовірності розрахунків необхідно оцінити середню помилку розрахунків, а також граничну помилку розрахунків. Це потрібно для виявлення довірчих границь.

Довірчі границі визначаються [18]:

$$\hat{y} - \varepsilon_{гy} \le y \le \hat{y} + \varepsilon_{гy}\,, \tag{4.4}$$

де $\hat{y}$ – розрахункові значення економічного показника лінійної моделі;

$\varepsilon_{гy}$ – граничне значення помилки розрахунків;

y – вихідні значення економічного показника.

Для визначення граничної помилки розрахунків використовують наступне співвідношення:

$$\varepsilon_{гy} = 1{,}96 \cdot \bar{\varepsilon}\,, \tag{4.5}$$

де $\bar{\varepsilon}$ – середня помилка розрахунків.

Середня помилка розрахунків визначається за формулою:

$$\bar{\varepsilon} = \sigma_y \sqrt{1 - \eta_{y/x}^{\;2}}\,; \tag{4.6}$$

де σ_y – середнє квадратичне відхилення показника;

$\eta_{y/x}$ – емпіричне кореляційне відношення.

Для оцінки зв'язку між змінними використовується *емпіричне кореляційне відношення* ($\eta^2_{y/x}$), яке є часткою дисперсії функції *у* за рахунок впливу аргументу *х*. У даному випадку загальна (повна) дисперсія розкладається на дві частини – дисперсію усередині кожного інтервалу зміни функції $\sigma^2_{y/x}$, яка не залежить від впливу x, і дисперсію середніх значень функції $\delta \frac{2}{y}$, яка викликана впливом аргументу, тобто

$$\sigma^2_y = \sigma^2_{y/x} + \delta \frac{2}{y}. \qquad (4.7)$$

Звідси формула для оцінки зв'язку між змінними має вигляд

$$\eta^2_{y/x} = \frac{\sigma^2_{\bar{y}}}{\sigma^2_y} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{y}_i - \bar{y}\right)^2}{\sigma^2_y}, \qquad (4.8)$$

а в разі згрупованих даних

$$\eta^2_{y/x} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{y}_i - \bar{y}\right)^2 m_i}{\sigma^2_y}, \qquad (4.9)$$

де $\tilde{y}_i$ – розрахункове значення функції;

$\bar{y}$ – середнє значення функції за вибіркою;

n – обсяг вибірки;

m_i – кількість спостережень y в кожному інтервалі зміни.

Кореляційне відношення не залежить від одиниць вимірювання змінних, що вивчаються. Воно показує, яку частину загальної дисперсії σ^2_y можна віднести за рахунок зміни аргументу на одну σ^2_x.

При цьому характеристика $\eta^2_{y/x}$ тим точніше визначає частку впливу x на загальну дисперсію у, чим менше варіюється залишкова дисперсія $\sigma^2_{y/x}$ при кожному x. Якщо $\eta_{y/x} = 1$, то має місце функціональна залежність y від x. Якщо $\eta_{y/x} = 0$ – y кореляційно не залежить від x.

Слід відзначити, що результати моделювання також вважаються адекватними або достовірними, якщо обґрунтовано, що вибірки реальних значень показників системи і отриманих результатів мають однакові закони розподілу. Тобто, спільні функції розподілу векторів параметрів, які характеризують умови функціонування системи і моделі, і векторів вихідних характеристик дорівнюють один одному.

Для визначення міри різниці між функціями розподілу вводиться *міра достовірності результатів моделювання* або міра відмінності моделі або системи.

Розрахунок міри відмінності не складає особливих труднощів в трьох випадках. Перший випадок, коли повністю відомі закони розподілу показників ефективності, по яких порівнюються система і модель, другий — коли відомі закони розподілу показників системи і моделі до параметрів, третій — якщо є достатній обсяг вибірки результатів моделювання.

Для всіх трьох випадків існують класичні методи оцінки достовірності результатів моделювання. Так, для одновимірного показника оцінка достовірності результатів моделювання може проводитись за допомогою *статистичних критеріїв Уилкоксона, Пірсона, Колмогорова-Смірнова, метода відношення правдоподібності* та інш.

Для оцінки достовірності результатів моделювання по векторному показнику можна скористатися *методом відношення правдоподібності або розпізнавальними системами* визначення ступеня близькості класів, що розпізнають. В якості розпізнавальних класів використовуються генеральні сукупності векторів-показників системи $\{\overleftrightarrow{y}\}_c$ і моделі $\{\overleftrightarrow{y}\}_м$, які описуються щільністю ймовірності P_c і $P_м$.

Сутність класичних методів оцінки достовірності зводиться до перевірки гіпотези про розбіжність результатів моделювання і вихідних даних для заданого рівня значущості, на якому перевіряється гіпотеза.

Розглянуті методи оцінки достовірності припускають наявність вибірок (статистики) результатів моделі і системи, оскільки по ним можна визначити оцінки функцій розподілу показників моделі і системи.

Слід вказати і на те, що результати математичного моделювання подібні результатам реальних подій на рівні випадкових ймовірних подій, то можна стверджувати, що кількісні результати моделювання подій в цілому є достовірними.

Для дослідження достовірності результатів моделювання використовують *методи сценаріїв* за вибірками. Причому сценарій складається таким чином, щоб умови здійснення кожної ймовірносної події в моделі співпадали з умовами, в яких проводились дослідження.

Для оцінки достовірності результатів моделювання за малою вибіркою може бути використана методика перевірки подібності теоретичної і емпіричної функцій розподілу, яка заснована на використанні *модифікованих критеріїв Колмогорова-Смірнова і Мізеса* [60]. Проте ці методи використовуються для незначного класу завдань.

Існують і інші підходи до вирішення задачі оцінки достовірності по малій вибірці, відповідно до якого за наявності малої вибірки доцільно говорити не про оцінку достовірності результатів моделювання, а про оцінку статистичної несуперечності результатів дослідження результатам моделювання.

При цьому під *статистичною несуперечністю* слід розуміти несуперечність результатів дослідження твердженню, що їх значення на заданому рівні значущості можуть розглядатися як ті що належать до тієї ж генеральної сукупності, що і вибірка результатів моделювання.

Якщо реалізації дослідження процесів не відповідають закону розподілу результатів моделювання (змінюють його параметри), то вони належать до іншої генеральної сукупності.

Для перевірки достовірності результатів моделювання процесів можна використати *перевірку на статистичну еквівалентність моделей елементарних подій*. Метод дозволяє оцінити достовірність результатів елементарних подій моделі за статистикою, яка отримана за спеціальними моделями елементарних подій [60].

Таким чином, представлені методики оцінки достовірності інформації та результатів дослідження є підґрунтям для отримання моделі, яка віддзеркалює реальні події і може бути використана для прийняття ефективних управлінських рішень.

4.2 Аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач

Аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач спрямований на прийняття оптимального рішення. Лінійна оптимізаційна модель включає систему обмежень, цільову функцію, області допустимих рішень, критерії оптимальності.

Цільова функція в загальному вигляді складається з трьох елементів:

–змінних, які управляються;

–змінних, які не управляються;

–форми функції (виду залежності між змінними).

Область допустимих рішень – це область, в межах якої здійснюється вибір рішень У задачах вона обмежена наявними ресурсами і умовами, які записуються у вигляді системи обмежень, які складаються із рівнянь.

Критерії оптимальності – це показник, який визначається за допомогою цільової функції через інші показники. Одному і тому ж критерію оптимальності можуть відповідати декілька різних, але еквівалентних цільових функцій. Моделі з однією і тією ж системою обмежень можуть мати різні критерії оптимальності й різні цільові функції.

Для здійснення аналізу лінійних моделей необхідно побудувати математичну модель методика розробки якої полягає в тому, щоб сутність задачі представити математично, використовуючи різні символи, змінні й постійні величини, індекси та інші символи.

Всі умови задачі записують у вигляді рівнянь. Тому, в першу чергу, необхідно визначити систему змінних, які можуть для конкретної задачі висвітлювати вихідні значення показників.

Слід відзначити, що будь-яку оптимізаційну задачу лінійного програмування можна привести до задач лінійного програмування в канонічній формі. Для цього в загальному випадку необхідно зводити задачу максимізації до задачі мінімізації, переходити від обмежень нерівностей до обмежень рівнянь і замінювати змінні, які не підходять умовам невід'ємності.

Правило приведення оптимізаційної задачі лінійного програмування до канонічного вигляду полягає в наступному:

1) якщо в початковій задачі вимагається визначити максимум лінійної функції, то слід змінити знак і шукати мінімум цієї функції;

2) якщо в обмеженнях права частина негативна, то слід помножити це обмеження на -1;

3) якщо серед обмежень є нерівності, то шляхом введення додаткових від'ємних змінних вони перетворяться в рівняння;

4) якщо деяка змінна x_i не має обмежень по знаку, то вона замінюється (в цільовій функції і у всіх обмеженнях) різницею між двома новими від'ємними змінними.

Складність вирішення оптимізаційних задач лінійного програмування, побудови відповідних моделей та їх аналізу залежить:

–від виду функціональних залежностей, тобто від зв'язку функції з елементами рішення;

–від розмірності задачі, тобто від кількості елементів рішення;

–від виду і кількості обмежень, які накладаються на елементи рішень.

При аналізі лінійних оптимізаційних моделей важливим етапом є *інтерпретація* отриманих результатів. Саме на цьому етапі проявляється кваліфікація спеціалісту з оцінки землі та нерухомого майна. Інтерпретація полягає в тому, що на базі розробленої лінійної оптимізаційної моделі визначаються зв'язки між показниками, оптимізаційні рішення проблем, пропонуються управлінські рішення.

Тема 5 Цілочислове програмування

5.1 Основні поняття і сутність цілочислового програмування.

5.2 Алгоритм розв'язання задач цілочислового програмування.

5.3 Метод Гоморі.

5.4 Метод віток і меж.

5.5 Цілочислова транспортна задача.

5.6 Задача цілочислового лінійного програмування.

Поняття: цілочислове програмування; методи відтикання; комбінаторні методи; метод Р. Гомори; метод віток і меж; велика ітерація; мала ітерація.

Джерела: [4], [14], [23], [26], [31], [51], [61], [63].

5.1 Основні поняття і сутність цілочислового програмування

Цілочислове програмування – це різновид задач лінійного програмування, в якому змінні та отримані результати повинні бути цілими числами.

Задачі цілочислового програмування можуть бути лінійними, якщо обмеження і цільова функція задачі є лінійною залежністю, або нелінійними – якщо залежності будуть мати нелінійну форму.

Слід вказати, що широке використання задач цілочислового програмування полягає в тому, що необхідно отримувати цілочислове рішення. Цілочислове програмування виникло в 50-60-ті роки 20 століття на основі робіт Дж. Данцига і Р. Гоморі.

Задача цілочислового програмування записується так :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max(\min)\ , \tag{5.1}$$

за умов того, що x_i є цілим додатним числом.

Для знаходження оптимального вирішення цілочислових задач застосовують відповідні методи. Найпростішим методом вирішення цілочислової задачі є знаходження її оптимального роз в'язку як задачі, що має лише неперервні змінні, з подальші округленням останніх.

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислової програмування застосовують дві основні групи методів:

– методи відтинання;

– комбінаторні методи.

Основою методів відтинання є ідея поступового «звуження» області допустимих напрямів вирішення задачі. Пошук цілочислового оптимального вирішення задачі починається з розв'язування задачі з так званими послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисельності змінних. Далі вводять у модель спеціальні додаткові обмеження, що враховують цілочисельність змінних, багатокутник допустимих рішень послабленої задачі поступово зменшується до отримання змінних оптимального вирішення до отримання цілочислових значень.

До цієї групи належать:

–методи розв’язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);

–методи розв’язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на повному переборі всіх допустимих цілочислових рішень, тобто вони реалізують процедуру цілеспрямованого перебору, під час якої розглядається лише частина розв’язків (досить невелика), а решта враховується одним зі спеціальних методів. Найпоширенішим у цій групі методів є метод віток і меж.

Рекомендації по формулюванню і вирішенню задач цілочислового програмування:

1 Кількість цілочисельних змінних зменшувати наскільки можливо. Наприклад, цілочислові змінні, значення яких повинно бути не менше 20, можна розглядати як безперервні.

2 На відміну від загальних задач лінійного програмування, додавання нових обмежень, особливо включених цілочислових змінних, звичайно зменшують час вирішення задач цілочислового програмування.

3 Якщо немає необхідності в знаходженні точного оптимального цілочислового рішення, відмінного від безперервного рішення, наприклад, 3%. Тоді реалізацію методу гілок і меж для задачі максимізації можна закінчувати, якщо відношення різниці між верхньої і нижньої меж до верхньої межі менше 0,03.

5.2 Алгоритм розв’язання задач цілочислового програмування

Алгоритм розв’язування задач цілочислового програмування наступний:

1 Розв’язується задача лінійного програмування без обмежень на цілочисельність, наприклад, симплекс-методом.

2 Якщо оптимальне рішення задачі лінійного програмування нецілочисельне, то проводиться «велика ітерація». Будується лінійне обмеження, якому задовольняє будь-яке цілочисельне рішення задачі і не задовольняє отримане оптимальне нецілочисельне значення. Геометрично це

означає – провести перетин (гіперплощина), який відсікав би нецілочислову вершину, не зачіпаючи решту цілочислових крапок. Такий перетин називають *правильним*. Правильний перетин повинен задовольняти наступним умовам:

– умова відсікання: оптимальне рішення задачі лінійного програмування не задовольняє умові відсікання;

– умова правильності: всі цілочислові рішення задачі задовольняють умові відсікання.

Оскільки для початкової задачі додаткове обмеження (відсікання) даватиме неприпустиме базисне рішення, необхідно провести «малі ітерації» для отримання оптимального рішення. Якщо отримане оптимальне рішення нецілочисельне, то проводиться наступне відсікання. В іншому випадку пошук завершений.

Р. Гоморі запропонував ідею формування додаткових обмежень, яка призводить до вирішення задач цілочислового програмування за кінцеве число кроків.

5.3 Метод Гоморі

Перший алгоритм Р. Гоморі полягає в наступному:

Хай задана повністю цілочислова лінійна задача:

$$\min z(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \quad j = 1,\dots n, \tag{5.2}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,\dots m, \\ x_j \ge 0, \\ x_j \in Z. \end{cases} \tag{5.3}$$

Нехай в результаті лінійних операцій над рівняннями системи (5.3) отримано нове лінійне рівняння

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b, \tag{5.4}$$

Цілою частиною числа a називається найбільше ціле число $[a]$, яке не перевищуюче a. Наприклад $[4{,}25] = 4$; $[-4{,}25] = -5$.

Замінивши в рівнянні (5.4) всі коефіцієнти a_j їх цілими частинами, отримаємо:

$$\sum_{j=1}^{n} [a_j] x_j \le b, \tag{5.5}$$

Якщо всі x_k є цілочисловими, то ліва частина рівняння (5.5) теж цілочислова. Рівняння (5.5) можна посилити таким чином:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[a_j\right] x_k \leq [b], \tag{5.6}$$

Це обмеження-нерівність (4.6) можна перетворити в обмеження-рівняння шляхом введення додаткової цілочислової і від'ємної змінної x:

$$\sum_{j=1}^{n} \left[a_j\right] x_k + x = [b], \tag{5.7}$$

Віднімемо (5.4) з (5.7). Враховуючи, що $a = [a] + \{a\}$ отримаємо:

$$x = -\{b\} - (\sum_{j=1}^{n} - \{a_j\} x_j), \tag{5.8}$$

В першому методі Гоморі всі обмеження формуються відповідно до рівнянь (5.8) – це і є відсікання нецілочислових крапок.

Фактично, (5.8) – рівняння *відсікаючої гіперплощини*. Після рішення задачі лінійного програмування одержуємо деяке базисне рішення, в якому деякі змінні можуть бути цілочисловими, а інші – нецілочисловими.

Для нецілочислових базисних змінних будується відсікання по першому алгоритму Гоморі, послідовно, для кожної з них. Якщо нецілочислових змінних декілька, то краще вибрати ту, у якої більше дробова частина.

Якщо рівняння вибраної базисної змінної має вигляд

$$x_{баз} = b_i - (\sum a_{ij} x_j), \tag{5.9}$$

то рівняння додаткового обмеження-відсікання виглядає таким чином:

$$x = -\{b_i\} - \left(\sum - \{a_{ij}\} x_j\right). \tag{5.10}$$

Побудова відсікання – «велика ітерація». Далі для звуженої області проводяться «малі ітерації».

Вирішення задач цілочислового лінійного програмування можуть бути відсутні, якщо:

1 цільова функція є необмеженою знизу, тобто як початкова нецілочислова, так і цілочислова задача лінійного програмування не мають рішення;

2 початкова задача лінійного програмування має рішення, а цілочислова не має. В симплекс-таблиці це видно таким чином: в стовпці вільних членів в деякому рядку стоїть неціле число, а вся решта коефіцієнтів цього рядка – цілі числа.

Збіжність даного алгоритму достатньо повільна. Для задачі з 10-ма змінними необхідно провести порядку 1000 ітерацій.

Перебір можливих цілих точок допустимої області не зменшує обчислень, оскільки їх звичайно достатньо багато.

Округлення нецілочислового рішення до найближчого цілого може дати крапку, що не належить області.

Другий алгоритм Р. Гоморі:

Застосовується для вирішення як повністю так і не повністю цілочислових задач. Багато індексів I при змінних x_j розбивається на дві неперехресні підмножини I_1 і I_2 так, що:

при $j \in I_1$, $x_j \in Z$ (x_j – цілочислові);

при $j \in I_2$, $x_j \in R$ (x_j – нецілочислові).

Як і в першому алгоритмі Гоморі, спочатку знаходиться рішення задачі лінійного програмування без обмежень на цілочисельність, і далі проводяться відсікання за допомогою введення додаткових обмежень.

Припустимо, що після розв'язання задачі лінійного програмування отримана деяка базисна змінна, яка повинна бути цілочисловою:

$$x_5 = b_i - (\sum_j a_{ij} x_j), \tag{5.11}$$

де $-x_j$ вільна змінна.

Тоді по другому алгоритму Гоморі відсікання будується таким чином:

$$x_5 = -\{b_i\} - (\sum_j -\alpha_{ij} x_j), \tag{5.12}$$

де
$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} a_{ij}, & a_{ij} \ge 0 \\ \dfrac{\{b_i\}}{1-\{b_i\}}|a_{ij}|, & a_{ij} < 0 \end{array}\right\} x_j \in R; \\ \\ \left.\begin{array}{ll} \{a_{ij}\}, & \{a_{ij}\} \le \{b_i\} \\ \dfrac{\{b_i\}}{1-\{b_i\}}(1-\{a_{ij}\}), & \{a_{ij}\} > \{b_i\} \end{array}\right\} x_j \in Z. \end{cases} \tag{5.13}$$

5.4 Метод віток і меж

Метод віток і меж використовується як до повністю цілочислових задач, так і до частково цілочислових задач.

Спочатку розв'язується ослаблена задача без обмежень на цілочисельність x_k повинна бути цілочисловою:

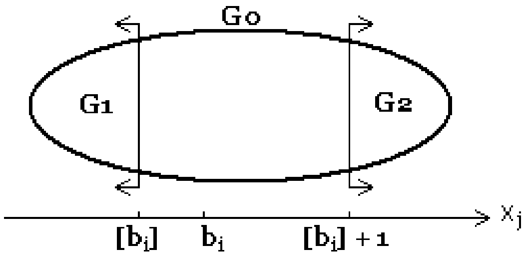
$$x_k = b_k - (\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j). \tag{5.14}$$

Тоді радіус допустимих рішень G_0 розбивається на дві підмножини G_1 і G_2 таким чином, що:

$$G_1: \; x_j \le [b_i]$$

$$G_2: \; x_j \ge [b_i]+1 \,. \tag{5.15}$$

Таким чином виключається інтервал $[b_i]+1 > x_j > [b_i]$, який не містить цілочислових точок.



Початкова задача розбивається на дві підзадачі. В кожній з областей G_1, G_2 знаходяться оптимальні точки, і, якщо вони не задовольняють умові цілочисельності, знову здійснюється розгалуження.

Якщо отриманий оптимум виявляється допустимим (цілочисельним) для даної задачі, він фіксується і наголошується як найкращий. При цьому немає необхідності продовжувати галуження цієї підзадачі, оскільки поліпшити це рішення не вдасться.

Як тільки отримане допустиме (цілочислове) рішення іншої підзадачі виявляється краще, воно фіксується замість попереднього.

Процес галуження продовжується до тих пір, поки кожна підзадача не призведе до цілочислового рішення, або не буде встановлена неможливість поліпшення наявного рішення. Висновок про необхідність подальшого розбиття задачі робиться на основі введення межі.

Як межа використовується значення цільової функції отриманого допустимого цілочислового рішення. Якщо будь-яке оптимальне рішення підзадачі забезпечує гірше значення цільової функції, ніж наявне рішення (прийняте як межа), то цю підзадачу розглядати далі не слід.

Алгоритм методу віток і меж є ітеративним.

t – номер ітерації; z_t – оцінка (для задачі мінімізації $z_0 = \infty$).

При використанні алгоритму потрібне вирішення послідовності задач лінійного програмування без обмежень на цілочисельність. Послідовність задач, що підлягають вирішенню називається *основним списком*.

1 Якщо основний список порожній – закінчення алгоритму, інакше – вибирають задачу з основного списку і знаходять її оптимальне рішення.

2 Якщо вибрана задача не має рішення, або її оптимальне рішення гірше прийнятої оцінки, то необхідно виключити цю задачу із списку і перейти до п. 1, інакше – до п. 3.

3 Якщо отримане рішення цілочислове – сформувати нову оцінку z_{t+1}, яка відповідає якнайкращому оптимальному рішенню поточної задачі. Перехід до п. 1. Якщо рішення поточної задачі нецілочислове, то оцінка залишається у вигляді: $z_{t+1} = z_t$.

4 Вибирається одна із змінних x_k, яка за умовою повинна бути цілочисловою. Проводиться розгалуження, тобто в основний список додається дві підзадачі, для яких зберігаються ті ж обмеження, але для однієї:

$$x_k \le [b_k], \tag{5.16}$$

а для іншої:

$$x_k \ge [b_k] + 1. \tag{5.17}$$

Перехід до п. 1.

Слід відзначити, що вибір змінної може бути довільним (за збільшенням номерів) або визначатися таким чином:

1 представлена змінна є важливим рішенням, що приймається в рамках розробленої моделі;

2 коефіцієнт в цільовій функції істотно перевершує всі інші.

5.5 Цілочислова транспортна задача

В попередньому розділі розглядались математичні аспекти і особливості вирішення транспортних задач. Одним з видів цих задач є цілочислова транспортна задач, яка має цілочисловий характер. *Цілочислові змінні мають місце*, коли перевезений вантаж являє собою лічильну множину великих заготівель або комплектуючих, неподільних продуктів виробництва, упакованих сипучих матеріалів і т.п. Об'єм такого вантажу характеризується розміром, що виражається в штуках, пакунках, партіях і т.п.

Тоді математична постановка транспортної задачі планування перевезень набуває вигляду:

$$y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \xrightarrow[x_{ij} \in \Omega]{} min \tag{5.18}$$

$$\Omega : f_i = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \ , \ \overline{j = 1, n;} \tag{5.19}$$

$$f_{n+i} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \overline{i = 1, m;} \tag{5.20}$$

$$x_{ij} \ge 0; \overline{i = 1, m;} \ \overline{j = 1, n.} \tag{5.21}$$

$$x_{ij} = int; \overline{i = 1, m;} \ \overline{j = 1, n.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.22)$$

Математична модель цілочислової транспортної задачі (5.18) – (5.22) відрізняється від раніше розглянутих математичних моделей транспортної задачі додатковим обмеженням на цілочисельність невідомих x_{ij} (5.22). Це потребує накладення обмеження цілочисельності на функції $f_1, f_2, \dots, f_{n+m\dots}$

Необхідно зауважити, що в загальному випадку умова цілочисельності може накладатися і на значення функції цілі y.

5.6 Задача цілочислового лінійного програмування

Розглянемо ще декілька задач, математична модель яких відповідає цілочисловій задачі лінійного програмування.

Оптимальне вирішення нижче приведених задач можна одержати методом відсікання введення в задачу додаткових обмежень у вигляді нерівностей.

Задача про розподіл вантажного флоту:

Змістовна постановка завдання. Нехай вантажний флот має у своєму складі судна n типів. Кількість суден типу j дорівнює q_i, а витрати при використанні одного судна типу j у планованому періоді складає $c_j, j = 1,2,...,n...$ Кожне судно має вантажні ємкості m типів (трюми, палуби, танки і т.п.). Вантажопідйомність ємкості i на судні типу j дорівнює $d_j, j = 1,2,...,m...$ Перевезенню підлягають p видів вантажу. Вантаж виду k є в кількості а $a_k, k = 1,2,...p...$ Потрібно вибрати найбільш економічний комплекс транспортних засобів для перевезення вантажу.

Математична модель задачі.

Позначимо:

x_i – кількість суден j-го типу, $j = 1,2,...,n;$

z_{ik} – кількість вантажу виду *к,* що підлягає завантаженню в ємкість $i, k = 1,2,..., p...$

Тоді математична модель задачі про розподіл вантажного флоту має вигляд:

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min_{x_j \in \Omega} \tag{5.23}$$

$$\Omega: \quad \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j - \sum_{k=1}^{p} z_{ik} \geq o, \quad i = \overline{1,m}; \tag{5.24}$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ik} = a_{ik}, \quad k = \overline{1,p}; \tag{5.25}$$

$$0 \leq x_j \leq q_j; \quad j = \overline{1,n}; \tag{5.26}$$

$$x_j = \text{int}, \quad j = \overline{1,.n}; \tag{5.27}$$

$$z_{ik} \geq o; \; i = \overline{1,m}; \; k = \overline{1,p} \tag{5.28}$$

Тут обмеження (5.24) показує, що загальна кількість вантажу, яка завантажена в ємкості кожного типу, не повинна перевищувати сумарну вантажопідйомність цих ємкостей у всіх судах, а обмеження (5.25) говорить про те, що перевезення усіх вантажів повинно бути повністю здійснено.

Задача про розвезення вантажу

Змістовна постановка задачі. Нехай деяка центральна база постачає продукцію (її можна вважати однорідною) на *m* складів. Розвезення продукції на склади здійснюються однією вантажівкою, причому кожний склад одержує своє замовлення в один прийом – вантажопідйомність вантажівки для цього достатня. Вантажівка може одночасно взяти вантаж, що відповідає не більше ніж *к* замовленням. Вантажівка може об’їжджати склади за визначеними *г* маршрутами. Один і той самий I склад може знаходитися на різних маршрутах.

Нехай для кожного складу відома функція витрат, що залежна, наприклад, від розміру замовлення. Потрібно скласти графік розвезень, що забезпечує всіх клієнтів і мінімізує сумарні витрати. Час доставки не враховується. Передбачається, що всі операції по доставці гарантоване можуть бути здійснені протягом деякого періоду часу, що влаштовуєш всіх споживачів.

Під способом розвезення будемо розуміти будь-яку припустиму комбінацію виконання замовлень. Він являє собою m-мірний стовпець, 1-й компонент якого дорівнює одиниці, якщо і-й замовлення в цьому способі задовольняється, і нулю - у противному разі. Для будь-якої реальної задачі при невеликих значеннях *т, к* і *г* можна фактично виписати всі такі способи розвезення. Число *п* цих способів буде залежати неї тільки від перерахованих параметрів, але і від числа складів на кожному маршруті, об’єму замовлень і т.д. Кожному *j* — му способу розвезення відповідають витрати *Cj.*

Нехай при даних конкретних умовах задачі сформована матриць A = $[a_{ij}]$ способів розвезення, що складається з нулів і одиниць. Стовпці цієї матриці являють собою описані вище способи розвезення, тобто $a_{ij=1}$, якщо в j-м способі і -є замовлення задовольняється, і $a_{ij} = 0$ у противному разі. Тепер завдання полягає у виборі найбільш економічної комбінації цих способів.

Математична модель задачі. Введемо змінні: x_j в рівні 1, якщо j спосіб розвезення реалізується, і рівні 0 – у противному разі. Тоді математична модель задачі набуває вигляду:

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min_{x_j \in \Omega} ; \qquad (5.29)$$

$$\Omega: \quad \sum^{n} j = 1 a_{ij} x_j = 1, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (5.30)$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = \overline{1,n}; \qquad (5.31)$$

$$a_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = \overline{1,m}. \qquad (5.32)$$

Умова (5.30) означає, що всі замовлення повинні бути задоволені тільки один раз.

Тема 6 Нелінійні оптимізаційні моделі в землеустрої

6.1 Сутність нелінійних зв’язків в землеустрої

6.2 Методи розробки нелінійних оптимізаційних моделей в землеустрої

Поняття: система; емерджентність, детермінована система; стохастична система; динамічна система; нелінійність; траєкторія; аттрактор; бифуркація; нелінійне програмування; цільова функція; оптимальний план; фрактал; графічний метод; метод Лагранжа.

Джерела: [5], [7], [14], [23], [29], [49].

6.1 Сутність нелінійних зв’язків в землеустрої

Сучасна наука має в розпорядженні широкий арсенал методів, серед яких особливе значення має математичне моделювання. До останнього часу в дослідженнях прикладного характеру і в управлінській діяльності використовувались лінійні оптимізаційні моделі. При достатньо високому рівні технологічної культури і надійній інформаційній базі реалізація лінійних математичних моделей забезпечує більш високу ефективність в порівнянні з традиційними методами прийняття управлінських рішень. Проте дослідження останніх років показали, що існує клас задач, де застосування лінійних оптимізаційних моделей або некоректно, або неможливо, але в той же час вони ефективно розв’язуються на основі нелінійних математичних моделей.

При визначенні нелінійних зв’язків важливе значення має категорія системи. *Система* (від грецького – складене з частин, з’єднання) – це відносно відособлена і впорядкована сукупність взаємодіючих елементів, здатних реалізувати певні функції.

Важливою якістю будь-якої системи є *емерджентність* – наявність таких властивостей, які не властиві жодному з елементів, що входять в систему.

Системи бувають детерміновані і стохастичні. Під *детермінованою системою* розуміється система, в якій зв’язки між елементами і подіями строго і однозначно визначені, тобто її стан в майбутньому однозначно визначається станом на відповідний час.

Системи, в яких зв'язки між елементами і подіями носять ймовірносний характер – називаються *стохастичними*.

Слід зазначити, що більшість процесів мають ймовірносний характер і можуть бути описані нелінійними моделями. В цілому, в детерміновані економічні процеси введення незначної нелінійності призводить до непередбачуваного ряду подій.

При дослідженні нелінійних зв'язків необхідно враховувати динаміку системи. *Динамічна система* – система, в якій перехід з одного стану в інший здійснюється не миттєво, а протягом деякого часу, тобто процес переходу можна спостерігати і описати.

Найбільший інтерес з погляду управління представляють закономірності поведінки складних динамічних систем. Системи, які мають розгалужену структуру і велику кількість взаємозв'язаних і взаємодіючих елементів, що забезпечують виконання будь-якої складної функції, називаються *складними*. Одна з важливих властивостей складних систем – *нелінійність*.

Якщо розглядаємо нестійкий режим системи, то порушивши його, отримаємо деяке відхилення від початкового положення. Відхилення наростатиме до тих пір, поки не вступить в дію механізм нелінійного обмеження даного процесу. З фізичної точки зору це можна пояснити так: наростання амплітуди не може відбуватися до безкінечності, через обмеженість енергетичних ресурсів системи це наростання повинно припинитися або змінитися зменшенням амплітуди відхилення. Будь-який новий режим повинен мати кінцеву амплітуду, і управляють цими процесами нелінійні закони. Властивості нелінійної системи безпосередньо залежать від її стану.

При проведенні аналізу нелінійних динамічних систем необхідно враховувати поняття «фазовий простір» і «траєкторія». Багато станів динамічної системи називають *фазовим простором*, а траєкторію руху в цьому просторі з деякого початкового стану – *фазовою траєкторією*. Найважливіша характеристика цього простору – його розмірність – число величин, які необхідно задати для визначення стану системи.

Траєкторія – крива в просторі параметрів, яку описує точка при своєму русі в часі.

Найважливіше поняття в теорії нелінійних динамічних систем – це поняття *грубості* (або структурної стійкості). Якщо при малих змінах параметрів системи вид фазових змін нелінійної системи залишається незмінним, то таку системи називають *грубою*.

При аналізі динаміки нелінійних моделей враховують поняття *«аттрактор»* – множина точок або підпростір у фазовому просторі, до якого наближається траєкторія після загасання перехідних процесів. Класичними прикладами аттракторів в динаміці можуть служити точки динамічної рівноваги, нерухомі точки відображень, або граничні цикли. Динамічні системи, які володіють аттракторами називають *дисипативними*.

При моделюванні нелінійних процесів динаміки необхідно враховувати теорії прогнозу, катастроф и бифуркації. *Теорія катастроф* полягає в відстеженні змін на основі розуміння коли, чому і як відбуваються зміни. Для цих процесів характерні раптові стрибкоподібні зміни, а не поступовий плавний розвиток.

Основи теорії бифуркацій динамічних систем були закладені в працях великого французького вченого Анрі Пуанкаре. *Бифуркація* – зміна характеру руху динамічної системи на великому тимчасовому інтервалі при зміні одного або декількох параметрів. Ті значення параметрів, при яких змінюються якісні або топологічні властивості руху, називаються *критичними або бифуркаційними значеннями*. Хаос в динаміці означає чутливість динамічної еволюції до змін початкових умов.

При вивченні нелінійних об’єктів необхідно враховувати поняття *фракталу*. Будь-який нелінійний процес призводить до розгалуження, в якому система може вибрати ту або іншу гілку. Будь-яка найменша неточність в початкових умовах може пізніше дуже сильно вплинути на подальший рух.

В кожний окремий момент причинний зв’язок зберігається, але після декількох галужень його вже не видно.

Поняття *фракталу* розроблялося Бенуа Б. Мандельбротом як альтернатива евклідовій геометрії, що претендувала на найбільш відповідний опис об’єктів природи. Його істотною межею була невичерпність найдрібніших деталей в різних масштабах вимірювання.

6.2 Методи розробки нелінійних оптимізаційних моделей в землеустрої

Для розробки нелінійних оптимізаційних моделей досліджуваних систем вирішуються задачі нелінійного програмування.

Нелінійне програмування – математичні методи визначення максимуму або мінімуму функції за наявності обмежень у вигляді нерівностей або рівнянь.

Максимізувавши або мінімізувавши функцію, визначають критерій ефективності вирішення задачі, цей критерій має назву *цільової функції*.

Цільова функція задач нелінійного програмування полягає в тому, щоб знайти умови, що обертають цільову функцію в мінімум або максимум. Рішення, що задовольняє умові задачі і відповідне наміченій меті, називається *оптимальним планом*. Нелінійне програмування служить для вибору найкращого плану розподілу обмежених ресурсів в цілях вирішення поставленої задачі. В загальному вигляді постановка задачі нелінійного програмування зводиться до наступного: умови задачі представляються за допомогою системи нелінійних рівнянь або нерівностей, що виражають обмеження, які накладається на використання наявних ресурсів.

У загальному вигляді математична модель задачі нелінійного програмування формулюється наступним чином:

$$f=(x_1,x_2,\dots,x_n)\to min\ (max). \tag{6.1}$$

При цьому ці змінні повинні задовольняти обмеженням:

$$\begin{cases} g_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\le b_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ g_m(x_1,x_2,\dots,x_n)\le b_m,\\ g_{m+1}(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge b_{m+1},\\ g_k(x_1,x_2,\dots,x_n)\ge b_k,\\ g_{k+1}(x_1,x_2,\dots,x_n)=b_{k+1},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ g_p(x_1,x_2,\dots,x_n)=b_p. \end{cases} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(6.2)$$

$x_1,x_2,\dots,x_n\ge 0,$ де одна із функцій f, g_i нелінійна.

Для задач нелінійного програмування немає єдиного методу вирішення. Залежно від виду цільової функції і системи обмежень розроблені спеціальні методи вирішення, до яких відносяться метод множників Лагранжа, градієнтні методи, наближені методи вирішення, графічний метод.

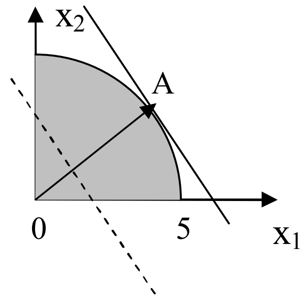
Розглянемо деякі з них. Основні ідеї графічного методу: максимум і мінімум досягається в точках дотику лінії рівня з областю допустимих рішень, яка задається системою обмежень. Наприклад, якщо лінії рівня - прямі, то точки дотику можна визначити, використовуючи геометричне значення похідної.

Розглянемо на прикладах вирішення задач нелінійного програмування.

1 *Знайти екстремуми функції* $L(x_1,x_2)=x_1+2x_2$ *при обмеженнях*

$$x_1^2+x_2^2\le 25,\ x_1,x_2\ge 0.$$

Вирішення



Область допустимого вирішення – це частина кола з радіусом 5, яка розташована в I чверті. Знайдемо лінії рівня функції L: $x_1+2x_2=C$. Виразимо $x_2=\frac{C}{2}-\frac{x_1}{2}$. Лініями рівня будуть паралельні прямі з кутовим коефіцієнтом, який дорівнює $-\frac{1}{2}$. Мінімум функції досягається в точці (0;0), $L_{min}=0$, оскільки градієнт $\overline{g}\,(1,2)$ спрямовано вверх вправо. Максимум досягається в точці дотику кривої $x_2=\sqrt{25-x_1^2}$ та лінії рівня. Оскільки кутовий коефіцієнт дотику до графіку функції дорівнює $-\frac{1}{2}$, знайдемо координати точки дотику, використовується геометричне значення похідної.

$$x_2'(x_0)=-\frac{1}{2};\ (\sqrt{25-x_1^2}\,)'=-\frac{1}{2};$$

$$\frac{-2x_0}{2\sqrt{25-x_0^2}}=-\frac{1}{2};\ \Rightarrow x_0=\sqrt{5};\ x_2=2\sqrt{5}.$$

Тоді

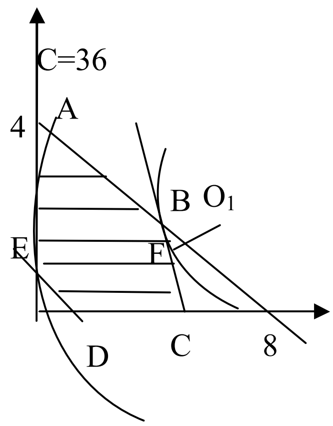
$$L=\sqrt{5}+2\cdot 2\sqrt{5}=5\sqrt{5}.$$

Відповідь: Мінімум досягається в точці O(0;0), глобальний максимум, дорівнює $5\sqrt{5}$, в точці $A(\sqrt{5};2\sqrt{5})$.

2 *Знайти екстремуми функції* $L=(x_1-6)^2+(x_2-2)^2$ *при обмеженні*

$$\begin{cases} x_1+x_2\le 8 \\ 3x_1+x_2\le 15 \\ x_1+x_2\ge 1 \\ x_1, x_2\ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання



Область допустимого вирішення – багатокутник ABCDE. Лінії рівня представляють собою окружність $(x_1-6)^2+(x_2-2)^2=C$ з центром в точці $O_1(6;2)$. Візьмемо, наприклад, C=36, бачимо, що максимум досягає в точці A(0;4), яка лежить на окружності найбільшого радіусу, який пересікається з областю допустимого вирішення $L(A)=(0-6)^2+(4-2)^2=40$. Мінімум – в точці F, яка знаходиться на перетині прямої $3x_1+x_2=15$ і перпендикуляру до цієї прямої, виведеного із точки O_1. Оскільки кутовий коефіцієнт дорівнює -3, то кутовий коефіцієнт перпендикуляру дорівнює $\frac{1}{3}$.

Із рівняння прямої, яка проходить через точку O_1 з кутовим коефіцієнтом $\frac{1}{3}$, отримаємо $(x_2\text{-}2)= \frac{1}{3}(x_1\text{-}6)$. Знайдемо координати точки E

$$\begin{cases} x_1-3x_2=0 \\ 3x_1+x_2=15. \end{cases}$$

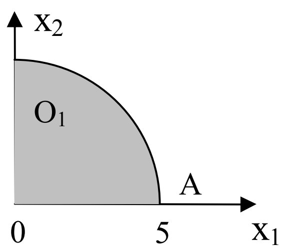
Вирішивши систему, отримаємо $E\ (4.5;\ 1.5)$.

$$L\ (E) = (4.5\text{-}6)^2 + (1.5\text{-}2)^2 = 2.5.$$

Відповідь: Мінімум дорівнює *2.5* досягається в точці *(4.5; 1.5)*, максимум дорівнює *40* в точці *(0;4)*.

3 *Знайти екстремуми функції* $L=(x_1\text{-}1)^2+(x_2\text{-}3)^2$ *при обмеженнях* $x_1^2 + x_2^2 \le 25$, $x_1, x_2 \ge 0$.

Розв'язання



Область допустимого вирішення є частина кола з центром на початку координат з радіусом 5, яка розташована в I чверті. Лінії рівня – це окружності з центром в точці O_1 і радіусі C, оскільки $(x_1\text{-}1)^2+(x_2\text{-}3)^2=C$. Точка O_1 – це розроблена лінія рівня, яка відповідає мінімальному значенню C=0. глобальний максимум досягається в точці A, яка знаходиться на веретену області допустимого вирішення з лінією рівня найбільшого радіусу. При цьому $L(A)=(5\text{-}1)^2+(0\text{-}3)^2=25$.

Відповідь: Мінімум, дорівнює *0*, досягається в точці *(1;3)*, максимум, дорівнює *25*, - в точці *A(5;0)*.

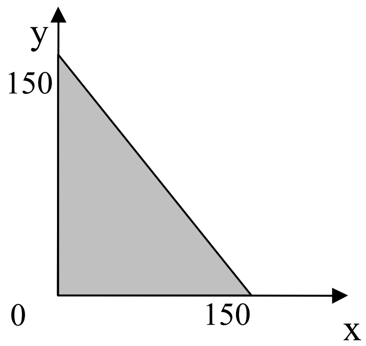
4 Підприємець вирішив виділити на розширення своєї справи 150 тис. грн. Відомо, якщо на придбання нового устаткування затрачувати x тис. грн., а на зарплату прийнятих працівників y тис. грн., то приріст обсягу продукції складе $Q=0.001x^{0.6}\cdot y^{0.4}$. *Як необхідно розподілити виділені грошові ресурси, щоб приріст обсягу продукції був максимальним.*

Розв'язання

Цільова функція має вид $0.001x^{0.6}\cdot y^{0.4} \to max$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x+y\le 150, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Область допустимого вирішення – трикутник. Лінії рівня будуть мати вид $0.001x^{0.6}\cdot y^{0.4} = C$. Виразивши y, отримуємо $y=\left(\frac{C}{0{,}001x^{3/5}}\right)^{5/2}$. Оскільки максимум досягається в точці дотику лінії рівня з областю допустимого вирішення, то умова дотику має вигляд $\left[\left(\dfrac{C}{0{,}001x^{3/5}}\right)^{5/2}\right]'$=-1.



Знайдемо похідну, отримаємо $\dfrac{C^{5/2}}{0{,}001^{5/2}}\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)x^{-5/2}$=-1. Виразивши x, отримаємо $x=\dfrac{3^{5/2}\cdot C^{25/4}}{2^{5/2}\cdot 0{,}001^{25/4}}$. $y=\dfrac{C^{5/2}}{0{,}001^{5/2}\cdot\dfrac{3^{5/2}\cdot C^{25/4}}{2^{5/2}\cdot 0{,}001^{25/4}}}=\dfrac{2^{5/2}\cdot 0{,}001^{25/4}}{3^{5/2}\cdot C^{25/4}}$.

Відповідь: Фактори x і y необхідно розподілити у відношенні 2:3.

Сутність методу Лагранжа складається в побудові функції

$$L(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(x_1,x_2,\dots,x_n)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\, g_i(x_1,x_2,\dots,x_n),$$

де λ_i невідомі постійні, і знаходженні екстремуму функції L.

Має сенс наступна теорія: якщо точка $\left(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0\right)$ є точкою умовного екстремуму функції $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ за умови $g(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$, то існують значення λ_i такі, що точка $(x_1^0,x_2^0,x_n^0,\lambda_1^0,\dots,\lambda_m^0)$ є точкою екстремуму функції $L(x_1,x_2,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m)$.

Розглянемо метод Лагранжа для функції двох змінних.

$$L(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)+\lambda\ g(x_1,x_2)$$

Таким чином, для знаходження умовного екстремуму функції $f(x_1,x_2)$ за умови $g(x_1,x_2)=0$ необхідно знайти вирішення системи

$$\begin{cases} L'_{x_1}=f'_{x_1}(x_1,x_2)+\lambda g'_{x_1}(x_1,x_2)=0, \\ L'_{x_2}=f'_{x_2}(x_1,x_2)+\lambda g'_{x_2}(x_1,x2)=0, \\ L'_{\lambda}=g(x_1,x_2)=0. \end{cases} \qquad (6.3)$$

Вирішення (x_1,x_2,λ) системи (6.3) визначає точку, в якій функція f досягає екстремуму, для цього потрібно розрахувати значення $g'_{x_1},g'_{x_2},L''_{x_1x_1},L''_{x_2x_2},L''_{x_1x_2}$ і скласти визначник

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & g'_{x_1} & g'_{x_2} \\ g'_{x_1} & L''_{x_1x_1} & L''_{x_1x_2} \\ g'_{x_2} & L''_{x_1x_2} & L''_{x_2x_2} \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta<0$, то функція має в точці (x_1^0,x_2^0,λ^0) умовний максимум, якщо $\Delta>0$ – то умовний мінімум.

Вирішимо задачу методом множинника Лагранжа.

Загальні витрати виробництва задані функцією $T=0,5x^2+0,6xy+0,4y^2+$ $+700x+600y+2000$, *де x і y відповідно кількість товарів A і B. Загальна кількість виробленої продукції повинна дорівнювати 500 одиниць. Скільки одиниць товару A і B потрібно виробити, щоб витрати на їх виготовлення були мінімальними?*

Розв'язання

Складемо функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = 0,5x^2+0,6xy+0,4y^2+ +700x+600y+2000+\lambda(x+y-500).$$

Дорівнюючи до нулю її часні похідні, отримаємо

$$\begin{cases} x+0,6y+700+\lambda=0, \\ 0,6x+0,8y+600+\lambda=0, \\ x+y-500=0. \end{cases}$$

Вирішивши систему знайдемо *(0, 500, -1000)*.

Використаємо достатні умови для визначення знайденого значення

$L''_{xx}(x_0,y_0)=1,\ L''_{yy}(x_0,y_0)=0.8,\ L''_{xy}(x_0,y_0)=0.6$. Функція $g= x+y-500$. $g'_x=1,\ g'_y=1$.

$$\Delta=-(0\cdot L''_{xx}\cdot L''_{yy}+g'_x\cdot L''_{xy}\cdot g'_y+g'_y\cdot g'_x\cdot L''_{xy}-g'_x\cdot L''_{xx}\cdot g'_y-0\cdot L''_{xx}\cdot L''_{xy}-g'_x\cdot g'_x\cdot L''_{yy})=0,6>0$$

Таким чином, в точці *(0;500)* функція *L* має умовний мінімум.

Відповідь: Вигідно виробляти тільки 500 одиниці товару *B*, а товар *A* не виробляти.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3 ЕКОНОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЗЕМЛЕУСТРОЇ

Тема 7 Принципи побудови економетричних моделей. Парна лінійна регресія

7.1 Принципи побудови економетричних моделей.

7.2 Оцінка зв'язку між факторами і критерії адекватності економетричної моделі.

7.3 Сутність мультиколінеарності, напрями її виявлення.

7.4 Парна лінійна регресія.

Поняття: економетрична модель; екзогенна змінна; ендогенна змінна; випадковий член; коефіцієнт кореляції; коефіцієнт детермінації; парний регресійний аналіз; коефіцієнт парної кореляції; коефіцієнт множинної кореляції; F-тест; t-критерій Ст'юдента; гетероскедастичність; гомоскедастичність; мультиколінеарність.

Джерела: [17], [18], [19], [20], [22], [28], [34], [35], [36], [44], [45], [46], [50], [59].

7.1 Принципи побудови економетричних моделей

В математичному моделюванні важливе місце займають економетричні моделі, які дозволяють встановити причинно-наслідковий зв'язок між економічними факторами. На основі економетричних моделей розробляються організаційно-економічні механізми діяльності підприємства, формуються управлінські рішення, які кількісно й якісно відображають економічні процеси, що відбуваються в сфері діяльності суб'єктів підприємницької діяльності. Слід також відзначити, що більшість економічних процесів мають стохастичний невизначений характер. Стохастична залежність може бути суттєвою, тобто обумовлена внутрішніми властивими даному явищу причинами, і несуттєвими, які викликані дією зовнішніх (випадкових) причин (середовищем); безпосередньою, стійкою і нестійкою, сильною і слабкою, простою (між двома змінними) і складною (між залежною змінною У і декількома чинниками-аргументами $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Для оцінки саме таких процесів і використовують методи економетричного моделювання.

Економетричні моделі бувають:

1 Парними – відображають причинно-наслідковий зв'язок між незалежним фактором (*x*) і залежною змінною (*y*). Наприклад, модель залежності між середньосписковою чисельністю працюючих (*Ч*) і рентабельністю витрат ($P_в$):

$$P_в = 0{,}07 + 0{,}18 x Ч, \qquad (7.1)$$

модель залежності між рентабельністю реалізації продукції ($P_п$) і рівнем витрат ($P_{вп}$):

$$P_п = 0{,}018 - 0{,}21 x P_{вп}, \qquad (7.2)$$

2 Багатофакторними – відображають причинно-наслідковий зв'язок між декількома незалежними факторами (*x*) і залежною змінною (*y*).

$$P_в = 0{,}23 + 0{,}25 x Ч - 0{,}16 x P_{вп}. \qquad (7.3)$$

Розглянуті моделі відображають залежність між економічними факторами, що характеризуються математичною формою

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n.$$

Слід відзначити, що розглянуті моделі висвітлюють лінійну форму залежності між показниками. Проте більшість економічних процесів мають нелінійний характер. Тому для спрощення проведення економетричного дослідження необхідно використовувати методи лінеаризації для переходу від нелінійної форми до лінійної.

Таким чином, *економетрична модель* – це кількісне відображення причинно-наслідкових зв'язків між економічними факторами, яке створює підґрунтя для побудови організаційно-економічних механізмів управління економічними процесами підприємства.

В економетричних моделях незалежні змінні $x_1, x_2, ..., x_n$, називають *пояснюючими змінними* (або *факторами*, інколи регресорами). Залежні змінні y називають *пояснюваними змінними* (або регресандами). Усі змінні економетричних моделей, як і будь-якої математичної моделі, поділяють на *екзогенні і ендогенні*.

Екзогенними (зовнішніми) називаються змінні, значення яких є наперед визначеними перед використанням моделі, а *ендогенними* (внутрішніми) – такі, значення яких визначаються тільки із самої моделі.

В економетричному моделюванні необхідно визначити принципи побудови цих моделей. Принцип від латинської *principium* основа, початок. Існують декілька визначень категорії «принцип»:

1 Основні положення передумови.

2 Теоретичне знання, що не є ні доказовим, ні вимагаючим доказу.

3 Етична норма, яка, згідно Канту, є або суб'єктивною – максимою – і направляє волю, оскільки вона виступає як керівний по відношенню до окремих індивідів момент, або об'єктивною – законом – і у такому разі признається значущою для волі кожної розумної істоти….

Виходячи з вищесказаного основними принципами побудови економітричних моделей є:

1 Інформація, яка використовується в економетричному моделюванні, повинна бути повною, достовірною, що адекватно відображає економічні процеси, які відбуваються на підприємстві.

2 Фактори, що включаються в економетричну модель, повинні бути кількісно оцінені, економічно інтепретовані, кількість спостережень на один показник складає не менше 8.

3 Математичний апарат, який використовується в економетричному моделюванні, повинен вирішити проблему побудови моделі і за його допомогою можна оцінити адекватність цієї моделі.

4 Під час розробки економетричної моделі необхідно враховувати випадковий член. Випадковий член існує за декількома причинами:

– не включення пояснювальних змінних. Співвідношення між y і x завжди є досить великим спрощенням. У дійсності існують інші фактори, які здійснюють вплив на y, і які не включені в економетричну модель;

– агрегування змінних. В багатьох випадках залежність, що розглядається – це спроба об'єднати разом деяке число економічних співвідношень;

– помилковий опис структури моделі. Структура моделі може бути описана помилково;

– функціональна специфікація може бути помилково визначена;

– помилково проведені розрахунки в моделюванні.

5 Параметри моделі повинні економічно адекватно відображати причинно-наслідковий зв'язок між факторами. Наприклад, в моделі (7.1) зростання середньо спискової чисельності працівників на 1 робітника призведе до збільшення рентабельності витрат на 18 коп./грн.

6 Економетрична модель повинна бути перевірена на адекватність шляхом використання відповідних критеріїв.

7.2 Оцінка зв'язку між факторами і критерії адекватності економетричної моделі

Для оцінки зв'язку між факторами економітеричної моделі використовують критерії: коефіцієнт кореляції і коефіцієнт детермінації.

Коефіцієнт кореляції показує ступінь впливу незалежних факторів (x) та залежну змінну (y). Цей критерій використовується в парних економетричних моделях – коефіцієнт парної кореляції, і в багатофакторних економетричних моделях – коефіцієнт множинної кореляції.

Коефіцієнт кореляції показує, на яку частину середнього квадратичного відхилення змінюється функція y, якщо аргумент x збільшується (зменшується) на своє середньоквадратичне відхилення σ_x. Знак коефіцієнта парної кореляції співпадає із знаком коефіцієнта регресії, а його чисельне значення коливається в межах

$$-1 \leq r_{y/x} \leq 1. \tag{7.4}$$

Коефіцієнт парної кореляції може бути визначений наступним чином:

$$r_{y/x} = \frac{\overline{XY} - \overline{X} \times \overline{Y}}{\sigma_y \times \sigma_x}, \tag{7.5}$$

де $r_{y/x}$ – коефіцієнт парної кореляції;

$\overline{X}$ – середнє значення незалежної змінної X;

$\overline{Y}$ – середнє значення залежної змінної $У$;

σ_x – середнє квадратичне відхилення показника X;

σ_y – середнє квадратичне відхилення показника $У$.

Слід відзначити, що середнє квадратичне відхилення визначається за формулою:

$$\sigma_y = \sqrt{D_y}\ , \tag{7.6}$$

де D_y – дисперсія (середній квадрат відхилення).

Відповідно, дисперсія визначається:

$$D_y = \overline{У^2} - \overline{У}^2\ , \tag{7.7}$$

де $\overline{У^2}$ – середній квадрат показника *У*;

$\overline{У}^2$ – квадрат середнього для показника *У*.

Аналогічні формули використовуються і для показника *x*.

Приклад. Розрахуйте коефіцієнти кореляції і детермінації на основі представлених в таблиці 7.1 спостережень.

Таблиця 7.1 – Таблиця вихідних даних для проведення розрахунків

Спостереження	x	y
1	1	3
2	2	5
3	3	6
Сума	6	14
Середнє	2	4,667

Розв'язання

1 Визначимо дисперсію для факторів *y* і *x*. Для цього складемо таблицю 7.2.

Таблиця 7.2 – Розрахунок середніх значень показників *y* і *x*

Спостереження	*x*	*y*	x^2	y^2
1	1	3	1	9
2	2	5	4	25
3	3	6	9	36
Сума	6	14	14	70
Середнє	2	4,667	4,667	23,33
Квадрат середнього	4	21,78		

Використовуючи формулу 7.7 визначимо дисперсію для *y* і *x*:

$$D_y = 23{,}33 - 21{,}78 = 1{,}55$$

$$D_x = 4{,}667 - 4 = 0{,}667$$

2 Визначимо середнє квадратичне відхилення показників y і x, використовуючи формулу 7.6:

$$\sigma_y = \sqrt{1{,}55} = 1{,}24$$

$$\sigma_x = \sqrt{0{,}667} = 0{,}82$$

3 Використовуючи формулу 7.5 визначимо коефіцієнт парної кореляції для y і x:

$$\mathrm{r}_{y/x} = \frac{10{,}333 - (2 \times 4{,}667)}{1{,}24 \times 0{,}82} = \frac{0{,}999}{1{,}017} = 0{,}98.$$

Значення коефіцієнту парної кореляції, що характеризують силу впливу показника x на y представлена в таблиці 7.3.

Таблиця 7.3 – Значення коефіцієнта парної кореляції

Значення коефіцієнта кореляції	Сила впливу показника x на y
0,85 - 1	сильний
0,55 – 0,84	помірний
0,25 – 0,54	слабкий
0 – 0,24	дуже слабкий

Знак значення коефіцієнта парної кореляції вказує на напрямок зв'язку. Якщо знак «+», то це вказує на прямо пропорційний зв'язок між факторами, якщо навпаки – то обернений.

Коефіцієнт множинної кореляції використовуються в багатофакторному економетричному аналізі. Його значення знаходиться в проміжку між 0 і 1. Сила впливу показників x на результуючий фактор y характеризується значеннями представленими в табл. 7.3.

Коефіцієнт детермінації визначається як квадрат коефіцієнту кореляції:

$$\mathrm{D}_{y/x} = \mathrm{r}^2_{y/x} \text{ або} \tag{7.8}$$

$$\mathrm{D}_{y/xi} = \mathrm{R}^2_{y/xi} \tag{7.9}$$

Основними напрямками оцінки адекватності економетричної моделі є:

1 Перевірка за допомогою F-тесту (F-критерій Фішера);

2 Використання t-розподілу Ст`юдента для оцінки надійності коефіцієнта кореляції;

3 Перевірка моделі на гомо-гетескедастичність;

4 Перевірка факторів економетричної моделі на мультиколінеарність.

F-тест використовується для оцінки того, чи важливе пояснення, яке дає рівняння в цілому. Цей тест заснований на порівнянні залишкової теоретичної дисперсії $\tilde{\sigma}^2_{y/x}$ і загальної дисперсії σ_y^2. Розглядається відношення $\frac{\sigma^2_{y/x}}{\sigma^2_y} = Трозр$ і порівнюється з табличним (для $\bar{f}$% Фішера знайдено розподіл і складена спеціальна таблиця) при заданому рівні значущості і різних ступенях свободи.

Загальна дисперсія σ_y^2 досліджених даних від їх середнього значення встановлюється з урахуванням числа ступенів свободи $f = n - k$:

$$\sigma^2_{y/x} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y})^2 m_i}{n-k}, \qquad (7.10)$$

де К – число інтервалів у вибіркових даних.

Залишкова теоретична дисперсія $\tilde{\sigma}^2_{y/x}$ встановлюється як різниця розрахункових $\tilde{y}_i$ і середніх інтервальних значень $\bar{y}_i$ з урахуванням числа ступенів свободи

$$d_1 = K - P \text{ і } d_2 = n - K,$$

де Р – число параметрів управління.

Якщо $\bar{f}_{рас} \le \bar{f}_{табл}$, то при заданому рівні значущості складене рівняння регресії затверджується. Вірогідність помилки тим менше чим більше рівень значущості α%.

У разі, коли чисельник $\tilde{\sigma}^2_{y/x}$ менше знаменника σ_y^2, то міняємо їх місцями разом з відповідними ступенями свободи

$$d_1 = K - P \text{ і } d_2 = n - K.$$

Приклад. Загальна дисперсія σ_y^2=41,5 при n=154 і К=12.

Залишкова дисперсія $\tilde{\sigma}^2_{y/x}$=34,44 при К=12 і Р=3 (Р=3 в квадратному рівнянні регресії).

Розв'язання

$Трасч = \frac{\tilde{\sigma}^2_{y/x}}{\sigma^2_y}$, оскільки $\sigma_y^2 > \tilde{\sigma}^2_{y/x}$, переходимо до відношення із ступенями свободи

$$d_1 = 154 - 12 = 142, \; d_2 = 12 - 3 = 9$$

$$\bar{f}_{розр.} = \frac{41{,}5}{34{,}44} = 1{,}21,$$

за таблицею $\bar{f}_{5\%}(142,9) = 2{,}75$ $\bar{f}_{20\%}(142,9) = 1{,}7$.

Отже, знайдене квадратне рівняння регресії з високою надійністю узгоджується з вихідними даними.

Слід відзначити, що в регресійному аналізі побудова *F*-статистики здійснюється шляхом відношення дисперсії залежної змінної на «пояснювальні» і «непояснювальні» складові:

$$F = (ESS / k) / RSS / (n\text{-}k\text{-}1), \tag{7.11}$$

де ESS – пояснювальна сума квадратів відхилень;

RSS – залишкова (непояснювальна) сума квадратів;

к – кількість ступенів свободи;

n – кількість значень факторів моделі.

При здійсненні F-теста для рівняння перевіряється, чи перевищує r^2 те значення, яке може бути отримано випадково. Для розрахунку F-статистики для рівняння в цілому, формулу (7.9) можна трасформувати шляхом ділення чисельника і знаменника рівняння на TSS (загальну суму квадратів), відмічаючи, що ESS/TSS дорівнює r^2, а RSS/TSS дорівнює $(1 - r^2)$. В результаті отримуємо наступне рівняння:

$$F= r^2 / к / (1 - r^2) / (n – k - 1). \tag{7.12}$$

Розрахунковий F-критерій визначається при відповідному рівні значущості і ступенях свободи і порівнюють з критичним F-критерієм Фішера. Значення останнього критерію представлені в спеціальних таблицях. Якщо розрахунковий F-критерій перевищує його критичне значення, то можна стверджувати, що пояснення, яке дає рівняння в цілому важливе, а економетрична модель адекватна. У протилежному випадку – модель вважається неадекватною, а пояснення неважливе.

Іншим важливим статистичним параметром для перевірки адекватності економетричної моделі є t-розподіл Ст’юдента. Він використовується для оцінки надійності коефіцієнта кореляції. В цьому випадку t-статистика для r розраховується наступним чином:

$$t = \sqrt{n - 2/1r^2} \;. \tag{7.13}$$

Вибравши рівень значущості в 5% дослідним знаходить критичне значення t з (n - 2) ступенями свободи. Якщо значення t перевищує його критичне значення (позитивний або негативний бік), то нульову гіпотезу відхиляють про те, що коефіцієнт кореляції дорівнює нулю. В цьому випадку роблять висновок про лінійний зв’язок (позитивний або негативний).

Слід відзначити, якщо нульова гіпотеза підтверджується, то значення t буде перевищувати його критичне значення (в позитивний або негативний бік) тільки в

5% випадках. Це означає, що при виконанні перевірки ймовірності допущення помилки, що відхиляє нульову гіпотезу, коли вона фактично вірна, складає 5%.

Ймовірно, що ризик допущення такої помилки в 5% випадків досить великий для дослідника. Тоді він може скоротити ступінь ризику, здійснюючи розрахунки при рівні значущості в 1%. Критичне значення t зараз буде вище, тому необхідна більш висока (позитивна або негативна) t-статистика для відхилення нульової гіпотези, а це означає, що потрібно більш вище значення коефіцієнта кореляції.

Слід вказати і на те, що t-статистика може бути розрахована як співвідношення оцінки коефіцієнта регресії на стандартну помилку.

Розглянемо методику розрахунку F-критерію і t-статистики на прикладі.

Приклад. Виконайте відповідні t-тести для багатофакторної моделі. Розрахуйте F-критерій, якщо відомо, що кількість спостережень дорівнює 25, коефіцієнт детермінації (R^2) дорівнює 88%. Багатофакторна економетрична модель має вигляд:

$$y = 55{,}3 + 0{,}093x_1 + 0{,}087x_2. \qquad (7.14)$$

Стандартні помилки дорівнюють: постійний член – 2,4, x_1 – 0,003, x_2 – 0,002.

Розв'язання

Для t-тесту необхідно визначити розрахунковий t-критерій. Для кожного із члена економетричного рівняння він розраховується окремо як співвідношення оцінки коефіцієнта регресії на стандартну помилку. Таким чином розрахункові t-критерій наступні:

$$t_{p1} = 55{,}3/2{,}4 = 23{,}04;$$
$$t_{p2} = 0{,}092/0{,}003 = 30{,}67;$$
$$t_{p3} = 0{,}067/0{,}002 = 43{,}5.$$

Наступним кроком проведення t-тесту є порівняння розрахункових значень із табличними. Табличне значення t-критерію визначається на основі спеціальних таблиць при відповідних рівнях значущості (5% або 1%) і ступенях свободи, які визначаються (n – k – 1, де n – кількість спостережень; k – кількість факторів моделі, включаючи постійний параметр).

В нашому випадку ступеня свободи дорівнюють: 25 – 4 – 1 = 20.

Табличне значення t-критерію при рівні значущості в 5% дорівнює 1,725; при 1% - 2,528.

Як видно, розрахункові значення t-критеріїв всіх факторів моделі значно перевищують його табличні значення. Це означає, що всіх фактори економетричної моделі суттєво впливають на змінний показник (у).

F-критерій визначається за формулою 7.10. Для розробленої економетричної моделі розрахункових F-критеріїв має наступне значення:

$$F_p = (0,88/4) / ((1 – 0,88) / (20)) = 36,7.$$

Потім розрахункове значення F-критерію порівнюємо із його табличним значенням при відповідному рівні значущості і кількості спостережень.

При 5% рівні значущості для 25 спостережень табличний F-критерій дорівнює 2,99, при 1% - 29,46.

Таким чином, розрахункові значення F-критерію більше табличних, що вказує на суттєвий рівень пояснення причинно-наслідкових зв’язків економітричної моделі.

Наступним етапом оцінки адекватності економетричної моделі є перевірка її на гетеро- або гомоскедастичність. Гомоскедастичність означає однаковий розподіл фактичних значень вибірки змінних. Тобто фактичні значення спостережень іноді будуть позитивними, іноді негативними, іноді – відносно близькими до нуля, проте в апріорі відсутні причини появи великих відхилень між спостереженнями.

Разом з тим, для деяких вибірок, можливо, більш доцільно припустити, що теоретичний розподіл випадкового члену є різним для різних спостережень. Це не означає, що випадковий член обов’язково буде мати особливо більші (позитивні або негативні) значення в кінці вибірки, проте це означає, що апріорна ймовірність отримання більш відхилених значень буде відносно висока. Це є прикладом гетероскедастичності, що означає «неоднаковий розподіл».

Гетероскедастичність стає проблемою, коли значення змінних, які включаються в рівняння регресії, значно відрізняються в різних спостереженнях. Якщо залежність може буде описана рівнянням, в якому економічні показники змінюють свій масштаб одночасно, то зміна значень невключених змінних і помилок виміру, впливаючи разом на випадковий член, роблять його порівняно незначними при незначних y і x і порівняно великими – при великих y і x.

Досить часто можна виявити проблему гетероскедастичності. В таких умовах можна здійснити відповідні дії по виключенню цього ефекту на етапі специфікації моделі регресії, і це дозволить зменшити або, можливо, усунути необхідність формальної перевірки. Запропоновано значна кількість тестів (і, відповідно, критеріїв для них). Найбільш поширеними тестами є: тест рангової кореляції Спірмена, тест Голфреда-Квандта і тест Глейзера.

При виконання *тесту рангової кореляції Спірмена* припускається, що дисперсія випадкового члену буде або збільшуватися, або зменшуватися відповідно збільшення змінної x, і тому в регресії, абсолютні значення залишків і значення x будуть корельовані. Дані по x і залишки упорядковуються, і коефіцієнт рангової кореляції визначається як:

$$r_{x,e} = 1 - (6\Sigma D^2_i/n(n^2 - 1)), \qquad (7.15)$$

де D_i – різниця між рангом *x* і рангом помилки *e*;

e – залишки.

Якщо припускати, що відповідний коефіцієнт кореляції для генеральної сукупності дорівнює нулю, то коефіцієнт рангової кореляції має нормальний розподіл з математичним очікуванням 0 і дисперсією 1/(n - 1) в більших вибірках. Таким чином, відповідна тестова статистика дорівнює $r_{x,e}\sqrt{n-1}$, і при використанні двобокового критерію нульова гіпотеза про відсутність гетероскедастичності буде відхилена при рівні значущості в 5 %, якщо вона перевищує 1,96, і при рівні значущості в 1 %, якщо вона перевищує 2,58. Якщо в моделі регресії знаходиться більш однієї пояснювальної змінної, то перевірка гіпотези може здійснюватися з використанням іншої з них.

Ймовірно, найбільш відомим формальним критерієм є критерій, запропонований *С. Голдфелдом і Р. Квандтом*.

При проведенні перевірки по цьому критерію припускають, що стандартне відхилення (σ_i) розподілу ймовірностей U_i пропорційно значенню *x* в цьому спостереженні. Запропоновано також, що випадковий член розподілений нормально і не піддається автокореляції.

Всі *n* спостережень у виборці упорядковуються по значенню *x*, після чого оцінюється окремі регресії для перших n' і для останніх n' спостережень; середні $(n - 2n')$ спостережень відхиляються. Якщо припущення відносно природи гетероскедастичності доцільно, то дисперсія U і в останніх n' спостереженнях буде більшою, чим в перших n', і це буде відображено в сумі квадратів залишків в двох вказаних «часткових» регресіях.

Визначаючи суми квадратів залишків в регресіях для перших n' і останніх n' спостережень відповідно через RSS_1 і RSS_2. Розрахуємо відношення RSS_2/RSS_1, яке має F-розподіл з $(n' - к - 1)$ і $(n' - к - 1)$ ступенями свободи, де *к* – число пояснювальних змінних в регресійному рівнянні.

Потужність критерія залежить от вибору n' по відношенню до n. Ґрунтуючись на результатах деяких проведених експериментів, С. Голдфелд і Р. Кванд стверджують, що n' повинно складати порядок 11, коли n = 30, і порядку 22, коли n = 60.

Якщо в моделі знаходиться більш однієї пояснювальної змінної, то спостереження повинні упорядковуватися по тій з них, яка пов'язана з σ_i і n' повинно бути більше, ніж $к + 1$ (де к – число пояснювальних змінних).

Метод Голдфелда-Квандта може бути також використаний для перевірки на гетероскедастичність при припущенні, що σ_i обернено пропорційний x_i. При цьому використовується подібна процедура, проте тестова статистика зараз є показником RSS_1/RSS_2, який знову має F-розподіл з $(n' – к - 1)$ і $(n' – к - 1)$ ступенями свободи.

Тест Глейзера дозволяє більш ретельно розглянути характер гетероскедастичності. Він ґрунтується на тому, що знімається припущення, що σ_i пропорційна x_i, а перевіряється лише більш подібна функціональна форма.

Для того, щоб використовувати цей метод, необхідно оцінити регресійну залежність y від x за допомогою методу найменших квадратів, а потім розрахувати абсолютні значення залишків *е*, оцінивши їх регресію. В кожному випадку нульова гіпотеза про відсутність гетероскедастичності буде відхилена, якщо оцінка регресії відрізняється від нуля. Якщо при оцінюванні більше однієї функції, то орієнтиром при визначенні характеру гетероскедастичності може бути найкраща з них.

У цьому розділі представлені основні критерії й тести щодо оцінки адекватності моделі. В економетричних дослідженнях можна використовувати й інші тести і критерії. Представлені критерії оцінки адекватності економетричної моделі дають змогу отримати більш ґрунтовні і, насамперед, об'єктивні результати тих економічних процесів, які відбуваються на підприємстві.

7.3 Сутність мультиколінеарності, напрями її виявлення

В економетричному моделюванні необхідно враховувати також явище мультиколінеарності.

Мультиколінеарність – це явище, яке використовується для опису проблеми, коли нестрога лінійна залежність між пояснювальними змінними призводить до отримання ненадійних оцінок регресії. Проте, така залежність, зовсім необов'язково дає незадовільні оцінки. Якщо всі інші умови задовільні, тобто якщо кількість спостережень і вибіркові дисперсії пояснювальних змінних великі, а дисперсія випадкового члену – мала, то в результаті можна отримати досить позитивні оцінки.

Мультиколлінеарність виникає за рахунок отримання нестрогої залежності одного (або більше) незадовільних умов, і це – питання ступеня визначеності явища, а не його виду. Оцінки регресії будуть незадовільні від неї у відповідному ступені, коли всі незалежні змінні будуть абсолютно некорельовані. Розгляд цієї проблеми починається тільки тоді, коли вона досить суттєво впливає на результати оцінки регресії.

Досить простий спосіб виявлення мультиколінеарності це побудова матриці коефіцієнтів парної кореляції, яка відображає силу зв’язків між факторами. У випадку, коли коефіцієнти парної кореляції між незалежними факторами входять у відповідний проміжок (табл. 7.4), можна свідчити про рівень мультиколінеарності.

Таблиця 7.4 – Рівень мультиколінеарності в залежності від значень коефіцієнтів парної кореляції між незалежними факторами

Значення коефіцієнтів парної кореляції між незалежними факторами	Рівень мультиколінеарності
r_{x1x2} = 0,85 – 1,0	сильна
r_{x1x2} = 0,55 – 0,84	помірна
r_{x1x2} = 0,25 – 0,54	слаба
r_{x1x2} = 0 – 0,24	відсутня

Слід також відзначити, що явище мультиколінеарністі, тобто лінійна залежність одного з аргументу від інших, виявляється декількома способами:

– професійними міркуваннями по суті досліджуваного явища;

– інструкцією на основі «внутрішніх» і «зовнішніх» коефіцієнтів кореляції кожного з аргументів. Якщо «внутрішній» коефіцієнт кореляції більше «зовнішнього», то даний аргумент в рівняння множинної кореляції не слід включати;

– використанням статистичного критерію мультиколінеарністі (Феррара і Гюбера). Для цього розглядається величина

$$\bar{f}_j = (C_{ij}-1)\,\frac{n-p}{p-1}, \tag{7.16}$$

де *Cij* – діагональні елементи матриці, зворотної до кореляційної, знайденої за вибірковими даними;

n – обсяг вибірки;

p – число аргументів у рівнянні множинної регресії.

Зворотною по відношенню до даної називається матриця, яка, будучи помноженою як справа, так і зліва на дану матрицю, дає одиничну матрицю.

Для матриці А зворотна їй позначається через A^{-1}. Тоді за визначенням маємо:

$$A^{-1} * A = A * A^{-1} = E \qquad (7.17)$$

Якщо існує зворотна матриця A^{-1}, то матриця А називається зворотною. Для виродженої матриці зворотної матриці не існує, оскільки її визначник рівний нулю.

Визначник зворотної матриці рівний зворотній величині визначника даної матриці, що дає можливість обчислення зворотної матриці за допомогою визначників. Для цього використовуються поняття мінору і доповнення алгебри.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Д = (O_{ij}) називається такий новий визначник, який отриманий з даного визначника викреслюванням рядка і стовпця, що проходить через даний елемент матриці А.

Доповненням алгебри елемента a_{ij} визначника називається мінор M_{ij} цього елемента, взятий зі знаком (-1). Доповнення алгебри елемента a_{ij} позначається через A_{ij}. У прийнятому нами позначенні матимемо:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \ldots\ldots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{21}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \ldots\ldots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \ldots\ldots & \frac{A_{vv}}{D} \end{vmatrix} \qquad (7.18)$$

Ферраром і Глобером доведено, що статична величина $\bar{f}_j$ підкоряється розподілу Фішера з (n-p) і (p-1) ступенями свободи. Отже, для виявлення мультиколінеарності використовується звичайний прийом перевірки статистичних гіпотез. Обчисливши вираз $\bar{f}_j$ (j=1,2…p), порівнюємо їх значення з табличними значеннями $\bar{f}_{5\%}$ и $\bar{f}_{1\%}$ при відповідних ступенях свободи [(n-p) (p-10)].

Якщо $\bar{f}_j < \bar{f}_{5\%}$, то гіпотеза відсутності мультиколінеарності j-го аргументу з іншими в генеральній сукупності стверджується. Навпаки, при $\bar{f}_j > \bar{f}_{5\%}$ - відкидається гіпотеза відсутності мультиколінеарності j-го аргументу з іншими в генеральній сукупності. При $\bar{f}_{5\%} < \bar{f}_j < \bar{f}_{1\%}$ використовуються засоби послаблення мультиколінеарності шляхом переходу до нелінійних залежностей.

Висновки про виключення якогось аргументу супроводжуються логічним аналізом. По аргументах, що збереглися, повторюється перевірка мультиколінеарності.

Існують різні методи для зменшення мультиколлінеарності. Вони діляться на дві категорії: до першої категорії відносяться методи спрямовані на виконання умов, що забезпечують надійність оцінок регресії; до других – відносяться використання зовнішньої інформації. Якщо використовувати можливі значення показників, то, звичайно, було б важливим збільшити кількість спостережень. Якщо, наприклад, використовуються часові ряди, то це можна зробити шляхом скорочення терміну кожного періоду часу.

Якщо використовуються дані перехресної вибірки і дослідник знаходиться на стадії планування дослідження, то можна збільшити точність оцінок регресії і послабити проблему мультиколінеарності за рахунок більших витрат коштів на збільшення розміру вибірки та інш. методи.

Слід відзначити, що ці методи лише зменшують вплив мультиколінеарності. У практиці економетричного моделювання економічних процесів нівелювання впливу цього явища здійснюється шляхом виключення одного з незалежних факторів моделі, який сильно впливає на інший фактор, а потім продовжують дослідження.

7.4 Парна лінійна регресія

Парний регресійний аналіз спрямований на визначення ступеню зв'язку між змінними і яким чином вони пов'язані в побудові парної моделі. Слід відзначити, що не слід очікувати отримання точного співвідношення між будь-якими економічними показниками, крім випадків, коли воно існує по визначенню.

Парний регресійний аналіз відбувається *за наступними напрямами*:

1 Збір статистичної інформації, яка відображає економічні процесі на підприємстві. Цей процес відбувається шляхом обробки фінансових, економічних, бухгалтерських, статистичних документів діяльності суб'єктів підприємницької діяльності.

2 Обробка статистичної інформації, її специфікація. Це важливий етап, оскільки він створює підґрунтя для отримання об'єктивних результатів і адекватної парної економетричної моделі.

3 Використання економетричного інструментарію для розробки парної моделі. В цьому аспектів здійснюється побудова матриці статистики, оцінка показників варіації змінних, розрахунок коефіцієнтів парної кореляції й детермінації, визначення показників параметрів парної економетричної моделі. Слід відзначити, що для обчислення параметрів рівняння виду $\bar{y} = kx + b$ (лінійна парна модель залежності) частіш за все користуються методом

найменших квадратів. При цьому ставиться умова, щоб сума квадратів відхилень (відстаней) всіх досліджених точок від ординат, обчислених за рівнянням прямої $\varepsilon_{i,}$ була мінімальною. Іншими словами, пряма повинна проходити якомога ближче до вершин емпіричної лінії регресії. Це означає, що параметри *k* і *b* управління регресії треба визначити з рівняння:

$$\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widetilde{y}_i) = \min , \qquad (7.19)$$

де y_i – ординати досліджуваних точок;

$\widetilde{y}_i$ – ординати розрахункових точок, визначені за рівнянням регресії

$\overline{y}$ =к x_i+ b

таким чином

$$\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (kx+b) \right]^2 = F(k,b) \min .$$

Умовою екстремуму даної функції слід вважати рівність нулю часткових виробничих, узятих за параметрами *k* і *b*

$$\frac{dF}{dk} = 0 \ \ u \ \ \frac{dF}{db} = 0, \ \left[F(u) \right]' = F_u(u) * u' \text{звідси} \ \begin{aligned} \frac{dF}{dk} &= -2\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (kx_i + b) \right] x_i = 0 \\ \frac{dF}{dk} &= -2\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (kx_i + b) \right] = 0. \end{aligned} \qquad (7.20)$$

Скоротивши на (-2) і розкривши квадратні дужки, отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i &= k \sum_{i=i}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i &= k \sum_{i=i}^{n} x_i + bn, \end{aligned} \qquad (7.21)$$

підставивши сюди чисельні значення відповідних величин, знайдемо параметри *k* і *b*.

У разі лінійної залежності геометричне і алгебраїчне значення коефіцієнта регресії полягає в тому, що він кількісно характеризує на скільки в середньому змінюється *y* при зміні *Xi* на одиницю свого вимірювання. Чим більше чисельні значення коефіцієнта регресії, тим більше відносний приріст функції при зміні аргументу.

4 Оцінка адекватності розробленої парної лінійної економетричної моделі на основі критеріїв і тестів.

5 Інтерпретація отриманих параметрів парної лінійної економетричної моделі. Це важливий етап, на якому відображається економічна результативність економетричного моделювання.

В загальному вигляді економетрична модель парної лінійної регресії може мати вигляд:

$$y = a_0 + a_1x + e, \qquad (7.22)$$

де y – залежна змінна;

x – незалежна змінна;

a_0, a_1 – параметри економетричного рівняння;

е – випадковий член.

Таким чином, парний регресійний аналіз дозволяє побудувати парну лінійну економетричну модель, яка дозволить встановити причинно-наслідковий зв’язок між залежною економічною змінною і незалежним фактором і створити передумови для побудови організаційно-економічних механізмів управління підприємствами та прийняття рішень, спрямованих на розвиток цих суб’єктів підприємницької діяльності. Проте більшість економічних процесів мають складний характер, де враховуються велика кількість факторів. Тому необхідно будувати економетричні моделі, які враховують декілька економічних показників, тобто розробляти лінійні моделі множинної регресії.

Тема 8 Лінійні моделі множинної регресії

8.1 Сутність кількісного регресійного аналізу.

8.2 Напрями побудови лінійної моделі множинної регресії.

8.3 Критерії оцінки адекватності лінійної моделі множинної регресії.

8.4 Економічна інтерпретації лінійних моделей множинної регресії.

Поняття: кількісний регресійний аналіз; коефіцієнт регресії; тест Дарбіна-Уотсона.

Джерела: [17], [18], [19], [20], [22], [28], [34], [35], [36], [44], [45], [46], [50], [59].

8.1 Сутність кількісного регресійного аналізу

Кількісний регресійний аналіз є продовженням парного регресійного аналізу у випадках, коли залежна змінна y пов’язана з двома або більше незалежними змінними x. Тобто відбувається розширення парної регресійної моделі, де важливе значення відіграють спільний вплив незалежних змінних на залежну змінну. Тому в кількісному регресійному аналізі необхідно враховувати й чітко визначити цей вплив, а також важливе значення має вирішення проблеми специфікації.

Остання проблема лежить в площині вибору тих факторів, які впливають на результуючий показник, економічно інтерпретуються і об'єктивно відображають господарські процеси, що відбуваються на підприємстві.

Результатом кількісного регресійного аналізу є побудова кількісної (багатофакторної) регресійної моделі.

У загальному вигляді, кількісна регресійна модель має вигляд:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_ix_i + e,$$

або

$$y = b + k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_ix_i + e \qquad (8.1)$$

де y – результуюча залежна змінна;

x_1, x_2, x_i – незалежна змінна;

a_0, a_1, a_2, a_i, b, k_1, k_2, k_i – параметри рівняння (коефіцієнти регресії);

e – випадковий член.

У кількісному регресійному аналізі визначається *коефіцієнт регресії*, який необхідний для забезпечення найкращої відповідності спостереженням і отримання оптимальних оцінок невідомих значень параметрів моделей.

У кількісному регресійному аналізі визначається коефіцієнт регресії, який необхідний для забезпечення найкращої відповідності спостереженням і отримання оптимальних оцінок невідомих значень параметрів моделей.

Для *розрахунку коефіцієнтів регресії* a_0, a_1, a_2, a_i використовуються методом найменших квадратів. Так для пошуку коефіцієнтів регресії (параметрів) двохфакторної моделі складають систему нормальних рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} \sum y = n\cdot a_0 + a_1\sum x_1 + a_2\sum x_2 \\ \sum yx_1 = a_0\sum x_1 + a_1\sum x_1^{\ 2} + a_2\sum x_1x_2 \\ \sum yx_2 = a_0\sum x_2 + a_1\sum x_1x_2 + a_2\sum x_2^{\ 2} \end{array}\right\}. \qquad (8.2)$$

Кількісний регресійний аналіз дозволяє розмежовувати вплив незалежних змінних, допускаючи при цьому можливість їх корелювати. Коефіцієнт регресії для кожної змінної x дає оцінку її впливу на величину y у випадку незмінності впливу на неї всіх інших змінних x.

Це може бути встановлено двома способами. Один з них складається в виявленні того, що якщо модель правильно специфікована і виконуються умови Гауса-Маркова, то оцінки будуть незміщеними. Інший спосіб полягає в оцінюванні регресійної залежності y від однієї з незалежних змінних, усуненні перед цим можливість використання останньої як заміщуючої для інших будь-яких незалежних змінних і показавши далі, що оцінка її коефіцієнта регресії співпадає з оцінкою коефіцієнта кількісної регресії. У рамках висвітлених способів необхідно розглянути умови Гауса-Маркова.

Якість коефіцієнтів регресії залежить від якості випадкового члена. Для того, щоб регресійний аналіз давав найкращі результати, випадковий член повинен задовольняти *4 умовам, відомим як умови Гауса-Маркова*.

1-а умова Гауса-Маркова полягає в тому, що математичне очікування випадкового члена будь-якого спостереження повинно дорівнювати нулю.

2-а умова Гауса-Маркова полягає в тому, що дисперсія випадкового члену повинна бути постійною для всіх спостережень.

3-а умова Гауса-Маркова припускає відсутність систематичного зв'язку між значення випадкового члену в будь-яких спостереженнях. Випадкові члени повинні бути абсолютно незалежними один від одного.

4-а умова Гауса-Маркова полягає в тому, що випадковий член повинен бути розподілений незалежно від пояснювальних змінних. Тобто пояснювальні змінні не є стохастичними. Значення будь-якої незалежної змінної в кожному спостереженні повинно бути визначено зовнішніми причинами, які не визначені в рівнянні регресії.

Коефіцієнти регресії є більш точними:

1. чим більша кількість спостережень у виборці;
2. чим більша дисперсія вибірки пояснювальних змінних;
3. чим менша теоретична дисперсія випадкового члену;
4. чим менше зв'язані між собою пояснювальні змінні.

Стандартна помилка коефіцієнта кількісної регресії визначається аналогічно, як і в парному регресійному аналізі. Тобто формула для стандартної помилки може бути визначена на основі заміни дисперсії на незміщену оцінку і витягування квадратного кореню.

Результатом кількісного регресійного аналізу є побудова багатофакторної моделі, яка відображає причинно-наслідкові зв'язки між факторами і створює кількісне підґрунтя для розробки механізмів і прийняття ефективних управлінських рішень.

8.2 Напрями побудови лінійної моделі множинної регресії

Для побудови лінійної моделі множинної регресії використовується статистична інформація про діяльність підприємства і здійснюються такі етапи: математико-статистичний аналіз, побудова багатофакторної регресійної моделі, перевірка побудованої моделі на адекватність, аналіз (інтерпретація) отриманих результатів.

На етапі математико-статистичного аналізу проводиться перевірка основних припущень класичного регресійного аналізу, крім того, здійснюється найважливіша процедура багатофакторного аналізу – перевірка факторів на мультиколінеарність. Слід відзначити, що термін «мультиколінеарність» означає, що в багатофакторній регресійній моделі дві або більше незалежних змінних (факторів) пов'язані між собою лінійною залежністю або, іншими словами, мають високий ступінь кореляції ($r_{xi} \to 1$, $i \neq j$).

Для здійснення математико-статистичного аналізу будується матриця коефіцієнтів парної кореляції, який показує ступінь зв'язку між факторами економетричної моделі. Потім аналізуються коефіцієнти парної кореляції між факторами. Результатом етапу математико-статистичного аналізу є знаходження множини основних незалежних між собою факторів, що є базою для побудови регресійної моделі.

На другому етапі для побудови багатофакторної моделі вибираються фактори, що будуть відображати причинно-наслідковий зв'язок. В цьому аспекті широке використання отримали «покроковий» метод і метод «виключень».

Найбільш доцільно відшукувати рівняння множинної регресії шляхом послідовного підключення до парного рівняння решти аргументів в порядку їх значущості («покроковий метод»).

У цьому випадку виявляється можливість на кожному етапі аналізувати:

– обумовленість вирішуваної системи за чисельним значенням її визначника (детермінатора);

– зміна β- коефіцієнтів, чисельне значення яких має бути менше 1, а знак не суперечити логіці;

– зростання коефіцієнта множинної кореляції R і убування залишкової дисперсії $\tilde{\sigma}^2_{ocт} = \tilde{\sigma}^2_y (1 - R^2)$.

Методика послідовного підключення аргументів складається з наступних операцій.

1 Обирається аргумент x_1, якому відповідає найбільший за абсолютним значенням «зовнішній коефіцієнт» кореляції

$$| r_{y1}| = \max | r_{yi}|, j = 1,2\ldots.q. \quad (8.3)$$

За аргументом x_1 записується рівняння

$$t_{y1} = t_{y1}\, t_{x1}. \quad (8.4)$$

2 Приєднюється аргумент x_{io}, для якого

$$| r_{xj}\, X_1 | = \min | r_{xj}\, x_1 |, j = 2,3,\ldots q. \quad (8.5)$$

Складається система нормальних рівнянь

$$r_{yx1} = \beta_1 + r_{xjo}\ \beta_2; \quad (8.6)$$

$$r_{y\,xjo} = \beta_1\, r_{xjo\,x1} + \beta_2 \quad (8.7)$$

і обчислюються значення β_1 и β_2. Визначаються

$$R^2_{y,\,x1\,xjo} = \beta_1\, r_{yx1} + \beta_2\, r_{y\,xjo}; \quad (8.8)$$

$$\sigma_{y,\,x1\,xjo} = \sqrt{1 - R^2 y, x_1 x_{j0}}. \quad (8.9)$$

Порівнюється $R^2 y_, x_1 x_{jo}$, $\sigma_{y,\,x1\,xjo}$ відповідно з $r^2_{yx1,}\, \sigma_{y\,x1}$.

Переконуються в справедливості нерівності

$$R^2_{y,\,x1\,xjo} \geq r^2_{yx1}\,;\ \sigma_{y,\,xjo} \leq \sigma_{y\,x1}. \quad (8.10)$$

У противному разі замінюється чинник аргумент іншим $x_{j1,}$ а аргумент X_{j0} переноситься на останнє місце.

3 Далі приєднується наступний аргумент X_{j1} і розв’язується система з трьома невідомими:

$$r_{y\,x1} = \beta_1 + \beta_2\ r_{x1\,xjo} + \beta_3\ r_{x1\,xj1}; \quad (8.11)$$

$$r_{y\,xjo} = \beta_1\, r_{x1\,xjo} + \beta_2\ + \beta_3\ r_{xjo\,xj1}; \quad (8.12)$$

$$r_{y\,xj1} = \beta_1\, r_{x1\,xjo} + \beta_2\, r_{xjo\,xj1}\ + \beta_3. \quad (8.13)$$

Обчислюються значення $\beta_{1,}$ β_2 и β_3.

Визначаються

$$R^2_{y,\,x1\,xjo\,xj1} = \beta_1\, r_{y\,x1} + \beta_2\, r_{y\,xjo} + \beta_3\, r_{y\,xj1}; \quad (8.14)$$

$$\sigma_{y,\,xjo\,xj1} = \sigma y\ \sqrt{1 - R^2_{y_1 x_1 x_{j0} x_{j1}}}\ . \quad (8.15)$$

і порівнюються з $R^2 y_, x_1 x_{jo}$ і $\sigma_{y,\,x1\,xjo}$. Переконуються в справедливості нерівності

$$R^2_{y,\,x1\,xjo\,xj1} \geq R^2_{y,\,x1\,xjo}; \quad (8.16)$$

$$\sigma_{y,\,x1\,xjo\,xj1} \leq \sigma_{y,\,x1\,xjo}. \quad (8.17)$$

У противному разі поступають аналогічно П.2.

Дослідження ведуть до тих пір, поки не будуть апробовані чинники-аргументи і збережені тільки ті з них, для яких β_j коефіцієнти суттєві й лінійно незалежні. У результаті виходить множинне рівняння в стандартизованому масштабі.

Від рівняння множинної регресії в стандартизованому масштабі

$$t_{\bar{y}_{xi}} = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \ldots + \beta_p t_n \quad (8.18)$$

до рівняння множинної регресії в натуральному масштабі

$$\bar{y}_{x1,\,x2\ldots Xp} = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_px_p + b. \quad (8.19)$$

Перехід здійснюється подвійно.

1 Шляхом використання формул

$$t_{\bar{y}_{xi}} = \frac{y-\bar{y}}{\sigma_y};\ t_{xi} = \frac{x_i-\bar{x}_i}{\sigma_{x_i}}, \quad (8.20)$$

Де $i = 1, 2,\ldots, p$.

При цьому маємо

$$\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y} = \beta_1\frac{x_1-\bar{x}_1}{\sigma_{x_1}} + \beta_2\frac{x_2-\bar{x}_2}{\sigma_{x_2}},\ldots\beta_p\frac{x_p-\bar{x}_p}{\sigma_{x_p}} \quad (8.21)$$

Підставивши відомі значення $\bar{y}$, σ_{xi}, σ_y, β_i і $\bar{X}_I$, отримаємо рівняння множинної регресії в натуральному масштабі, в якому чисельне значення вільного члена додатково визначати не потрібно.

2 Невідомі коефіцієнти a_i в рівнянні множинної регресії в натуральному масштабі визначають з виразу

$$a_1 = \beta_1\frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}};\ a_2 = \beta_2\frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}};\ldots a_p = \beta_p\frac{\sigma_y}{\sigma_{x_p}}. \quad (8.22)$$

Чисельне значення вільного члена

$$b = \bar{y} - (a_1\bar{X}_1 + a_2\bar{X}_2 + \ldots + a_p\bar{X}_p). \quad (8.23)$$

Метод «виключень» складається в тому, що вибирається набор факторів, які ймовірно можуть впливати на результативний показник. Потім, по черзі виключаються ті фактори, у який найменший коефіцієнт кореляції (згідно матриці статистики), а значення часткових F-критеріїв неперевищуюють нормативні значення. Таким чином, залишаться лише ті змінні, які відповідають розглянутим вище умовам.

Слід вказати, що на цьому етапі розраховується *коефіцієнт множинної кореляції*, який показує загальний вплив незалежних факторів на результуючий показник економетричної моделі. Він знаходиться у проміжку між 0 і 1. Чим більше вплив факторів, тим коефіцієнт множинної кореляції наближається до 1. Він не може перевищувати значення останньої.

Розрахунок коефіцієнта множинної кореляції ($R_{yx_1x_2\ldots x_n}$) розраховується за формулою Боярського [18]:

$$R_{yx_1x_2\ldots x_n} = \sqrt{\frac{-1^{\alpha}\,\Delta_*}{\Delta_0}}\,, \qquad (8.24)$$

де α – порядок повної матриці коефіцієнтів кореляції;

Δ_* – визначник повної матриці коефіцієнтів кореляції із заміною нижнього правого елемента нулем;

Δ_0 – визначник матриці, в якій враховані коефіцієнти парної кореляції незалежних факторів.

Якщо розкрити визначники для двохфакторної економетричної моделі, то коефіцієнт множинної кореляції може бути визначений:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\frac{-1^3\begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & r_{yx_1} \\ r_{x_1x_2} & 1 & r_{yx_2} \\ r_{yx_1} & r_{yx_2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_1x_2} & 1 \end{vmatrix}}}\,, \qquad (8.25)$$

де r_{yx_1}, r_{yx_2} – коефіцієнти парної кореляції між залежною змінною y і незалежними факторами x_1, x_2;

$r_{x_1x_2}$ – коефіцієнт парної кореляції між незалежними змінним x_1, x_2.

З метою контролю правильності розрахунків цей коефіцієнт визначають також за формулою [18]:

$$R_{yx_1x_2\ldots x_n} = \sqrt{r_{yx_1}\beta_{x_1} + r_{yx_2}\beta_{x_2} + \ldots + r_{yx_n}\beta_{x_n}}\,. \qquad (8.26)$$

де $\beta_{x_1,x_2,\ldots,x_n}$ – β-коефіцієнти для незалежних факторів економетричної моделі.

Цей коефіцієнт може бути розрахований наступним чином [18]:

$$\beta_i = \Delta_i / \Delta_0\,, \qquad (8.27)$$

де Δ_i – визначник (детермінант) матриці взаємної кореляції (мультиколінеарності) із заміною в ній i-го стовпця стовпцем коефіцієнтів кореляції r_{yx_i}.

Наприклад, β-коефіцієнти для одного з факторів двохфакторної моделі разраховуються наступним чином:

$$\beta_{x_1} = \frac{\begin{vmatrix} r_{yx_1} & r_{x_1x_2} \\ r_{yx_2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_1x_2} & 1 \end{vmatrix}}\,. \qquad (8.28)$$

Знайдені в результаті рішення кореляційної матриці β-коефіцієнти показують на яку частину середньоквадратичного відхилення σ_y змінюється середнє значення функції, якщо відповідний аргумент зменшується або збільшується, а інші аргументи залишаються незмінними.

Для з'ясування математико-статистичного змісту множинної кореляції всю досліджувану групу змінних слід розглядати як один чинник-аргумент. При цьому розраховується коефіцієнт надійності

$$M = \frac{R\sqrt{n}}{1-R^2}. \qquad (8.29)$$

Стандартну помилку (середню квадратичну похибку) коефіцієнта множинної кореляції визначають за формулою

$$\sigma_R = (1-R)/\sqrt{n}, \qquad (8.30)$$

де n – обсяг вибірки.

Сукупний вплив врахованих змінних на функцію визначається коефіцієнтом загальної детермінації R^2, а окремих чинників-аргументів за чисельними значеннями приватної детермінації $r_i\beta_i$:

$$R^2 = r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \ldots + r_p\beta_p. \qquad (8.31)$$

Стандартну (систематичну) похибку $\hat{R}^2$ обчислюють за формулою

$$\hat{R}^2 = 1-(1-R^2)\,\frac{n-1}{n-p}, \qquad (8.32)$$

де *p* - число параметрів рівняння регресії.

З рівняння множинної регресії можна отримати рівняння чистої (приватної) регресії y по кожному з аргументу x_i. Для цього фіксується значення всіх аргументів, окрім x_i, на середньому рівні.

Отримане рівняння описує, як в середньому змінюється змінна x_i, якщо всі інші аргументи постійні й закріплені саме на своїх середніх рівнях.

Приклад. Розрахуйте коефіцієнт множинної кореляції та визначте β-коефіцієнти, на основі даних представлених в таблиці 8.1.

Таблиця 8.1 – Матриця статистики економічних показників

Показники	Коефіцієнти парної кореляції		
	Р (у) (рентабельність продукції)	ФЗоз (x_1) (фондоозброєність основних засобів)	Ч (x_2) (середньоспискова чисельність працівників)
Р (у) (рентабельність продукції)	1	0,87	0,65
ФЗоз (x_1) (фондоозброєність основних засобів)	0,87	1	0,36
Ч (x_2) (середньоспискова чисельність працівників)	0,65	0,36	1

Розв'язання

1 Визначимо β-коефіцієнти для факторів x_1 і x_2 (формула 8.28):

$$\beta_{x_1} = \frac{\begin{vmatrix} 0,87 & 0,36 \\ 0,65 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0,36 \\ 0,36 & 1 \end{vmatrix}} = 0,731$$

$$\beta_{x_2} = \frac{\begin{vmatrix} 0,87 & 1 \\ 0,65 & 0,36 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0,36 \\ 0,36 & 1 \end{vmatrix}} = 0,387$$

2 Розрахуємо коефіцієнт множинної кореляції (формула 8.26):

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{r_{yx_1}\beta_{x_1} + r_{yx_2}\beta_{x_2}} = \sqrt{0,87x0,7371 + 0,65x0,387} = 0,945$$

На наступному етапі аналізу перевіряється адекватність моделі за допомогою використанням F-критерію Фішера і t-критерію Ст'юдента. При перевірці на адекватність економетричної моделі також використовується тест Дарбіна-Уотсона, який спрямований для перевірки кореляції між залишками.

На останньому етапі отримана модель аналізується і інтерпретується.

8.3 Критерії оцінки адекватності лінійної моделі множинної регресії

Статистична оцінка надійності коефіцієнта регресії здійснюється за допомогою t-критерію Ст'юдента. Він застосовується для оцінки тісноти зв'язку між незалежною змінною x і залежною y. При використанні цього критерію формулюється нульова гіпотеза. Потім отримане значення t-розподілу Ст'юдента порівнюється з критичним. Якщо фактичне значення t-розподілу Ст'юдента перевищує критичне, то спростовується нульова гіпотеза й зв'язок між змінними x і y вважається щільним. Якщо ні, то приймається нульова гіпотеза, а фактори моделі вважаються статистично неадекватними і виключаються з моделі при встановленому рівні значущості в 5% і 1%.

F-тест використовується для оцінки пояснення, яке дає рівняння в цілому. Якщо фактичне значення F-критерія вище нормативного, то модель адекватна, а її фактори залишаються у рівнянні.

Для перевірки адекватності економетричної моделі використовується *тест Дарбіна-Уотсона*, який спрямований для перевірки кореляції між залишками. Він включає такі етапи:

1 Розраховуються d-статистики для аналізованої вибірки даних. Значення d-статистики лежать у межах від 0 до 4. Показник Дарбіна-Уотсона розраховується наступним чином:

$$DW = \frac{\sum_{j=2}^{n}(e_j - e_{j-1})^2}{\sum_{j=1}^{n} e_j^2}, \qquad (8.33)$$

де e_j – залишки j-го ряду вибірки даних;

e_{j-1} – залишки поперднього j-го ряду вибірки даних.

2 Порівнюються отримані d-статистики з табличними d-статистиками при рівні значущості $\alpha = 0,05$, кількості факторів k, що присутні в моделі, і кількості спостережень n. Якщо розраховане значення d-статистики знаходиться в проміжку від 0 до d_L ($0< d < d_L$), то це свідчить про наявність позитивної автокореляції.

Якщо значення d потрапляє в зону невизначеності, тобто набуває значення $d_L \le d \le d_U$, або $4 - d_U \le d \le 4 - d_L$, то можемо зробити висновки ні про наявність, ні про відсутність автокореляції.

Якщо $4 - d_L < d < 4$, то маємо негативну автокореляцію.

Якщо $d_U < d < 4 - d_U$, то автокореляції немає.

Для оцінки адекватності лінійної моделі множинної регресії важливе значення має перевірка її на *гомо- або гетероскедастичність*. Суть цього явища полягає в тому, що варіація кожної ε_i навколо її математичного сподівання не залежить від значення x. Дисперсія кожної ε_i зберігається сталою незалежно від малих чи великих значень факторів: σ_ε^2 не є функцією x_{ij}, тобто $\sigma_\varepsilon^2 \neq f(x_{1i}, x_{2i},\ldots, x_{pi})$.

Якщо σ_ε^2 не є сталою, а її значення залежать від значень x, можемо записати $\sigma_\varepsilon^2 = f(x_{1i}, x_{2i},\ldots, x_{pi})$.

У цьому разі маємо справу з гетероскедастичністю. Оцінка моделі на наявність гетероскедастичності полягає в тому, що на першому етапі здійснюється тестування моделі на наявність гетероскедастичності. І якщо підтверджується гіпотеза про її наявність, то на другому етапі модель виключається.

Тестування лінійної моделі множинної регресії, як і випадку лінійної моделі парної регресії, на гетероскедастичність здійснюється на підставі тесту рангової кореляції Спірмена. Значущість отриманого коефіцієнта рангової кореляції Спірмена перевіряється за допомогою t-критерія Ст'юдента при (n-2) кількості ступенів свободи.

Фактичне значення t-критерію Ст'юдента зіставляється з $t_{кр}$. Якщо $t_ф > t_{кр}$, то підтверджується гіпотеза про наявність гетероскедастичності. А, якщо $t_ф < t_{кр}$, то приймається гіпотеза про гомоскедастичність.

8.4 Економічна інтерпретації лінійних моделей множинної регресії

На *етапі аналізу отриманих результатів* здійснюється інтерпретація отриманої економетричної моделі. На цьому етапі обґрунтовується економічна доцільність отриманих результатів.

Розглянемо, приклад, економічний зміст моделі залежності суми капіталу і середньооблікової чисельності працівників ($Ч$), співвідношення власного і позикового капіталів ($\frac{ВК}{ПК}$), відношення витрат інвестованого капіталу на оплату праці й матеріали ($\frac{Воп}{Вм}$).

$$Кпор = -2355{,}39 + 28{,}7 \times Ч + 1795{,}24 \times \frac{ВК}{ПК} + 8{,}95 \times \frac{Воп}{Вм}. \tag{8.34}$$

Економетрична багатофакторна модель (8.8) показує, що 82% коливань нового капіталу (коефіцієнт детермінації – 82%) обумовлюється трьома факторами: середньообліковою чисельністю працівників, співвідношенням власного й позикового капіталу, а також відношенням витрат інвестованого капіталу на оплату праці й матеріали.

Статистичні характеристики моделі адекватні. Фактичні значення t-статистик більші ніж критичні (табл. 8.2); фактичне значення критерію Фішера $F_ф = 69 > F_{0,05;24} = 3{,}01$ також значно перевищує його критичне (табличне) значення; значення критерію Дарбіна -Уотсона свідчить про відсутність автокореляції залишків: $1{,}65 < d_ф = 2{,}14 < 2{,}35$; величина критерію Спірмена ($r_s = 0{,}124$) свідчить про гомоскедастичність, оскільки отримане значення t-статистики нижче його критичного значення ($t_ф = 0{,}628 < t_{кр} = 1{,}706$), мультиколінеарність між незалежними факторами низька, оскільки коефіцієнти парної кореляції між цими показниками мають значення в проміжку від 0,15 до 0,45.

Економічна інтерпретація моделі (8.34) полягає в тому, що між середньообліковою чисельністю працівників і новим капіталом зв'язок лінійний. Зростання середньооблікової чисельності на одного працівника призведе до збільшення обсягу нового капіталу на 28,7 тис. грн.

Таблиця 8.2 – Значення t-статистик для параметрів моделі (10.34)

Параметри	розрахункові	критичні
Постійний параметр	2,912	1,711
Середньооблікова чисельність працівників ($Ч$)	5,278	1,711
Співвідношення власного й позикового капіталу ($\frac{ВК}{ПК}$)	2,329	1,711
Відношення витрат інвестованого капіталу на оплату праці й матеріали ($\frac{Воп}{Вм}$)	1,981	1,711

Між новим капіталом та чинниками: співвідношенням власного й позикового капіталу, відношенням витрат інвестованого капіталу на оплату праці й матеріали також існує лінійний зв'язок. Збільшення співвідношення власного й позикового капіталу на 10 $\frac{коп.}{грн.}$ призведе до зростання обсягів нового капіталу на 179,52 грн. Збільшення відношення витрат інвестованого капіталу на оплату праці й матеріали на 10 $\frac{коп.}{грн.}$ призведе до зростання нового капіталу на 0,9 грн. Слід відзначити, що коли розглянуті фактори моделі (8.34) будуть дорівнювати *0*, то новий (отриманий) капітал буде мати значення -235,54 грн. Тобто на цей показник у відповідних умовах негативний вплив здійснюють інші економічні фактори. Тому в подальших дослідженнях необхідно враховувати їх вплив.

Таким чином, кількісний регресійний аналіз дозволяє встановити причинно-наслідковий зв'язок між декількома економічними факторами, побудувати багатофакторні економетричні моделі й розробити ефективні механізми управління підприємством.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1 Альгин А. П. Грани экономического риска / А. П. Альгин. – М. – 1991.

2 Ашманов С. А. Введення в математичну економіку / С. А. Ашманов. – М. : Наука, 1984.

3 Балабанов И. Т. Риск-менеджмент / И. Т. Балабанов – М. : Финансы и статистика, 1996.

4 Банди Б. Основы линейного программирования / Б. Банди – М. : Радио и связь, 1989.

5 Бережная Е. В. Математические методы моделирования экономических систем / Е. В. Бережная – М. : Фин. и стат., 2001.

6 Бернстайн П. Против Богов. Укрощение риска. Пер. с англ. / П. Бернстайн – М. : ЗАО «Олимп-бизнес», 2006.

7 Бирман И. Оптимальное программирование / И. Бирман – М. : Радио и Связь, 1976.

8 Булинская Е. В. Теория риска и перестрахование. Ч. 1 / Е. В. Булинская – М. : МГУ, 2001.

9 Буянов В. П. Рискология. Управление рисками / В. П. Буянов, К. А. Кирсанов, Л. А. Михайлов – М. – 2002.

10 Вітлінський В. В. Ризик у менеджменті / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний – Київ. : Тов. «Борисфен-М», 1996. – 336 с.

11 Воробьёв Ю. Л. Управление риском и устойчивое развитие. Человеческое измерение / Ю. Л. Воробьёв, Г. Г. Малинецкий, Н. А. Махутов. – Общественные науки и современность, N6, 2000.

12 Высшая математика для экономистов / Под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2003.

13 Горчаков А. А. Компьютерные экономико-математические модели / А. А. Горчаков, И. В. Орлова – М. : Компьютер, ЮНИТИ, 1995.

14 Горчаков А. А. Методы экономико-математического моделирования и прогнозирования в новых хозяйственных условиях хозяйствования / А. А. Горчаков, И. В. Орлова, В. А. Половников. – М. : ВЗФЭИ, 1991.

15 Грубер Й. Економетрія: Посібник для студ. екон. спец., т. 2. Переклад. – Київ. : ЗАТ «Нічлава», 1998. – 295 с.

16 Демченков В. С. Системный анализ деятельности предприятий / В. С. Демченков, В. И. Милета – М : Финансы и статистика, 1990. – 182 с.

17 Джонстон Д. Ж. Эконометрические методы. – М. : Финансы и статистика, 1980.

18 Доля В. Т. Економетрія. Методичний посібник з вивчення дисципліни (для студентів за напрямами підготовки 0501 «Економіка», 0592 «Менеджмент»).

19 Дрейпер Н. Прикладной регрессионный аналіз / Н. Дрейпер, Г. Смит – М. : Статистика, 1973.

20 Доугерти К. Введение в эконометрику: Пер. с англ. / К. Доугерти. – М. : ИНФРА-М, 2001. – 402 с.

21 Дубров А. М. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и би знесе / А. М. Дубров. – М. : «Финансы и статистика», 2001.

22 Жданов С. Экономические модели и методы управления / С. Жданов. – М. : Эльта, 1998.

23 Замков О. О. Математические методы в экономике / О. О. Замков, А. В. Толстонятенко, Ю. Н. Черемных. – М. : ДНСС, 1997.

24 Ефимова М. Р. Общая теория статистики: ученик / М. Р. Ефимова, Е. В. Петрова, В. Н. Румянцев. – М. : ИНФРА-М, 1998. – 416 с.

25 Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теорія – М. : Прогресс, 1975, 2003.

26 Карасев А. И. Математические методы и модели в планировании / А. И. Карасев, Н. Ш. Кремер, Т. Н. Савельева – М. : Экономика, 1987.

27 Кенэ Ф. Избранные экономические произведения. пер. с франц. / Ф. Кенэ. – М. : Соцэкгиз, 1960. – 551 с.

28 Скоков Б. Г. Конспект лекцій з дисципліни «Економетрія» (для студентів 3 курсу, напряму 0305 «Економіка і підприємництво») / Укл.: Б. Г.Скоков, К. А. Мамонов. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 59 с.

29 Конюховский П. Математические методы исследования в экономике. / П. Конюховский. – СПб. : Питер, 2000. – 208 с.

30 Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике; учеб. пособие для вузов. / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман.

31 Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике – М.: Финстат, 2003.

32 Лапуста М. Г. Риски в предпринимательской деятельности / М. Г. Лапуста, Л. Г. Шаршукова – М. : Инфра-М, 1996.

33 Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений / О. И. Ларичев. – М. : Логос, 2000.

34 Лещинський О. Л. Економетрія: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О. Л. Лещинський, В. В. Рязанцева, О. О. Юнькова – Л.: МАУП, 2003. – 208 с.

35 Лук'яненко І. Г. Економетрика: Підручник / І. Г. Лук'яненко, Л. І. Краснікова – Київ.: Т-во «Знання», КОО, 1998. – 494 с.

36 Лук'яненко І. Г. Сучасні економетричні методи у фінансах. Навчальний посібник. / І. Г. Лук'яненко, Ю. О. Городніченко – Київ. : Літера ЛТД, 2002. – 352 с.

37 Ляшенко І. М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. / І. М. Ляшенко. – Київ. : Вища шк., 1999.

38 Малыхин В. И. Математическое моделирование экономики / В. И. Малыхин. – М. : Из-во УРАО, 1998г.

39 Малыхин В. И. Финансовая математика. / В. И. Малыхин. – М. : ЮНИТИ, 2002.

40 Малиш Н. А. Моделювання еколого-економічних систем агропромислового комплексу на території радіоактивно забрудненого регіону. Дис. на здоб. вч. ступ. к. е. н. КНУ ім. Тараса Шевченка, 1993.

41 Макаревич Л. М. Управление предпринимательскими рисками. / Л. М. Макаревич. – М. : Издательство «Дело и Сервис», 2006.

42 Малинецкий Г. Г. Управление риском и редкие катастрофические события / Математическое моделирование, т.14, №8, 2002.

43 Мерков А. М. Санитарная статистика (пособие для врачей). / А. М. Мерков, Л. Е. Поляков – М. : Медицина., 1976. – 384 с.

44 Скоков Б. Г. Методичні вказівки «Використання пакету програм «Statistica» в економетричних дослідженнях» (для студентів 3 курсу денної форми навчання, спец. 6.050200 «Менеджмент організацій») / Укл. Б. Г. Скоков, К. А. Мамонов – Харків.: ХНАМГ, 2007. – 51 с.

45 Скоков Б. Г. Методические указания к самостоятельному изучению курса «Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении», проведению практических занятий и выполнению контрольных работ (для студентов 4, 5 курсов всех форм обучения, специальности 1722) / Составитель Б. Г. Скоков. – Харьков.: Харьковское межвузовское полиграфическое предприятие, 1988. – 58 с.

46 Методична розробка практичного заняття із студентами 4 – 5 курсів з теми: «Оцінка достовірності результатів дослідження» / Укл. В. Л. Таралло, А. П. Зубович, Е. Ц. Ясинська. – Чернівці, 2001. – 6 с.

47 Миксюк С. Ф. Экономико-математические методы и модели / С. Ф. Миксюк, В. Н. Комкова – Мн. : БГЭУ, 2006.

48 Мішура Ю. С. Теоретично-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці / Ю. С. Мішура, В. М. Пархоменко, М. Й. Ядренко – Київ. : Інформтехніка, 1995. – 380 с.

49 Монахов А. Математические методы анализа экономики. / А. Монахов. – СПб.: Питер, 2002. – 176 с.

50 Егоров А. А. Об оценке достоверности результатов моделирования боевых действий (операции) объединения ВВС. – Военная теория и практика. С. 60-65.

51 Петі У. «Політична арифметика». – Кембрідж: Юниверситі Прес, 1899.

52 Петров Е. Г. Методи і засоби прийняття рішень у соціально – економічних системах: Навчальний посібник. / Е. Г. Петрова, М. В. Новожилова – Київ.: Техніка, 2004. – 256с.

53 Ракитов А. И. Принципы научного мышления. / А. И. Ракитов – М.: Политиздат, 1975. – 143 с.

54 Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применение. / С. Р. Рао. – М.: Наука, 1968.

55 Райзберг Б. А. Предпринимательство и риск. – «Знание». Новое в жизни, науке и технике, 1992. – № 4.

56 Риски в современном бизнесе. / П. Г. Грабовый, С. Н. Петрова, С. И. Полтавцев и др. – М.: Алане, 1994.

57 Руденко А. В. Переход от вероятности к достоверности в доказывании по уголовным делам / Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата юридических наук. // А. В. Руденко. – Краснодар, 2001. – 24 с.

58 Самойленко М. І. Дослідження операцій (Математичне програмування. Теорія масового обслуговування): Навч. посібник / М. І. Самойленко, Б. Г. Скоков – Харків: ХНАМГ, 2005. – 176 с.

59 Сергеев М. Предпринимательский риск и стратегии предпринимателя (http://www.fact.ru/archiv/ num01/serg.html).

60 Сивый В. Б. Математические методы и модели в планировании и управлении жилищно-коммунальным хозяйством: Учеб. пособие для вузов / В. Б. Сивый, Б. Г. Скоков – Харьков.: Издательство «Основа» при Харьковском государственном университете, 1991. – 208 с.

61 Скурихин Н. П. Математическое моделирование. / Н. П. Скурихин – М. Высшая школа 1989.

62 Сытник В. Ф. Математические модели в планировании и управлении предприятиями / В. Ф. Сытник, Е. А. Каратодава – Киев.: Вища школа, 1985.

63 Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования: в 2-х томах.; перевод с английского, 1991. – 360 с.

64 Терехов Л. Л. Экономико-математические методы / Л. Л. Терехов – М.: Статистика, 1988.

65 Тони Райс Финансовые инвестиции и риск: Пер. с англ. / Тони Райс, Брайан Койли – Торгово-издательское бюро BHV, 1995. – 592 с.

66 Уткин Э. А. Риск-менеджмент: Учебник. / Э. А. Уткин – М.: Тандем, 1998.

67 Федосеев В. В. Экономико-математические методы и модели в маркетинге. / В. В.Федосеев – М.: Финстатинформ, 1996.

68 Чернов В. А. Анализ коммерческого риска. / В. А. Чернов – М.: Финансы и статистика, 1998.

69 Чернышевский Н. Г. Полное собрание сочинений: в 16 т. / Н. Г. Чернышевский – М.: 1939 – 1953.

70 Четыркин Е. М. Статистические методи прогнозирования. / Е. М. Четыркин – М.: Финансы и статистика, 1979.

71 Хазанова Л. Математическое моделирование в экономике / Л. Хазанова – М.: 1998.

72 Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. / Д. Химмельблау – М.: Наука, 1978.

73 Хохлов Н. В. Управление риском: Учеб. пособие для вузов. / Н. В. Хохлов – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1999.

74 Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях.; перевод с английского. 1974.

75 Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. / С. И. Шелобаев – М.: ЮНИ-ТИ-ДАНА, 2000.

76 Шрейдер Ю. А. Системы и модели. / Ю. А. Шрейдер, А. А. Шаров – М.: Радио и Связь, 1982.

77 Экономико-математические методы и прикладные модели: Уч. пособие для вузов / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайитбегов и др. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.

78 Ястремський О. І. Моделювання економічного ризику. – Київ.: Либідь, 1992. – 176 с.

79 Ястремський О. І. Основи теорії економічного ризику: Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. – Київ.: «АртЕк», 1997. – 248 с.

80 Daenzer B. J. Fact-Finding Techniques in Risk Analysis. – AMA, 1970. – P. 63-67.

81 Hayes R. И., Wheelwright S. C., Clark K. B. Dynamic Manufacturing: Creating Learning Organization. The Free Press, NY, 1988.

82 Head G., Horn S. Essentials of Risk Management. V. 1, IIA, 1991. – P. 136.

83 Merril William C., Fox Karl A. Introduction to Economic statistics. – John. Wiley&Sans, 1970. – 658.

84 Robert N. Charette. Applications Strategies for Risk Analisis. McGraw-Hill Book Cjmpany, 1990. New York, N-Y 10020. – ISBN 0-07-010888-9.

85 Simon J. D. Political Risk Assessment. – «Columbia Journal of World Business». 17, no. 3. – 1982.

86 V.Lofti, C. Pegels. Decision Support System for Production and Operations Managament (DSSPOW). IRWIN, 1991.-359 c.

87 http://www.ur.freecopy.ru.

88 http://www.vseslova.ru.

Навчальне видання

МАМОНОВ Костянтин Анатолійович
РАДЗІНСЬКА Юлія Борисівна

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисциплін
«МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ У ЗЕМЛЕУСТРОЇ»
*(для студентів денної та заочної форм навчання
спеціальності 193 – Геодезія та землеустрій)*

Відповідальний за випуск *О. Є. Поморцева*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *К. А. Алексанян*

План 2016, поз. 14 Л

Підп. до друку 29.03.2017. Формат 60х84/16
Друк на різографі. Ум. друк. арк. 5,3
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.