МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
для практичних занять, виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань, самостійної роботи з навчальної дисципліни

«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

Розділ **«Кінематика»**

(для студентів-бакалаврів денної і заочної форм навчання за спеціальностями
192 – Будівництво та цивільна інженерія,
185 – Нафтогазова інженерія та технології,
141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка,
263 – Цивільна безпека, 275 – Транспортні технології (за видами))

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2018

Методичні рекомендації для практичних занять, виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань, самостійної роботи з навчальної дисципліни «Теоретична механіка». Розділ «Кінематика» (для студентів-бакалаврів денної і заочної форм навчання за спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія», 185 – Нафтогазова інженерія та технології, 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, 263 – Цивільна безпека, 275 – Транспортні технології (за видами)) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. : В. П. Шпачук, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз. – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 41 с.

Укладачі: д-р техн. наук В. П. Шпачук,
канд. техн. наук О. І. Рубаненко,
канд. техн. наук А. О. Гарбуз

Рецензент О. О. Чупринін, кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної і будівельної механіки

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки, протокол № 11 від 21.06.18.

ЗМІСТ

ВСТУП

Методичні рекомендації для самостійної роботи студентів переслідують мету підвищити її ефективність як у позааудиторний час, так і при спілкуванні з викладачем.

Методичні вказівки містять по тридцять варіантів задач за трьома темами розділу «Кінематика»: «Кінематика точки», «Обертальний рух твердого тіла», «Кінематичний аналіз плоского механізму». Для кожної теми розглянуто приклади розв'язання задач. При самостійному освоюванні теми студентам рекомендується закріпити знання теоретичного матеріалу, розібрати відповідний приклад і розв'язати кілька задач із запропонованих тридцяти варіантів.

Матеріали цих вказівок можуть використовуватись також викладачами кафедри при проведенні самостійних і контрольних робіт в аудиторії, при прийманні розрахунково-графічних завдань і комплектуванні задач в екзаменаційних білетах.

Даний навчально-методичний посібник складено з метою допомоги студентам будівельних, електромеханічних, екологічних і транспортних спеціальностей вузу в самостійній роботі, при підготовці до занять, контрольних робіт, тестового контролю, захисту змістових модулів, заліків та іспитів з теоретичної механіки.

РОЗДІЛ 1 КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

Рух точки можна задати одним з трьох способів: векторним, координатним та натуральним. При практичних розрахунках використовують в основному координатний та натуральний способи. Розглянемо, як задається рух і визначаються швидкість та прискорення точки при вказаних способах.

1.1 Векторний спосіб

При векторному способі завдання руху точки задається закон руху

$$\bar{r} = \bar{r}(t)\,, \qquad (1.1)$$

де $\bar{r}$ – радіус-вектор точки (вектор, проведений із нерухомої точки О до розглядуваної) (рис. 1.1).

Швидкість точки – векторна величина, яка:

1) дорівнює першій похідній радіуса-вектора точки за часом

$$\bar{V} = \frac{d\,\bar{r}}{dt} \text{ або } \bar{V} = \dot{\bar{r}}\,; \qquad (1.2)$$

2) напрямлена по дотичній до траєкторії точки в бік її руху (рис. 1.1);

3) характеризує швидкість змінювання положення точки за часом.

Прискорення точки – векторна величина, яка:

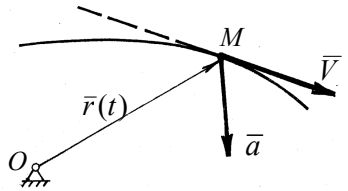


Рисунок 1.1

1) дорівнює першій (другій) похідній швидкості (радіуса-вектора) точки за часом

$$\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d^2\overline{r}}{dt^2} \quad \text{або}$$

$$\overline{a} = \dot{\overline{V}} = \ddot{\overline{r}}; \qquad (1.3)$$

2) напрямлена в бік угнутості траєкторії точки (рис. 1.1);

3) характеризує бистроту змінювання швидкості точки за часом.

1.2 Координатний спосіб

При координатному способі рух точки задається її декартовими координатами як функціями часу (рис. 1.2). У випадку плоскої траєкторії це будуть функції:

$$x = x(t), \qquad y = y(t). \qquad (1.4)$$

Рівняння (1.4) становить одночасно рівняння траєкторії точки в параметричній формі, де роль параметру відіграє час t. Виключивши з рівнянь руху (1.4) час t, можна знайти рівняння траєкторії у звичайній формі, тобто у вигляді, що дає залежність між її координатами.

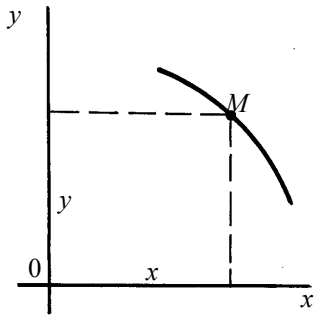


Рисунок 1.2

Швидкість точки визначається за формулами

$$V_x = \dot{x}; \quad V_y = \dot{y}; \qquad (1.5)$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}. \qquad (1.6)$$

де V_x, V_y – проекції вектора швидкості на осі x та y відповідно; $\dot{x}, \dot{y}$ – перші похідні за часом від відповідних координат точки; V – модуль швидкості точки; $\overline{V}_x, \overline{V}_y$ – складові вектора швидкості уздовж осей x, y.

Вектор швидкості $\overline{V}$ завжди напрямлений по дотичній до траєкторії в даній точці в бік її руху (рис. 1.3).

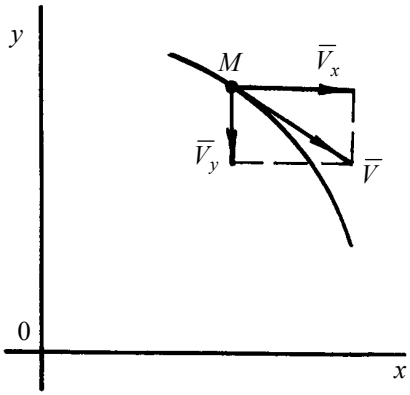


Рисунок 1.3

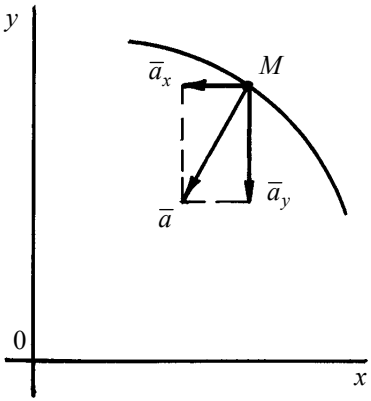


Рисунок 1.4

Прискорення точки визначається за формулами

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}\,; \qquad a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}\,; \tag{1.7}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,. \tag{1.8}$$

де a_x, a_y – проекції вектора прискорення на осі x та y відповідно; $\dot{V}_x, \dot{V}_y$ – перші похідні за часом від відповідних проекцій швидкості точки; $\ddot{x}, \ddot{y}$ - другі похідні за часом від відповідних координат точки; a – модуль прискорення точки; $\overline{a}_x, \overline{a}_y$ – складові вектора прискорення уздовж осей x, y.

Вектор прискорення $\overline{a}$ завжди напрямлений в бік угнутості траєкторії (рис. 1.4).

1.3 Натуральний спосіб

При натуральному способі задається:

1) траєкторія точки;
2) початок відліку з зазначенням додатного напрямку відліку;
3) закон руху точки уздовж траєкторії:

$$\sigma = \sigma(t)\,, \tag{1.9}$$

де σ – дугова координата (криволінійна координата, що відлічується уздовж дуги траєкторії) (рис. 1.5).

При натуральному способі застосовується *натуральна система координат*, початок якої розміщується у точці *M,* що розглядається (рис. 1.6): вісь *дотичної* τ − напрямлена по дотичній до траєкторії у цій точці в бік додатного напрямку відліку дугової координати; вісь *головної нормалі* n − лежить у стичній площині (для плоскої траєкторії − її площина) і напрямлена перпендикулярно до дотичної у бік угнутості траєкторії; вісь *бінормалі* b − доповнює систему координат до просторової.

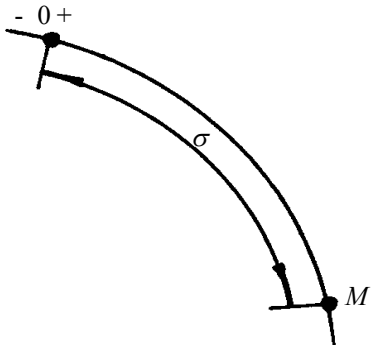


Рисунок 1.5

Швидкість точки визначається за формулами:

$$V_\tau = \dot{\sigma}\,; \tag{1.10}$$

$$V = |V_\tau|\,, \tag{1.11}$$

де V_τ − проекція швидкості на вісь τ дотичної до траєкторії; V – модуль швидкості точки; $\dot{\sigma}$ − перша похідна за часом від дугової координати; $\overline{V_\tau}$ − складова швидкості точки уздовж дотичної (завжди збігається з вектором швидкості $\overline{V}$) (рис. 1.6).

Прискорення точки визначається за формулами:

$$a_\tau = \dot{V}_\tau \;;\quad a_n = \frac{V^2}{\rho}\,; \tag{1.12}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\,, \tag{1.13}$$

де a_τ − проекція прискорення точки на вісь дотичної τ (має назву *дотичне прискорення*), характеризує бистроту зміни швидкості точки за величиною; a_n − проекція прискорення точки на вісь головної нормалі *n* (має назву *нормальне прискорення*), характеризує бистроту

зміни швидкості точки за напрямом; $\dot{V}_\tau$ – перша похідна за часом від проекції швидкості на дотичну; ρ – радіус кривизни траєкторії у точці *M,* що розглядається; $\overline{a}_\tau, \overline{a}_n$ – складові прискорення точки уздовж осей τ , *n* (рис. 1.6).

Потрібно зазначити, що *у загальному випадку*, коли знаки a_τ та V_τ збігаються (рис. 1.6, а), рух точки буде *прискореним* (при цьому вектори $\overline{a}_\tau$ та $\overline{V}$ будуть спрямовані в один бік), а якщо знаки a_τ та V_τ неоднакові (рис. 1.6, б), то рух точки буде *сповільненим* (при цьому вектори $\overline{a}_\tau$ та $\overline{V}$ спрямовуються в різні боки).

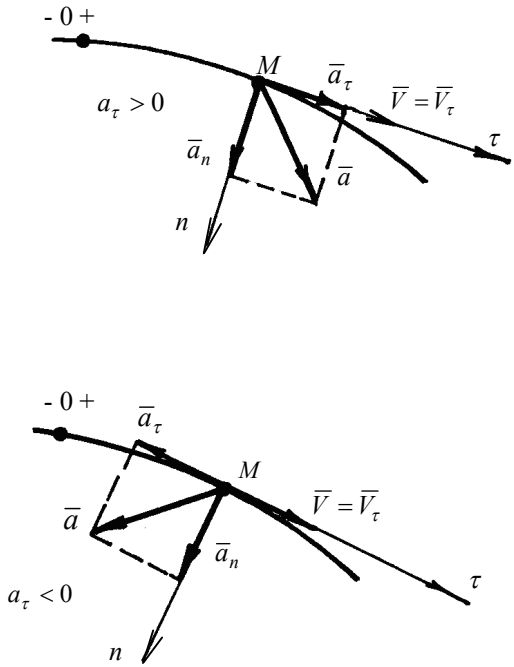


Рисунок 1.6

1.4 Окремі випадки руху точки

1. *Прямолінійний рух*: $a_n = const = 0$. У цьому випадку $\overline{a} = \overline{a}_\tau$, радіус кривизни $\rho = \infty$.

2. *Криволінійний рух*: $a_n \neq 0$. У цьому випадку $\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n$.

3. *Рівнозмінний рух*: $a_\tau = const \neq 0$. При цьому рух буде *рівноприскореним*, якщо $a_\tau > 0$, і *рівносповільненим* у разі $a_\tau < 0$.

4. *Рівномірний рух*: $a_\tau = const = 0$. У цьому випадку модуль швидкості буде сталим: $\overline{V} = const$; прискорення дорівнюватиме нулю $a = 0$, якщо точка буде рухатись по прямолінійній траєкторії, і прискорення буде збігатися з нормальним прискоренням $\overline{a} = \overline{a}_n$, якщо точка буде рухатись по криволінійній траєкторії.

5. *Особливі випадки*:

1). $a_{\tau 1} = 0$ у заданий момент часу t_1, проте $a_\tau \neq const$. Цей випадок визначає *екстремальну точку*, в якій відбувається *зміна характеру руху*: із сповільненого на прискорений або з прискореного на сповільнений (модуль швидкості досягає в цій точці відповідно мінімального або максимального значення).

2). $a_{n1} = 0$ у заданий момент часу t_1, проте $a_n \neq const$. В цьому разі можлива одна з двох ситуацій:

а) в точці M_1 швидкість дорівнює нулю $V_1 = 0$, тобто точка змінює напрям руху на протилежний;

б) в точці M_1 радіус кривизни дорівнює нулю $\rho_1 = 0$, тобто точка M_1 є точкою перегину траєкторії.

1.5 Приклад розв'язання задачі

За заданими рівняннями руху точки (x, y – у сантиметрах)

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 4t - 3t^2 \end{cases} \tag{1.14}$$

визначити її траєкторію, швидкість, прискорення, дотичне та нормальне прискорення, а також радіус кривизни траєкторії в момент часу, коли точка знаходиться на осі OX. Одержані результати зобразити на рисунку й зробити висновок.

Розв'язання

1. Визначимо траєкторію руху точки. Для цього виключимо параметр часу t з рівнянь руху. Виразимо час із першого рівняння руху (1.14)

$$t = \frac{x}{3} \tag{1.15}$$

і підставимо в друге рівняння

$$y = 4\frac{x}{3} - 3\frac{x^2}{3^2}$$

або

$$y = \frac{4x - x^2}{3}\,. \tag{1.16}$$

Отже, рівнянням траєкторії є *парабола*. Зобразимо параболу на рисунку (рис. 1.7), будуючи її, наприклад, по точках.

2. Знайдемо положення точки на траєкторії у заданий момент часу. За умовою даної задачі точка у цей момент знаходиться на осі OX, отже її ордината $y = 0$:

$$4t - 3t^2 = 0$$

або

$$t(4 - 3t) = 0\,. \tag{1.17}$$

Корені цього квадратного рівняння − $t = 0$; $t = \frac{4}{3}c$. Визначимо координату x в момент часу $t_1 = \frac{4}{3}c$:

$$x_1 = 3t_1 = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4 \text{ (см)}. \tag{1.18}$$

Зобразимо точку M_1 з координатами (4; 0) на траєкторії (рис. 1.7). При правильних розрахунках точка M_1 повинна збігатися з траєкторією.

3. Знайдемо швидкість точки. Для цього спочатку визначимо проекції швидкості на осі координат:

$$V_x = \dot{x} = 3 \text{ (см/с)}, \tag{1.19}$$

$$V_y = \dot{y} = 4 - 3 \cdot 2t = 4 - 6t. \tag{1.20}$$

Для заданого моменту часу t_1

$$V_{x_1} = 3 \text{ (см/с)}, \quad V_{y_1}\Big|_{t=\frac{4}{3}} = 4 - 6 \cdot \frac{4}{3} = 4 - 8 = -4 \text{ (см/с)}.$$

Модуль швидкості визначимо за її проекціями на осі координат:

$$V_1 = \sqrt{V_{x_1}^2 + V_{y_1}^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \text{ (см/с)}. \qquad (1.21)$$

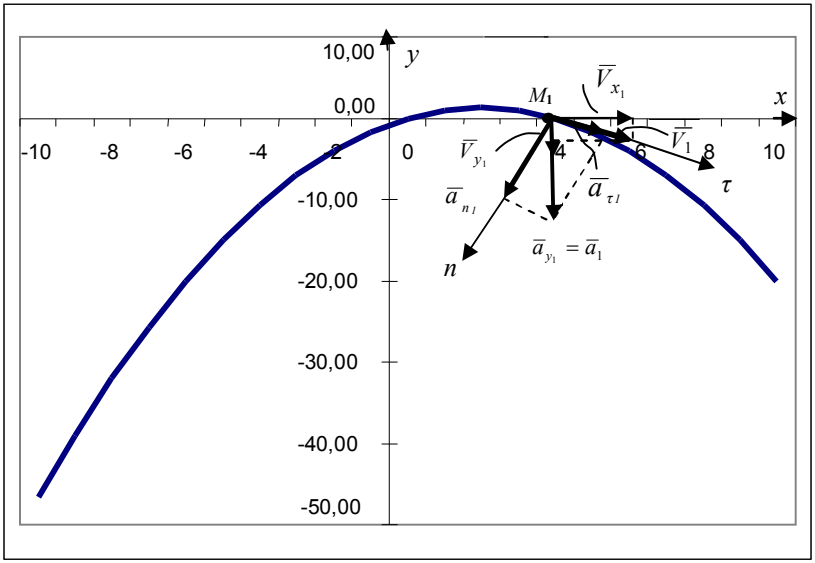


Рисунок 1.7

Зобразимо складові швидкості $\overline{V}_{x_1}, \overline{V}_{y_1}$ на рисунку (рис. 1.7), відкладаючи їх з точки M_1 відповідно зі знаками проекцій V_{x_1}, V_{y_1} у масштабі швидкостей (відзначимо, що він може не збігатися з масштабом віддалей). Проекція V_{x_1} додатна, тому складову $\overline{V}_{x_1}$ відкладаємо у напрямку додатного відліку координати *x*. Проекція V_{y_1} від'ємна, тому складову $\overline{V}_{y_1}$ відкладаємо у напрямку від'ємного відліку координати *y*. Вектор швидкості $\overline{V}_1$ зображаємо діагоналлю прямокутника, побудованого на складових $\overline{V}_{x_1}, \overline{V}_{y_1}$, як на сторонах. При правильних розрахунках та побудовах вектор швидкості $\overline{V}_1$ повинен бути напрямленим по дотичній до траєкторії в точці M_1.

4. Знайдемо прискорення точки. Визначимо спочатку проекції прискорення на осі координат:

$$a_x = \dot{V}_x = (-3)' = 0\,; \qquad (1.22)$$

$$a_y = \dot{V}_y = 6 \ \text{(см/с}^2\text{)}. \qquad (1.23)$$

Для заданого моменту часу t_1 отримаємо

$$a_{x_1} = 0, \ a_{y_1} = 6 \ \text{(см/с}^2\text{)}.$$

Модуль прискорення визначимо за його проекціями на осі координат:

$$a_1 = \sqrt{a_{x_1}^2 + a_{y_1}^2} = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6 \ \text{(см/с}^2\text{)}. \qquad (1.24)$$

Зобразимо складові прискорення $\overline{a}_{x_1}, \overline{a}_{y_1}$ на рисунку (рис. 1.7), відкладаючи їх з точки M_1 відповідно зі знаками проекцій a_{x_1}, a_{y_1} у масштабі прискорень (який може не збігатися з масштабом швидкостей та віддалей). Проекція a_{y_1} від'ємна, тому складову $\overline{a}_{y_1}$ відкладаємо у напрямку від'ємного відліку координати y. Вектор прискорення $\overline{a}_1$ звичайно зображується діагоналлю прямокутника, побудованого на складових $\overline{a}_{x_1}, \overline{a}_{y_1}$, як на сторонах. У даному прикладі вектор $\overline{a}_1$ збігається зі складовою $\overline{a}_{y_1}$ (оскільки $a_{x_1} = 0$). При правильних розрахунках та будуваннях вектор прискорення $\overline{a}_1$ повинен бути напрямленим у бік угнутості траєкторії.

5. Знайдемо дотичне прискорення точки. Для цього можна використати формулу

$$a_\tau = \dot{V}_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}. \qquad (1.25)$$

Для заданого моменту часу t_1

$$a_{\tau_1} = \frac{V_{x_1} a_{x_1} + V_{y_1} a_{y_1}}{V_1} = \frac{3 \cdot 0 + (-4) \cdot (-6)}{5} = 4{,}8 \ \text{(см/с}^2\text{)}. \qquad (1.26)$$

Зауваження. При визначенні a_{τ_1} за допомогою проекцій V_{x_1}, V_{y_1}, a_{x_1}, a_{y_1} краще використовувати точні значення цих величин, а не приблизні.

6. Знайдемо нормальне прискорення точки. Для цього використаємо формулу (1.13), з якої виходить, що

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \qquad (1.27)$$

Для заданого моменту часу t_1

$$a_{n_1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau_1}^2} = \sqrt{6^2 - 4{,}8^2} = 3{,}6 \ \text{(см/с}^2\text{)}. \qquad (1.28)$$

На рисунку дотичне й нормальне прискорення можна побудувати, якщо провести осі дотичної τ (яку можна побудувати як продовження вектора швидкості $\overline{V_1}$) та головної нормалі n (що перпендикулярна осі τ і напрямлена в бік угнутості траєкторії) і спроектувати вектор прискорення на ці осі. Величини проекцій a_{τ_1}, a_{n_1}, що виміряні з рисунка (з урахуванням масштабу), повинні збігатися зі значеннями, визначеними за формулами (1.26), (1.28).

7. Радіус кривизни траєкторії визначимо, використовуючи другу з формул (1.12):

$$\rho = \frac{V^2}{a_n}. \qquad (1.29)$$

Для заданого моменту часу t_1

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n_1}} = \frac{5^2}{3{,}6} = 6{,}9 \text{ (см)}.$$

Відповідь: у момент часу t_1: $x_1 = 4$ см; $y_1 = 0$ см; $V_1 = 5$ см/с;
$a_1 = 6$ см/с^2; $a_{\tau 1} = 4{,}8$ см/с^2; $a_{n1} = 3{,}6$ см/с^2; $\rho_1 = 6{,}9$ см.

Висновок: Точка рухається уздовж параболи вправо − униз (на це указує напрямок вектора швидкості $\overline{V_1}$) прискорено, оскільки, згідно з (1.25), $a_\tau = \dfrac{3\cdot 0 + (4-6t)\cdot(-6)}{\sqrt{3^2 + (4-6t)^2}} \neq const$ (рух не є рівнозмінним), при цьому $a_{\tau 1} > 0$ (рух є прискореним).

1.6 Завдання до теми 1

За заданими рівняннями руху точки (табл. 1.1): $x = x(t)$, $y = y(t)$ − визначити її траєкторію, та для моменту часу t_1 знайти положення точки на траєкторії $x_1 = x(t_1)$, $y_1 = y(t_1)$, її швидкість V_1, прискорення a_1, дотичне $a_{\tau 1}$ і нормальне a_{n1} прискорення, радіус кривизни траєкторії ρ_1, а також зробити висновок про властивості руху точки. Одержані результати зобразити на рисунку.

Примітка. У варіантах 2,4,8,14,16,20,22 момент часу t_1 треба визначити з умови, що наведена в останній колонці.

Таблиця 1.1

Номер варіанта	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	Для моменту часу t, с, що дорівнює (коли)
1	2	3	4
1	$4-4\cos t$	$3\sin t$	$\frac{\pi}{4}$
2	$-4t$	$2t^2-8t$	$\vec{V} // OX$
3	$3\sin t-2$	$1-3\cos t$	$\frac{\pi}{3}$
4	$4-t^2$	$2t^2+6$	точка міститься на осі OY
5	$1-2\cos t$	$\sin t+2$	$\frac{\pi}{2}$
6	$3/(t-2)$	$8-4t$	3
7	$-5-6\sin t$	$6\cos t+1$	$\pi/4$
8	$3t$	t^2-4	точка міститься на осі OX
9	$2-3\cos t$	$4\sin t$	$\frac{\pi}{6}$
10	$2t^2+2$	$3-t^2$	2
11	$1+2\sin t$	$2\cos t$	$2\frac{\pi}{4}$
12	$-3t$	$-\frac{3}{t}$	2
13	$2\cos t+1$	$2+\sin t$	$\frac{\pi}{6}$
14	$2t-t^2$	t	$\vec{V} // OY$
15	$1-\sin t$	$\cos t$	$\frac{\pi}{3}$
16	$5+t^3$	t^3-1	точка міститься на осі OX

Закінчення таблиці 1.1

1	2	3	4
17	$4\cos t$	$2\sin t+1$	$\frac{\pi}{2}$
18	$1/(2t+2)$	$t+1$	2
19	$2-5\sin t$	$5\cos t$	$\frac{\pi}{4}$
20	$2t$	$4t^2-4t$	$\vec{V}\,//\,OX$
21	$2\cos t-3$	$1-4\sin t$	$\frac{\pi}{3}$
22	$9-t^2$	t^2-5	точка міститься на осі OY
23	$5-4\sin t$	$4\cos t$	$\frac{\pi}{6}$
24	$8/t$	$t/4$	6
25	$3-3\cos t$	$2\sin t+2$	$\frac{\pi}{2}$
26	$4t^2-2t-7$	$7t^2-\frac{7}{2}t-16$	5
27	$2-3\sin^2\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$3\cos^2\left(\frac{\pi}{3}t\right)-1$	4
28	$2\cos(\pi t)$	$6t$	2
29	$5-4\cos\left(\frac{\pi t^2}{4}\right)$	$4\sin\left(\frac{\pi t^2}{4}\right)$	$\frac{\pi}{2}$
30	$4-3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$\frac{3}{4}\pi$

РОЗДІЛ 2 ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

2.1 Кінематичні характеристики руху тіла в цілому

Обертальним називається рух твердого тіла, при якому будь-які дві точки цього тіла залишаються нерухомими під час руху. Пряма, що проходить через ці точки, є також нерухомою і називається *віссю обертання*. Положення тіла визначається *кутом повороту тіла* φ навколо осі обертання (кут вимірюється в радіанах):

$$\varphi = \varphi(t)\,. \qquad (2.1)$$

Кутова швидкість тіла ω дорівнює першій похідній від кута повороту за часом (ω вимірюється в рад/с або $с^{-1}$):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}\,. \qquad (2.2)$$

Кутове прискорення тіла ε дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту за часом:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}\,. \qquad (2.3)$$

(ε вимірюється в рад/$с^2$ або $с^{-2}$).

У техніці кутову швидкість задають числом обертів за хвилину і позначають n (частота обертання). Переведення частоти обертання n (об/хв) в ω (рад/с) проводиться за формулою

$$\omega = \pi \cdot n / 30\,. \qquad (2.4)$$

Окремі випадки:

- *рівномірне обертання:*

$$\varepsilon = const = 0; \quad \omega = \omega_0 = const\,; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t\,, \qquad (2.5)$$

- *рівнозмінне обертання:*

$$\varepsilon = const \neq 0; \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t\,; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2\,, \qquad (2.6)$$

де $\omega_0; \varphi_0$ – відповідно початкова кутова швидкість і початковий кут повороту при $t = 0$.

2.2 Кінематичні характеристики руху окремих точок тіла і передача обертання

Формули, за допомогою яких визначаються кінематичні величини будь-якої точки тіла (рис. 2.1):

– *переміщення точки по колу* – дуга $AA' = AO \cdot \varphi$; (2.7)

– *лінійна швидкість* точки A: $V_A = \omega \cdot AO$, (2.8)

при цьому вектор $\overline{V}_A \perp AO$ і напрямлений відповідно до «стрілки» ω;

– *обертальне прискорення* точки A: $a_A^{об} = \varepsilon \cdot AO$, (2.9)

вектор $\overline{a}_A^{об} \perp AO$ і напрямлений відповідно до «стрілки» ε;

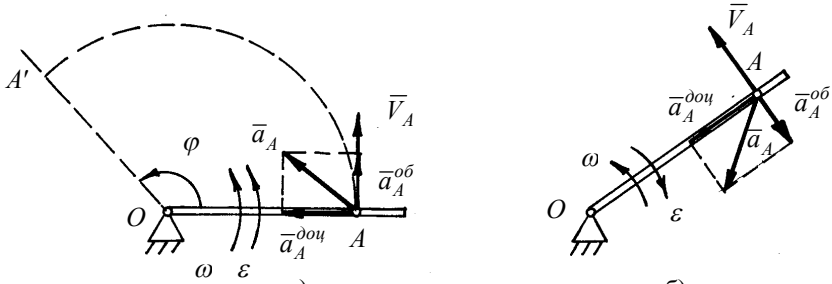
– *доцентрове прискорення* точки A: $a_A^{доц} = \omega^2 \cdot AO$, (2.10)

вектор $\overline{a}_A^{доц}$ напрямлений по відрізку AO від точки A до точки O;

– *повне прискорення*

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^{об}\right)^2 + \left(a_A^{доц}\right)^2} = AO \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \ , \qquad (2.11)$$

де AO – відстань від розглядуваної точки A до осі обертання, що перпендикулярна до площини рисунка і проходить через точку O.



а) б)

Рисунок 2.1

Якщо обертальний рух тіла прискорений (рис. 2.1,а), то вектори $\vec{V}_A$ і $\overline{a}_A^{об}$ мають однаковий напрям, якщо рух сповільнений - то напрями векторів протилежні (рис. 2.1,б).

Передача обертання від одного твердого тіла до другого здійснюється за допомогою зубчастого чи фрикційного зачеплення двох коліс (рис. 2.2,а,б), або за допомогою пасової передачі (рис. 2.2,в).

Кутові швидкості та кутові прискорення коліс або шківів обернено пропорційні радіусам коліс $(r_1; r_2)$, або діаметрам $(d_1; d_2)$, або кількості зубців $(z_1; z_2)$:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}; \qquad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}. \qquad (2.10)$$

Формули (2.10) витікають із співвідношень для швидкості і обертального прискорення точки дотику A: $V_A = \omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$, $a_A^{об} = \varepsilon_1 \cdot r_1 = \varepsilon_2 \cdot r_2$.

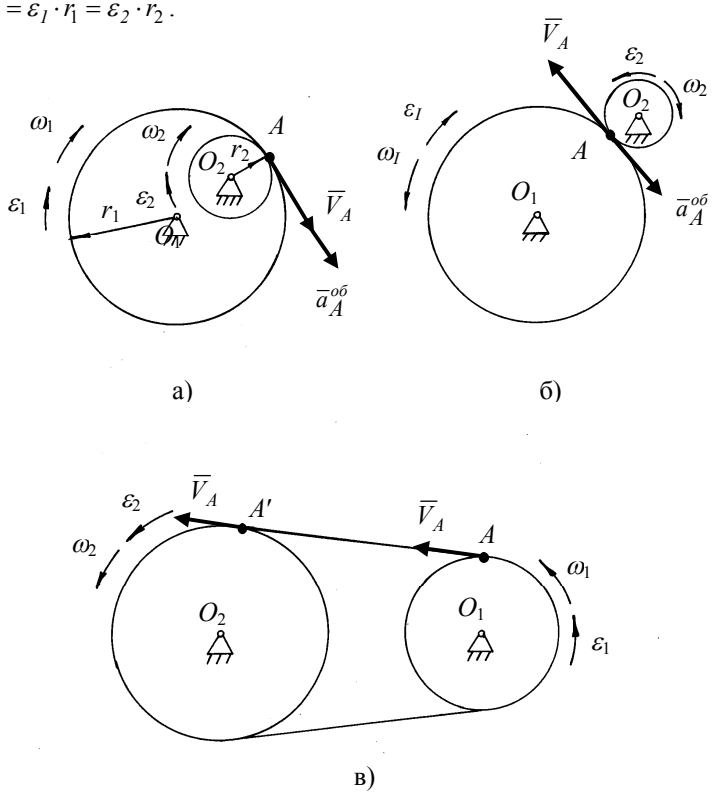


Рисунок 2.2

2.3 Приклад розв'язання задачі

Розглядається механізм, зображений на рисунку 2.3, з наступними даними:

r_2 = 25 см; R_2 = 50 см; r_3 = 40 см; R_3 = 65 см; x_0 = 14 см;

V_0 = 5 см/с; x_2 = 168 см; t_2 = 2 с; t_1 = 1 с.

Визначити рівняння руху вантажу 1, а також швидкості та прискорення вантажу та точки M в момент часу t_1.

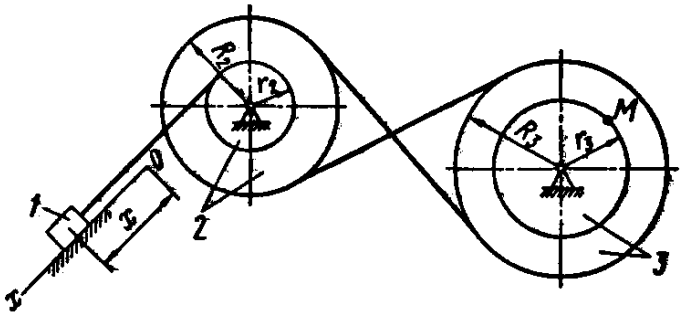


Рисунок 2.3

Розв'язання

Рівняння руху вантажу 1

$$x = C_2 t^2 + C_1 t + C_0 .$$

Маємо у моменти часу $t = 0$; $t_2 = 2$ с; $x_0 = 14$ см;

$V_0 = \dot{x}_0 /_{t=0} = 5$ см/с; $x_2 = 168$ см.

Підставивши числові значення, отримаємо:

$C_0 = 14$ см; $C_1 =$ 5 см/с; $C_2 = \dfrac{(x_2 - C_0 - C_1 t_2)}{t_2^2} = 36$ (см/с^2).

Рівняння руху вантажу 1 –

$$x = 36 \cdot t^2 + 5t + 14 \text{ (см)}.$$

Швидкість вантажу –

$$V = \dot{x} = (72t + 5)\Big|_{t_1=1} = 77 \text{ см/с}.$$

Прискорення вантажу – $a = \ddot{x} = 72$ см/с^2.

Згідно зі схемою механізму швидкість точки *A* барабана

$$V_A = V = \omega_2 \cdot r_2 .$$

Крім того, маємо $\dfrac{\omega_2}{\omega_3} = \dfrac{R_3}{R_2}$.

Звідки $\omega_3 = \omega_2 \dfrac{R_2}{R_3} = V \dfrac{R_2}{(r_2 R_3)} = (2{,}22t + 0{,}154)\Big|_{t_1=1} = 2{,}37$ рад/с.

Кутове прискорення колеса 3

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 2{,}22 \text{ рад/с}^2.$$

Швидкість точки *M*, її обертальне, доцентрове й повне прискорення визначаються так:

$$V_м = r_3 \cdot \omega_3 = 40 \cdot 2{,}37 = 94{,}8 \text{ см/с};$$

$$a_м^{об} = r_3 \cdot \varepsilon_3 = 40 \cdot 2{,}22 = 88{,}8 \text{ см/с}^2;$$

$$a_м^{доц} = r_3 \cdot \omega_3^2 = 40 \cdot 2{,}37^2 = 225 \text{ см/с}^2;$$

$$a_м = \sqrt{\left(a_м^{об}\right)^2 + \left(a_м^{доц}\right)^2} = 242 \text{ см/с}^2.$$

Результати розрахунків зображені на рисунку 2.4 і зведені в таблиці 2.1.

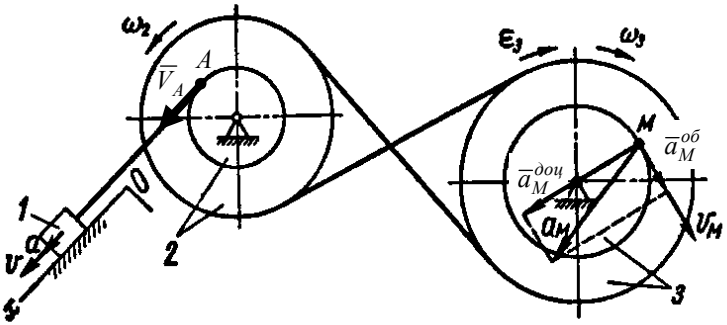


Рисунок 2.4

Таблиця 2.1

V	a	ω_3	ε_3	$V_м$	$a_м^{об}$	$a_м^{доц}$	$a_м$
см/с	см/с^2	рад/с	рад/с^2	см/с	см/с^2	см/с^2	см/с^2
77	72	2,37	2,22	94,8	88,8	225	242

2.4 Завдання до теми 2

Вантаж 1 рухається згідно з рівнянням

$$x = C_2 t^2 + C_1 t + C_0,$$

де t – час, с; C_0, C_1, C_2 – деякі сталі. У момент часу $t = 0$ координата вантажу x_0; швидкість – V_0, а при $t = t_2$ його координата x_2. Знайти сталі C_0, C_1, C_2. Визначити в момент часу t_1 швидкість та прискорення вантажу і точки *M* колеса механізму.

Чисельні значення даних наведені в таблиці 2.2, схеми варіантів на рисунках 2.5, 2.6, 2.7.

Таблиця 2.2

Варі-ант	Розміри, см				Координати і швидкість			Час, с	
	R_2	r_2	R_3	r_3	x_0, см	V_0, см	x_2, см	t_2	t_1
1	60	45	36	–	2	12	173	3	2
2	80	–	60	45	5	10	41	2	1
3	100	60	75	–	8	6	40	4	2
4	58	45	60	–	4	4	172	4	3
5	80	–	45	30	3	15	102	3	2
6	100	60	30	–	7	16	215	4	2
7	45	35	105	–	8	5	124	4	3
8	35	10	10	–	6	2	110	3	2
9	40	30	15	–	10	7	48	2	1
10	15	–	40	35	5	3	129	4	3
11	40	25	20	–	9	8	65	2	1
12	20	15	10	–	5	10	175	3	2
13	30	20	40	–	7	0	550	5	2
14	15	10	15	–	6	3	80	2	1
15	15	8	16	–	5	2	180	4	2
16	20	15	15	–	4	6	220	4	3
17	15	10	20	–	8	4	44	2	1
18	20	15	10	–	3	12	210	4	1
19	15	10	20	–	5	10	490	5	3
20	25	15	10	–	10	8	225	3	1
21	20	10	30	10	6	5	356	5	2
22	40	20	35	–	7	6	103	2	1
23	40	30	30	15	5	9	192	3	2
24	30	15	40	20	9	8	105	4	2
25	50	20	60	–	8	4	119	3	2
26	32	16	32	16	6	14	860	4	2
27	40	18	40	18	5	10	195	2	1
28	40	20	40	15	8	5	348	3	2
29	25	20	50	25	4	6	32	2	1
30	30	15	20	–	10	7	128	2	1

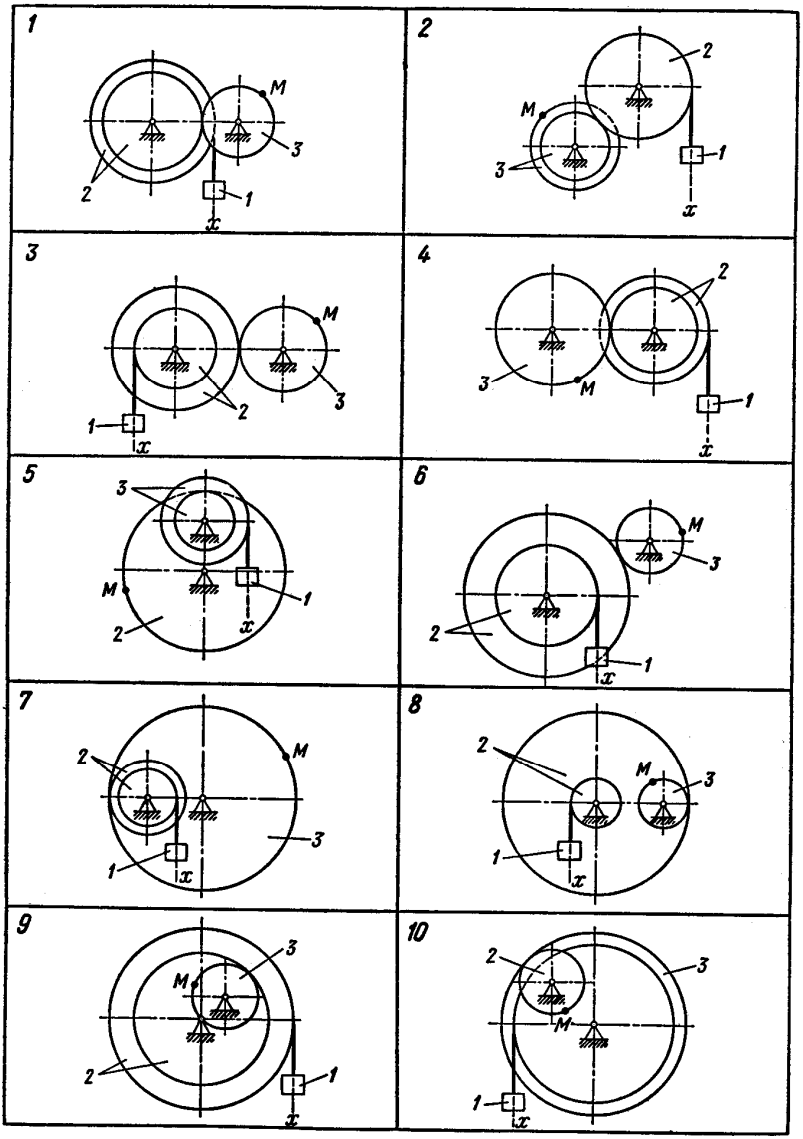

1
M
3
2
1
x
2
2
M
1
3
x
3
M
3
2
1
x
4
2
3
M
1
x
5
3
M
1
2
x
6
M
3
2
1
x
7
2
M
3
1
x
8
2
M
3
1
x
9
3
M
2
1
x
10
2
3
M
1
x

Рисунок 2.5

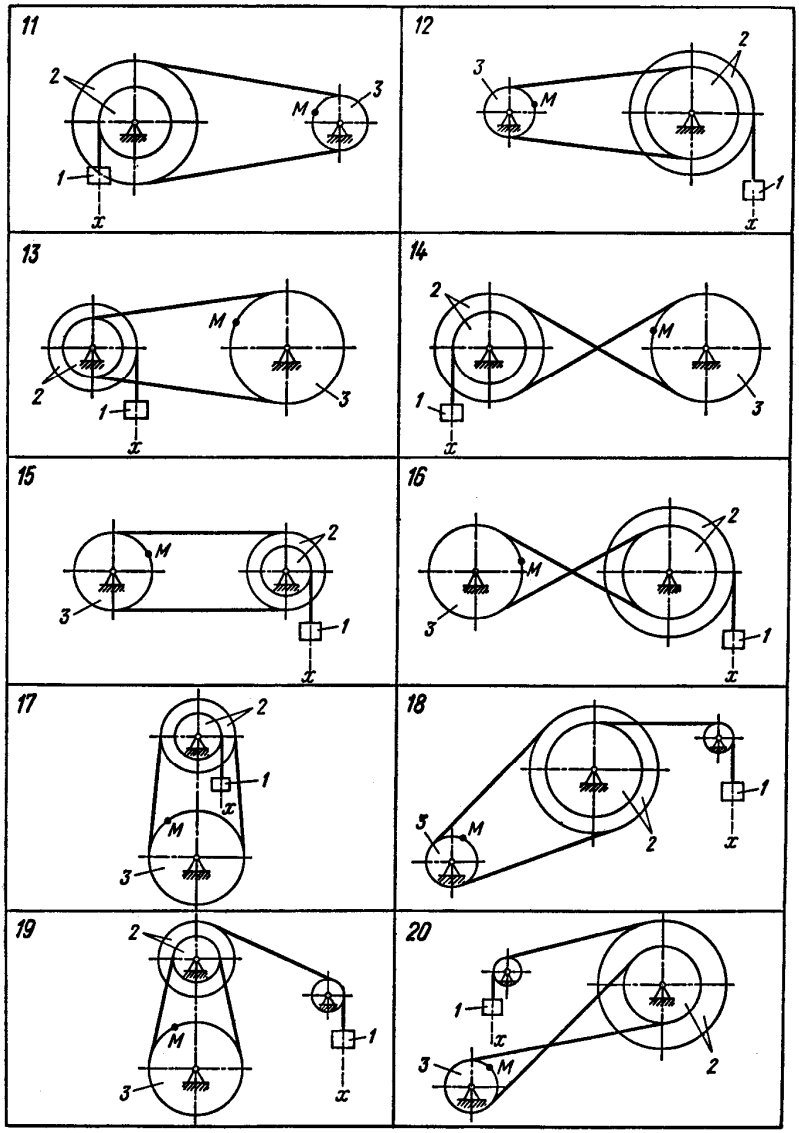


Рисунок 2.6

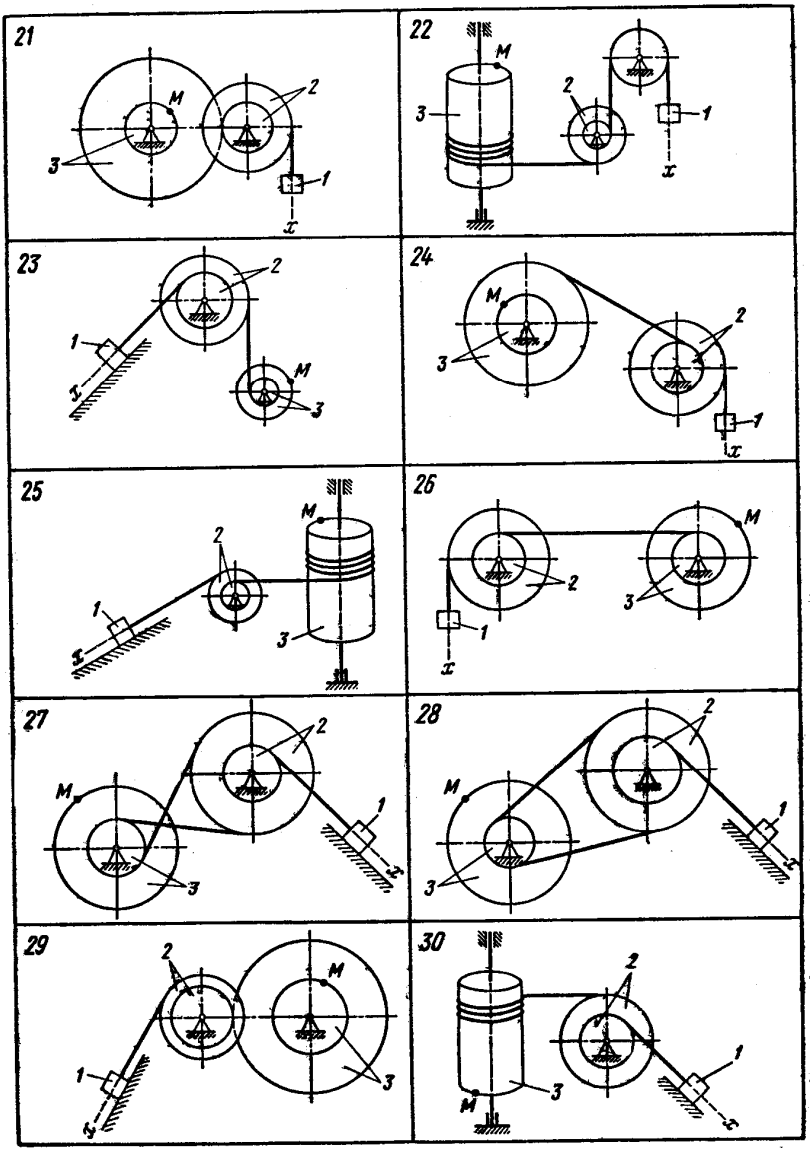

21
M
2
3
1
x
22
M
3
2
1
x
23
2
1
x
M
3
24
M
3
2
1
x
25
M
2
1
x
3
26
M
2
3
1
x
27
2
M
1
x
3
28
2
M
1
x
3
29
2
M
1
x
3
30
2
1
3
M
x

Рисунок 2.7

РОЗДІЛ 3 КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПЛОСКОГО МЕХАНІЗМУ

3.1 Визначення швидкостей точок і кутових швидкостей ланок плоского механізму

Якщо ланка механізму (стержень, колесо або ін.) здійснює плоскопаралельний рух, то для визначення швидкостей точок і кутової швидкості ланки можна скористатися уявленням про миттєвий центр швидкостей (МЦШ). *МЦШ* – це точка, пов'язана з розглядуваною ланкою, швидкість якої у даний момент часу дорівнює нулю.

Розрахунок ланки відбувається у три дії:

1) *будується МЦШ.* Для визначення положення МЦШ у загальному випадку треба знати напрями швидкостей (або траєкторії) двох точок розглядуваної ланки. *МЦШ* (позначимо його літерою *P*) *знаходиться* у точці перетину перпендикулярів, проведених з двох точок до їх швидкостей (або до дотичних до траєкторій руху точок) (рис. 3.1);

2) визначається *кутова швидкість ланки ω*. Кутова швидкість у кожний момент часу *дорівнює* відношенню швидкості будь-якої точки ланки до її відстані до МЦШ:

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_c}{CP} = \ldots; \qquad (3.1)$$

Кутова швидкість *відображається* на рисунку «стрілкою» навколо МЦШ у відповідності з тим, як вектор відомої лінійної швидкості «обертається» навколо МЦШ;

3) визначається *лінійна швидкість точки ланки.* Швидкість будь-якої іншої точки ланки *дорівнює* добутку кутової швидкості *ω* на відстань від даної точки до МЦШ; вектор швидкості точки *напрямлений* перпендикулярно до відрізка, що з'єднує цю точку з МЦШ, у відповідності зі «стрілкою» кутової швидкості. Наприклад, для точки *C* буде (рис. 3.1):

$$V_c = \omega \cdot CP; \quad \overline{V}_c \perp CP. \qquad (3.2)$$

Окремі випадки:

а) швидкості двох точок, наприклад *A* і *B,* паралельні та відрізок *AB* не $\perp \overline{V}_A$, МЦШ не існує (формально знаходиться у нескінченності) (рис. 3.2). У цьому разі

$$\omega = \frac{V_A}{\infty} = 0, \qquad (3.3)$$

а швидкості усіх точок ланки паралельні між собою і однакові за величиною (як при поступальному русі):

$$V_A = V_B = V_C = \ldots; \qquad (3.4)$$

б) колесо котиться без ковзання по нерухомій поверхні. МЦШ знаходиться у точці дотику колеса до нерухомої поверхні (рис. 3.4). Далі для розрахунків застосовуються формули (3.1), (3.2).

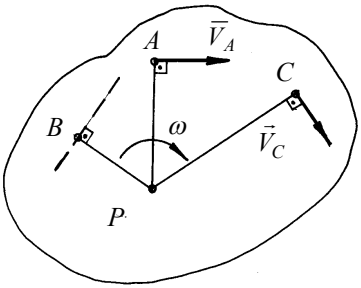


Рисунок 3.1

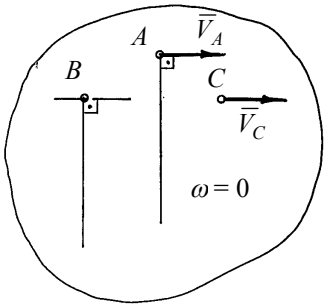


Рисунок 3.2

3.2 Визначення прискорень точок і кутових прискорень ланок плоского механізму

Якщо ланка механізму здійснює плоскопаралельний рух, то *прискорення будь-якої точки B цієї ланки дорівнює* геометричній сумі прискорення точки, вибраної за полюс (наприклад, точки *A,* прискорення якої відомо або знаходиться з розрахунку попередньої ланки), і прискорення точки *B* при обертанні ланки навколо полюса *A* (рис. 3.3):

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{AB} = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{доц} + \overline{a}_{BA}^{об}; \qquad (3.5)$$

$$a_{BA}^{доц} = \omega^2 \cdot BA; \qquad (3.6)$$

$$a_{BA}^{об} = \varepsilon \cdot BA, \qquad (3.7)$$

де ω, ε – кутова швидкість і кутове прискорення ланки, якій належать точки *A* і *B*. При цьому вектор $\overline{a}_{BA}^{доц}$ напрямлений по відрізку *BA* від точки *B* до полюса *A,* вектор $\overline{a}_{BA}^{об} \perp BA$ і напрямлений згідно зі «стрілкою» кутового прискорення ε.

Формулу (3.5) можна скоригувати в залежності від траєкторій полюса і розглядуваної точки. Якщо точка *B* рухається по прямій, а точка *A* по колу, то формулу (3.5) можна записати у вигляді:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^{доц} + \overline{a}_A^{об} + \overline{a}_{BA}^{доц} + \overline{a}_{BA}^{об}. \qquad (3.8)$$

Якщо і точка *B* рухається по колу, то (3.8) приймає вигляд:

$$\overline{a}_B^{доц} + \overline{a}_B^{об} = \overline{a}_A^{доц} + \overline{a}_A^{об} + \overline{a}_{BA}^{доц} + \overline{a}_{BA}^{об}. \qquad (3.9)$$

Якщо траєкторія точки *B* невідома (не пряма і не коло, наприклад, довільна точка стержня або колеса), то формула (3.8) записується у вигляді:

$$\overline{a}_{BX} + \overline{a}_{BY} = \overline{a}_A^{доц} + \overline{a}_A^{об} + \overline{a}_{BA}^{доц} + \overline{a}_{BA}^{об}, \qquad (3.10)$$

де $\overline{a}_{BX}, \overline{a}_{BY}$ – складові прискорення точки В уздовж осей *X* та *Y*.

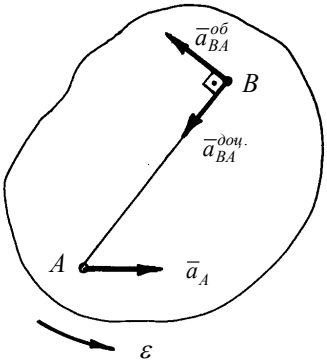


Рисунок 3.3

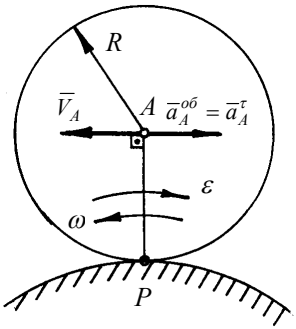


Рисунок 3.4

При розв'язанні задач векторні рівняння (3.5), (3.8), (3.9) або (3.10) проектують на осі координат і з одержаних алгебраїчних рівнянь визначають невідомі величини.

3.3 Особливості визначення складової $\overline{a}_{BA}^{об}$

1. Якщо ланка являє собою не колесо (стержень, трикутник або ін.), то кутове прискорення *ε*, як правило, заздалегідь визначити не можна. В цьому разі вектор $\overline{a}_{BA}^{об}$ зображають $\perp BA$ у будь-який бік. Далі проектують рівняння (3.5), (3.8) або (3.9) на осі координат, вважаючи, що модуль $a_{BA}^{об}$ невідомий. З одержаних алгебраїчних рівнянь визначають модуль $a_{BA}^{об}$, а далі з формули (3.7) кутове прискорення ланки:

$$\varepsilon = \frac{\left|a_{BA}^{об}\right|}{BA}, \qquad (3.11)$$

напрямлення ε визначається дійсним напрямленням $\overline{a}_{BA}^{об}$ відносно полюса *A*.

2. Якщо ланка є колесо, що котиться, і відстань від полюса *A* до МЦШ є сталою (однакова у будь-який момент часу) (рис. 3.4), то кутове прискорення знаходиться таким чином:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\left(V_A / AP\right)}{dt} = \frac{1}{AP} \cdot \frac{dV_A}{dt} = \frac{a_A^{\tau}}{AP} = \frac{a_A^{об}}{AP}, \qquad (3.12)$$

де ω, ε – кутова швидкість і кутове прискорення колеса; $AP = R = const$.

При цьому напрямок ε визначається напрямком «обертання» вектора $\overline{a}_A^{об}$ відносно МЦШ.

Зауваження. Формулу (3.10) можна використовувати тільки у випадку, коли кутове прискорення ланки ε визначено заздалегідь.

3.4 Методика розв'язання задач

При розв'язанні задач треба послідовно розглянути рух окремих ланок механізму і провести розрахунок кожної з них (визначити швидкість і прискорення точки, яка належить одночасно до розглядуваної і наступної ланки). Розрахунок почати з ланки, рух якої є заданим. Якщо ланка виконує обертальний рух (у неї є нерухома точка, наприклад, у вигляді нерухомого шарніра), то будь-яка її точка рухається за колом і для визначення швидкості і прискорення цієї точки треба використовувати формули і закономірності, розглянуті в розділі 2 цієї методички. Якщо ланка виконує плоскопаралельний рух (у неї нема нерухомих точок), треба використовувати формули і закономірності параграфів 3.1 та 3.2.

3.5 Приклад розв'язання задачі

Плоский механізм складається зі стержнів *OA, AB* і колеса з центром у точці *B,* з'єднаних між собою шарнірами (рис. 3.5). Колесо *B* складається з двох жорстко скріплених між собою дисків. Диск радіуса *r* котиться без ковзання по нерухомій поверхні, *OA* = 20 см, *AB = 40* см, *r* = 10 см, *BC* = 15 см. Стержень *OA* обертається навколо осі O і має у даний момент часу кутову швидкість ω_{OA} = 2 с$^{-1}$ і кутове прискорення ε_{OA} = 5 с$^{-2}$. Для заданого положення механізму треба

визначити швидкість і прискорення точки *C,* а також кутові швидкості і прискорення ланок механізму.

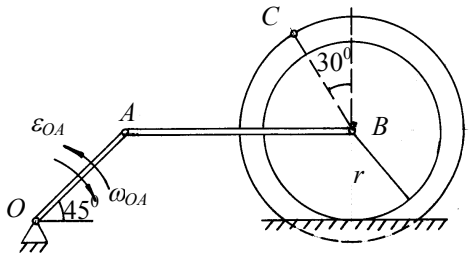


Рисунок 3.5

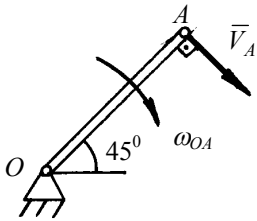


Рисунок 3.6

Розв'язання

1. Визначимо швидкість точки *C:*

1) розглянемо стержень *OA,* рух якого є заданим. Стержень виконує обертальний рух (оскільки точка *O* нерухома), тому швидкість точки *A* визначається за формулою (2.8):

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 20 = 40 \text{ (см/с)}.$$

Вектор $\overline{V}_A \perp OA$ і напрямлений у бік обертання стержня (за «стрілкою» ω_{OA}) (рис. 3.6);

2) розглянемо стержень *AB*. Він виконує плоскопаралельний рух (у нього немає нерухомих точок), тому спочатку треба побудувати МЦШ. Швидкість точки *A* знайдемо з розрахунку стержня *OA*. Точка *B* є центром колеса, що котиться по горизонтальній поверхні, тому її траєкторія – горизонтальна лінія (показана на рис. 3.7 пунктирною лінією). Будуємо МЦШ (P_{AB}), як точку перетину перпендикулярів до швидкості $\overline{V}_A$ і швидкості точки *B*, що є горизонтальною (напрямлена по дотичній до траєкторії).

Кутова швидкість стержня *AB* згідно з (3.1)

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_{AB}} = \frac{V_A}{AB/\cos 45^0} = \frac{V_A \cdot \cos 45^0}{AB} = \frac{40 \cdot 0{,}7}{40} = 0{,}7 \ \ (\text{с}^{-1})$$

і напрямлена відповідно до того, як вектор $\overline{V}_A$ «обертається» навколо МЦШ (P_{AB}). Швидкість точки *B* визначається за формулою (3.2)

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB} = 0{,}7 \cdot 40 = 28 \ \ (\text{см/с})$$

і напрямлена згідно зі «стрілкою» ω_{AB} ;

3) розглянемо колесо *B*. Колесо, що котиться без ковзання по нерухомій поверхні, виконує плоскопаралельний рух (нема нерухомих точок). МЦШ (точка $P_{кол}$) знаходиться в точці дотику з нерухомою поверхнею (рис. 3.8). Кутова швидкість колеса

$$\omega_{кол} = \frac{V_B}{BP_{кол}} = \frac{28}{10} = 2{,}8 \ \ (\text{с}^{-1})$$

і напрямлена за стрілкою годинника (відповідно до «обертання» вектора $\overline{V}_B$ навколо МЦШ ($P_{кол}$)).

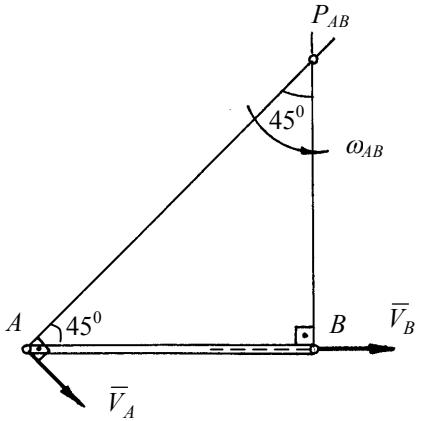


Рисунок 3.7

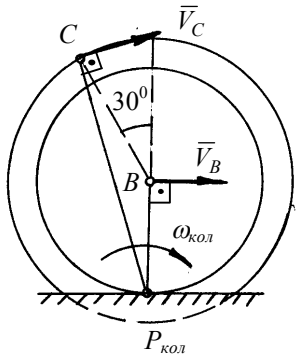


Рисунок 3.8

Відрізок $CP_{кол}$ можна визначити з трикутника $BCP_{кол}$ за теоремою косинусів:

$$CP_{кол} = \sqrt{BC^2 + BP_{кол}^2 - 2 \cdot BC \cdot BP_{кол} \cdot \cos 150^0} =$$

$$= \sqrt{15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot (-0{,}87)} = \sqrt{586} \approx 24{,}2 \ \ (\text{см}),$$

тоді

$$V_C = \omega_{кол} \cdot CP_{кол} = 2{,}8 \cdot 24{,}2 \approx 67{,}8 \ \ (\text{см/с}).$$

Вектор $\overline{V}_C \perp CP_{кол}$ і напрямлений згідно зі «стрілкою» $\omega_{кол}$.

2. Визначимо прискорення точки С.

1) розглянемо стержень *OA*. Він виконує обертальний рух, тому модулі складових прискорення точки *A* визначаються за формулами (2.9), (2.10):

$$a_A^{доц} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 4 \cdot 20 = 80 \ \ (\text{см/с}^2);$$

$$a_A^{об} = \varepsilon_{OA} \cdot OA = 5 \cdot 20 = 100 \ \ (\text{см/с}^2).$$

Покажемо (рис. 3.9) напрями складових: вектор $\overline{a}_A^{доц}$ напрямлений уздовж стержня від точки *A* до центра обертання *O*, вектор $\overline{a}_A^{об} \perp OA$ і напрямлений згідно зі «стрілкою» ε_{OA};

2) розглянемо стержень *AB*. Він виконує плоскопаралельний рух, тому для визначення прискорення точки *B* використаємо формулу (3.8) (ця формула відповідає випадку, коли траєкторія точки *A,* яку можна вибрати за полюс, є коло, а траєкторія точки *B* – пряма лінія):

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^{доц} + \overline{a}_A^{об} + \overline{a}_{BA}^{доц} + \overline{a}_{BA}^{об}. \qquad (3.13)$$

Модуль складової $\overline{a}_{BA}^{доц}$ обчислюємо за формулою (3.6):

$$a_{BA}^{доц} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0{,}7^2 \cdot 40 = 20 \ \text{(см/с}^2\text{)}.$$

Вектор $\overline{a}_{BA}^{доц}$ напрямлений по відрізку *BA* від точки *B* до полюса *A* (рис. 3.10). Модуль складової $\overline{a}_{BA}^{об}$ обчислити поки не можна, тому що невідоме ε_{BA}. У цьому разі зобразимо вектор $\overline{a}_{BA}^{об} \perp BA$ і направимо, наприклад, угору (можна і униз). Оскільки траєкторія точки *B* – пряма лінія (точка *B* є центром колеса, що котиться по горизонтальній поверхні), то вектор $\overline{a}_B$ мусить мати напрямок уздовж цієї прямої. Зобразимо його, наприклад, вліво від точки *B* (можна і вправо).

Виберемо осі координат *X, Y* (наприклад, вісь *X* за стержнем вліво, вісь *Y*-угору) і спроектуємо векторне рівняння (3.13) на ці осі:

$$X\text{:}\ a_B = a_A^{доц} \cdot \cos 45^0 + a_A^{об} \cdot \cos 45^0 + a_{BA}^{доц}, \qquad (3.14)$$

$$Y\text{:}\ 0 = -a_A^{доц} \cdot \sin 45^0 + a_A^{об} \cdot \sin 45^0 + a_{BA}^{об}.$$

У системі алгебраїчних рівнянь (3.14) невідомими є модулі прискорень a_B і $a_{BA}^{об}$. З першого рівняння знаходимо прискорення точки *B:*

$$a_B = 80 \cdot 0{,}7 + 100 \cdot 0{,}7 + 20 = 146 \ \text{(см/с}^2\text{)}.$$

Оскільки $a_B > 0$, то на рисунку вектор $\overline{a}_B$ відповідає дійсному напряму прискорення точки *B. З* другого рівняння знаходимо $a_{BA}^{об}$:

$$a_{BA}^{об} = a_A^{доц} \cdot \sin 45^0 - a_A^{об} \cdot \sin 45^0 = 56 - 70 = -14 \ \text{(см/с}^2\text{)}.$$

Знак «-» означає, що насправді вектор $\overline{a}_{BA}^{об} \perp BA$ і напрямлений униз.

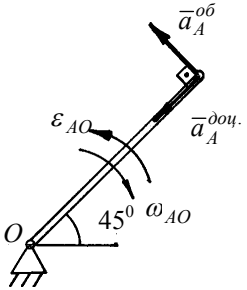


Рисунок 3.9

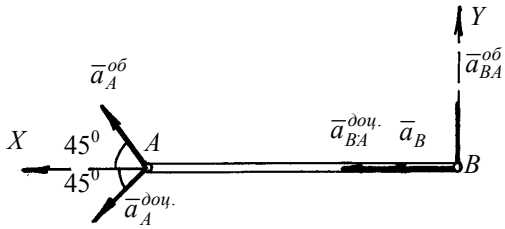


Рисунок 3.10

Кутове прискорення

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\left|a_{BA}^{об}\right|}{BA} = \frac{14}{40} \approx 0{,}35 \ \ (\text{с}^{-2})$$

і напрямлене за стрілкою годинника (так, як дійсний вектор $\overline{a}_{BA}^{об}$ «обертається» навколо полюса A) (рис. 3.11).

3) розглянемо колесо B. Воно виконує плоскопаралельний рух. Оскільки точка В, яку можна вибрати за полюс, рухається по прямій, а траєкторія точки С невідома (на неї не накладено обмежень з боку механізму), то для визначення прискорення точки С використаємо формулу, подібну до (3.10):

$$\overline{a}_{CX} + \overline{a}_{CY} = \overline{a}_B + \overline{a}_{CB}^{доц} + \overline{a}_{CB}^{об}. \qquad (3.15)$$

Кутове прискорення колеса, що котиться, визначимо за формулою (3.12):

$$\varepsilon_{кол} = \frac{a_B^{\tau}}{BP_{кол}} = \frac{a_B}{BP_{кол}} = \frac{146}{10} = 14{,}6 \ \ (\text{с}^{-2}),$$

де $a_B^{\tau} = a_B$, оскільки траєкторія точки B – пряма лінія.

Напрямлене $\varepsilon_{кол}$ проти стрілки годинника (так, як вектор $\overline{a}_B$ «обертається» навколо МЦШ $P_{кол}$) (рис. 3.12). Модулі складових $\overline{a}_{CB}^{доц}$ і $\overline{a}_{CB}^{об}$ визначимо за формулами (3.6), (3.7):

$$a_{CB}^{доц} = \omega_{кол}^2 \cdot CB = 2{,}8^2 \cdot 15 = 117{,}6 \ \text{(см/с}^2\text{)};$$

$$a_{CB}^{об} = \varepsilon_{кол} \cdot CB = 14{,}6 \cdot 15 = 219 \ \text{(см/с}^2\text{)}.$$

Вектор $\overline{a}_{CB}^{доц}$ напрямлений по відрізку *CB* від точки *C* до полюса *B*, а вектор $\overline{a}_{CB}^{об} \perp CB$ і напрямлений згідно зі «стрілкою» $\varepsilon_{кол}$ навколо полюса *B*.

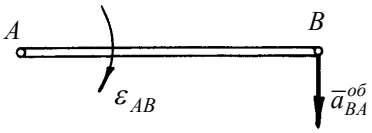


Рисунок 3.11

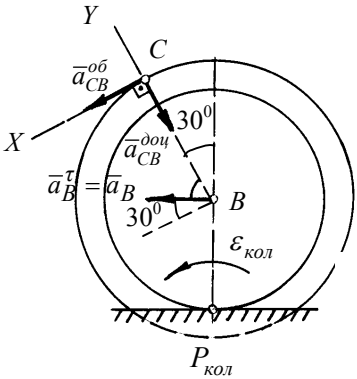


Рисунок 3.12

Виберемо осі координат X, Y (рис. 3.12) і спроектуємо векторне рівняння (3.15) на ці осі:

$$X\text{:}\ a_{CX} = a_B \cdot \cos 30^0 + a_{CB}^{об} = 146 \cdot 0{,}85 + 219 = 343{,}1 \ \text{(см/с}^2\text{)};$$

$$Y\text{:}\ a_{CY} = a_B \cdot \sin 30^0 - a_{CB}^{доц} = 146 \cdot 0{,}5 - 117{,}6 = -44{,}6 \ \text{(см/с}^2\text{)}.$$

Модуль прискорення точки *C* находимо за формулою

$$a_C = \sqrt{a_{CX}^2 + a_{CY}^2} = \sqrt{(343{,}1)^2 + (-44{,}6)^2} \approx 346 \ \text{(см/с}^2\text{)}.$$

Оскільки $a_{CX} > 0$, $a_{CY} < 0$, то складові прискорення точки C напрямлені в бік додатного напряму осі X і від'ємного осі Y, а вектор $\overline{a}_C$ зображується як діагональ прямокутника, побудованого на складових $\overline{a}_{CX}, \overline{a}_{CY}$ (рис. 3.13).

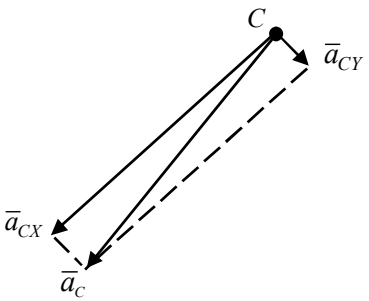


Рисунок 3.13

Відповідь: $\omega_{AB} = 0{,}7$ с$^{-1}$; $\omega_{кол} = 2{,}8$ с$^{-1}$; $V_C = 67{,}8$ см/с;
$\varepsilon_{AB} = 0{,}35$ с$^{-2}$; $\varepsilon_{кол} = 14{,}6$ с$^{-2}$; $a_C = 346$ см/с^2.

3.6 Завдання до теми 3

Схеми механізмів та завдання щодо визначення їх кінематичних характеристик наведені на рисунках 3.14–3.19.

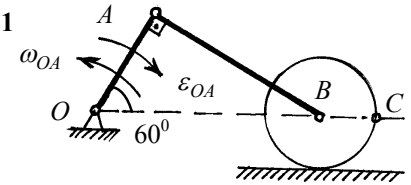
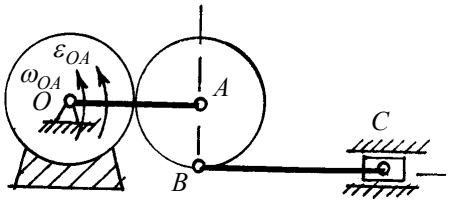
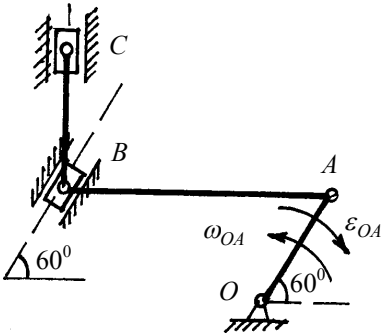
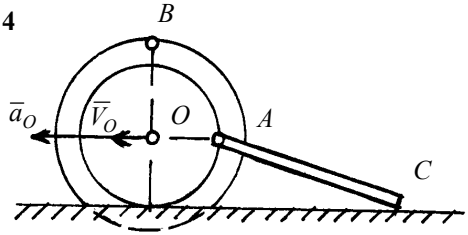
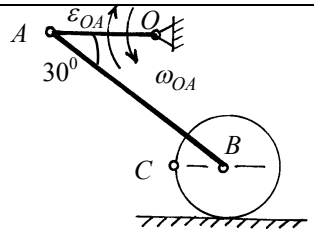
1 	Дано: OA = 20 см, BC = 10 см, ω_{OA} = 1 с$^{-1}$, ε_{OA} = 3 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
2 	Дано: OA = 40 см, AB = 20 см, BC = 60 см, ω_{OA} = 2,5 с$^{-1}$, ε_{OA} = 1 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
3 	Дано: OA = 10 см, AB = 40 см, BC = 20 см, ω_{OA} = 2 с$^{-1}$, ε_{OA} = 5 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
4 	Дано: OA = 5 см, OB = 10 см, AC = 13 см, V_O = 5 см/с, a_O = 10 см/с^2. Визначити: V_C, a_B.
5 	Дано: OA = 20 см, AB = 50 см, BC = 10 см, ω_{OA} = 2 с$^{-1}$, ε_{OA} = 2,5 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.

Рисунок 3.14

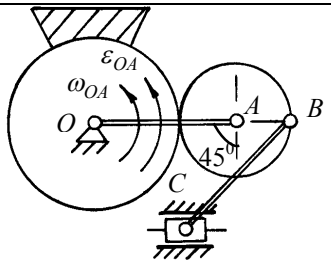
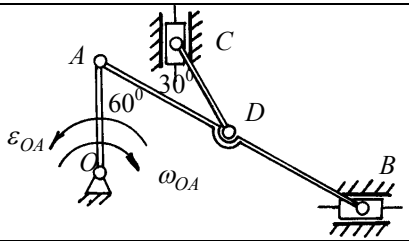
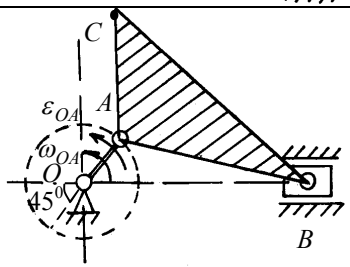
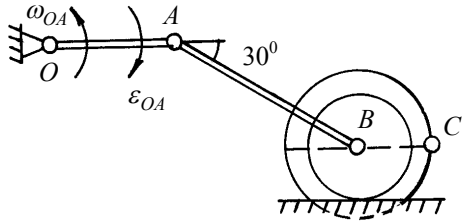
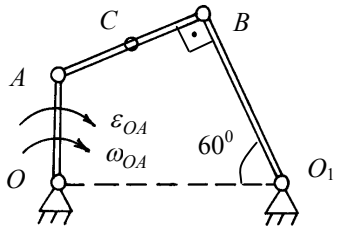
6		Дано: OA = 50 см, AB = 20 см, BC = 70 см, ω_{OA} = 5 с$^{-1}$, ε_{OA} = 10 с$^{-2}$. Визначити: V_C , a_B .
7		Дано: OA = 40 см, AB = 100 см, AD = DB, DC = 40 см, ω_{OA} = 0,5 с$^{-1}$, ε_{OA} = 1 с$^{-2}$. Визначити: V_C , a_B .
8		Дано: $OA = 12\sqrt{2}$ см, AC = 24 см, $AB = 12\sqrt{5}$ см, ω_{OA} = 6 с$^{-1}$, ε_{OA} = 3 с$^{-2}$. Визначити: V_C , a_B .
9		Дано: OA = 20 см, AB = 40 см, r = 10 см, BC = 15 см, ω_{OA} = 1 с$^{-1}$, ε_{OA} = 2 с$^{-2}$. Визначити: V_C , a_B .
10		Дано: OA = 6 см, AB = 12 см, AC = 6 см, ω_{OA} = 12 с$^{-1}$, ε_{OA} = 10 с$^{-2}$. Визначити: V_C , a_B .

Рисунок 3.15

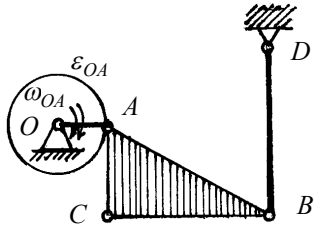
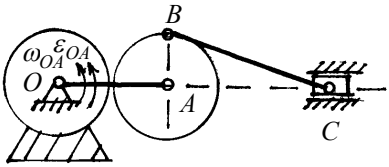
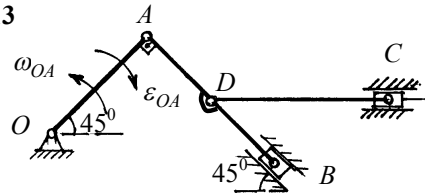
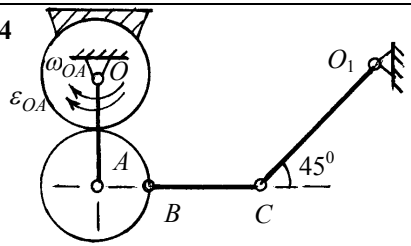
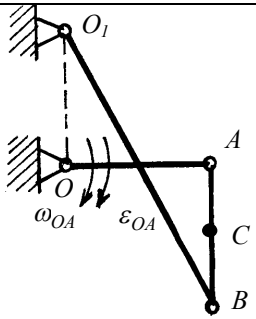
11		Дано: OA = 10 см, BC = 20 см, AC = 15 см, BD = 30 см, $\angle ACB = 90^0$, $\angle CBD = 90^0$ ω_{OA} = 6 с$^{-1}$, ε_{OA} = 2 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
12		Дано: OA = 10 см, AB = 5 см, BC = 13 см, ω_{OA} = 2 с$^{-1}$, ε_{OA} = 3 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
13		Дано: OA = 30 см, AB = 40 см, $AD = DB$, DC = 40 см, ω_{OA} = 1 с$^{-1}$, ε_{OA} = 2 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
14		Дано: OA = 40 см, AB = 20 см, BC = 40 см, CO_1 = 60 см, ω_{OA} = 3 с$^{-1}$, ε_{OA} = 4 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
15		Дано: OA = 12 см, AC = 6 см, $AB = OO_1$ = 12 см, ω_{OA} = 5 с$^{-1}$, ε_{OA} = 3 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.

Рисунок 3.16

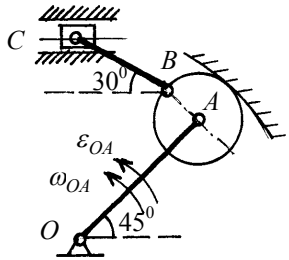
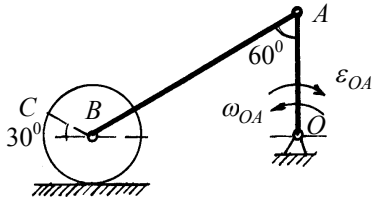
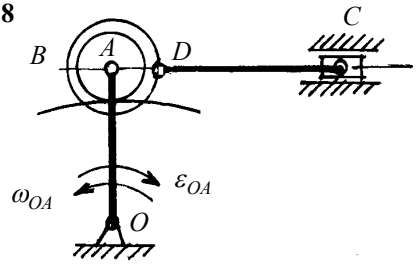
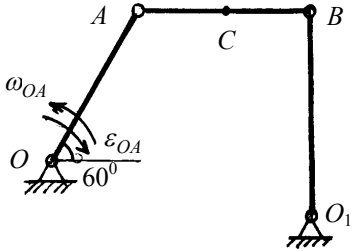
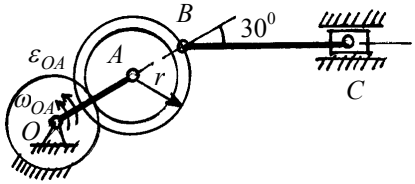
16		Дано: OA = 80 см, AB = 20 см, BC = 30 см, $OA \perp AB$, ω_{OA} = 2 с$^{-1}$, ε_{OA} = 3 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
17		Дано: OA = 15см, AB = 30 см, BC = 10 см, ω_{OA} = 4 с$^{-1}$, ε_{OA} = 6 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
18		Дано: OA = 8 см, AB = 3 см, AD = 4 см, DC = 10 см, ω_{OA} = 3 с$^{-1}$, ε_{OA} = 5 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
19		Дано: OA = 40 см, AB = 40 см, AC = CB, BO_1 = 50 см, ω_{OA} = 0,5 с$^{-1}$, ε_{OA} = 1 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
20		Дано: OA = 12 см, AB = 8 см, r = 6 см, BC = 18 см, ω_{OA} = 5 с$^{-1}$, ε_{OA} = 2 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.

Рисунок 3.17

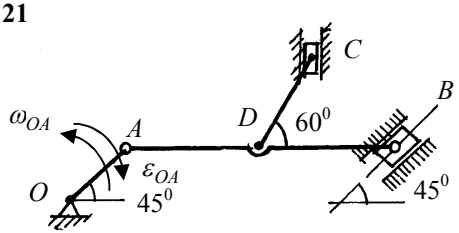
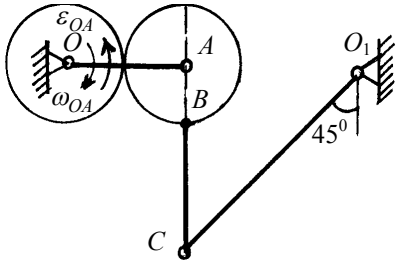
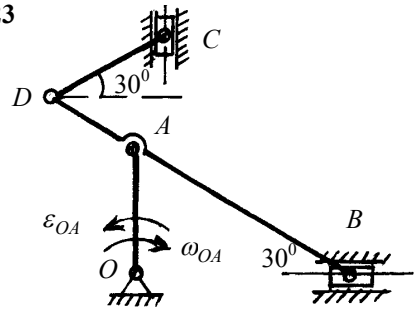
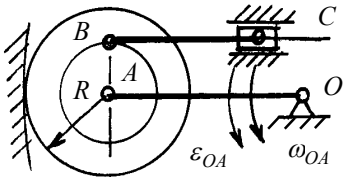
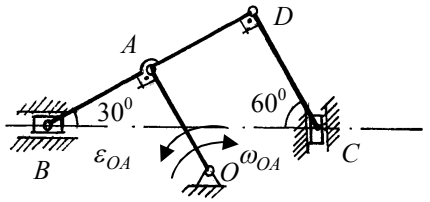
21 	Дано: OA = 15 см, DC = 20 см, $AD = DB$ = 25 см, ω_{OA} = 4 с$^{-1}$, ε_{OA} = 2 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
22 	Дано: OA = 22 см, AB = 11 см, BC = 25 см, CO_1 = 45 см, ω_{OA} = 3 с$^{-1}$, ε_{OA} = 5 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
23 	Дано: OA = 20 см, DC = 30 см, DA = 15 см, AB = 40 см, ω_{OA} = 2,5 с$^{-1}$, ε_{OA} = 3 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
24 	Дано: OA = 8 см, AB = 3 см, R = 4 см, BC = 6 см, ω_{OA} = 5 с$^{-1}$, ε_{OA} = 3 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
25 	Дано: $OA = AB =$ $= AD$ = 25 см, ω_{OA} = 2 с$^{-1}$, ε_{OA} = 4 с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.

Рисунок 3.18

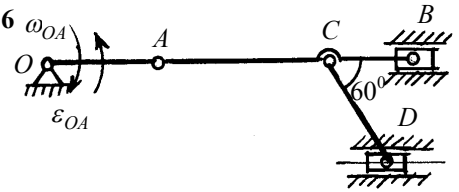
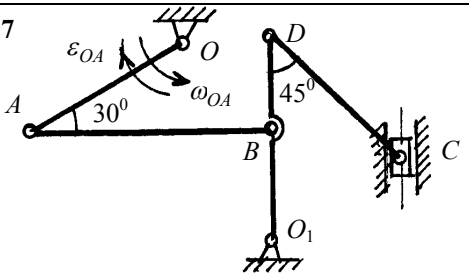
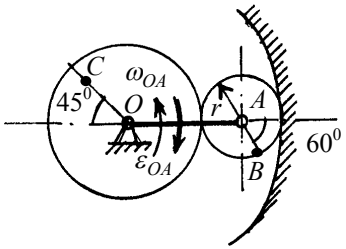
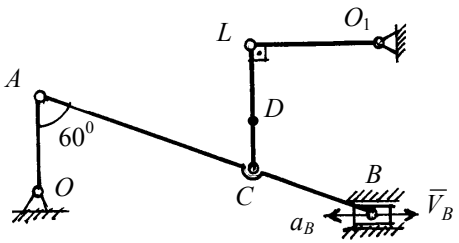
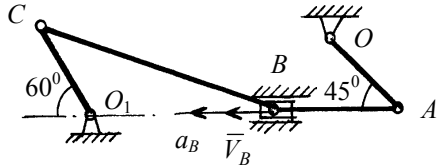
26 	Дано: $OA = CD = 20$ см, $AC = 30$ см, $CB = 15$ см, $\omega_{OA} = 5$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 6$ с$^{-2}$. Визначити: V_D, a_B.
27 	Дано: $OA = DC = 30$ см, $AB = DO_1 = 40$ см, $BD = 15$ см, $\omega_{OA} = 1$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 3$ с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
28 	Дано: $OA = 20$ см, $OC = 9$ см, $r = 8$ см, $\omega_{OA} = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{OA} = 5$ с$^{-2}$. Визначити: V_C, a_B.
29 	Дано: $OA = 20$ см, $CL = LO_1 = CB = 25$ см, $AC = 40$ см, $CD = 10$ см, $V_B = 10$ см/с, $a_B = 20$ см/с^2. Визначити: V_D, ε_{AB}.
30 	Дано: $CO_1 = OA = 20$ см, $AB = 35$ см, $CB = 50$ см, $V_B = 40$ см/с, $a_B = 80$ см/с^2. Визначити: ω_{AO}, ε_{CO_1}.

Рисунок 3.19

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Теоретична механіка : підручник / І. В. Кузьо, В. П. Шпачук, Н. М. Ванькович та ін. – Харків : Фоліо, 2017. – 780 с.

2. Яблонский А. А. Курс теоретической механіки: в двух частях. Часть 1. Статика. Кинематика / А. А. Яблонский, М. В. Никифорова. – 3-е изд., перераб. – М., 1971. – 439 с.

3. Бутенин Н. В. Курс теоретичной механики : в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – 4-е изд., испр. – М. : Наука, 1979. – Т. 1. – 240 с.

4. Тарг С. М. Курс теоретической механики / С. М. Тарг. – 10-е изд., перераб. и доп. – М., 2001. – 416 с

5. Бать М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах : в 3 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – 5-е изд., перераб. – М. : Наука, 1967. – 512 с.

6. Павловський М. О. Теоретична механіка / М. О. Павловський. – Київ, 2002. – 510 с.

7. Теоретична механіка : навч.-метод. посібник і завдання для контрольних і самостійних робіт / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 146 с.

8. Шпачук В. П. Теоретична механіка. Кінематика : конспект лекцій для студентів-бакалаврів денної і заочної форм навчання за спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології, 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, 263 – Цивільна безпека, 275 – Транспортні технології (за видами) / В. П. Шпачук, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз ; Харків нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018.– 65 с.

Виробничо - практичне видання

Методичні рекомендації

для практичних занять, виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань, самостійної роботи з навчальної дисципліни

«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»

Розділ «Кінематика»

(*для студентів-бакалаврів денної і заочної форм навчання за спеціальностями*
192 – Будівництво та цивільна інженерія, *185 – Нафтогазова інженерія та технології*, *141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка*,
263 – Цивільна безпека, *275 – Транспортні технології* (*за видами*))

Укладачі: **ШПАЧУК** Володимир Петрович
РУБАНЕНКО Олександр Ігорович
ГАРБУЗ Алла Олегівна

Відповідальний за випуск Н. В. Середа
За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання О. І. Рубаненко

План 2018, поз. 208 М

Підп. до друку 22.06.18 Формат 60 х 84/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 2,5
Тираж 50 пр. Зам. № .

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.