

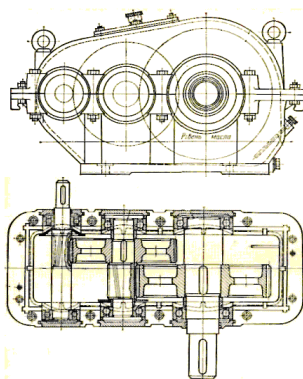
**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**В. П. Шпачук, О. М. Кузнецов**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

з дисциплін  
**«ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА».**  
**«ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА»**

*(для студентів 1–4 курсів денної і заочної форм навчання,  
освітнього рівня «бакалавр» за спеціальностями  
141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»;  
263 – Цивільна безпека. Охорона праці)*



**Харків**  
**ХНУМГ ім. О. М. Бекетова**  
**2018**

**Шпачук В. П.** Конспект лекцій з дисциплін «Прикладна механіка». «Технічна механіка» (для студентів 1–4 курсів денної і заочної форм навчання, освітнього рівня «бакалавр» за спеціальностями 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»; 263 – Цивільна безпека. Охорона праці) / В. П. Шпачук, О. М. Кузнецов ; за заг. ред. В. П. Шпачука ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 254 с.

Автори: д-р техн. наук В. П. Шпачук,  
канд. техн. наук О. М. Кузнецов

Рецензент: канд. техн. наук, доц. В. О. Склярів

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки, протокол засідання № 1 від 28.08. 2016.

Цей конспект лекцій складено з метою допомогти студентам електромеханічних спеціальностей при підготовці до практичних занять, контрольних робіт, заліків та іспитів, а також при виконанні курсового проекту з розділу «Деталі машин» курсу «Прикладна механіка».

Він містить основні питання з основ механіки деформованого тіла, теорії машин і механізмів та деталей машин. У кожному розділі наведені приклади задач та методики їхнього розв'язання.

© В. П. Шпачук, О. М. Кузнецов, 2018  
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018

# ЗМІСТ

стор.

## 1 ОСНОВИ МЕХАНІКИ ДЕФОРМОВАНОГО

ТІЛА .....	7
1.1 Початкові положення .....	7
1.1.1 Основні гіпотези й припущення .....	7
1.1.2 Види навантажень і основних деформацій .....	9
1.1.3 Метод перерізів. Напруження .....	11
Контрольні питання до розділу 1.1 .....	14
1.2 Розтяг і стиск .....	15
1.2.1 Напруження й деформації розтягу й стиску .....	15
1.2.2 Закон Гука для розтягу і стиску .....	17
1.2.3 Поперечна деформація розтягу і стиску .....	19
1.2.4 Діаграма розтягу маловуглецевої сталі .....	20
1.2.5 Розрахункова формула на міцність для розтягу (стиску) .....	23
1.2.6 Статично невизначені задачі. Вплив температури .....	25
1.2.7 Зминання .....	28
1.2.8 Потенціальна енергія деформації .....	29
Контрольні питання до розділу 1.2 .....	30
1.3 Зсув (зріз) .....	32
1.3.1 Напруження й деформації зсуву .....	32
1.3.2 Розрахункова формула для зсуву .....	32
1.3.3 Деформація зсуву. Закон Гука .....	33
1.3.4. Закон парності дотичних напружень .....	34
1.3.5 Напруження в похилих перерізах. Головні напруження .....	35
Контрольні питання до розділу 1.3 .....	37
1.4 Геометричні характеристики плоских перерізів .....	38
1.4.1 Статичний момент площі .....	38

1.4.2	Полярний момент інерції .....	39
1.4.3	Осьовий момент інерції .....	40
1.4.4	Осьовий момент інерції для паралельних осей .....	41
1.4.5	Головні осі і головні моменти інерції. Радіус інерції .....	42
Контрольні питання до розділу 1.4 .....		43
1.5	Кручення .....	44
1.5.1	Відомості про деформацію кручення циліндра .....	44
1.5.2	Епюри крутних моментів .....	45
1.5.3	Напруження й деформації кручення .....	47
1.5.4	Розрахункові формули на міцність і жорсткість для кручен .....	50
Контрольні питання до розділу 1.5 .....		53
1.6	Згин .....	54
1.6.1	Чистий згин прямого бруса .....	55
1.6.2	Згинаючий момент і поперечна сила .....	58
1.6.3	Диференціальні залежності для згину .....	62
1.6.4	Нормальні напруження чистого згину .....	64
1.6.5	Розрахункова формула на міцність для випадку згину .....	70
1.6.6	Дотичні напруження деформації згину .....	71
1.6.7	Косий згин .....	73
1.6.8	Диференціальне рівняння пружної лінії балки. Умова жорсткості .....	75
Контрольні питання до розділу 1.6 .....		77
1.7	Гіпотези міцності .....	80
1.7.1	Згин і кручення .....	80
1.7.2	Кручення й розтяг (стиск) .....	84
Контрольні питання до розділу 1.7 .....		84
1.8	Міцність при динамічних навантаженнях .....	85
1.8.1	Явище втомленості матеріалів .....	85

1.8.2 Розрахунки на міцність при змінних напруженнях .....	90
1.8.3 Розрахунки на міцність у задачах динаміки .....	91
Контрольні питання до розділу 1.8 .....	96
1.9 Стійкість стиснених стержнів .....	97
1.9.1 Поздовжній згин .....	97
1.9.2 Розрахунки стержнів на стійкість .....	98
Контрольні питання до розділу 1.9 .....	103
 2 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ З ТЕОРІЇ МАШИН ТА МЕХАНІЗМІВ .....	 104
2.1 Класифікація і структурний аналіз механізмів .....	104
2.2 Деякі поширені види механізмів .....	111
2.3 Кінематичний і динамічний аналіз механізмів і довговічність машин .....	118
2.4 Поняття про надійність і довговічність машин .....	120
Контрольні питання до розділу 2 .....	124
 3 ДЕТАЛІ МАШИН .....	125
3.1 Матеріали для виготовлення деталей машин .....	126
Контрольні запитання до розділу 3.1 .....	128
3.2 Рознімні й нерознімні з'єднання деталей машин .....	129
3.2.1 Загальні відомості і конструкції різбових з'єднань .....	129
3.2.2 Розрахунки різбових з'єднань на міцність .....	132
3.2.3 Шпонкові з'єднання .....	138
3.2.4 Шліцьові з'єднання .....	141
3.2.5 Зварні з'єднання .....	142

Контрольні питання до розділу 3.2 .....	147
3.3 Механічні передачі .....	148
3.3.1 Призначення, класифікація та кінематичні схеми механічних передач .....	148
3.3.2 Кінематичні і силові співвідношення для механічних передач .....	150
Контрольні запитання до пунктів 3.3.1 і 3.3.2 .....	153
3.3.3 Пасові передачі .....	154
Контрольні запитання до пункту 3.3.3 .....	161
3.3.4 Зубчасті передачі .....	161
Контрольні запитання до пункту 3.3.4 .....	187
3.3.5 Черв'ячні передачі .....	188
Контрольні питання до пункту 3.3.5 .....	192
3.3.6 Ланцюгові передачі .....	192
Контрольні питання до пункту 3.3.6 .....	197
3.4 Осі, вали та їх опори .....	197
3.4.1 Осі та вали .....	197
Контрольні питання до пункту 3.4.1 .....	212
3.4.2 Опори валів та осей .....	213
Контрольні питання до пункту 3.4.2 .....	229
3.5 Елементи механічних приводів машин .....	230
3.5.1 Загальна характеристика приводів машин .....	230
3.5.2 Двигуни в приводах машин .....	235
3.5.3 Муфти приводів .....	239
3.5.4 Редуктори і мотор-редуктори в приводах машин .....	44
Контрольні питання до розділу 3.5 .....	253
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	254

# 1 ОСНОВИ МЕХАНІКИ ДЕФОРМОВАНОГО ТІЛА

## 1.1 Початкові положення

### 1.1.1 Основні гіпотези й припущення

Конструкційні матеріали, з яких виготовляють деталі машин і споруд, не є, точно кажучи, неперервними, однорідними й ізотропними (такими, що мають однакові властивості в усіх напрямках).

У процесі виробництва заготовок і виготовлення з них деталей у матеріалі виникають різні поверхневі й внутрішні дефекти, які важко врахувати, наприклад, раковини, тріщини й неоднорідності структури в литих деталях, волосовини в штампованих деталях, початкові внутрішні зусилля, спричинені нерівномірністю охолодження литих і кованих деталей, нерівномірністю висихання й неоднорідністю деревини, нерівномірністю тверднення й неоднорідністю бетону та ін.

Оскільки закономірності виникнення зазначених явищ встановити неможливо, то в опорі матеріалів приймають ряд гіпотез і припущень, які дають змогу не розглядати ці явища. У результаті об'єктом вивчення в опорі матеріалів стає не реальне тіло, а його наближена модель. Експериментальна перевірка висновків, добутих на основі наведених далі гіпотез і припущень, показує, що ці висновки цілком придатні для використання в практиці інженерних розрахунків. Розглянемо основні гіпотези й припущення стосовно фізико-механічних властивостей матеріалів.

1. *Гіпотеза про відсутність початкових внутрішніх зусиль.* Згідно із цією гіпотезою, припускають, що коли немає причин для деформації тіла (навантаження, зміна температури, тощо), то в усіх його точках *внутрішні зусилля дорівнюють нулю*. Отже, сили взаємодії між частинками не навантаженого тіла до уваги не беруть.

2. *Припущення про однорідність матеріалу.* Фізико-механічні властивості тіла в різних точках можуть бути неоднаковими. В опорі матеріалів ці відмінності нехтують, припускаючи, що матеріал в усіх точках тіла має *однакові властивості*.

3. *Припущення про неперервність матеріалу.* Згідно із цим припущенням, матеріал будь-якого тіла має *неперервну будову і є суцільним середовищем*. Атомістична теорія дискретної будови матеріалу до уваги не береться. Припущення про неперервну будову матеріалу дає змогу використовувати під час розрахунків методи вищої математики (диференціальне й інтегральне числення).

4. *Припущення про ізотропність матеріалу.* Це припущення передбачає, що матеріал тіла має *однакові властивості* в усіх напрямках. Багато матеріалів складається із кристалів, у яких фізико-механічні властивості в різних напрямках істотно відрізняються. Проте, завдяки наявності в тілі великої кількості безладно розміщених кристалів, властивості всієї маси матеріалу в різних напрямках вирівнюються. Припущення про ізотропність добре підтверджується практикою для більшості матеріалів. Ця гіпотеза виконується наближено для таких матеріалів, як камінь, пластмаси, залізобетон. Матеріали, які мають неоднакові властивості в різних напрямках, називають *анізотропними*, наприклад, деякі пластики (гетинакс), деревина.



Рисунок 1.1

вантаження деформації повністю зникають і тіло повертається до початкової форми.

Розглянемо тепер гіпотези й припущення, пов'язані з деформаціями елементів конструкцій.

Зміну лінійних і кутових розмірів тіла називають відповідно *лінійною й кутовою деформацією*.

Зміну положення (координат) точок тіла, спричинену деформацією, називають *переміщенням*.

1. *Припущення про малість переміщень*, або *принцип початкових розмірів*. За цим припущенням деформації тіла й пов'язані з ними переміщення точок і перерізів, звичайно, дуже малі порівняно з розмірами тіла.

На підставі цього змінами в розміщенні зовнішніх сил, спричинених деформацією, нехтують.

Так, наприклад, не беруть до уваги при навантаженні зміщення на  $\Delta z$  лінії дії сили, показане на рисунку 1.1.

*Припущення про лінійну деформацію*

5. *Припущення про ідеальну пружність.* Це припущення передбачає, що матеріал у певних межах навантаження виявляє *ідеальну пружність*, тобто після зняття на-

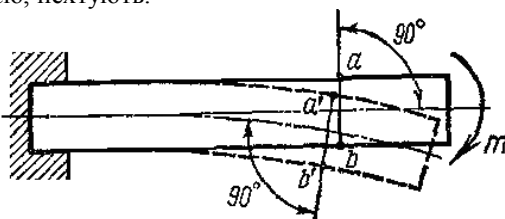


Рисунок 1.2



тіл. Згідно із цим припущенням, зміщення точок і перерізів пружного тіла в певних межах навантаження прямо пропорційне силам, які спричинюють ці переміщення.

2. *Гіпотеза плоских перерізів*, або гіпотеза Бернуллі. Згідно із цією гіпотезою, плоскі поперечні *перерізи* (переріз  $a - b$  на рис. 1.2), зроблені в тілі до деформації, залишаються під час деформації плоскими й нормальними до осі (переріз  $a^1 - b^1$ ). Цю гіпотезу вперше висловив швейцарський учений Якоб Бернуллі (1654-1705) і за нею вивчають більшість основних деформацій бруса.

3. При вивченні деяких деформацій будемо вважати брус складеним з нескінченної кількості волокон, паралельних осі, і будемо припускати, що під час деформування *волокна не тиснуть одне на одне* – це припущення називають *гіпотезою про ненависання волокон*. Наприклад, таке явище спостерігається при розтягу і стиску бруса.

#### 1.1.2 Види навантажень і основних деформацій

У процесі роботи машин і споруд їх вузли й деталі сприймають сили взаємодії других тіл. Такі сили для даного тіла називаються *зовнішніми*. Зовнішні сили бувають об'ємні (сили тяжіння, сили інерції), або поверхневі. Останні – це сили, наприклад, контактної взаємодії розглядуваного елемента із сусідніми елементами.

Поверхневі навантаження бувають *зосередженими* або *розподіленими*. Навантаження, яке розподілене по невеликій частині поверхні тіла, завжди можна замінити рівнодійною. Цю силу називають зосередженою. Крім того, бувають навантаження, які можна подати у вигляді *зосередженого моменту пари сил*.

Залежно від характеру дії навантаження поділяють також на *статичні* й *динамічні*.

*Статичними* називають навантаження, значення, напрям і місце прикладання яких залишаються сталими, або змінюються повільно. Приклад статичного навантаження – сила тяжіння споруд.

*Динамічними* називають навантаження напрям, величина або місце прикладання, яких швидко змінюється за часом. Дія таких навантажень супроводжується значними прискореннями як деформованого тіла, так і тіл, що взаємодіють із ним. До динамічних належать ударні, раптово прикладені й повторно-змінні навантаження.

*Ударні навантаження* виникають, наприклад, під час удару колеса вагона на стик рейок, кування металу, або забивання паль за допомогою копра. Для ударного навантаження характерно те, що в

мить його прикладення тіло, яке спричинює навантаження, має певну кінетичну енергію.

Прикладом *раптово прикладеного навантаження* є тиск колеса на рейку в зоні контакту при коченні колеса. Таке навантаження зростає від нуля до свого граничного значення за дуже малий проміжок часу.

*Повторно-змінних навантажень* зазнають, наприклад, деталі кривошипно-повзункового механізму, осі вагонів, коливання елементів конструкцій тощо. Такі навантаження безперервно й періодично змінюються за часом.

До динамічних належать також інерційні навантаження, наприклад, сили інерції в ободі обертового маховика.

Треба пам'ятати, що до зовнішніх сил, які беруть до уваги при розрахунках конструкцій, належать не тільки активні сили, а й реакції в'язей і сили інерції (для руху з достатньо великим прискоренням).

Розглянемо далі питання про *основні деформації*. Із практики відомо, що під час експлуатації елементи конструкцій зазнають таких основних деформацій.

1. *Розтяг* – цієї деформації зазнають, наприклад, канати, троси, ланцюги, стержень тоді, коли вздовж його осі прикладені протилежно напрямлені сили. Ці деталі при навантаженні подовжуються.

2. *Стиск* – на стиск працюють, наприклад, колони, цегляна кладка, пуансони штампів, стержні ферм, які при стисканні вкорочуються.

3. *Зсув* виникає тоді, коли зовнішні сили зміщують два паралельних плоских перерізи один відносно одного при незмінній відстані між ними. Деформації зсуву зазнають заклепки, болти, шпонки, шви зварних з'єднань. Деформацію зсуву, доведену до руйнування матеріалу, називають зрізом. Зріз виникає, наприклад, під час різання ножицями або при штампуванні деталей із листового матеріалу.

4. *Кручення* виникає при дії на стержень зовнішніх сил, які утворюють момент відносно осі стержня. На кручення працюють вали, які передають потужність під час обертального руху. Звичайно, деформація кручення супроводжується й іншими деформаціями, наприклад, згином.

5. *Згин* полягає у викривленні осі стержня. На згин працюють балки, осі вагонів, вали, зубці зубчатих коліс та інші елементи конструкцій.

Дуже часто елементи конструкцій зазнають дії навантажень, які спричиняють одночасно кілька основних деформацій.

### 1.1.3 Метод перерізів. Напруження

Взаємодія між окремими частками тіла характеризується *внутрішніми силами*.

Метод перерізів полягає в тому, що зрівноважене тіло (рис. 1.3) умовно розрізають площиною на дві частини, будь-яку з них відкидають і замість неї до перерізу залишеної частини прикладають внутрішні сили. Залишену частину розглядають як самостійне тіло, яке перебуває в рівновазі під дією зовнішніх і прикладених до перерізу внутрішніх сил.

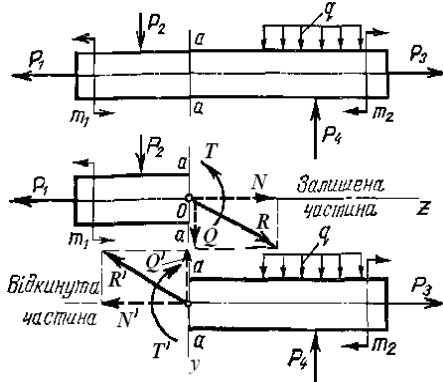


Рисунок 1.3

Зробимо поперечний переріз  $a-a$  бруса (рис. 1.3) і розглянемо рівновагу його лівої частини. У випадку плоскої довільної системи зовнішніх сил статичним еквівалентом внутрішніх сил, що діють у перерізі  $a-a$  залишеної частини бруса, будуть головний вектор  $R$ , прикладений до центра ваги перерізу, і головний момент  $T$ . Очевидно, що за третім законом Ньютона внутрішні сили, які діють у перерізі залишеної й відкинutoї частини тіла, однакові за модулем, але протилежні за напрямом (рис. 1.3). Розкладемо головний вектор на складову  $N$ , напрямлену вздовж осі бруса, і складову  $Q$ , яка перпендикулярна до цієї осі і лежить у площині поперечного перерізу. Ці складові головного вектора разом із головним моментом називатимемо внутрішніми силовими факторами, які діють у перерізі бруса. Складову  $N$  назвемо *поздовжньою силою*, складову  $Q$  – *поперечною силою*, пару сил  $T$  – *згинаючим моментом*.

Далі будемо завжди напрямляти поздовжню силу  $N$  від перерізу. В такому разі, якщо при розрахунку знайдемо додатне значення поздовжньої сили, то стержень розтягнений і навпаки.

Для визначення трьох внутрішніх силових факторів складемо рівняння рівноваги залишеної частини бруса (два рівняння проєкцій сил на осі  $Oy$ ;  $Oz$  і рівняння моментів сил відносно точки  $O$  – полюса системи координат):

$$\begin{aligned} \sum Z=0; \quad \sum Y=0; \quad \sum M_O=0 \\ \text{або} \quad N+\sum P_{iz}=0; \quad Q+\sum P_{iy}=0; \quad T+\sum M_O(P_i)=0, \end{aligned}$$

де  $\sum P_{iz}$ ;  $\sum P_{iy}$ ;  $\sum M_o(P_i)$  – відповідно суми проекцій зовнішніх сил на осі координат і сума моментів цих сил відносно центра 0 ваги перерізу.

$$\text{Звідкіля знаходимо } N = -\sum P_{iz}; \quad Q = -\sum P_{iy}; \quad T = -\sum M_o(P_i).$$

Якщо зовнішні сили, які діють на брус, не лежать в одній площині, тобто є просторовою системою сил, то в поперечному перерізі бруса виникає *шість внутрішніх силових факторів* (рис. 1.4), де  $N$  – поздовжня сила,  $Q_x$ ,  $Q_y$  – поперечні сили,  $T_k$  – крутний момент,  $T_x$ ,  $T_y$  – згинаючі моменти відносно осей координат  $Ox$  і  $Oy$ . Для визначення цих факторів статика надає *шість рівнянь рівноваги* залишеної частини бруса, а саме:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0; \\ \sum M_x &= 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0. \end{aligned}$$

За різних деформацій у поперечному перерізі бруса виникають різні внутрішні силові фактори. Розглянемо окремі випадки.

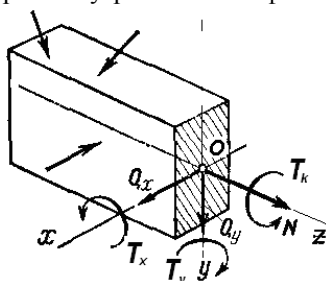


Рисунок 1.4

1. У перерізі виникає *лише поздовжня сила  $N$* . У цьому випадку має місце деформація *розтягу* (якщо сила  $N$  напрямлена від перерізу) або деформація *стиску* (якщо сила  $N$  напрямлена до перерізу).

2. У перерізі виникає *лише поперечна сила  $Q$* . У цьому випадку матимемо деформацію *зсуву*.

3. У перерізі виникає *лише крутний момент  $T_k$* . Тоді буває деформація *кручення*.

4. У перерізі виникає *лише згинаючий момент  $T$* . Має місце деформація *чистого згину*. Якщо в перерізі одночасно виникає згинаючий момент і поперечна сила, то *згин* називають *поперечним*.

5. Якщо в перерізі *одночасно виникає кілька внутрішніх силових факторів* (наприклад, згинаючий і крутний моменти або згинаючий момент і поздовжня сила), то це буде *поєднання основних деформацій*.

Поряд із деформаціями одним з основних понять опору матеріалів є *напруження*. Напруження характеризують інтенсивність внутрішніх сил, які діють у перерізі.

Розглянемо довільно навантажений брус і застосуємо до нього метод перерізів (рис. 1.5). Виділимо в перерізі нескінченно малий елемент площі  $dA$ . Вважатимемо, що в його межах внутрішні сили

однакові за модулем і напрямом і, отже, є системою паралельних сил. Рівнодіючу цієї системи сил позначимо  $dR$ .

Визначимо інтенсивність внутрішніх сил у точках елементарної площі:

$$p = dR / dA. \quad (1.1)$$

Величина  $p$  – це механічне напруження (внутрішня сила, віднесена до одиниці площі перерізу). Одиниця напруження:  $[p] = \text{Н/м}^2$  (паскаль – Па), або мегапаскаль (1 МПа =  $10^6$  Па = 1 Н/мм<sup>2</sup>).

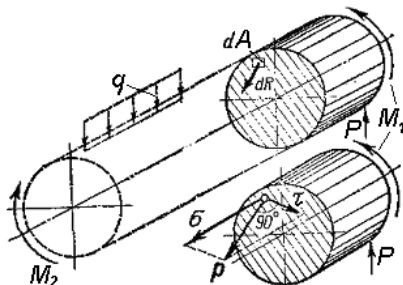


Рисунок 1.5

Розкладемо далі вектор напруження  $p$  на дві складові:  $\sigma$  – перпендикулярну до площини перерізу і  $\tau$  – таку, що лежить у площині перерізу (рис. 1.5). Ці складові назвемо:  $\sigma$  – *нормальне напруження*;  $\tau$  – *дотичне напруження*.

Оскільки кут між нормальними й дотичними напруженнями дорівнює  $90^\circ$ , то модуль повного напруження  $p$  визначається за формулою  $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ .

Розкладання повного напруження на нормальну й дотичну складові має цілком визначений фізичний зміст. Як побачимо далі, у поперечному перерізі бруса у випадках розтягу, стиску й чистого згину діють лише *нормальні напруження*, а при зсуві й крученні – *тільки дотичні напруження*.

Нарешті, розглянемо гіпотезу, яку називають *принципом незалежності дії сил* і формулюють так: *коли на тіло діє кілька навантажень, то внутрішні сили, напруження, переміщення й деформації в будь-якому місці можна визначити як відповідну алгебраїчну суму таких величин, які знайдені від кожного навантаження окремо*. В основі принципу незалежності дії сил лежить положення про *лінійну залежність переміщень і сил*.

Користуючись принципом незалежності дії сил, від вивчення найпростіших деформацій, коли в поперечних перерізах бруса діють тільки нормальні або тільки дотичні напруження, перейдемо до вивчення складніших деформацій, коли в поперечному перерізі діють різноманітні напруження. Потім можна розглядати випадки поєднання основних деформацій, що іноді називають *складним опором*.

Зазначимо, що принцип незалежності дії сил стосується тільки конструкцій, деформації яких малі порівняно з їх розмірами й пропорційні діючим навантаженням.

## Контрольні запитання до розділу 1.1

1. Яка існує класифікація деформованих тіл залежно від їх розмірів і форми?
2. Яку деформацію називають пружною, а яку залишковою або пластичною?
3. Сформулюйте принцип пом'якшених граничних умов або принцип Сен-Венана.
4. Поясніть суть гіпотези про відсутність початкових внутрішніх зусиль.
5. Розкажіть про поняття: однорідність матеріалу, неперервність матеріалу, ізотропність матеріалу, ідеальна пружність.
6. Що називається «деформацією»? Яка причина її виникнення?
7. Поясніть, у чому суть принципу початкових розмірів?
8. Розкажіть, у чому полягає припущення про лінійну деформацію тіл?
9. Поясніть, у чому суть гіпотези плоских перерізів і гіпотези про ненависання волокон.
10. Зовнішні сили, їх види, розмірність.
11. Які навантаження називають статичними, а які динамічними?
12. Як поділяються динамічні навантаження?
13. Назвіть основні види деформацій і поясніть, у яких випадках вони відбуваються і які елементи конструкцій зазнають їх?
14. Суть методу перерізів, його значення в механіці деформованого тіла.
15. Які внутрішні силові фактори виникають у поперечному перерізі бруса і як вони пов'язані з основними деформаціями?
16. Що називається повним, нормальним і дотичним напруженням?
17. Як позначається і як напрямлене: нормальне напруження, дотичне напруження?
18. Як називається і позначається внутрішнє зусилля в поперечному перерізі стержня, який навантажений силою, що співпадає з його віссю? Як обчислюється ця сила?
19. Яка внутрішня сила лежить у площі поперечного перерізу стержня? Як вона називається і позначається?
20. Які пари сил у загальному випадку діють в площині поперечного перерізу стержня? Як називаються і розраховуються моменти цих пар?
21. Як формулюється принцип незалежності дії сил?

## 1.2 Розтяг і стиск

### 1.2.1 Напруження й деформації розтягу й стиску

*Розтягом* або *стиском* називають таку деформацію, при якій у будь-якому поперечному перерізі бруса виникає *тільки* *поздовжня сила*.

Розглянемо невагомий, жорстко защемлений лівим кінцем прямий брус, вздовж осі якого діють активні сили  $P$  і  $2P$  (рис. 1.6). Частини бруса сталого перерізу, що містяться між поперечними площинами, в яких прикладені зовнішні (активні або реактивні) сили, називатимемо ділянками. Застосувавши метод перерізів, визначимо на ділянках поздовжні сили  $N_1$  і  $N_2$ . Зробимо спочатку поперечний переріз 1 – 1 лівої ділянки бруса. В даному випадку зовнішні сили горизонтальні – тому в перерізі буде діяти тільки поздовжня сила  $N_1$ .

Поперечна сила  $Q$  і згинаючий момент  $T$  дорівнюватиме нулю.

Визначаємо з умови рівноваги правої частини бруса поздовжню силу  $N_1$ :

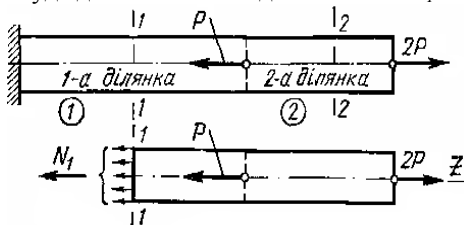


Рисунок 1.6

$$\sum Z = 0; \quad 2P - P - N_1 = 0; \quad \text{або} \quad N_1 = 2P - P = P.$$

В перерізі 2–2, якщо записати умови рівноваги на правій ділянці, то поздовжня сила матиме значення  $N_2 = 2P$ .

Таким чином, *поздовжня сила* в поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, розміщених по один бік перерізу (маємо на увазі, що всі сили напрямлені вздовж осі бруса). Очевидно, що в межах однієї ділянки поздовжня сила матиме стале значення.

Якщо нанести на поверхню бруса сітку поздовжніх і поперечних ліній і піддати брус деформації розтягу (стиску), то дослід показує, що:

- поперечні лінії на поверхні бруса залишаються перпендикулярними до осі, а відстань між ними збільшується (при стиску – зменшується);
- поздовжні лінії залишаються прямими, а відстань між ними збільшується (при стиску – зменшується).

З цього дослідів випливає, що для розтягу (стиску) справедлива *гіпотеза плоских перерізів* і, отже, всі волокна видовжуються

(скорочуються) на одну і таку саму величину. Тобто, під час розтягу і стиску в поперечних перерізах виникають тільки нормальні напруження, які рівномірно розподілені в перерізі. Ці напруження обчислюють за формулою

$$\sigma = N / A, \quad (1.2)$$

де  $N$  – поздовжня сила, а  $A$  – площа поперечного перерізу. Очевидно, що для розтягу і стиску форма перерізу на величину напруження не впливає.

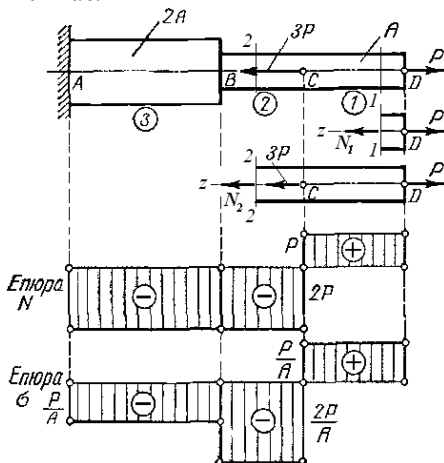


Рисунок 1.7

**Розв'язання.** Покажемо ділянки  $AB$ ,  $BC$  і  $CD$ : межами ділянок є точки прикладення сил і місця зміни розмірів поперечного перерізу. Показуємо в межах ділянки  $CD$  переріз 1-1 (рис. 1.7), зображуємо праву частину бруса і зовнішню силу  $P$ , яка прикладена до цієї частки, а також поздовжню силу  $N_1$ , яку прикладаємо до перерізу. Записуємо рівняння рівноваги:

$$\sum Z = 0; \quad -P + N_1 = 0; \quad \text{отже } N_1 = P \quad (\text{ділянка } CD).$$

Обчислюємо також поздовжні сили для ділянки  $CB$  і  $BA$ :

$$N_2 = -2P; \quad N_3 = -2P.$$

Для побудови епюри поздовжніх сил  $N$  покажемо нульову вісь, яка паралельна осі бруса. Величину поздовжніх сил у деякому масштабі відкладаємо при додатних значеннях (розтяг) угору, а при від'ємних (стиск) – униз від осі. Сили  $N$  в межах ділянки не змінюються – тобто епюра – пряма, паралельна осі. Епюру штрихуємо лініями, перпендикулярними до осі.

Визначаємо далі нормальні напруження: ділянка  $AB$ :

Для наочного зображення розподілу вдовж осі бруса поздовжніх сил і нормальних напружень будують графіки, які називають епюрами, причому для нормальних напружень застосовують те саме правило знаків, що і для поздовжніх сил.

**Приклад 1.1.** Побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напружень для ступінчастого бруса (рис. 1.7), який має площі перерізу відповідно  $A$  і  $2A$ .



$$\sigma = N_3/2A = -P/A;$$

ділянка BC:  $\sigma = N_2/A = -2P/A$ ;

ділянка CD:  $\sigma = N_1/A = P/A$ .

Будуємо епюру напружень  $\sigma$  (рис. 1.7) аналогічно побудові епюри  $N$ .

*Деформації при розтягу (стиску).* Уявимо прямий брус сталого поперечного перерізу  $F$ , що має довжину  $\ell$ , який жорстко закріплений одним кінцем і навантажений на другому кінці силою  $P$  (рис. 1.8). Під дією цієї сили брус видовжиться на деяку величину  $\Delta\ell$ , яку назовемо *абсолютним видовженням*.

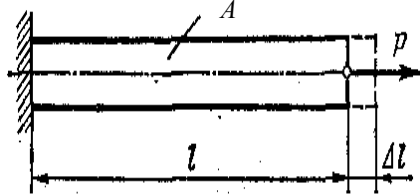


Рисунок 1.8

Відношення абсолютного видовження до початкової довжини  $\ell$  назовемо *відносним видовженням*

$$\varepsilon = \Delta\ell / \ell. \quad (1.3)$$

Відносне видовження  $\varepsilon$  число безрозмірне, іноді його подають у процентах.

Внаслідок деформації поперечні перерізи бруса переміщуються вздовж осі. Взаємне переміщення двох перерізів дорівнює зміні довжини частини бруса, що лежить між цими перерізами. Отже, деформація розтягу й стиску бруса характеризується абсолютною й відносною деформацією (видовженням або вкороченням).

### 1.2.2 Закон Гука для розтягу і стиску

Напруження й деформації розтягу й стиску пов'язані між собою залежністю, яку називають законом Гука, за ім'ям англійського фізика Роберта Гука, що встановив цей закон. Закон Гука для розтягу й стиску справедливий лише в певних межах навантаження й формулюється так: *нормальне напруження прямо пропорційне відносній деформації*. Математично закон Гука записується у вигляді

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (1.4)$$

Коефіцієнт пропорційності  $E$  характеризує пружність матеріалу, тобто його здатність протидіяти пружним деформаціям розтягу або стиску, і називається модулем поздовжньої пружності або модулем пружності першого роду.

Значення модуля пружності першого роду  $E$  для деяких матеріалів дано у табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Матеріал	$E$ , МПа	Матеріал	$E$ , МПа
Чавун	$(1,5-1,6) \cdot 10^5$	Дерево(вдовж волокон)	$(0,1-0,16) \cdot 10^5$
Сталь	$(1,96-2,16) \cdot 10^5$	Текстоліт	$(0,06-0,1) \cdot 10^5$
Мідь	$(1,0-1,3) \cdot 10^5$	Капрон	$(0,01-0,02) \cdot 10^5$
Сплави алюмінію	$(0,69-0,71) \cdot 10^5$	Бетон	$(0,15-0,4) \cdot 10^5$

Модуль пружності і напруження вимірюють в однакових одиницях:  $[E] = \text{Па}$ .

Якщо у формулу закону Гука підставити напруження  $\sigma$  (1.4) і відносне видовження  $\varepsilon$  (1.3), то дістанемо

$$\Delta \ell = N \ell / EA = \sigma \ell / E. \quad (1.5)$$

Добуток  $EA$  у знаменнику називають *жорсткістю перерізу при розтягу і стиску*, він характеризує одночасно фізико-механічні властивості матеріалу і геометричні розміри поперечного перерізу бруса. Цю формулу читають так: *абсолютне видовження або укорочення бруса прямо пропорційне поздовжній силі, довжині і обернено пропорційне жорсткості перерізу бруса*.

Наведені формули закону Гука стосуються лише брусів або їх ділянок сталого поперечного перерізу, виготовлених з одного матеріалу, при сталій поздовжній силі. Для бруса, що має кілька ділянок, які відрізняються матеріалом, величиною поздовжньої сили, та розмірами поперечного перерізу, зміна довжини всього бруса дорівнює алгебраїчній сумі подовжень і укорочень окремих ділянок:

$$\Delta \ell = \sum_{i=1}^n \Delta \ell_i = \sum_{i=1}^n (N_i \ell_i / EA_i) \quad (1.6)$$

або в інтегральному вигляді

$$\Delta \ell = \int_0^{\ell} (N(\ell) \cdot d\ell / E \cdot A(\ell)), \quad (1.7)$$

де  $N(\ell)$ ,  $A(\ell)$  – відповідні функції поздовжньої сили й площі поперечного перерізу уздовж довжини бруса  $\ell$ .

**Приклад 1.2.** На сталений ступінчастий брус ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа) діють сили  $P = 20$  кН і  $T = 30$  кН (рис. 1.9). Площі поперечних перерізів  $A_1 = 400$  мм<sup>2</sup>,  $A_2 = A_3 = 800$  мм<sup>2</sup>. Довжини ділянок вказано на рисунку 1.9;  $a = 0,2$  м. Побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напружень. Визначити зміну довжини бруса.

**Розв'язання.** Визначаємо поздовжні сили і нормальні напруження на кожній ділянці:

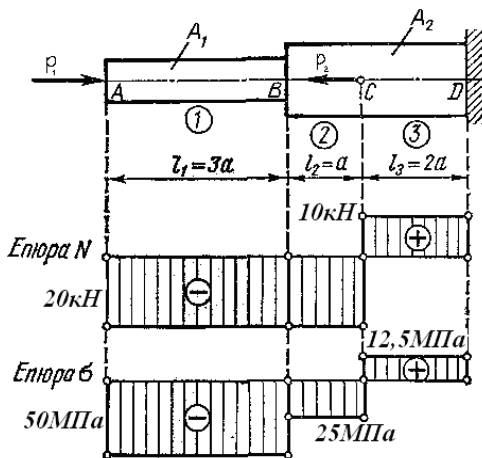


Рисунок 1.9

ділянка AB:  
 $N_1 = -P = -20 \text{ кН}$ ;  
 $\sigma_1 = N_1 / A_1 = -50 \text{ МПа}$ ;  
 ділянка BC:  
 $N_2 = -P = -20 \text{ кН}$ ;  
 $\sigma_2 = N_2 / A_2 = -25 \text{ МПа}$ ;  
 ділянка CD:  
 $N_3 = -P + T = 10 \text{ кН}$ ;  
 $\sigma_3 = N_3 / A_2 = 12,5 \text{ МПа}$ .  
 Будуємо епюри  $N$  і напружень  $\sigma$ .

Обчислюємо деформації ділянок:

$$\Delta \ell_1 = N_1 \ell_1 / E A_1 = \sigma_1 \ell_1 / E = -50 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 0,2 / 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 = -0,15 \cdot 10^{-3} (\text{м}) = -0,15 \text{ мм};$$

$$\Delta \ell_2 = N_2 \ell_2 / E A_2 = \sigma_2 \ell_2 / E = -25 \cdot 10^6 \cdot 0,2 / 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 = -0,025 \cdot 10^{-3} (\text{м}) = -0,025 \text{ мм};$$

$$\Delta \ell_3 = N_3 \ell_3 / E A_3 = \sigma_3 \ell_3 / E = 12,5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0,2 / 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 = 0,025 \cdot 10^{-3} (\text{м}) = 0,025 \text{ мм}.$$

Загальна деформація бруса

$$\Delta \ell = \Sigma(\Delta \ell_i) = -0,15 - 0,025 + 0,025 = -0,15 (\text{мм}).$$

Отже, брус укоротиться на 0,15 мм.

### 1.2.3 Поперечна деформація розтягу і стиску

Досвід показує, що поперечні розміри перерізу *при розтягу зменшуються, а при стиску збільшуються*. Це характерно для розтягу і стиску всіх матеріалів. На дослідах встановлено, що при одновісному розтягуванні або стисканні відношення відносних поперечних і поздовжніх деформацій для даного матеріалу є величина стала. Залежність між відносною поперечною  $\varepsilon'$  і відносною поздовжньою  $\varepsilon$  деформаціями вперше встановив французький вчений Пуассон. Ця залежність має такий вигляд:

$$|\varepsilon'| = \mu |\varepsilon|, \quad (1.8)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт поперечної деформації, або коефіцієнт Пуассона, який залежить від матеріалу і характеризує його пружні властивості.

Зауважимо, що і поздовжня і поперечна деформації – лінійні деформації. Наведемо значення  $\mu$  для деяких матеріалів: корок – 0,00; латунь – (0,32-0,42); чавун – (0,23-0,27); свинець – 0,42; сталь – (0,24-0,30); каучук – 0,47; мідь – (0,31-0,34); парафін – 0,5.

## 1.2.4 Діаграма розтягу маловуглецевої сталі

Механічні характеристики матеріалів, тобто величини, які характеризують їх міцність, пластичність, пружність, твердість, а також пружні сталі величини  $E$  і  $\mu$ , які потрібні конструктору для вибору матеріалів та розрахунків деталей, визначають за допомогою механічних випробувань стандартних зразків, виготовлених з досліджуваного матеріалу. Розглянемо діаграму, отриману в процесі найбільш поширеного і важливого механічного випробування, а саме випробування на розтяг маловуглецевої сталі (наприклад, сталі Ст 3) при статичному навантаженні. Для випробувань на розтяг застосовують розривні машини. З випробуваного матеріалу виготовляють спеціальні зразки. У процесі випробування спеціальний пристрій випробувальної машини автоматично креслить діаграму в координатах  $P - \Delta\ell$ , яка показує залежність між розтягуючою силою  $P$  і абсолютним видовженням  $\Delta\ell$  зразка. Для вивчення механічних властивостей матеріалу незалежно від розмірів зразка застосовують також діаграму в координатах «напруження  $\sigma$  – відносне видовження  $\varepsilon$ ». Ці діаграми відрізняються одна від одної лише масштабами.

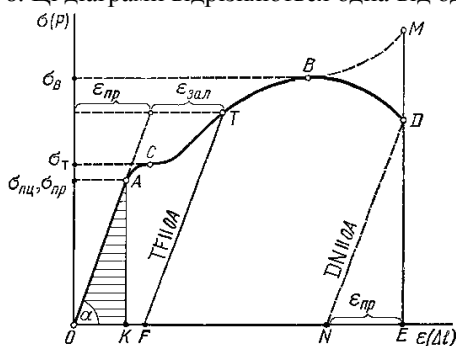


Рисунок 1.10

вантаженню, тобто відповідно до закону Гука (для сталі Ст3 напруження  $\sigma_{nc} = 200$  МПа). Точка A практично відповідає й іншій границі, яку називають границею пружності. Границею пружності  $\sigma_{np}$  називають таке найбільше напруження, до якого деформації практично залишаються пружними. Точка C відповідає границі текучості. Границею текучості  $\sigma_t$  називають таке напруження, при якому у зразку виникає помітне видовження без збільшення навантаження (для сталі Ст3 напруження  $\sigma_t = 240$  МПа). Коли деформація досягає границі текучості, поверхня зразка стає матовою, бо на ній з'являється сітка ліній Людерса – Чернова, нахилених до його осі під кутом  $45^\circ$ .

Діаграму розтягу маловуглецевої сталі в координатах  $\sigma - \varepsilon$  подано на рисунку 1.10. Ця діаграма має такі характерні точки.

Точка A відповідає границі пропорційності.

Границею пропорційності  $\sigma_{nc}$  називають таке найбільше напруження, до якого деформації зростають пропорційно на-

*Границя текучості* – це основна механічна характеристика для оцінки міцності пластичних матеріалів. Точка *B* відповідає тимчасовому опору або границі міцності. *Тимчасовим опором (або границею міцності)*  $\sigma_b$  називають умовне напруження, що дорівнює відношенню максимальної сили, яку витримує зразок, до початкової площі його поперечного перерізу (для сталі Ст3  $\sigma_b = 400$  МПа).

Коли деформація досягає тимчасового опору, то на розтягуваному зразку утворюється місцеве звуження – шийка, тобто починається руйнування зразка. В означенні тимчасового опору йдеться про умовне напруження, оскільки в перерізах шийки площа перерізу зменшується й дійсні напруження будуть більшими. Границя міцності є основною механічною характеристикою для оцінки міцності *крихких* матеріалів.

Точка *D* відповідає напруженням, які виникають у зразку в усіх поперечних перерізах в момент розриву, крім перерізу шийки.

За допомогою діаграми розтягу в координатах ( $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ) визначається модуль пружності першого роду ( $E = \tan \alpha = AK/OK$ ). Деформація зразка за границею пружності (наприклад, точка *T* діаграми) складається з пружної  $\varepsilon_{np}$  і залишкової  $\varepsilon_{зал}$  деформацій. Якщо в точці *T* діаграми навантаження зняти, то зразок укоротиться відповідно до прямої *TF* діаграми. При повторному навантаженні того самого зразка його деформація відповідатиме діаграмі *FTBD*. Отже, *при повторному розтягуванні* зразка, раніше навантаженого більше, ніж границя пружності, механічні властивості матеріалу змінюються, а саме: *підвищується міцність* (границя пружності  $\sigma_{np}$  і пропорційності  $\sigma_{nc}$ ) і *зменшується пластичність*. Це явище називають наклепом.

Наприклад, дрiт, який витягують волочінням, у результаті наклепу має значно більшу міцність, ніж стандартний точений зразок з того самого матеріалу.

Ступінь пластичності матеріалу можна охарактеризувати величиною (в процентах) залишкового відносного подовження  $\delta$  і залишкового відносного звуження  $\psi$  шийки зразка після розриву:

$$\delta = [(\ell_p - \ell_o) / \ell_o] \cdot 100\%; \quad \psi = [(A_o - A_u) / A_o] \cdot 100\%,$$

де  $\ell_o$  – початкова довжина зразка;

$\ell_p$  – довжина зразка після розриву;

$A_o$  – початкова площа поперечного перерізу зразка,

$A_u$  – площа найменшого поперечного перерізу шийки зразка після розриву.

Чим більші  $\delta$  і  $\psi$ , тим пластичніший матеріал. Матеріали, які мають дуже малу пластичність, називають крихкими. Діаграма розтягу крихких матеріалів не має переходу текучості, в них при руйнуванні шийка не утворюється.

Діаграма стиску сталі до границі текучості збігається з діаграмою розтягу, причому результати випробування сталі на розтяг і стиск однакові. Результати випробувань на розтяг і стиск чавуну значно відрізняються; його границя міцності на розтяг у 3-5 разів менша, ніж на стиск. Інакше кажучи, *чавун значно гірше працює на розтяг, ніж на стиск*.

Зазначимо, що чітко виражену площадку текучості мають лише діаграми розтягу маловуглецевої сталі і деяких сплавів кольорових металів. На рисунку 1.11 показано для порівняння діаграми розтягу сталей з різним вмістом вуглецю. З рисунка видно, що із збільшенням *процента вмісту вуглецю (Ст4, Ст6) зростає міцність сталі і зменшується її пластичність*.

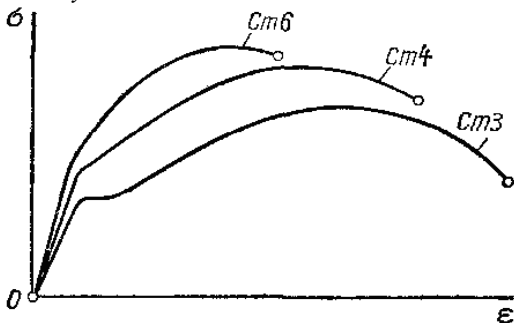


Рисунок 1.11

Для пластичних матеріалів, діаграми розтягу яких не мають чітко вираженої площадки текучості (середньо- і високовуглецеві, легovanі сталі) або зовсім її не мають (мідь, дюралюміній), вводиться поняття умовної границі

текучості — напруження, при якому відносне залишкове видовження зразка дорівнює звичайно 0,2%. Таку границю текучості іноді позначають  $\sigma_{0,2}$ .

Треба зазначити, що поділ матеріалів на пластичні і крихкі досить умовний, оскільки залежно від характеру зовнішнього навантаження крихкий матеріал може набути пластичних властивостей і, навпаки, пластичний матеріал набуває властивостей крихкого. Так, наприклад, деталь з пластичного матеріалу при низькій температурі або при ударному навантаженні руйнується без утворення шийки, як крихка.

### 1.2.5 Розрахункова формула на міцність для розтягу (стиску)

За допомогою механічних випробувань встановлюють граничні напруження, при яких відбувається порушення роботи або руйнування деталей конструкцій. Граничним напруженням при статичному навантаженні для *пластичних матеріалів є границя текучості  $\sigma_t$* , для *крихких — границя міцності  $\sigma_v$* . Для пластичних матеріалів при таких

напруженнях спостерігаються помітні залишкові деформації, а для крихких матеріалів можливе руйнування. Тобто, такі напруження не можна вважати припустимими.

Міцність деталей забезпечуватиметься при умові, що напруження, які виникають в деталях у процесі експлуатації, будуть менші від граничних.

Відношення граничного напруження  $\sigma_{gr}$  до робочого напруження  $\sigma_{роб}$ , яке виникає у процесі роботи деталі, називають *коефіцієнтом запасу міцності*:

$$n = \sigma_{gr} / \sigma_{роб} . \quad (1.9)$$

Очевидно, що малий коефіцієнт запасу міцності не забезпечить надійності конструкції, а надмірний запас міцності призведе до перевитрат матеріалу і збільшення ваги конструкції. Переріз, для якого коефіцієнт запасу міцності найменший, називають небезпечним. Мінімально необхідний коефіцієнт запасу міцності називають припустимим і позначають  $[n]$ .

Таблиця 1.2

Матеріал	Припустимі напруження $[\sigma]$ , МПа	
	Розтяг	Стиск
Чавун сірий	28-80	120-150
Сталь вуглецева конструкційна	60-250	
Сталь легована конструкційна	100-400 і більше	
Мідь	30-120	
Латунь	70-140	
Бронза	60-120	
Дюралюміній	80-150	
Текстоліт	30-40	50-90
Дуб (вздовж волокон)	9-13	13-15
Цегляна кладка	До 0,2	0,6-2,5
Бетон	0,1-0,7	1-9

Припустимий коефіцієнт запасу міцності залежить від властивостей, якості і однорідності матеріалу, можливих навантажень, які діють на конструкцію, важливості конструкції, точності розрахунку і багатьох інших причин.

На практиці, звичайно, приймають:

для пластичних матеріалів  $[n]=1,2-2,5$ ;

для крихких  $[n]=2-5$ ;

для деревини  $[n]=8-12$ .

Відношення граничного напруження до допустимого коефіцієнта запасу міцності називають *припустимим напруженням* і позначають як  $[\sigma]$ :

$$[\sigma] = \sigma_{cp} / [n]. \quad (1.10)$$

Величини припустимих напружень на розтяг і стиск для деяких матеріалів подано в табл. 1.2.

Умова міцності деталі конструкції полягає у тому, що максимальні робочі напруження, які виникають у деталі, не повинні перевищувати припустимі:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (1.11)$$

Умову міцності можна записати в іншому вигляді:

$$n \geq [n]. \quad (1.12)$$

Отже, розрахунковий коефіцієнт запасу міцності не повинен бути меншим від припустимого. Розрахункова формула для розтягу (стиску) має вигляд:

$$\sigma_{\max} = N/A \leq [\sigma]. \quad (1.13)$$

Тобто: *нормальне напруження в небезпечному перерізі не повинно перевищувати припустиме напруження.*

У розрахунках конструкцій на міцність розглядають три види задач, які відрізняються формою застосовування розрахункової формули:

1) проектний розрахунок, при якому визначають розміри небезпечного перерізу

$$A \geq N_{\max} / [\sigma]; \quad (1.14)$$

2) перевірний розрахунок, при якому визначають робоче напруження і порівнюють його з припустимим

$$\sigma_{\max} = N/A \leq [\sigma]; \quad (1.15)$$

3) визначають припустиме навантаження

$$N \leq A \cdot [\sigma]; \quad (1.16)$$

4) іноді для забезпечення нормальної роботи розміри деталей вибирають так, щоб виконувалась умова жорсткості, котра для розтягу (стиску) має вигляд

$$\Delta \ell \leq [\Delta \ell], \quad (1.17)$$

де  $\Delta \ell$  – зміна довжини деталі, яка обчислюється за формулами (1.5) або (1.6);

$[\Delta \ell]$  – припустиме значення цієї величини.

Нагадаємо, що розрахунок за умовою жорсткості завжди слід доповнювати розрахунком на міцність за формулою (1.11).



**Приклад 1.3.** Визначити розмір квадратного перерізу дерев'яного підкосу  $BC$  конструкції, що зображена на рисунку 1.12, якщо  $P = 5 \text{ кН}$ ,  $[\sigma] = 6 \text{ МПа} = 6 \text{ Н/мм}^2$ ,  $a = 1 \text{ м}$ . Масою частин конструкції знехтувати, кріплення у точках  $A$ ,  $B$  і  $C$  вважати ідеальними шарнірами.

*Розв'язання.*

З теоретичної механіки відомо, що коли прямолінійний невагомий стержень закріплено двома кінцями з шарнірами і навантажено лише на кінцях, то його реакція напрямлена вздовж стержня. Отже, реакція  $R$  стержня  $BC$ , що підтримує брус  $AB$ , напрямлена вздовж стержня угору. На стержень  $BC$  діє сила  $R'$  (сила тиску бруса  $AB$ ). Отже у поперечних перерізах стержня виникатимуть тільки поздовжні сили  $N = R'$  і він зазнаватиме деформації стиску, причому, згідно з третім законом Ньютона,  $R' = R$ .

Щоб визначити реакцію  $R$ , розглянемо рівновагу бруса  $AB$ . Оскільки реакція шарніра  $A$  нас не цікавить, то складемо одне рівняння рівноваги, а саме:

$$\sum M_A = 0 \quad \text{або} \quad -P \cdot 2a + R \cdot a \cdot \sin 45^\circ = 0.$$

Звідси

$$R = 2.5 / 0.707 = 14,2 \text{ (кН)}.$$

Далі скористаємось розрахунковим виразом міцності для стиску і визначимо площу  $A$  поперечного перерізу підкосу  $BC$ :

$$A \geq N_{\max} / [\sigma]$$

або  $A \geq 14,2 \cdot 10^3 / 6 = 2370 \text{ мм}^2$ .

Оскільки підкіс  $BC$  має квадратний переріз, то  $A = b^2$ , отже отримаємо  $b \geq 48,6 \text{ мм}$ . Округляємо в бік збільшення до стандартного значення і приймаємо  $b = 50 \text{ мм}$ .

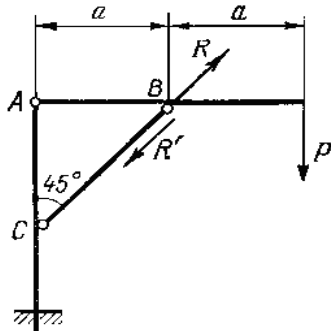


Рисунок 1.12

### 1.2.6 Статично невизначені задачі. Вплив температури

Задачі на розрахунок конструкцій, в елементах яких внутрішні силові фактори не можна визначити з рівнянь рівноваги статички, називають *статично невизначеними*. У таких системах в'язів більше ніж потрібно для рівноваги. Отже, деякі в'язі так би мовити зайві, а

зусилля в них – зайві невідомі. Зайвими такі в'язі називають тому, що вони не потрібні для забезпечення геометричної незмінності та рівноваги конструкції, але з умов міцності й жорсткості зайві в'язі можуть стати необхідними. За числом зайвих в'язів або зайвих невідомих зусиль установлюють ступінь статичної невизначеності системи. Коли є одна зайва невідома, конструкцію називають один раз статично невизначеною, при двох – двічі статично невизначеною й т.п.

Для розв'язання таких задач, до рівнянь статички додають *рівняння переміщень*. При цьому розглядають систему в деформованому стані, що дає змогу встановити зв'язки між деформаціями або переміщеннями окремих елементів конструкції. Ці рівняння називають рівняннями *сумісності деформацій*. Далі, на підставі закону Гука виражають деформації або переміщення через невідомі зусилля. У разі зміни температури до деформацій, спричинених зусиллями, додають температурні деформації.

При дії температури на статично визначені системи спостерігаємо вільні деформації стержня при відсутності напружень. Так, якщо приріст температури здійснюється рівномірно на  $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$ , а довжина стержня  $\ell$ , то його температурне видовження буде:

$$\Delta \ell_t = \alpha \cdot \Delta t \cdot \ell, \quad (1.18)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу стержня;

$t_2, t_1$  (°C) – кінцева й початкова температура в градусах.

Наведемо приклади розв'язання статично невизначених задач.

**Приклад 1.4.** Визначити температурні напруження в невагомому жорстко закріпленому стержні при рівномірному нагріванні на  $\Delta t$  градусів (рис. 1.13). Довжина стержня  $\ell$ , площа перерізу  $F$ , модуль пружності матеріалу  $E$ .

*Розв'язання.* При підвищенні температури стержень намагається видовжитися. Цьому перешкоджають жорсткі опори  $A$  і  $B$ . При цьому виникають реакції  $R_A$  і  $R_B$ , які спрямовані уздовж осі стержня.

Складемо рівняння рівноваги стержня:

$$\sum x = 0; R_A - R_B = 0; \quad R_A = R_B = R.$$

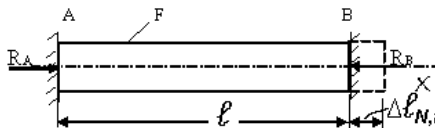


Рисунок 1.13

Отже задача один раз статично невизначена. Внаслідок жорсткого закріплення стержня його довжина  $\ell$  не зміниться і тому скорочення

стержня від поздовжньої сили  $N$  повинно дорівнювати його видовженню при нагріванні:

$$\Delta \ell_N = \Delta \ell_t.$$

Згідно пункту 1.2.1 поздовжня сила у всіх перерізах однакова, від'ємна за знаком і дорівнює за величиною реакції, тобто  $N = -R$ .

Температурне видовження  $\Delta \ell_t = \alpha \Delta t \ell$ , де  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу стержня. Укорочення під дією реакції  $\Delta \ell_N = R\ell/(EF)$ . Прирівнюємо деформації  $R\ell/(EF) = \alpha \Delta t \ell$

$$\text{або} \quad R = \alpha \Delta t EF, \quad N = -R = -\alpha \Delta t EF.$$

Визначаємо температурні напруження:  $\sigma_t = N/F = -\alpha \Delta t E$ .

Як виявилось, при нагріванні в перерізі стержня з защемленими кінцями з'являються напруження стиску, які пропорційні приросту температури стержня.

Щоб не виникали температурні напруження при будівництві мостів, один кінець моста ставлять на котки; у трубопроводах, що зазнають зміни температури, роблять компенсуючі пристрої й ін.

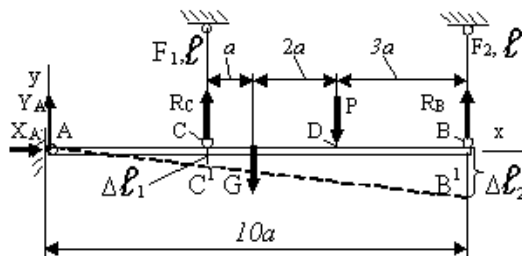


Рисунок 1.14

### Приклад 1.5.

Жорстка балка АВ (рис. 1.14), вага якої  $G = 40 \text{ кН}$ , шарнірно закріплена горизонтально й утримується двома сталевими стержнями, що мають однакову довжину  $\ell = 2 \text{ м}$ . На

балку діє сила  $P = 20 \text{ кН}$ . Площі поперечних перерізів стержнів дорівнюють відповідно  $F_1 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$  і  $F_2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ . Модуль пружності матеріалу стержнів (сталь)  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ . Визначити зусилля у стержнях, а також напруження, що виникають у них.

**Розв'язання.** Покажемо реакції в'язей:  $X_A, Y_A, R_C, R_B$ . Для системи сил на площині можна записати *три рівняння рівноваги*: суми проекцій сил на осі координат  $x$  і  $y$  й суму моментів сил відносно якоїсь точки, а *невідомих реактивних сил – чотири*. Отже, *система один раз статично невизначена*: число невідомих перевищує число рівнянь статички на одиницю. Оскільки реакції шарніра А нас не цікавлять, то запишемо тільки одне рівняння рівноваги, а саме суму моментів сил відносно точки А:

$$\sum M_A = R_C \cdot 4a - G \cdot 5a - P \cdot 7a + R_B \cdot 10a = 0 \quad (1.19)$$

і додаємо додаткове рівняння деформацій, котре одержимо, розглядаючи залежність між недеформованою системою АСВ і деформованою АС<sup>1</sup>В<sup>1</sup>. З рисунку 2.9 видно, що деформації стержнів при навантаженні дорівнюють  $\Delta\ell_1$  і  $\Delta\ell_2$ . Трикутники АСС<sup>1</sup> і АВВ<sup>1</sup> подібні, отже, маємо

$$\Delta\ell_1/4a = \Delta\ell_2/10a. \quad (1.20)$$

За законом Гука

$$\Delta\ell_1 = R_C \ell / (EF_1), \quad \Delta\ell_2 = R_B \ell / (EF_2). \quad (1.21)$$

Вирішуючи разом рівняння (1.19), (1.20), (1.21) і враховуючи вихідні дані, знаходимо:

$$R_C = 6,3 \text{ кН}; \quad R_B = 31,5 \text{ кН}.$$

Обчислюємо напруження в стержнях:  $\sigma_1 = R_C / F_1 = 31,5 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_2 = R_B / F_2 = 78,8 \text{ МПа}$ .

### 1.2.7 Зминання

Якщо деталі конструкцій, які передають значне навантаження, мають невелику площу контакту, то поверхні цих деталей можуть *зминатися*. Щоб цього не сталося, наприклад, під гайки й головки болтів підкладають шайби. Для спрощення розрахунків вважають, що при площинному контакті виникають нормальні напруження зминання, що рівномірно розподілені по площі контакту. Розрахункове рівняння при зминанні має вигляд:

$$\sigma_{зм} = P / F_{зм} \leq [\sigma]_{зм}, \quad (1.22)$$

де  $\sigma_{зм}$  – розрахункові напруження зминання;

$P$  – стискаюча сила;

$[\sigma]_{зм}$  – допустиме напруження на зминання;

$F_{зм}$  – площа зминання.

Для деталей, які контактують циліндричними поверхнями (наприклад, заклепочне з'єднання, ось і підшипник), закон розподілу напружень зминання по поверхні контакту складний. Тоді в розрахункову формулу умовно приймають площу діаметрального перерізу осі, тобто,

$$F_{зм} = d \cdot s, \quad (1.23)$$

де  $d$  – діаметр осі;

$s$  – найменша товщина з'єднаних деталей.

Якщо деталі, що контактують, виготовлені з різних за твердістю матеріалів, то на зминання перевіряється більш м'який матеріал.

**Приклад 1.6.** Тяга 2 шарнірно з'єднана з вилкою 1 (рис. 1.15) за допомогою осі 3.



Ураховуючи, що  $\varepsilon = \sigma/E$  (закон Гука – формула (1.3)), матимемо

$$u = \sigma^2/(2E) = \varepsilon^2 E/2. \quad (1.26)$$

Потенціальна енергія деформації вимірюється в одиницях роботи – джоулях (Дж).

При одночасній дії декількох сил, або при зміні розмірів перерізу стержня потенціальну енергію деформації знаходять як суму потенціальних енергій окремих ділянок

$$U = \sum U_i = \sum u_i V_i = \sum \sigma_i^2 V_i / (2E), \quad (1.27)$$

де  $\sigma_i$  – нормальне напруження у поперечних перерізах на кожній ділянці;

$V_i$  – об'єм кожній ділянці.

Тобто, потенціальна енергія деформації – величина завжди додатна тому, що вона залежить від квадрату напружень або квадрату поздовжніх сил.

### Контрольні запитання до розділу 1.2

1. Як обчислюється поздовжня сила в поперечному перерізі бруса?
2. За якою формулою визначають напруження в поперечному перерізі стержня при його поздовжньому деформуванні?
3. Як розраховують відносне видовження при розтягу (стиску)?
4. Сформулюйте закон Гука при розтягу (стиску).
5. Як називається коефіцієнт пропорційності між напруженнями й деформаціями при розтягу (стиску) і що він характеризує? В яких одиницях його вимірюють?
6. Як обчислюють подовження чи скорочення стержня, що має кілька ділянок, при розтягу (стиску)?
7. Запишіть інтегральну формулу, яка визначає подовження чи скорочення стержня при розтягу (стиску)?
8. Сформулюйте залежність між відносною поперечною й відносною поздовжньою деформаціями при розтягу (стиску).
9. Сформулюйте, що називається: границею пропорційності, границею текучості,
10. тимчасовим опором або границею міцності?

11. Як визначається модуль пружності першого роду за допомогою діаграми розтягу?
11. Що називають наклепом?
12. Як визначається і позначається границя текучості матеріалів, діаграма розтягу яких не має чітко вираженої площадки текучості?
13. Сформулюйте, як визначається: коефіцієнт запасу міцності, допустиме напруження?
14. Як записується умова міцності за допустимими напруженнями?
15. Як записується умова міцності, якщо відомі розрахунковий і допустимий коефіцієнт запасу міцності?
16. Який вид має розрахункова формула для розтягу (стиску), що визначає розміри небезпечного перерізу?
17. Як записується умова жорсткості для розтягу (стиску)?
18. Яка механічна система називається статично невизначеною і чому?
19. Як у найпростіших випадках розкривається статична невизначеність?
20. Яка механічна система називається статично невизначеною і чому?
21. Як у найпростіших випадках розкривається статична невизначеність?
22. Як записується умова міцності за допустимими напруженнями при зминанні?
23. Як визначається площа зминання для деталей, які контактують циліндричними поверхнями?

### 1.3 Зсув (зріз)

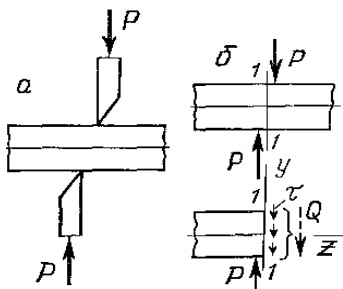


Рисунок 1.16

#### 3.1.1 Напруження й деформації зсуву

Зсувом називають такий вид деформації, коли в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає лише поперечна сила  $Q$ . Деформацію зсуву можна спостерігати, наприклад, під час різання ножицями металевих штаб або прутків (рис. 1.16).

Розглянемо брус перпендикулярно до осі якого прикладені дві однакові, але протилежно напрямлені сили  $P$ , лінії дії яких паралельні й проходять на відносно невеликій відстані одна від одної. Для визначення поперечної сили  $Q$  застосуємо метод перерізів (рис. 1.16).

В усіх точках поперечного перерізу діятимуть розподілені сили, рівнодіючу яких визначимо з умови рівноваги залишеної частини бруса:

$$\sum Y = 0, \text{ або } P - Q = 0,$$

звідки визначимо поперечну силу  $Q$ :  $Q = P$ .

Поперечна сила – це рівнодіюча внутрішніх дотичних сил, що діють на зсув у поперечному перерізі. Природно вважати, що при зсуві в поперечному перерізі бруса діють тільки дотичні напруження  $\tau$ . Припускаємо, що ці напруження розподілені по перерізу рівномірно й, отже, їх можна обчислити за формулою

$$\tau = Q/A, \quad (1.28)$$

де  $A$  – площа перерізу.

Очевидно, що при зсуві форма перерізу на величину напруження не впливає.

*Примітка.* Викладений у цьому параграфі розрахунок дотичних напружень при зсуві наближений, оскільки лінії дії сил  $P$  (рис. 1.16) напрямлені не по одній прямій і, точно кажучи, ці сили не утворюють врівноважену систему сил, це – пара сил. Проте момент цієї пари невеликий (мале плече) і відповідними їй напруженнями можна знехтувати.

#### 1.3.2 Розрахункова формула для зсуву

Умова міцності деталі конструкції на зсув полягає в тому, що найбільше напруження (робоче напруження), яке виникає в деталі, не



повинно бути більше від допустимого напруження. Розрахункова формула для зсуву

$$\tau = Q / A \leq [\tau]_{зр}, \quad (1.29)$$

тобто *дотичні напруження при зсуві не повинні бути більшими від допустимих напружень на зріз*. За цією формулою роблять проектний розрахунок, розрахунки при перевірці міцності й визначають допустиме навантаження.

Деформацію зсуву, доведену до руйнування матеріалу, називають, зрізом (стосовно металевих деталей) або сколюванням (стосовно неметалевих конструкцій). Допустиме напруження на зріз для пластичних матеріалів вибирають залежно від границі текучості  $\sigma_m$  або від допустимих напружень на розтяг  $[\sigma]$ .

У машинобудуванні для штифтів, болтів, шпонок приймають

$$[\tau]_{зр} \approx (0,25 - 0,35) \sigma_t \approx (0,6 - 0,8) [\sigma].$$

**Приклад 1.7.** Визначити діаметр осі 3 (рис. 1.15) з умови міцності на зріз, якщо припустимі напруження  $[\tau]_{зр} = 80$  МПа.

*Розв'язання.* В цьому з'єднанні руйнування може бути внаслідок зсуву тяги 2 відносно вилки 1 вздовж перерізів  $a-b$  і  $a^1-b^1$ . Тобто площа зрізу дорівнює сумі площ поперечних перерізів  $a-b$  і  $a^1-b^1$ :  $A_{зр} = 2 \pi d^2 / 4$ .

Запишемо розрахункову формулу для зсуву (3.2):

$\tau = P / A \leq [\tau]_{зр}$ , з якої знаходимо діаметр осі:

$$d_{зр} \geq \sqrt{2P / (\pi [\tau]_{зр})} = \sqrt{2 \cdot 32 \cdot 10^3 / (\pi \cdot 80)} = 15,9 \text{ мм}.$$

Приймаємо з розрахунків на зминання й зсув більший діаметр осі і округлюємо його до стандартного ближнього  $d = 16$  мм.

### 1.3.3 Деформація зсуву. Закон Гука

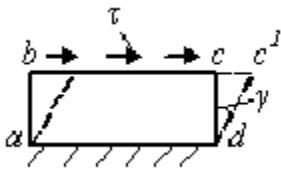


Рисунок 1.17

Розглянемо елемент бруса, що має вигляд паралелепіпеда, на грані якого діятимуть тільки дотичні напруження  $\tau$ , а одну грань вважатимемо жорстко закріпленою (рис. 1.17). Деформація зсуву в цьому елементі полягає в перекошуванні прямих кутів і її

називають *кутом зсуву  $\gamma$*  або *відносним зсувом*.

Відносний зсув, який характеризується величиною малого кута  $\gamma$ , можливо прийняти рівним відношенню  $cc^1 / cd$ . Величина кута  $\gamma$  вимірюється у радіанах. Якщо матеріал відповідає закону Гука, то

дотичні напруження пропорційні відносному зсуву, тобто виконується рівність

$$\tau = G \gamma. \quad (1.30)$$

Коефіцієнт пропорційності  $G$  характеризує жорсткість матеріалу при зсуві; його називають *модулем зсуву* або *модулем пружності другого роду*. Розмірність модуля пружності  $G$  однакова з розмірністю напружень (Па, МПа).

Зазначимо, що між трьома пружними сталими  $E$ ,  $G$  і  $\mu$  існує залежність

$$G = E / [2 (1 + \mu)]. \quad (1.31)$$

Наприклад, для сталей, прийнявши  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu \approx 0,25$ , матимемо

$$G \approx 2 \cdot 10^5 / [2 (1 + 0,25)] \approx 0,4 E \approx 8 \cdot 10^4 \text{ (МПа)}.$$

#### 1.3.4 Закон парності дотичних напружень

Закон парності дотичних напружень формулюють так: *дотичні напруження у двох взаємно перпендикулярних площадках, які перпендикулярні до їхнього спільного ребра, однакові за модулем*.

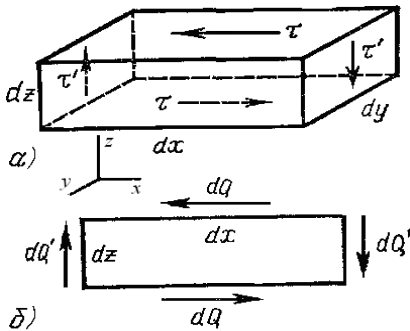


Рисунок 1.18

Всередині тіла біля якоїсь точки виріжемо елементарний паралелепіпед, що має розміри  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 1.18). Нехай на верхній грані цього паралелепіпеда діє дотичні напруження  $\tau$ . Сила, що діє в цій грані, дорівнюватиме  $dQ = \tau dx dy$ . Оскільки паралелепіпед перебуває в рівновазі, то  $\Sigma X = 0$ , отже, на нижній грані паралелепіпеда діятиме така сама сила  $dQ$ , але у протилежному напрямі. Ця пара сил ( $dQ$ ,  $dQ$ ) намагатиметься обернути паралелепіпед проти стрілки годинника (рис. 1.18). Оскільки паралелепіпед перебуває у рівновазі, то  $\Sigma M_y = 0$ , тому пара ( $dQ$ ,  $dQ$ ) зрівноважуватиметься якоюсь іншою парою з моментом, що дорівнює моменту першої пари. Природно вважати, що другу пару утворюють дотичні напруження  $\tau'$ , які діють на бокових (правій і лівій) гранях паралелепіпеда, причому  $dQ' = \tau' dz dy$ . Для рівноваги порівнюємо моменти цих пар

або  
тобто

$$\begin{aligned} dQ dz &= dQ^1 dx \\ \tau dx dy dz &= \tau^1 dz dy dx, \\ \tau &= \tau^1. \end{aligned}$$

Ця рівність – закон парності дотичних напружень.

Звернемо увагу на те, що парні дотичні напруження  $\tau$  і  $\tau'$  у двох взаємно перпендикулярних перерізах однакові за величиною і напрямлені або до лінії перетину площин, або від неї (рис. 1.18).

### 1.3.5 Напруження в похилих перерізах. Головні напруження

Через деяку точку деформованого тіла можна провести безліч січних площин. Розглянемо прямий брус сталого поперечного перерізу  $A$ , що розтягується силами  $P$  (рис. 3.4). Розріжемо брус площиною 1 – 1, що проходить через точку  $A$  і утворює з поперечним перерізом кут  $\varphi$ , відкинемо верхню частину й розглянемо рівновагу нижньої. Очевидно, що рівнодіюча  $N$  внутрішніх сил, які діють у похилому перерізі, дорівнюватиме розтягуючій силі  $P$ .

Напруження  $p_\varphi$  будуть паралельні осі бруса (рис. 1.19) і розподілені по похилому перерізу рівномірно, тобто

$$p_\varphi = N/A_\varphi,$$

де  $A_\varphi = A/\cos\varphi$  – площа похилого перерізу.

Нормальні напруження  $\sigma$  у поперечному перерізі

$$\sigma = N/A.$$

Знайдемо напруження в похилому перерізі

$$p_\varphi = N/A_\varphi = N/(A/\cos\varphi) = \sigma \cos\varphi.$$

Розкладемо повне напруження  $p_\varphi$  у точці похилого перерізу на нормальне  $\sigma_\varphi$  і дотичне  $\tau_\varphi$  (рис. 1.19), тоді

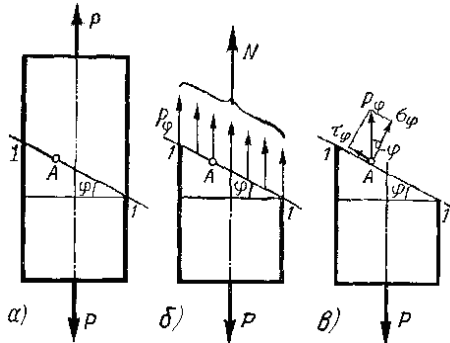


Рисунок 1.19

тягу і зсуву.

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= p_\varphi \cos\varphi = \sigma \cos^2\varphi, \\ \tau_\varphi &= p_\varphi \sin\varphi = (\sigma/2)\sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Тобто

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \sigma \cos^2\varphi, \\ \tau_\varphi &= (\sigma/2)\sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Звідси випливає висновок: під час розтягу бруса в похилих перерізах виникають нормальні й дотичні напруження й відповідні цим напруженням деформації роз-

Розглянемо окремі випадки.

1. Якщо кут  $\varphi = 0$ , то  $\sigma_\varphi = \sigma \cos^2 \varphi = \sigma = \sigma_{\max}$ ,  $\tau_\varphi = (\sigma/2) \sin 2\varphi = 0$ .

Нормальні напруження мають максимальне значення в поперечному перерізі, а дотичні напруження у поперечному перерізі дорівнюють нулю.

2. Коли  $\varphi = 45^\circ$ , то  $\sigma_\varphi = \sigma \cos^2 \varphi = \sigma/2$ ,  $\tau_\varphi = (\sigma/2) \sin 2\varphi = \sigma/2 = \tau_{\max}$ .

Дотичні напруження досягають свого максимального значення в перерізах, нахилених до осі під кутом  $45^\circ$ .

Ці напруження є причиною виникнення на розтягнутому зразку сітки похилих ліній Людерса-Чернова, коли деформація досягає границі текучості.

3. Якщо  $\varphi = 90^\circ$ , то  $\sigma_\varphi = \sigma_{\min} = 0$ ,  $\tau_\varphi = 0$ .

У поздовжніх перерізах бруса немає ні дотичних, ні нормальних напружень (цей висновок співпадає з гіпотезою про не натискання волокон (див. п. 1.1.2)).

Із сказаного випливає, що коли йдеться про напруження у даній точці, то завжди необхідно вказувати положення січної площини, в якій ці напруження виникають. Сукупність нормальних і дотичних напружень, що виникають у безлічі площадок, які можуть проходити через дану точку, характеризує *напружений стан у даній точці*.

Площини, в яких *дотичні напруження дорівнюють нулю, називають головними площадками, а нормальні напруження, що виникають у них, – головними напруженнями*. Як доводить теорія пружності, у загальному випадку напруженого стану в ділянці досліджуваної точки може бути три взаємно перпендикулярні головні площадки. Залежно від кількості таких площадок розрізняють три основних види напруженого стану: *лінійний* (одновісний), *плоский* (двовісний) і *об'ємний* (тривісний) (рис. 1.20). Головні напруження позначаються  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , причому

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (1.33)$$

Очевидно, що в розглянутому випадку одновісного розтягу головні площадки розміщені в поперечному і поздовжньому перерізах, тобто взаємно перпендикулярні. Звернемо увагу й на те, що *головні напруження в даній точці мають максимальне і мінімальне значення*:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_{\min} = 0.$$

Знайдемо залежність між головними напруженнями  $\sigma_1 = \sigma_{\max}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{\min}$  у двох взаємно перпендикулярних площадках для плоского напруженого стану.

Розглянемо рівновагу призми (рис. 1.21). Спроектуємо сили на вісь  $x$ :

$$\Sigma X = 0; \quad \tau dF + \sigma_{\min} dF \sin \varphi \cos \varphi - \sigma_{\max} dF \cos \varphi \sin \varphi = 0.$$

$$\text{Звідси} \quad \tau = [(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2] \sin 2\varphi = [(\sigma_1 - \sigma_2)/2] \sin 2\varphi.$$

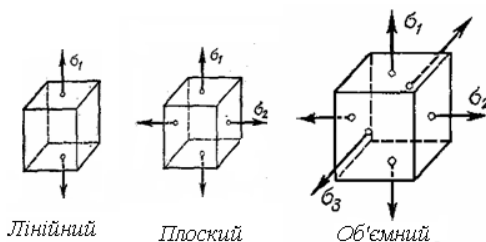


Рисунок 1.20

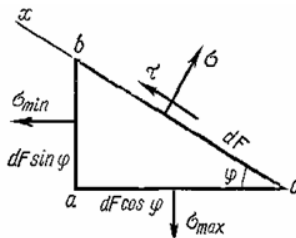


Рисунок 1.21

Найбільші дотичні напруження виникають при  $\varphi = 45^\circ$

$$\tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2 = (\sigma_1 - \sigma_2)/2,$$

тобто, дотичні напруження мають максимальні значення для площадок, розташованих під кутом  $\varphi = 45^\circ$  до головних площадок.

Якщо у випадку плоского напруженого стану біля даної точки знайти елементарний паралелепіпед так, щоб на його гранях діяли лише рівні між собою дотичні напруження (див. рис. 1.18), то такий вид напруженого стану називають *чистим зсувом* – з таким випадком ми зустрінемося при крученні круглого циліндра.

### Контрольні запитання до розділу 1.3

1. Який вид напруженого стану називається зсувом?
2. Як записується умова міцності деталі при зсуві?
3. Як формулюється закон Гука при зсуві?
4. Які абсолютні і відносні деформації відповідають зсуву?
5. Поясніть суть закону парності дотичних напружень?
6. Які напруження виникають в похилих перерізах під час розтягу бруса?
7. Які площадки називають головними і які напруження виникають на цих площадках?

## 1.4 Геометричні характеристики плоских перерізів

Досі вивчалися деформації, у яких напруження залежали тільки від площі поперечного перерізу. У деяких деформаціях міцність деталей залежить не тільки від величини площі поперечного перерізу, а й від його форми. Так, для вивчення деформацій кручення і згину потрібно знати й деякі інші геометричні характеристики плоских фігур.

### 1.4.1 Статичний момент площі

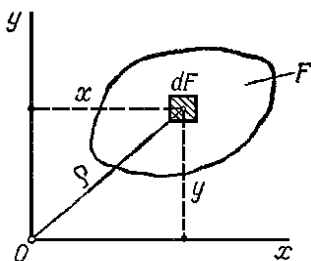


Рисунок 1.22

Статичним моментом площі плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі суму добутків площ елементарних площадок на відстані їх від цієї осі (рис. 4.1). Статичний момент площі відносно осей  $Ox$  і  $Oy$  буде:

$$S_x = \int_F y dF; \quad S_y = \int_F x dF.$$

Статичний момент можна визначити також такими формулами:

$$S_x = \sum F_i y_i; \quad S_y = \sum F_i x_i, \quad (1.34)$$

де  $F_i$ ,  $y_i$ ,  $x_i$  – відповідно площа і-тої частини фігури й координати центра ваги її.

У теоретичній механіці було виведено формули для визначення координат центра ваги площі фігури:

$$x_C = \sum F_i x_i / F, \quad y_C = \sum F_i y_i / F,$$

де  $F = \sum F_i$  – площа всієї фігури.

Вирази, які стоять у чисельниках правих частин цих формул, є статичними моментами площі фігури відносно осей  $y$  і  $x$ . Отже,

$$S_y = \int_F x dF = x_C F, \quad S_x = \int_F y dF = y_C F.$$

Статичний момент площі фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, дорівнює добутку площі фігури на відстань її центра ваги від цієї осі.

Одиниця вимірювання статичного моменту площі –  $[S] = \text{м} \cdot \text{м}^2 = \text{м}^3$ .

Статичний момент площі фігури може бути величиною додатною, від'ємною і дорівнювати нулю. Очевидно, що статичний момент площі відносно осі, яка проходить через центр ваги площі фігури (центральної осі), у тому числі відносно осі симетрії фігури, *дорівнює нулю*.

У теоретичній механіці встановлено також, що в формулах для визначення координат центра ваги площі можна розуміти площі кінцевих частин фігури, а під  $x_i$  і  $y_i$  – координати центрів ваги цих частин (тобто застосовувати метод розбиття і т. ін.). Звідси випливає, що для визначення статичного моменту площі складної фігури також можна застосовувати ті ж методи, тобто *визначати статичний момент* всієї фігури як *алгебраїчну суму* статичних моментів окремих її частин.

Поняття про статичний момент площі буде потрібне для визначення положення центрів ваги перерізів і для визначення дотичних напружень згину.

#### 1.4.2 Полярний момент інерції

Полярним моментом інерції плоскої фігури відносно полюса, який лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площині суму добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від полюса (рис. 1.23).

Полярний момент інерції позначатимемо  $J_p$ :

$$J_p = \int \rho^2 dF. \quad (1.35)$$

Одиниця виміру полярного моменту інерції –  $\text{м}^4$ .

Полярний момент інерції – величина *завжди додатна і не дорівнює нулю*.

Оскільки поняття полярного моменту інерції буде потрібне для вивчення деформацій кручення круглих валів, виведемо формули полярних моментів інерції круглого суцільного і кільцевого перерізів, приймаючи як полюс центри цих фігур.

1. Круг діаметра  $d$  (рис. 1.23).

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = \int_0^{d/2} \rho^2 2\pi\rho d\rho = \pi d^4 / 32,$$

отже  $J_p = \pi d^4 / 32 \approx 0,1 d^4$ .

2. Кільце, що має розміри  $D \times d$ :

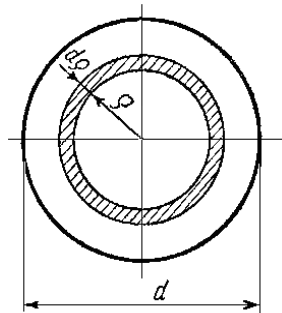


Рисунок 1.23

$$J_p = \int_{d/2}^{D/2} \rho^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4).$$

Тобто  $J_p = \pi(D^4 - d^4)/32 \approx 0,1(D^4 - d^4)$ .

#### 1.4.3 Осьовий момент інерції

*Осьовим моментом інерції* плоскої фігури відносно осі, що лежить у тій самій площині, називають взятую по всій площі суму добутків – площ елементарних площадок на квадрат їх відстаней від цієї осі. Осьовий момент інерції позначатимемо індексом, що відповідає осі:

$$J_x = \int y^2 dF, \quad J_y = \int x^2 dF. \quad (1.35)$$

Видно, що осьовий і полярний моменти інерції виражають в однакових одиницях:  $\text{м}^4$ .

Осьовий момент інерції – величина *завжди додатна і не дорівнює нулю*.

Додамо моменти інерції відносно двох перпендикулярних осей  $x$  і  $y$  (рис. 1.22):

$$J_x + J_y = \int_F y^2 dF + \int_F x^2 dF = \int_F (y^2 + x^2) dF = \int_F \rho^2 dF = J_p, \quad (1.36)$$

тобто *сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат*.

Через те що інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів, *то момент інерції складної фігури, можна обчислити як суму моментів інерції простих фігур*, на які розбивають складну фігуру.

Поняття про осьові моменти інерції потрібне буде для вивчення теорії згину.

Обчислимо осьові моменти інерції деяких фігур.

1. Прямокутник  $b \times h$  (рис. 1.24).

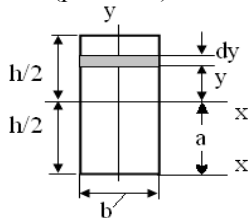


Рисунок 1.24



$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = bh^3 / 12,$$

тобто,  $J_x = bh^3 / 12$ ,  $J_y = b^3 h / 12$ .

2. Круг діаметром  $d$  (рис. 1.24):

$$J_x + J_y = J_p = \pi d^4 / 32.$$

Отже  $J_x = J_y = \pi d^4 / 64 \approx 0,05 d^4$ .

3. Кільце, що має розміри  $D$  x  $d$ :

$$J_p = \pi(D^4 - d^4) / 64 \approx 0,05(D^4 - d^4).$$

#### 1.4.4 Осьовий момент інерції для паралельних осей

Осі, які проходять через центр ваги фігури, називають *центральними*, а осьовий момент інерції відносно центральної осі називають *центральним моментом інерції*.

Нехай дано довільну плоску фігуру (рис. 1.25), площа якої  $F$ , центр ваги лежить у точці  $C$ , а осьовий момент інерції відносно центральної осі  $x$  буде  $J_x$ . Обчислимо момент інерції фігури відносно осі  $x_1$ , яка паралельна центральній осі  $x$  і віддалена від неї на відстань  $a$ :

$$J_{x1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y+a)^2 dF = \int_F y^2 dF + 2a \int_F y dF + a^2 \int_F dF.$$

Перший доданок є моментом інерції відносно осі  $x$ , тобто  $J_x$ ; другий це статичний момент площі відносно осі  $x$ , а він дорівнює нулю, бо вісь  $x$  – центральна; третій доданок після інтегрування дорівнює  $a^2 F$ . Отже, маємо

$$J_{x1} = J_x + a^2 F, \quad (1.37)$$

тобто момент інерції відносно будь-якої осі дорівнює центральному моменту інерції відносно осі, паралельної даній, плюс добуток площі фігури на квадрат відстані між осями.

Можна зробити висновок, що *осьовий момент інерції буде найменшим відносно центральної осі*.

Знайдемо формулу для обчислення моменту інерції прямокутника відносно осі  $x_1$  (рис. 1.24):

$$J_{x1} = J_x + a^2 F = b^3 h / 12 + h^2 b h / 4 = b h^3 / 3.$$

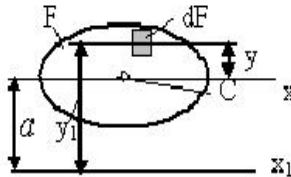


Рисунок 1.25

### 1.4.5 Головні осі і головні моменти інерції. Радіус інерції

Уявимо будь-яку плоску фігуру, моменти інерції якої відносно осей координат  $J_x$  і  $J_y$ , а полярний момент інерції відносно початку координат  $J_p$ . Згідно (1.37) маємо

$$J_x + J_y = J_p.$$

Якщо осі координат повертати у площині фігури навколо початку координат, то полярний момент інерції залишиться незмінним, а осьові моменти інерції змінюватимуться, причому

$$J_x + J_y = \text{const.}$$

Якщо сума двох змінних величин залишається сталою, то одна з них зменшується, а друга збільшується. Отже, при якомусь положенні осей один із осьових моментів інерції досягає максимального, а другий – мінімального значень. Осі, відносно яких моменти інерції мають максимальне і мінімальне значення, називають *головними осями інерції*. Моменти інерції відносно головної осі називають *головним моментом інерції*.

Головна вісь, яка проходить через центр ваги, називається *головною центральною віссю*, а момент інерції відносно цієї осі – *головним центральним моментом інерції*.

Коли фігура має вісь симетрії, то ця вісь буде однією з головних центральних осей.

Осьові моменти інерції можна записати у вигляді добутку площі фігури  $F$  на квадрат якоїсь величини:

$$J_x = F i_x^2, \quad J_y = F i_y^2,$$

де  $i_x, i_y$  – координати деякої точки фігури, які зветься *радіусами інерції площі* відносно відповідних осей координат  $x$  або  $y$ .

Тобто, радіуси інерції площі знаходять за формулами:

$$i_x = \sqrt{J_x / F}; \quad i_y = \sqrt{J_y / F}. \quad (1.38)$$

Введемо також *відцентровий момент інерції* плоскої фігури, котрий дорівнює сумі добутків елементарних площ  $dF$  на добуток відстаней цих площадок до двох взаємно перпендикулярних осей  $x$  і  $y$ :

$$J_{xy} = \int_F xy \, dF. \quad (1.39)$$

Якщо осі  $x$  і  $y$  взаємно перпендикулярні, або одна з них, є віссю симетрії фігури, то відносно таких осей відцентровий момент дорівнює нулю.

Осьові моменти інерції й інші характеристики прокатних профілів наведені у відповідних стандартах.

### **Контрольні запитання до розділу 1.4**

1. Що називається статичним моментом площі плоскої фігури? Його знаки і розмірність.

2. Чому дорівнює статичний момент площі плоскої фігури відносно центральної осі?

3. Як визначається статичний момент плоскої фігури відносно осі, якщо відомі координати центра ваги і площа фігури?

4. Які методи можна використовувати для визначення статичного моменту площі складної фігури?

5. Що називається полярним моментом інерції плоскої фігури відносно полюса? Його знаки і розмірність.

6. Що називається осьовим моментом інерції плоскої фігури відносно осі? Його знаки і розмірність.

7. Зв'язок між осьовими і полярним моментами інерції.

8. Як можна обчислити момент інерції складної фігури відносно осі?

9. Як можна обчислити момент інерції відносно будь-якої осі, якщо відомий центральний момент інерції відносно паралельної осі?

10. Що називається радіусом інерції площі відносно осі?

11. Як можна обчислити момент інерції площі відносно осі, якщо відомий радіус інерції її відносно цієї осі?

12. Що називається відцентровим моментом інерції плоскої фігури?

## 1.5 Кручення

### 1.5.1 Відомості про деформацію кручення циліндра

Крученням називають такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки *крутний момент*, який позначають  $T$ . Деформації кручення виникають, якщо до прямого бруса в площинах, перпендикулярних до осі, прикладена пара сил. Моменти цих пар називають обертаючими (якщо брус обертається) і скручуючими (якщо брус не обертається).

Оскільки на кручення працюють вали, що звичайно мають круглий, або кільцевий переріз, то розглянемо кручення круглого циліндра (рис. 1.26). Виготовимо з гуми (для більшої наочності) прямий круговий циліндричний брус, жорстко затиснемо один його кінець і нанесемо на його поверхню сітку ліній, що складається з твірних і кіл, а потім прикладемо до вільного кінця бруса пару сил  $m$ , щоб вона діяла в площині, перпендикулярній до осі, тобто піддамо брус деформації кручення.

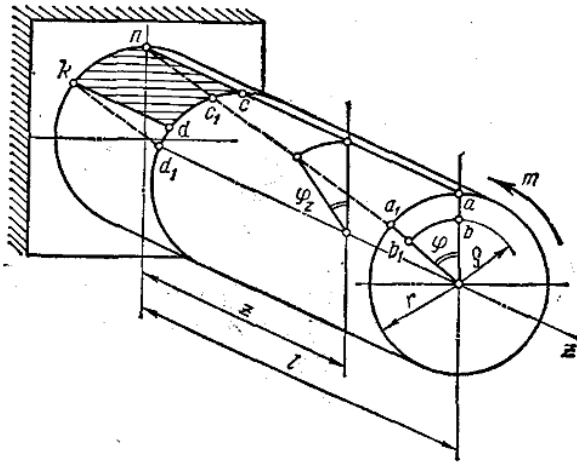


Рисунок 1.26

При цьому:

- 1) вісь циліндра, яку називають віссю кручення, залишиться прямо-лінійною;
- 2) діаметри кіл, нанесених на поверхню циліндра до деформації, під час деформації залишаться такими самими і відстань між колами не зміниться;

3) твірні циліндра перетворюються у гвинтові лінії.

З цього можна зробити висновок, що при крученні круглого циліндра справедлива гіпотеза плоских перерізів (див.п. 1.1.2), а також припустити, що радіуси кіл залишаються під час деформації прямими. Оскільки в поперечних перерізах бруса немає поздовжніх сил, то відстані між перерізами не змінюються. З цього випливає, що деформація кручення круглого циліндра полягає у повертанні поперечних перерізів одного відносно другого навколо осі кручення, причому кути їх повороту прямо пропорційні відстаням від закріпленого перерізу. Кут повороту перерізу  $\varphi_z$  дорівнює куту закручування частини циліндра, що знаходиться між даним перерізом і закріпленням. Кут  $\varphi$  повороту кінцевого перерізу називають повним кутом закручування циліндра.

Відносним кутом закручування  $\Theta$  називають відношення кута закручування  $\varphi_z$  до відстані  $z$  від даного перерізу до закріплення. Якщо брус довжиною  $\ell$  має сталий переріз і навантажений скручуючим моментом на кінці (тобто складається з однієї ділянки), то

$$\Theta = \varphi_z / z = \varphi / \ell = \text{const.} \quad (1.40)$$

Розглядаючи тонкий шар матеріалу на поверхні бруса, обмежений будь-якою клітинкою сітки (наприклад,  $kncd$  – рис. 1.26), бачимо, що ця клітинка при навантаженні перекошується ( $knc_1d_1$ ). Подібне спостерігалось під час вивчення деформації зсуву. На цій підставі можна зробити висновок, що *при крученні* також виникає *деформація зсуву*, але не за рахунок поступального, а в результаті обертального руху одного поперечного перерізу відносно іншого. Отже, при крученні у поперечних перерізах виникають тільки дотичні внутрішні сили, які утворюють крутний момент. Крутний момент є результуючим моментом відносно осі бруса внутрішніх дотичних сил, які діють у поперечному перерізі.

### 1.5.2 Епюри крутних моментів

Для наочного зображення розподілу крутних моментів вздовж осі бруса будують епюри крутних моментів. Крутний момент у перерізах бруса визначають за допомогою методу перерізів. Оскільки вал, який рівномірно обертається, як і нерухомий брус, перебуває у рівновазі, то очевидно, що внутрішні сили, які виникають у поперечному перерізі, повинні зрівноважувати зовнішні моменти, які діють на розглядувану частину бруса. Звідси випливає, що *крутний момент у будь-якому поперечному перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, прикладених до частини бруса справа або зліва від перерізу.*

Епюри крутних моментів дають змогу визначати небезпечні перерізи. Зокрема, якщо брус має сталий поперечний переріз, то небезпечними будуть перерізи на ділянці, де виникає найбільший по модулю крутний момент.

Крутний момент вважаємо *додатним*, якщо результуючий момент зовнішніх пар, прикладених до розглядуваної частини бруса, буде напрямлений проти стрілки, годинника, коли дивиться з боку перерізу для лівої частини бруса, і навпаки. Вважатимемо, що у поперечному перерізі, де прикладено обертаючий або скручуючий момент, значення крутного моменту змінюються стрибкоподібно.

**Приклад 1.8.** Побудувати епюру крутних моментів для трансмісійного вала, зображеного на рисунку 5.2. Обертаючі моменти на шківів дорівнюють:  $T_1 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $T_2 = 150 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $T_3 = 250 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $T_4 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

*Розв'язання.* Розділимо вал на п'ять ділянок, як показано на (рис. 1.27) Застосуємо метод перерізів. На першій ділянці довільно проведемо переріз 1-1, і розглянемо рівновагу лівої частини вала (рис. 1.27).

Рівняння моментів відносно осі  $z$ :  $\Sigma M_z = T_{kp1} = 0$ , тобто крутний момент для першої ділянки –  $T_{kp1} = 0$ .

Друга ділянка (рис. 1.27):

$$\Sigma M_z = -T_1 + T_{kp2} = 0, \quad T_{kp2} = T_1 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Третя ділянка (рис. 1.27):

$$\Sigma M_z = -T_1 + T_2 + T_{kp3} = 0, \quad T_{kp3} = T_1 - T_2 = 350 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Четверта ділянка (рис. 1.27):

$$\Sigma M_z = -T_1 + T_2 + T_3 + T_{kp4} = 0, \quad T_{kp4} = T_1 - T_2 - T_3 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

На п'ятій ділянці, якщо розглядати праву від перерізу частину вала, зовнішні моменти не діють, і крутний момент дорівнює нулю  $T_{kp5} = 0$ .

Домовимося відкладати додатні крутні моменти вгору від осі епюри, а від'ємні – униз. Будуємо епюру крутних моментів (рис. 1.27). Проводимо на ділянці «1» горизонтальну пряму по осі епюри до шківів 1, де епюра робить «стрибок», що дорівнює величині  $T_{kp2} = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . На ділянці «2» проводимо горизонтальну пряму до шківів 2. На ділянці «3»  $T_{kp3} = 350 \text{ Н}\cdot\text{м}$  і тому будуємо горизонтальну пряму до шківів 3. Тут епюра знову робить «стрибок» униз до величини  $T_{kp4} = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . На останній ділянці епюра співпадає з нульовою лінією.

Зауважимо, що величина «стрибка» на епюрі крутних моментів завжди чисельно дорівнює значенню зовнішнього моменту, який прикладен у відповідному перерізі. З епюри видно, що найбільший крутний момент буде на ділянці «2»:  $T_{kp2} = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

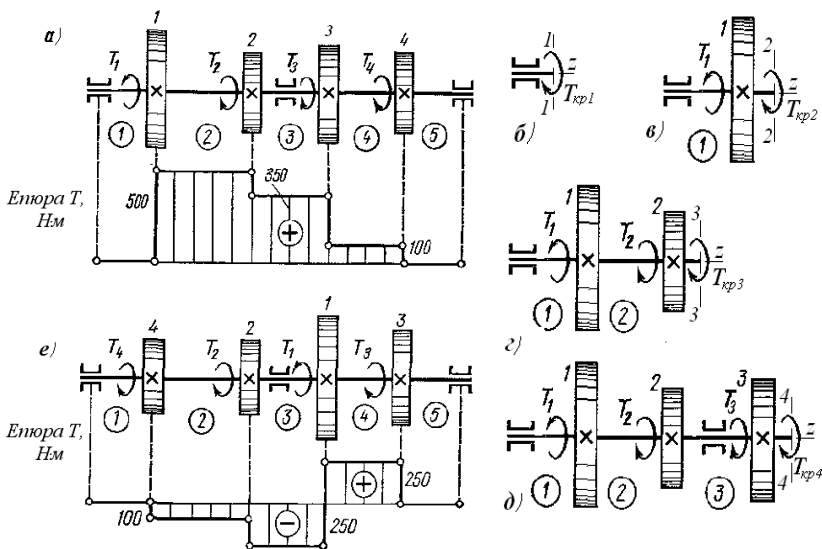


Рисунок 1.27

Рациональним розміщенням шківів можна домогтися зменшення значення  $T_{\max}$ . На (рис. 1.27) зображена схема розміщення шківів і відповідна їй епюра, з якої видно, що найбільше значення крутного моменту при цьому 250 Н·м, тобто в два рази менше, ніж у першому випадку. Таке розміщення шківів економічно вигідне, оскільки дає можливість передавати задані потужності за допомогою вала меншого діаметра.

Доцільнішим вважають таке розміщення шківів на валу, при якому найбільші додатні й від'ємні значення крутних моментів на ділянках будуть по можливості однаковими (див. епюру  $T$  на рис. 1.27).

### 1.5.3 Напруження й деформації кручення

Уявимо, що прямий круговий циліндр, який зазнає деформації кручення, складається з нескінченно великої кількості волокон, паралельних осі.

Під час кручення відбуваються деформації зсуву, тобто, у точках поперечного перерізу бруса виникають тільки дотичні напруження  $\tau$ , які перпендикулярні до радіуса, що сполучає ці точки з віссю кручення. Існування нормальних напружень у поздовжньому перерізі

виключається, тому що зовнішні сили – це тільки обертаючі моменти, і справедлива гіпотеза про ненависання волокон.

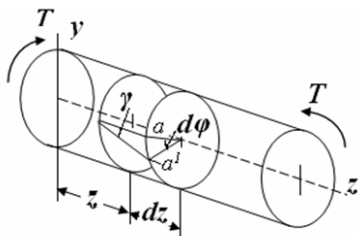


Рисунок 1.28

Видно, що при навантаженні один переріз повертається відносно другого, і точка  $a$  переміщується в положення  $a'$ , отже, дуга  $aa'$  визначається співвідношенням:

$$\cup aa' = \rho d\varphi,$$

де  $\rho$  – відстань волокна від осі кручення;

$d\varphi$  – кут закручення на відрізку  $dz$ .

Відносний зсув волокна

$$a: \quad \gamma = aa'/dz = \rho d\varphi/dz.$$

Запишемо закон Гука для зсуву:

$$\tau = G\gamma = G\rho d\varphi/dz.$$

При  $\rho = 0$  буде  $\tau = 0$ , тобто на осі дотичні напруження дорівнюють нулю.

Дотичні напруження на поверхні набувають максимальних значень  $\tau_{max}$ . Виділимо на площі перерізу нескінченно малу площадку  $dF$ , яка знаходиться на відстані  $\rho$  від осі (рис. 1.28). Сила  $dQ$ , яка діє на площадку, буде перпендикулярна до радіуса й буде визначатися таким чином:

$$dQ = \tau dF = G\rho dF d\varphi/dz.$$

Визначимо момент внутрішніх сил відносно осі кручення, тобто крутний момент:

$$T = \int_F dQ \rho = \int_F G(d\varphi/dz) \rho dF \rho = G(d\varphi/dz) \int_F \rho^2 dF. \quad (1.41)$$

$$\text{Тобто,} \quad T = GJ_p(d\varphi/dz).$$

Тут  $\int_F \rho^2 dF = J_p$  – полярний момент інерції (див. п. 1.4.2),

$d\varphi/dz$  – стала величина для даного перерізу.



Знайдемо з (1.41) відносний кут закручування:

$$\Theta = d\varphi/dz = T/(GJ_p), \text{ рад.} \quad (1.42)$$

Повний кут закручування кругового циліндра довжиною  $\ell$ :

$$\varphi = \int_0^\ell T dz / (GJ_p). \quad (1.43)$$

Якщо величини  $T$ ,  $G$ ,  $J_p$  – сталі, то після інтегрування повний кут закручування знаходиться за формулою:

$$\varphi = T \ell / (GJ_p), \text{ рад.} \quad (1.44)$$

Добуток  $GJ_p$ , що стоїть у знаменнику, називають *жорсткістю перерізу при крученні*.

Тобто, повний кут закручування круглого циліндра прямо пропорційний крутному моменту, довжині циліндра й обернено пропорційний жорсткості перерізу при крученні. Ця формула дійсна в межах, коли деформації прямо пропорційні навантаженню.

Для циліндричного бруса, що має кілька ділянок, які різняться матеріалом, розмірами поперечного перерізу, величиною крутного моменту, повний кут закручування дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування окремих ділянок:

$$\varphi = \sum \varphi_i. \quad (1.45)$$

Підставимо відносний кут закручування  $d\varphi/dz = T/(GJ_p)$  у формулу закону Гука  $\tau = G\gamma = G \rho d\varphi/dz$  і знайдемо формулу для обчислення напружень:

$$\tau_\rho = GT \rho / (GJ_p) = T \rho / J_p. \quad (1.46)$$

Епюра розподілу напружень уздовж радіуса перерізу має вигляд трикутника (рис. 1.30). Якщо брус складається з однієї ділянки, тобто має сталий переріз і сталий по довжині крутний момент, то дотичні напруження в даному волокні будуть по всій довжині циліндра однакові.

Коли  $\rho = r$  (на поверхні бруса), то напруження матимуть максимальне значення:

$$\tau_{\max} = Tr/J_p = T/W_p, \quad (1.47)$$

де  $W_p = J_p / r$  – момент опору крученню (або полярний момент опору).

Момент опору крученню дорівнює відношенню полярного моменту інерції до радіуса перерізу.

Одиниця виміру моменту опору крученню,

$$[W_p] = [J_p] / [r] = \text{м}^3.$$

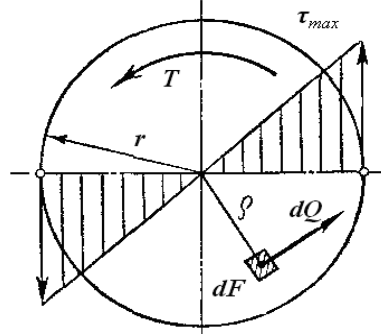


Рисунок 1.29

Отже, напруження й деформації кручення круглого циліндра обчислюються за формулами

$$\tau_{\max} = Tr/J_p = T/W_p, \quad \varphi = T \ell / (GJ_p), \quad \varphi = \sum \varphi_i.$$

Треба звернути увагу на те, що ці формули за структурою аналогічні формулам для обчислення напружень і деформацій розтягу – стиску й застосовні лише для ділянок бруса з однакового матеріалу, що мають сталі поперечний переріз і крутний момент.

З епюри розподілу дотичних напружень при крученні видно, що внутрішні волокна бруса зазнають невеликих напружень, тому вали іноді роблять порожнистими, чим досягається значний виграш у матеріалі.

Визначимо момент опору крученню для круглого й кільцевого перерізів.

1. Круг діаметра  $d$ :  $W_p = J_p / (0,5 d) = \pi d^3 / 16 \approx 0,2 d^3$ .

2. Кільце  $D \times d$ :

$$W_p = J_p / (0,5D) = \pi (D^4 - d^4) / (16D) \approx 0,2 (D^4 - d^4) / D.$$

Зазначимо, що момент опору крученню кільця не можна визначити як різницю моментів опорів кругів діаметрів  $D$  і  $d$ .

#### 1.5.4 Розрахункові формули на міцність і жорсткість для кручення

*Умова міцності* бруса для кручення полягає в тому, що найбільше дотичне напруження, яке виникає в ньому, не повинне перевищувати припустиме:

$$\tau_{\max} = T/W_p \leq [\tau]_{кр}. \quad (1.48)$$

Припустиме дотичне напруження кручення вибирають залежно від припустимого напруження розтягу, а саме:

для сталей  $[\tau]_{кр} = (0,55 - 0,6) [\sigma]_p$ ;

для чавунів  $[\tau]_{кр} = (1 - 1,2) [\sigma]_p$ .

*Умова жорсткості*, згідно з формулою (5.2),

$$\Theta = T / (GJ_p) \leq [\Theta], \quad (1.49)$$

де  $[\Theta]$  – припустимий відносний кут закручування (рад), який вибирають залежно від призначення конструкції й умов навантаження:  $[\Theta] = (0,3 - 0,5)$  (градус на метр – °/м). У формулі (5.10) кут закручування виражено в радіанах. Тому наведені припустимі значення кутів треба перевести в радіани, помноживши їх на  $\pi/180$ .

При розрахунках конструкцій на міцність виникають такі задачі, які відрізняються формою застосовування розрахункової формули.

1. *Проектний розрахунок*, при якому визначають момент опору крученню

$$W_p \geq T/[\tau]_{кр}.$$

Наприклад, для суцільного круглого вала діаметра  $d$

$$W_p = J_p / (0,5 d) = \pi d^3 / 16 \approx 0,2 d^3$$

і можна з (5.9) визначити діаметр вала

$$d \geq \sqrt[3]{16 T / (\pi [\tau]_{кр})} \approx \sqrt[3]{5 T / [\tau]_{кр}}. \quad (1.50)$$

Для порожнистого вала спочатку задаються співвідношенням внутрішнього  $d$  та зовнішнього  $D$  діаметрів ( $\alpha = d/D$ ), а потім, з урахуванням значення моменту опору крученню для кільцевого перерізу

$$W_p = \pi (D^4 - d^4) / (16 D) = \pi D^3 (1 - \alpha^4) / 16 \approx 0,2 D^3 (1 - \alpha^4),$$

знаходять зовнішній діаметр вала

$$D \geq \sqrt[3]{16 T / (\pi [\tau]_{кр} (1 - \alpha^4))} \approx \sqrt[3]{5 T / ([\tau]_{кр} (1 - \alpha^4))}. \quad (1.51)$$

2. *Перевірний розрахунок*, при якому визначають робоче напруження й порівнюють його з припустимим для випадків, коли задані розміри вала:

$$\tau_{\max} = T / W_p \leq [\tau]_{кр}. \quad (1.52)$$

3. *Визначення крутний момент*, який припускається

$$T_{\max} \leq [\tau]_{кр} W_p. \quad (1.53)$$

4. Коли знайдені розміри вала з умови міцності, *перевіряють вал на жорсткість* (1.47):

$$\Theta = T / (G J_p) \leq [\Theta].$$

Іноді при розрахунках вала відома потужність  $K$  (кВт), яка ним передається, та частота обертання  $n$ , хв<sup>-1</sup>. Тоді крутний момент у розрахункових формулах можна виразити так:

$$T = K / \omega = 30 K / \pi n = 9549 K / n, \quad (1.54)$$

де  $\omega = \pi n / 30$  – кутова швидкість вала.

**Приклад 1.9.** Визначити діаметр суцільного вала (рис. 1.30) при наступних значеннях моментів, які передаються шківками:

$T_1 = 0,6$  кН·м;  $T_2 = 0,8$  кН·м;  
 $T_3 = 2$  кН·м;  $T_4 = 0,6$  кН·м.  
 Довжина ділянок:  $\ell_1 = \ell_2 = 50$  см,  $\ell_3 = 90$  см.

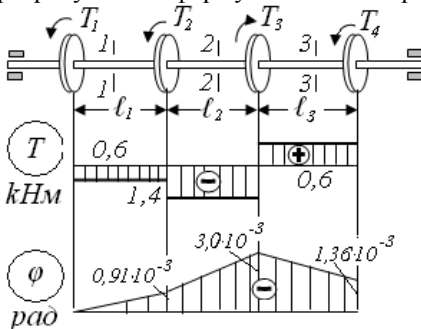


Рисунок 1.30

Припустимо напруження  $[\tau]_{кр} = 20$  МПа; припустимий відносний кут закручування  $[\Theta] = 1/4^\circ/\text{м} = \pi/(180 \cdot 4)$  рад/м; модуль пружності сталі при зсуві  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа. Побудувати епюру кутів закручування вала.

*Розв'язання.* Застосуємо метод перерізів. Розглянемо рівновагу лівої частини вала, знаходимо крутні моменти й будуємо епюру крутних моментів  $T$  на ділянках.

Ділянка  $\ell_1$ , переріз 1-1:  $T_{1кр} = -T_1 = -0,6$  кН·м.

Ділянка  $\ell_2$ , переріз 2-2:  $T_{2кр} = -T_1 - T_2 = -0,6 - 0,8 = -1,4$  кН·м.

Ділянка  $\ell_3$ , переріз 3-3:  $T_{3кр} = -T_1 - T_2 + T_3 = 0,6$  кН·м.

Найбільший по модулю момент на ділянці  $\ell_2$  вала:

$$T_{\max} = |T_{2кр}| = 1,4 \text{ кН·м.}$$

Обчислюємо діаметр вала (5.12):

$$d \geq \sqrt[3]{5T/[\tau]_{кр}} = \sqrt[3]{5 \cdot 1,4 \cdot 10^6 / 20} = 70,5 \text{ мм.}$$

Знайдемо також діаметр вала з умови жорсткості, згідно з формулою (1.43)

$$\Theta = T/(GJ_p) \leq [\Theta],$$

$$d \geq \sqrt[4]{10T/(G[\Theta])} = \sqrt[4]{10 \cdot 1,4 \cdot 10^6 \cdot 180 \cdot 4 / (8 \cdot 10^4 \pi \cdot 10^{-3})} = 79,6 \text{ мм} \approx 80 \text{ мм,}$$

$$\text{де } J_p = \pi d^4 / 32 \approx 0,1 d^4.$$

Приймаємо більший діаметр ( $d = 80$  мм), який знайдено з умови жорсткості.

Визначимо кути закручування на окремих ділянках:

$$\varphi_{12} = T_{1кр} \ell_1 / (GJ_p) = -0,6 \cdot 10^6 \cdot 50 \cdot 10 / (8 \cdot 10^4 \cdot 4,1 \cdot 10^6) = -0,91 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$$

$$\varphi_{23} = T_{2кр} \ell_2 / (GJ_p) = -1,4 \cdot 10^6 \cdot 50 \cdot 10 / (8 \cdot 10^4 \cdot 4,1 \cdot 10^6) = -2,1 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$$

$$\varphi_{34} = T_{3кр} \ell_3 / (GJ_p) = 0,6 \cdot 10^6 \cdot 90 \cdot 10 / (8 \cdot 10^4 \cdot 4,1 \cdot 10^6) = 1,65 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

кути закручування вала відносно шківів 1:

$$\varphi_{13} = \varphi_{12} + \varphi_{23} = -3,0 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

$$\varphi_{14} = \sum \varphi_i = \varphi_{12} + \varphi_{23} + \varphi_{34} = -1,36 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

$$\text{де } J_p \approx 0,1 d^4 = 0,1 \cdot 80^4 = 4,1 \cdot 10^6 \text{ мм}^4.$$

Будуємо епюру кутів закручування  $\varphi$ . При цьому вважаємо один шків умовно нерухомий – це шків 1.

Можна рекомендувати такий порядок розрахунку валів на міцність і жорсткість при крученні.

1. За схемою вала й обертаючими моментами, що діють на нього, будують епюри крутних моментів на окремих ділянках (див. рис. 1.27),

добирають матеріал для вала і визначають припустиме напруження  $[\tau]_{кр}$ .

2. Обчислюють діаметр вала з умови міцності (1.50). Якщо по окремих ділянках діють істотно різні за модулем крутні моменти, то вал слід конструювати східчастим. При цьому діаметр вала кожного східця розраховують, виходячи з умови міцності (1.50).

3. Визначивши розміри вала з умови міцності, при необхідності перевіряють вал на жорсткість, використовуючи для цього умову жорсткості (1.49).

### Контрольні запитання до розділу 1.5

1. Який вид деформації бруса називається крученням?
2. Що називається кругним моментом у перерізі стержня?
3. Як визначається крутний момент у довільному перерізі стержня?
4. Що являє собою епюра кругних моментів? Як її будують?
5. Як визначають кут закручування стержня? Його розмірність?
6. Як визначають повний кут закручування стержня з кількома ділянками навантаження?
7. Які напруження діють у поперечному перерізі стержня при крученні? Як вони розподіляються у випадку круглого перерізу стержня?
8. Як визначають дотичні напруження в довільній точці круглого перерізу стержня при крученні?
9. Де виникають і як визначаються максимальні дотичні напруження у перерізі стержня при крученні?
10. Що зветься полярним моментом опору площі перерізу і як його визначають для круглого суцільного і кільцевого перерізів вала? Його розмірність?
11. Напишіть умову міцності для бруса при крученні.
12. Запишіть умову жорсткості бруса при крученні.

## 1.6 ЗГИН

### 1.6.1 Чистий згин прямого бруса

Чистим згином називають такий вид деформації, при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки *згинаючий момент*. Деформація чистого згину буде, наприклад, тоді, коли до прямого бруса в площині, яка проходить через вісь, прикласти дві однакові за величиною й протилежні за знаком пари сил. На згин працюють балки, осі, вали й інші деталі машин, конструкцій.

Надалі майже завжди розглядатимемо такі бруси, у яких є хоча б одна площина симетрії й із нею збігається площина дії навантажень. У цьому випадку деформація згину відбувається в площині дії зовнішніх сил, і *згин називають прямим*, на відміну від косого згину, який буде розглянуто далі.

На бокову поверхню призматичного гумового (для більшої наочності) бруса прямокутного перерізу нанесемо сітку поздовжніх і поперечних прямих ліній, і піддамо цей брус деформації чистого згину (рис. 1.31). У результаті побачимо, що:

а) поперечні прямі лінії під час деформації залишаються прямими, але повернуться назустріч одна одній, отже, поперечні перерізи залишаються плоскими;

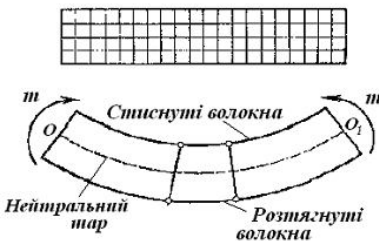


Рисунок 1.31

б) поздовжні прямі лінії, а також вісь бруса викривляться по дузі кола;

в) перерізи бруса стануть ширшими в поперечному напрямі на вгнутому боці й звужаться на опуклому боці.

З описаного дослідження можна зробити висновок, що для чистого згину виконується *гіпотеза плоских перерізів*, волокна, які лежать на опуклому боці, *розтягуються*, а ті, що лежать на вгнутому боці – *стискаються*. На межі між ними лежить *нейтральний шар*  $OO_1$  волокон, які тільки викривляються, не змінюючи своєї довжини, і тому на осі бруса нормальні напруження *дорівнюють нулю*. Приймаючи дійсною гіпотезу про ненависання волокон, можна стверджувати, що *при чистому згині в поперечних перерізах бруса виникають тільки нормальні напруження розтягу й стиску, які нерівномірно розподілені по перерізу*.

Викривлення волокон і осі бруса відбувається внаслідок нерівномірного розподілу нормальних напружень по поперечному перерізу. Лінію перетину нейтрального шару із площиною поперечного перерізу називають *нейтральною лінією перерізу*.

### 1.6.2 Згинаючий момент і поперечна сила

Як відомо з теоретичної механіки, опорні реакції балок визначають, складаючи й розв'язуючи рівняння рівноваги статки для всієї балки. При визначенні внутрішніх сил враховують реакції в'язів поряд з активними зовнішніми силами, які діють на балку. Для визначення внутрішніх силових факторів (ВСФ) застосуємо метод перерізів.

Розглянемо два випадки.

1. До балки прикладені *дві однакові за величиною й протилежні за знаком пари сил* (рис. 1.32). Розглядаючи рівновагу лівої або правої частини балки від перерізу, бачимо, що в усіх поперечних перерізах виникає тільки згинаючий момент  $T$ , який дорівнює зовнішньому моменту. Таким чином, розглянутий випадок є випадком *чистого згину*.

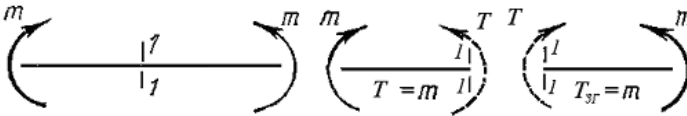


Рисунок 1.32

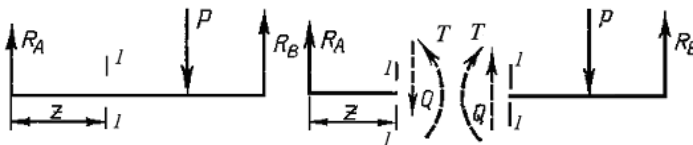


Рисунок 1.33

Згинаючий момент є результуючим моментом відносно нейтральної осі внутрішніх нормальних сил, які діють у поперечному перерізі балки.

2. До балки прикладені *активні й реактивні сили, перпендикулярні до осі* (рис. 1.33). Розглядаючи рівновагу частин балки, розміщених зліва й справа від перерізу  $I-I$ , отримаємо, що в поперечних перерізах повинні діяти згинаючий момент  $T$  і поперечна сила  $Q$ . Із цього випливає, що в розглянутому випадку в точках поперечних перерізів діють не тільки нормальні напруження, які

відповідають згинаючому моменту, а й дотичні напруження, які відповідають поперечній силі.

Згин, при якому в поперечному перерізі балки діють згинаючий момент і поперечна сила, називають *поперечним*.

Для балки, яка перебуває в рівновазі під дією плоскої системи зовнішніх сил, перпендикулярних до осі балки (тобто системи паралельних сил), зовнішні сили, які діють на балку зліва від перерізу, зрівноважені силами, які діють на балку справа від перерізу. Крім того, внутрішні сили взаємодії двох частин балки повинні бути напрямлені протилежно (рис. 1.33).

Для плоскої системи сил приймаємо додатні напрями ВСФ згідно рисунку 1.34.

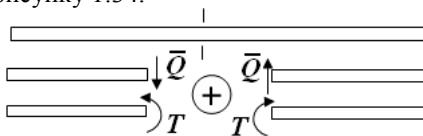


Рисунок 1.34

Тобто, для лівої частини балки поперечна сила напрямлена вниз, а згинаючий момент проти руху стрілки годинника, а для правої частини навпаки.

Для наочного зображення розподілу вздовж осі балки поперечних сил і згинаючих моментів будують епюри, які дають змогу визначити можливий небезпечний переріз балки, встановити значення поперечної сили й згинаючого моменту в цьому перерізі.

*Методика побудови епюр внутрішніх силових факторів*

1. Увесь стержень необхідно розділити на ділянки. Початок і кінець ділянки визначається зміною зовнішніх сил, що діють на стержень.

2. На кожній ділянці показують переріз. Далі розглядають ліву чи праву частину стержня від перерізу, звичайно ту, де менше сил.

3. Для частини, яку виділено, задають координату перерізу, зображають зовнішні сили й внутрішні, згідно з рисунком 1.34. Визначають границі зміни координати перерізу.

4. Записують рівняння рівноваги, з яких знаходять функції ВСФ. Згідно із цими функціями будують епюри ВСФ для кожної ділянки.

**Приклад 1.10.** Побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів для балки, шарнірно закріпленої двома кінцями. Балка навантажена зосередженою силою  $P$  (рис. 1.35).

*Розв'язання.* Зовнішні сили вертикальні, тому реакції будуть теж вертикальними. Визначаємо опорні реакції  $R_A$  й  $R_B$ , склавши рівняння моментів відносно точок  $A$  і  $B$ :

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0; & -Pa + R_B \ell &= 0, & R_B &= Pa/\ell; \\ \sum M_B &= 0; & -R_A \ell + Pb &= 0, & R_A &= Pb/\ell.\end{aligned}$$



Перевірка:

$$\sum Y = 0; \quad R_A + R_B - P = Pb/\ell + Pa/\ell - P = R_A = P(b+a)/\ell - P = 0.$$

Обчислення виконані вірно.

У даному прикладі межами ділянок є точка  $C$ , до якої прикладена зосереджена сила  $P$ , а також опори  $A$  і  $B$ , де прикладені реакції  $R_A$  й  $R_B$ . Отже, ця балка складається із двох ділянок  $AC$  і  $CB$ . Проводимо довільний переріз  $I-I$  (рис. 1.35), розглядаємо ліву частину балки (рис. 1.35), зображаємо внутрішні сили в перерізі, вважаючи їх додатними, записуємо рівняння рівноваги і знаходимо внутрішні сили:

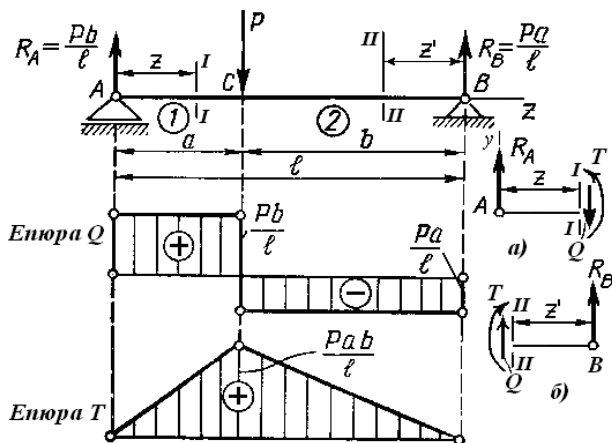


Рисунок 1.35

$$\sum Y = R_A - Q = 0;$$

$$\sum M_I = -R_A \cdot z + T = 0.$$

Отже  $Q = R_A = Pb/\ell,$

$$T = R_A z,$$

де координата  $z$  змінюється в межах ділянки  $AC$ , тобто  $0 \leq z < a$ . Поперечні сили – стала величина в межах ділянки і тому епюра зображується прямою лінією, яка паралельна осі епюри (нульова лінія графіка). Згинаючий момент  $T$  – лінійна функція  $z$ . Для побудови епюри  $T$  обчислюємо:

$$T_{z=0} = 0, \quad T_{z=a} = Pab/\ell$$

і будуємо цю пряму (епюра  $T$  на ділянці  $AC$ ).

Далі проводимо переріз  $II-II$  (рис. 1.35), розглядаємо праву частину балки (рис. 1.35), зображаємо внутрішні сили в перерізі, вважаючи їх додатними, записуємо рівняння рівноваги і знаходимо внутрішні сили:

$$Q = -R_B = -Pa/\ell \quad \text{і} \quad T = R_B z',$$

де координата  $z^1$  змінюється в межах ділянки ВС, тобто  $0 \leq z^1 < b$ .  
Обчислюємо

$$T_{z=0} = 0; \quad T_{z=b} = Pab/\ell$$

і будуємо епюри. Найбільше значення згинаючого моменту  $T$  матиме під зосередженою силою:

$$T_{\max} = Pab/\ell.$$

### 1.6.3 Диференціальні залежності для згину

Між згинаючим моментом, поперечною силою й інтенсивністю розподіленого навантаження існують диференціальні залежності, в основі яких лежить теорема Журавського.

Розглянемо балку, зображену на рисунку 1.36. Початок координат візьмемо на лівому кінці балки, а вісь  $z$  спрямуємо вправо. На одній із ділянок балки проведемо переріз із поточною координатою  $z$ . Розглянемо ліву частину балки (рис. 6.6) і запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum Y = R_A - P_1 + q(z-b) - Q = 0;$$

$$\sum M_C = -R_A z - m + P_1(z-a) - q(z-b)^2/2 + T = 0.$$

Із цих рівнянь обчислюємо поперечну силу  $Q$  й згинаючий момент  $T$ :

$$Q = R_A - P_1 + q(z-b);$$

$$T = R_A z + m - P_1(z-a) + q(z-b)^2/2.$$

Продиференціювавши останній вираз за координатою  $z$ , матимемо:

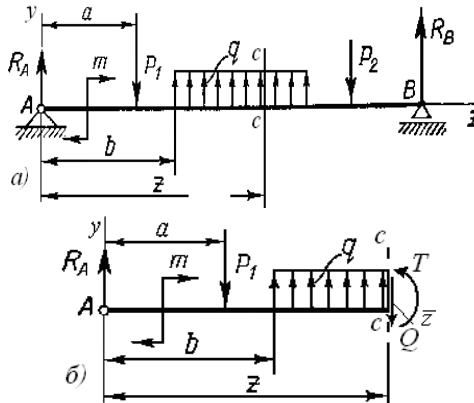


Рисунок 1.36

$$\frac{dT}{dz} = R_A - P_1 + q(z-b).$$

Вираз, який стоїть у правій частині цієї рівності, є поперечною силою  $Q$  в перерізі  $z$ . Таким чином, похідка

$$\frac{dT}{dz} = Q. \quad (1.55)$$

Якщо останнє рівняння продиференціювати ще раз за координатою  $z$ , то матимемо

$$\frac{d^2T}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q, \quad (1.56)$$

тобто друга похідна від згинаючого моменту або перша похідна від поперечної сили за абсцисою перерізу балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження.

Як відомо, за законом другої похідної функції можна судити про опуклість або вгнутість кривої. Це правило використовують при побудові епюр сили  $Q$  і моменту  $T$ .

Розглянемо випадок, коли інтенсивність розподіленого навантаження:  $q = \text{const}$ .

У цьому випадку з рівнянь (1.56), (1.55) отримаємо:

$$Q = qz + C_1; \quad (1.57)$$

$$T = qz^2/2 + C_1z + C_2, \quad (1.58)$$

де  $C_1, C_2$  – сталі інтегрування.

На підставі (1.57), (1.58) можна сформулювати *правила побудови й перевірки епюр*, які наведені в таблиці 1.3.

Таблиця 1.3

1. У перерізі, де прикладена сила $F_y$ ,	{	на епюрі $Q$ – стрибок у напрямку дії сили на величину $F_y$ ; на епюрі $T$ – перелом, напрям вістря якого протилежно силі $F_y$ .	
2. Якщо на ділянці		$q = 0$	– епюра $Q$ – пряма лінія паралельна осі; – епюра $T$ – у загальному випадку – похила пряма лінія;
	{	$q = \text{const}$	– епюра $Q$ – похила пряма лінія; – епюра $T$ – квадратична парабола, опуклість якої протилежна напрямку $q$ .
3. У перерізі, де прикладена зовнішня пара сил, момент якої $m_k$		{	на епюрі $Q$ – змін нема; на епюрі $T$ – стрибок на величину моменту пари $m_k$ униз, якщо $m_k > 0$ і, навпаки, якщо $m_k < 0$ .
4. Якщо на ділянці, де $q = \text{const}$ , епюра $Q$ міняє знак (перетинає вісь), то на епюрі $T$ у цьому перерізі буде екстремум, координата якого визначається з умови $Q=0$ .			
Примітка. При перевірці рухатись зліва – направо, розриви на епюрах будемо називати стрибками.			

Методику побудови епюр поперечних сил і згинаючих моментів розглянемо на наступному прикладі.

**Приклад 1.11.** Побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів для балки на рисунку 1.37. Навантаження: сила  $F = 4$  кН, рівномірно розподілене навантаження  $q = 6$  кН/м, момент пари сил  $m = 8$  кН·м. Розміри на схемі вказано в метрах.

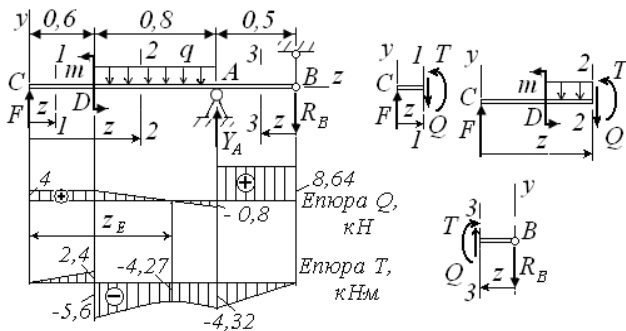


Рисунок 1.37

**Розв'язання.** Зображаємо вертикальні реакції  $Y_A$  й  $R_B$ .

Складемо рівняння рівноваги для балки:

$$\sum M_A = -F \cdot 1,4 + m - R_B \cdot 0,5 + q \cdot 0,8^2/2 = 0;$$

$$\sum M_B = -Y_A \cdot 0,5 + q \cdot 0,8 \cdot 0,9 + m - F \cdot 1,9 = 0.$$

Знаходимо реакції опор:  $R_B = 8,64$  кН,  $Y_A = 9,44$  кН.

Для перевірки обчислимо суму проекцій сил на вісь  $y$ :

$$\sum Y = F - q \cdot 0,8 + Y_A - R_B = 4 - 6 \cdot 0,8 + 9,44 - 8,64 = 0.$$

Рівняння виконується, тобто обчислення реакцій опор балки виконані вірно.

Для побудови зазначених епюр застосовуємо метод перерізів.

**Ділянка CD**, переріз 1-1. Розглядаємо ліву частину балки, зображаємо внутрішні сили в перерізі, вважаючи їх додатними, запишемо рівняння рівноваги (сума моментів тут і далі обчислена відносно центра ваги перерізу) і знаходимо внутрішні сили:

$$\sum Y = F - Q = 0^0; \quad Q = F;$$

$$\sum M_1 = -F \cdot z + T = 0^0; \quad T = F \cdot z,$$

де координата  $z$  змінюється в межах ділянки, тобто  $0 \leq z \leq 0,6$ .

Залежності  $Q$  і  $T$  показують, що в межах ділянки CD поперечна сила не залежать від координати  $z$ , а згинаючий момент – лінійна функція від  $z$ .

Обчислюємо далі значення згинаючого моменту:

$$T_{z=0} = 0 \text{ (точка C); } T_{z=0,6} = 4 \cdot 0,6 = 2,4 \text{ кН·м (точка D}_1\text{).}$$

Тут і далі індекс «1» при літері, яка позначає переріз, указує номер ділянки.

*Ділянка DA, переріз 2-2.* Розглядаємо ліву частину балки, зображаємо вну-трішні сили в перерізі, вважаючи їх додатними, записуємо рівняння рівноваги й знаходимо внутрішні сили:

$$\sum Y = F - q \cdot (z - 0,6) - Q = 0^0; Q = F - q \cdot (z - 0,6);$$

$$\sum M_2 = -F \cdot z + m + q(z - 0,6)^2/2 + T = 0^0; T = F \cdot z - m - q \cdot (z - 0,6)^2/2,$$

де координата  $z$  змінюється в межах другої ділянки, тобто  $0,6 \leq z \leq (0,6 + 0,8) = 1,4$ .

Залежності  $Q$  і  $T$  показують, що в межах ділянки поперечна сила – лінійна функція координати  $z$ , а згинаючий момент – квадратична функція  $z$ .

Обчислюємо:  $Q_{z=0,6} = 4$  кН (точка  $D_2$ ),  $Q_{z=1,4} = -0,8$  кН (точка  $A_2$ ).

$$T_{z=0,6} = -5,6 \text{ кН}\cdot\text{м (точка } D_2), T_{z=1,4} = -4,32 \text{ кН}\cdot\text{м (точка } A_2).$$

На ділянках із рівномірно розподіленим навантаженням  $q$  у перерізі, де поперечна сила дорівнює нулю (тобто сила  $Q$  змінює знак), згинаючий момент приймає екстремальне значення. Позначимо координату перерізу, де  $T$  має екстремум,  $z_E$ . Записуємо функцію  $Q$  для перерізу  $z_E$ :

$$Q = F - q \cdot (z_E - 0,6) = 0$$

і звідси визначаємо координату  $z_E = F/q + 0,6 = 1,267$  м.

Підставляючи  $z_E$  в рівняння  $T$ , знаходимо  $T|_{z_E} = -4,27$  кН·м.

*Ділянка AB, переріз 3-3.* Розглядаємо праву частину балки від перерізу. Зображуємо діючі сили. Координата перерізу  $z$  може змінюватись від 0 до 0,5 м, тобто  $0 \leq z \leq 0,5$  м. Записуємо рівняння рівноваги:

$$\sum Y = -R_B + Q = 0;$$

$$\sum M_3 = -T - R_B \cdot z = 0,$$

$$\text{звідки } Q = R_B = 8,64 \text{ кН,}$$

$$T = -R_B \cdot z.$$

Залежності  $Q$  і  $T$  показують, що в межах ділянки поперечна сила не змінюється, а згинаючий момент – лінійна функція координати  $z$ .

Обчислюємо момент  $T$ : при  $z = 0$  буде  $T = 0$  (точка  $B$ );

при  $z = 0,5$  м матимемо  $T = -4,32$  кН·м (точка  $A_3$ ).

Відповідно до проведених розрахунків будуємо епюри  $Q$  і  $T$ .

Проаналізуємо епюру згинаючого моменту. На ділянці  $CD$  згинаючий момент  $T$  додатний, тому балка вигинається на цій ділянці опуклістю вниз, а на ділянці  $DB$  – опуклістю вгору, тому що згинаючий момент від'ємний.

Знаходимо максимальні значення внутрішніх силових факторів:

– поперечна сила  $Q_{\max} = 8,64$  кН ділянка  $AB$ ;

– згинаючий момент  $|T|_{\max} = 5,6$  кН·м – переріз  $D$ .

3 точки зору загальних властивостей епюра маємо:

– у перерізі  $D$  епюра  $T$  має стрибок униз на значення  $2,4 + 5,6 = 8$  кН·м, що відповідає значенню зовнішнього моменту  $m = 8$  кН·м у цьому перерізі;

– у перерізах  $C$  і  $B$  момент  $T = 0$ , що відповідає зовнішньому навантаженню, бо в перерізах на кінцях балки немає пар сил;

– на епюрі  $T$  у перерізі  $A$  перелом, напрям вістря якого протилежно силі  $Y_A$ ;

– на ділянках  $CD$  і  $AB$  розподіленого навантаження нема ( $q = 0$ ) і тому епюра  $T$  похила пряма лінія, а епюра  $Q$  пряма лінія паралельна осі;

– у перерізах  $C, A, B$  на епюрі  $Q$  маємо стрибки на величину і в напрямку зовнішніх сил, які прикладені в цих перерізах.

#### 1.6.4 Нормальні напруження чистого згину

У поперечних перерізах балки у випадку чистого згину (див. п. 1.6.1), при якому в будь-якому поперечному перерізі бруса виникає тільки згинаючий момент і діють тільки нормальні напруження розтягу й стиску. Щоб визначити розподіл цих напружень по поперечному перерізу, треба розглянути деформації волокон балки.

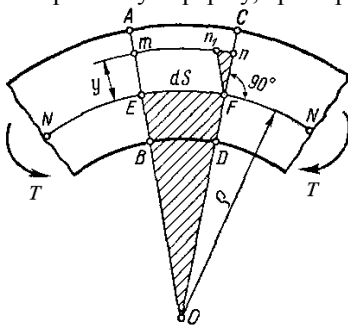


Рисунок 1.38

Розглянемо ділянку балки, яка зазнає деформації чистого згину (рис. 1.38) і в кінцевих перерізах якої діє згинаючий момент  $T$ . Двома поперечними перерізами  $AB$  і  $CD$  виділимо елемент балки нескінченно малої довжини  $dS$ . Радіус кривизни нейтральної осі (НВ) позначимо  $\rho$ . Розглянемо шар волокон  $mn$ , який знаходиться на відстані  $y$  від нейтрального шару  $NN$ .

Волокна цього елемента в результаті деформацій згину видовжуються на величину  $nn_1$ , тому що  $n_1F \parallel mE$ . Заштриховані трикутники подібні  $\triangle OEF \propto \triangle Enn_1$ .

Отже  $nn_1/dS = y/\rho$ .

Ліва частина – це відносне видовження:  $nn_1/dS = \varepsilon$ , тобто маємо  $\varepsilon = y/\rho$ .

Застосувавши закон Гука (1.4)  $\sigma = E\varepsilon$ ,

матимемо

$$\sigma = E y / \rho.$$

Із цієї формули видно, що нормальні напруження деформації згину залежать від відстані  $y$  від нейтральної осі і тому розподілені по висоті перерізу нерівномірно: *максимальні напруження  $\sigma_{\max}$  виникають у волокнах, найбільше віддалених від нейтральної осі*. Від координати  $x$  перерізу нормальні напруження не залежать (рис. 1.39).

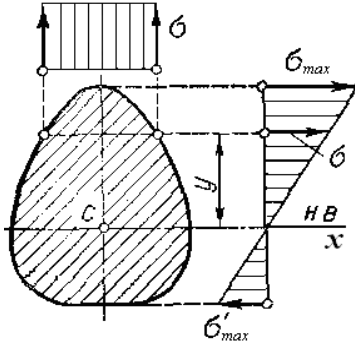


Рисунок 1.39

Розглянемо далі частину балки, яка зображена на рисунку 1.40.

Виділимо нескінченно малу площадку  $dF$ , на якій нормальна сила  $dN$  дорівнює

$$dN = \sigma dF.$$

Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum Z = 0; \quad \int_F dN = 0;$$

$$\sum M_x = 0; \quad T - \int_F y dN = 0.$$

З першого рівняння рівноваги

маємо

$$\int_F dN = \int_F \frac{E y}{\rho} dF = \frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0$$

( $E$  й  $\rho$  для даного перерізу є величинами сталими).

Параметри  $E$  і  $\rho$  не дорівнюють нулю, тому отримаємо

$$\int_F y dF = 0. \quad (1.59)$$

Цей інтеграл є статичним моментом площі відносно осі  $x$ . Тому під час згину *нейтральна вісь проходить через центр ваги  $c$  площі перерізу*.

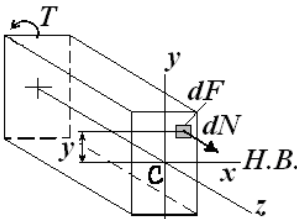


Рисунок 1.40

З другого рівняння рівноваги розглядаємої частини балки маємо

$$T = \int_F y dN = \int_F y \sigma dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF.$$

$$\text{Звідки} \quad T = E J_x / \rho, \quad (1.60)$$

$$\text{де} \quad J_x = \int_F y^2 dF - \text{осьовий мо-}$$

мент інерції площі поперечного перерізу відносно нейтральної осі  $x$ ;  $EJ_x$  – жорсткість перерізу при згині.

Оскільки у випадку чистого згину балки сталого перерізу  $T = \text{const}$  і  $J_x = \text{const}$ , то і

$$\rho = EJ_x / T = \text{const}. \quad (1.61)$$

Отже, зігнута вісь буде дугою кола.

Значення  $\rho$  підставимо у формулу для обчислення нормальних напружень:

$$\sigma = Ey / \rho = Ey / (EJ_x / T) = Ty / J_x. \quad (1.62)$$

Максимальні значення нормальних напружень будуть там, де волокна найбільш віддалені від нейтральної осі:

$$\sigma_{\max} = T y_{\max} / J_x = T / W_x, \quad (1.63)$$

$$\text{де} \quad W_x = J_x / y_{\max}, \quad (1.64)$$

$W_x$  – момент опору деформації згину відносно осі  $x$  (або осьовий момент опору).

### 1.6.5 Розрахункова формула на міцність для випадку згину

Умова міцності балки для випадку згину полягає в тому, що максимальні нормальні напруження в небезпечному перерізі не повинні перевищувати допустимі:

$$\sigma = |T|_{\max} / W_x \leq [\sigma]. \quad (1.65)$$

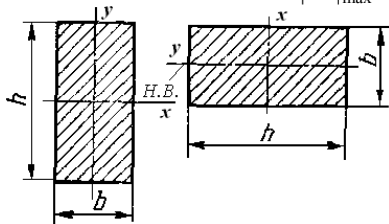


Рисунок 1.41

В даному випадку допустиме нормальне напруження  $[\sigma]$  таке саме, як для розтягу (стиску). Максимальний згинаючий момент  $|T|_{\max}$  визначають з епюр згинаючих моментів або розраховують.

Визначимо осьові моменти опору деяких перерізів.

1. Прямокутник  $b \times h$  (рис. 1.41):

$$W_x = J_x / y_{\max} = (bh^3/12)/(h/2).$$

$$\text{Отже} \quad W_x = bh^2 / 6. \quad (1.66)$$

Якщо балку прямокутного перерізу покласти на ширшу грань (рис. 1.41), то  $W_y = hb^2 / 6$ .

Знайдемо відношення моментів опору:

$$W_x / W_y = \frac{bh^2}{6} : \frac{hb^2}{6} = \frac{h}{b} > 1.$$

Отже, за інших однакових умов максимальні нормальні напруження в прямокутній балці, яку покладено на ширшу грань,



будуть більшими, ніж у тій самій балці, коли її найбільший розмір  $h$  вертикальний (мається на увазі, що згин відбувається у вертикальній площині). Тобто, для забезпечення найбільшої міцності вісь, відносно якої відбувається згин, повинна мати максимальне значення моменту опору.

2. Круг діаметром  $d$  (вісь  $x$  – будь-який діаметр):

$$W_x = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 d^3. \quad (1.67)$$

3. Кільце розміром  $D \times d$ :

$$W_x = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64} : \frac{D}{2} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32 D} \approx 0,1 (D^4 - d^4) / D. \quad (1.68)$$

При однаковій площі поперечного перерізу, тобто однаковій витраті матеріалу, яка відповідає однаковій площі, момент опору кільцевого перерізу більший від моменту опору суцільного круглого перерізу.

Оскільки поблизу нейтральної осі матеріал зазнає незначного напруження, то вигідно більше матеріалу розмішувати далі від нейтральної осі. Тому в техніці рідко використовують металеві балки прямокутного перерізу, але досить широко використовують прокатні профільні балки таврового, двотаврового, кутового, швелерного, кільцевого й інших перерізів.

Моменти інерції, моменти опору й інші відомості про прокатні фасонні профілі стандартних розмірів подано в довідкових таблицях [1].

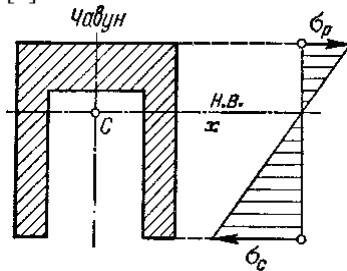


Рисунок 1.42

Витрати матеріалу пропорційні площі перерізу  $F$ . Отже, чим більше відношення  $W/F$ , тим більший згинальний момент витримує переріз із заданою площею (тобто із заданою вагою стержня). Тому відношення  $W/F$  може бути взято за критерій, що оцінює якість профілю при згині.

Порівняємо щодо економічності за масою балки двотаврового, прямокутного й квадратного перерізу. Припустимо, що з розрахункового рівняння визначено момент опору балки

$$W_x \geq |T|_{\max} / [\sigma] = 1200 \text{ см}^3.$$

Для балок, матеріал яких неоднаково працює на розтяг і стиск (наприклад, для чавуну припустимі напруження на стиск значно

більше ніж для розтягу), доцільно використовувати профілі, несиметричні відносно нейтральної осі. Тому деякі деталі виготовляють у вигляді тавра (П-подібні профілі). При цьому в несиметричного профілю під час згину виникають неоднакові напруження розтягу  $\sigma_p$  й стиску  $\sigma_c$ , тому переріз чавунної балки вигідно розміщувати так, щоб менші напруження були в зоні розтягнутих, а більші – у зоні стиснених волокон (рис. 1.42).

За таблицями стандарту вибираємо двотавровий профіль № 45, який має момент опору  $W_{\text{дв}} = 1231 \text{ см}^3 > W_x$ . Площа поперечного перерізу обраного двотавра  $F_{\text{дв}} = 84,7 \text{ см}^2$ , відношення

$$W/F = 1231/84,7 = 14,5.$$

Визначимо далі розміри балки прямокутного перерізу, прийнявши  $h = 2b$ :

$$W_{np} = bh^2/6 = b(2b)^2/6 = 2b^3/3,$$

$$\text{де } W_{np} = W_x = 1200 \text{ см}^3.$$

Звідси  $b = \sqrt[3]{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 3/2} = 0,122 \text{ м} = 12,2 \text{ см}$ ;  $h = 2b = 24,4 \text{ см}$ ;  
 $F_{np} = bh = 297 \text{ см}^2$ , відношення  $W_{np}/F_{np} = 1200/297 = 4,0$ .

За інших однакових умов маси балок будуть пропорційні площі поперечних перерізів тобто  $F_{np}/F_{\text{дв}} = 297/84,7 = 3,51$ .

Отже, балка прямокутного перерізу буде в три з половиною рази важча від балки двотаврового профілю при однаковій міцності.

Визначимо тепер розміри балки квадратного перерізу зі стороною  $a$ :

$$W_{\text{кв}} = a^3/6,$$

$$\text{де } W_{\text{кв}} = W_x = 1200 \text{ см}^3.$$

Звідси маємо  $a = \sqrt[3]{1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 6} = 0,194 \text{ м} = 19,4 \text{ см}$ ,  $F_{\text{кв}} = a^2 = 376 \text{ см}^2$ ,  
 $F_{\text{кв}}/F_{\text{дв}} = 4,5$ , а відношення  $W_{\text{кв}}/F_{\text{кв}} = 1200/376 = 3,2$ .

Тобто балка квадратного перерізу буде в чотири з половиною рази важча від балки двотаврового профілю при однаковій міцності.

При розрахунках конструкцій на міцність при згині розглядаються такі види задач, які відрізняються формою застосовування розрахункової формули.

1. *Проектний розрахунок*, при якому визначають момент опору при згині:

$$W_x \geq |T|_{\text{max}} / [\sigma]. \quad (1.69)$$

Ця величина дає можливість підібрати необхідні прокатні фасонні профілі стандартних розмірів із довідкових таблиць, або обчислити необхідні розміри бруса.

Наприклад, для бруса кільцевого перерізу розміром  $D \times d$  з відношенням  $d/D = a$ , отримаємо осьовий момент опору

$$W_x = \pi (D^4 - d^4) / (32D) = \pi D^3 (1 - \alpha^4) / 32 \approx 0,1 D^3 (1 - \alpha^4),$$

за допомогою якого з (6.15) знаходимо зовнішній діаметр бруса:

$$D \geq \sqrt[3]{32T / (\pi[\sigma](1 - \alpha^4))} \approx \sqrt[3]{10T / ([\sigma](1 - \alpha^4))}. \quad (1.70)$$

2. *Перевірний розрахунок*, при якому визначають робоче напруження й порівнюють його з припустимим для випадків, коли відомий момент опору бруса:

$$W_x \geq |T|_{\max} / [\sigma]^3. \quad (1.71)$$

3. Визначити момент згину, який припускається:

$$|T|_{\max} \leq W_x [\sigma]. \quad (1.72)$$

Рекомендується наступний порядок розрахунку бруса на міцність при згині: за схемою навантаження бруса будують епюри поперечних сил і згинаючих моментів на окремих ділянках (пункти 1.6.2, 1.6.3), за якими знаходять небезпечний переріз; добирають матеріал для бруса й визначають припустиме напруження  $[\sigma]$ ; розраховують, виходячи з умов міцності (1.64), осьовий момент опору й підбирають відповідні прокатні профілі стандартних розмірів із довідкових таблиць, або обчислюють розміри бруса.

Методику розрахунку бруса на міцність при згині розглянемо на наступних прикладах.

**Приклад 1.12.** Вважаючи балку двотавровою, визначити номер перерізу з розрахунку на міцність для випадку, коли двотавр встановлен вертикально й коли горизонтально. Припустиме напруження згину  $[\sigma] = 120$  МПа,  $P = 20$  кН,  $q = 2$  кН/м,  $\ell = 1,5$  м (рис. 1.43).

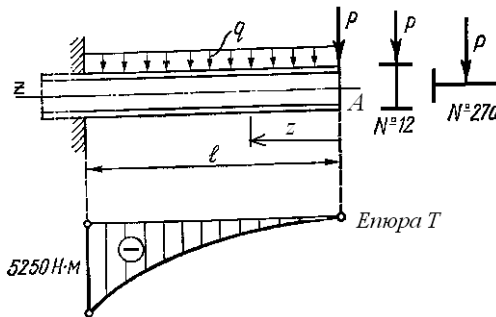


Рисунок 1.43

*Розв'язання.* Початок координат візьмемо на вільному кінці балки (точка А). Вісь  $z$  напрямлена вліво. Для розв'язання задачі досить побудувати одну епюру згинаючих моментів. Оскільки балка має тільки одну ділянку, то згинаючий момент у перерізі буде

$$T = -Pz - qz^2/2.$$

Епюра  $T$  є дугою параболи. Обчислимо значення  $T$  на межах ділянки:

- коли  $z = 0$ , то  $T = 0$ ;
- якщо  $z = \ell = 1,5$  м, то  $T = -5250$  Н·м.

Максимальне значення згинаючий момент матиме в місці закріплення.

Застосуємо розрахункове рівняння на міцність для згину:

$$W_x \geq |T|_{\max} / [\sigma] = 5250 / 120 \cdot 10^6 = 43,75 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 43,75 \text{ см}^3.$$

Знайдемо за таблицями стандарту [1] найближче більше значення  $W_x$  і візьмемо двотавровий профіль № 12, для якого  $W_x = 58,4 \text{ см}^3$  (площа перерізу  $14,7 \text{ см}^2$ ). Якщо балку повернути на  $90^\circ$ , тобто розмістити полицки вертикально, а стінку — горизонтально (рис. 6.13), то для такого випадку потрібний профіль № 27а ( $W_x = 58,4 \text{ см}^3$ ) і балка буде майже в три рази важча (площа перерізу  $43,2 \text{ см}^2$ ). Отже, в останньому випадку балка буде значно важча, тому треба використовувати прокатні профілі так, щоб силова площина, яка на рисунку розташована вертикально, була перпендикулярна осі координат, для якої момент опору найбільший.

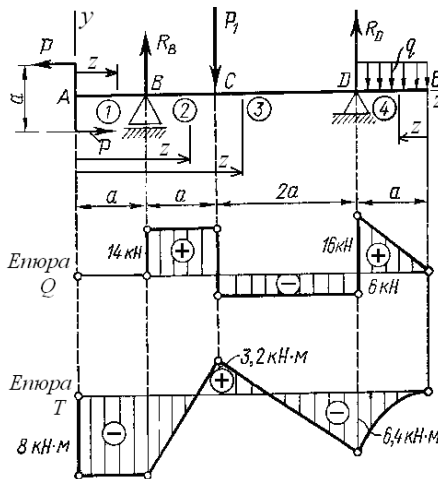


Рисунок 1.44

**Приклад 1.13.** Побудувати епюри поперечних сил і згинаючих моментів для балки (рис. 1.44), коли  $P = 10$  кН,  $P_1 = 20$  кН,  $q = 20$  кН/м,  $a = 0,8$  м. Перевірити балку на міцність, якщо її переріз – двотавр №20, а  $[\sigma] = 150$  МПа.

**Розв'язання.** Визначимо реакції опор:

$$\begin{aligned} \sum M_B &= Pa - P_1 a + \\ &+ R_D \cdot 3a - qa \cdot 3,5a = 0; \\ \sum M_D &= Pa + P_1 2a - R_B \cdot 3a - \\ &- qa \cdot 0,5a = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Звідси } R_D = 22 \text{ кН};$$

$$R_B = 14 \text{ кН}.$$

Для перевірки

обчислимо суму проєкцій сил на вісь  $y$ :

$$\sum Y = R_B - P_1 + R_D - qa = 14 - 20 + 22 - 20 \cdot 0,8 = 0.$$

Рівняння виконується тотожно, тобто обчислення реакцій опор балки виконані вірно.

Находимо на кожній з чотирьох ділянок поперечні сили:

$$Q_{1A} = 0, Q_{1B} = 0, \quad 0 \leq z \leq a$$

(епюра на першій ділянці співпадає з віссю);

$$Q_{2B} = Q_{2C} = R_B = 14 \text{ кН}, \quad a \leq z \leq 2a;$$

$$Q_{3C} = Q_{3D} = R_B - P_1 = -6 \text{ кН}, \quad 2a \leq z \leq 4a$$

(епюра  $Q_2$  і  $Q_3$  на ділянках 2 і 3 – пряма, паралельна осі).

На четвертій ділянці розглядаємо праву частину балки й знаходимо:

$$Q_4 = qz, \quad \text{де } 0 \leq z \leq a;$$

В початковій і кінцевій точках ділянки отримаємо  $Q_{4E}|_{z=0} = 0^0$ ;  $Q_{4D}|_{z=a} = qa$  (епюра похила пряма).

Будуємо епюру  $Q$ . У перерізах В, С, D епюра має стрибки відповідно на величину сил  $R_B$ ,  $P_1$ ,  $R_D$  у напрямі сил.

Будуємо далі епюри згинаючих моментів на ділянках балки:

$T_1 = T_{1A} = T_{1B} = -Pa = -8 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $0 \leq z \leq a$  (епюра пряма, паралельна осі);

$$T_2 = -Pa + R_B(z - a), \quad a \leq z \leq 2a;$$

$T_{2B}|_{z=a} = -Pa = -0,8 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $T_{2C}|_{z=2a} = -Pa + R_B a = 3,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$  (епюра похила пряма);

$$T_3 = -Pa + R_B(z - a) - P_1(z - 2a), \quad 2a \leq z \leq 4a;$$

$$T_{3C}|_{z=2a} = -Pa + R_B a = 3,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$T_{3D}|_{z=4a} = -Pa + R_B 3a - P_1 2a = -6,4 \text{ кН}\cdot\text{м} \text{ (епюра похила пряма)}.$$

На четвертій ділянці розглядаємо праву частину балки й знаходимо:

$$T_4 = -qz^2/2, \quad 0 \leq z \leq a;$$

$T_{4E}|_{z=0} = 0$ ;  $T_{4D}|_{z=a} = -qa^2/2$  (епюра – дуга параболи, опуклість якої напрямлена протилежно напрямку розподіленого навантаження  $q$ , тобто доверху).

Будуємо епюру моментів.

Перевіримо балку на міцність. Найбільший згинаючий момент для даної балки маємо на першій ділянці:  $|T|_{\max} = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Використаємо розрахункову формулу на міцність при згині (1.55):

$$\sigma = |T|_{\max} / W_x \leq [\sigma].$$

Находимо значення моменту опору для двотавра № 20 [1]:

$$W_x = 184 \text{ см}^3.$$

Перевіримо виконання умови міцності:

$$\sigma = 8 \cdot 10^3 / 184 \cdot 10^{-6} = 43,5 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 150 \text{ МПа}.$$

Умову міцності виконано.

У даному випадку можна стверджувати, що балка працює з великим недовантаженням, бо максимальне нормальне напруження

при згині становить тільки 29% припустимого. Тобто, у цьому випадку можна рекомендувати для використання двотавр № 12, для якого  $W_x = 58,8 \text{ см}^3$ , тому що необхідний момент опору двотавра за формулою (6/15) складає

$$W_x \geq |T|_{\max} / [\sigma] = 8 \cdot 10^6 / 150 = 53,3 \cdot 10^3 \text{ мм}^3 = 53,3 \text{ см}^3.$$

### 1.6.6 Дотичні напруження деформації згину

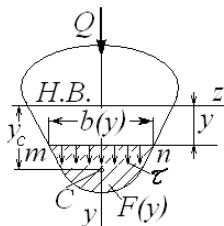


Рисунок 1.45

У поперечних перерізах балки під час деформації поперечного згину виникають не тільки нормальні, а й дотичні напруження. Відповідно до закону парності такі ж дотичні напруження виникатимуть і в поздовжніх перерізах, які паралельні нейтральному шару. Наявність дотичних напружень у поздовжніх перерізах підтверджується експериментально.

Наведемо без доказу формулу [1] розрахунку дотичних напружень в балках у випадку поперечного згину (рис. 1.45):

$$\tau = \frac{QS_z(y)}{b(y)J_z}, \quad (1.73)$$

де  $Q$  – модуль поперечної сили в перерізі, де визначаються дотичні напруження;

$J_z$  – момент інерції цього перерізу відносно нейтральної осі  $z$  (Н.В.);

$b(y)$  – ширина перерізу на рівні, де визначаються дотичні напруження;

$S_z(y)$  – абсолютне значення статичного моменту відносно нейтральної осі  $z$  тієї частини площі  $F(y)$ , яка міститься між лінією, де визначається  $\tau$ , та краєм перерізу (на рисунку заштрихована);  $S_z(y) = y_C \cdot F(y)$ ;

$y_C$  – координата центра ваги площі  $F(y)$  відносно нейтральної осі.

Побудуємо епору  $\tau$  для прямокутного перерізу (рис. 1.45).

Для цього проведемо лінію  $mn$ , яка паралельна нейтральній лінії, на відстані  $y$  від неї й знайдемо значення  $\tau$  у точках цієї лінії.

Лінія  $mn$  відсікає площу  $F(y) = b(h/2 - y)$ . Статичний момент цієї площі

$$S_z(y) = F(y) \cdot y_C = b(h/2 - y) \cdot [y + (h/2 - y)/2] = (bh^2/8) \cdot (1 - 4y^2/h^2).$$

Відповідно до формули 1.73, враховуючи значення  $S_z(y)$ ,  $b(y) = b$ ,  $J_z = bh^3/12$ , отримаємо

$$\tau = Q(bh^2/8)(1 - 4y^2/h^2)/(bbh^3/12) = 3Q(1 - 4y^2/h^2)/(2bh).$$

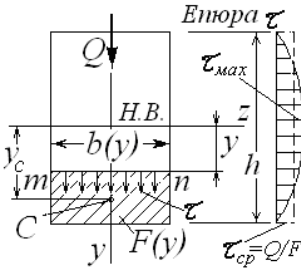


Рисунок 1.46

Змінна  $y$  входить до формули в другому ступені, отже, епюра  $\tau$  за формулою парабола. При  $y = \pm h/2$  (найвіддаленіші точки від нейтральної осі) буде  $\tau = 0$ . Для точок нейтрального шару при  $y = 0$  дотичні напруження максимальні:

$$\tau_{\max} = 3Q/(2bh) = 3Q/(2F).$$

Епюра дотичних напружень  $\tau$  побудована на рисунку 1.46.

Порівняємо одержане максимальне дотичне напруження  $\tau_{\max}$  із середнім дотичним напруженням  $\tau_{cp} = Q/F$ , яке знайдено при умові рівномірного розподілу напружень по перерізу. Отже, максимальні дотичні напруження в 1,5 рази більші середніх.

### 1.6.7 Косий згин

Раніше було розглянуто прямий згин балок, при якому всі навантаження лежали в одній площині, що проходить через одну з головних осей перерізу. За такого згину вісь балки деформується в площині дії навантажень і згин називається прямим. Згин, при якому площина дії навантажень не збігається з однією з головних осей перерізу, називають *косим*.

Розглянемо консольну балку прямокутного перерізу, до кінця якої прикладена сила  $P$ , що утворює кут  $\alpha$  із віссю  $y$  (рис. 1.47). Розкладемо силу  $P$  на дві складові, напрямлені вздовж головних осей перерізу. Далі, користуючись принципом незалежності дії сил, розглянемо косий згин як два прямих згинів у двох взаємно перпендикулярних площинах. Очевидно, що небезпечний переріз буде в закріпленні.

Максимальні згинаючі моменти дорівнюватимуть:

$$T_x = P \ell \cos \alpha;$$

$$T_y = P \ell \sin \alpha.$$

Нормальні напруження в якійсь точці  $A$  перерізу обчислюють за формулами:

$$\sigma_{1A} = T_x y / J_x,$$

$$\sigma_{2A} = T_y x / J_y,$$

де  $x, y$  – координати точки  $A$ ;

$J_x, J_y$  – моменти інерції перерізу відносно осей  $x, y$ .

Сумарне нормальне напруження в точці  $A$ :

$$\sigma_A = \sigma_{1A} + \sigma_{2A} = T_x y / J_x + T_y x / J_y = P \ell (y \cos \alpha / J_x + x \sin \alpha / J_y). \quad (1.74)$$

Якщо заштрихувати в різних напрямках частини перерізу, у яких діятимуть тільки напруження розтягу  $\sigma_{1A}$  і  $\sigma_{2A}$ , то побачимо, що в зоні, заштрихованій у клітинку, діятимуть сумарні напруження розтягу, а в не заштрихованій – сумарні напруження стиску (рис. 1.47). Очевидно також, що максимальні напруження розтягу виникають у точці  $B$ , а максимальні напруження стиску – у точці  $C$  перерізу. Епюри нормальних напружень показано на рисунку 1.47. Оскільки на нейтральній осі напруження  $\sigma = 0$ , то рівняння цієї осі має вигляд

$$y \cos \alpha / J_x + x \sin \alpha / J_y = 0,$$

де  $x, y$  – поточні координати точок нейтральної осі.

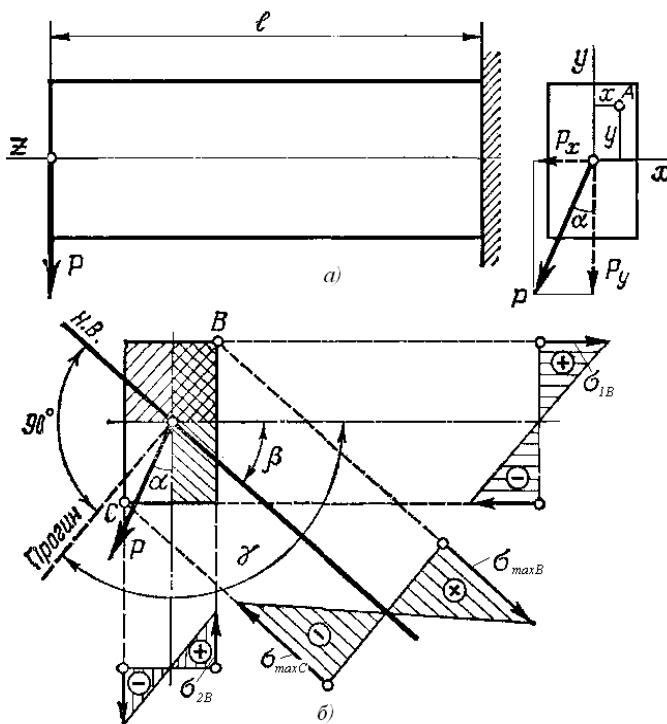


Рисунок 1.47

З рівняння видно, що нейтральною віссю є пряма лінія, яка проходить через початок координат, тобто через центр ваги перерізу балки. Визначимо кут  $\beta$ , який нейтральна вісь утворює з віссю  $x$ :



$$\operatorname{tg} \beta = y/x = -J_x \sin \alpha / (J_y \times \cos \alpha) = - (J_x / J_y) \operatorname{tg} \alpha.$$

Із цієї рівності видно, що коли  $J_x \neq J_y$ , то  $\beta \neq \alpha$  і нейтральна вісь не перпендикулярна до лінії дії сили  $P$ .

Умови міцності балки при косому згині мають наступний вигляд: для напружень розтягу:

$$\sigma_{\max B} = T_x y_B / J_x + T_y x_B / J_y = P \ell (y_B \cos \alpha / J_x + x_B \sin \alpha / J_y) \leq [\sigma]_{\text{роз}}, \quad (1.75)$$

для напружень стиску:

$$\sigma_{\max C} = T_x y_C / J_x + T_y x_C / J_y = P \ell (y_C \cos \alpha / J_x + x_C \sin \alpha / J_y) \leq [\sigma]_{\text{ст}}, \quad (1.76)$$

У загальному випадку неплоского згинання умова міцності набуває вигляду

$$\sigma_{\max} = T_x / W_x + T_y / W_y \leq [\sigma], \quad (1.77)$$

де  $W_x = J_x / y_{\max}$ ,  $W_y = J_y / x_{\max}$  – моменти опору перерізу відповідно осей  $x$  і  $y$

### 1.6.8 Диференціальне рівняння пружної лінії балки.

Умова жорсткості

При плоскому поперечному згині початкова пряма вісь перетворюється в плоску криву лінію, яку називають вигнутою віссю або пружною лінією балки.

Переміщення в довільному перерізі при плоскому згині характеризується прогином  $y$  й кутом повороту перерізу  $\Theta(x)$  (рис. 6.18). Прогин – це переміщення центра ваги перерізу в напрямі, перпендикулярному до початкової осі, а кут повороту перерізу дорівнює куту між дотичною до зігнутої осі й початковою віссю. Для малих деформацій кути повороту перерізів балки можна визначати за виразом

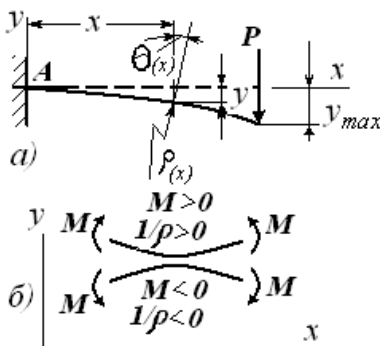


Рисунок 1.48

$$\Theta = dy/dx. \quad (1.78)$$

Запишемо формулу (1.51) і врахуємо, що в загальному випадку кривизна  $1/\rho$  й згинаючий момент  $T$  залежать від координати  $x$ :

$$1/\rho(x) = T(x) / EJ. \quad (1.79)$$

Кривизну плоскої кривої можна визначити за відомою з математичного аналізу формулою

$$1/\rho(x) = (d^2y/dx^2) / (\pm \sqrt{1 + (dy/dx)^2})^3. \quad (1.80)$$

Прирівняємо праві частини рівнянь (1.79) і (1.80), а, також нехтуючи величиною  $(dy/dx)^2$  як величиною другого порядку малості, тобто набагато меншою від одиниці, отримаємо наближене диференціальне рівняння пружної лінії балки:

$$\pm \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{T(x)}{EJ}. \quad (1.81)$$

Домовимось вісь прогинів у спрямовувати вверху, оскільки при такому напрямі кут повороту перерізів додатний при повороті перерізів проти ходу годинникової стрілки.

У цьому випадку при додатному згинальному моменті кривизна також додатна, а при від'ємному згинальному моменті – від'ємна, тобто згинальний момент і кривизна мають однакові знаки (рис. 1.48).

Тому в диференціальному рівнянні (1.81) слід зберігати знак «плюс»:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{T(x)}{EJ}. \quad (1.82)$$

Проінтегрувавши це рівняння один раз, отримаємо рівняння кутів повороту перерізів (1.78):

$$\frac{dy}{dx} = \theta = \int \frac{T(x)}{EJ} dx + C_1. \quad (1.83)$$

Після другого інтегрування дістанемо рівняння вигнутої осі балки, або рівняння прогинів:

$$y(x) = \int dx \int \frac{T(x)}{EJ} dx + C_1 x + C_2. \quad (1.84)$$

Тут  $C_1$  і  $C_2$  – сталі інтегрування визначаються за граничними умовами:

– для балки, яка зображена на рисунку 6.18, ці умови записують так:

для  $x = 0$  маємо  $\Theta_A = 0$ ,  $y_A = 0$ ;

– для балки на двох шарнірних опорах, яка зображена на рисунку 6.18, дорівнюють нулю прогини на цих опорах:

$$y_A = 0, \quad y_B = 0.$$

Зауважимо, що вплив поперечних сил на переміщення при згині залежить насамперед від відношення довжини балки  $\ell$  до висоти її перерізу  $h$ . Для балок із відношенням  $\ell/h \geq 10$  впливом поперечних

зусиль на величину прогинів можна нехтувати [1]. Прогини й кути повороту перерізів для балок із декількома ділянками, на яких залежності  $T(x)$  є різними, визначають, складаючи рівняння (1.82) для кожної окремої ділянки з подальшим інтегруванням. Для зменшення числа сталих інтегрування рекомендується:

1) початок системи координат слід вибирати в крайній лівій точці балки й робити його загальним для всіх ділянок;

2) доданок від зовнішнього зосереджуваного моменту  $m$  слід помножити на множник  $(x - a)^0$ , що дорівнює одиниці. Тут  $a$  – абсциса точки, де прикладений момент  $m$ ;

3) у разі обривання розподіленого навантаження його продовжують до кінця, а для збереження дійсного навантаження вводять доданок, що «компенсує» дійсне навантаження;

4) інтегрування рівнянь виконують, не розкриваючи дужок.

Жорсткість балок при згині оцінюють за максимальними прогинами  $f = y_{\max}$  і максимальними кутами повороту поперечних перерізів  $\Theta_{\max}$ . Умови жорсткості записують так:

$$f \leq [f]; \quad \Theta_{\max} \leq [\Theta]. \quad (1.85)$$

Припустимі прогини  $[f]$  і кути повороту поперечних перерізів  $[\Theta]$  встановлюють для технічних об'єктів з урахуванням конкретних умов їхньої експлуатації. Припустимі прогини  $[f]$ , звичайно, вимірюють у долях прольоту  $\ell$ , наприклад, для мостів  $[f] = (1/700 - 1/1000)\ell$ . Припустимі кути повороту поперечних перерізів  $[\Theta]$  вимірюють у радіанах.

## Контрольні запитання до розділу 1.6

1. Який вид деформації бруса називається згином?
2. Які внутрішні силові фактори діють у поперечному перерізі бруса при прямому згині?
3. Як обчислюють поперечну силу в довільному поперечному перерізі балки? Правило знаків.
4. Як обчислюють згинаючий момент у довільному поперечному перерізі балки? Правило знаків.
5. Що називається епурою поперечних сил, епурою згинаючих моментів?
6. Порядок побудови епюр  $Q$  та  $M$ .

7. Диференціальні залежності між  $q(z)$ ,  $Q(z)$  та  $M(z)$ .
8. Правила перевірки правильності епюр  $Q(z)$  та  $M(z)$ .
9. За якою формулою визначають нормальні напруження в поперечному перерізі бруса при чистому згині?
10. Як розподіляються нормальні напруження по висоті та ширині поперечного перерізу балки при чистому згині?
11. Як розраховують і де виникають максимальні нормальні напруження у перерізі стержня при згині?
12. Що зветься осьовим моментом опору площі перерізу і як його визначають для круглого і прямокутного перерізів балки? Його розмірність.
13. Як розраховують балку на міцність при згині за нормальними напруженнями? Який переріз приймають за небезпечний?
14. За якими формулами визначають при згині потрібні розміри прямокутного, круглого та двотаврового перерізів балки?
15. Які форми поперечних перерізів балки найбільш раціональні для згину?
16. За якою формулою визначають дотичні напруження в балках при поперечному згині?
17. Що називається косим згином? За якими формулами визначають нормальні напруження в умовах косого згину?
18. За якими формулами визначають нормальні напруження в умовах косого згину?
19. Які умови жорсткості балок при згині?

## 1.7 Гіпотези міцності

Найважливішим завданням інженерного розрахунку є оцінка міцності елементів конструкцій за відомим напруженим станом. Досить просто ця задача розв'язується для простих видів деформацій або при поєднанні основних деформацій, коли в поперечних перерізах бруса виникають тільки нормальні напруження, які в кожній точці перерізу можна визначити.

Проте часто трапляються й мають велике практичне значення випадки поєднання основних деформацій, коли в поперечних перерізах виникають нормальні й дотичні напруження, розподілені нерівномірно й за різними законами. У таких випадках визначити величини, що характеризують міцність, неможливо, тому для оцінки міцності деталі доводиться враховувати механічні характеристики даного матеріалу, добути з діаграми розтягу.

Як відомо, міцність пластичних матеріалів на розтяг характеризують границею текучості, а крихких – границею міцності. Ці напруження вважають граничними й залежно від них обчислюють припустимі напруження.

*Гіпотези міцності* – це наукові припущення про основні причини настання в матеріалі граничного напруженого стану при поєднанні основних деформацій.

Напружені стани при поєднанні основних деформацій і при одновісному розтягу називатимемо рівнонебезпечними або еквівалентними, якщо їхні головні напруження відрізняються від граничної для даного матеріалу в однакову кількість разів, інакше кажучи, коефіцієнти запасу міцності для еквівалентних напружених станів однакові.

Еквівалентним напруженням  $\sigma_{екв}$  називають таке умовне напруження одновісного розтягу, яке рівнонебезпечне заданому випадку поєднання основних деформацій. Відповідно до гіпотез міцності виводять формули для розрахунку еквівалентного напруження, яку потім зіставляють із допустимим напруженням на розтяг  $[\sigma]$ , тобто умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{екв} \leq [\sigma]. \quad (1.86)$$

Сформулюємо і охарактеризуємо деякі гіпотези міцності й наведемо відповідні формули для обчислення еквівалентних напружень.

**Першу теорію міцності**, в основі якої лежить гіпотеза найбільших нормальних напружень і яка сформульована Галілеєм, можна записати так:

$$\sigma_{еквI} = |\sigma|_{\max} \leq [\sigma]. \quad (1.87)$$

Вона дає задовільні результати для дуже крихких матеріалів (камінь, цегла та ін.).

*Друга теорія міцності*, в основі якої лежить гіпотеза найбільших лінійних деформацій, розроблена Маріоттом і має вигляд

$$\sigma_{еквII} = \sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (1.88)$$

Ця теорія підтверджується для крихких матеріалів типу легованого чавуну, високоміцних сталей.

**Третя теорія міцності (гіпотеза найбільших дотичних напружень).** Згідно з цією гіпотезою, яка запропонована Кулоном, небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли найбільші дотичні напруження досягають граничної величини.

В пункті 3.5 було встановлено, що під час одновісного розтягу бруса максимальне дотичне напруження в похилій площині дорівнює половині максимального нормального напруження. Звідси випливає, що граничне дотичне напруження дорівнює половині граничного нормального напруження:

$$\tau_{zp} = \sigma_{zp}/2.$$

Тобто умова міцності у випадку простого розтягання має вигляд

$$\tau_{\max} = [\tau] = [\sigma]/2, \quad (1.89)$$

У випадку плоского напруженого стану максимальне дотичне напруження дорівнює піврізниці головних напружень:

$$\tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \leq [\sigma]/2.$$

Отже, умову міцності для плоского напруженого стану через головні напруження  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  можна виразити так:

$$\sigma_1 - \sigma_2 \leq [\sigma]. \quad (1.90)$$

Тобто, еквівалентним напруженням за третьою теорією є різниця алгебраїчно найбільшого й найменшого головних напружень:

$$\sigma_{еквIII} = \sigma_1 - \sigma_2. \quad (1.91)$$

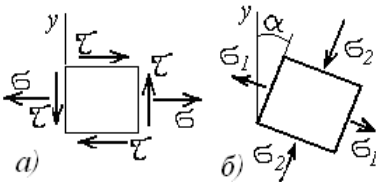


Рисунок 1.49

Розглянемо далі спрощений плоский напружений стан, у якому діють нормальні  $\sigma$  і дотичні  $\tau$  напруження (рис. 1.49). Такий напружений стан досить часто зустрічається, наприклад, при згині із

крученням. Головні напруження в похилих площадках цієї зони бруса (рис. 1.49) визначаються за формулами

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Отже, максимальні дотичні напруження визначаються як

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Тобто, у цьому випадку (рис. 1.49,а) умова міцності для плоского напруженого стану буде:

$$\sigma_{еквIII} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (1.92)$$

Третя теорія міцності задовільно підтверджується дослідями для пластичних матеріалів, у яких припустимі напруження на розтяг і стиск однакові.

**Четверта теорія міцності.** Згідно із гіпотезою Мора небезпечний стан матеріалу настає тоді, коли на деякій площадці трапляється найбільш несприятлива комбінація нормальних і дотичних напружень.

Формула для обчислення еквівалентних напружень і умова міцності для спрощеного плоского напруженого стану (рис. 1.49,а) має вигляд

$$\sigma_{еквIV} = \frac{1-k}{2} \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (1.93)$$

де  $k = [\sigma]_p / [\sigma]_c$  – відношення припустимих напружень матеріалу для розтягу  $[\sigma]_p$  та стиску  $[\sigma]_c$ .

Ця формула однаково придатна як для крихких, так і для пластичних матеріалів; коли  $k = 1$ , вона тотожна із третьою теорією міцності.

#### **П'ята, енергетична теорія міцності**

Під час деформації елементарної частинки тіла в загальному випадку змінюються її форма й об'єм. Таким чином, повна потенціальна енергія деформації складається із двох частин: енергії зміни форми й енергії зміни об'єму. Енергетична гіпотеза міцності за критерій переходу матеріалу до граничного стану приймає тільки енергію зміни форми.

Згідно з цією гіпотезою небезпечний стан матеріалу в даній точці настає тоді, коли питома потенціальна енергія зміни форми для цієї точки досягає граничної величини. Формула для обчислення еквівалентних напружень і умова міцності має вигляд

$$\sigma_{еквV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (1.94)$$

Цю теорію міцності для пластичних матеріалів добре підтверджують досліді.

Зазначимо, що в усіх наведених вище формулах  $\tau$  і  $\sigma$  є нормальними і дотичними напруженнями на площадці поперечного перерізу, який проходить через небезпечну точку.

### 1.7.1 Згин і кручення

Одночасних деформацій згину й кручення зазнає більшість валів, які, звичайно, відносяться до прямих стержнів круглого або кільцевого перерізу.

Для розрахунку валів братимемо до уваги тільки крутний  $T_{kp}$  і згинаючий  $T_x$  моменти, які діють у небезпечному поперечному перерізі, і не братимемо до уваги поперечні сили, оскільки відповідні їм дотичні напруження відносно невеликі.

Максимальні нормальні й дотичні напруження для круглих валів обчислюють за формулами (1.9), (1.69):

$$\sigma_{\max} = T_x / W_x; \quad \tau_{\max} = T_{kp} / W_p,$$

де для круглих валів маємо  $W_p = 2W_x$ ;  $W_x, W_p$  – осьовий (відносно будь-якої осі перерізу вала) і полярний моменти опору.

У випадку одночасного згину й кручення небезпечними будуть точки поперечного перерізу вала, які найбільше віддалені від нейтральної осі.

Застосувавши третю теорію міцності отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{еквIII} &= \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{(T_x / W_x)^2 + 4(T_{kp} / W_p)^2} = \\ &= \sqrt{(T_x / W_x)^2 + 4[T_{kp} / (2W_x)]^2} = \sqrt{T_x^2 + T_{kp}^2} / W_x = T_{еквIII} / W_x, \end{aligned}$$

де  $T_{еквIII} = \sqrt{T_x^2 + T_{kp}^2}$  – еквівалентний момент.

Застосувавши енергетичну теорію міцності, матимемо

$$\begin{aligned} \sigma_{еквV} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{(T_x / W_x)^2 + 3(T_{kp} / W_p)^2} = \\ &= \sqrt{(T_x / W_x)^2 + 3[T_{kp} / (2W_x)]^2} = \sqrt{T_x^2 + 0,75T_{kp}^2} / W_x = T_{еквV} / W_x, \end{aligned}$$

де  $T_{еквV} = \sqrt{T_x^2 + 0,75T_{kp}^2}$ .

Вали звичайно виготовляють з матеріалу, в якого припустимі напруження на розтяг і стиск однакові:

$$[\sigma]_{роз} = [\sigma]_{ст.} = [\sigma].$$

Тобто умова міцності для круглих валів набуде вигляду

$$\sigma_{екв} = T_{екв} / W_x \leq [\sigma]. \quad (1.95)$$



Отже, за розрахунковою формулою (1.95) круглі вали розраховують як на згин, але не за згинаючим, а за еквівалентним моментом  $T_{екв}$ , який визначають використовуючи третю або п'яту теорію міцності.

Особливості використання теорій міцності розглянемо на наступному прикладі.

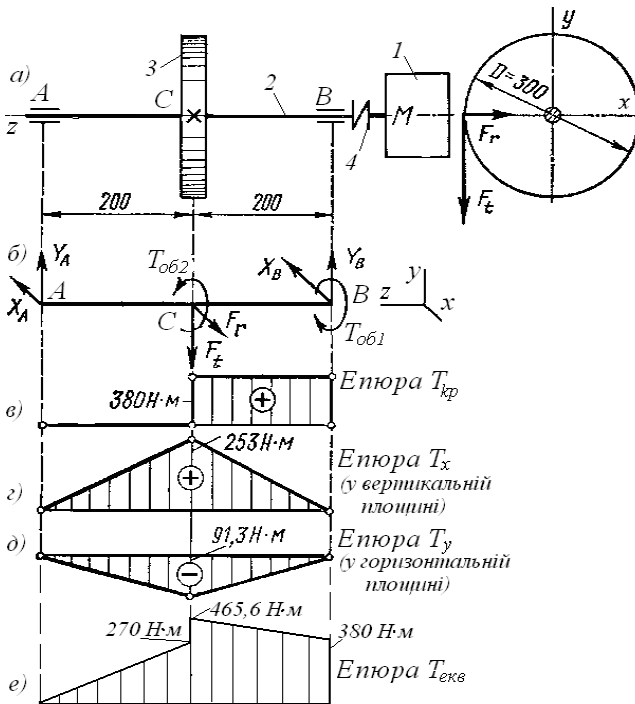


Рисунок 1.50

**Приклад 1.14.** Перевірити міцність вала зубчастої передачі. Вал виготовлено зі сталі Ст4, границя текучості для якої  $\sigma_m = 260$  МПа, діаметр вала  $d = 35$  мм. Схему вала зображено на рисунку 1.50, де 1 – двигун, 2 – вал, 3 – зубчасте колесо, 4 – муфта, яка з'єднує вал двигуна з валом 2. Розміри на схемі подано в міліметрах. Потужність, яка передається від двигуна складає  $P = 40$  кВт, частота обертання вала  $n = 1000$  об/хв, припустимий коефіцієнт запасу міцності  $[n] = 3$ . Для розрахунку застосувати третю теорію міцності. Визначити на кожній ділянці необхідний діаметр вала.

*Розв'язання.* Зобразимо розрахункову схему вала (рис. 7.2). Зубчасте колесо 3 за допомогою сил взаємодії між зубцями зубчастих коліс  $F_t$  (окружне зусилля),  $F_r$  (радіальне зусилля) обертає інше зубчасте колесо, котре на схемі не зображено. Сили  $F_t$ ,  $F_r$  перенесемо до осі вала у точку  $C$  і додамо (згідно з теоремою про паралельне перенесення сили  $F_t$ ) пару сил  $T_{об2}$ , момент якої буде  $T_{об2} = F_t \cdot D/2$ . Отже, у перерізах  $B$  і  $C$  до вала прикладені обертові моменти від двигуна  $T_{об1}$  і  $T_{об2}$  від колеса 3.

Визначаємо обертаючий момент від двигуна:

$$T_{об1} = P/\omega,$$

де кутова швидкість  $\omega = \pi n/30 = \pi \cdot 1000/30 = 104,7$  рад/с.

Обчислюємо  $T_{об1} = 40 \cdot 10^3 / 104,7 = 380$  Н·м.

Записуємо рівняння рівноваги  $\sum M_z = T_{об1} - T_{об2} = 0$  і знаходимо  $T_{об2} = T_{об1} = 380$  Н·м.

Визначаємо крутні моменти на кожній ділянці вала:  $T_{крAC} = 0$ ,  $T_{крCB} = T_{об1} = 380$  Н·м.

На ділянці  $BC$  обертаючий момент не змінюється й епюра крутного моменту – пряма, яка паралельна осі (рис. 7.2), а на ділянці  $AC$  епюра співпадає з віссю (крутний момент дорівнює нулю).

Визначаємо окружне зусилля  $F_t = 2 T_{об1} / D = 2 \cdot 380 / 0,3 = 2530$  Н і радіальне зусилля [3]  $F_r = F_t \cdot \tan \alpha = 0,36 F_t = 0,36 \cdot 2530 = 913$  Н, де  $\alpha = 20^\circ$  – кут зачеплення.

Будуємо епюру згинаючих моментів у вертикальній площині (рис. 7.2).

Визначаємо реакції опор із рівнянь  $\sum M_B = 0$ ,  $\sum M_A = 0$ :

$$y_A = y_B = F_t \cdot CB / AB = 1265 \text{ Н.}$$

Згинаючий момент на опорах дорівнює нулю  $T_{xA} = T_{xB} = 0$ . Максимальний згинаючий момент у перерізу  $C$ :

$$T_{xC} = y_A \cdot AC = 1265 \cdot 0,2 = 253 \text{ Н·м.}$$

Будуємо епюру згинаючих моментів  $T_x$  у вертикальній площині (рис. 1.50).

Радіальне зусилля  $F_r$  згинатиме вал у горизонтальній площині. Розраховуємо епюру згинаючих моментів у горизонтальній площині.

Визначаємо реакції опор із рівнянь  $\sum M_B = 0$ ,  $\sum M_A = 0$ :

$$x_A = x_B = F_r \cdot CB / AB = 457 \text{ Н.}$$

На опорах згинаючий момент дорівнює нулю  $T_{yA} = T_{yB} = 0$ .

Максимальний згинаючий момент від дії сили  $F_r$  буде на середині вала; його значення

$$T_{yC} = x_A \cdot AC = 457 \cdot 0,2 = 91,3 \text{ Н·м.}$$

Будуємо епюру згинаючих моментів у горизонтальній площині (рис. 6.2).

Повний згинаючий момент визначаємо за формулою

$$T_{3z} = \sqrt{T_x^2 + T_y^2},$$

і тому  $T_{3zA} = 0$ ,  $T_{3zC} = 270$  Нм,  $T_{3zB} = 0$ .

Розраховуємо еквівалентні моменти на межах кожної ділянки, застосовуючи третю теорію міцності згідно з формулою (1.94):

$$T_{еквIII} = \sqrt{T_{3z}^2 + T_{кр}^2}.$$

Обчислюємо:

перша ділянка  $AC$ :  $T_{еквA1} = 0$ ,  $T_{еквC1} = \sqrt{270^2 + 0} = 270$  Н·м;

друга ділянка  $CB$ :  $T_{еквC2} = \sqrt{270^2 + 380^2} = 465,6$  Н·м,

$$T_{еквB2} = \sqrt{0 + 380^2} = 380$$
 Н·м.

Епюра еквівалентних моментів зображена на рисунку 1.50.

Визначаємо з епюри еквівалентних моментів положення небезпечного перерізу (рис.7.2,е). Він знаходиться у місці закріплення зубчастого колеса – переріз С.

Записуємо умову міцності (7.9):  $\sigma_{екв} = T_{екв}/W_x \leq [\sigma] = \sigma_m/[n]$  і перевіримо її виконання:

$$\sigma_{екв} = 465,6 \cdot 10^3 / 4288 = 108 \text{ МПа} > 260/3 = 87 \text{ МПа},$$

де  $W_x = 0,1d^3 = 0,1 \cdot 35^3 = 4288$  мм<sup>3</sup> (формула 6.12).

З отриманого співвідношення слідує, що міцність вала недостатня – умова міцності не виконується.

Враховуючи епюру  $T_{екв}$ , вал можна на ділянках  $AC$  і  $CB$  виконати різних діаметрів.

Обчислимо необхідний діаметр вала, враховуючи залежності (7.10) і (6.12):

на ділянці  $CB$  ( $T_{еквC2} = 465,6$  Нм)

$$d_{CB} \geq \sqrt[3]{T_{еквC2} [n] / (0,1 \cdot \sigma_m)} = \sqrt[3]{465,6 \cdot 10^3 \cdot 3 / (0,1 \cdot 260)} = 37,7 \text{ мм} \approx 38 \text{ мм},$$

на ділянці  $AC$  ( $T_{еквC1} = 270$  Нм)

$$d_{AC} \geq \sqrt[3]{T_{еквC1} [n] / (0,1 \cdot \sigma_m)} = \sqrt[3]{270 \cdot 10^3 \cdot 3 / (0,1 \cdot 260)} = 31,5 \text{ мм} \approx 32 \text{ мм}.$$

### 1.7.2 Кручення й розтяг (стиск)

Одночасних деформацій кручення і розтягу зазнають, наприклад, болти й кріпильні гвинти, а деформацій кручення й стиску – гвинти домкратів і гвинтових пресів, а також свердла й шпинделі свердильних верстатів. Ці деталі звичайно виготовляють з матеріалів, для яких  $[\sigma]_{роз} = [\sigma]_{ст.} = [\sigma]$ .

Нормальні і максимальні дотичні напруження в цих випадках обчислюють за формулами:

$$\sigma = N / F, \quad \tau_{\max} = T_{кр} / W_p.$$

Застосувавши третю теорію міцності, знайдемо розрахункову формулу

$$\sigma_{еквIII} = \sqrt{(N / F)^2 + 4(T_{кр} / W_p)^2} \leq [\sigma]. \quad (1.96)$$

де  $N$ ,  $F$ ,  $T_{кр}$ ,  $W_p$ ,  $[\sigma]$  – відповідно повздовжня сила, площа поперечного перерізу, крутний момент, полярний момент опору круглого бруса й припустимі напруження при розтягу.

Використовуючи енергетичну (п'яту) теорію міцності, матимемо

$$\sigma_{еквV} = \sqrt{(N / F)^2 + 3(T_{кр} / W_p)^2} \leq [\sigma]. \quad (1.97)$$

### Контрольні запитання до розділу 1.7

1. Як виконуються розрахунки за допомогою гіпотез міцності?
2. Який фактор приймається за визначаючий при побудові першої теорії міцності? Рекомендації щодо її використання.
3. Який фактор приймається за визначаючий при побудові другої теорії міцності? Рекомендації щодо її використання.
4. Який фактор приймається за визначаючий при побудові третьої теорії міцності? Рекомендації щодо її використання.
5. Який фактор приймається за визначаючий при побудові четвертої теорії міцності? Рекомендації щодо її використання.
6. Який фактор приймається за визначаючий при побудові п'ятої теорії міцності? Рекомендації щодо її використання.
7. Які деталі зазнають, звичайно, деформацій згину та кручення?
8. Які внутрішні силові фактори діють у поперечному перерізі бруса в умовах дії згину та кручення?

9. Як визначають у випадку одночасного згину й кручення еквівалентний моментом  $T_{екв}$ , використовуючи третю або п'яту теорії міцності?

10. За якими формулами визначають напруження в умовах дії згину з крученням у поперечному перерізі вала круглого профілю?

11. Як розраховують розміри перерізу круглого вала на міцність при згині з крученням?

12. Як визначають у випадку одночасного кручення і розтягу (стиску) напруження в поперечному перерізі деталі?

## **1.8 Міцність при динамічних навантаженнях**

### **1.8.1 Явище втомленості матеріалів**

У попередніх розділах розглядалися розрахунки на міцність при статичному навантаженні елементів конструкцій. Проте багато деталей машин працює в таких умовах, коли напруження, які виникають у них, періодично змінюються за величиною або за величиною й знаком. Опір конструкцій дії таких навантажень істотно відрізняється від опору дії статичного навантаження.

До деталей, які зазнають змінних навантажень, належать, наприклад, осі, вали, рейки потягу, трамвая, штоки поршневих машин тощо. Під час обертання осі вагона одні й ті самі волокна бувають то в зоні розтягу, то в зоні стиску. Шток поршневої машини зазнає змінних навантажень, причому знак напружень змінюється залежно від напрямку руху поршня (розтяг – стиск).

Досліди й аналіз поломок різних деталей машин показує, що матеріали (у тому числі метали), які тривалий час зазнавали дії змінних навантажень, можуть руйнуватися при нижчих напруженнях, ніж границя міцності й навіть границя текучості. Руйнування при цьому відбувається тому, що після певного числа змін напруження в деталі виникають мікротріщини, які поступово збільшуються, і врешті-решт деталь руйнується, не виявивши при цьому помітних залишкових деформацій навіть тоді, коли матеріалу деталі властива висока пластичність.

Руйнування матеріалу, спричинене багаторазовою дією змінних напружень, називають *втомленістю*.

Виникнення мікротріщин здебільшого є результатом неоднорідності будови матеріалів, наявності слідів механічної обробки й пошкоджень поверхні деталі (волосовини, раковини, газові й шлакові

включення, подряпини, сліди різця або шліфувального каменю тощо), а також результатом концентрації напружень.

Здатність матеріалів протистояти втомленості називають *опором втомленості*. Вивчення в опорі матеріалів питань втомленості має дуже велике значення, оскільки такі важливі деталі, як осі трамвайних і залізничних вагонів, колінчасті вали, гребні гвинти, поршневі пальці, пружини, шатуни двигунів і багато інших, виходять із ладу переважно внаслідок руйнувань від втомленості.

Введемо основні визначення.

Час однієї зміни напружень називають *періодом*. Циклом напружень називають сукупність усіх значень напружень  $\sigma$  (або  $\tau$ ) за час одного періоду  $T$  (рис. 8.1).

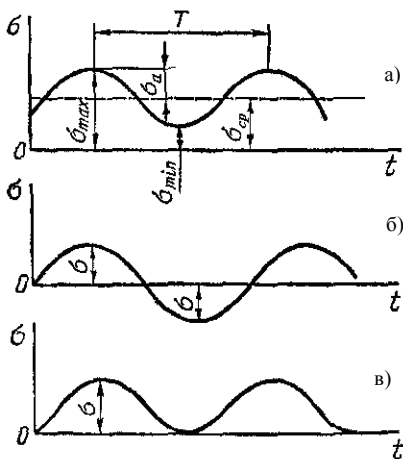


Рисунок 1.51

Змінні напруження можуть мати стаціонарний (сталій) або нестаціонарний (несталий) режим. За стаціонарним режимом кожний новий цикл повторює попередній. За нестаціонарним режимом характер напружень і їхні максимальні значення змінюються від циклу до циклу.

Цикл змінних напружень (рис. 1.51) характеризують наступними параметрами:

- 1) максимальним напруженням  $\sigma_{\max}$ ;
- 2) мінімальним напруженням  $\sigma_{\min}$ ;
- 3) середнім напруженням  $\sigma_{cp} = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$ ;
- 4) амплітудою циклу  $\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$ ;
- 5) коефіцієнтом асиметрії циклу  $r_\sigma = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ .

Зазначимо, що цикли, які мають однаковий коефіцієнт асиметрії, називають *подібними*.

На рисунок 1.51, а, б, в зображено відповідно:

- при  $\sigma_{\max} \neq \sigma_{\min} \neq 0$  маємо *асиметричний цикл* (рис. 1.51, а);
- при  $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ ,  $\sigma_{cp} = 0$ ,  $r_\sigma = -1$  відбувається *симетричний цикл* (рис. 1.51, б);

– при  $\sigma_{\max} \neq 0$ ,  $\sigma_{\min} = 0$  маємо *віднульовий цикл* зміни напружень (рис. 1.51,в).

Усі наведені тут і далі означення й співвідношення дійсні й для змінних дотичних напружень, треба тільки замінити в позначеннях і формулах  $\sigma$  на  $\tau$ .

Максимальне значення періодично змінного напруження, при якому матеріал може необмежено довго чинити опір руйнуванню, називають *границею витривалості*.

Границю витривалості для змінних напружень позначають при *симетричному циклі*  $\sigma_{-1}$ , при *віднульовому циклі* –  $\sigma_0$ , а при циклі с коефіцієнтом асиметрії циклу  $r_\sigma$  як  $\sigma_r$ .

Для визначення границі витривалості зразки випробують на спеціальних машинах. Найбільш поширені випробування на згин при симетричному циклі навантаження. Для цього зразки навантажують до деяких напружень  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ... і т. д. і фіксують відповідні числа циклів  $N_1$ ,  $N_2$  до руйнування зразка. За результатами випробувань будують криву втомленості (рис. 1.52). Ця крива асимптотично наближається до деякої горизонтальної прямої, що відсікає на осі ординат відрізок, величиною якого й визначається як границя витривалості  $\sigma_{-1}$ .

Практика показує, що сталевий (або чавунний) зразок, який витримав  $10^7$  циклів (це число називають *базою випробувань*  $N_0$ ), може витримати й необмежене число циклів.

Експериментальне встановлено, що при будь-якому асиметричному циклі (наприклад, віднульовому) границя витривалості для того самого матеріалу буде вища, ніж при симетричному циклі. Це означає, що *симетричний цикл найбільш небезпечний*.

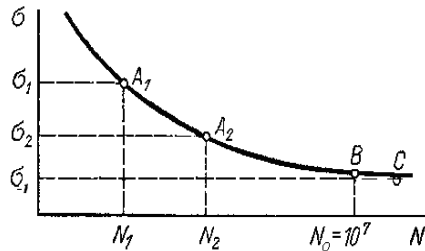


Рисунок 1.52

Для кольорових металів границю витривалості визначають, як правило, при базі випробувань  $5 \cdot 10^7$  або  $10^8$  циклів.

Границя витривалості значною мірою залежить від виду деформації. Випробування на витривалість при розтягу – стиску й крученню проводять рідше, оскільки вони вимагають складнішого обладнання, ніж у випадку згину. Тому границі витривалості при розтягу й крученню визначають з емпіричних формул за відомою границею витривалості при симетричному циклі згину.

Для багатьох матеріалів границі витривалості визначені й наводяться в довідниках.

На величину границі витривалості крім характеристик циклу впливає низка додаткових факторів: форма зразка і його розміри; концентрація напружень; стан поверхні; середовище, у якому знаходиться деталь; температура; режим циклічного силового впливу; попередня внутрішня напруженість матеріалу та ін.

**Концентрація напружень.** Теоретичними й експериментальними дослідженнями встановлено, що напруження розподілені рівномірно по площі поперечного перерізу розтягнутого або стиснутого бруса тільки тоді, коли поперечні перерізи, або сталі вздовж бруса, або змінюються дуже повільно.

Різкі зміни форми або площі поперечного перерізу деталей (нааявність отворів, виточок, викружок, галтелей, канавок, надрізів тощо) призводять до нерівномірного розподілу напружень, спричиняють *концентрацію напружень*. Причина, яка зумовлює концентрацію напружень (отвір, виточка), називають *концентратором напружень*.

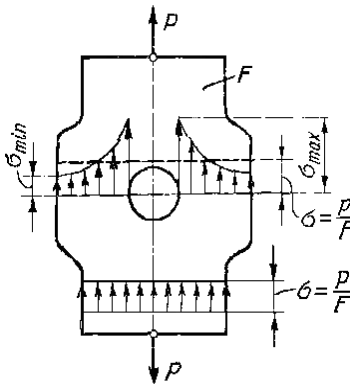


Рисунок 1.53

Розглянемо сталевий зразок, який розтягується силою  $P$  (рис. 1.53). У поперечному перерізі зразка діє поздовжня сила  $N = P$ . При цьому напруження, яке обчислене із припущенням, що концентрації напружень немає, називають *номінальним напруженням* і воно дорівнює

$$\sigma = N / F.$$

Для компенсації послаблення перерізу за рахунок отвору збільшимо ширину зразка, як показано на рисунку 1.53, так щоб

площа поперечного перерізу, проведеного через вісь отвору, дорівнювала  $F$ . Графік розподілу напружень  $\sigma$  біля отвору подано на рисунку 1.53.

Концентрація напружень має місцевий характер, оскільки з віддаленням від концентратора як уздовж деталі, так і поперек, напруження дуже швидко спадають, наближаючись до своїх номінальних значень.

Кількісно концентрацію напружень характеризує *теоретичний коефіцієнт концентрації напружень*  $\alpha$ , який дорівнює відношенню найбільшого місцевого напруження біля концентратора напружень до номінального напруження:



$$\alpha_{\sigma} = \sigma_{\max} / \sigma. \quad (1.98)$$

Концентрація напружень істотно залежить від виду й розмірів концентратора.

Концентрація напружень по-різному впливає на міцність пластичних і крихких матеріалів. Велике значення при цьому має й характер навантаження. Якщо взяти пластичний матеріал, навантажений статично, то зі збільшенням навантаження зростання найбільших місцевих напружень припиняється при досягненні границі текучості внаслідок місцевої текучості матеріалу, а в решті поперечного перерізу напруження зростатимуть. Отже, пластичність матеріалу сприяє вирівнюванню напружень. Коли напруження досягнуть границі текучості по всьому перерізу, то їхній розподіл можна вважати рівномірним. Звідси можна зробити висновок про те, що при статичному навантаженні пластичні матеріали малочутливі до концентрації напружень. Вплив концентрації напружень не враховують у випадку статичного навантаження при розрахунках на міцність заклепочних і різьбових з'єднань та інших подібних деталей, виготовлених із пластичних матеріалів. Однак при навантаженнях, які швидко змінюються із часом, напруження не встигають вирівнюватись, тому концентрацію напружень треба враховувати.

У розрахунках на міцність деталей із крихких матеріалів концентрацію напружень треба враховувати й при статичному навантаженні, оскільки нерівномірність розподілу напружень внаслідок їхньої концентрації зберігається на всіх стадіях навантаження (пригадаємо відсутність ділянки текучості в діаграмах розтягу крихких матеріалів).

Міцність при змінних навантаженнях характеризують границею витривалості, тому дійсну оцінку впливу концентратора можна дістати, порівнюючи границі витривалості, визначені з дослідів над гладенькими зразками й над зразками з досліджуваним концентратом при симетричному циклі.

Відношення цих величин називають *ефективним* (тобто дійсним) *коефіцієнтом концентрації напружень*  $k_{\sigma}$ .

Порівняння показує, що ефективний коефіцієнт концентрації завжди менший від теоретичного. Наприклад, для вала передачі, якщо у перерізу поперечний отвір ефективний коефіцієнт концентрації напружень не більше 2,2, а теоретичний коефіцієнт концентрації дорівнює 3,0.

**Вплив розмірів деталі (масштабний фактор).** З дослідів встановлено, що границя витривалості залежить від абсолютних розмірів поперечного перерізу зразка: зі збільшенням розмірів перерізу

границя витривалості зменшується. Ця закономірність дістала назву *масштабного фактору*  $k_d$ ; вона пояснюється тим, що зі збільшенням об'єму матеріалу збільшується ймовірність неоднорідності його структури (шлакові й газові включення тощо), а це призводить до виникнення осередків концентрації напружень. Крім того, зі збільшенням розмірів деталі зменшуються механічна міцність матеріалу навіть за умови додержання технології термічної обробки; змінюються властивості поверхневого шару після механічної обробки.

**Вплив стану поверхні.** Здебільшого поверхневі шари деталі, яка зазнає дії циклічних навантажень, виявляються більш напруженими. Крім того, поверхня майже завжди має дефекти, пов'язані з якістю механічної обробки, а також із корозією. Тому на границю витривалості впливають шорсткість і стан поверхні деталі: зі збільшенням шорсткості поверхні границя витривалості знижується. Це пояснюється тим, що після виготовлення деталі на її поверхні є риси, подряпини тощо, біля яких спостерігається концентрація напружень. Вплив стану поверхні оцінюється *коефіцієнтом якості поверхні*  $k_f$ .

Для підвищення границі витривалості використовуються різноманітні види зміцнення поверхні деталі (поверхове загартування, хіміко-термічна обробка та ін.), які характеризуються *коефіцієнтом поверхового зміцнення*  $k_\sigma$ .

Загальний *коефіцієнт зниження границі витривалості* знаходиться за формулою:

$$K = (k_\sigma/k_d + 1/k_f - 1) / k_\sigma \quad (1.99)$$

На границю витривалості впливає й інші фактори. Це, наприклад: паузи (перерви) у навантажуванні; перевантаження, тобто навантаження, які вищі за границю витривалості; тренування деталі, яке спостерігається, якщо прикласти напруження дещо нижчі за границю витривалості і потім поступово підвищувати навантаження. В цьому разі границю витривалості можна значно підвищити. Крім того, з підвищенням температури границя витривалості, як правило, зменшується, а зі зниженням – зростає.

## 1.8.2 Розрахунки на міцність при змінних напруженнях

Розрахунки на міцність при змінних напруженнях у більшості випадків перевірни й полягають у тому, що для кожного можливого небезпечного перерізу визначають фактичні коефіцієнти запасу міцності  $s$ , які порівнюють із потрібними для даної конструкції коефіцієнтами запасу міцності  $[s]$ ; при цьому має бути дійсною умова

$$s \geq [s]. \quad (1.100)$$

Звичайно, для сталевих деталей  $[s] = 1,3 - 3$  і більше залежно від виду й призначення деталі.

У разі *простих* видів деформацій при змінних напруженнях у деталі за *симетричним циклом* запас міцності можна обчислити так:

– при розтягу-стиску або при згині

$$s_{\sigma} = \sigma_{-1} / (K_{\sigma} \sigma_a), \quad (1.101)$$

– для кручення

$$s_{\tau} = \tau_{-1} / (K_{\tau} \tau_a), \quad (1.102)$$

де  $\sigma_{-1}$  – границя витривалості зразка при розтягу-стиску або при згині;

$\tau_{-1}$  – те ж при крученні;

$\sigma_a, \tau_a$  – амплітуда змінних напружень;

$K_{\sigma}, K_{\tau}$  – коефіцієнти зниження границі витривалості (1.99).

Для деталей, які навантажені за *асиметричним циклом* запас міцності можна обчислити відповідно при розтягу-стиску, при згині й при крученні за формулами:

$$s_{\sigma} = \sigma_{-1} / (K_{\sigma} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_{cp}); \quad (1.103)$$

$$s_{\tau} = \tau_{-1} / (K_{\tau} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_{cp}), \quad (1.104)$$

де  $\sigma_{cp}, \tau_{cp}$  – середні напруження циклу;

$\psi_{\sigma}, \psi_{\tau}$  – коефіцієнти зведення асиметричного циклу до рівнонебезпечного симетричного;

коефіцієнти зведення відбивають вплив асиметрії циклу на величину границі витривалості й обчислюються за формулами:

$$\psi_{\sigma} = (2\sigma_{-1} - \sigma_0) / \sigma_0; \quad (1.105)$$

$$\psi_{\tau} = (2\tau_{-1} - \tau_0) / \tau_0, \quad (1.106)$$

де  $\sigma_0, \tau_0$  – границі витривалості зразка при віднульовому циклі.

У випадку поєднання основних деформацій (згину й кручення, кручення й розтягу або стиску), тобто для спрощеного плоского напруженого стану, загальний коефіцієнт запасу міцності  $s$  визначають із виразу

$$s = s_{\sigma} s_{\tau} / \sqrt{s_{\sigma}^2 + s_{\tau}^2}, \quad (1.107)$$

де  $s_{\sigma}, s_{\tau}$  – запас міцності окремо для нормальних і дотичних напружень.

### 1.8.3 Розрахунки на міцність у задачах динаміки

Розглянемо приклади розв'язання задач міцності стосовно задач динаміки. До них належать розрахунки, пов'язані із силами інерції, розрахунки на ударні навантаження й на коливання конструкцій.

**Розрахунки на міцність при інерційних навантаженнях.** У розрахунках, пов'язаних із силами інерції, використовують відомий із теоретичної механіки принцип Даламбера (метод кінестатики), за яким, прикладаючи до рухомої матеріальної точки або рухомого тіла, крім активних і реактивних сил ще й сили інерції, розв'язують задачу динаміки методами статки. Пригадаємо, що сила інерції матеріальної точки дорівнює добутку маси точки на її прискорення й напрямлена протилежно прискоренню.

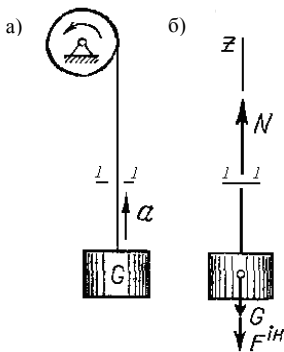


Рисунок 1.54

**Приклад 1.15.** Визначити потрібну площу  $F$  і діаметр  $d$  поперечного перерізу троса, який піднімає вантаж  $G = 20$  кН (рис. 1.54) з прискоренням  $a = 5$  м/с<sup>2</sup>, якщо припустимо напруження для троса  $[\sigma] = 75$  МПа; масу троса не враховувати.

**Розв'язання.** Покажемо силу інерції вантажу  $F^{\text{ин}} = ma$ , яка напрямлена протилежно прискоренню вантажу. У такому разі можемо за принципом Даламбера розглядати систему «вантаж – трос» як таку, що перебуває в рівновазі.

Застосовуючи метод перерізів, уявно відкинемо верхню частину троса й замінимо її дію поздовжньою силою  $N$ , яка виникає в поперечному перерізі 1–1 троса (рис. 1.54).

Складемо рівняння рівноваги для залишеної частини:

$$\sum Z = 0; \quad N - G - F^{\text{ин}} = 0,$$

звідки 
$$N = G + F^{\text{ин}} = G + Ga/g = G(1 + a/g).$$

Запишемо умову міцності для троса:  $\sigma = N/F \leq [\sigma]$ .

Обчислимо площу поперечного перерізу троса:

$$F \geq N/[\sigma] = G(1 + a/g)/[\sigma] = 20 \cdot 10^3 (1 + 5/9,81) / 75 \cdot 10^6 = 4 \cdot 10^{-4} (\text{м}^2) = 400 (\text{мм}^2).$$

Обчислимо діаметр троса (слід зазначити, що формула  $F = \pi d^2/4$  для тросу досить наближена, тому що переріз тросу складається залежно від призначення й конструкції з певної кількості окремих дротів):

$$d = \sqrt{4F/\pi} = 23 \text{ мм}.$$

**Приклад 1.16.** Визначити динамічні напруження в поперечному перерізі тонкостінного кільця з середнім діаметром  $D$ , яке рівномірно обертається у свій площині з кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 1.55,а). Знайти також значення лінійної швидкості  $V$  будь-якої точки кільця і кутової швидкості  $\omega$ , при якій нормальні напруження в поперечному перерізі не перевищують  $[\sigma]_p = 160$  МПа, якщо густина матеріалу  $\rho = 0,8 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup>.  
**Розв'язання.** Визначимо внутрішні си-ли, які виникають у поперечних перерізах кільця. Для цього зробимо переріз 1 – 1 по

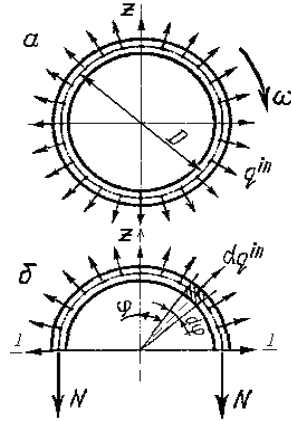


Рисунок 1.55

горизонтальному діаметру й розглянемо рівновагу залишеної частини (рис. 1.55,б).

За принципом Даламбера прикладемо до кожного елементарного елемента кільця відцентрову силу інерції. Ці сили розподілені рівномірно по колу кільця й напрямлені по радіусу від центра протилежно доцентровому прискоренню. б) ятрове прискорення будь-якої точки кільця, яке рівномірно обертається, напрямлено до центру й дорівнює  $a_{доц} = \omega^2 R = V^2 / (D/2)$ .

Покажемо елементарну частину кола кільця (рис. 1.55,б), яке відповідає куту  $d\varphi$  і на яку припадає сила інерції

$$dq^{in} = ma_{доц} = \rho F (D/2) d\varphi V^2 / (D/2) = \rho F V^2 d\varphi,$$

де  $m = \rho F (D/2) d\varphi$  – маса елементарній частині дуги кільця;

$F$  – площа поперечного перерізу.

Визначимо поздовжні сили  $N$ , які виникають у поперечних перерізах. Для цього спроекуємо всі сили, які діють на залишене півкільце, на вісь  $z$ .

Проекція сили  $dq^{in}$  на вісь  $z$  дорівнює  $dq^{in} \cos\varphi$ . Оскільки розглядаємо елементарні сили інерції, які напрямлені по радіусу й нахилені до осі  $z$  під різними кутами, рівняння рівноваги запишемо в інтегральній формі (кут  $\varphi$  змінюється від  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$ ):

$$\sum Z = 0^\circ; \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho F V^2 \cos\varphi d\varphi - 2N = 0$$

$$\text{або } 2N = \rho F V^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi = 2\rho F V^2.$$

Тоді поздовжня сила

$$N = \rho F V^2.$$

Оскільки кільце тонке, то припускаємо, що нормальні напруження розподілені по його поперечному перерізу рівномірно, отже, кільце працює на розтяг.

Нормальні напруження в поперечному перерізі кільця:

$$\sigma = N/F = \rho V^2.$$

Зазначимо, що відповідно до отриманого виразу напруження не залежать від площі поперечного перерізу кільця й пропорційні квадрату лінійної швидкості.

Запишемо умову міцності:

$$\sigma = N/F = \rho V^2 \leq [\sigma],$$

звідси визначимо найбільшу лінійну швидкість:

$$v \leq \sqrt{[\sigma]/\rho} = \sqrt{160 \cdot 10^6 / (0,8 \cdot 10^4)} = 141 \text{ м/с}.$$

Залежно від діаметра кільця  $D$  припустима кутова швидкість буде різною:  $\omega = V/R = 2V/D = 282/D \text{ рад/с}.$

**Розрахунки на міцність при ударних навантаженнях.** Робота ряду машин пов'язана з ударними навантаженнями, які є наслідками конструктивних факторів: зазори в місцях з'єднання деталей; рух транспорту по нерівностям шляху, тощо.

Наближений розрахунок на дію ударного навантаження при осьовому ударі виконують із урахуванням наступних припущень.

1. Під час удару виникають тільки пружні деформації, тобто після припинення дії ударного навантаження тіло повертає свої початкові форму й розміри.

2. Вважають, що система тіл при співударянні має один ступінь вільності, тобто положення системи визначається однією координатою.

3. Удар вважають абсолютно непружним, тобто ударний вантаж після удару не відскакує від пружної системи, а продовжує в процесі її деформації рухатися разом із нею. При цьому немає пружних хвиль у тілах і пов'язаних із ними відскоків тіла, що вдаряє.

4. Маса пружної системи, яка приймає удар, мала порівняно з масою ударного тіла, і тому масою пружної системи можна нехтувати.

5. Кінетична енергія падаючого (ударного) тіла повністю переходить у потенціальну енергію деформації елемента конструкції, який сприймає дію удару. При цьому нехтують втратами енергії на місцеві пластичні деформації.

Розглянемо наближений метод визначення напружень і деформацій стержня при осьовому ударі.

**Приклад 1.17.** Вантаж вагою  $G$  падає з висоти  $h$  на жорсткий диск, який закріплений на кінці стержня, довжиною  $\ell$  і площа поперечного перерізу якого  $F$ . Визначити напруження й деформації стержня (рис. 1.56). Масою стержня й диска нехтувати.

*Розв'язання.* Використаємо теорему про зміну кінетичної енергії системи (вантаж, стержень і диск) на переміщенні  $h + \Delta\ell$ :

$$T_2 - T_1 = \Sigma A_k.$$

Кінетична енергія системи в кінці –  $T_2$  і на початку –  $T_1$ ; переміщення дорівнює нулю – тому що тіла системи в цих положеннях не рухаються. Отже, сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил, які діють на тіла системи, дорівнює нулю:

$$\Sigma A_k = A_G + A_{\text{деф.}} = 0,$$

де  $A_G = G(h + \Delta\ell)$  – робота сили ваги  $G$ ;

$A_{\text{деф.}} = -\frac{1}{2}(N\Delta\ell) = -\frac{1}{2}(\Delta\ell EF/\ell)\Delta\ell = -(\Delta\ell)^2 EF/(2\ell)$  – робота сил пружності при деформації стержня (тут використана залежність  $\Delta\ell = N\ell/(EF)$  або  $N = \Delta\ell EF/\ell$ );

$E$  – модуль пружності матеріала стержня.

Тобто робота, яку виконує вантаж при падінні, дорівнює потенціальній енергії деформації стержня.

$$\text{Тоді} \quad \Sigma A_k = Gh + G\Delta\ell - (\Delta\ell)^2 EF/(2\ell) = 0$$

$$\text{або} \quad (\Delta\ell)^2 - \Delta\ell \, 2G\ell/EF - 2Gh\ell/EF = 0.$$

Введемо позначення

$$G\ell/(EF) = \Delta\ell_{\text{ст}}, \quad (1.108)$$

де  $\Delta\ell_{\text{ст}}$  – статичне подовження стержня при дії сили  $G$ .

$$\text{Тоді одержимо} \quad (\Delta\ell_{\text{д}})^2 - \Delta\ell_{\text{д}} \, 2\Delta\ell_{\text{ст}} - 2h\Delta\ell_{\text{ст}} = 0, \quad (1.109)$$

де  $\Delta\ell_{\text{д}}$  – динамічне подовження стержня.

Розв'язуючи рівняння, знаходимо динамічне подовження

$$\Delta\ell_{\text{д}} = \Delta\ell_{\text{ст}} + \sqrt{\Delta\ell_{\text{ст}}^2 + 2h\Delta\ell_{\text{ст}}}. \quad (1.110)$$

Другий, від'ємний корінь не враховуємо.

Останній вираз запишемо так:

$$\Delta\ell_{\text{д}} = \Delta\ell_{\text{ст}} (1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta\ell_{\text{ст}}}). \quad (1.111)$$

Введемо так званий коефіцієнт динамічності

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta\ell_{\text{ст}}}. \quad (1.112)$$

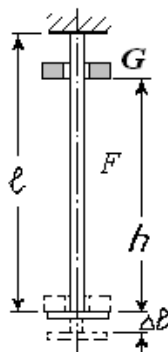


Рисунок 1.56

$$\text{Тоді} \quad \Delta \ell_{\partial} = \kappa_{\partial} \Delta \ell_{\text{ст.}} \quad (1.113)$$

Тобто, *переміщення, які виникають від дії ударного навантаження, дорівнюють добутку коефіцієнта динамічності на переміщення від статично прикладеного навантаження.*

Згідно з лінійною залежністю між напруженнями й переміщеннями, а, також припускаючи, що модулі пружності при статичній і ударній дії навантажень однакові, можна записати зв'язок між статичним і динамічним напруженням:

$$\sigma_{\partial} = \kappa_{\partial} \sigma_{\text{ст.}} \quad (1.114)$$

де  $\sigma_{\text{ст.}}$  – напруження, які виникають в стержні при дії сили, що дорівнює вазі падаючого вантажу:

$$\sigma_{\text{ст.}} = G/F. \quad (1.115)$$

Отже, *визначення переміщень і напружень при динамічних навантаженнях зводиться до визначення переміщень і напружень при статичних навантаженнях і обчислення коефіцієнта динамічності.*

Якщо  $h = 0$ , тобто коли вантаж не падає, а прикладається раптово, тоді

$$\kappa_{\partial} = 2; \Delta \ell = 2\Delta \ell_{\text{ст.}} \text{ і } \sigma_{\text{дин}} = 2\sigma_{\text{ст.}}$$

тобто переміщення і напруження внаслідок дії миттєво прикладеної сили в два рази більше, ніж при статичній дії тієї самої сили.

З наведених формул (1.112) видно, що коефіцієнт динамічності  $\kappa_{\partial}$  зменшується, коли збільшується  $\Delta \ell_{\text{ст.}}$  (див. 1.108), тобто із зменшенням жорсткості пружної конструкції.

Тому для пом'якшення ударів широко застосовують пружини й ресори, що мають значну податливість (малу жорсткість).

Якщо висота падіння  $h$  значно перевищує  $\Delta \ell_{\text{ст.}}$ , то коефіцієнт динамічності можна обчислювати за наближеною формулою

$$\kappa_{\partial} = \sqrt{2h/\Delta \ell_{\text{ст.}}} \quad (1.116)$$

## Контрольні запитання до розділу 1.8

1) Яке навантаження називають статичним, а яке динамічним? Які існують види динамічного навантаження?

2) Яке явище називають втомленістю матеріалу?

3) Назвіть параметри, які характеризують цикл змінних напружень.

4) Як визначаються: середнє напруження, амплітуда, коефіцієнт асиметрії циклу?

5) Які цикли називають подібними?



6) При яких співвідношеннях максимальних і мінімальних напруженнях відбувається: асиметричний, симетричний і віднульовий цикли зміни напружень?

7) Який цикл змінних напружень найбільш небезпечний?

8) Яку характеристику міцності при змінних напруженнях називають границею витривалості?

9) Які фактори крім характеристик циклу впливають на величину границі витривалості?

10) Назвіть причину, яка викликає концентрацію напружень?

11) Як визначається теоретичний коефіцієнт концентрації напружень?

12) Яка умова міцності деталі при змінних напруженнях?

13) У чому полягає принцип Даламбера (принцип кінетостатики)? Як його застосовують при розв'язанні задач з урахуванням сил інерції?

14) Як визначаються переміщення і напруження при динамічних навантаженнях за допомогою коефіцієнта динамічності?

## 1.9 Стійкість стиснених стержнів

### 1.9.1 Поздовжній згин

У розрахунках на міцність і жорсткість, наведених у попередніх розділах, припускалося, що під час деформації конструкції між зовнішнім навантаженням і внутрішніми силами пружності була стійка форма рівноваги, тобто така, при якій малим збуджуючим діям відповідають малі відхилення статично навантаженої конструкції від початкової форми.

*Навантаження  $P_{кр}$ , при яких втрачається стійкість, називають критичним, а відповідні стан – критичним станом.* Небезпека втрати стійкості особливо велика для легких, тонкостінних конструкцій типу гнучких стержнів, пластинок і оболонок. Явища втрати стійкості різноманітні. Найважливіші такі випадки прояву нестійкості:

1) виникнення якісно нових форм рівноваги;

2) зникнення стійких форм рівноваги.

Прикладом може бути центральний стиск прямого пружного стержня (рис. 9.1). При невеликих значеннях стискаючої сили  $P < P_{кр}$  – прямолінійна форма стержня єдина й притому стійка форма рівноваги. Малим збудженням цієї форми, які виникають, наприклад, під час

невеликого додаткового поперечного навантаження, відповідають малі прогини.

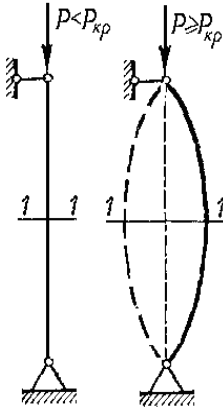


Рисунок 1.57

При критичному значенні стискаючої сили  $P_{кр}$  прямолінійна форма стає нестійкою й при збільшенні навантаження до моменту руйнування залишкові деформації нарастають надто швидко. Отже, при розрахунках на стійкість критичне навантаження подібно руйнівальному при розрахунках на міцність.

Згин, пов'язаний із втратою стійкості стержня прямолінійної форми, називається позовжнім згином.

Застосовуючи метод перерізів (переріз 1 – 1, рис. 1.57), упевнюємось, що внаслідок викривлення осі в поперечних перерізах стержня виникають два внутрішні силові фактори — позовжня сила  $N = P$  і згинаючий момент  $T$ . Отже, викривлений стержень зазнає одночасно деформацій центрального стиску й поперечного згину.

Критичний стан, який безпосередньо передуює руйнуванню, недопустимий у реальних умовах експлуатації. У зв'язку із цим визначення критичних навантажень є відповідальною частиною розрахунку конструкції й дає можливість уникнути втрати стійкості введенням відповідного допустимого коефіцієнта запасу стійкості.

Щоб забезпечити стійкість, необхідно, щоб стискаюча сила  $P$ , яка діє на стержень, була менша за припустиму силу  $[P]$ , тобто повинна виконуватись умова

$$P \leq [P], \quad (1.117)$$

$$\text{де} \quad [P] = P_{кр} / [n]_{ст.}; \quad (1.118)$$

$P_{кр}$  – критична сила;  $[n]_{ст.} > 1,0$  – припустимий коефіцієнт запасу стійкості.

Значення коефіцієнта запасу стійкості залежить від призначення стержня і його матеріалу. Звичайно, для сталей  $[n]_{ст.} = 1,8-3$ ; для чавунів  $[n]_{ст.} = 5-5,5$ ; для дерева  $[n]_{ст.} = 2,8-3,2$ .

### 1.9.2 Розрахунки стержнів на стійкість

Відповідно до (1.118) для розрахунків стиснених стержнів на стійкість треба знати способи визначення критичної сили  $P_{кр}$ . Наведемо *формулу Ейлера* для визначення критичної сили:

$$P_{кр} = \pi^2 E J_{\min} / \ell_{зв}^2, \quad (1.119)$$

де  $E$  – модуль пружності першого роду;

$J_{\min}$  – найменший з осьових моментів інерції перерізу, оскільки стержень викривляється в площині найменшої жорсткості, в чому легко впевнитись, стискаючи поздовжньою силою слюсарну лінійку;

$\ell_{зв} = \mu \ell$  – зведена довжина стержня;

$\ell$  – довжина стержня;

$\mu$  – коефіцієнт зведення довжини, який залежить від способу кріплення кінців стержня.

На рисунку 1.58 зображено схеми кріплення кінців стержня, які найчастіше застосовують, і наведено значення  $\mu$ :

а) стержень із шарнірно закріпленими кінцями, які можуть зближуватися;

б) нижній кінець жорстко закріплений, верхній вільний;

в) обидва кінці жорстко закріплені, але можуть зближуватися;

г) нижній кінець закріплений жорстко, верхній – шарнірно, кінці можуть зближуватися;

д) нижній кінець закріплений жорстко, верхній має «плаваюче» кріплення.

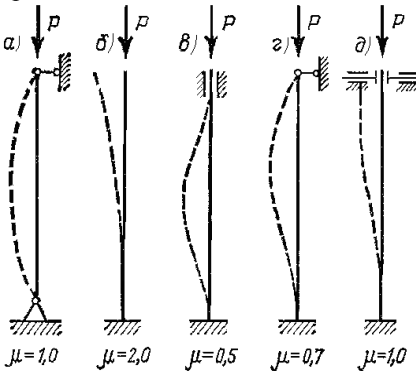


Рисунок 1.58

обидва кінці стержня.

Виведення формули Ейлера ґрунтується на законі Гука, який дійсний доти, поки напруження не перевищує границі пропорційності. Тому формулою Ейлера можна користуватися не завжди. Для визначення границь застосовності формули Ейлера знайдемо критичне напруження  $\sigma_{кр}$ , тобто напруження, яке виникає в поперечному перерізі стержня, площа якого  $F$ , під дією критичної сили:

$$\sigma_{кр} = P_{кр} / F = \pi^2 E J_{\min} / [(\mu \ell)^2 F]. \quad (1.120)$$

Зазначимо, що чим менше  $\mu$ , тим більша критична сила, а отже, і припустиме стискаюче навантаження. Наприклад, стискаюче навантаження стержня, жорстко закріпленого обома кінцями ( $\mu = 0,5$ ), може бути в 16 раз більше від навантаження стержня, закріпленого одним кінцем ( $\mu = 2$ ). Тому там, де це можливо, треба жорстко кріпити

Введемо поняття *найменшого радіуса інерції*  $i_{\min}$  поперечного перерізу стержня:

$$i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / F}. \quad (1.121)$$

Перетворимо формулу для  $\sigma_{кр}$ :

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / (\mu \ell / i_{\min})^2. \quad (1.222)$$

Вираз

$$\lambda = (\mu \ell / i_{\min}) \quad (1.123)$$

називають *гнучкістю стержня*. Це безрозмірна величина, яка характеризує вплив розмірів стержня й способу закріплення його кінців. Остаточоно

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2. \quad (1.124)$$

Формулою Ейлера можна користуватися тільки тоді, коли виконується умова

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{нц},$$

де  $\sigma_{нц}$  – границя пропорційності матеріалу стержня. Отже,

$$\lambda \geq \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{нц}}. \quad (1.125)$$

Величину, яка стоїть у правій частині нерівності, називають граничною гнучкістю й позначають  $\lambda_{ер} = \sqrt{\pi^2 E / \sigma_{нц}}$ .

Гранична гнучкість залежить лише від фізико-механічних властивостей матеріалу стержня й стала для даного матеріалу.

За допомогою поняття граничної гнучкості умову застосовності формули Ейлера можна записати у вигляді

$$\lambda \geq \lambda_{ер}, \quad (1.126)$$

тобто формула Ейлера застосовна тільки тоді, коли гнучкість стержня більша або дорівнює граничній гнучкості для матеріалу, з якого його виготовлено.

Наприклад, для маловуглецевої сталі Ст3, для якої  $\sigma_{нц} = 200$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\lambda_{ер} = 100$ . Отже, для стержнів із маловуглецевої сталі формула Ейлера може бути застосовна якщо  $\lambda \geq 100$ . Для чавуну  $\lambda_{ер} = 80$ , для дерева (сосна)  $\lambda_{ер} = 110$ .

Якщо гнучкість стержнів менша від наведених величин, то формула Ейлера вже не застосовується й користуються емпіричною формулою Ясинського:

$$\sigma_{кр} = a - b \lambda, \quad (1.127)$$

де  $a$ ,  $b$  – коефіцієнти, які залежать від матеріалу, їх беруть із таблиці 1.4, або з довідкових таблиць.

Зокрема, для маловуглецевої сталі Ст3 при гнучкостях  $\lambda_{ер} = 100$  відповідно буде  $a = 310$  МПа і  $b = 1,14$  МПа.

Таблиця 1.4

Матеріал	$\lambda_{cp}$	$a$	$b$
		МПа	
Ст2, Ст3	100	310	1,14
Ст5	100	464	3,26
Сталь 40	90	321	1,16
Кремениста сталь	100	589	3,82
Деревина (сосна)	110	29,3	0,194
Чавун	80	776	12,0

Якщо  $\lambda < 40$ , стержні розраховують тільки на міцність при простому стисканні, тобто за формулою (1.13):

$$\sigma = N/F \leq [\sigma]_{ст.}$$

Розрахунок стиснених стержнів на стійкість можна звести за формою до розрахунку на простий стиск. Розраховуючи стержневі конструкції, часто застосовують формулу

$$\sigma = N / \varphi F \leq [\sigma]_{ст.}, \quad (1.128)$$

де  $[\sigma]_{ст.}$  – основне припустиме напруження на стиск, а  $\varphi \leq 1,0$  – коефіцієнт поздовжнього згину, який називають також коефіцієнтом зменшення основного припустимого напруження при розрахунках на стійкість. Величина  $\varphi$  залежить від гнучкості стержня  $\lambda$  та його матеріалу, її визначають із таблиць. Деякі значення коефіцієнта поздовжнього згину  $\varphi$  наведені у таблиці 1.5.

Таблиця 1.5

Гнуч- кість $\lambda$	Коефіцієнт $\varphi$				Гнуч- кість $\lambda$	Коефіцієнт $\varphi$			
	Ст2 Ст3 Ст4	Ст5	Чавун	Деревина		Ст2 Ст3 Ст4	Ст5	Чавун	Деревина
0	1	1	1	1	120	0,45	0,36	-	0,22
20	0,96	0,95	0,91	0,97	140	0,36	0,29	-	0,16
40	0,92	0,89	0,69	0,87	160	0,29	0,24	-	0,12
60	0,86	0,82	0,44	0,71	180	0,23	0,19	-	0,10
80	0,75	0,7	0,26	0,48	200	0,19	0,16	-	0,08
100	0,6	0,51	0,16	0,31					

Формула (1.128) дає можливість обчислити силу, яка допускається:

$$N_{max} = [P] = \varphi F [\sigma]_{ст.} \quad (1.129)$$

Розрахунки показують, що найвигіднішими під час роботи стержнів на стиск є кільцеві й коробочні тонкостінні перерізи. Доведено, що заміна стиснених стержнів у вигляді кутиків і двотаврів трубчастими стержнями дає економію матеріалу до 20-40%.

**Приклад 1.18.** Перевірити на стійкість стоек, зображений на рисунку 1.59, якщо  $\ell = 3$  м,  $[n]_{\text{ст}} = 2$ , матеріал стійки СтЗ,  $P = 65$  кН,  $d = 60$  мм,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

*Розв'язання.* Визначаємо, враховуючи схеми на рисунку 1.60, для заданого закріплення кінців стійки коефіцієнт приведення довжини  $\mu = 1$ .

Для круга обчислюємо  $J_{\min} = \pi d^4 / 64 = \pi (60 \cdot 10^{-3})^4 / 64 = 6,36 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4$ ;  
 $F = \pi d^2 / 4$ ;

$$i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / F} = d / 4 = 60 \cdot 10^{-3} / 4 = 15 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Визначимо гнучкість стійки (9.7):

$$\lambda = \mu \ell / i_{\min} = 1 \cdot 3 / 15 \cdot 10^{-3} = 200.$$

Перевіряємо умову застосовності формули Ейлера (1.126):

$$\lambda = 200 > \lambda_{\text{кр}} = 100,$$

де  $\lambda_{\text{кр}} = 100$  – гранична гнучкість стержня для матеріалу сталь СтЗ.

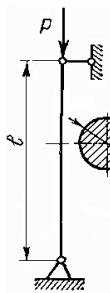


Рисунок 1.59

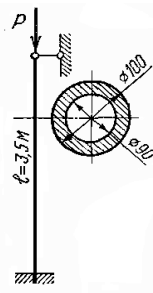


Рисунок 1.160

Отже, формулу Ейлера можна застосовувати. Обчислимо критичну силу (1.118):

$$\begin{aligned} P_{\text{кр}} &= \pi^2 E J_{\min} / (\mu \ell)^2 = \\ &= \pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 6,36 \cdot 10^{-7} (1 \cdot 3)^2 = \\ &= 139,5 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Визначимо коефіцієнт запасу стійкості стійки:

$$n_{\text{ст}} = P_{\text{кр}} / P = 139,5 / 65 = 2,14$$

і перевіряємо виконання умови міцності (1.12)

$$n_{\text{ст}} = 2,14 > [n]_{\text{ст}} = 2, \text{ отже, стійкість стійки достатня.}$$

**Приклад 1.19.** Знайти критичну силу  $P_{\text{кр}}$  і припустиме навантаження  $[P]$  для стійки кільцевого перерізу зі сталі СтЗ (рис. 1.60), якщо припустиме напруження на стиск  $[\sigma]_{\text{ст}} = 140$  МПа. Визначити, з яким коефіцієнтом запасу стійкості  $n_{\text{ст}}$  працюватиме стійка під навантаженням, яке дорівнює припустимому.

*Розв'язання.* Обчислимо момент інерції кільцевого перерізу:

$$J_{\min} = \pi (D^4 - d^4) / 64 = \pi [(100 \cdot 10^{-3})^4 - (90 \cdot 10^{-3})^4] / 64 = 169 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Площа поперечного перерізу стійки

$$F = \pi (D^2 - d^2) / 4 = \pi [(100 \cdot 10^{-3})^2 - (90 \cdot 10^{-3})^2] / 4 = 14,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Знаходимо найменший радіус інерції перерізу (1.9.6):

$$i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / F} = \sqrt{169 \cdot 10^{-8} / 14,9 \cdot 10^{-4}} = 3,36 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Для заданого способу кріплення кінців стояка (рис. 1.58,г) коефіцієнт зведення довжини  $\mu = 0,7$ . Визначаємо гнучкість стояка (1.123):

$$\lambda = \mu \ell / i_{\min} = 0,7 \cdot 3,5 / (3,36 \cdot 10^{-2}) = 72,5.$$

Перевіряємо умову застосовності формули Ейлера (1.126):

$$\lambda = 72,5 < \lambda_{cr} = 100,$$

де  $\lambda_{cr} = 100$  – гранична гнучкість стержня для матеріалу сталь Ст3.

Отже, формула Ейлера не може бути застосовна.

Розраховуємо критичне напруження за формулою Ясинського (1.127). З табл. 9.1 знаходимо для сталі Ст3:  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа.

Тоді  $\sigma_{cr} = a - b \lambda = 310 - 1,14 \cdot 72,5 = 227$  МПа.

Визначимо критичну силу:

$$P_{cr} = F \sigma_{cr} = 14,9 \cdot 10^{-4} \cdot 227 \cdot 10^6 = 340 \cdot 10^3 \text{ Н} = 340 \text{ кН}.$$

Допустиме навантаження  $[P]$  визначимо за допомогою коефіцієнта поздовжнього згину  $\varphi$  за формулою (9.13).

Для сталі Ст3 коли  $\lambda = 72,5$ , то  $\varphi = 0,86 - (0,86 - 0,75) \times \times (72,5 - 60) / (80 - 60) = 0,79$  (див. табл. 9.2 – значення  $\varphi$  знайдено методом лінійної інтерполяції по граничним даним інтервалу у який попадає  $\lambda = 72,5$ ). Далі обчислюємо:

$$[P] = \varphi F [\sigma]_{ст} = 0,79 \cdot 14,9 \cdot 10^{-4} \cdot 140 \cdot 10^6 = 164,8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 164,8 \text{ кН}.$$

Коефіцієнт запасу стійкості  $n_{ст}$  визначаємо зі співвідношення

$$n_{ст} = P_{cr} / [P] = 340 / 164,8 = 2,05.$$

Згідно з (1.85) одержаний коефіцієнт запасу є допустимим коефіцієнтом запасу стійкості стержня  $[n]_{ст} = 2,05$ .

### Контрольні запитання до розділу 1.9

1. Який вид деформації прямого стержня називають поздовжнім згином?
2. Яке навантаження на стиснутий стержень називають критичним?
3. Що називається приведеною довжиною стиснутого стержня і від чого вона залежить?
4. Як визначається гнучкість стиснутого стержня?
5. Як записують умову стійкості поздовжньо стиснутого стержня?
6. У чому суть інженерної методики розрахунку стиснутого стержня за коефіцієнтом  $\varphi$ ? Що собою являє цей коефіцієнт і в яких межах він змінюється?

## 2 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ З ТЕОРІЇ МАШИН ТА МЕХАНІЗМІВ

### 2.1 Класифікація і структурний аналіз механізмів

*Загальні означення.* Мета створення машин – підвищення продуктивності і полегшення фізичної й розумової праці людини.

*Машиною* називається створений людиною пристрій для полегшення фізичної праці, збільшення її продуктивності чи повної заміни людини у виконанні нею трудових функцій. Кожна машина найчастіше складається з трьох основних частин – двигуна, передавального механізму і виконавчого органу. Передавальний механізм служить для перетворення різних видів руху і забезпечення робочих функцій виконавчого органу машини.

Машини допомагають у виконанні роботи і в управлінні виробництвом. Основними типами машин є *робочі* (технологічні, транспортні), *енергетичні* та *інформаційні* (контрольно-керуючі, логічні і кібернетичні) машини.

*Технологічні* машини – змінюють форму, розміри і властивості виробів або матеріалів.

*Транспортні* машини призначені для переміщення вантажів.

*Енергетичні* машини перетворюють один вид енергії в інший.

*Контрольно-керуючі* машини використовують для автоматизації виробництва.

*Логічні і кібернетичні* машини призначені для підвищення продуктивності розумової праці.

Складовими частинами машин є механізми, призначені для перетворення одних рухів в інші. Теорія машин і механізмів вивчає будову, кінематику і динаміку механізмів і машин. Ця дисципліна розв'язує дві основні задачі. Перша задача пов'язана з дослідженням механізмів і називається *аналізом*, друга присвячена створенню механізмів із заданими структурними, кінематичними і динамічними властивостями і називається *синтезом* механізмів.

*Механізмом* прийнято називати систему деталей (твердих тіл), яка призначена для перетворення руху одного чи кількох тіл у потрібні рухи інших тіл. У сучасних машинах застосовують найрізноманітніші механізми. За характером руху, що здійснюють окремі точки деталей, механізми поділяють на *плоскі* і *просторові*. У плоских механізмах точки всіх деталей рухаються в площинах, паралельних одній нерухомій площині. У просторових механізмах ця умова не зберігається. У курсі основна увага приділена плоским механізмам.



Деталь у механізмі називається *ланкою механізму*. Механізм (двигун внутрішнього згоряння), що показаний на рисуюнок 2.1,а, складається з чотирьох ланок. Ланка 1, яка може обертатись, називається *кривошипом*; ланка 2, що здійснює складний рух, – *шатун*; ланка 3, що рухається поступально – *повзуном*. Нерухому ланку 4 прийнято називати *стояком*.

Розглянутий механізм називають кривошипно-повзунковий, його кінематична схема зображена на рисуюнок 2.1,б. Такі механізми дуже поширені в сучасній техніці, наприклад, у компресорах, поршневих двигунах, помпах, механізмах відкривання дверей та ін.

У кожному механізмі розрізняють початкову, ведучу й ведену ланки. *Початковою* називають ланку, закон руху якої задається. *Ведуча* – це ланка, до якої прикладені рушійні сили, що приводять механізм у рух. Ланка, що здійснює рух, для виконання якого призначений механізм, називається *веденою*.

*Кінематична пара* – це рухоме з'єднання двох ланок, що перебувають в безпосередньому дотиканні. Поверхні, лінії, точки ланки, по яких вона може дотикатися до інших ланок, утворюючи кінематичну пару, називають елементами кінематичної пари. Від геометричних форм елементів кінематичної пари залежить ступінь обмеження руху однієї кінематичної ланки кінематичної пари відносно іншої.

За характером дотикання ланок кінематичні пари поділяють на *нижчі* і *вищі*. У нижчих кінематичних парах ланки дотикаються між собою по поверх-

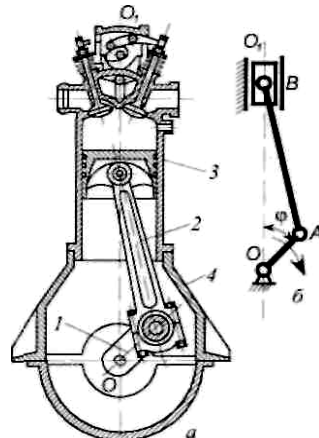


Рисунок 2.1

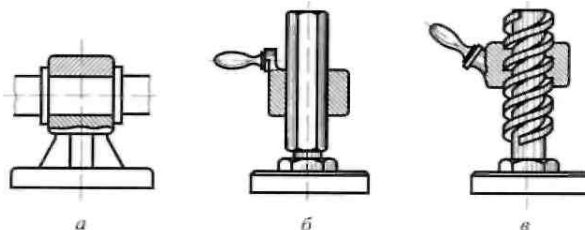


Рисунок 2.2

ні, а у вищих – по лінії або в точці. Залежно від характеру відносного руху ланок нижчі кінематичні пари можуть бути *обертовими*

(рис. 2.2,а), поступальними (рис. 2.2,б) і гвинтовими (рис. 2.2,в). Вищі кінематичні пари дозволяють отримати більш різнома-нітні види взаємного руху їх ланок, ніж нижчі пари.

Кінематичні пари розрізняють залежно від числа умов зв'язку, що накладаються ними на відносний рух ланок. Розглянемо класифікацію кінематичних пар для плоских механізмів. Кожна ланка, що здійснює плоский рух, має три ступені вільності. Якщо кінематична пара накладає на ланку  $s$  умов зв'язку на відносний рух, то ця ланка має число ступенів вільності

$$H = 3 - s.$$

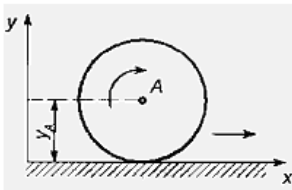


Рисунок 2.3

з'єднання ланок). Клас кінематичної пари визначається числом умов зв'язку  $s$ , які накладає ця пара на відносний рух ланок. На рисунок 2.3 зображена вища кінематична пара 1-го класу, яка утворена колесом і рейкою. В цій кінематичній парі число умов зв'язку  $s=1$  ( $y_A = \text{const}$ ), а число ступенів вільності ланок  $H=2$  (можливе переміщення колеса вздовж осі  $X$  і його обертання навколо осі  $A$ ).

Нижча кінематична пара 2-го класу (рис. 2.4) утворена кривошипом і стояком. Тут число умов зв'язку  $s = 2$  ( $x_A = \text{const}$ ,  $y_A = \text{const}$ ), а число ступенів вільності ланок  $H = 1$  – можливе обертання ланки навколо осі  $A$ .

Група ланок, у якій окремі ланки з'єднані між собою кінематичними парами, називається *кінематичним ланцюгом*. Кінематичні ланцюги бувають прості і складні, замкнуті і відкриті. У простому кінематичному ланцюзі кожна ланка входить не більше ніж у дві кінематичні пари. Складний кінематичний ланцюг має хоча би одну ланку, яка входить більш ніж у дві кінематичні пари.

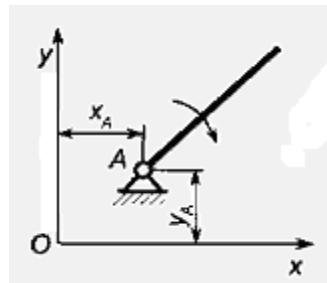


Рисунок 2.4

На підставі наведених вище означень і понять можна сформулювати, що *механізм* – це кінематичний ланцюг з однією

нерухомою ланкою, в якому під час заданого руху однієї або декількох ланок всі інші ланки здійснюють цілком конкретні переміщення.

**Структурний аналіз механізмів.** Сучасні методи аналізу і синтезу механізмів пов'язані з їхнього структурною класифікацією.

Структурна класифікація Ассура-Артоболевського є однією з найраціональніших класифікацій плоских важільних механізмів з нижчими парами. Перевагою цієї класифікації є те, що вона пов'язується з методами кінематичного, силового та динамічного дослідження механізмів.

В основі структурної класифікації лежить поняття *ступінь рухомості механізму*, яке характеризує число ступенів вільності механізму відносно нерухомої ланки (стояка). Якщо в плоскому механізмі число рухомих ланок дорівнює  $n$ , то загальне число ступенів вільності цих ланок (якщо вони не утворюють кінематичних пар) дорівнює  $3n$ . Ланки в механізмі можуть утворювати нижчі і вищі кінематичні пари. Кожна нижча пара накладає на ланку дві умови зв'язку, а кожна вища пара – одну умову зв'язку. Якщо в механізмі число нижчих пар дорівнює  $p_2$ , а вищих  $p_1$ , то ступінь рухомості плоского механізму

$$W = 3n - 2p_2 - p_1. \quad (2.1)$$

Формула (2.1) називається *структурною формулою* плоского механізму, оскільки величини, що входять в цю формулу (число ланок і кінематичних пар), визначають його структуру.

Таким чином, ступінь рухомості механізму дорівнює числу незалежних координат, які визначають положення всіх його ланок. Для кривошипно-повзункового механізму (рис. 2.1), що має один ступінь рухомості ( $n = 3$ ;  $p_2 = 4$ ;  $p_1 = 0$ ;  $W = 1$ ), положення всіх ланок залежить від значення однієї координати кута  $\varphi$ , утвореного кривошипом і стояком. Для роботи цього механізму одній із його ланок - початковій ланці необхідно задати один незалежний рух. Для роботи механізмів з двома й більше ступенями рухомості треба задати число незалежних рухів, яке дорівнює ступеню рухомості цих механізмів. Ступінь рухомості механізму визначає число його початкових ланок.

За класифікацією Ассура-Артоболевського кожний механізм розглядають як складну систему, до якої входить стояк, початкові ланки й статично означені групи ланок з нульовим ступенем рухомості (груп Ассура) відносно ланок, до яких ці групи приєднуються.

Початкові ланки і стояк утворюють групу, ступінь рухомості якої дорівнює ступеню рухомості механізму. Цю групу називають групою початкових ланок або *початковим механізмом*. Група початкових

ланок, що належать механізму з одним ступенем рухомості, зображена на рисунку 2.5. Вона складається з початкової ланки 1 і стояка 4.

У групах Ассура є певна залежність між числом ланок і числом кінематичних пар. Цю залежність можна отримати з виразу (2.1), характерного для груп Ассура тільки з нижчими парами ( $p_1 = 0$ )

$$\begin{aligned} W &= 3n - 2p_2 = 0, \\ p_2 &= 3n/2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

звідки

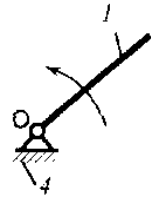


Рисунок 2.5

З виразу (2.2) видно, що число ланок у групи Ассура завжди повинно бути парним, оскільки число кінематичних пар  $p_2$  може бути тільки цілим.

Якщо задатись значеннями  $n$  у формулі (2.2), то можна отримати ряд величин  $p_2$ , що відповідають певним групам Ассура. Наприклад, якщо  $n = 2$ , то група Ассура буде мати число кінематичних пар  $p_2 = 3$ . Така група (рис. 2.6,а) називається діадою або

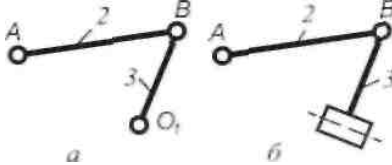


Рисунок 2.6

двоповодковою групою. Застосовуючи різні варіанти заміни обертових кінематичних пар поступальними, можна одержати ряд модифікацій діади. Так, наприклад, замінивши в діаді на рисунку 2.6,а

обертову кінематичну пару  $O$ , поступальною, отримаємо модифікацію діади (рис. 2.6,б), яка застосовується, зокрема, при створенні кривошипно-повзункового механізму.

У групах Ассура розрізняють *внутрішню* й *зовнішню* кінематичні пари. Внутрішніми називають кінематичні пари, за допомогою яких ланки групи з'єднуються між собою. Кінематичні пари, якими група Ассура приєднується до ланок механізму, називають зовнішніми кінематичними парами. У зображеній на рис. 2.6,а групі Ассура кінематична пара  $B$  є внутрішньою, а кінематичні пари  $A$  і  $O$ , - зовнішніми. Зовнішні кінематичні пари в цій групі є умовними, оскільки вони появляються після приєднання групи до механізму.

Приєднання групи Ассура до будь-якої системи не змінює ступеня рухомості цієї системи. Приєднавши групу Ассура до групи початкових ланок, отримаємо механізм із ступенем рухомості, який дорівнює числу початкових ланок.

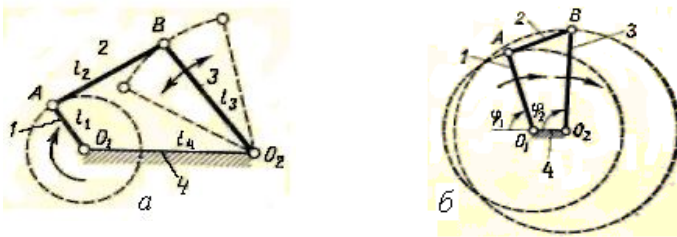


Рисунок 2.7

Наприклад, в результаті приєднання діади (рис. 2.6,а) до групи початкових ланок, показаної на рисунку 2.1.5, можна отримати чотириланковий кривошипно-коромисловий механізм (рис. 2.7). Залежно від співвідношення довжин ланок 1, 2, 3 і 4 такого механізму характер руху ланок буде різним. Якщо ланка 1 може повертатися відносно нерухомого шарніра  $O_1$  на  $360^\circ$  то вона називається кривошипом (рис. 2.7,а). Це можливо, якщо ланка 1 буде найкоротшою, а довжини решти ланок задовольняють нерівність  $(l_1 + l_4) < (l_2 + l_3)$ . Такий механізм називають однокривошипним, а його ланки 2 і 3 є шатуном і коромислом, які здійснюють відповідно складний плоскопаралельний рух (ланка 2) і коливальний рух навколо нерухомої осі  $O_2$  (ланка 3).

Якщо зі стояком 4 з'єднана найкоротша ланка (рис. 2.7,б), то механізм перетворюється на двокривошипний і ланки 1 і 3 зможуть повертатися навколо осей  $O_1$  і  $O_2$  на повний оберт.

У випадку, коли протилежні ланки мають однакову довжину і утворюють паралелограм, то такий механізм застосовують у локомотивах для передавання обертання веденим колесам. Ланка 2 в такому механізмі рухається поступально.

Одним із методів подальшого розвитку групи Ассура є так званий метод «розвитку повідка». З формули 2.2 видно, що наступна, складніша, група Ассура матиме число ланок  $n = 4$  і число кінематичних пар  $p_2 = 6$ . Таку групу можна отримати з діади (рис. 2.6,а) розвиванням, наприклад, повідка 3. Для цього до повідка 3 необхідно приєднати ще одну діаду, а до шарнірів  $C$  і  $O_1$  – повідки 4 і 5. У результаті одержимо нову систему, що називається триповідковою групою (рис. 2.8). В цій групі ланка 3 входить до складу трьох кінематичних пар і називається базисною. Користуючись цим методом, можна отримати чотири-, п'ятиповідкову й більш складні групи. Ассур запропонував віднести такі групи до першого класу.

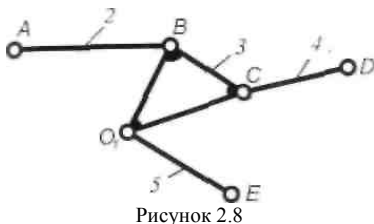


Рисунок 2.8

Групи Ассура мають певний порядок. *Порядок групи* визначається кількістю елементів зовнішніх кінематичних пар. Діада, наприклад, має другий порядок. Триповідкова група (рис. 2.8) має третій порядок.

Поділяючи механізм на групи, треба від'єднувати від механізму найбільш прості групи Ассура так, щоб кожний раз залишався кінематичний ланцюг зі ступенем рухомості, який дорівнює ступеню рухомості досліджуваного механізму (рис. 2.9).

Згідно з класифікацією Ассура клас і порядок механізму визначається класом і найбільшим порядком групи вищого класу з нульовим ступенем рухомості. Для прикладу розглянемо структурний аналіз механізму коливного конвеєра (рис. 2.9,а). У цьому механізмі  $n = 5$ ,  $p_2 = 7$ ,  $p_1 = 0$ . Згідно з формулою (2.1) механізм має ступінь рухомості  $W = 1$  і, відповідно, має одну початкову ланку.

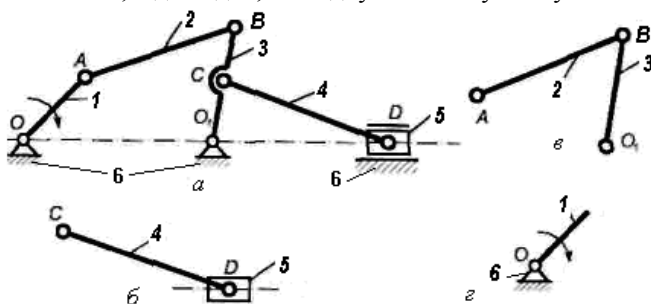


Рисунок 2.9

Поділ механізму на групи треба починати з від'єднання групи ланок 4 і 5 (рис. 2.9,б). Ця група є групою Ассура першого класу другого порядку. Частина що лишилася, являє собою кривошипно-коромисловий механізм з якого можна виділити групу ланок 2 і 3. Ця група також є групою Ассура першого класу другого порядку (рис. 2.9,в). Після від'єднання груп Ассура залишається група початкових ланок, або початковий механізм, який складається з початкової лапки 1 і стояка 6 (рис. 2.9,г). Таким чином, розглянутий механізм є механізмом першого класу другого порядку.

## 2.2 Деякі поширені види механізмів

У сучасній техніці застосовують дуже багато різноманітних видів механізмів. Беручи до уваги кінематичні, конструктивні і функціональні властивості, механізми поділяють на важільні, кулачкові, фрикційні, зубчасті та ін.

**Важільні механізми.** Важільними називають такі механізми, у яких геометричне замикання ланок зі складним рухом здійснюється в обертальних і поступальних кінематичних парах. Такі механізми застосовують переважно для перетворення обертального руху початкової ланки в коливний чи зворотно-поступальний рух веденої ланки.

Серед важільних механізмів найбільше поширення мають кривошипно-повзункові (рис. 2.10,а,б) та кулісні (рис. 2.10,в,г,д,е,є) механізми. На рисунку 2.10 зображені схеми аксіального (рис. 2.10,а) і дезаксіального (рис. 2.10,б) кривошипно-повзункового механізму, який використовують для перетворення обертального руху кривошипа ОА в зворотно-поступальний рух повзуна В. Повзун і кривошип з'єднуються за допомогою ланки АВ, що здійснює складний плоский рух. Ланка АВ утворює з ланками ОА й повзуном В нижчі обертальні кінематичні пари. Дезаксіал (зміщення) І вводиться переважно для зменшення тиску повзуна на нерухому ланку (стояк) і називається ексцентриситетом.

У центральному механізмі (рис. 2.10,а) тривалість прямого і зворотного ходів повзуна однакова і відповідає повороту кривошипа на кут  $180^\circ$ . Кути  $\varphi_p$  і  $\varphi_x$  робочого і холостого ходів повзуна в нецентральному механізмі (рис. 2.10,б) відрізняються від  $180^\circ$  звичайно не більше ніж на  $30^\circ$ , а їх відношення не більше від 1,5.

На рисунку 2.10,в зображено кривошипно-кулісний механізм. Кулісою називають рухому ланку  $O_2B$ , що є напрямною для каменя (повзуна) А, який рухається по ній. Якщо в кулісному механізмі довжина кривошипа  $O_1A$  (рис. 2.10,в) більша від міжцентрової відстані  $O_1O_2$ , то куліса  $O_2B$  може робити повний оберт і тому її називають обертовою. У протилежному разі маємо механізм з коливною кулісою (рис. 2.10,г). Механізми з обертовою кулісою перетворюють рівномірний обертальний рух кривошипа  $O_1A$  на нерівномірне обертання куліси  $O_2B$ . Верхню частину оберту – поворот на кут  $\varphi_p$  (рис. 2.10,г) куліса робить з меншою кутовою швидкістю, ніж кривошип, а нижню – з більшою. Механізми з коливною кулісою (рис. 2.10,г) перетворюють неперервне обертання кривошипа  $O_1A$  на коливальний рух куліси  $O_2B$  з різною

тривалістю прямого і зворотного ходів (пропорційною кутам  $\varphi_P$  і  $\varphi_X$ ).  
Різниця інтервалів зростає з наближенням довжини ланки  $O_1 O_2$  до  $O_1 A$ .

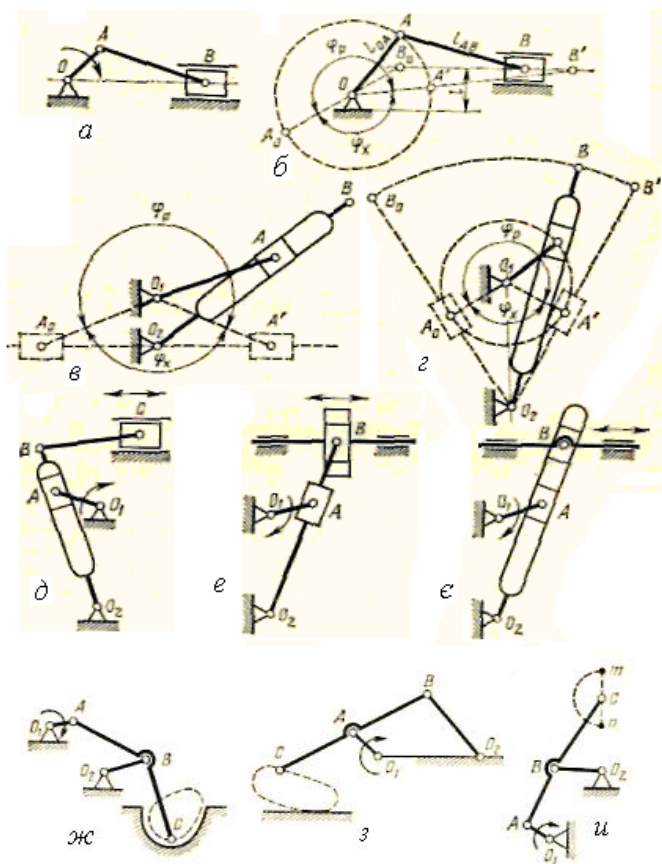


Рисунок 2.10

У техніці звичайно використовують шестиланкові кулісні механізми; їх виготовляють за однією із схем (д, е, є), показаних на рисунок 2.10. Ці механізми мають забезпечити зворотно-поступальний рух повзуна.

Траєкторії точок важільних механізмів, зв'язаних із шатуном  $ABC$  (рис. 2.10, ж, з, и), називають шатунними кривими. Відповідно добираючи форми і довжини ланок механізму, можна домогтися точного або приблизного відтворення необхідних траєкторій точок діючих механізмів,



наприклад, для перемішування тіста (рис. 2.10,д), ворущіння сіна (рис. 2.10,е), переміщення кіноплівки (рис. 2.10,є) тощо. В останньому випадку потрібно, щоб крива на певній ділянці  $m-n$  переходила в пряму.

**Кулачкові механізми.** У машинах з автоматичним керуванням, що працюють за певним технологічним циклом, широко використовують так звані кулачкові механізми, які дають змогу циклічно змінювати напрям і швидкість руху веденої ланки за певним законом. Основні ланки кулачкового механізму – це кулачок 1 (рис. 2.10,а) і штовхач 2, які мають силове замикання. Залежно від виду руху спряжена з кулачком ланка називається або штовхачем (рис. 2.11,а,б), або коромислом (рис. 2.11,в,г).

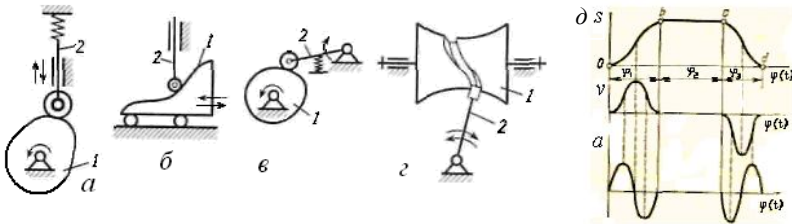


Рисунок 2.11

Кулачок і коромисло з'єднуються зі стояком за допомогою обертальних кінематичних пар, штовхач - за допомогою поступальної пари. Для зменшення втрат на тертя штовхач і коромисло іноді мають циліндричні ролики. Конструктивно силове замикання ланок здійснюється за рахунок сил пружності попередньо здеформованої пружини, рідше – за рахунок сили ваги штовхача чи коромисла. Кулачкові механізми застосовують для перетворення обертального (рис. 2.11,а,в,г) або зворотно-поступального руху (рис. 2.11,б) початкової (ведучої) ланки 1 у зворотно-поступальний (рис.2.11,а,б) або у зворотно-обертальний (рис. 2.11,в,г) рух веденої ланки 2 навіть із зупинками заданої тривалості. На рисунку 2.11,д показано, наприклад, для схеми кулачка за рисунком 2.11,а графіки переміщення  $s$ , швидкості  $v$  і прискорення  $a$  штовхача в межах фазових кутів повороту кулачка 1.

Від штовхача рух передається якомусь виконавчому органу машини чи механізму: контактам реле, плунжеру масляного насоса, різцевому супорту верстата-автомата тощо.

Поступальний рух передається кулачкам механічно від якоря соленоїда чи від штока гідро- або пневмоциліндра. Кулачкові

механізми забезпечують рух штовхача практично за будь-яким законом.

*Фрикційні механізми.* В фрикційних механізмах (рис. 2.12) рух від ведучої ланки до веденої передається за рахунок сили тертя, що виникає при контакті ланок.

Найпростіша фрикційна передача (механізм) зображена на рисунок 2.13,а. Вона складається із двох циліндричних котків 1 і 2, що утворюють зі стояком 3 обертальні кінематичні пари. Взаємне притискання котків забезпечується силою пружності пружини.

До фрикційних механізмів належать і варіатори (рис. 2.13,б), які забезпечують плавну зміну кутової швидкості веденого диска 2 при рівномірному обертанні ведучого котка 1 завдяки переміщенню котка й зміні відстані  $R$ . Фрикційний механізм може бути виконаним і з гнучкими ланками. Його застосовують для передавання обертового руху між валами, що знаходяться на значній відстані. Гнучкими ланками можуть бути приводні паси, канати. На рисунку 2.13,в подана найпростіша передача з гнучкою ланкою, яка називається пасовою передачею.

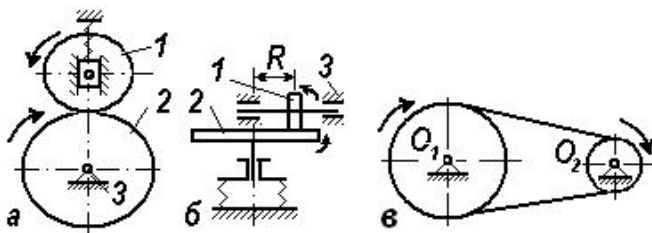


Рисунок 2.13

*Зубчасті механізми.* Зубчастими називаються механізми (передачі), які складаються із зубчастих коліс 1 і 2 (циліндричних чи конічних), що взаємно зачеплені за допомогою зубців, що розташовані на ободках цих коліс (рис. 2.14,а,б). Обертальний рух між колесами передається за рахунок взаємодії зубців. На відміну від фрикційної передачі тут виключене взаємне проковзування ланок.

Зубчасті механізми часто застосовують у машинах для передавання обертового руху між валами, що мають нерухомі або рухомі осі. В останньому випадку механізми називають *планетарними*. На рисунку 2.14,б зображено найпростіший планетарний механізм. У цьому механізмі вісь обертання колеса 3, яка з'єднана з валом колеса 1 за допомогою ланки 2, здійснює обертальний рух. Колесо 1 у такому разі називається центральним або сонячним, а колесо 3 – сателітом.

Планетарні передачі складаються іноді з коліс зовнішнього і внутрішнього зачеплення (рис. 2.14,в). Тут центральне колесо *1* перебуває в зовнішньому зачепленні із сателітами *3*, які обертаються навколо осей, установлених на водилі *2*. Водило, яке несе сателіти, також обертається. Сателіти перебувають у внутрішньому зачепленні з нерухомим колесом *4* і разом з водилом обертаються навколо сонячного колеса.

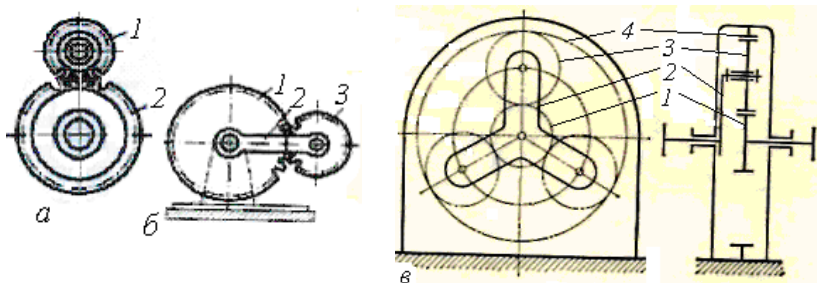


Рисунок 2.14

Ведучою ланкою в планетарній передачі може бути або сонячне колесо, або водило. Це дає можливість при тій самій схемі передачі діставати різні передаточні числа.

*Хвильові механізми.* Такі передачі (рис. 2.15) за принципом дії можна віднести до планетарних механізмів з деформованим сателітом.

У хвильовій передачі навантаження розподіляється по зонах зачеплення зі збільшеною кількістю зубців порівняно з іншими зубчастими механізмами. Генератор хвиль *2* роликami *4* надає деформованому колесу *1* форму еліпса і воно входить у зачеплення з жорстким колесом *3* по більшій осі еліпса і виходить із зачеплення по меншій осі. Під час обертання генератора хвиль, який є ведучою ланкою передачі, зона зачеплення зубів гнучкого і жорсткого елементів переміщується разом з роликami. Завдяки різниці кількості зубів за кожний повний оберт генератора хвиль гнучкий елемент повертається відносно жорсткого на деякий кут.

Передаточне число хвильової передачі може бути великим – до 1000 в одному ступені. Ці передачі відзначаються високою кінематичною точністю (бо немає зазорів у зачепленні зубів) і при малому габариті можуть передавати значні навантаження. Їх маса в 7-9 раз менша, ніж звичайних передач. ККД передачі близько 0,8.

*Механізми переривчастого руху* (рис. 2.16). У різних машинах і приладах використовують механізми, в яких ведена ланка рухається в одному напрямі з періодичними зупинками. Такі механізми

називають механізмами переривчастого руху. До них належать мальтійські, важільно-крокові і храпові механізми.

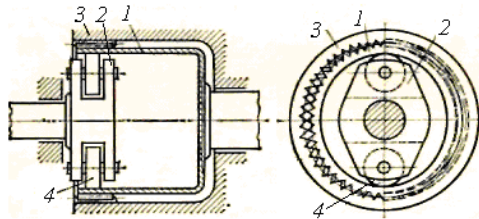


Рисунок 2.15

Мальтійський механізм складається з ведучого кривошипа *1* (рис. 2.16,а) з пальцем або роликом *A* на кінці мальтійського хреста *2*. Під час обертання кривошипа *1* палець *A* входить у паз *D* мальтійського хреста *2* і повертає його на певний кут.

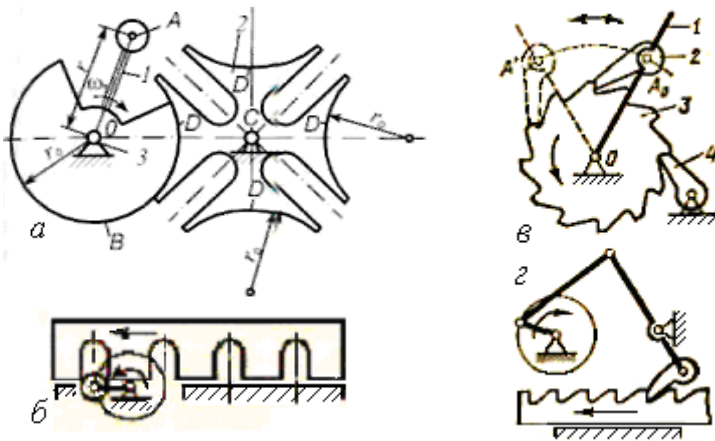


Рисунок 2.16

Коли палець виходить із паза, то положення мальтійського хреста фіксується циліндричною ділянкою диска *B*, який прикріплений до кривошипа і входить у вирізи відповідної форми. Отже, мальтійський хрест обертається при повертанні кривошипа на деякий кут і стоїть нерухомо при подальшому повертанні кривошипа. Тобто під час

роботи механізму ланка 1 обертається рівномірно, а ланка 2 то обертається, то зупиняється.

Такий механізм, наприклад, застосовують в кіноапаратурі для перервного переміщення кінострічки. Мінімально допустима кількість радіальних пазів мальтійського хреста  $z = 3$ , максимальна, звичайно, не більша від  $z = 12$ . Коли  $z = \infty$ , то маємо рейковий механізм (рис. 2.16,б).

Найбільш типовий храповий механізм складається з ведучої ланки 1 (рис. 2.16,в), на якій на шарнірі  $O$  встановлено стопор 2, що впирається в зуби веденої ланки 3, яку називають храповим колесом.

При коливальному русі ланки 1 під час робочого ходу (коли ланка 1 обертається проти годинникової стрілки) стопор 2 повертає храпове колесо, а під час зворотного ходу під дією тертя або додаткового стопора 4 ведена ланка залишається нерухомою. Якщо радіус храпового колеса нескінченно великий, то воно переходить у рейку (рис. 2.16,г), якій стопор надає переривчастого поступального руху.

Храпові механізми мають два ступені вільності, тому храпове колесо або рейка можуть вільно переміщуватись, обганяючи ведучу ланку, якщо цьому не перешкоджають передбачені конструктивні пристрої (наприклад, додатковий стопор 4 на рис. 2.16,в).

*Гвинтові механізми.* Передача гвинт – гайка призначена для перетворення обертального руху в поступальний, а іноді навпаки. При цьому як гвинт, так і гайка можуть мати або один з названих рухів, або обидва рухи одночасно.

Переваги передач гвинт – гайка: можливість забезпечення повільного руху при великому виграші в силі, простота конструкції, здатність сприймати великі навантаження, велика точність переміщень. До недоліків слід віднести велике тертя в різьбовій парі, що зумовлює підвищене спрацювання, і низький ККД. Основними складовими ланками найпростішого гвинтового механізму (рис. 2.17,а) є гвинт 1, що має зовнішню гвинтову нарізку, і гайка 2 з внутрішньою гвинтовою нарізкою. Якщо одна із ланок такого механізму закріплена, то при обертанні іншої маємо її переміщення вздовж осі гвинтової ланки. Гвинтові механізми застосовують, наприклад, у гвинтових домкратах (рис. 2.17,б) для піднімання вантажів. У такому механізмі обертання вертикального гвинта 1 за допомогою важеля 2 дозволяє здійснювати піднімання або опускання вантажу, а обертання горизонтального гвинта 3 важелем 4 – переміщення гвинта 1 й вантажу вліво чи вправо.

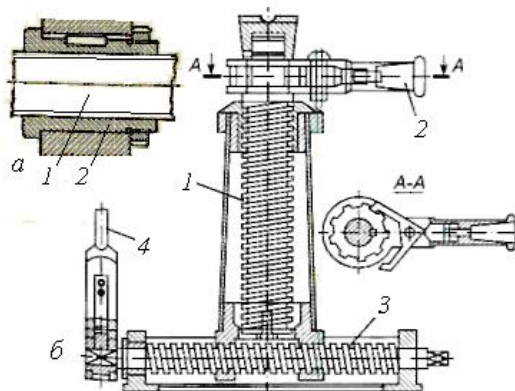


Рисунок 2.17

У техніці гвинтові механізми застосовують для створення великих зусиль або для забезпечення точних переміщень робочих елементів деяких пристроїв.

## 2.3 Кінематичний і динамічний аналізи механізмів і машин

**Вимоги до механізмів.** *Якістю механізму* називають сукупність властивостей, що визначають ступінь придатності використання його за призначенням. Тобто якість конструкції механізму визначається простотою його конструкції, технологічністю, економічністю (високим ККД), розмірами та масою, надійністю й довговічністю.

Технологічність механізму визначається зручністю виготовлення і зборки його деталей, а також використанням стандартизованих й уніфікованих складальних одиниць.

Надійність механізму характеризується ймовірністю безвідмовної роботи протягом даного часу й умов експлуатації, а також необхідною міцністю деталей.

Міцність деталей механізму визначається відсутністю великих небажаних деформацій і небезпечних напружень, що приводять до руйнування деталей.

Процес створення і проектування механізмів і машин загалом складається з різних етапів, в тому числі і синтезу та аналізу об'єкта розробки.

*Синтезом механізму* називається створення схеми механізму і визначення розмірів його ланок за наперед заданими функціональними характеристиками механізму. Схему механізму створюють чи

вибирають на підставі багатовікового досвіду людства у виготовленні і експлуатації різноманітних механізмів та машин, які підтвердили свою надійну і безвідмовну роботу. Цей досвід відображено у відповідній технічній і довідковій літературі. Розмір ланок на схемі механізму позначають для забезпечення відповідних функціональних і кінематичних характеристик механізму, зокрема, положення ведених ланок залежно від руху початкової ланки, траєкторії руху окремих точок і характеру зміни переміщень і швидкостей цих точок та ін.

*Аналіз* механізму полягає в дослідженні кінематичних і динамічних властивостей механізму за його заданою схемою та розмірами. Основними складовими частинами аналізу механізмів та машин є такі:

- кінематичний аналіз, основним завданням якого є знаходження положень ланок і траєкторій, що описуються точками ланок, а також визначення характеру зміни швидкостей і прискорень точок ланок залежно від закону руху ведучих ланок механізму.

- динамічний аналіз, або розв'язання задачі визначення сил, що діють на ланки механізму, якщо відомий закон руху механізму, або встановлення закону руху механізму за відомими силами, що діють на ланки механізму.

Поряд з цим в задачах динаміки механізмів і машин розглядаються і такі питання: визначення сил тертя в кінематичних парах, визначення коефіцієнта корисної дії машини, регулювання ходу машини, зрівноважування сил інерції ланок та балансування обертових деталей та ін.

***Кінематичний і динамічний аналізи механізмів і машин*** здійснюються графічними, графоаналітичними і аналітичними методами, які детально розглянуті у курсі теоретичної механіки. При цьому використовуються залежності, які дають змогу обчислити швидкості і прискорення точок механізму, кутові швидкості і прискорення його ланок, а при динамічному (силовому) аналізі знаходяться зусилля в шарнірах і сполученнях ланок з використанням принципу Даламбера (метод кінетостатики).

Графічні методи дають прості і наочні (але менш точні) розв'язки, тоді як аналітичні методи аналізу часто приводять до дуже громіздких формул, а отримання остаточних результатів неможливе без використання електронної обчислювальної техніки. Оскільки номенклатура різних типів і видів механізмів сучасних машин досить широка, то конкретна інформація про методи розв'язування задач кінематичного і динамічного аналізу механізмів і машин дається у повному курсі теорії механізмів і машин.

Поділ теорії механізмів і машин на аналіз і синтез має умовний характер, оскільки вибір схеми механізму і машини в цілому, визначення їхніх параметрів часто виконують за допомогою порівняльного аналізу різних механізмів для виконання машиною певних функцій. Цей порівняльний аналіз можливих варіантів становить тепер основу методів синтезу з використанням сучасної обчислювальної техніки. Крім того, у процесі синтезу механізму потрібно виконувати перевірні розрахунки, використовуючи методи аналізу. Однак з методичної точки зору зручніше розрізняти задачі аналізу і синтезу механізмів, оскільки цей поділ дозволяє об'єднати задачі теорії механізмів в однорідні групи за ознакою спільності методів.

## **2.4 Поняття про надійність і довговічність машин**

*Надійність* – властивість об'єкта виконувати задані функції, зберігаючи в часі значення експлуатаційних показників у заданих межах, що відповідають установленим режимам та умовам використання, технічного обслуговування, транспортування та зберігання машини. Надійність виробів характеризується їхньою безвідмовністю, ремонтопридатністю.

*Роботоздатність* – стан об'єкту, при якому він здатний виконувати властиві йому функції, зберігаючи значення заданих параметрів у межах, що встановлені нормативною документацією.

*Довговічність* – властивість об'єкта зберігати роботоздатність до настання крайнього стану при встановленій системі технічного обслуговування та ремонту.

*Ремонтотпридатність* – пристосованість об'єкта до запобігання та виявлення причин його відмов, пошкоджень та усунення їхніх наслідків виконанням ремонтів і технічним обслуговуванням.

*Наробка* – тривалість роботи або об'єм виконаної об'єктом роботи.

*Відмова* – втрата роботоздатності об'єкта.

*Безвідмовність* – властивість об'єкта неперервно зберігати роботоздатність протягом деякого, наперед установленого, проміжку часу або деякої наробки.

***Показники надійності та довговічності.*** До основних показників надійності належать такі:

*Імовірність безвідмовної роботи  $P(t)$*  – це ймовірність того, що протягом заданого періоду не виникає відмова об'єкту;



*Інтенсивність*  $\lambda(t)$  – умовна щільність ймовірності виникнення відмови об'єкта для певного моменту часу за умови, що до нього відмова невиникла, тобто це число відмов у одиницю часу, віднесене до числа справних виробів у даний момент.

Розглянемо деякі співвідношення для визначення показників надійності.

Нехай  $N_0$  – число випробуваних об'єктів,  $n_t$  – число об'єктів, що мають відмови за час  $t$ ,  $N_0 - n_t = N_t$  – число справних об'єктів за час  $t$ ,  $F(t)$  – ймовірність відмови. Тоді ймовірність безвідмовної роботи за час  $t$

$$P(t) = N_t / N_0 = 1 - n_t / N_0 = 1 - F(t). \quad (2.1)$$

Графік ймовірності безвідмовної роботи  $P(t)$  та ймовірності відмови  $F(t)$  показані на рисунку 2.18,а. На рис. 2.18,б зображена крива щільності розподілу напрацювання об'єкта до відмови:

$$f(t) = -\frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt}. \quad (2.2)$$

Якщо  $\Delta n_t$  – число об'єктів, що мають відмови від  $t$  до  $t + \Delta t$ , то

$$\Delta F(t) = \Delta n_t / N_0.$$

За умови, що  $\Delta t \rightarrow 0$ , маємо

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \approx \frac{\Delta n_t}{N_0 \Delta t}. \quad (2.3)$$

Отже, щільність розподілу  $f(t)$  може бути наближено визначена статистично як відношення числа об'єктів із відмовами в одиницю часу до числа випробуваних об'єктів. Для певного моменту часу інтенсивність відмов

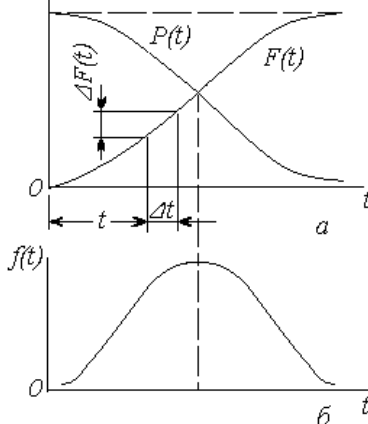


Рисунок 2.18

$$\lambda(t) = \Delta n_t / (N_t \Delta t) \lambda(t). \quad (2.4)$$

Інтенсивність відмов  $\lambda(t)$  наближено може бути визначена статистично як відношення числа відмов в одиницю часу до числа справних об'єктів за час напрацювання  $t$ .

На основі рівностей (2.1 – 2.4) маємо

$$\lambda(t) = \frac{\Delta n_t}{N_t \Delta t} \frac{N_0}{N_t} = \frac{N_0}{N_t} f(t) = -\frac{f(t)}{P(t)} = -\frac{dP(t)}{dt} \frac{1}{P(t)}.$$

Із цього виразу після інтегрування від 0 до  $t$  отримаємо формулу для визначення ймовірності безвідмовної роботи:

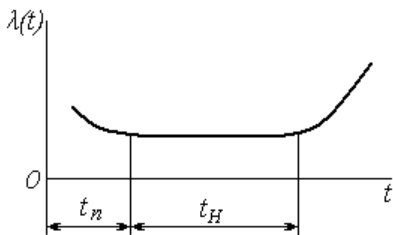


Рисунок 2.19

$$P(t) = \exp \left( - \int_0^t \lambda(t) dt \right). \quad (2.5)$$

Записаний вираз – основне рівняння теорії надійності. Він показує зв'язок імовірності безвідмовної роботи об'єкта з інтенсивністю відмов, тобто дозволяє за інтенсивністю відмов

визначити ймовірність безвідмовної роботи.

Залежність  $\lambda(t)$  (2.5), що характерна для машин та їхніх деяких складальних одиниць, показана на рисунку 2.19. Період припрацювання  $t_n$  характеризується підвищеними значеннями інтенсивності відмов. Надалі настає період  $t_H$  нормальної експлуатації, для якого інтенсивність відмов значно менша, і ці відмови мають випадковий характер. Величина  $\lambda(t)$  у цей період змінюється мало. Пізніше внаслідок спрацювання, старіння, атомних пошкоджень та ін. починається швидке збільшення інтенсивності відмов.

Якщо складний об'єкт можна розглядати у вигляді послідовного з'єднання 1, 2, 3, ..., k його елементів, що характерне для більшості механічних передач, то згідно з теоремою множення ймовірностей безвідмовної роботи  $P(t)$  об'єкта дорівнює добутку ймовірностей безвідмовної роботи  $P_i(t)$  окремих його елементів:

$$P(t) = P_1(t) P_2(t) \dots P_k(t) = \prod_{i=1}^k P_i(t). \quad (2.6)$$

З (2.6) випливає, що надійність складного об'єкта при послідовному з'єднанні окремих елементів завжди менша від надійності довільного із цих елементів і знижується зі збільшенням числа елементів.

Наприклад, якщо число елементів  $k = 10$  з однаковою ймовірністю безвідмовної роботи  $P_i(t) = 0,97$ , то ймовірність безвідмовної роботи об'єкта  $P(t) = 0,97^{10} = 0,74$ .

При паралельному з'єднанні  $k$  елементів в об'єкті забезпечується дублювання роботи елементів із відмовами роботою резервних елементів. Відмова системи настає лише в разі відмови всіх елементів. Для такого об'єкта

$$P(t) = 1 - \prod_{i=1}^k [1 - P_i(t)]. \quad (2.7)$$

Якщо число паралельно з'єднаних елементів  $k = 2$  з однаковою ймовірністю безвідмовної роботи  $P_i(t) = 0,90$ , то ймовірність безвідмовної роботи об'єкта

$$P(t) = 1 - (1 - 0,9)^2 = 0,99.$$

Метод підвищення надійності об'єктів через установлення додаткових елементів, що не працюють у нормальних умовах, а починають роботу в моменти відмови системи, називають *резервуванням*. Прикладом резервування є встановлення на автомобілі запасного колеса або використання здвоєних коліс у ведучих мостах автомобіля.

До важливих показників довговічності належать такі:

*ресурс* – напрацювання об'єкта від початку експлуатації або від її відновлення після ремонту до настання критичного стану;

*середній ресурс* – математичне сподівання ресурсу;

*гама процентний ресурс* – це напрацювання, протягом якого об'єкт не досягає крайнього стану із заданою ймовірністю  $\gamma$  у відсотках. Очевидно  $\gamma = 100P(t)$ . Для багатьох виробів масового виробництва  $\gamma = 90\%$ , тобто використовується 90 %-й ресурс роботи технічних об'єктів (наприклад, підшипники кочення). Під час проектування слід намагатись створювати високонадійні конструкції, які розраховані на економічно оптимальну довговічність. Але при цьому коефіцієнти запасу міцності не повинні бути невиправдано високі, а конструкція занадто ускладненою.

**Шляхи підвищення надійності машин.** Високу надійність машин забезпечують на всіх етапах їхнього створення та експлуатації. Назвемо деякі із заходів, що сприяють підвищенню надійності:

1. Створення таких структурних схем машини, щоб число складових елементів було мінімальним, а надійність кожного елемента була достатньо високою.

2. Використання якісних комплектуючих виробів та матеріалів із стабільними характеристиками. Комплектуючі вироби повинні бути перевірені у відповідних умовах експлуатації, а матеріали – не втрачати своїх властивостей під впливом зовнішнього середовища.

3. Широке застосування уніфікованих елементів, а також стандартних виробів, що виготовляються спеціалізованими заводами, які зарекомендували себе як високонадійні в інших машинах.

4. Резервування, тобто введення додаткових елементів, які дублюють роботу найважливіших елементів машини.

5. Оснащення машини контрольними та сигнальними пристроями, що запобігають виникненню аварійних ситуацій, або таких, що не дозволяють експлуатацію машини з відхиленнями

робочих режимів.

6. Розробка відповідних систем технічних оглядів та обслуговування машин при експлуатації.

Фактичні показники надійності для спроектованої та виготовленої машини можуть бути встановлені тільки за результатами випробувань моделей та дослідних зразків.

## **Контрольні запитання до розділу 2**

1. Який пристрій називається машиною?
2. З яких основних частин складається машина?
3. Для чого призначені механізми?
4. Що таке кінематична пара і як поділяються кінематичні пари?
5. Які механізми називають важільними механізмами? Наведіть приклади таких механізмів.
6. Для чого призначені кулачкові механізми?
7. Які сили передають рух від ведучої ланки до веденої у фрикційних механізмах? Наведіть приклади таких механізмів.
8. Які механізми називають зубчастими?
9. Які механізми називають планетарними?
10. Які переваги мають хвильові механізми?
11. Для чого призначені механізми переривчастого руху? Наведіть приклади таких механізмів.
12. Для чого призначені передачі гвинт — гайка? Наведіть приклади таких механізмів.
13. Якими властивостями визначають ступінь придатності використання механізму за призначенням?
14. Що таке синтез і аналіз механізму?
15. Що таке кінематичний аналіз механізму і які параметри при такому аналізі знаходяться?
16. Що таке динамічний аналіз механізму?
17. Що таке надійність об'єкта?
18. Назвіть основні заходи, що сприяють підвищенню надійності об'єкту.

### 3 ДЕТАЛІ МАШИН

Деталлю називається виріб, виготовлений з однорідного за назвою і маркою матеріалу без застосування складальних операцій.

Машини і механізми складаються з великої кількості деталей, з яких можна виділити такі, що є майже в усіх машинах (болти, гайки, вали, зубчасті колеса, шпонки тощо). Це деталі загального призначення.

Деталі, специфічні для певного типу машин (поршні, шатуни, лопаті турбін тощо) називають деталями спеціального призначення – їх вивчають у спеціальних курсах.

Будь-яка машина, механізм або прилад складаються з окремих деталей, які об'єднуються в складальні одиниці.

Складальна одиниця – виріб, складові частини якого з'єднують між собою на підприємстві-виготовлювачі, застосовуючи складальні операції.

Досконалість конструкції деталей машин оцінюють за їх роботоздатністю й економічністю. Роботоздатність виробу забезпечується його надійністю, тобто властивістю виконувати задані функції, зберігаючи задані експлуатаційні показники протягом потрібного проміжку часу.

Основними критеріями роботоздатності є міцність, жорсткість, стійкість проти спрацювання. Розміри деталей залежать від величини і характеру діючого навантаження, а також від умов роботи деталі. У розрахунках на міцність важливу увагу приділяють вибору допустимих напружень і вибору коефіцієнту запасів міцності.

Жорсткість деталей – це їх здатність чинити опір зміні форми і розмірів під дією навантажень. Для деяких деталей, наприклад, валів, встановлено норми жорсткості, які забезпечують задовільну роботу підшипників і деталей передач.

Стійкість проти спрацювання – властивість матеріалу чинити опір спрацюванню. Якщо деталі спрацюються, їх міцність може зменшитись внаслідок зменшення розмірів перерізу і збільшення напружень. Можливе також повне механічне спрацювання (наприклад, реборд коліс трамвая, робочих органів землерийних машин), зростання шуму (у швидкохідних транспортних і технологічних машинах). Стійкість проти спрацювання деталей забезпечується підвищенням твердості, вибором оптимальних параметрів шорсткості поверхні, захистом від забруднення й подаванням мастила до тертьових поверхонь. Стійкість проти спрацювання підшипників ковзання значно підвищується, якщо забезпечено режим рідинного тертя.

Економічність виробів визначається їх вартістю й експлуатаційними витратами. Тому основними вимогами до виробів з точки зору економічності є: найменша витрата матеріалу, застосування недефіцитних матеріалів, технологічність конструкції, високий механічний ККД, найменші габаритні розміри, відповідність стандартам і малі затрати під час експлуатації.

Розміри деталей визначають з урахуванням згаданих вимог відповідно до проектних розрахунків. Іноді розміри деталей визначають конструктивно. У цих випадках роботоздатність деталей оцінюють за результатами перевірних розрахунків.

### 3.1 Матеріали для виготовлення деталей машин

Вибір матеріалів залежить від призначення машин, призначення деталей, способу їх виготовлення та ряду інших факторів. Правильний вибір матеріалу значною мірою впливає на якість і вартість деталей і машини в цілому.

Вибираючи матеріал деталі, враховують:

- 1) необхідність забезпечення міцності і жорсткості при мінімальній масі;
- 2) відповідність матеріалу умовам експлуатації (наприклад, його антифрикційні властивості, теплостійкість, стійкість проти спрацювання тощо);
- 3) вартість і дефіцитність матеріалу;
- 4) відповідність технологічних властивостей матеріалу способу виготовлення деталі (придатність для штампування, зварюваність, ливарні властивості, оброблюваність на верстатах і ін.).

Таблиця 3.1

Марка чавуну	Границя міцності (не менше), МПа		Твердість за Брінелем, НВ
	на розтяг	на згин	
СЧ 12-28	120	280	143-229
СЧ 18-36	180	360	170-229
СЧ 22-44	220	440	170-241
СЧ 32-52	320	520	187-255
СЧ 38-60	380	600	207-269

Деталі машин виготовляють з металевих і неметалевих матеріалів. Метали, які застосовують у машинобудуванні, поділяються на чорні і кольорові.

Чорні метали, які поділяють на чавуни і сталі, дуже поширені через їх міцність і жорсткість, а також порівняно низьку вартість,

Сірий чавун (табл. 3.1) – поширений ливарний матеріал, який застосовують у машинобудуванні. З нього виливають різні корпусні деталі, кронштейни, маховики, шків, важелі тощо. Механічні властивості виливок із сірого чавуну деяких марок наведені в табл. 3.1.

Конструкційні сталі поділяють на сталі вуглецеві звичайної якості, вуглецеві якісні, леговані.

Вуглецеві сталі звичайної якості використовують для деталей, які термічно не обробляються. Вуглецеву якісну сталь використовують для деталей, які зазнають термічної обробки. З легованих сталей виготовляють особливо важливі деталі машин, до яких ставлять підвищені вимоги щодо міцності, жароміцності тощо. Стальні виливки використовують для виготовлення деталей складної форми.

Механічні властивості найбільше використовуваних у машинобудуванні марок сталі наведено в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Марка сталі	Термообробка або стан	Твердість		$\sigma_{sp}$	$\sigma_m$	$\sigma_1$
		HB	HRC	МПа		
Ст3	Гарячекатана	–	–	380	220	170
Ст5	- // -	156	–	500	260	220
15	- // -	143	–	380	230	170
- // -	Цементована,	–	56–62	450	250	–
35	Гарячекатана	163–192	–	540	320	220
- // -	Загартована,	–	30– 40	1000	650	–
45	Гарячекатана	235–262	–	610	360	250
- // -	Загартована,	–	40–45	1200	950	340
65Г	Відпалена	235–	–	750	440	–
- // -	Загартована,	–	42–48	1500	1250	590
20Х	Цементована,	–	56–63	650	400	–
40Х	Поліпшена	269–302	–	800	520	340
- // -	Загартована,	–	45–50	1000	800	550
30ХГТ	- // -	–	40–45	1500	1300	950
30ХГСА	- // -	–	30–35	1100	850	510
35ХГСА	- // -	–	45–50	1650	1300	960
ШХ15	- // -	–	58–64	2200	1700	660
38Х2МЮА	Загартована,	–	HV850-	1050	900	620
Примітка: $\sigma_{sp}$ , $\sigma_m$ , $\sigma_1$ – відповідно: тимчасовий опір, границя текучості, границя						

Кольорові метали, які використовують у машинобудуванні, поділяють переважно на сплави міді (бронзи, латуні, бабіти) і легкі сплави (сплави алюмінію і магнію).

Бронза – сплав міді з оловом, свинцем, залізом або алюмінієм. Бронзи використовують як антифрикційний матеріал, що добре працює в умовах механічного спрацювання, наприклад, для виготовлення вкладишів підшипників і вінців черв'ячних коліс.

Латунь – сплав міді із цинком, який має добрі ливарні властивості, легко штампується і обробляється на верстатах.

Бабіт – сплав міді, олова, свинцю і сурми. Цей матеріал має високі антифрикційні властивості, його застосовують для вкладишів підшипників ковзання.

Легкі сплави – сплави алюмінію, магнію. Наприклад, ливарний алюмінієвий сплав силумін містить до 14% кремнію, має добрі ливарні властивості; дюралюміній містить до 5,5% міді. Сплави магнію з алюмінієм, міддю, нікелем, цинком мають добрі ливарні властивості, малу питому вагу й легко обробляються. З них виготовляють корпусні деталі й малонавантажувані деталі машин і приладів.

До неметалевих матеріалів, які використовують у машинобудуванні, належать дерево, гума, шкіра, азбест, металокераміка, пластмаси.

Пластмаси застосовують у машинобудуванні завдяки їх легкості, міцності, стійкості проти дії агресивних середовищ, фрикційним властивостям. Позитивною властивістю всіх пластмас є їх здатність формуватися при порівняно невисоких температурах, що дає можливість виготовляти вироби складної форми високопродуктивними методами. Заміна металів пластмасами значно зменшує трудомісткість і вартість машинобудівної продукції. Із пластмас виготовляють різні порівняно малонавантажувані деталі: корпуси, зубчасті колеса, шків, вкладиші підшипників, втулки, маховички, рукоятки.

Негативною властивістю пластмас є їх здатність до так званого старіння. Старіння супроводжується поступовою зміною з часом механічних характеристик і навіть розмірів пластмасових деталей.

### **Контрольні запитання до розділу 3.1**

1. Які властивості враховують при виборі матеріалу деталі?
2. Які матеріали належать до чорних металів? Їх основні властивості й область застосування.
3. Які матеріали належать до кольорових металів?



4. Основні властивості й область застосування мідних сплавів (бронзи, латуні, бабіти).
5. Основні властивості й область застосування легких сплавів (сплави алюмінію, магнію).
6. Пластмаси – основні властивості й область застосування.

## 3.2 Рознімні й нерознімні з'єднання деталей машин

З'єднання деталей поділяються на дві основні групи: рознімні й нерознімні.

*Рознімні* з'єднання (різьбові, шпонкові, шліцові та ін.) допускають багаторазове складання і розбирання без руйнування деталей.

*Нерознімні* з'єднання (зварні, заклепочні, клейові та ін.) можна розібрати, лише зруйнувавши з'єднувальні елементи.

### 3.2.1 Загальні відомості і конструкції різьбових з'єднань

Різьбовими називають з'єднання, які виконують за допомогою деталей, що мають різьбу. Широке використання різьбових з'єднань зумовлене їхньою простотою, високою несучою здатністю, надійністю, а також зручністю з'єднання та роз'єднання деталей.

Використання різьбових з'єднань обмежене через наявність численних концентраторів напружень, що зменшує їх міцність при дії змінних напружень.

Різьбу можна нарізати вручну мітчиками або плашками, а також на верстатах різцем, спеціальними різьбонарізними головками або фрезами. У масовому виробництві застосовують накатування різьби на різьбонакатних верстатах. Цим високопродуктивним методом виготовляють більшість стандартних кріпильних деталей із зовнішньою різьбою.

Зазначимо, що накатана різьба міцніша за різьбу, нарізану різцем, бо при накатуванні волокна металу не перерізуються і зовнішня поверхня різьби наклепується.

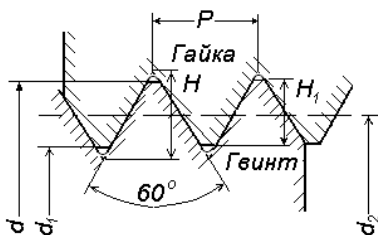


Рисунок 3.1

Основні параметри різьби (рис. 3.2 – 3.3):  $d$  – зовнішній (номінальний) діаметр різьби;  $d_1$  – внутрішній діаметр;  $P$  – крок різьби (відстань між однойменними сторонами двох сусідніх витків, виміряна вздовж осі);  $t$  – хід різьби (величина відносного осьового переміщення гвинта або гайки за один оберт; число заходів  $n$ , тобто число ниток різьби, що припадає на її хід. Для однозахідної різьби (рис. 3.2, а) крок і хід дорівнюють один одному; для багато-західної різьби (рис. 3.2, б)  $t = pn$ ).

За призначенням різьби поділяють на кріпильні (рис. 3.1), які використовують для скріплення деталей; кріпильно-ущільнювальні, призначені для герметичного скріплення деталей, і різьби, які використовують для передавання руху, наприклад, у передачах гвинт – гайка (рис. 3.2).

Різьби з дрібним кроком через малу висоту профілю менше ослаблюють нарізану частину стержня, і тому їх застосовують переважно на високонапружених валах, а також у точній механіці і в приладобудуванні. Такі різьби мають, крім того, вищу опірність самовідгвинчуванню.

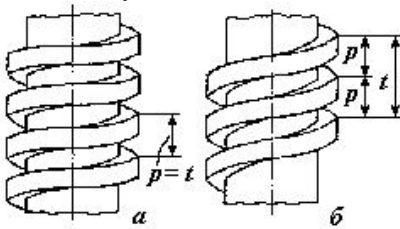


Рисунок 3.2

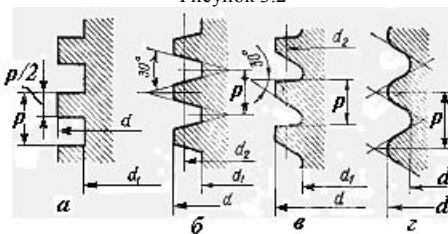


Рисунок 3.3

На рисунку 3.3 зображено профілі різьб: прямокутної (а), трапецеїдальної (б) і упорної (в), які застосовують для вантажних гвинтів домкратів, ходових гвинтів металорізальних верстатів тощо.

На залізничному транспорті, а також для цоколів електричних ламп і в деяких інших випадках застосовують круглу різьбу (рис. 3.3, г).

Для з'єднання труб використовують особливу трикутну різьбу з

профільним кутом  $\alpha=55^\circ$ , яка забезпечує герметичне з'єднання. Ця різьба стандартизована і називається трубною.

**Кріпильні різьби** застосовують у деталях різьбових з'єднань. Залежно від форми поверхні, на якій нарізана різьба, розрізняють

циліндричні, трубні та круглі різьби. Використовують найчастіше циліндричні метричні різьби.

*Метрична різьба* (рис. 3.1) є основною кріпильною різьбою. Всі її розміри задають в міліметрах. Така різьба має трикутний профіль витків з кутом профілю  $60^\circ$ . Параметри метричної різьби:

$d$  – зовнішній (номінальний) діаметр різьби;

$d_1$  – внутрішній діаметр;

$d_2$  – середній діаметр (діаметр уявного циліндра, поверхня якого розташована так, що ширина вітка дорівнює ширині впадини);

$P$  – крок різьби;

$H = 0,866P$  – теоретична висота профілю вітка різьби;

$H_1 = 0,541P$  – робоча висота профілю, на якій дотикаються витки гвинта і гайки;

число заходів для кріпильних метричних різьб  $n = 1$ ;

$\psi$  – кут підйому гвинтової лінії по середньому діаметру, який визначається з співвідношення  $\operatorname{tg} \psi = Pn/(\pi d_2)$ .

Метричні різьби бувають з нормальним або малим кроком. Так, для різьби із зовнішнім діаметром  $d = 20$  мм, крім різьби з нормальним кроком  $P = 2$  мм, передбачені різьби з малим кроком: 1,5; 1,0; 0,75 і 0,5 мм, для яких відповідно зменшується глибина різьби та кут підйому гвинтової лінії  $\psi$ .

Позначення метричної різьби: M20 – метрична різьба з нормальним кроком зовнішнім діаметром  $d = 20$  мм;

M20 x 1,5 – метрична різьба з малим кроком  $P = 1,5$  мм і зовнішнім діаметром  $d = 20$  мм.

Основні параметри метричних різьб регламентовані стандартами.

### **Кріпильні різьбові**

**деталі.** Для з'єднання деталей використовують болти 1 (рис. 3.4,а), гвинти 4 (рис. 3.4,б) або шпильки 5 (рис. 3.4,в). Звичайно, під гайки 3 підкладають шайби 2.

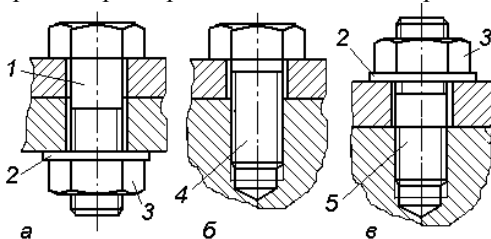


Рисунок 3.4

Використання болтів для з'єднання деталей не вимагає нарізування різьби. Гвинти та шпильки використовують в тих випадках, коли застосування болтів неможливе.

Для підвищення надійності з'єднання деталей і запобігання самовідгвинчування при дії змінних навантажень, вібрацій, ударів використовують різноманітні стопорні пристрої.

Найчастіше застосовують такі пристрої (рис. 3.5):

1) встановлюють контргайки (а) або пружинні шайби (б), які створюють додатковий натяг і тертя в різьбовому з'єднанні. Пружинна шайба, крім того, зменшує вплив вібрації на тертя в різьбі;

2) жорстке скріплення болта і гайки за допомогою шплінта (в) або дротини (г);

3) жорстке з'єднання гайки з деталлю за допомогою спеціальної шайби (д) або планки (е) тощо.

### 3.2.2 Розрахунки різьбових з'єднань на міцність

Стандартні кріпильні деталі сконструйовані рівномісними за напруженнями зрізу в різьбі, за напруженнями розтягу в різьбовій частині стержня і в місці переходу в головку. Тому, звичайно, при розрахунках різьбових з'єднань визначають тільки діаметр стержня кріпильної деталі за умовою міцності на розтяг.

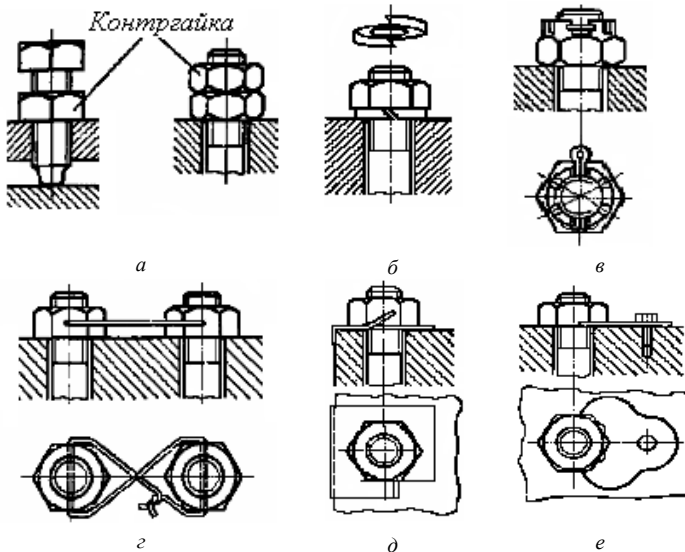


Рисунок 3.5

Небезпечним перерізом стержня з'єднання є поперечний переріз діаметра  $d_1$  різьбової частини, площа котрого  $A = \pi d_1^2/4$ . Умова міцності стержня болта на розтяг

$$\sigma_p = N/A \leq [\sigma]_p. \quad (3.1)$$

З цієї умови отримаємо внутрішній діаметр різьби  $d_1$

$$d_1 \geq \sqrt{4N/(\pi[\sigma]_p)}. \quad (3.2)$$

Тут  $N$  – поздовжня сила в перерізу болта,  $[\sigma]_p$  – допустимі напруження на розтяг для матеріалу болта. Отримане значення  $d_1$  округлюють до більшого стандартного, за яким з таблиць встановлюють номінальний діаметр  $d$  стержня болта.

Основна трудність у розрахунках полягає у визначенні поздовжньої сили  $N$  у з'єднанні. Розглянемо деякі випадки розрахунків з'єднання деталей.

**З'єднання незатягнутим болтом, що навантажений зовнішньою осьюовою силою.** Прикладом такого з'єднання може бути кріплення вантажної петлі (рис. 3.6). У цьому з'єднанні болт не має попередньої затяжки (між деталями є зазор). Під час навантаження петлі в стержні болта виникає деформація розтягу, а поздовжня сила в перерізі стержня  $N = F$ . При розрахунку міцності болта використовують залежність (3.1) або (3.2).

**З'єднання затягнутим болтом, без зовнішнього навантаження.**

Такі з'єднання (рис. 3.7) використовують, наприклад, коли треба забезпечити кріплення кришки люка, яка не зазнає тиску рідини або газу. Під час затягування з'єднання стержень болта розтягується осьюовою силою  $F_o$  і одночасно скручується моментом сил тертя в різьбі  $M_T$ .

Напруження розтягу  $\sigma_p = F_o/A = F_o/(\pi d_1^2/4)$ .

Найбільше напруження кручення  $\tau_k = M_T/W_p$ ,

де  $A = \pi d_1^2/4$  – площа поперечного перерізу;

$W_p = 0,2 d_1^3$  – полярний момент опору перерізу болта;

$M_T = 0,5 F_o d_2 \operatorname{tg}(\psi + \varphi')$  – момент тертя у різьбі;

$\psi$  – кут підйому різьби;

$\varphi'$  – зведений кут тертя в різьбі.

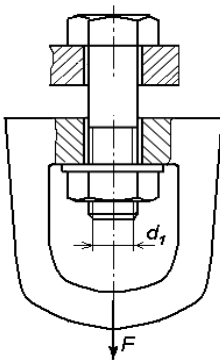


Рисунок 3.6

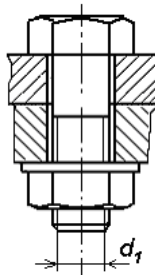


Рисунок 3.7

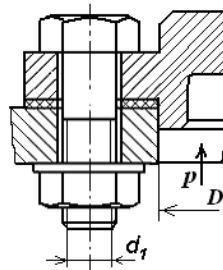


Рисунок 3.8

Отже, напруження кручення  $\tau_k = 0,5 F_o d_2 \operatorname{tg}(\psi + \varphi')/0,2d_1^2$ .  
 Еквівалентні напруження (за енергетичною теорією міцності)

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma_p^2 + 3\tau_k^2} \leq [\sigma]_p.$$

Підставляючи значення усіх величин дістанемо для болтів зі стандартною метричною різьбою

$$\sigma_{екв} \approx 1,3 \sigma_p.$$

Отже, скручування болта під час затягування можна враховувати коефіцієнтом  $\beta$ , який усереднено для метричних різьб має значення  $\beta = 1,3$ . У такому випадку поздовжня розрахункова сила, котра розтягує стержень болта

$$N = \beta F_o.$$

Тобто внутрішній діаметр різьби  $d_1$  з (3.2)

$$d_1 \geq \sqrt{4 \cdot 1,3 F_o / (\pi [\sigma]_p)}. \quad (3.3)$$

Отже, болт, який працює на розтяг і кручення, можна розраховувати як на розтяг за збільшеною в 1,3 рази силою затягування.

**Розрахунок затягнутого болтового з'єднання, навантаженого зовнішньою осьовою силою.** Розглядуваний випадок болтового з'єднання стосується, наприклад, кріплення болтами чи шпильками фланців або кришок резервуарів, трубопроводів, циліндрів тощо, які працюють під тиском. З'єднання з попереднім затягуванням можуть бути з ущільнювальною прокладкою (рис. 3.8) або без неї. Основна вимога, яка ставиться до такого з'єднання – не повинно бути зазору під час навантаження (щоб не розкрився стик).

Під час затягування з'єднання болти (або шпильки) видовжуються, а прокладка і фланці стискаються. Болт і з'єднувані деталі при цьому навантажені силою затягування  $Q$ . Потім до з'єднання прикладена зовнішня осьова сила  $P$ . Під дією цієї сили болт видовжиться. На таку саму величину зменшиться стиск з'єднуваних деталей і навантаження на болт з боку деталей відповідно зменшиться. Тому сумарне навантаження на болт  $P_\Sigma \leq Q + P$ . Оскільки зміна навантаження на болт з боку деталей пов'язана із силою  $P$ , умовились вважати, що частину сили  $P$  сприймає болт, решту – стик.

Позначимо  $\chi$  – коефіцієнт зовнішнього навантаження, що показує, яку частину зовнішнього навантаження  $P$  сприймає болт. Тоді

$$\chi P \lambda_\delta = (1 - \chi) P \lambda_\delta, \quad (3.4)$$

де  $\lambda_\delta$  – піддатливість болта, тобто його видовження під дією сили в 1 Н;

$\lambda_0$  – піддатливість з'єднаних деталей (прокладка). З (3.4) дістанемо

$$\chi = \lambda_0 / (\lambda_0 + \lambda_0).$$

Якщо металеві деталі з'єднані без прокладок, то  $\chi = 0,2 \dots 0,3$ , а для металевих деталей з'єднаних з пружними прокладками (пароніт, гума, азбест)  $\chi = 0,4 \dots 0,5$ .

Сумарна сила, яка розтягує болт,

$$P_{\Sigma} = Q + \chi P.$$

Тиск у стикі деталей

$$P_{\text{ст}} = Q - (1 - \chi) P.$$

Стик розкривається, коли  $P_{\text{ст}} = 0$  або якщо  $(1 - \chi) P = Q$ . Щоб гарантувати надійність стику, треба виконати умову

$$Q = k_3 (1 - \chi) P,$$

де  $k_3$  – коефіцієнт запасу: при сталому зовнішньому навантаженні

$k_3 = 1,3 - 2,0$  і при змінному зовнішньому навантаженні

$k_3 = 1,5 - 4$ .

Щоб у з'єднаннях з прокладками гарантовано досягти герметичності, коефіцієнт  $k_3$  рекомендується підвищувати до 4.

Вище було показано, що болти з попереднім затягуванням розраховують за збільшеною в 1,3 раз силою затягування  $Q$ . Крім того, треба врахувати частину зовнішньої сили  $P$ , яку сприймає болт, що дорівнює  $\chi P$ . Розрахункова сила для болта розглядуваного з'єднання

$$N = 1,3Q + \chi P, \quad (3.5)$$

а внутрішній діаметр різьби болта  $d_1$  знаходимо за формулою (3.2)

$$d_1 \geq \sqrt{4N / (\pi [\sigma]_p)}.$$

Отримане значення  $d_1$  округлюють до більшого стандартного, за яким з таблиць встановлюють номінальний діаметр  $d$  стержня болта.

**Болтове з'єднання деталей, що навантажено силами зсуву.** У такому з'єднанні основною умовою надійності конструкції є відсутність відносного зсуву деталей.

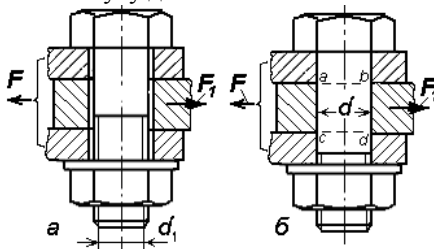


Рисунок 3.9

Розглянемо два варіанта виконання з'єднання.

1. Болт встановлено в отвори деталей із зазором (рис. 3.9,а).

Умова відсутності зсуву з'єднання деталей має вигляд

$$F \leq iQ_s = ifG_o, \quad (3.6)$$

де  $F$  – зовнішня сила, що діє на деталі з'єднання;

$Q_s$  – сила тертя в одній парі площин стикування деталей;

$i$  – число пар площин стику (для рис. 3.9,а  $i = 2$ );

$f$  – коефіцієнт тертя ковзання в стиках деталей;

$G_o$  – сила затяжки болта.

Якщо ввести коефіцієнт надійності з'єднання  $k$ , то з умови відсутності зсуву з'єднання (3.6) можна визначити потрібну силу затяжки болта

$$G_o = kF / (if). \quad (3.7)$$

Значення  $k$  вибирають таким чином:

при статичному навантаженні з'єднання  $k = 1,3; \dots; 1,5$ ;

при дії змінного навантаження  $k = 1,8; \dots; 2,0$ .

З урахуванням скручування болта під час затягування розрахункова сила

$$N = \beta G_o = \beta kF / (if). \quad (3.8)$$

2. Болт встановлено в отвори деталей без зазору (рис. 3.9,б).

Зовнішня сила  $F$  безпосередньо діє на болт і визиває деформацію зсуву у перерізах  $a-b$  і  $c-d$ . Болт розраховують за умовою міцності на зріз

$$\tau_{zp} = F / A_{zp} = F / (i \pi d^2 / 4) \leq [\tau]_{zp}, \quad (3.9)$$

де  $A_{zp} = i \pi d^2 / 4$  – сумарна площа зрізу стержня болта;

$i$  – число площ зрізу (для рис. 3.9,б  $i = 2$ );

$d$  – діаметр стержня болта;

$[\tau]_{zp}$  – допустимі напруження на зріз.

Інколи в останньому з'єднанні виконують перевірку міцності деталей за напруженнями зминання по циліндричній поверхні контакту болта з деталями з'єднання.

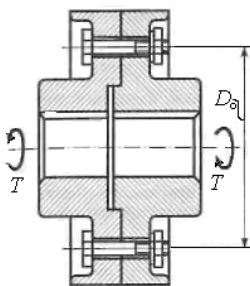


Рисунок 3.10

Порівнюючи два варіанти з'єднання (рис. 3.9,а,б) слід зазначити, що варіант (рис. 3.9,а) дешевіший ніж другий, оскільки він не вимагає точних розмірів болта й отвору. Однак при цьому при тій самій силі потрібен більший діаметр болта, ніж діаметр болта, встановленого без зазору (рис. 3.2.9,б).

**Допустимі напруження:**

на розтяг болта  $[\sigma]_p = (0,25 \dots 0,4) \sigma_m$ ,



на зріз болта  $[\tau]_{\text{зр}} = (0,2 \dots 0,3) \sigma_{\text{т}}$ ,

на зминання  $\sigma_{\text{зм}} = (0,3 \dots 0,4) \sigma_{\text{т}}$ ,

де  $\sigma_{\text{т}}$  – границя текучості матеріалу.

**Приклад 3.1.** Визначити діаметр болтів, які встановлено в отвори деталей із зазором і з'єднують фланці муфти (рис. 3.10). Вихідні дані для розрахунку: обертовий момент, який передає муфта  $T = 220 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ; болти розміщені на колі діаметром  $D_0 = 110 \text{ мм}$ ; кількість болтів  $z = 4$ .

*Розв'язання:* Для з'єднання фланців муфти приймаємо болти, що виготовлені зі сталі 45 ( $\sigma_{\text{т}} = 360 \text{ МПа}$ ), а коефіцієнти запасу міцності  $s = 3$ . Знаходимо допустиме напруження розтягу для болтів

$$[\sigma]_{\text{р}} = \sigma_{\text{т}} / s = 360 / 3 = 120 \text{ МПа}.$$

Зовнішня поперечна сила, яка діє на один болт

$$F = 2 T / (D_0 z) = 2 \cdot 220 \cdot 10^3 / (110 \cdot 4) = 10^3 \text{ Н}.$$

Розрахункова сила для болта згідно з формулою (3.9)

$$N = k \beta F / (i f) = 1,5 \cdot 1,3 \cdot 10^3 / (1 \cdot 0,15) = 13000 \text{ Н}.$$

Тут взято: коефіцієнт надійності з'єднання  $k = 1,5$ ; коефіцієнт, що враховує скручування болта під час затягування  $\beta = 1,3$ ; число площ зрізу (рис. 3.10)  $i = 1$ ; коефіцієнт тертя ковзання  $f = 0,15$ .

З умови міцності на розтяг (3.2) потрібний внутрішній діаметр різьби болтів

$$d_1 \geq \sqrt{4 N / (\pi [\sigma]_{\text{р}})} = \sqrt{4 \cdot 13000 / (\pi \cdot 120)} = 11,74 \text{ мм}.$$

Для з'єднання фланців муфти приймаємо болти М 14, для яких  $d_1 = 11,835 \text{ мм}$ .

**Приклад 3.2.** Визначити діаметр болтів з'єднання кришки з резервуаром (рис. 3.2.8) за такими даними: тиск газу в резервуарі  $p = 1,7 \text{ МПа}$ , діаметр горловини резервуара  $D = 400 \text{ мм}$ , кількість болтів  $z = 12$ . Між кришкою і горловиною передбачена м'яка прокладка.

*Розв'язання.* Для з'єднання кришки приймемо болти зі сталі Ст3 ( $\sigma_{\text{т}} = 220 \text{ МПа}$ ). Візьмемо коефіцієнт запасу міцності болтів  $s = 2,3$ . Допустиме напруження розтягу

$$[\sigma]_{\text{р}} = \sigma_{\text{т}} / s = 220 / 2,3 = 95,65 \text{ МПа}.$$

Загальна сила, то діє на кришку резервуара,

$$R = p \pi D^2 / 4 = 1,7 \cdot 3,14 \cdot 400^2 / 4 = 213628 \text{ Н}.$$

Зовнішня осьова сила, яка припадає на один болт

$$P = R / z = 213628 / 12 = 17802 \text{ Н}.$$

Необхідна початкова сила затяжки кожного болта

$$Q = k_3 (1 - \chi) P = 2 (1 - 0,45) 17802 = 19582 \text{ Н}.$$

Тут прийнято коефіцієнт затяжки болтів  $k_3 = 2$ , а коефіцієнт зовнішнього навантаження при наявності м'якої прокладки  $\chi = 0,45$ .

Розрахункова сила для болта при  $\beta = 1,3$  (див. (3.5))

$$N = Q\beta + \chi P = 19582 \cdot 1,3 + 0,45 \cdot 17802 = 33467 \text{ Н.}$$

За умовою міцності на розтяг потрібний внутрішній діаметр різьби болта відповідно до формули (3.2)

$$d_1 \geq \sqrt{4N / (\pi[\sigma]_p)} = \sqrt{4 \cdot 33467 / (\pi \cdot 102)} = 20,44 \text{ мм.}$$

Для даного з'єднання приймаємо болти М24, для яких  $d_1 = 20,752 \text{ мм.}$

### 3.2.3 Шпонкові з'єднання

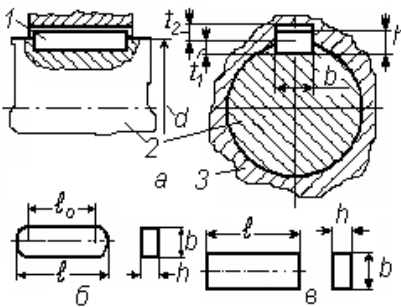


Рисунок 3.11

Шпонки 1 (рис. 3.11,а) призначені для передавання обертаючого моменту від вала 2 до установлених на ньому деталей 3 (шківів, зубчастих коліс, маховиків, муфт і т. д.) або навпаки. Шпонки можна поділити на три основні види: призматичні (рис. 3.11,б,в), сегментні і клинові. Клинові шпонкові з'єднання відносяться до напружених з'єднань і застосовуються рідко бо їх установлення спричинює зміщення осі маточини шківів або маточини шестірні відносно осі вала, що може бути причиною виникнення небажаного дисбалансу. Завдяки простоті та надійності конструкції ненапружені шпонкові з'єднання (призматичні і сегментні) широко застосовують у машинобудуванні. До недоліків шпонкових з'єднань належить послаблення вала та маточини шпонковими пазами, які зменшують поперечний переріз і спричиняють концентрацію напружень.

Розміри шпонок і допуски на їх виготовлення стандартизовані.

*Призматичні шпонки* за призначенням бувають: звичайні (рис. 3.11), які призначені для нерухомих з'єднань маточин (втулок) з валами, і напрямні, що застосовують тоді, коли маточини повинні мати можливість переміщатися вздовж вала (рис. 3.12). Напрямну шпонку закріплюють до вала гвинтами (рис. 3.12,а), а іноді фіксують до маточини (рис. 3.12,б). Ширина  $b$  і висота  $h$  шпонки вибирається залежно від діаметра  $d$  вала. Довжину шпонки після розрахунку беруть із ряду, наведеного в стандартах. Робоча довжина призматичної

шпонки зі округленими торцями (рис. 3.11,б)  $\ell_o = \ell - b$ , а для шпонки з плоскими торцями (рис. 3.11,в)  $\ell_o = \ell$ .

*Сегментні шпонки* (рис. 3.13) встановлюють переважно на кінцевих ділянках мало навантажених валів циліндричної або конічної форми, наприклад на кінцях валів.

Розміри сегментних шпонок беруть з таблиць стандарту залежно від діаметра  $d$  вала. Сегментні шпонки зручні під час складальних робіт, але глибокий шпонковий паз дуже ослаблює вал.

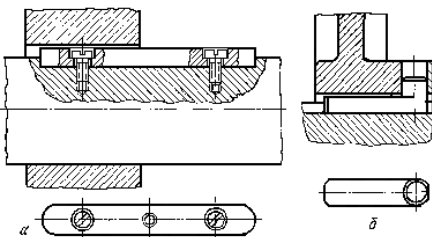


Рисунок 3.12

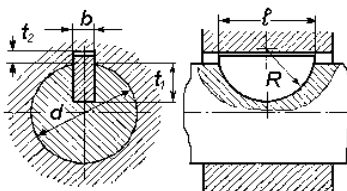


Рисунок 3.13

Оскільки шпонкові з'єднання стандартизовані і їх розміри вибирають залежно від діаметра вала, розрахунок шпонкових з'єднань у здебільше виконують як перевірний.

Основним розрахунком призматичних шпонкових з'єднань є розрахунок за умови обмеження напружень зминання

$$\sigma_{зм} = N_{зм} / A_{зм} \leq [\sigma]_{зм}, \quad (3.10)$$

де  $N_{зм}$  – сила, що діє на навантажену бічну поверхню шпонки;

$A_{зм}$  – площа поверхні зминання;

$[\sigma]_{зм}$  – допустимі напруження зминання для менш міцного матеріалу з'єднання.

Для даного з'єднання наближено маємо:

$$N_{зм} = 2T/d; A_{зм} = (h - t_1) \ell_o - \text{сила і площа зминання.}$$

Тут  $\ell_o$  – робоча довжина призматичної шпонки (рис. 3.11);  $h$  – висота шпонки;  $d$  – діаметр вала;  $t_1$  – заглиблення шпонки у валу (рис. 3.14);  $T$  – крутний момент. Отже умова міцності шпонкового з'єднання має вигляд

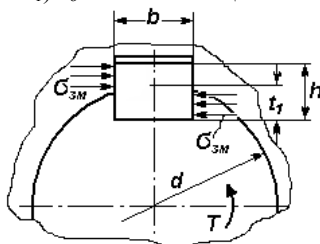


Рисунок 3.14

$$\sigma_{зм} = 2T / [d \ell_o (h - t_1)] \leq [\sigma]_{зм}. \quad (3.11)$$

У формулі (3.11) прийнята площа поверхні зминання шпонки з бічною стінкою паза в маточині. Під дією зминання перебуває також поверхня контакту шпонки з бічною стінкою паза на валу. Оскільки в стандартному шпонковому з'єднанні площа цієї поверхні більша, розрахунок слід виконувати саме за обмеження напружень зминання на поверхні контакту шпонки із бічною стінкою паза в маточині.

Коли умова міцності не виконується, треба збільшити довжину шпонки  $\ell_o$ , якщо дозволяє довжина маточини, або використати в з'єднанні дві шпонки, які зміщені на деякий кут.

Інколи виконують проектний розрахунок і визначають потрібну робочу довжину шпонки з умови (3.11)

$$\ell_o \geq 2T/[d(h-t_1)[\sigma]_{зм}]. \quad (3.12)$$

За значенням  $\ell_o$  знаходять повну довжину шпонки  $\ell = \ell_o + b$  (рис. 3.11,б), за якою із стандарту приймають найближчу більшу довжину шпонки.

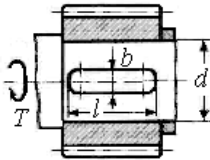


Рисунок 3.15

При навантаженні на призматичну шпонку в з'єднанні діє також деформація зрізу. Але умова міцності на зріз врахована при стандартизації розмірів призматичних та сегментних шпонок. Тому перевірка міцності на зріз необов'язкова.

**Приклад 3.3.** Сталеве зубчасте колесо з'єднується з валом за допомогою призматичної шпонки зі округленими торцями (рис. 3.15) Визначити розміри шпонкового з'єднання за такими даними: номінальний обертовий момент, що передає з'єднання,  $T = 180 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ; діаметр вала, на якому встановлене зубчасте колесо,  $d = 36 \text{ мм}$ ; навантаження на з'єднання з різкими змінами.

**Розв'язання.** За діаметром вала  $d = 36 \text{ мм}$  згідно зі стандартом вибираємо такі розміри з'єднання: ширина шпонки  $b = 10 \text{ мм}$ ; висота  $h = 8 \text{ мм}$ ; глибина паза на валу  $t_1 = 5 \text{ мм}$  і в маточині колеса  $t_2 = 3,3 \text{ мм}$ .

Для сталевго колеса та різко змінного навантаження приймаємо допустиме напруження зминання  $[\sigma]_{зм} = 100 \text{ МПа}$ .

За формулою (3.12) обчислюємо потрібну робочу довжину шпонки:

$$\ell_o = 2T/[d \cdot (h - t_1) [\sigma]_{зм}] = 2 \cdot 180 \cdot 10^3 / [36 \cdot (8 - 5) \cdot 100] = 33,3 \text{ мм}.$$

Повна довжина шпонки  $\ell = \ell_o + b = 33,3 + 10 = 43,3 \text{ мм}$ . За стандартом беремо  $\ell = 45 \text{ мм}$ . Отже, задане з'єднання можна виконати призматичною шпонкою  $10 \times 8 \times 45 \text{ мм}$ .

### 3.2.4. Шліцьові з'єднання

Шліцьові з'єднання (рис. 3.16,а) можна уявити як багатошпонкові, в яких шпонки виготовлені як одне ціле з валом. Шліцьові з'єднання порівняно з шпонковими за інших однакових умов можуть передавати значно більші обертаючі моменти, забезпечують краще центрування з'єднуваних деталей і меншу концентрацію напружень. Залежно від профілю шліців розрізняють такі типи з'єднань: прямобічні, евольвентні й трикутні.

Прямобічні шліцьові з'єднання стандартизовані. Маточину по валу центрують за зовнішнім діаметром (рис. 3.16,а), внутрішнім діаметром (рис. 3.16,б) і бічними поверхнями шліців (рис. 3.16,в). Прямобічні й евольвентні шліці застосовують у рухомих і нерухомих з'єднаннях.

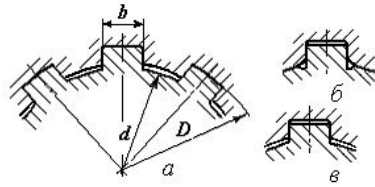


Рисунок 3.16

З'єднання з трикутними шліцями застосовують переважно в установках як нерухомі з незначними навантаженнями.

Розрахунок прямобічних шліців на зминання роблять за формулою

$$\sigma_{зм} = T/(Sl) \leq [\sigma]_{зм}, \quad (3.13)$$

де  $T$  – обертаючий момент, який передає з'єднання;

$S$  – питомий сумарний статичний момент площі робочих поверхонь шліців відносно осі вала (наведено в таблицях стандартів);

$l$  – робоча довжина з'єднання;

$[\sigma]_{зм}$  – допустиме напруження зминання (наведено в таблицях стандартів).

Розрахунок на спрацювання роблять за такою самою формулою, як і на зминання

$$\sigma_{спр} = T/(Sl) \leq [\sigma]_{спр}, \quad (3.14)$$

де  $[\sigma]_{спр}$  – допустиме напруження з розрахунку на спрацювання (наведено в таблицях стандартів).

Розрахунок евольвентних шліців роблять до критерію зминання

$$\sigma_{зм} = T/(KzF_{зм}r_c) \leq [\sigma]_{зм}, \quad (3.15)$$

де  $K \approx 0,7...0,8$  – коефіцієнт, який враховує нерівномірність розподілу навантажень між зубами;

$z$  – число зубів;

$F_{зм} = ml$  – площа зминання;

$m$  – модуль шліців;

$l$  – робоча довжина з'єднання;

$r_c = mz/2$  – середній радіус зубів;  
[ $\sigma$ ]<sub>зм</sub> – допустимі напруження на зминання.

### 3.2.5 Зварні з'єднання

*Зварювання* – процес з'єднання деталей, який здійснюється при місцевому нагріванні стику деталей до розплавленого або пластичного стану. Використовують переважно електрозварювання, однак іноді застосовують газову, термітну та інші види зварювання.

Зварні з'єднання значною мірою наближають з'єднані деталі до цілісних і в багатьох випадках із успіхом заміняють деталі ковані, штамповані або виготовлені литтям.

До переваг зварних деталей слід віднести відсутність з'єднувальних елементів, рівномірність шва щодо з'єднаних елементів деталей, економію матеріалу та зменшення маси виробів, високу продуктивність зварювання.

Основними недоліками зварних з'єднань є поява температурних напружень і пов'язана із цим можливість викривлення деталей після зварювання, значна концентрація напружень в області зварних швів, знижена стійкість проти корозії, складність контролю якості шва та ін.

Використовують переважно такі способи з'єднання деталей зварюванням: ручне дугове зварювання металевим електродом, автоматичне дугове зварювання металевим електродом під шаром флюсу, електрошлакове зварювання та контактне зварювання – стикове, шовне та точкове.

*Ручне дугове зварювання* металевим електродом виконують за допомогою електричної дуги, що виникає між деталлю та електродом. Ручне дугове зварювання використовують для з'єднання деталей із короткими або складними за конфігурацією зварними швами, а також в індивідуальному та мало серійному виробництві.

*Автоматичне дугове зварювання* металевим електродом під флюсом виконують зварювальною машиною автоматично під шаром флюсу (для захисту шва від впливу зовнішнього середовища). Цей метод найдоцільніший для швів значної довжини деталей завтовшки 2-130 мм і більше, особливо у велико-серійному та масовому виробництві.

*Електрошлакове зварювання* металевим електродом виконують при проходженні струму від електроду до деталі через шлакову ванну. Таким способом зварюють сталеві та чавунні вироби завтовшки до 1м.

*Контактне зварювання* здійснюють, нагріваючи до температури пластичного стану стик з'єднаних деталей теплотою, яка виділяється

при проходженні через стик електричного струму. Контактним зварювання з'єднують деталі, виготовлені із тонколистових елементів.

### **Види зварних швів**

Розрізняють стикові (рис. 3.17), напусткові (рис. 3.18), таврові (рис. 3.19) та кутові (рис. 3.20) зварні з'єднання.

Зварні *стикові з'єднання* (рис. 3.17) виконуються, якщо листи розміщені в одній площині, і бувають з прямим (а) та косим (б) швами.

Залежно від товщини  $s$  зварювані елементи деталей виготовляють із підготовленими (V – подібний шов, рисунок 3.17,д і Х-подібний шов, рис. 3.17,е) або не підготовленими кромками (зварка листа з одного боку, рис. 3.17,в або з двох боків, рис. 3.17,г).

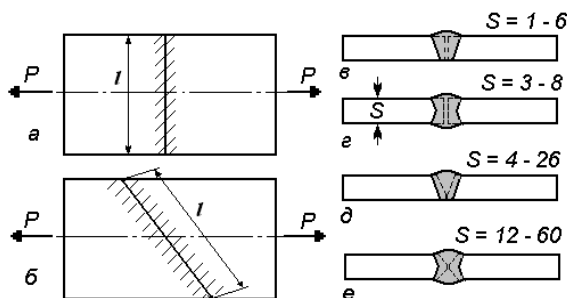


Рисунок 3.17

*Напусткове з'єднання* виконують за допомогою кутових (валикових) швів (рис. 3.18 – рис. 3.20), коли з'єднувані листи паралельні або перпендикулярні.

Залежно від розміщення шва щодо лінії дії сили  $P$  у напусткових з'єднаннях кутові шви називаються фланговими (рис. 3.2.18,а), лобовими (рис. 3.2.18,б), комбінованими (рис. 3.2.18,в).

*Таврове* (рис. 3.19) та *кутове* (рис. 3.20) з'єднання використовують при розміщенні деталей у взаємно перпендикулярних площинах. Такі з'єднання виконують з однобічним (а) або двобічним швом (з підварюванням) (б).

Форма поперечного перерізу кутових швів може бути нормальною (рис. 3.21,а), випуклою (рис. 3.21,б) або поліпшеною (рис. 3.21,в,г). Нормальна та поліпшена форми шва досягаються механічною обробкою їх після зварювання. Мінімальна концентрація напружень спостерігається в швах поліпшеної форми.

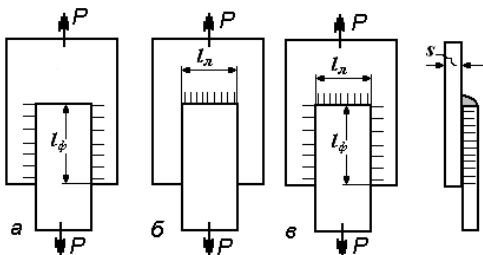


Рисунок 3.18

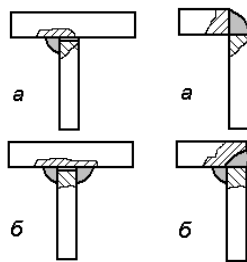


Рисунок 3.19

Рисунок 3.20

Основною розрахунковою характеристикою кутових швів є катет  $k$  (рис. 3.21). Катет зварного шва  $k$  треба брати  $k \leq s$ , але не менш ніж 3 мм при товщині  $s$  з'єднуваних елементів деталей  $s \geq 3$  мм. Розрахункову висоту  $m$  кутового шва (рис. 3.21) беруть таку, що вона дорівнює висоті перерізу шва по бісектрисі А–А, напливи не враховують.

Умовно для всіх форм перерізу швів приймають

$$m = k \sin 45^\circ \approx 0,7k. \quad (3.16)$$

Довжина лобових швів  $l_{\text{л}}$  у напусткових з'єднаннях не обмежується, а довжина флангових швів  $l_{\text{ф}}$  не повинна перевищувати  $50k$ , оскільки при цьому підвищується нерівномірність розподілення напружень у шві.

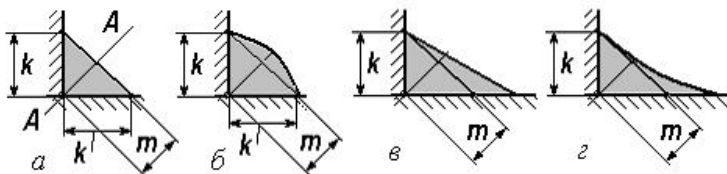


Рисунок 3.21

З'єднання точковим контактним зварюванням (рис. 3.22, а, б) застосовують для плоских листових деталей, сумарна товщина яких не перевищує 8-10 мм.

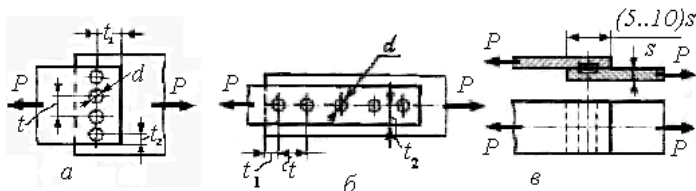


Рисунок 3.22



При найменшій товщині  $s \geq 2$  мм з'єднуваних сталевих елементів діаметр зварної точки  $d$  повинен задовольняти умову  $1,25s + 4 < d < 1,58s + 5$ . Крок  $t$  зварних точок не повинен перевищувати  $3d$ , а відстань зварних точок від країв деталей  $t_1 \geq 2d$  і  $t_2 = 1,5d$ .

З'єднання шовним контактним зварюванням (рис. 3.22, в) використовують для тонколистових деталей. Товщина  $s$  деталей не повинна бути більш ніж 2–3 мм.

**Розрахунок зварних з'єднань на міцність.** Основною умовою під час проектування зварних конструкцій деталей є забезпечення рівномірності зварних швів та з'єднуваних елементів деталей. Згідно із цією умовою залежно від розмірів та взаємного розміщення зварних деталей установлюють відповідні розміри швів для даного з'єднання.

Переважно на практиці розміри зварних швів та тип їх визначаються за формою та конструкцією деталей. Тому розрахунок зварних з'єднань в основному виконують як перевірний. Надалі при викладенні методів розрахунків допускається, що якість виконання швів задовольняє відповідні технічні норми.

**Розрахунок стикових з'єднань.** Стикове з'єднання розраховують на міцність за номінальними напруженнями без урахування підсилення швів (місцевого наплавлювання металу) і за тими самими умовами, що й для суцільних елементів деталей. Для схем навантаження стикових з'єднань із прямим та косим швами (рис. 3.22, а, б) умова міцності має такий вигляд:

$$\sigma = P/(s l) \leq [\sigma]', \quad (3.17)$$

де  $\sigma$  – напруження розтягу у шві;

$P$  – сила, що навантажує з'єднання;

$s, l$  – найменша товщина з'єднуваних елементів та довжина шва відповідно;

$[\sigma]'$  – допустиме напруження розтягу стикового зварного з'єднання.

Стикове зварне з'єднання може руйнуватися безпосередньо по шву, місцю плавлення металу шва з металом деталі або по перерізу деталі в зоні термічного впливу, де внаслідок нагрівання при зварюванні змінюються механічні властивості металу. У розрахунку цю невизначеність беруть до уваги, вибираючи відповідне допустиме напруження  $[\sigma]'$  та ураховуючи властивості матеріалу з'єднуваних деталей.

**Розрахунок кутових зварних швів.** Кутові шви умовно розраховують на зріз за найменшим перерізом, який знаходиться в площині бісектриси А-А прямого кута в поперечному перерізі шва

(рис. 3.21). Площа перерізу зрізу являє собою прямокутник, довжина якого дорівнює довжині шва  $l$ , а висота розміру  $m = 0,7k$ .

Тобто, площа зрізу шва  $A_{зр} = m l = 0,7kl$ .

Для кутових зварних швів відповідно до схем на рисунках 3.18-3.20, умову міцності швів записують у вигляді

$$\tau = P/A_{зр} = P/(0,7kl) \leq [\tau]', \quad (3.18)$$

де  $\tau$  – розрахункове напруження зрізу;

$P$  – сила, що навантажує з'єднання;

$k$  – катет кутового шва;

$l$  – сумарна довжина швів;

$[\tau]'$  – допустиме напруження зрізу.

Для з'єднань із кількома швами за розмір  $l$  беруть сумарну довжину швів, наприклад, для напусткового з'єднання фланговими швами (рис. 3.22,а)  $l = 2l_{\phi}$ , для з'єднання лобовими швами (рис. 3.18,б)  $l = l_{\phi}$ , а для з'єднання комбінованими швами (рис. 3.18,в)  $l = 0,28l_{\phi} + 1,5l_{\phi}$ . В останньому випадку зменшену сумарну довжину шва  $l$  беруть у зв'язку з нерівномірністю розподілення навантаження на лобовий та флангові шви.

Оскільки на початку та в кінці шва його якість внаслідок непровару погіршується, дійсну  $l$  довжину швів в формулах (3.17), (3.18) збільшують порівняно з розрахунковою  $l_p$  на 10 мм, тобто  $l = l_p + 10$ .

Допустимі напруження для зварного з'єднання  $[\sigma]'$  визначають в залежності від допустимого напруження для основного металу:

– допустиме напруження розтягу стикового зварного з'єднання

$$[\sigma]' = (0,9 \dots 0,7) [\sigma];$$

– допустиме напруження стиску стикового зварного з'єднання

$$[\sigma]' = (0,95 \dots 0,8) [\sigma];$$

– допустиме напруження зрізу кутового шва  $[\tau]' = 0,6[\sigma]$ ,

де  $[\sigma]$  – допустиме напруження розтягу основного металу.

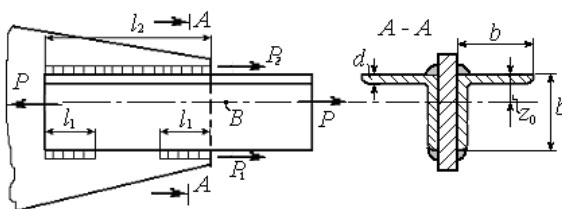


Рисунок 3.23

**Приклад 3.4.** Стержень, який складається з двох рівнополічних кутиків (рис. 3.23), навантажений силою  $P = 200$  кН.

Визначити розмір кутиків і довжину флангових швів при ручному зварюванні з листом електродами звичайної якості. Матеріал стержня – Ст3. Допустиме напруження для матеріалу кутиків на розтяг  $[\sigma]_p = 140 \text{ МПа}$ .

*Розв'язання.* Визначаємо з умови міцності при розтягу необхідну площу поперечного перерізу кутиків:

$$A = P / [\sigma]_p = 200 \cdot 10^3 / (140 \cdot 10^6) = 0,00143 \text{ м}^2 = 14,3 \text{ см}^2.$$

Тобто, для одного кутика  $A_k = A/2 = 7,15 \text{ см}^2$ .

Згідно стандарту приймаємо кутик 70 x 70 x 6, для якого  $A_k = 8,15 \text{ см}^2$ ,  $b = 70 \text{ мм}$ ,  $d = 6 \text{ мм}$ ,  $z_0 = 19,4 \text{ мм}$  (координата центра ваги перерізу кутика).

Визначаємо загальну необхідну довжину зварних швів для одного кутика з умови міцності (3.18)

$$l \geq P / (2 \cdot 0,7k [\tau]) = 200 \cdot 10^3 / (2 \cdot 0,7 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 84 \cdot 10^6) = 0,248 \text{ м} = 248 \text{ мм}.$$

Тут  $k = d = 6 \text{ мм}$  – катет швів,  $[\tau] = 0,6 [\sigma]_p = 0,6 \cdot 140 = 84 \text{ МПа}$  – допустиме напруження зрізу для шва.

Довжина двох паралельних флангових швів  $2l_1$  і  $l_2$  у зварному з'єднанні з несиметричним розміщенням цих швів щодо лінії дії сили  $P$  (рис. 3.23) повинна бути різною, бо навантаження на шви залежить від відстані до швів від центра ваги перерізу кутиків. Дійсно, розкладемо силу  $P$  на складові сили  $P_1$  і  $P_2$  (це навантаження на шви довжина яких  $2l_1$  і  $l_2$ ) (рис. 3.23).

Згідно з теоремою Варіньона про момент рівнодійної маємо:

$$P = P_1 + P_2, \quad \sum m_B = P \cdot 0 = P_1 (b - z_0) - P_2 z_0.$$

З цих рівнянь знаходимо  $P_1 = P z_0 / b$ ,  $P_2 = P(b - z_0) / b$ .

Сили  $P$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  прямо пропорційні відповідній довжині швів  $l$ ,  $2l_1$ ,  $l_2$ . Тобто, можна записати  $2l_1 = l z_0 / b$ ,  $l_2 = l(b - z_0) / b$ .

Підставляємо значення і знаходимо

$$l_1 = 35 \text{ мм}, \quad l_2 = 179 \text{ мм} \approx 180 \text{ мм}.$$

### Контрольні запитання до розділу 3.2

1. Які деталі належать до рознімних, а які до нерознімних деталей?
2. Переваги й недоліки різьбових з'єднань.
3. Основні параметри різьбових з'єднань.
4. Як поділяються різьби за призначенням?
5. Які профілі різьб використовуються в техніці?
6. Основні параметри метричних різьб.
7. Розшифруйте позначення метричної різьби: «М12 x 0,75» і «М24».

8. Які кріпильні різьбові деталі використовують для з'єднання деталей машин?

9. Назвіть стопорні пристрої, які використовують для запобігання самовідгвинчування різьбових з'єднань.

10. Розшифруйте величини, що входять до умови міцності стержня болта на розтяг:  $\sigma_p = N/A \leq [\sigma]_p$  і  $d_1 \geq \sqrt{4N/(\pi[\sigma]_p)}$ .

11. Призначення і основні види шпонок.

12. Розшифруйте величини, що входять до умови міцності шпонкового з'єднання при розрахунках на зминання:  $\sigma_{зм} = 2T/[d\ell_o(h - t_1)] \leq [\sigma]_{зм}$ .

13. Типи шліцевих з'єднань і їх переваги порівняно зі шпонковими.

14. Типи зварних з'єднань; переваги й основні недоліки.

15. Способи зварних з'єднань деталей.

16. Види зварних швів.

17. Розшифруйте величини, що входять до умови міцності:

- стикового з'єднання із прямим та косим швами  $\sigma = P/(s l) \leq [\sigma]'$ ;

- кутового зварного з'єднання:  $\tau = P/A_{зр} = P/(0,7kl) \leq [\tau]'$ .

### 3.3 Механічні передачі

#### 3.3.1 Призначення, класифікація та кінематичні схеми механічних передач

Механічною передачею називають механізм, що передає енергію від двигуна до робочого органу машини з перетворюванням параметрів руху. Здебільшого механічні передачі перетворюють параметри обертового руху, змінюючи модуль або напрям швидкості, а інколи й характер руху (обертовий рух перетворюють у поступальний або навпаки).

Основне призначення механічних передач – це узгодження параметрів руху робочих органів машини з параметрами руху вала двигуна. Отже, під передачами розуміють пристрої, які дають змогу передавати енергію від двигуна до робочих органів машини, як правило, з перетворенням обертаючих моментів, швидкостей, а іноді й характеру руху. У сучасних машинах застосовують електричні, механічні, гідравлічні і пневматичні передачі. У цьому курсі розглядаються лише механічні передачі.

Усі механічні передачі поділяють на дві групи, а саме: передачі, що базуються на використанні сил тертя (пасові, фрикційні) і передачі,

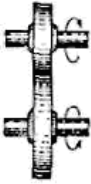
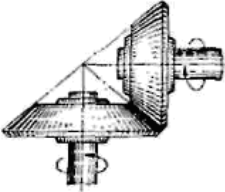





що базуються на зачепленні (зубчасті, черв'ячні, ланцюгові, гвинтові). У свою чергу, передачі тертям та передачі зачепленням можуть здійснюватись безпосереднім дотиканням ведучого та веденого елементів передачі (фрикційні, зубчасті, черв'ячні) і за допомогою проміжної гнучкої ланки – так звані передачі гнучким зв'язком (пасові, ланцюгові).

Основні види механічних передач наведені в табл. 3.3.

Механічні передачі у відповідний спосіб зображують на кінематичних схемах різних пристроїв.

Наприклад, у кінематичній схемі привода стрічкового транспортера на рис. 3.3.1 між мотором 1 і самим транспортером 5 зображені такі передачі: 2 – пасова передача; 3 – циліндрична зубчаста передача в окремому корпусі (редуктор); 4 – ланцюгова передача.

Таблиця 3.3

Групи передач	Передачі з безпосереднім дотиканням			Передачі гнучким зв'язком
Передачі тертям	Фрикційна			Пасова
				
Передачі зачепленням	Зубчаста	Черв'ячна	Гвинт-гайка	Ланцюгова
				

Такий ряд механічних передач у приводі потрібний для перетворення високої частоти обертання вала мотора 1 у потрібну низьку частоту обертання вала барабана 6 стрічкового транспортера.

У всіх механічних передачах є ведуча ланка, до якої прикладені рушійні сили, що приводять механізм у рух, і ведена ланка, що здійснює рух, для виконання якого призначений механізм.

### 3.3.2 Кінематичні і силові співвідношення для механічних передач

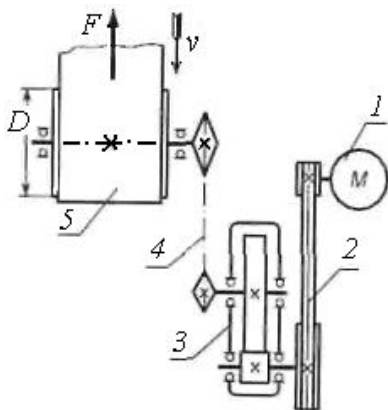


Рисунок 3.24

Розглянемо загальні співвідношення між деякими параметрами всіх механічних передач на прикладі зубчастої передачі (рис. 3.25).

Усі параметри механічної передачі, що належать до ведучої ланки, позначимо індексом 1, а до веденої ланки – відповідно індексом 2. Під ведучою або веденою ланкою будемо розуміти вал, зубчасте колесо, шків, зірочку тощо.

Переважно ведучі ланки або елементи мають більшу швидкість, а ведені – меншу. Тому перші інколи називають швидкохідними, а другі – тихохідними ланками.

Основний кінематичний параметр механічної передачі – передаточне число

$$u = \omega_1 / \omega_2, \quad (3.18)$$

яке є відношенням кутової швидкості  $\omega_1$  ведучої ланки до кутової швидкості  $\omega_2$  веденої ланки передачі.

Енергетичними параметрами механічної передачі є передавання потужності на ведучій ланці  $P_1$ , і на веденій ланці  $P_2$ , а також коефіцієнт корисної дії (ККД), який визначається співвідношенням

$$\eta = P_2 / P_1. \quad (3.19)$$

ККД характеризує ступінь досконалості механічної передачі і за ним можна оцінити втрати потужності  $\Delta P$  у передачі:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = P_1 (1 - \eta). \quad (3.20)$$

Параметри  $\omega_1, \omega_2$ , а також  $P_1$ , і  $P_2$  є мінімально потрібними для розрахунку будь-якої механічної передачі.

Передавання потужності (Вт), та кутові швидкості (рад/с) визначають обертові моменти (Н·м), на валах передачі:

на ведучому валу

$$T_1 = P_1 / \omega_1; \quad (3.21)$$

на веденому валу

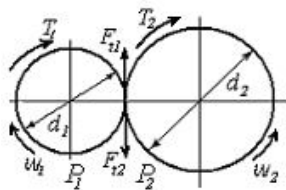


Рисунок 3.25

$$T_2 = P_2 / \omega_1. \quad (3.22)$$

Співвідношення між обертовими моментами на валах механічної передачі можна встановити за виразами (3.21) та (3.22) і записати в такому вигляді:

$$T_2/T_1 = u \eta \text{ або } T_2 = T_1 u \eta. \quad (3.23)$$

Інколи швидкості обертання ланок механічної передачі задаються у вигляді частоти обертання  $n$  (хв<sup>-1</sup>). Зв'язок між кутовою швидкістю  $\omega$  (рад/с) та частотою обертання  $n$  (хв<sup>-1</sup>), виражає співвідношення

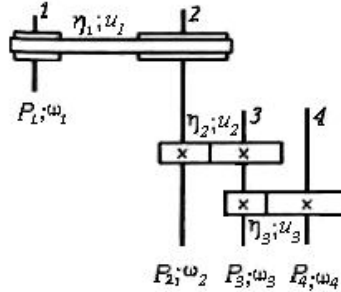
$$\omega = \pi n/30 \approx 0,1 n.$$


Рисунок 3.26

У розрахунках механічних передач зустрічаються такі параметри, як окружна швидкість та окружна сила. Окружна швидкість  $v$  – це лінійна швидкість точок обертової ланки передачі, розміщених на відстані  $d_1/2$ , або  $d_2/2$  від осі обертання (рис. 3.25):

$$v = v_1 = v_2 = \omega_1 d_1/2 = \omega_2 d_2/2. \quad (3.24)$$

Окружна сила  $F_t$  – це сила, що діє на ланку передачі, спричиняючи її обертання або створюючи опір обертанню, і яка напрямлена по дотичній до траєкторії (кола) руху точки її прикладання (рис. 3.25):

$$F_t = F_{t1} = F_{t2} = 2T_1 / d_1 = 2T_2 / d_2. \quad (3.25)$$

Потужність (кВт), що затрачається на рух ланки передачі зі швидкістю  $v$  (м/с) у напрямі протилежному дії на ланку зовнішньої сили  $F$  (Н), знаходять за формулою

$$P = Fv/10^3. \quad (3.26)$$

За формулою (3.3.9) можна визначити потрібну потужність для обертання вала барабана стрічкового транспортера (рис. 3.24) за відомою корисною силою натягу стрічки  $F_t$ , та її швидкістю руху  $v$ .

У приводах машин можуть застосовуватись кілька послідовно розміщених механічних передач (рис. 3.26). У такому разі загальне передаточне число  $u$  привода та його ККД визначають за наведеними нижче формулами

$$\omega_2 = \omega_1/u_1; \quad \omega_3 = \omega_2/u_2 = \omega_1/(u_1 u_2); \quad \omega_4 = \omega_3/u_3 = \omega_1/(u_1 u_2 u_3).$$

Загальне передаточне число привода

$$u = \omega_1 / \omega_4 = u_1 u_2 u_3. \quad (3.27)$$

Отже, загальне передаточне число привода, що складається з кількох механічних передач, дорівнює добутку передаточних чисел його складових передач, тобто

$$u = u_1 u_2 \dots u_n. \quad (3.28)$$

Зв'язок між потужностями на окремих валах привода (рис. 3.26) запишемо у вигляді:

$$P_2 = P_1 \eta_1; \quad P_3 = P_2 \eta_2 = P_1 \eta_1 \eta_2; \quad P_4 = P_3 \eta_3 = P_1 \eta_1 \eta_2 \eta_3.$$

Відповідно ККД усього приводного механізму

$$\eta = P_4 / P_1 = \eta_1 \eta_2 \eta_3.$$

ККД привода, що складається з кількох послідовно розташованих механічних передач, дорівнює добутку ККД всіх його складових передач, тобто

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n. \quad (3.29)$$

Навантаження, що передають механічні передачі, можуть бути постійними або змінними в часі (у більшості випадків).

Якщо привід проектується для роботи із заданим режимом навантаженням й з обумовленим максимальним діючим навантаженням, то максимальне навантаження беруть за номінальне розрахункове для передач цього привода.

У разі проектування передачі з невідомим режимом навантаження, але із заданим номінальним навантаженням (наприклад, редуктори загального призначення) у розрахунках слід брати найважчий для передачі режим – режим з постійним навантаженням.

Максимальні навантаження  $T_{\max}$  у передачах, що обумовлені дією короткочасних або випадкових перевантажень, можуть у кілька разів перебільшувати номінальні розрахункові навантаження. У цьому випадку

$$T_{\max} = T \cdot K_n, \quad (3.30)$$

де  $K_n$  – коефіцієнт короткочасного перевантаження, що беруть за рекомендаціями на підставі досвіду експлуатації конкретних машин.

Якщо рекомендації щодо вибору  $K_n$  відсутні, а в приводних пристроях використовують асинхронні електродвигуни, то значення коефіцієнта перевантаження можна брати таким, що дорівнює відношенню пускового моменту до номінального моменту двигуна, яке задається в каталогах електродвигунів.

**Приклад 3.5.** Стрічка транспортера (рис. 3.24) має максимальний корисний натяг  $F_t = 3,5$  кН і рухається зі швидкістю  $v = 1,2$  м/с. Привід транспортера обладнаний електродвигуном із частотою обертання  $n_{\text{дв}} = 2850$  хв<sup>-1</sup>. Визначити потрібну потужність електродвигуна, частоти обертання валів зубчастої передачі, її передаточне число й обертові моменти на її валах, якщо діаметр барабана транспортера  $D = 500$  мм, ККД пасової, зубчастої й ланцюгової передач відповідно  $\eta_n = 0,95$ ,  $\eta_z = 0,97$ ,  $\eta_l = 0,96$ , а передаточні числа пасової передачі  $u_n = 3,2$ , а ланцюгової передачі  $u_l = 3,6$ .



*Розв'язання.* Потужність, яка споживається транспортером,

$$P_{тр} = F_t v = 3,5 \cdot 10^3 \cdot 1,2 = 4200 \text{ Вт} = 4,2 \text{ кВт}.$$

Загальний коефіцієнт корисної дії привода

$$\eta = \eta_n \eta_z \eta_l = 0,95 \cdot 0,97 \cdot 0,96 = 0,885.$$

Потрібна потужність електродвигуна

$$P_{\delta} = P_{тр} / \eta = 4,2 / 0,885 = 4,47 \text{ кВт}.$$

Кутова швидкість і частота обертання барабана транспортера

$$\omega_{\delta} = 2 v / D = 2 \cdot 1,2 / 0,5 = 4,8 \text{ рад/с};$$

$$n_{\delta} = 30 \omega_{\delta} / \pi = 30 \cdot 4,8 / 3,14 = 45,8 \text{ хв}^{-1}.$$

Частоти обертання швидкохідного і тихохідного валів зубчастої передачі

$$n_{ш} = n_{\delta} / u_n = 2850 / 3,2 = 890,6 \text{ хв}^{-1};$$

$$n_m = n_{\delta} u_l = 45,8 \cdot 3,6 = 164,9 \text{ хв}^{-1}.$$

Потужності на швидкохідному і тихохідному валах зубчастої передачі

$$P_{ш} = P_{\delta} \eta_n = 4,47 \cdot 0,95 = 4,50 \text{ кВт};$$

$$P_m = P_{\delta} \eta_l \eta_z = 4,47 \cdot 0,95 \cdot 0,97 = 4,37 \text{ кВт}.$$

Обертові моменти на швидкохідному і тихохідному валах зубчастої передачі

$$T_{ш} = P_{ш} / \omega_{ш} = 30 P_{ш} / (\pi n_{ш}) = 30 \cdot 4,50 \cdot 10^3 / (3,14 \cdot 890,6) = 48,2 \text{ Н·м};$$

$$T_m = 30 P_m / (\pi n_m) = 30 \cdot 4,37 \cdot 10^3 / (3,14 \cdot 164,9) = 253 \text{ Н·м}.$$

### **Контрольні запитання до пунктів 3.3.1 і 3.3.2**

1. Призначення й типи механічних передач.
2. Як визначається передаточне число механічної передачі?
3. Основні енергетичні параметри механічних передач.
4. Співвідношення між обертовими моментами, потужностями та кутовими швидкостями на валах механічної передачі.
5. Як визначається загальне передаточне число привода, що складається з кількох послідовно застосованих механічних передач, якщо відомі передаточні числа окремих передач?
6. Який є зв'язок між потужностями на окремих валах привода, що складається з кількох послідовно застосованих механічних передач, якщо відомі ККД окремих передач?
7. Як визначається ККД привода, що складається з кількох послідовно розташованих механічних передач?

### 3.3.3 Пасові передачі

Звичайна пасова передача (рис. 3.27) складається з ведучого 1 і веденого 2 шківів та замкнутої форми приводного паса 3, що розміщується на шківів із деяким попереднім натягом. Вільна ділянка  $a$  паса, що набігає на ведучий шків, називається *ведучою віткою* паса, а вільна ділянка  $b$ , що набігає на ведений шків, називається *веденою віткою*. Під час роботи передачі пас передає енергію від ведучого шківів до веденого за рахунок сил тертя, які виникають між пасом та шківів.

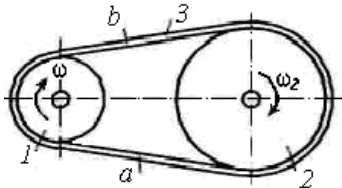


Рисунок 3.27

шківів, тобто сили тертя забезпечують зчеплення паса зі шківів. У пасових передачах попередній натяг пасів створюється за рахунок їхнього пружного розтягу при одяганні на шківів або застосуванням спеціальних натяжних пристроїв.

Пасові передачі переважно використовують для передавання потужностей у діапазоні 0,2-50 кВт. Зустрічаються також передачі для потужностей 500 і навіть 1500 кВт, проте застосування їх має унікальний характер.

Передаточні числа пасових передач сягають 5-6 (іноді до 10). Найчастіше використовують передачі з передаточними числами  $u \leq 4$ .

Швидкість руху пасів у передачах загального призначення не перевищує 30 м/с. Спеціальні швидкохідні паси допускають при понижений довговічності швидкості до 50 і навіть до 100 м/с.

ККД пасових передач різних типів становить близько 0,90-0,97. Порівняно з іншими видами механічних передач пасова передача має деякі специфічні особливості, які визначають доцільність її застосування. Для оцінки пасової передачі порівняємо її із зубчастою передачею якій найпоширенішою. Тоді можна виділити такі основні переваги пасової передачі:




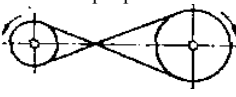



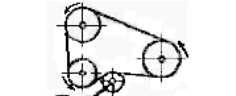
- можливість передавання руху між валами, що знаходяться на значній відстані (до 10 м і більше);
- плавність та безшумність роботи, які зумовлені еластичністю паса;
- передавання руху кільком паралельно розміщеним валам із можливістю регулювання натягу паса;
- запобігання різкому перевантаженню елементів машини внаслідок пружності паса та можливості його проковзування на шківів;

- простота конструкції, обслуговування та догляду під час експлуатації.
- До недоліків пасової передачі належать:
- неможливість виконання малогабаритних передач (для однакових умов навантаження діаметри шківів майже в 5 разів більші, ніж діаметри зубчастих коліс);
- несталість передаточного числа через можливе проковзування паса;
- підвищене навантаження валів та їхніх опор, що пов'язане потребою доволі високого попереднього натягу паса;
- низька довговічність приводних пасів (у межах 1000-5000 год.).

Зазначені недоліки не є перешкодою для застосування пасових передач у приводах електрогенераторів та різних металообробних верстатів, у робочих механізмах текстильної та паперової промисловості, у приводах вентиляційних систем, сільськогосподарських машинах та в різних приладах, наприклад, магнітофонах.

Пасові передачі можна класифікувати за різними ознаками. Основні типи пасових передач, що характеризуються формою поперечного перерізу паса, розміщенням валів у просторі та призначенням, наведено в табл. 3.4.

Таблиця 3.4

Передача за формою поперечного перерізу паса	За розміщенням валів та призначенням	
	Передача	Призначення
Плоскопасова 	Відкрита 	Використовується при паралельному розміщенні валів та однаковому напрямі їхнього обертання
Клинопасова 	Перехресна 	Застосовується при паралельному розміщенні валів та протилежному напрямі їхнього обертання
Кругло пасова 	Напівперехресна 	Використовується у разі передавання руху між валами, осі обертання яких мимобіжні в просторі
З полкліновим пасом 	Багатошківна із натяжним роликком 	Застосовується для передавання руху кільком паралельно розміщеним валам із можливістю регулювання натягу паса

До пасових передач умовно належить за назвою та формою зубчато-пасова передача, яка має зубці на внутрішньому боці паса, а на шківі – відповідні западини. Отже, передача працює за принципом зачеплення, а не тертя. Зубчато-пасові передачі мають малі габарити, у них відсутнє ковзання паса на шківах, можна забезпечити великі передаточні числа, ККД досягає 0,92...0,98, на вали передаються значно менші навантаження.

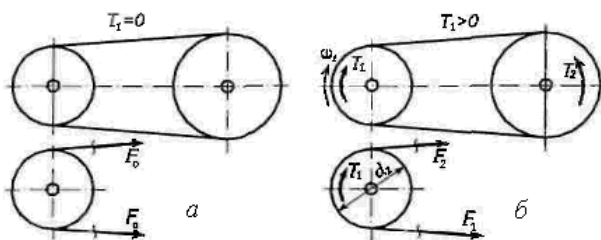


Рисунок 3.28

**Сили та напруження у вітках пасової передачі.** Для створення умов виникнення сил тертя між пасом та шківами пас треба встановити на шківи із деяким попереднім натягом. На рисунок 3.28,а показана пасова передача у передпусковому стані, тобто без навантаження ( $T_1 = T_2 = 0$ ) (в стані спокою). В такому разі вітки паса навантажені тільки зусиллям попереднього натягу  $F_0$ , яке спричинює в довільному поперечному перерізі площі  $A$  паса напруження попереднього натягу

$$\sigma_0 = F_0 / A. \quad (3.31)$$

Після прикладення робочого навантаження (обертові моменти  $T_1$  на ведучому шківі і  $T_2$  на веденому шківі) зусилля у вітках паса змінюється (рис. 3.28,б): у ведучій вітці зусилля збільшується і стає  $F_1$ , а у веденій зменшується і стає  $F_2$ . За умовою рівноваги шківа маємо:

$$T_1 = (F_1 - F_2)d/2 \quad \text{або} \quad F_1 - F_2 = F_t. \quad (3.32)$$

де  $F_t = 2T_1 / d_1$  – окружна сила на шківі, або корисне навантаження паса.

Зв'язок між  $F_0$ ,  $F_1$  та  $F_2$ , можна встановити з таких міркувань. Довжина паса не залежить від навантаження і залишається незмінною як у ненавантаженій, так і у навантаженій передачі. Відповідно додаткове витягування ведучої вітки компенсується однаковим скороченням веденої вітки. Тому збільшення зусилля у ведучій вітці на  $\Delta F$  забезпечує зменшення зусилля у веденій вітці на  $\Delta F$  (при лінійній залежності між силою та деформацією), тобто

$$F_1 = F_0 + \Delta F; \quad F_2 = F_0 - \Delta F.$$

Записані два рівняння дозволяють отримати вираз

$$F_1 + F_2 = 2 F_o. \quad (3.33)$$

Тепер із рівностей (3.32) та (3.33) випливає

$$F_1 = F_o + 0,5 F_t; \quad F_2 = F_o - 0,5 F_t. \quad (3.34)$$

Ці два рівняння виражають сили натягу ведучої та веденої віток залежно від сили попереднього натягу  $F_o$  та корисного навантаження  $F_t$  але не розкривають тягової здатності передачі, яка пов'язана із силами тертя між пасом та шківом.

Співвідношення сил натягів  $F_1$  ведучої та  $F_2$  веденої віток під час роботи передачі (без урахування дії відцентрових сил) визначають за відомим рівнянням Ейлера, отриманим для гнучкої нерозтяжної нитки, що ковзає по циліндричній поверхні:

$$F_1 / F_2 = e^{f\alpha},$$

Отже, маємо співвідношення між зусиллями у вітках паса з урахуванням сили тертя між пасом та шківом:

$$F_1 = F_2 e^{f\alpha}, \quad (3.35)$$

де  $e$  – основа натурального логарифму;

$f$  – коефіцієнт тертя між пасом і шківом;

$\alpha$  – кут обхвату пасом меншого шківа.

Розв'язуючи спільно рівняння (3.34) та (3.35), матимемо:

$$F_1 = F_t e^{f\alpha} / (e^{f\alpha} - 1); \quad F_2 = 1 / (e^{f\alpha} - 1); \quad F_o = 0,5(e^{f\alpha} + 1) / (e^{f\alpha} - 1). \quad (3.36)$$

Формули (3.36) визначають зв'язок сил натягу віток навантаженої силою  $F_t$ , пасової передачі з факторами тертя  $f$  і кутом  $\alpha$ .

Напруження в поперечних перерізах ведучої та веденої віток можна знайти, поділивши праві та ліві частини рівнянь (3.35) на площу  $A$  перерізу паса:

$$\sigma_1 = \sigma_0 + 0,5 \sigma_t; \quad \sigma_2 = \sigma_0 - 0,5 \sigma_t, \quad (3.37)$$

де  $\sigma_t = F_t / A$  – напруження в пасі від робочого навантаження (корисне напруження в пасі).

**Зусилля та напруження в пасі від дії відцентрових сил.** Рух паса по криволінійних траєкторіях (на шківках) зумовлює появу відцентрових сил, які додатково навантажують пас.

Додатковий натяг паса від дії відцентрових сил

$$F_v = \rho A v^2, \quad (3.38)$$

а відповідне напруження в поперечних перерізах паса від дії на нього відцентрових сил

$$\sigma_v = 10^{-6} \rho v^2. \quad (3.39)$$

У формулах (3.38) та (3.39):  $\rho$  – густина матеріалу паса ( $\text{кг/м}^3$ );  $v$  – швидкість паса ( $\text{м/с}$ );  $A$  – площа перерізу паса ( $\text{м}^2$ );  $\sigma_v$  – напруження (МПа);  $F_v$  – додаткова сила (Н).

Із формул (3.38) та (3.39) видно, що зусилля  $F_v$  та напруження  $\sigma_v$  від дії відцентрових сил не залежать від діаметрів шківів і однакові для всіх поперечних перерізів паса.

Відмітимо, що дія відцентрових сил негативно впливає на тягову здатність пасової передачі, оскільки ослаблюється притискання паса до шківів. Якщо  $F_v \geq F_o$  або  $\sigma_v \geq \sigma_0$ , то зникає взаємодія паса зі шківами.

**Напруження від згину паса на шківках.** При обгинанні шківів у перерізах паса виникають напруження згину. У плоскому пасі нейтральний шар у перерізі збігається із середнім шаром і найбільші напруження згину можна визначити за відомою формулою

$$\sigma_{зг} = E(y_{\max}/R).$$

Ураховуючи, що радіус кривизни нейтрального шару паса  $R \approx d/2$ , а відстань максимально віддалених точок перерізу паса від нейтрального шару  $y_{\max} = \delta/2$ , отримаємо формулу для визначення напружень згину в пасі:

$$\sigma_{зг} = E\delta/d, \quad (3.40)$$

де  $E$  – модуль пружності матеріалу паса.

Таким чином, основним фактором, який визначає напруження згину, є відношення товщини паса  $\delta$  до діаметра шківів  $d$ . Чим менше це відношення, тим менше напруження згину в пасі.

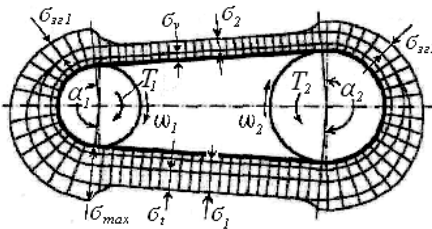


Рисунок 3.39

### Сумарні напруження в перерізах паса.

Вище було встановлено, що в усіх перерізах паса навантаженої передачі діє однакове напруження  $\sigma_v$ ; у перерізах ведучої вітки додатково мають місце напруження  $\sigma_i$ , а у перерізах веденої вітки – напруження  $\sigma_2$ , різниця між якими дорівнює напруженню  $\sigma_i$  від корисного навантаження; у перерізах відрізків паса, розміщених на шківках, діють відповідні напруження згину  $\sigma_{зг1}$  та  $\sigma_{зг2}$ . За цими складовими напружень можна побудувати діаграму розподілу напружень по довжині паса (рис. 3.39).

Із діаграми розподілу напружень видно, що максимальне напруження спостерігається у ведучій (нижній) вітці в тому перерізі паса, який набігає на менший ведучий шків:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_v + \sigma_{зг1} = \sigma_0 + 0,5 \sigma_i + \sigma_v + \sigma_{зг1}. \quad (3.41)$$

Мінімальне напруження виникає в перерізах веденої (верхньої) вітки паса:

$$\sigma_{\min} = \sigma_2 + \sigma_v = \sigma_0 - 0,5 \sigma_t + \sigma_v. \quad (3.42)$$

Оскільки пас рухається відносно шківів, напруження в його окремому поперечному перерізі не залишається постійним у часі. Характер зміни в часі сумарного напруження у довільному перерізі паса наведено на рисунок 3.40.

**Навантаження валів пасової передачі.** Сили натягу віток паса передаються на вали передачі та їхні опори. Відповідно до рисунку 3.41 рівнодійну  $R$  сил натягу  $F_1$ , та  $F_2$  віток можна визначити за формулою

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos 2\beta} \approx 2F_0 \sin(\alpha/2). \quad (3.43)$$

Дією відцентрової сили тут у розрахунках можна знехтувати, оскільки при середніх швидкостях паса вона незначна і спричинює лише розвантаження валів (відцентрова сила врівноважується у пасі).



Рисунок 3.40

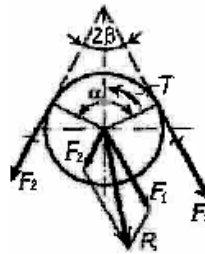


Рисунок 3.41

**Вибір параметрів пасової передачі.** Проектуючи пасові передачі, треба вибрати чи розрахувати такі параметри, що впливають на роботоздатність передач (рис. 3.42): діаметри шківів  $d_1$ ,  $d_2$ , міжосьову відстань  $a$ , кут нахилу віток  $\beta$ , кути обхвату шківів  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , довжину паса.

Діаметр  $d_1$  меншого шківів обмежується напруженнями згину в пасі, які виникають при обгинанні шківів. Для пасів рекомендують брати такі співвідношення між діаметром  $d_1$  та товщиною паса  $\delta$ :  $d_1/\delta \geq 30...40$  – гумотканинні паси;  $d_1/\delta \geq 25...30$  – бавовняні паси;  $d_1/\delta \geq 25...35$  – шкіряні паси;  $d_1/\delta \geq 70...80$  – синтетичні паси.

Орієнтовно при проектному розрахунку плоскостасової передачі діаметр  $d_1$ , мм, меншого ведучого шківів можна визначити за емпіричною залежністю

$$d_1 = (520...610) \sqrt[3]{P_1/\omega_1}, \quad (3.44)$$

де  $P_1$  – потужність на ведучому шківів, кВт;

$\omega_1$  – кутова швидкість, рад/с.

Діаметр  $d_1$  меншого шківa клинопасової передачі беруть залежно від вибраного типу перерізу паса.

Під час передавання зусилля у ведучій та веденій вітках пасової передачі не рівні між собою. Порівняно із зусиллям попереднього натягу зусилля у ведучий вітці збільшується, а у веденій зменшується. Тому робота передачі супроводжується пружним ковзанням паса на шківaх. Для правильно відрегульованих пасових передачах відносне ковзання не перевищує 0,015-0,020 і тому допускається передаточне число визначати спрощеною формулою не враховуючи ковзання

$$u = d_2/d_1. \quad (3.45)$$

Діаметр  $d_2$  більшого шківa для плоско- і клинопасової передач визначають за потрібним передаточним числом із співвідношення  $d_2 = u d_1$ . Остаточні діаметри  $d_1$  та  $d_2$  повинні бути узгоджені з відповідним стандартом.

Міжосьова відстань  $a$  пасової передачі залежить від конструкції машини або її привода. Для відкритої плоскпасової передачі доцільно брати  $a = (2...3) \cdot (d_1 + d_2)$ , а для клинопасової передачі  $a = (1...2) \cdot (d_1 + d_2)$ . При малих міжосьових відстанях передачі і відповідно малих довжинах паса маємо підвищену частоту пробігів паса, що негативно впливає на його довговічність, а при значних міжосьових відстанях можуть виникати недопустимі поперечні коливання віток паса.

Кут нахилу віток  $\beta$  до лінії центрів шківів (рис. 3.42) визначається із допоміжного прямокутного трикутника  $O_1BO_2$ :

$\sin \beta = (BO_2)/(O_1O_2) = (d_2 - d_1)/(2a)$ . Оскільки для пасових передач кут  $\beta$  малий при  $u \leq 5$  і рекомендованих міжосьових відстанях, то можна брати

$$\beta = (d_2 - d_1)/(2a). \quad (3.45)$$

Кути обхвату пасом шківів відповідно до рис. 3.42 визначають у радіанах за формулами:

$$\alpha_1 = \pi - 2\beta = \pi - (d_2 - d_1)/a; \quad \alpha_2 = \pi + 2\beta = \pi + (d_2 - d_1)/a. \quad (3.46)$$

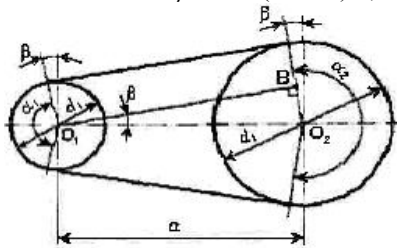


Рисунок 3.42

Кути обхвату шківів впливають на тягову здатність передачі. Тому рекомендують брати:

$\alpha_1 \geq 150^\circ$  – для плоскпасової передачі;

$\alpha_1 \geq 120^\circ$  – для клинопасової.

Довжину паса  $l$  знаходять



як суму довжин прямолінійних відрізків та довжин дуг на кутах обхвату (рис. 3.42)

$$l = 2a + \pi (d_1 + d_2)/2 + (d_1 - d_2)^2/(4a). \quad (3.47)$$

Міжосьову відстань пасової передачі за взятою довжиною паса та діаметрами шківів на підставі виразу (3.53) визначають за формулою

$$a = [2l - \pi (d_1 + d_2) + \sqrt{[2l - \pi (d_1 + d_2)]^2 - 8(d_1 - d_2)^2}] / 8. \quad (3.48)$$

При розрахунках довжин пасів та міжосьових відстаней клинопасових передач оперують розрахунковими діаметрами шківів, які визначаються розміщенням нейтрального шару паса щодо шківа.

Діаметр натяжного (відтяжного) ролика при  $d_1 < d_2$  беруть: для плосkopасової передачі  $d_p = (0,8 \dots 1)d_1$ , для клинопасової передачі  $d_p \geq d_1$ .

Основними критеріями роботоздатності пасових передач є тягова здатність або міцність зчеплення паса зі шківками та довговічність.

Розрахунок пасової передачі на тягову здатність базується на експериментальних даних отриманих для існуючих типів пасів.

Поки що відсутні достатні та точні дані, які потрібні для визначення строку служби паса в конкретній передачі. Пас працює при змінних напруженнях, до того ж один цикл зміни напружень відповідає повному пробігу паса (рис. 3.40) і розрахунок пасових передач на довговічність виконується досить умовно. Строк служби (ресурс) пасів при усереднених режимах навантаження становить у середньому 2000 годин.

### Контрольні запитання до пункту 3.3.3

1. Основні переваги та недоліки пасової передачі порівняно із зубчастою передачею.
2. Основні типи пасових передач.
3. Як визначається передаточне число пасової передачі?

### 3.3.4 Зубчасті передачі

Зубчасті передачі є найпоширенішими механічними передачами в сучасному машино- та приладобудуванні. Їх застосовують як у механізмах найточніших приладів, де розміри коліс вимірюються кількома міліметрами, так і в найпотужніших машинах із розмірами коліс до 10 м. Зубчасті передачі здатні працювати в різноманітних умовах із окружними швидкостями від зовсім малих до 150 м/с і більше.

Зубчаста передача складається з двох коліс, на ободах яких розміщені зубці. Зубці цих коліс входять у зачеплення між собою і завдяки їхній взаємодії забезпечують передавання обертового руху від одного колеса до другого. Менше з двох спряжених коліс називають шестірнею, більше – колесом; термін «зубчасте колесо» належить до обох коліс передачі.

Переважно зубчаста передача призначена для передавання обертового руху, але її можна використовувати і як передачу для перетворення обертового руху в поступальний (передача зубчасте колесо – рейка).

Зубчасті передачі можуть використовуватись для передавання обертового руху між довільно розміщеними в просторі валами, мають високий ККД ( $\eta = 0,94...0,99$ ), їх можна легко та зручно компонувати у окремі агрегати для серійного виробництва (редуктори), вони забезпечують достатній діапазон передаточних чисел ( $u \leq 20$ ).

Порівняно з іншими механічними передачами зубчасті передачі мають такі переваги: сталість передаточного числа; високу надійність та довговічність роботи; великий діапазон навантажень та компактність конструкції; незначні навантаження на вали передачі та їхні опори.

До недоліків зубчастих передач належать такі: порівняно високі вимоги до точності виготовлення та монтажу; шум при роботі з високими швидкостями; потреба в постійному змащуванні; неможливість безступеневої зміни передаточного числа.

У зв'язку з великою відмінністю умов використання зубчастих передач форма елементів зубчастих зачеплень та конструкції зубчастих коліс дуже різноманітні. Тому зубчасті передачі та колеса можна класифікувати за цілим рядом ознак.

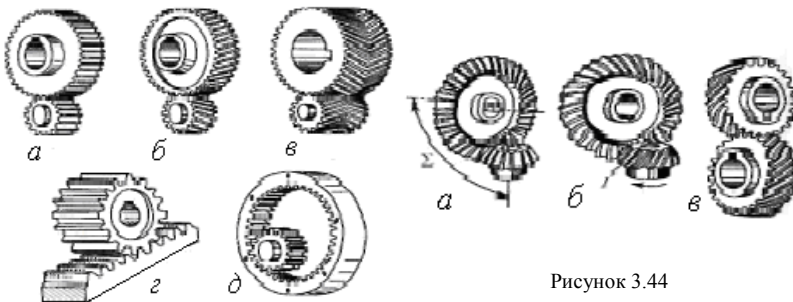


Рисунок 3.44

Рисунок 3.43

За *формою профілю зубців* розрізняють евольвентні зубчасті передачі, що мають переважне поширення, та неевольвентні передачі. До останніх відносять зубчасті передачі із круговим профілем зубців (передачі із зачепленням Новикова) та передачі із циклоїдальним профілем зубців, які здебільшого застосовують у приладах та годинникових механізмах.

За *взаємним розміщенням осей валів* зубчасті передачі бувають:

із паралельними осями валів – циліндричні передачі зовнішнього зачеплення (рис. 3.43,а,б,в), передачі типу зубчасте колесо – рейка (рис. 3.43,г) та циліндричні передачі внутрішнього зачеплення (рис. 3.43,д);

із валами, осі яких перетинаються – конічні зубчасті передачі (рис. 3.44,а,б);

із мимобіжними в просторі осями валів – гвинтові зубчасті передачі (рис. 3.44,в).

За *розміщенням на ободі та формою зубців* розрізняють передачі та колеса: прямозубі (рис. 3.43,а,г,д), косозубі (рис. 3.43,б), шевронні (рис. 3.43,в) та з круговими зубцями (рис. 3.44,б).

За *конструктивним оформленням* зубчасті передачі бувають: закриті (розміщені у спеціальному корпусі, що забезпечує їх постійним змащуванням) і відкриті (працюють без мастила або змащуються періодично).

За *окружною швидкістю* зубчастих коліс передачі поділяють на тихо- ( $v \leq 3$  м/с), середньо- ( $v = 3 \dots 15$  м/с) та швидкохідні ( $v > 15$  м/с).

### ***Основи теорії зубчастого зачеплення***

Основною кінематичною умовою для профілів зубців зубчастих коліс є умова сталості миттєвого передаточного числа. Цю умову задовольняють багато кривих, за допомогою яких можуть бути окреслені профілі зубців. Однак профілі зубців повинні бути такими, щоб сприяти найпростішому виготовленню зубчастих коліс із різним числом зубців та забезпечувати високий ККД передачі, достатній міцності зубців тощо. Цим вимогам найбільше відповідає евольвентне зачеплення (рис. 3.45), і тому його широко застосовують у зубчастих передачах загального машинобудування.

У 1954 р. радянський інженер М.Л. Новиков запропонував зачеплення, зуби якого профілюються по дугах кіл. Пошуки нового виду зачеплення були пов'язані з тим, що навантажувальна здатність евольвентної передачі обмежена через малі значення зведених радіусів кривизни робочих поверхонь зубів і, отже, значних контактних напружень. Зуби коліс у передачі Новикова гвинтові, і профілі їх обрисо-

вуються дугами кіл, близьких за величиною радіусів. Тому робочі поверхні зубів – круговинтові.

Опуклий профіль зуба шестірні обрисовується з полюса  $P$  (рис. 3.46) як із центра, наприклад, радіусом  $\rho_1 = 1,4m_n$ , угнутий профіль зуба колеса – дугою кола радіуса  $\rho_2 = 1,55m_n$ , де  $m_n$  – нормальний модуль. Зуби стикаються не в полюсі (передача позаполюсна), а в деякій точці  $M$ , що лежить на лінії  $N - N$ . Якщо різниця між радіусами  $\rho_1$  і  $\rho_2$  мала, то після нетривалого припрацювання зуби починають стикатися по поверхні. Це значно зменшує контактні напружки. Лінія дії сили на вгнуті зуби проходить близько їх основи, що збільшує міцність зубів і на згин.

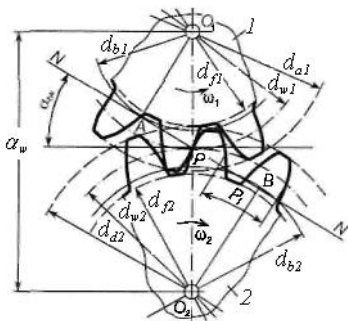


Рисунок 3.45

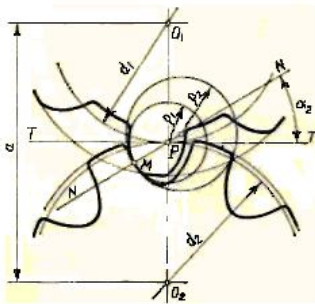


Рисунок 3.46

Лінія зачеплення круговинт-ової передачі розміщена паралельно осям коліс, і точка контакту зубів переміщується вздовж цієї лінії, а не по лінії, перпендикулярній до поверхні зубів у торцевій площині, як в евольвентному зачепленні. Тому коефіцієнт торцевого перекриття передач Новикова дорівнює нулю і передачі повинні бути обов'язково косозубими. Навантажувальна здатність передачі із зачепленням Новикова (при однакових розмірах й інших умовах) вища. Розрахунок передач із зачепленням Новикова можна знайти в підручниках з деталей машин та в довідковій літературі.

Евольвентне зачеплення, ідея якого належить Л. Ейлеру, має істотні технологічні та експлуатаційні переваги: простота побудови евольвентних профілів зубців; евольвентні зубці як прямозубих, так і косозубих коліс можуть бути точно нарізані простим інструментом рейкового типу; одним інструментом можна нарізати колеса з різним числом зубців, оскільки профіль евольвентного зубця окреслюється однотипною кривою; правильність евольвентного зачеплення не порушується при відхиленнях міжосьової відстані коліс від розрахункового значення; евольвентне зачеплення допускає

виправлення (коригування) робочого профілю зубців із метою вибору оптимальних відрізків евольвенти, що забезпечує кращу роботоздатність, ККД та інші характеристики передачі.

Зубці з евольвентним профілем можуть бути нарізані на зубчастих колесах як зовнішнього, так і внутрішнього зачеплення.

На рисунку 3.3.12 показане зачеплення зубців з евольвентним профілем двох зубчастих коліс. При перекочуванні прямої  $NN$  без ковзання по колу діаметром  $d_{b1}$  точка  $P$ , що належить прямій  $NN$ , описує евольвенту, яка є профілем зубця колеса 1, а при перекочуванні прямої  $NN$  по колу діаметром  $d_{b2}$  точка  $P$  описує евольвенту, яка є профілем зубця колеса 2. Пряма  $NN$  називається відтворюючою, а кола діаметром  $d_{b1}$ ,  $d_{b2}$  називаються основними. Точка  $P$  перетину спільної відтворюючої прямої  $NN$  із лінією центрів  $O_1O_2$  зубчастих коліс називається полюсом зачеплення. Пряма  $NN$  є спільною нормаллю у точці  $P$  до евольвент, що описують профілі зубців коліс 1 і 2, а відрізки  $AP$  і  $BP$  є відповідними радіусами кривизни профілів зубців у точці  $P$  їхнього дотикання. При обертанні зубчастих коліс точка дотикання профілів зубців постійно знаходиться на лінії  $NN$ , тобто спільна нормаль до профілів зубців займає постійне положення.

*Основний закон зачеплення стверджує, що профілі зубців двох коліс повинні бути такими, щоб спільна нормаль до них у довільній точці дотикання профілів проходила через полюс зачеплення  $P$ , який ділить між собою відстань  $O_1O_2$  на відрізки, обернено пропорційні кутовим швидкостям зубчастих коліс.*

Отже, евольвентне зачеплення відповідає вимогам основного закону зачеплення, оскільки точка  $P$  займає постійне положення на лінії центрів  $O_1O_2$ . Відповідно до основного закону зачеплення

$$\omega_1/\omega_2 = (PO_2) / (PO_1) = d_{w2}/d_{w1} = u. \quad (3.49)$$

Рівність окружних швидкостей зубчастих коліс [за виразом (3.49)  $\omega_1 d_{w1} = \omega_2 d_{w2}$ ] свідчить про те, що при обертанні зубчастих коліс кола діаметрами  $d_{w1}$  та  $d_{w2}$  перекочуються одне по одному без ковзання. Ці кола називаються початковими колами, а відповідні їм циліндри у циліндричній і конуси у конічній зубчастих передачах називаються початковими циліндрами і початковими конусами. Діаметри  $d_{w2}$ , та  $d_{w1}$  називаються початковими діаметрами зубчастих коліс.

Єдиним параметром, що визначає форму евольвенти, є діаметр основного кола  $d_b$ , оскільки кожному конкретному колу відповідає одна певна евольвента. Зі збільшенням діаметра  $d_b$  евольвента стає більш пологою, а при  $d_b = \infty$  перетворюється у пряму лінію. У такому разі зубчасте колесо перетворюється в зубчасту рейку, яка має прямолінійний профіль зубців.

Із наведеного вище випливає, що відтворююча пряма (спільна нормаль  $NN$ ) є лінією зачеплення, тобто геометричним місцем точок контакту спряжених зубців при обертанні зубчастих коліс.

Кут  $\alpha_{tw}$  між лінією зачеплення та прямою, перпендикулярною до міжосьової лінії, називається кутом зачеплення.

Співвісна циліндрична поверхня зубчастого колеса, яка є базою для визначення розмірів елементів зубців, називається ділильною поверхнею (ділить зубець на дві частини – головку та ніжку).

Концентричне коло, що лежить в торцевому перерізі колеса і належить ділильній поверхні, називається ділильним колом. Діаметри ділильних кіл позначають  $d_2$  і  $d_1$  і називають ділильними діаметрами зубчастих коліс. На рисунку 3.45 ділильні та початкові кола збігаються.

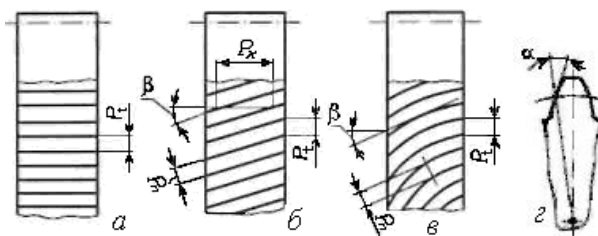


Рисунок 3.47

За висотою зубці обмежені поверхнею вершин зубців та поверхнею западин. Концентричне коло, що належить поверхні вершин, називається колом вершин зубців, а концентричне коло, що належить поверхні западин, називається колом западин. Діаметри кіл вершин зубців позначаються  $d_{a1}$  і  $d_{a2}$  (відповідно для шестірни та колеса на рисунку 3.3.12) і називаються діаметрами вершин зубців. Відповідно діаметри кіл западин позначаються  $d_{f1}$  і  $d_{f2}$  і називаються діаметрами западин.

Відстань між однойменними профілями двох сусідніх зубців по дузі концентричного кола зубчастого колеса називається коловим кроком зубців і позначається  $P_t$  (рис. 3.45 і рис. 3.47,а). Розрізняють ділильний, початковий та інші колові кроки зубців, що відповідають ділильному, початковому та іншим концентричним колам зубчастого колеса. Для косих та криволінійних зубців (рис. 3.47,б,в), крім колового кроку  $P_t$ , розрізняють нормальний крок зубців  $P_n$ , який є найкоротшою відстанню по ділильному або однотипному співвісному колу зубчастого колеса між однойменними профілями двох сусідніх зубців, а також осьовий крок зубців  $P_x$ .

Центральний кут концентричного кола зубчастого колеса, який дорівнює  $2\pi/z$ , де  $z$  – число зубців зубчастого колеса, називається кутовим кроком зубців і позначається  $\tau$ .

Лінія перетину бічної поверхні зубця з ділильною, початковою або іншими співвісними поверхнями зубчастого колеса називається лінією зубця.

Гострий кут між лінією зубця та лінією перетину співвісної поверхні, якій належить ця лінія зубця, з площиною, що проходить через вісь зубчастого колеса, називається кутом нахилу лінії зубця, або кутом нахилу зубця. Кут нахилу зубця позначається  $\beta$  (рис. 3.47,б,в).

Із рисунку 3.47,б маємо зв'язок між  $P_n$  та  $P_t$  і  $P_x$ :

$$P_n = P_t \cos \beta; \quad P_x = P_n / \sin \beta. \quad (3.50)$$

Кут повороту зубчастого колеса від моменту входу зубця в зачеплення до моменту виходу його із зачеплення називається кутом перекриття і позначається  $\varphi_\gamma$ .

Відношення кута перекриття зубчастого колеса передачі до його кутового кроку називається коефіцієнтом перекриття і позначається  $\varepsilon_\gamma$ :

$$\varepsilon_\gamma = \varphi_\gamma / \tau. \quad (3.51)$$

Коефіцієнт перекриття визначає середнє число пар зубців, що одночасно знаходяться в зачепленні. Якщо  $\varepsilon_\gamma = 1,6$ , то це означає, що 0,4 періоду зачеплення одного зубця у зачепленні знаходиться одна пара зубців, а 0,6 періоду зачеплення того самого зубця у зачепленні знаходяться дві пари зубців.

Зі збільшенням коефіцієнта перекриття підвищуються плавність роботи та несуча здатність передачі, зменшуються динамічні навантаження та шум передачі. Тому у швидкохідних та високонавантажених передачах замість прямозубих використовують косозубі, шевронні колеса або колеса з криволінійними зубцями, які забезпечують більші коефіцієнти перекриття.

Коефіцієнт перекриття завжди повинен бути більшим за одиницю, інакше під час роботи зубчастої передачі можуть виникнути моменти, коли у зачепленні не буде знаходитися жодна пара зубців і передача буде працювати з ударами.

Лінійна величина, що в  $\pi$  разів менша за коловий крок зубців, називається коловим модулем зубців  $m_t$ , а лінійна величина, що в  $\pi$  разів менша за нормальний крок зубців, називається нормальним модулем зубців  $m_n$ :

$$m_t = P_t / \pi; \quad m_n = P_n / \pi. \quad (3.52)$$

Для косих та криволінійних зубців на основі формул (3.50) та (3.52) маємо співвідношення

$$m_n = m_t \cos \beta, \quad (3.53)$$

а для прямих зубці  $m_n = m_t = m$ .

Модулі зубців стандартизовані (у прямозубих колесах колові  $m_t = m$ , а в косозубих нормальні  $m_n$ ). У стандарті (ГОСТ 9563-60) наведено значення модулів, починаючи від 0,05 до 100 мм. Стандартні модулі від 1 до 18 мм такі:

1-й ряд	1	1,25	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10	12	16
2-й ряд	1,125	1,375	1,75	2,25	2,75	3,5	4,5	5,5	7	9	11	14	18

Модуль зубців є основною характеристикою розмірів вінців зубчастих коліс. Надалі стандартний модуль зубців прямозубих коліс будемо позначати  $m$  (без індексу), а при визначенні розмірів косозубих коліс будемо використовувати стандартний нормальний модуль  $m_n$ .

Довжина ділильного кола зубчастого колеса

$$\pi d = z P_1 = z P_n / \cos \beta.$$

Із записаного співвідношення визначається ділильний діаметр косозубого колеса

$$d = m_n z / \cos \beta. \quad (3.54)$$

Для прямозубого зубчастого колеса при  $\beta = 0$  відповідно маємо

$$d = m z. \quad (3.55)$$

До параметрів евольвентного зачеплення належить також кут профілю зубця. Гострий кут у поперечному перерізі зубця між дотичною до профілю зубця в даній точці та лінією, яка проходить через цю точку і центр колеса, називається кутом профілю зубця (рис. 3.47,г). Розрізняють ділильний  $\alpha$ , початковий  $\alpha_w$  та інші кути профілю зубця, які відповідають точкам на ділильній, початковій та інших співвісних циліндричних поверхнях. У разі збігання початкових та ділильних кіл початковий кут профілю зубця  $\alpha_w$  дорівнює куту зачеплення  $\alpha_{\text{гв}}$ .

Не можна змішувати поняття початкового та ділильного кіл зубчастих коліс. Ділильне коло – постійна геометрична фігура даного зубчастого колеса, діаметр якого залежить тільки від модуля та числа зубців. Початкове коло – поняття кінематичне й у окремо взятого колеса такого кола немає. Про початкові кола говорять, коли розглядають колеса, що знаходяться в зачепленні. Як зазначалось вище, у полюсі зачеплення при обертанні зубчастих коліс зубці перекочуються один по одному без ковзання.

Якщо міжосьова відстань зубчастої передачі

$$a_w = (d_1 + d_2)/2 = m_n (z_1 + z_2)/(2 \cos \beta), \quad (3.56)$$



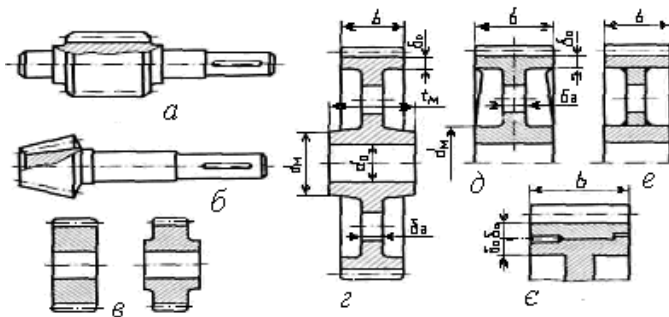


Рисунок 3.48

то ділильні і початкові кола зубчастих коліс збігаються. У разі зміни міжосьової відстані передачі  $a_w$ , діаметри ділильних кіл лишаються такими самими, а діаметри початкових кіл змінюються пропорційно зміні  $a_w$ . Тоді

$$d_{w1} = 2a_w/(u+1); \quad d_{w2} = 2a_w u/(u+1); \quad (3.57)$$

де  $u$  – передаточне число зубчастої передачі за співвідношенням (3.49).

Його також визначають і як відношення чисел зубців зубчастих коліс:

$$u = z_2 / z_1. \quad (3.58)$$

**Конструкції зубчастих коліс та їхня точність** залежить від їхніх розмірів, матеріалу, способу і технології виготовлення заготовки, експлуатаційних вимог. Якщо діаметр кола впадин мало відрізняється від діаметра вала, шестірню виготовляють із валом як одну деталь (рис. 3.3.15,а,б). Зубчасті колеса, що допускають посадку та закріплення на валу, як правило, виготовляють насадними. Це дає змогу підбирати різні найвигідніші матеріали і термообробку для вала і колеса, спрощує технологію виготовлення та дає можливість після спрацювання зубців колеса зробити його заміну, зберігаючи при цьому вал. Однак вали, виготовлені разом із зубчастими колесами, мають більшу жорсткість, що позитивно впливає на роботу зубчастої передачі.

Зубчасті колеса невеликого діаметра ( $d \leq 200$  мм) можуть виготовлятися із круглого прокату, кованих або штампованих заготовок у вигляді суцільного диска без маточини або з маточиною (рис. 3.48, в).

Колеса середніх діаметрів ( $d \leq 600$  мм) виготовляють із заготовок куванням, штампуванням або литтям. Здебільшого такі колеса мають дискову конструкцію (рис. 3.48, г, д).

Наближені розміри елементів цих коліс такі: діаметр маточини  $d_m = (1,8...2,0) d_0$ ; довжина маточини  $l_m = (1,0...1,2) b$ ; товщина диска  $\delta_o = (0,25...0,35) b$ ; товщина обода  $\delta_0 = (3...4) m$ .

Для великогабаритних передач заготовки для зубчастих коліс виготовляють литтям (рис. 3.3.15,д) або зварюванням (рис. 3.48,е). При використанні для зубчастих вінців високоякісних сталей інколи застосовують бандажовані зубчасті колеса (рис. 3.48,е). У такому разі зубчастий вінець насаджують на центральну колісну частину з гарантованим натягом і додатково закріплюють гвинтами.

Одним з основних показників якості зубчастих передач є їхня точність. Точність виготовлення зубчастих коліс та передач визначає не тільки їхні кінематичні та експлуатаційні показники, а й такі характеристики, як інтенсивність шуму та вібрацій, а також істотно впливає на показники міцності передачі, довговічність її роботи, втрати на тертя тощо.

Основними показниками точності евольвентних зубчастих передач згідно зі стандартом є такі: кінематична точність; плавність роботи; контакт зубців; бічний зазор.

Кінематична точність характеризує найбільшу похибку кута повороту зубчастого колеса в межах його одного оберту, а для передачі – за певний цикл зміни відносного положення зубчастих коліс пари.

Плавність роботи оцінюють складовими повної похибки кута повороту зубчастого колеса, що багатократно повторюються за один його оберт.

Контакт зубців визначає точність (повноту) прилягання робочих поверхонь зубців спряжених у передачі коліс.

Бічний зазор регламентує гарантований (найменший) зазор між неробочими поверхнями зубців передачі і можливі межі його коливання. Бічний зазор оцінюється шістьма видами спряження зубчастих коліс – А, В, С, D, Е, Н. У спряженні виду «Н» мінімальний зазор дорівнює нулю, а в спряженні виду «А» мінімальний зазор найбільший. Найчастіше використовують спряження виду В і С.

За нормами кінематичної точності, плавності роботи та контакту зубців зубчасті передачі і колеса поділяють на 12 ступенів точності (із збільшенням номера ступеня точності точність зменшується). Найбільше розповсюдження в машинобудуванні мають зубчасті передачі зі ступенем точності 6, 7, 8, 9. Зубчасті передачі з прямими зубцями, що мають окружну швидкість до 15 м/с, а з непрямими зубцями до 25 м/с виготовляють за 6-м ступенем точності. Якщо окружні швидкості відповідно до 6 м/с і 10 м/с рекомендується ступінь точності 8.

Стандартами на допуски зубчастих передач установлена система умовних позначень точності та вимог до бокового зазору зубчастих передач і зубчастих коліс.

При однаковому ступені точності за нормами кінематичної точності, плавності роботи та контакту зубців для відповідного виду спряження умовне позначення складається із цифри та літери, розділених тире. Цифра означає ступінь точності, а літера – вид спряження зубців, наприклад:

6-В ГОСТ 1643-81 – для циліндричної зубчастої передачі;

7-С ГОСТ 1758-81 – для конічної зубчастої передачі.

### ***Матеріали для виготовлення і термообробка зубчастих коліс.***

Зубчасті колеса виготовляють із різноманітних матеріалів. Основним із них є сталь, яка допускає зміцнювальну термічну або хіміко-термічну обробку. Сталеві зубчасті колеса забезпечують високу несучу здатність та довговічність зубчастої передачі.

Для виготовлення зубчастих коліс найбільше застосування мають якісні вуглецеві сталі 40, 45, 50, сталі з підвищеним вмістом марганцю 40Г2, 50Г, леговані сталі 40Х, 40ХН, 40ХНМА, 35ХГСА та ін.

Залежно від твердості після термообробки сталеві зубчасті колеса умовно можна поділити на дві основні групи:

а) зубчасті колеса з твердістю  $H \leq 350$  НВ після нормалізації та поліпшення;

б) зубчасті колеса з твердістю  $H > 350$  НВ після об'ємного гартування, гартування СВЧ, цементації, азотування.

Із твердістю  $H \leq 350$  НВ зубчасті колеса нарізають після термообробки заготовки. При цьому досягається достатня точність виготовлення зубчастих коліс без використання дорогих фінішних операцій. Колеса цієї групи добре припрацьовуються, а зубці не піддаються крихкому руйнуванню при динамічних навантаженнях. Для ліпшого припрацьовування зубців твердість шестірні рекомендують призначати більшою від твердості колеса ( $H_1 \geq H_2 + 25 \dots 30$  НВ).

У косозубих та шевронних зубчастих передачах інколи призначають твердість зубців шестірні значно вищою, ніж твердість зубців колеса. (приблизно на 100 одиниць НВ). Цим досягається деяке підвищення несучої здатності зубчастих передач із косими зубцями.

Технологічні переваги сталей із твердістю  $H \leq 350$  НВ забезпечили їм широке застосування в умовах індивідуального та мало-серійного виробництва, у мало- та середньонавантажених передачах, якщо не ставляться жорсткі обмеження стосовно габаритних розмірів зубчастих передач. Такі сталі можуть бути використані для

виготовлення великогабаритних зубчастих коліс, термообробка яких утруднена.

Для виготовлення шестерні та колеса можна використовувати однакові або різні марки сталей.

Крім сталей для виготовлення великогабаритних тихохідних зубчастих коліс використовують чавуни, котрі достатньо стійки проти заїдання та спрацювання, але мають низку міцність на згин. У малонавантажених передачах широко застосовуються зубчасті колеса з неметалевих матеріалів.

**Види руйнування зубців зубчастих передач.** Під час роботи зубчастих передач зубці коліс періодично взаємодіють між собою, а лінія контакту міняє своє положення на поверхні зубців. Наявність ковзання поверхонь призводить до виникнення сил тертя між зубцями. Такий складний характер навантаження є причиною певного руйнування поверхонь зубців і зубців взагалі.

Найбільш характерними є такі види руйнування зубців: втомне викришування активних поверхонь, поломка зубців, відшаровування поверхневих шарів зубців, абразивне спрацювання, пластична деформація та заїдання зубців.

Втомне викришування активних поверхонь зубців пов'язане з дією циклічно змінних контактних напружень у поверхневих шарах матеріалу.

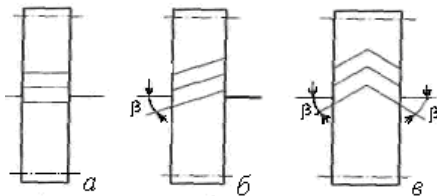


Рисунок 3.49

Основні заходи для запобігання викришування активних поверхонь зубців такі: обмеження контактних напружень; підвищення твердості матеріалів коліс термообробкою; підвищення точності виготов-

лення зубчастих коліс.

**Розмірні параметри прямо- та косозубих зубчастих передач.**

Основні розміри прямо- і косозубих зубчастих передач без коригування визначаються за подібними залежностями. Відмінністю косозубих коліс порівняно з прямозубими є те, що в косозубих лінія зубців нахилена під деяким кутом  $\beta$  до твірної діляльного циліндра (рис. 3.49,а,б). Різновидністю косозубих коліс є шевронні зубчасті колеса (рис. 3.49,в). Шевронне зубчасте колесо складається начебто з двох косозубих коліс, суміщених торцями так, щоб зубці мали протилежний нахил.

Кут нахилу зубців прямокубих коліс  $\beta = 0$ , косозубі колеса використовують із кутом нахилу зубців  $\beta = 8^\circ \dots 20^\circ$ , а у шевронних колесах беруть  $\beta = 20^\circ \dots 40^\circ$ .

Зважаючи на те, що косозубі (шевронні) зубчасті колеса можуть нарізуватись таким самим стандартним інструментом, як і прямокубі, кут профілю зубців таких коліс у їх нормальному перерізі  $\alpha_n = \alpha = 20^\circ$ .

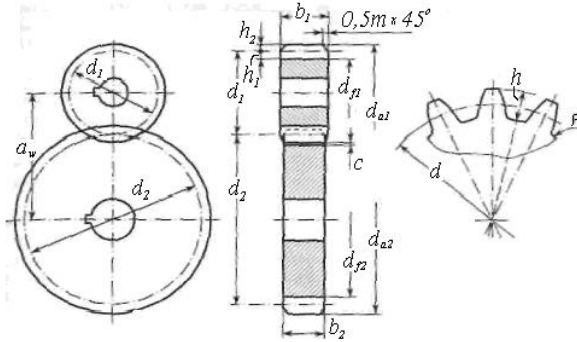


Рисунок 3.50

За стандартний модуль зубців косозубих (шевронних) коліс беруть модуль  $m_n$  також у нормальному перерізі зубців. У прямокубих колесах нормальний та коловий модулі однакові:

$$m = m_n = m_t.$$

Розміри зубців циліндричних зубчастих коліс (рис. 3.50) визначають за формулами, що наведені в табл. 3.5.

Таблиця 3.5

Елементи зубця	Колесо	
	прямокубе	косозубе (шевронне)
Висота		
- головки	$h_a = m$	$h_a = m_n$
- ніжки	$h_f = 1,25m$	$h_f = 1,25m_n$
- зубця	$h = h_a + h_f = 2,25m$	$h = h_a + h_f = 2,25m_n$
Радіальний зазор	$c = 0,25m$	$c = 0,25m_n$
Радіус кривизни перехідної кривої	$\rho_f = 0,38m$	$\rho_f = 0,38m_n$

Формули для розмірів вінців циліндричних зубчастих коліс із числами зубців  $z_1$  і  $z_2$ , що утворюють зубчасту передачу згідно з рисунку 3.50, подані в табл. 3.6.

Міжосьова відстань циліндричних зубчастих передач:

- прямокубої:

$$a_w = 0,5 (d_1 + d_2) = 0,5m(z_1 + z_2); \quad (3.59)$$

косозубої (шевронної)

$$a_w = 0,5m_n (z_1 + z_2)/\cos\beta. \quad (3.60)$$

Таблиця 3.6

Діаметривінців	Передача	
	прямозуба	косозуба (шевронна)
Ділильні	$d_1 = mz_1$ $d_2 = mz_2$	$d_1 = m_n z_1 / \cos \beta$ $d_2 = m_n z_2 / \cos \beta$
Вершин зубців	$d_{a1} = d_1 + 2h_a = d_1 + 2m$ $d_{a2} = d_2 + 2h_a = d_2 + 2m$	$d_{a1} = d_1 + 2h_a = d_1 + 2m_n$ $d_{a2} = d_2 + 2h_a = d_2 + 2m_n$
Западин	$d_{f1} = d_1 - 2h_f = d_1 - 2,5m$ $d_{f2} = d_2 - 2h_f = d_2 - 2,5m$	$d_{f1} = d_1 - 2h_f = d_1 - 2,5m_n$ $d_{f2} = d_2 - 2h_f = d_2 - 2,5m_n$

Ураховуючи те, що передаточне число зубчастої передачі  $u = z_1/z_2$ , ділильні діаметри зубчастих коліс (випадок, коли ділильні і початкові кола збігаються) можуть бути виражені через міжосьову відстань:

$$d_1 = 2a_w / (u + 1); \quad d_2 = 2a_w u / (u + 1). \quad (3.61)$$

Ширину зубчастого вінця  $b_2$  колеса (рис. 3.50) беруть залежно від міжосьової відстані передачі

$$b_2 = \psi_{ba} a_w, \quad (3.62)$$

де  $\psi_{ba}$  коефіцієнт ширини вінця, який беруть:  $\psi_{ba}=0,1...0,4$  – для прямозубих передач;  $\psi_{ba}=0,2...0,5$  – для косозубих та  $\psi_{ba}=0,4...0,8$  – для шевронних передач. Менші значення  $\psi_{ba}$  вживають при несиметричному або консольному розміщенні зубчастого колеса щодо опор вала, а також при твердості зубчастих коліс  $H > 350$  НВ.

Граничні значення  $\psi_{ba}$  повинні бути такими, щоб виконувались умови:

$$\psi_{ba} = b_2/d_1 = 0,5 \quad \psi_{ba}(u + 1) \leq 1 \text{ – для прямозубих передач,}$$

$$\psi_{ba} \leq 1,5 \text{ – для косозубих та } \psi_{ba} \leq 2,5 \text{ – для шевронних передач.}$$

Ширину зубчастого вінця шестірні  $b_1$  беруть на 2...5 мм більшою від ширини вінця колеса з метою забезпечення повноти контакту зубців по довжині в умовах можливих похибок у монтажі валів передачі в осьовому напрямі.

Загальний коефіцієнт перекриття зубчастої передачі [див. формулу (3.51)]

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta. \quad (3.63)$$

де  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\varepsilon_\beta$  – коефіцієнти торцевого та осьового перекриття зубців відповідно.

Для зубчастих передач коефіцієнт торцевого перекриття можна визначити за такою наближеною залежністю

$$\varepsilon_\alpha = [1,88 - 3,2 (1/z_1 + 1/z_2)] \cos \beta. \quad (3.64)$$

У прямозубих передачах ( $\beta = 0$ ) рекомендується  $\varepsilon_\alpha \geq 1,2$ , а в косозубих ( $\beta \neq 0$ ) –  $\varepsilon_\alpha \geq 1$ .

Коефіцієнт осевого перекриття  $\varepsilon_\beta$  виражається відношенням ширини зубчастого вінця колеса  $b_2$  до осевого кроку зубців  $P_x$ :

$$\varepsilon_\beta = b_2/P_x = (b_2 \sin \beta)/(\pi m_n). \quad (3.65)$$

У прямозубих зубчастих передачах  $\theta = 0$ , а у косозубих рекомендують брати  $\varepsilon_\beta \geq 1,1$ , що досягається вибором ширини вінця  $b_2$  при заданих  $\beta$  та  $m_n$ .

**Сили в зачепленні циліндричних коліс.** У навантаженій зубчастій передачі сила взаємодії зубців розподілена вздовж лінії їхнього контакту. Цю розподілену силу замінимо зосередженою силою, прикладеною до зубця в середньому нормальному його перерізі. Силами тертя, що виникають внаслідок ковзання профілів зубців, можна знехтувати, оскільки коефіцієнт тертя в зоні контакту малий, і тому таке припущення не впливає практично на остаточний результат.

На рисунку 3.51,а показане косозубе зубчасте колесо, яке навантажене обертовим моментом  $T_1$ . Зубці цього колеса взаємодіють із зубцями спареного зубчастого колеса. Схема взаємодії зубців показана в їх середньому нормальному перерізі  $A-A$ .

Сила  $F_n$  направлена вздовж нормалі до профілів зубців у точці їх контакту, тобто вздовж лінії зачеплення, яка утворює кут зачеплення  $\alpha$ , із перпендикуляром до лінії центрів коліс. Силу  $F_n$  замінимо двома її взаємно перпендикулярними складовими  $F_r$  і  $F_o$ , які перенесемо на схему колеса. Тут сила  $F_r$  проектується в точку  $P$ , а сила  $F_o$  направлена перпендикулярно до лінії зубця. Тепер силу  $F_o$  також замінимо двома її взаємно перпендикулярними складовими  $F_t$  і  $F_a$ .

Отже, замість однієї нормальної сили  $F_n$  на зубець маємо три взаємно перпендикулярні її складові  $F_t$ ,  $F_a$  і  $F_r$ .

Таке зображення сил, що діють на зубці в зачепленні, зручне для розрахунків зубчастої передачі, її валів та їхніх опор. Сила  $F_t$ , яку

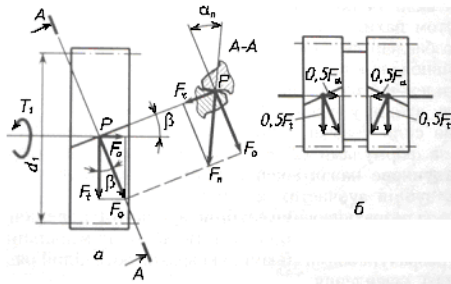


Рисунок 3.51

будемо називати *окружною силою*, лежить у площині дії обертового моменту  $T_1$  і направлена по дотичній до ділильного кола зубчастого колеса. Тому

$$F_t = 2T_1/d_1. \quad (3.66)$$

Складова  $F_a$ , яка перпендикулярна до площини колеса й паралельна осі його вала, називається *осьовою силою*. Вона може бути виражена через  $F_t$ , та кут нахилу зубців  $\beta$ :

$$F_a = F_t \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (3.67)$$

Сила  $F_r$  діє в площині колеса й направлена вздовж його радіуса, тому її називають *радіальною силою*. Для визначення  $F_r$  попередньо знайдемо

$$F_o = F_t / \cos \beta,$$

а тоді (див. переріз А—А на рис. 3.51,а) запишемо

$$F_r = F_o \operatorname{tg} \alpha_n = F_t \operatorname{tg} \alpha_n / \cos \beta. \quad (3.68)$$

*Нормальна сила  $F_n$  до профілів зубців* дорівнює геометричній сумі сил  $F_t$ ,  $F_a$  і  $F_r$ . Модуль цієї сили можна визначити за формулою

$$F_n = F_o / \cos \alpha_n = F_t / (\cos \alpha_n \cos \beta), \text{ або } F_n = 2T_1 / (d_1 \cos \alpha_n \cos \beta). \quad (3.69)$$

У разі зачеплення прямозубих коліс ( $\beta=0$ ) окружна сила також визначається за формулою (3.66), осьова сила  $F_a = 0$ , а радіальна сила може бути знайдена за формулою

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.70)$$

Наявність осьової сили  $F_a$  в зачепленні косозубих коліс, що додатково навантажує вали та їхні опори, обмежує використання косозубих коліс із великим кутом нахилу лінії зубців  $\beta$  ( $F_a$  зростає із збільшенням  $\beta$ ). Цього недоліку позбавлені шевронні зубчасті передачі, де осьові сили в зачепленні взаємно врівноважуються (рис. 3.51,б), бо лівий та правий півшеvronи мають протилежний нахил зубців. Цим пояснюється можливість збільшення кутів нахилу зубців у шевронних колесах порівняно з косозубими. Окружна й радіальна сили в зачепленні шевронних зубчастих коліс визначаються відповідно за формулами (3.66) і (3.68).

#### ***Розрахункове навантаження зубців зубчастої передачі.***

Розрахунки на міцність зубців зубчастих коліс ведуть не за номінальними силами в зачепленні, а за розрахунковими силами, які враховують цілий ряд особливостей роботи зубчастого зачеплення.

У розрахунках зубців на контактну витривалість за розрахункове навантаження приймають

$$F_{Hn} = F_n K_{H\beta} K_{H\alpha} \quad (3.71)$$

а в розрахунках на витривалість при згині

$$F_{Fn} = F_n K_{F\beta} K_{F\alpha}. \quad (3.72)$$



Тут  $F_n$  – номінальна нормальна сила до профілів зубців (формула (3.69)),  $K_{H\beta}$  і  $K_{F\beta}$  – коефіцієнти, що враховують нерівномірний розподіл навантаження по ширині зубчастих вінців коліс,  $K_{Hv}$  і  $K_{Fv}$  – коефіцієнти, що враховують динамічне навантаження зубців.

Основними факторами, що зумовлюють нерівномірність розподілу навантаження по ширині зубчастих вінців (коефіцієнти  $K_{H\beta}$  і  $K_{F\beta}$ ), є: податливість валів та їхніх опор; похибки виготовлення зубчастих коліс та монтажу передачі; розміщення коліс на валах відносно опор; умови, за яких не відбувається припрацювання зубців (висока твердість, висока окружна швидкість). За інших рівних умов нерівномірність розподілу навантаження тим вища, чим більша ширина зубчастого вінця, яка характеризується коефіцієнтом  $\psi_{bd} = b/d_1$ .

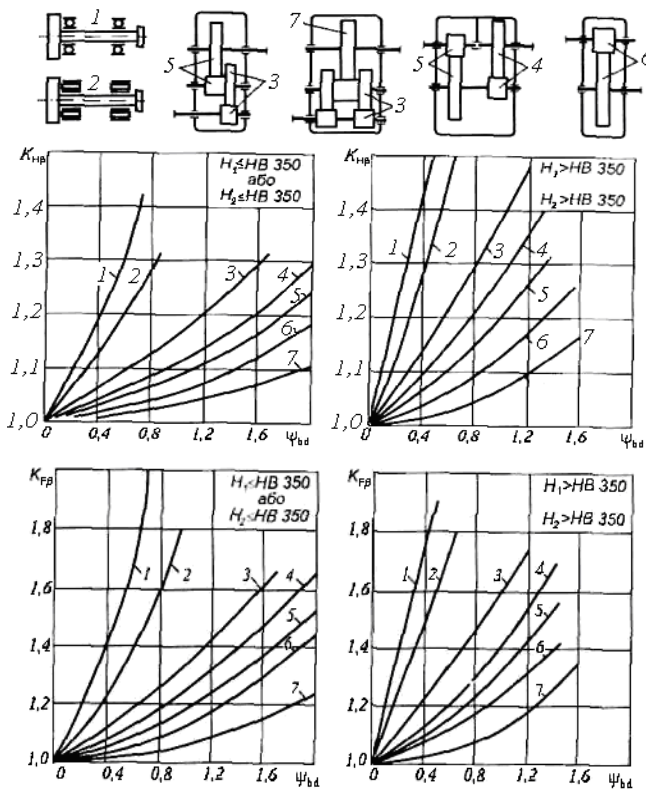


Рисунок 3.52

Для наближеної оцінки коефіцієнтів  $K_{H\beta}$  і  $K_{F\beta}$  рекомендуються графіки, складені на основі розрахунків та практики експлуатації зубчастих передач (рис. 3.52). Графіки використовують для передач, жорсткість та точність деталей яких задовольняють норми редукторобудування.

За поданими на рисунку 3.52 графіками окремо вибирають коефіцієнти  $K_{H\beta}$  і  $K_{F\beta}$ , які використовуються у відповідних розрахунках зубчастих передач. Криві 1–7 на графіках відповідають різним випадкам розміщення коліс 1–7 щодо опор валів, а вплив ширини зубчастого вінця враховується коефіцієнтом  $\psi_{bd}$ . Графіки розроблені для зубців, у яких різна твердість, і для наявних на практиці змінних режимів навантаження передач при окружній швидкості  $v \leq 15$  м/с.

При постійному навантаженні, твердості одного з коліс передачі  $H < 350$  HB і швидкості  $v < 15$  м/с можна брати  $K_{H\beta} = K_{F\beta} = 1$ .

Динамічне навантаження виникає через неминучі похибки у виготовленні зубчастих коліс і пружні деформації зубців. Вплив динамічного навантаження на контактну міцність активних поверхонь зубців та міцність зубців на згин оцінюється коефіцієнтами відповідно  $K_{Hv}$  і  $K_{Fv}$ . Точне визначення цих коефіцієнтів достатньо складне і для розрахунків зубчастих передач можна використати наближені значення  $K_{Hv}$  і  $K_{Fv}$ , які наведені у табл. 3.3.5. При цьому окружну швидкість зубців визначають за формулою  $v = 0,5\omega_1 d_1$ .

**Розрахунок активних поверхонь зубців на контактну витривалість** зводиться до визначення розрахункових напружень і порівняння цих напружень із допустимими. Згідно з умовою контактної міцності з використанням формули Герца

$$\sigma_H = Z_M \sqrt{q_H / (2\rho_{3\phi})} \leq [\sigma]_H.$$

Розрахунок ведеться для моменту зачеплення зубців у полюсі, оскільки втомне викришування починається в зоні полюсної лінії контакту на ніжках зубців.

Для циліндричної зубчастої передачі записана вище умова трансформується в таку умову контактної витривалості активних поверхонь зубців

$$\sigma_H = Z_M Z_H Z_\epsilon \sqrt{F_t K_{Hv} (u+1) / b_2 d_2} \leq [\sigma]_H.$$

В умові (3.72) маємо:  $Z_M$  – коефіцієнт, що враховує механічні характеристики матеріалів коліс передачі: для сталевих зубчастих коліс  $Z_M = 27 \text{ МПа}^{1/2}$ ; для поєднання сталь-чавун  $Z_M = 215 \text{ МПа}^{1/2}$ ; для чавунних коліс  $Z_M = 200 \text{ МПа}^{1/2}$ ;

$Z_H$  – коефіцієнт форми спряжених поверхонь зубців, який підраховують за такою залежністю:  $Z_H = 1,77 \cos \beta$ ;

$Z_\epsilon$  – коефіцієнт сумарної довжини контактних ліній: для прямозубих передач та косозубих при  $\epsilon_\beta \leq 0,9$ ;  $Z_\epsilon = \sqrt{(4 - \epsilon_\alpha)/3}$ , а для косозубих при  $\epsilon_\beta > 0,9$  та шевронних  $Z_\epsilon = \sqrt{1/\epsilon_\alpha}$ ;  $F_t$  – номінальна окружна сила в зачепленні зубців згідно з (3.66);  $K_{H\beta}$  і  $K_{H\gamma}$  – розрахункові коефіцієнти, зміст і значення яких наведені вище.

Таблиця 3.7

Ступінь точності передачі	Твердість зубців коlesa	Коефіцієнт	Окружна швидкість зубців $v$ , м/с					
			1	2	4	6	8	10
6	$H_2 \leq 350$ HB	$K_{Hv}$	1,03/ 1,01	1,06/ 1,02	1,12/ 1,03	1,17/ 1,04	1,23/ 1,06	1,28/ 1,07
		$K_{Fv}$	1,06/ 1,02	1,13/ 1,05	1,26/ 1,10	1,40/ 1,15	1,53/ 1,20	1,67/ 1,25
	$H_2 \geq 40$ HRC	$K_{Hv}$	1,02/ 1,00	1,04/ 1,00	1,07/ 1,02	1,10/ 1,02	1,15/ 1,03	1,18/ 1,04
		$K_{Fv}$	1,02/ 1,01	1,04/ 1,02	1,08/ 1,03	1,11/ 1,04	1,14/ 1,06	1,17/ 1,07
7	$H_2 \leq 350$ HB	$K_{Hv}$	1,04/ 1,02	1,07/ 1,03	1,14/ 1,05	1,21/ 1,06	1,29/ 1,07	1,36/ 1,08
		$K_{Fv}$	1,08/ 1,03	1,16/ 1,06	1,33/ 1,11	1,50/ 1,16	1,67/ 1,22	1,80/ 1,27
	$H_2 \geq 40$ HRC	$K_{Hv}$	1,03/ 1,00	1,05/ 1,01	1,09/ 1,02	1,14/ 1,03	1,19/ 1,03	1,24/ 1,04
		$K_{Fv}$	1,03/ 1,01	1,05/ 1,02	1,09/ 1,03	1,13/ 1,05	1,17/ 1,07	1,22/ 1,08
8	$H_2 \leq 350$ HB	$K_{Hv}$	1,04/ 1,01	1,08/ 1,02	1,16/ 1,04	1,24/ 1,06	1,32/ 1,07	1,40/ 1,08
		$K_{Fv}$	1,10/ 1,03	1,20/ 1,06	1,38/ 1,11	1,58/ 1,17	1,78/ 1,23	1,96/ 1,29
	$H_2 \geq 40$ HRC	$K_{Hv}$	1,03/ 1,01	1,06/ 1,01	1,10/ 1,02	1,16/ 1,03	1,22/ 1,04	1,26/ 1,05
		$K_{Fv}$	1,04/ 1,01	1,06/ 1,02	1,12/ 1,03	1,16/ 1,05	1,21/ 1,07	1,26/ 1,08
9	$H_2 \leq 350$ HB	$K_{Hv}$	1,05/ 1,01	1,10/ 1,03	1,20/ 1,05	1,30/ 1,07	1,40/ 1,09	1,50/ 1,12
		$K_{Fv}$	1,13/ 1,04	1,28/ 1,07	1,50/ 1,14	1,77/ 1,21	1,98/ 1,28	2,25/ 1,35
	$H_2 \geq 40$ HRC	$K_{Hv}$	1,04/ 1,01	1,07/ 1,01	1,13/ 1,02	1,20/ 1,03	1,26/ 1,04	1,32/ 1,05
		$K_{Fv}$	1,04/ 1,01	1,07/ 1,02	1,14/ 1,04	1,21/ 1,06	1,27/ 1,08	1,34/ 1,09
Примітка: У чисельнику – значення для прямозубих передач, у знаменнику для косозубних.								

Розрахунок активних поверхонь зубців на контактну витривалість за умовою (3.73) є основним для зубчастих передач. Допустиме

контактне напруження  $[\sigma]_H$ , що забезпечує контактну витривалість зубців, визначають за рекомендаціями, наведеними в підручниках. У розрахунках зубців на контактну витривалість допускається розрахункове контактне напруження в межах  $1,05[\sigma]_H > \sigma_H \geq 0,9[\sigma]_H$ . Якщо ця умова не виконується, то можна змінити відповідно ширину вінця колеса  $b_2$ , не виходячи за межі рекомендованих значень  $\psi_{ba}$ . Якщо це не дає бажаного результату, то змінюють міжосьову відстань або призначають інші матеріали чи іншу термообробку і розрахунок повторюють.

Розрахунок активних поверхонь зубців на контактну міцність при дії максимального навантаження виконують з метою, щоб запобігти появі залишкової деформації або крихкого руйнування поверхневого шару зубців при короткочасних перевантаженнях передачі. Руйнування зубців не настає за умови

$$\sigma_{H \max} \leq [\sigma]_{H \max} \quad (3.73)$$

де  $\sigma_{H \max}$  – максимальне розрахункове контактне напруження, що виникає під час найбільшого навантаження  $T_{f \max}$  із спектра навантажень, які підводяться до передачі навіть при однократній дії за період експлуатації;

$[\sigma]_{H \max}$  – допустиме граничне напруження.

Ураховуючи, що контактне напруження пропорційне квадратному кореню з навантаження, умову (3.73) перепишемо так:

$$\sigma_{H \max} = \sigma_H \sqrt{T_{l \max} / T_1} \leq [\sigma]_{H \max}, \quad (3.74)$$

де  $\sigma_H$  – розрахункове контактне напруження, що виникає в зубцях при навантаженні  $T_1$  (визначають за виразом (3.73).

**Розрахунок зубців на витривалість при згині.** У розрахунках на згин зубець розглядають як консольну балку. Розрахункове навантаження прикладається до вершини зубця, тобто вибирають найнебезпечніший випадок навантаження з точки зору виникнення максимального напруження згину в основі зубця.

Вихідною залежністю в розрахунках зубців на згин є умова

$$\sigma_{H \max} = M_{\max} / W_o \leq [\sigma]_{зз},$$

яка після підставлення в неї параметрів зубчастої передачі набуває такого остаточного вигляду

$$\sigma_F = Y_F Y_\beta F_t K_{F\beta} K_{Fv} / (b_2 m_n) \leq [\sigma]_F. \quad (3.75)$$

В умові (3.75) витривалості зубців на згин маємо:  $Y_F$  – коефіцієнт форми зубців, який вибирають за табл. 3.8 в залежності від еквівалентного числа зубців  $z_v$  шестірні та колеса, яке визначається з виразу  $z_v = z / \cos^3 \beta$ ;

$Y_\beta$  – коефіцієнт нахилу зубців, який для прямозубих коліс  $Y_\beta = 1$ , а для косозубих (шевронних)  $Y_\beta = 1 - \beta/140^\circ$ .

$F_t$  – номінальна окружна сила в зачепленні зубців згідно з (3.66);

$K_{Hv}$  і  $K_{Fv}$  — розрахункові коефіцієнти, значення яких подані в табл. 3.8.

Перевірку витривалості зубців при згині виконують для зубців шестірни і колеса, оскільки  $Y_{F1}$  та  $Y_{F2}$  різні у випадку  $z_1 \neq z_2$ .

Таблиця 3.8

$z_v$	$Y_F$	$z_v$	$Y_F$	$z_v$	$Y_F$
17	4,26	25	3,90	50	3,65
18	4,20	28	3,82	60	3,62
19	4,11	30	3,80	80	3,61
20	4,08	32	3,78	100	3,60
21	4,01	37	3,71	150	3,60
22	4,00	40	3,70	100	3,63
24	3,92	45	3,68		

Зі співвідношення (3.76) видно, що за інших рівних умов напруження згину в зубцях тим більші, чим менший модуль зубців  $m_n$ . Витривалість зубців на згин для передачі із заданою міжосьовою відстанню можна підвищити, збільшуючи модуль відповідним зменшенням числа зубців шестірни та колеса.

**Розрахунок зубців на міцність при згині максимальним навантаженням** виконують для того, щоб запобігти появі деформації або крихкої поломки зубців. Цей розрахунок ведуть за найкороткочаснішим навантаженням  $T$  для зубців того зубчастого колеса (шестірни чи колеса), для якого напруження згину  $\sigma_F$  більше.

Щоб забезпечити потрібну міцність зубців, треба виконати умову:

$$\sigma_{F\max} = \sigma_F (T_{1\max} / T_1) \leq [\sigma]_{F\max}, \quad (3.76)$$

де  $\sigma_{F\max}$  – максимальне розрахункове напруження згину;

$\sigma_F$  – розрахункове напруження згину згідно з (3.59);

$[\sigma]_{F\max}$  – допустиме граничне напруження згину.

**Проектний розрахунок.** Записані вище розрахункові залежності (3.73), (3.75), (3.76) і (3.77) використовують для перевірних розрахунків зубчастих передач із відомими розмірами та навантаженнями.

Проектний розрахунок виконують тільки для попереднього визначення орієнтовних розмірів передачі і він не може замінити виконання перевірних розрахунків, які є основними.

Вихідними даними для проектного розрахунку зубчастої передачі є такі: номінальне навантаження (обертний момент на ведучому валу) передачі  $T_1$ ; передаточне число  $u$ ; параметр  $\psi_{ba}=b/a_{aw}$  або  $\psi_{bd}=b/d_1$ , рекомендації вибору яких наведені вище; вид передачі – прямозуба чи косозуба (шевронна); матеріали зубчастих коліс, їх термообробка, твердість, що дозволяє вибрати допустиме контактне напруження  $[\sigma]_H$ . За такими даними можна визначити основний розмірний параметр передачі – міжосьову відстань  $a_w$ , яка характеризує габаритні розміри зубчастої передачі.

Формулу для знаходження мінімально допустимої міжосьової відстані  $a_{wmin}$  отримують із (3.59), якщо тут зробити відповідні заміни параметрів і об'єднати розрахункові коефіцієнти в один коефіцієнт. Тоді матимемо

$$a_{wmin} = K_a (u+1) \sqrt[3]{T_1 K_{H\beta} / (u \psi_{ba} [\sigma]_H^2)}. \quad (3.77)$$

Тут допоміжному коефіцієнту  $K_a$  дається деяка наближена оцінка і рекомендується брати:  $K_a = 50 \text{ МПа}^{1/3}$  і  $K_a = 43 \text{ МПа}^{1/3}$  – для сталевих прямозубих і косозубих (шевронних) коліс відповідно;  $K_a = 42 \text{ МПа}^{1/3}$  і  $K_a = 36 \text{ МПа}^{1/3}$  – для чавунних прямозубих і косозубих коліс відповідно.

Коефіцієнт  $K_{H\beta}$ , що враховує нерівномірність розподілу навантаження по ширині зубчастих вінців, вибирають залежно від параметра  $\psi_{bd}$  і твердості матеріалів коліс за графіками на рисунку 3.52.

Формула (3.77) дає змогу оцінити ступінь впливу окремих параметрів передачі  $u$ ,  $\psi_{ba}$ ,  $[\sigma]_H$  на її габаритні розміри.

Обчислена за формулою (3.77) міжосьова відстань дозволяє визначити модуль зубців та розміри зубчастих коліс

$$m'_n = (2a_{wmin} \cos\beta) / (z_1 + z_2). \quad (3.78)$$

Отримане значення модуля  $m'_n$  округляють до найближчого стандартного  $m_n$  згідно зі стандартом (див. вище).

Число зубців шестірні приймають у межах  $z_1 = 18 \dots 25$ , а колеса відповідно  $z_2 = u \cdot z_1$ . При цьому для силових передач потрібно забезпечити  $m_n \geq 1,5 \text{ мм}$ .

Щоб остаточно впевнитись в правильності вибору чисел зубців  $z_1$ ,  $z_2$  і модуля  $m_n$ , треба перевірити витривалість зубців при згині. У разі отримання незадовільного результату зменшують у допустимих межах  $z_1$  і відповідно  $z_2$  і тим самим збільшують модуль  $m_n$ .

Вибраний модуль за числами зубців шестірні та колеса дозволяє визначити всі розміри вінців коліс за формулами, що наведені в табл. 3.5 і 3.6.

**Особливості розрахунку відкритих зубчастих передач.** У відкритих передачах використовують прямозубі циліндричні або конічні колеса. Такі передачі працюють при окружних швидкостях коліс не більших як 2 м/с. Зубці відкритих передач припрацьовуються при довільній твердості їхніх робочих поверхонь. Здебільшого колеса виготовляють із нормалізованих або поліпшених сталей. У процесі роботи передачі зубці інтенсивно спрацьовуються, що зумовлює особливості їхнього розрахунку.

Відкриті передачі проектуються з вузькими колесами, у яких коефіцієнт ширини  $\psi_{ba} = 0,10 \dots 0,15$ . Розміри передачі визначають із розрахунку на контактну витривалість з подальшою перевіркою на згин (за аналогією закритих передач). Міжосьову відстань передачі знаходять за формулою (3.77). При цьому коефіцієнти, що враховують розподіл навантаження по ширині вінця коліс, беруть  $K_{H\beta} = K_{F\beta} = 1$ .

Спрацювання зубців у відкритих передачах допускається до 25% початкової їхньої товщини по дільному колу. Міцність зубців на згин при цьому зменшується приблизно в 2 рази. Тому треба так підбирати модуль зубців, щоб розрахункове напруження згину  $\sigma_F$  за формулою (3.76) було у два рази менше від попередньо обчисленого допустимого напруження  $[\sigma]_F$ .

**Приклад 3.5.** Розрахувати косозубу циліндричну зубчасту передачу одноступеневого редуктора (рис. 3.53) за такими даними: передача передає потужність  $P_1 = 12$  кВт при кутовій швидкості ведучого вала  $\omega_1 = 150$  рад/с; передаточне число передачі  $u = 3,6$ ; передача нереверсивна з можливими короточасними перевантаженнями до 200% від номінального; строк служби передачі необмежений.

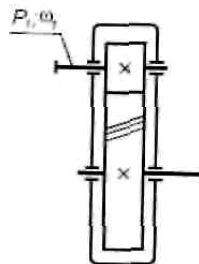


Рисунок 3.53

**Розв'язання.** 1. Параметри навантаження зубчастої передачі.

Номінальний обертовий момент на ведучому валу

$$T_1 = P_1 / \omega_1 = 12 \cdot 10^3 / 150 = 80 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Під час короточасного перевантаження до 200% максимальний обертовий момент на ведучому валу

$$T_{1\max} = 2T_1 = 2 \cdot 80 = 160 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Кутова швидкість веденого вала

$$\omega_2 = \omega_1 / u = 150 / 3,6 = 41,7 \text{ рад/с}.$$

Номінальний обертовий момент на веденому валу

$$T_2 = T_1 u \eta = 80 \cdot 3,6 \cdot 0,97 = 280 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Тут  $\eta = 0,97$  – ККД редуктора.

2. *Матеріали зубчастих коліс.* Для виготовлення шестірни та колеса вибираємо вуглецеву сталь 45 із термообробкою – поліпшення.

Прийнято: - для шестірни твердість поверхні  $H_1 = 269...302$  НВ (найбільш імовірна твердість  $H_1 = 285$  НВ),  $\sigma_{e1} = 890$  МПа,  $\sigma_{m1} = 650$  МПа при діаметрі заготовки до 80 мм;

- для колеса твердість поверхні зубців  $H_2 = 235...262$  НВ (найбільш імовірна твердість  $H_2 = 250$  НВ),  $\sigma_{e2} = 780$  МПа,  $\sigma_{m2} = 540$  МПа.

3. *Допустимі напруження для розрахунку зубчастої передачі.*

а) Допустимі контактні напруження.

Границі контактної витривалості зубців шестірни та колеса

$$\sigma_{Hlimb1} = 2H_1 + 70 = 2 \cdot 285 + 70 = 640 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{Hlimb2} = 2H_2 + 70 = 2 \cdot 250 + 70 = 570 \text{ МПа}.$$

Допустимі контактні напруження для зубців шестірни і колеса при коефіцієнті  $Z_R = 0,95$  (шорсткість поверхні зубців  $R_a = 2,5...1,25$ ) та коефіцієнті запасу  $s_H = 1,1$ :

$$[\sigma]_{H1} = \sigma_{Hlimb1} Z_R / s_H = 640 \cdot 0,95 / 1,1 = 553 \text{ МПа};$$

$$[\sigma]_{H2} = \sigma_{Hlimb2} Z_R / s_H = 570 \cdot 0,95 / 1,1 = 492 \text{ МПа}.$$

У розрахунок приймаємо менше із двох отриманих значень допустимого контактного напруження, тобто  $[\sigma]_H = 492$  МПа.

Допустиме граничне контактне напруження

$$[\sigma]_{Hmax} = 2,8 \sigma_{T2} = 2,8 \cdot 540 = 1512 \text{ МПа}.$$

б) Допустимі напруження зубців на згин. Границі витривалості при згині

$$\sigma_{Flimb1} = 1,8 H_1 = 1,8 \cdot 285 = 513 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{Flimb2} = 1,8 H_2 = 1,8 \cdot 250 = 450 \text{ МПа}.$$

Визначаємо допустиме напруження на згин для зубців шестірни та колеса при коефіцієнті запасу  $s_F = 2,2$ :

$$[\sigma]_{F1} = \sigma_{Flimb1} / s_F = 513 / 2,2 = 233 \text{ МПа};$$

$$[\sigma]_{F2} = \sigma_{Flimb2} / s_F = 450 / 2,2 = 204 \text{ МПа}.$$

Для зубців шестірни та колеса граничне допустиме напруження на згин

$$[\sigma]_{F1max} = 4,8 H_1 / s_F = 4,8 \cdot 285 / 2,2 = 622 \text{ МПа};$$

$$[\sigma]_{F2max} = 4,8 H_2 / s_F = 4,8 \cdot 250 / 2,2 = 545 \text{ МПа}.$$

4. *Проектний розрахунок передачі*

У проектному розрахунку попередньо беремо коефіцієнт ширини вінця  $\psi_{ba}$  і відповідно  $\psi_{bd} = 0,5\psi_{ba}(u + 1) = 0,5 \cdot 0,4 \cdot (3,6 + 1) = 0,92$ .

За графіками на рисунку 3.52 залежно від  $\psi_{bd}$  (симетричне розміщення зубчастих коліс відносно опор валів та твердість  $H < 350$  НВ) визначаємо коефіцієнт  $K_{H\beta} = 1,1$ .



Допоміжний коефіцієнт  $K_a = 43 \text{ МПа}^{1/3}$  для сталевих косозубих коліс.

За формулою (3.77) мінімальна міжосьова відстань передачі  
 $a_{w\min} = K_a(u+1) \times$

$$\times \sqrt[3]{T_1 K_{H\beta} / (U \psi_{ba} [\sigma]_H^2)} = 43(3,6+1) \sqrt{80 \cdot 10^3 \cdot 1,1 / (3,6 \cdot 0,4 \cdot 492^2)} = 125 \text{ мм.}$$

Кут нахилу лінії зубців попередньо беремо  $\beta = 15^\circ$ , число зубців шестірні приймаємо  $z_1 = 21$ , а число зубців колеса  $z_2 = u z_1 = 3,6 \cdot 21 = 75,6$ , тобто  $z_2 = 76$ .

Тоді фактичне передаточне число передачі  $u = z_2/z_1 = 76/21 = 3,62$ .

За формулою (3.78) модуль зубців

$$m'_n = (2a_{w\min} \cos \beta) / (z_1 + z_2) = (2 \cdot 125 \cos 15^\circ) / (21 + 76) = 2,49 \text{ мм.}$$

Стандартний модуль зубців  $m_n = 2,5 \text{ мм}$  (див. вище). Фактичний кут нахилу лінії зубців

$$\cos \beta = m_n(z_1 + z_2) / (2a_w) = 2,5 (21 + 76) / (2 \cdot 125) = 0,97; \quad \beta = 14,07^\circ.$$

5. *Попередні значення деяких параметрів передачі.*

Ділильні діаметри шестірні та колеса (табл. 3.5)

$$d_1 = m_n z_1 / \cos \beta = 2,5 \cdot 21 / 0,97 = 54,12 \text{ мм;}$$

$$d_2 = m_n z_2 / \cos \beta = 2,5 \cdot 76 / 0,97 = 195,88 \text{ мм.}$$

Ширина зубчастих вінців

$$b_1 = \psi_{ba} a_w = 0,4 \cdot 125 = 50 \text{ мм; } b_1 = b_2 + 2 \text{ мм} = 50 + 2 = 52 \text{ мм.}$$

Окружна швидкість зубчастих коліс

$$v = 0,5 \omega_1 d_1 = 0,5 \cdot 150 \cdot 54,12 \cdot 10^{-3} = 4,06 \text{ м/с.}$$

Призначаємо 8-й ступінь точності для всіх показників точності зубчастих коліс і передачі.

Еквівалентні числа зубців шестірні та колеса будуть такими

$$z_{v1} = z_1 / \cos^3 \beta = 21 / 0,97^3 = 23; \quad z_{v2} = z_2 / \cos^3 \beta = 76 / 0,97^3 = 83,27.$$

Коефіцієнт торцевого перекриття за формулою (3.3.48):

$$\varepsilon_\alpha = [1,88 - 3,2(1/z_1 + 1/z_2)] \cos \beta = [1,88 - 3,2(1/21 + 1/76)] 0,97 = 1,63.$$

Коефіцієнт осевого перекриття зубців за формулою (3.3.49)

$$\varepsilon_\beta = (b_2 \sin \beta) / (\pi m_n) = (52 \sin 14,07^\circ) / (3,14 \cdot 2,5) = 1,6.$$

Окружна сила в зачепленні зубчастих коліс

$$F_t = 2T_1/d_1 = 2 \cdot 80 \cdot 10^3 / 54,12 = 2956 \text{ Н.}$$

6. *Розрахунок активних поверхонь зубців на контактну витривалість.*

Для розрахунку попередньо визначимо такі коефіцієнти:

$Z_M = 275 \text{ МПа}^{1/2}$  — коефіцієнт, що враховує механічні характеристики матеріалів;

$$Z_H = 1,77 \cos \beta = 1,77 \cdot 0,97 = 1,72;$$

$$Z_\varepsilon = \sqrt{1/\varepsilon_\varepsilon} = \sqrt{1/1,63} = 0,78 \quad \text{при } \varepsilon_\beta > 0,9;$$

$$K_{H\beta} = 1,1 - \text{див. п. 4 розрахунку,}$$

$K_{Hv} = 1,04$  – див. табл. 3.6.

За формулою (3.73) розрахункове контактне напруження

$$\sigma_H = Z_M Z_H Z_\varepsilon \sqrt{F_t K_{H\beta} K_{Hv} (u+1) / (b_2 d_2)} = \\ = 275 \cdot 1,72 \cdot 0,78 \sqrt{2956 \cdot 1,1 \cdot 1,04 \cdot (3,62+1) / 50 \cdot 195,88} = 466 \text{ МПа.}$$

Стійкість зубців проти втомного викришування їхніх активних поверхонь забезпечується, бо  $\sigma_H = 466 \text{ МПа} < [\sigma]_H = 492 \text{ МПа}$  і лежить в допустимих межах.

7. *Розрахунок активних поверхонь зубців на контактну міцність.*

Під час дії максимального навантаження за формулою (3.75)

$$\sigma_{H \max} = \sigma_H \sqrt{T_{1 \max} / T_1} = 466 \sqrt{160/80} = 659 \text{ МПа.}$$

Контактна міцність зубців також забезпечується, оскільки

$$\sigma_{H \max} = 659 \text{ МПа} < [\sigma]_{H \max} = 1512 \text{ МПа.}$$

8. *Розрахунок зубців на витривалість при згині.* Розрахункові коефіцієнти будуть такими:  $Y_{F1} = 3,96$ ;  $Y_{F2} = 3,61$  – коефіцієнти форми зубців за табл. 3.7;

$Y_\beta = 1 - \beta/140^\circ = 1 - 14,07/140 = 0,90$  – коефіцієнт нахилу зубців;

$K_{F\beta} = 1,1$  (рис 23.4) і  $K_{Fv} = 1,14$  (табл. 3.6).

Розрахункове напруження згину в зубцях шестірні та колеса визначаємо за формулою (3.76)

$$\sigma_{F1} = Y_{F1} Y_\beta F_t K_{F\beta} K_{Fv} / (b_2 m_n) = \\ = 3,96 \cdot 0,90 \cdot 2956 \cdot 1,1 \cdot 1,14 / (50 \cdot 2,5) = 106 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{F2} = Y_{F2} Y_\beta F_t K_{F\beta} K_{Fv} / (b_2 m_n) = \\ = 3,61 \cdot 0,90 \cdot 2956 \cdot 1,1 \cdot 1,14 / (50 \cdot 2,5) = 97 \text{ МПа.}$$

Витривалість зубців при згині також забезпечується, оскільки  $\sigma_{F1}$  і  $\sigma_{F2}$  менші від відповідних допустимих напружень  $[\sigma]_{F1} = 233 \text{ МПа}$  й  $[\sigma]_{F2} = 204 \text{ МПа}$ .

9. *Розрахунок зубців на міцність при згині максимальним навантаженням.*

За формулою (3.76):

$$\sigma_{F1 \max} = \sigma_{F1} (T_{1 \max} / T_1) = 106 (160/80) = 212 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{F2 \max} = \sigma_{F2} (T_{1 \max} / T_1) = 97 (160/80) = 194 \text{ МПа.}$$

Тут міцність також забезпечується, бо  $\sigma_{F1 \max}$  і  $\sigma_{F2 \max}$  менші від відповідних допустимих напружень  $[\sigma]_{F1 \max} = 622 \text{ МПа}$  й  $[\sigma]_{F2 \max} = 545 \text{ МПа}$ .

10. *Розрахунок розмірних параметрів передачі* (табл. 3.5; 3.6). Розміри елементів зубців:

висота головки зубця  $h_a = m_n = 2,5 \text{ мм}$ ;

висота ніжки  $h_f = 1,25 m_n = 1,25 \cdot 2,5 = 3,125 \text{ мм}$ ;

висота зубця  $h = 2,25 m_n = 2,25 \cdot 2,5 = 5,625 \text{ мм}$ ;

радіальний зазор  $c = 0,25 m_n = 0,25 \cdot 2,5 = 0,625$  мм;

кут профілю зубців  $\alpha_n = 20^\circ$ .

Розміри вінців зубчастих коліс:

- ділильні діаметри  $d_1 = 54,12$  мм і  $d_2 = 195,88$  мм (обчислено вище);

- діаметри вершин зубців

$$d_{a1} = d_1 + 2m_n = 54,12 + 2 \cdot 2,5 = 59,12 \text{ мм};$$

$$d_{a2} = d_2 + 2m_n = 195,88 + 2 \cdot 2,5 = 200,88 \text{ мм}.$$

- діаметри западин

$$d_{f1} = d_1 - 2m_n = 54,12 - 2 \cdot 2,5 = 47,87 \text{ мм};$$

$$d_{f2} = d_2 - 2m_n = 195,88 - 2 \cdot 2,5 = 189,63 \text{ мм}.$$

- ширина зубчастих вінців  $b_1 = 52$  мм,  $b_2 = 50$  мм (отримано вище).

Міжосьова відстань передачі

$$a_w = 0,5 m_n (z_1 + z_2) / \cos \beta = 0,5 \cdot 2,5 (21 + 76) / 0,97 = 125 \text{ мм}.$$

11. *Розрахунок сил у зачепленні зубців передачі*

Окружна сила  $F_t = 2956$  Н (обчислена вище). Радіальна сила за формулою (3.68)

$$F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha_n / \cos \beta = 2956 \operatorname{tg} 20^\circ / 0,97 = 1109 \text{ Н}.$$

Осьова сила за формулою (3.67)

$$F_a = F_t \operatorname{tg} \beta = 2956 \operatorname{tg} 14,07^\circ = 741 \text{ Н}.$$

### Контрольні запитання до пункту 3.3.4

1. Основні переваги та недоліки зубчастої передачі.
2. Як поділяються зубчасті передачі за формою профілю зубців, за взаємним розміщенням осей валів, за розміщенням на ободі та формою зубців, за конструктивним оформленням?
3. Розшифруйте величини, що входять до формул:  
для косозубого колеса  $d = m_n z / \cos \beta$ ,  
для прямозубого зубчастого колеса  $d = m z$ .
4. Як визначається передаточне число зубчастої передачі, якщо відомі числа зубців зубчастих коліс?
5. Як визначається ділильний діаметр косозубого й прямозубого зубчастого колеса?
6. Як називається і позначається лінійна величина, що в  $\pi$  разів менша за коловий або нормальний крок зубців?
7. Як визначається міжосьова відстань зубчастої передачі, якщо ділильні і початкові кола зубчастих коліс збігаються?
8. Основні показники точності евольвентних зубчастих передач?
9. Види руйнування зубців зубчастих передач.

10. Розшифруйте величини, що входять до формул:

для прямозубого зубчастого колеса  $a_w = 0,5(d_1 + d_2) = 0,5m(z_1 + z_2)$ ;

для косозубого колеса  $a_w = 0,5m_n(z_1 + z_2)/\cos\beta$ .

11. Що називається кутом перекриття зубчастого колеса?

12. Що називається коефіцієнтом перекриття  $\varepsilon_\gamma$ ?

13. Сила  $F_n$  взаємодії зубців напрямлена вздовж лінії зачеплення.

Як напрямлені і як називаються три взаємно перпендикулярні її складові  $F_t$ ,  $F_a$  і  $F_r$ ?

14. Як визначається окружна сила у зачепленні, якщо відомий обертовий момент  $T_1$  на осі колеса?

### 3.3.5 Черв'ячні передачі

**Загальні відомості та особливості черв'ячних передач.** За допомогою черв'ячної передачі здійснюється передавання обертового руху між валами, осі яких мимобіжні в просторі і утворюють прямий кут. Черв'ячна передача (рис. 3.54) складається із черв'яка 1, що має форму гвинта, та черв'ячного колеса 2, яке нагадує зубчасте колесо з косими зубцями угнутої форми. Передавання обертового руху в черв'ячній передачі здійснюється за принципом гвинтової пари, де гвинтом є черв'як, а гайкою є колесо – сектор, вирізаний із довгої гайки, який розташований по колу.

У більшості випадків ведучим є черв'як і передача працює на зменшення частоти обертання веденого вала, хоча можливе передавання обертового руху і від черв'ячного колеса до черв'яка.

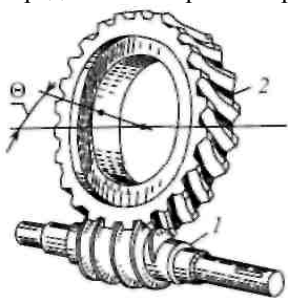


Рисунок 3.54

У зачепленні контакт витків черв'яка та зубців черв'ячного колеса відбувається по лінії, до того ж зі значним ковзанням. Тому через значні втрати в зачепленні черв'ячні передачі застосовують для передавання малих та середніх (до 50 кВт) потужностей, хоча зустрічаються і передачі, які здатні передавати потужність до 200 кВт.

За допомогою черв'ячної передачі можна реалізувати велике передаточне число  $u = 7 \dots 100$  і більше. Такі кінематичні і силові передачі використовують у підйомно-транспортних машинах, різних металообробних верстатах, транспортних засобах тощо.

Порівняно з іншими механічними передачами черв'ячні передачі мають такі переваги:

а) плавність та безшумність роботи при високих швидкостях;  
б) достатньо висока надійність та простота догляду в експлуатації;

в) компактність, тобто малі габаритні розміри при великому передаточному числі;

г) можливість виконання передачі самогальмівною (неможливе передавання обертового руху від черв'ячного колеса до черв'яка).

До недоліків черв'ячних передач належать:

а) порівняно невисокий ККД, що не перевищує в деяких випадках 0,70-0,85;

б) потреба використання для черв'ячного колеса дорогих антифрикційних матеріалів;

в) низька несуча здатність порівняно із зубчастими передачами. Мале значення ККД черв'ячних передач не дає змоги використовувати їх для передавання великих навантажень, оскільки істотні втрати потужності за рахунок тертя в зачепленні призводять до значного нагрівання передачі. Тому черв'ячні передачі краще застосовувати в приводах періодичної дії.

Черв'ячні передачі і їхні елементи класифікують за такими ознаками: за формою початкової поверхні черв'яка - циліндричні чи глобоїдні; за формою профілю витків черв'яка у торцевій площині – конволютні (черв'як  $ZA$ ), евольвентні (черв'як  $ZI$ ), архімедові (черв'як  $ZA$ ) та ін.; за розміщенням черв'яка щодо колеса – з нижнім, верхнім та бічним розміщенням черв'яка; за конструктивним оформленням – відкриті та закриті, що працюють у спеціальному корпусі.

На практиці більше застосовують черв'ячні циліндричні передачі з архімедовим черв'яком  $ZA$  як простіші у виготовленні.

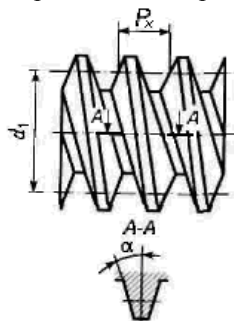


Рисунок 3.55

**Розмірні параметри черв'ячної передачі. Циліндричні черв'яки.** Черв'як – це циліндричне тіло, на поверхні якого є витки за формою гвинтової лінії (рис. 3.55). Якщо у торцевій площині витки черв'яка мають профіль архімедової спіралі, то такі черв'яки називають архімедовими (їх позначають  $ZA$ ). В осьовому перерізі  $A-A$  бічні поверхні черв'яка  $ZA$  окреслені прямими лініями з профільним кутом  $\alpha$ .

Черв'яки можуть виготовлятися з одним або кількома витками. Стандартом на силові черв'ячні передачі передбачається застосування черв'яків із числом витків  $z_1 = 1; 2; 4$ .

Відстань між відповідними бічними сторонами двох суміжних профілів, виміряна паралельно осі черв'яка (рис. 3.55), називається *осьовим кроком витків* і позначається  $P_x$ . Така ж відстань між суміжними профілями одного і того ж витка називається *ходом гвинтової лінії витка*  $P_z$ . Якщо  $z_1 = 1$ , то  $P_{z1} = P_x$ , а в інших випадках  $P_z = z_1 P_x$ . Кут профілю витків черв'яка  $\alpha = 20^\circ$ .

Відношення  $P_x/\pi = m$  називається *модулем*. Для черв'яка він є осьовим, а для колеса – коловим. Стандартні значення модулів  $m$ , мм вибираються з ряду: 1; 1,25; 1,6; 2; 2,5; 3,15; 4; 5; 6,3; 8; 10; 12,5; 16; 20; 25; допускається використовувати модулі 1,5; 3; 3,5; 6; 7 і 14 мм.

Черв'ячні колеса нарізають черв'ячними фрезами, які є аналогами черв'яка, щоб зменшити номенклатуру черв'ячних фрез треба уніфікувати різальний інструмент, отже, введемо поняття *коефіцієнта діаметра черв'яка*  $q = d_1/m$ , де  $d_1$  – дільний діаметр черв'яка.. Стандартні значення  $q$  і відповідні їм модулі наведені в табл. 3.3.7.

З урахуванням стандартного значення  $q$  дільний діаметр черв'яка (рис. 3.55) визначають за формулою

$$d_1 = mq. \quad (3.79)$$

Дільний кут  $\gamma$  підйому витка черв'яка (рис. 3.56,а) може бути встановлено розгорткою витка на площину. Тому можна записати

$$\operatorname{tg} \gamma = P_z/(\pi/d_1) = z_1 \pi m/(\pi m q) = z_1/q. \quad (3.80)$$

Таблиця 3.9

$m$ , мм	$q$	$m$ , мм	$q$
2	8; 10; 12; 12,5; 16; 20	5	8; 10; 12,5; 16; 20
2,5	8; 10; 12; 12,5; 16; 20	6	9; 10
3	10; 12	6,3	8; 10; 12,5; 14; 16; 20
3,15	8; 10; 12,5; 16; 20	7	12
3,5	10; 12*; 14*	8	8; 10; 12,5; 16; 20
4	8; 9; 10; 12*; 12,5; 16; 20	10	8; 10; 12,5; 16; 20

\* Тільки для числа витків  $z_1 = 1$ .

Розміри елементів витків черв'яка при модулі  $1 < m < 25$  мм

- визначаються параметрами початкового черв'яка за ГОСТ 19036-81:

- висота головки витка (рис. 3.56,б)  $h_{a1} = m$ ;
- висота ніжки витка  $h_f^1 = 1,2 m$ ;
- радіус кривизни перехідної кривої витка  $\rho_f = 0,3 m$ ;
- розрахункова товщина витка  $s = 0,5 \pi m$ .

Інші розміри вінця черв'яка:

$$\text{діаметр вершин витків } d_{a1} = d_1 + 2 h_{a1} = d_1 + 2 m; \quad (3.81)$$

$$\text{діаметр западин} \quad d_{f1} = d_1 - 2h_{f1} = d_1 - 2,4m; \quad (3.82)$$

довжина нарізваної частини черв'яка (ГОСТ 19650-74)

при  $z_1 = 1$  або 2

$$b_1 \geq (11 + 0,06z_2)/m; \quad (3.83)$$

при  $z_1 = 4$

$$b_1 \geq (12,5 + 0,09 z_2)m. \quad (3.84)$$

Тут  $z_2$  – число зубців черв'ячного колеса.

Для черв'яків, робочі поверхні яких шліфують, знайдене за формулами (3.84) та (3.83) значення  $b_1$  треба збільшити при  $m < 10$  мм на 25 мм і на (35...40) мм при  $m = (10...16)$  мм.

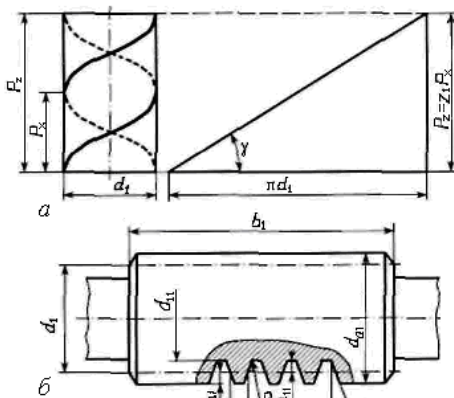


Рисунок 3.56

**Черв'ячні колеса.** Для черв'ячного колеса розміри вінця і зубців задають у його середньому перерізі площиною, що проходить через вісь черв'яка перпендикулярно до осі черв'ячного колеса. Тому модуль зубців черв'ячного колеса дорівнює модулю витків  $m$  в осьовому перерізі черв'яка, а кут нахилу зубців черв'ячного колеса дорівнює ділильному куту  $\gamma$  підйому витків черв'яка. Розміри вінця черв'ячного колеса із числом зубців  $z_2$  визначають за формулами (рис. 3.47): ділильний діаметр

$$d_2 = m z_2; \quad (3.85)$$

діаметр вершин зубців

$$d_{a2} = d_2 + 2m; \quad (3.86)$$

діаметр западин

$$d_{f2} = d_2 - 2,4m. \quad (3.87)$$

Ширину вінця  $b_2$  та найбільший діаметр черв'ячного колеса  $d_{am2}$ , які відповідають куту обхвату черв'яка  $2\delta = 90...110^\circ$ , обчислюють за формулами:

$$\begin{aligned} \text{при } z_1 = 1 \quad & b_2 \leq 0,75 d_{a1}; \quad d_{am2} \leq d_{a2} + 2m; \\ \text{при } z_1 = 2 \quad & b_2 \leq 0,75 d_{a1}; \quad d_{am2} \leq d_{a2} + 2m; \\ \text{при } z_1 = 4 \quad & b_2 \leq 0,67 d_{a1}; \quad d_{am2} \leq d_{a2} + m. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Для черв'ячної передачі міжосьову відстань визначають як пів суму ділильних діаметрів черв'яка та черв'ячного колеса (рис. 3.57)

$$a_w = a = 0,5 (d_1 + d_2) = 0,5 m (q + z_2). \quad (3.89)$$

Передаточне число черв'ячної передачі знаходять за співвідношенням

$$u = z_2 / z_1.$$

Більш докладний розрахунок черв'ячної передачі дивись в довідковій літературі.

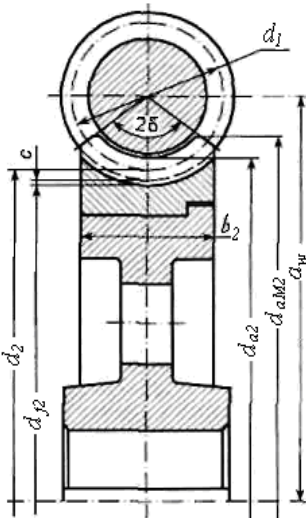


Рисунок 3.57

### Контрольні запитання до пункту 3.3.5

1. З яких основних деталей складається черв'ячна передача?
2. Переваги й недоліки черв'ячних передач.
4. Що називається осьовим кроком витків черв'яка  $P_x$  і що зветься ходом гвинтової лінії витка  $P_z$ ?
5. Як називається для черв'яка відношення  $P_x / \pi = m$ ?
6. Як визначається коефіцієнта діаметра черв'яка?
7. Як визначається ділільний діаметр черв'ячного колеса?
8. Як визначається міжосьова відстань черв'ячної передачі?
9. Як визначається передаточне число черв'ячної передачі?

### 3.3.6 Ланцюгові передачі

Ланцюгова передача складається з ланцюга і двох зірочок (рис. 3.59). Передача ґрунтується на зачепленні тягового органа, виготовленого у вигляді нескінченного замкнутого ланцюга, із зірочками, що являють собою колеса із зубами спеціального профілю. Ланцюг може охоплювати дві зірочки або більше.

Ланцюгову передачу застосовують тоді, коли треба передати обертальний рух без проковзування між валами, розміщеними один від одного на деякій відстані (до 8 м).

Ланцюгова передача порівняно з пасовою передачею має ряд переваг:

- значно компактніша;
- вали передачі і підшипники менші навантаженні, бо попередній натяг ланцюга невеликий;
- відсутність проковзування, порівняно високий ККД ( $\eta = 0,96 \dots 0,98$ ) і можливість одночасного передавання руху одним ланцюгом кільком валам.



Недоліки передачі:

- витягування ланцюга внаслідок спрацювання шарнірів;
- необхідність більш високої точності встановлення валів, ніж у пасової передачі;

- деяка нестабільність швидкості ланцюга, особливо при малих числах зубів зірочок, що призводить до виникнення додаткових динамічних навантажень.

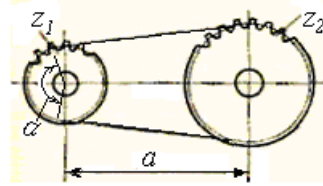


Рисунок 3.59

Ланцюгові передачі широко застосовують у різних машинах, у верстатах для обробки металів і деревини, у хімічному і сільськогосподарському машинобудуванні. Сучасні ланцюгові передачі застосовують у широкому діапазоні потужностей від часток до кількох тисяч кіловат. Найбільше їх застосовують при потужностях до 100 кВт, бо при більшій потужності різко зростає їх вартість.

Передаточне число ланцюгових передач, звичайно, не перевищує  $u = 10$ , а швидкість ланцюга – не більше  $v_{\max} = 35$  м/с.

**Деталі ланцюгових передач.** Ланцюги, які застосовують у ланцюгових передачах, на відміну від тягових і вантажних ланцюгів називають приводними. Дуже поширені приводні втулкові, роликові, зубчасті і фасонноланкові ланцюги.

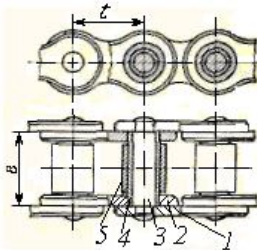


Рисунок 3.60

Роликовий ланцюг (рис. 3.60) складається із зовнішніх 1 і внутрішніх 2 пластинчатих ланок, з'єднаних між собою шарнірно. Із зовнішніми ланками жорстко зв'язані валики 3. В отворах внутрішніх ланок зафіксовані втулки 4, на які вільно встановлені ролики 5. Під час відносного повороту двох спряжених ланок валик повертається у втулці 4. Це дає змогу частково замінити тертя ковзання між ланцюгом і зубами зірочки тертям кочення.

Втулковий ланцюг відрізняється конструкцією від роликового тим, що в цьому випадку не встановлюють ролики 5. Отже для цього ланцюга втрати на тертя декілька більше.

Роликові та втулкові ланцюги поділяються на однорядні легкої серії, нормальної серії, однорядні довголанкові, однорядні із зігнутими пластинами, дво-, три- і чотирирядні нормальної серії.

Стійкість проти спрацювання роликів ланцюгів значно більша, ніж втулкових. Тому роликові ланцюги застосовують при швидкостях до 20 м/с.

Зубчасті ланцюги (рис. 3.61) у кожній ланці мають набір пластин з двома зубами і за конструкцією відрізняються в основному будовою шарнірів та розміщенням напрямних пластин. Останні призначені для запобігання бічному сповзанню ланцюга із зірочок і розміщені посередині або з боків ланцюга. Якщо напрямні пластини розміщені посередині, то на зірочці роблять напрямний паз. Гранична швидкість ланцюга  $v_{\max} = 25$  м/с. Під час роботи зубчасті ланцюги шумлять менше від інших, тому іноді їх називають безшумними. Відповідно до стандарту зубчасті ланцюги випускають із шарнірами тертя кочення (рис. 3.61). Для виготовлення пластин ланцюгових передач застосовують сталь 40 і 40ХН із загартуванням до HRC 40-50; для осей – сталь 15 і 15Х; для втулок і роликів – сталь 15, 20, 20Х та ін.

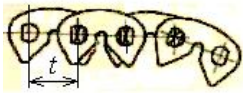


Рисунок 3.61

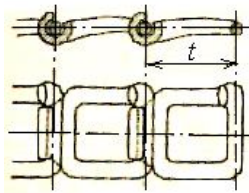


Рисунок 3.62

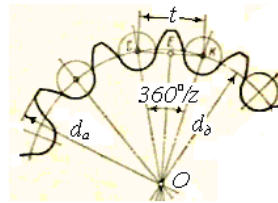


Рисунок 3.63

Фасонноланкові ланцюги застосовують для передавання невеликих потужностей при швидкостях до 3-4 м/с, переважно в сільськогосподарських машинах, наприклад, гаковий ланцюг (рис. 3.62). Ланки ланцюгів штампують з штабової сталі 30Г або виливають з ковкого чавуну.

**Зірочки.** Форма зубів зірочок (рис. 3.63) залежить від конструкції і розмірів ланцюга. Для втулкових і роликів ланцюгів зуби обода описані системою радіусів згідно з даними таблиць стандарту. Обід зірочок зубчастих ланцюгів має зуби прямолінійного або криволінійного профілю. Потрібні дані для побудови профілю зубів цих зірочок наведені в стандартах. Зірочки ланцюгових передач виготовляють з чавуну СЧ 18-36, зі сталі 15, 15Х, 40 та ін.

**Основні параметри передачі.** Мінімальну кількість зубів зірочок  $z$  беруть у зв'язку зі спрацюванням шарнірів, динамічними навантаженнями і шумом передач. Але зі зменшенням числа зубів зростають нерівномірність швидкості руху ланцюга й швидкість удару ланцюга об зірочку. У табл. 3.3.8 наведено рекомендовані числа зубів

$z_1$  зірочки залежно від передаточного числа. Число зубів великої зірочки дорівнює

$$z_2 = z_1 u, \quad (3.90)$$

де  $u$  – передаточне число.

Таблиця 3.10

Тип ланцюга	Число зубів зірочки						
	Передаточне число						
	1	2	3	4	5	6	> 6
Втулковий і роликовий	31	27	25	22	21	17	14-12
Зубчастий	40	35	31	27	23	19	18-16

Доцільно брати непарні числа зубів зірочок, що в поєднанні з парним числом ланок ланцюга сприяє більш рівномірному його спрацюванню. Для тихохідних передач і малих потужностей практика допускає мінімальне число зубів зірочок зубчастих ланцюгів  $z_{\min} = 13$ ; для втулкових і роликових  $z_{\min} = 7$ .

Крок ланцюга  $t$  – основний параметр ланцюгової передачі. Статична міцність і площа опорної поверхні шарніра втулкових, роликових і зубчастих ланцюгів, а отже, і їх навантажувальна здатність зростають із збільшенням кроку. Водночас крок ланцюга треба брати якнайменшим, щоб зменшити динамічні навантаження, які виникають від ударів при набіганні ланцюга на зірочку. Граничні значення кутової швидкості малої зірочки залежно від кроку ланцюга беруть з табл. 3.11.

Таблиця 3.11

Число зубів $z$	$\omega_{\max}$ , рад/с							
	крок ланцюга $t$ , мм							
	12,7	15,875	19,05	25,4	31,75	38,1	44,45	50,8
	Для втулкових і роликових ланцюгів							
15	240	200	141	120	104	78	68	63
23	262	220	131	131	115	84	78	68
30	272	230	115	136	115	89	78	73
	Для зубчастих ланцюгів							
17-35	346	277	230	173	136	–		

Якщо  $t$  – крок ланцюга й  $z$  – число зубів зірочки, то з трикутника  $COE$  (рис. 3.63) дістаємо  $t = d \sin(360^\circ / 2z)$ .

Тобто, діаметр дільного кола зірочки знаходимо зі співвідношення  $d_d = t / [\sin(180^\circ / z)]$ .

Діаметр вершин зубів зірочок:

для роликів і втулкових ланцюгів

$$d_a = t (\operatorname{ctg}[180^\circ/z + 0,5]);$$

для зубчастих ланцюгів  $d_a = t \operatorname{ctg}(180^\circ/z)$ .

Мінімальна міжосьова відстань  $a$  передачі без провисання і за умови, що кут обхвату малої зірочки не менш як  $\alpha = 120^\circ$  (рис. 3.59),

$$a_{\min} = (d_{a1} + d_{a2})/2 + (3 \dots 50) \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad (3.91)$$

де  $d_{a1}$  і  $d_{a2}$  – діаметри вершин зубів зірочок передачі.

Оптимальну міжосьову відстань передачі беруть з умови довговічності ланцюга

$$a = (30 \dots 50) t.$$

Нижнє значення – для малих передаточних чисел ( $u = 1 \dots 2$ ), а верхнє – для великих ( $u = 6 \dots 7$ ).

Число ланок ланцюга

$$z_n = 2a/t + (z_1 + z_2)/2 + t [(z_1 - z_2)/2\pi]^2/a, \quad (3.92)$$

де  $z_1, z_2$  – відповідно числа зубів ведучої й веденої зірочок.

Для знайденого значення  $z_n$  величину  $a$  уточняють за формулою

$$a = \frac{t}{4} \left[ z_n - \frac{z_2 + z_1}{2} + \sqrt{\left( z_n - \frac{z_2 + z_1}{2} \right)^2 - 8 \left( \frac{z_2 - z_1}{2\pi} \right)^2} \right]. \quad (3.93)$$

Довжина ланцюга

$$L = z_n t.$$

Щоб забезпечити необхідне провисання ланцюга, міжосьову відстань зменшують на  $(0,002 \dots 0,004) a$ .

Передаточне число ланцюгової передачі в процесі роботи не є сталим. Швидкість ланцюга весь час змінюється. Це спричинює поперечні коливання ланцюга й удари шарнірів об западини зубів зірочки. Рух ланцюга з нерівномірною швидкістю призводить до нерівномірного обертання веденої зірочки. Тому передаточне число ланцюгової передачі коливається при кожному повороті ведучої зірочки на один крок  $t$ . Коливання кутової швидкості руху ланцюга і передаточного числа зростають із зменшенням числа зубів ведучої зірочки.

Середнє передаточне число ланцюгової передачі

$$u = \omega_1 / \omega_2 = z_2 / z_1. \quad (3.94)$$

Середню швидкість ланцюга визначають з умови, що шлях ланцюга за один оберт зірочки дорівнює  $z t$ , а шлях зуба зірочки  $\pi d_d$ . Ці шляхи однакові, тому  $d_d = z t / \pi$ .

Отже, середня швидкість ланцюга

$$v = \omega d_d / 2 = z t \omega / 2\pi. \quad (3.95)$$

Причинами виходу з ладу ланцюгових передач є спрацювання шарнірів, що призводить до видовження ланцюга і неправильного зачеплення його із зірочками, а також спрацювання зубів зірочок,

руйнування пластин і шарнірів. Тому основним критерієм роботоздатності приводних ланцюгів є стійкість проти спрацювання їх шарнірів. Ланцюги, вибрані з умови стійкості проти спрацювання, мають, як правило, достатню міцність. Розрахунок роботоздатності приводних ланцюгів дивись в довідковій літературі.

### Контрольні запитання до пункту 3.3.6

1. Переваги й недоліки ланцюгових передач.
2. З яких деталей складається ланцюгова передача?
3. Назвіть найбільш поширені ланцюги ланцюгових передач.
4. Як визначається передаточне число ланцюгової передачі?

## 3.4 Осі, вали та їх опори

### 3.4.1 Осі та вали

Окремі елементи машин, що здійснюють обертовий рух, розміщують на осях та валах, які забезпечують для цих елементів постійне положення геометричної осі обертання.

Вісь – деталь видовженої циліндричної форми, що підтримує елементи машини в їхньому обертовому русі, не передаючи корисного крутного моменту.

Вал – деталь, яка, на відміну від осей, призначена для передавання крутного моменту та підтримування елементів машини в їхньому обертовому русі. Існують деякі види валів, наприклад, гнучкі дротяні та торсіонні, які не підтримують деталей, а лише передають крутний момент.

У деяких випадках конструктивне розв'язування певних задач може бути виконане з використанням осі або вала.

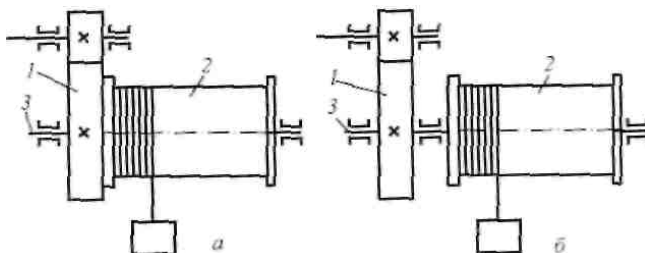


Рисунок 3.64

Так, у приводі барабана підйомного механізму в кранах (рис. 3.64,а) зубчасте колесо 1 разом із приєднаним до нього барабаном 2 встановлені на осі 3. У схемі привода (рис. 3.64,б) зубчасте колесо і барабан 2 виконані розділеними й установлені на валу 3, який передає крутний момент на відрізок між колесом та барабаном.

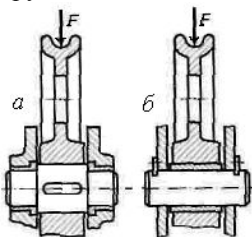


Рисунок 3.65

Конструктивно осі можуть бути виконані з *можливістю обертання* (рис. 3.65,а) або *нерухожими* (рис. 3.65,б). Осі, що обертаються навіть під час постійного за модулем та напрямом навантаження, працюють у гірших умовах циклічно змінних напружень, але зручніші в експлуатації, бо допускають використання виносних підшипників. Нерухомі осі працюють у більш сприятливих умовах під час постійних навантажень (за модулем та напрямом), але для них потрібні більш складні та менш зручні в експлуатації підшипники, які влаштовуються в насаджуваних на вісь деталях. Найпоширеніші вали за конструкцією можуть бути *циліндричними* постійного діаметра (рис. 3.66,а), *ступінчастими* (рис. 3.66,б) і з нарізаними на них *зубчастими вінцями* або шліцями (рис. 3.66,в). Ступінчасті вали і вали з нарізаними зубчастими вінцями більш складні за конструкцією та у виготовленні, але дають змогу простіше здійснити різні посадки деталей на окремих ділянках, забезпечують створення упорів та буртиків для осьової фіксації встановлених на валах деталей.

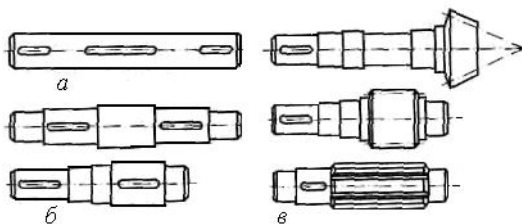


Рисунок 3.66

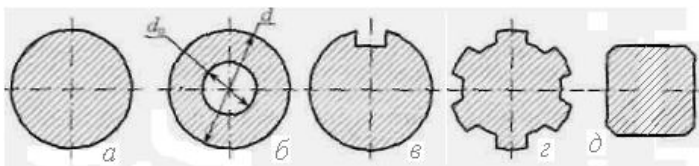


Рисунок 3.67

Крім того, змінюючи розміри перерізів, можна наблизити форму вала до найвигіднішої форми бруса рівного опору, що особливо

важливо для валів, навантажених змінними за довжиною згинальними та крутними моментами.

За видом поперечного перерізу вали можуть бути *суцільними* (рис. 3.67,а) або *порожнистими* (рис. 3.67,б), а за обрисом перерізу гладкими циліндричними, зі шпонковим пазом, шлицевими або прямокутними (рис. 3.67,а,б,в,г,д). У разі використання порожнистих валів значно зменшується їхня маса. Наприклад, якщо відношення  $d_0 / d = 0,5 \dots 0,6$ , то маса вала зменшується на 22-30 %.

Опорні частини валів та осей називаються цапфами. Проміжні опори називаються шийками, а кінцеві - шипами.

Цапфи валів, що працюють у підшипниках ковзання, можуть бути циліндричними, конічними або сферичними (рис. 3.68,а). Основне застосування мають циліндричні цапфи як технологічно найпростіші. Конічні цапфи використовують для регулювання зазорів у підшипниках, а інколи й для осьової фіксації вала. Сферичні цапфи, дуже обмежено (через складність виготовлення) застосовують у разі значних кутових переміщень вала чи осі.

Цапфи валів для підшипників кочення (рис. 3.68,б) виконують циліндричними. У деяких випадках вони мають різьбові ділянки або інші конструктивні елементи для закріплення підшипників.

Перехідні ділянки валів між двома ступенями різних діаметрів виконують такими способами:

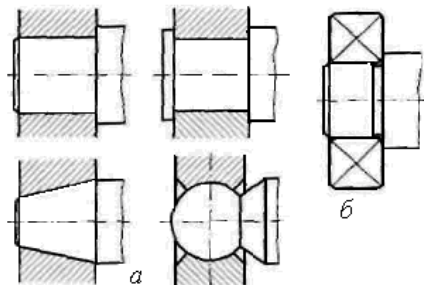


Рисунок 4.68

1. Із канавкою для виходу шліфувального круга (рис. 3.69,а). Канавки здебільшого виконують завширшки 3 мм і завглибшки 0,25-0,30 мм на валах діаметром 10-50 мм, а на валах діаметром 50-100 мм – завширшки 5 мм і завглибшки 0,5 мм. Канавки повинні мати максимально можливі радіуси закруглень для зменшення концентрації напружень і підвищення опору проти втомного руйнування в умовах дії змінних напружень. Канавки виконують на кінцевих ділянках валів, у перерізах яких діють незначні згинальні моменти. Якщо на валу є різьбові ділянки, то канавки передбачають для виходу різьбонарізного інструменту.

2. Із перехідною поверхнею – галтеллю постійного радіуса (рис. 3.69,б). Радіус галтелі  $\rho$  вибирають меншим за радіус закруглення або за радіальний розмір фаски деталі, що розміщується на валу.

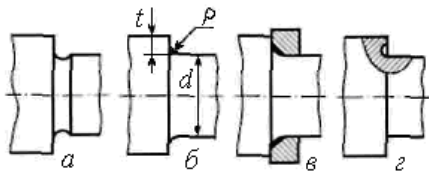


Рисунок 3.69

Для шийок під підшипники кочення рекомендують  $t/\rho = 3$ , а  $\rho/d = 0,02...0,04$ . Для важконавантажених валів у випадках, коли збільшення радіуса галтелі обмежується радіусом закруглення або фаскою кромки деталей, слід застосовувати додаткові проміжні кільця (рис. 3.69,в).

3. Галтелі спеціальної форми. Небезпечною зоною здебільшого є перехід галтелі в ступінь меншого діаметра. Тому доцільно виконувати галтель зі змінним радіусом кривизни, до того ж найбільший радіус кривизни повинен бути в зоні переходу до ступеня меншого діаметра. Застосовують галтелі еліптичної форми або галтелі, які окреслені двома сполученими радіусами кривизни  $\rho_1, \rho_2$ . Галтелі зі змінним радіусом кривизни значно підвищують стійкість вала проти втомного руйнування. Однак, такі галтелі вимагають збільшення довжини перехідної ділянки вала.

4. Галтелі з піднутренням (рис. 3.69,г). Такі галтелі важко шліфувати.

Основними матеріалами для валів та осей є вуглецеві та леговані сталі. Заготовками для валів діаметром до 150 мм переважно є круглий прокат, а для валів більшого діаметра та фасонних валів – поковки. Поверхні валів, що призначені для спряження з іншими деталями, повинні бути точно й чисто оброблені різцями. Параметри шорсткості поверхонь: під підшипники кочення  $R_a = (3,2...0,80)$  мкм, а під підшипники ковзання  $R_a = (0,40...0,1)$  мкм.

Для валів, розміри поперечних перерізів яких вибирають за умовою жорсткості, переважно використовують сталі Ст5 і Ст6. Для більшості інших випадків застосовують сталі 45, 50, 40Х, 40ХН та ін. Вали із цих сталей піддаються нормалізації, поліпшенню або гартуванню з нагрівом СВЧ і низьким відпуском (шліцові вали, вали, що працюють у підшипниках ковзання, та інші випадки).

#### **Розрахункові схеми валів та осей. Критерії розрахунку.**

Розрахункові схеми валів та осей зображають у вигляді балок на шарнірних опорах, які навантажені поперечними та осьовими силами, що виникають у зачепленій установлених на них зубчастих колесах, від натягу віток пасової чи ланцюгової передачі, від дії власної ваги шківів, барабанів та інших установлених на валу деталей. Складаючи розрахункові схеми валів та осей, необхідно із певним наближенням



визначити відстань між опорами, місця розміщення деталей, через які передаються на вали та осі зовнішні навантаження.

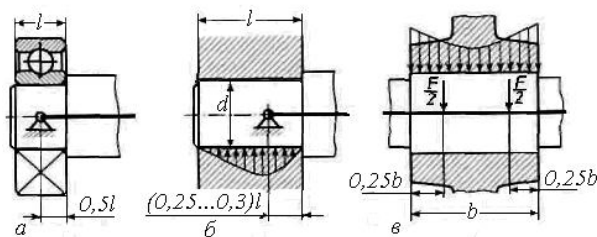


Рисунок 3.70

При вузьких опорах вала чи осі (підшипники кочення, підшипники ковзання з відношенням довжини цапфи до її діаметра  $l/d < 0,6$ ) центр опори суміщають із серединою підшипника (рис. 3.70,а). При широких опорах ковзання ( $l/d > 0,6$ ) внаслідок нерівномірності розподілу навантаження по довжині підшипника теоретично центр опори вважають розміщеним приблизно на відстані  $(0,25...0,30)l$  від краю підшипника з боку навантаженої частини вала чи осі (рис. 3.70,б).

Подібні міркування можна навести й щодо вибору перерізів вала, у яких передаються навантаження від насаджених на нього деталей. Найпростішим є припущення про передачу навантаження у середньому перерізі по довжині посадочної поверхні. Це припущення можна брати, якщо відстань між опорами вала чи осі значно перевищує ширину  $b$  деталі. Інакше слід ураховувати закономірність розподілу навантаження вздовж посадочної поверхні – хоча б рознесенням зовнішнього навантаження  $F$  так, як показано на рисунку 3.70,в.

Розрахункові схеми валів та осей можуть бути надзвичайно різноманітними. Об'єктом нашого вивчення будуть двохопорні вали та осі як статично визначені системи. Власну вагу валів та встановлених на них деталей здебільшого в розрахунках не беруть до уваги при невеликих їхніх розмірах, хоча її врахування не створює принципових труднощів.

Деякі найпоширеніші розрахункові схеми осей та валів зубчастих передач зображені на рисунку 3.71.

Найпростішою є розрахункова схема осі (рис. 3.71,а), яка навантажена однією (або кількома) поперечною силою  $F$ . Більш складними є розрахункові схеми валів. На рисунку 3.71,б,в зображені розрахункові схеми валів відповідно циліндричної та конічної передач

з розміщенням зубчастого колеса між опорами 1, 2 вала і консольним розміщенням колеса. У цих схемах вали навантажуються крутним моментом  $T$ , окружними, радіальними та осьовими силами  $F_t$ ,  $F_r$ ,  $F_a$ , що виникають у зачепленні зубців відповідної передачі.

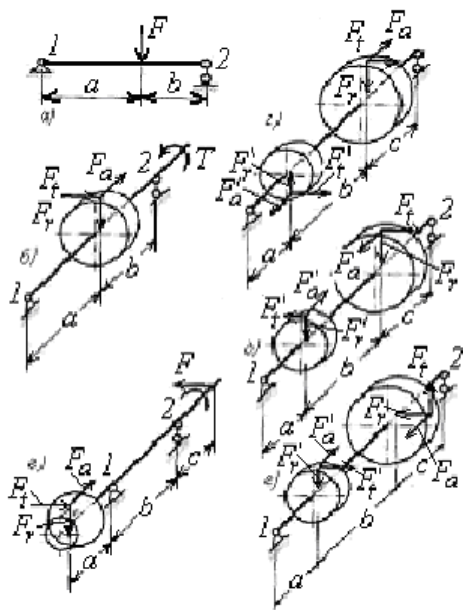


Рисунок 3.71

Крім сил у зачепленні на вал можуть діяти також сили від натягу віток пасової чи ланцюгової передачі (сила  $F$  на рис. 3.71,в) або сили від взаємодії деталей муфт, що з'єднують вали.

Розрахункові схеми проміжних валів багатоступеневих зубчастих передач, які зображені на рисунку 3.71,г,д,е, відрізняються одна від одної розміщенням місць прикладання сил, що виникають у зачепленні зубчастих коліс, розміщених на валу. Під час аналізу таких схем навантаження валів слід розглядати окремо силові фактори в різних площинах, а відповідні силові фактори складати геометрично.

Із розглянутих схем видно, що вали в процесі роботи зазнають деформацій згину, розтягу або стиску і кручення. Сталість напрямку поперечних щодо поздовжньої осі вала сил спричинює у валах, що обертаються, появу циклічно змінних напружень згину, а дія осьових сил – виникнення в перерізах валів напружень розтягу або стиску. Характер зміни дотичних напружень кручення відповідає характеру зміни в часі крутного моменту  $T$ .

Отже, на різні перерізи валів діють змінні в часі нормальні і дотичні напруження. Тому для більшості валів сучасних швидкохідних машин такий критерій міцності, як стійкість валів проти втомного руйнування, має вирішальне значення. Втомне руйнування відбувається в 40-50% випадків виходу валів із ладу. Для тихохідних валів або валів, що зазнають дії короточасних пікових перевантажень, основним розрахунковим критерієм є також статична міцність.

Вали, що мають значні (порівняно з діаметром) відстані між опорами, можуть бути недостатньо жорсткими в поперечному напрямі. Це може спричинити порушення геометрії зачеплень зубчастих коліс, заклинювання валів в опорах або недопустимі поперечні коливання валів. Тому важливим критерієм розрахунку довгих валів є також умова достатньої жорсткості.

**Розрахунок осей та валів на статичну міцність.** Розрахунки на статичну міцність для осей і для валів виконують за однаковим принципом. Відмінністю для осей є те, що вони не навантажуються крутним моментом, тобто схеми навантаження для них є простішими. Тому нижче зупинимось лише на порядку й особливостях розрахунків на статичну міцність валів.

Статичну міцність валів перевіряють для запобігання появи пластичних деформацій під час дії короткочасних перевантажень. Щоб виконати розрахунок, слід мати всі розміри вала та його форму, які потрібні для правильного складання розрахункової схеми.

Умову статичної міцності вала беруть у вигляді

$$\sigma_{E\max} = \sigma_E K_n \leq [\sigma]_E, \quad (3.96)$$

де  $\sigma_{E\max}$  – максимальне еквівалентне напруження у небезпечному перерізі вала;

$\sigma_E$  – еквівалентне напруження, яке обчислюють за номінальним розрахунковим навантаженням;

$K_n$  – коефіцієнт, що враховує короткочасні перевантаження;

$[\sigma]_E \approx 0,8\sigma_m$  – допустиме еквівалентне напруження.

Як приклад розглянемо розрахунок вала зубчастої передачі, конструкція якого наведена на рисунку 3.72,а, а розрахункова схема з епюрами згинального та крутного моментів – на рисунку 3.72,б. Вал має діаметри окремих ступенів  $d_1 - d_5$ , а його опорні цапфи – діаметри  $d_3$  і  $d_5$ . Відстань від середнього перерізу вала під зубчастим колесом до центрів його опор 1 і 2 відповідно дорівнюють  $a$  і  $b$ . Вал навантажений зовнішнім обертовим моментом  $T$  та силами  $F_t$ ,  $F_r$  і  $F_a$ , які виникають у зачепленні зубчатого колеса діаметром  $d$  і передаються на вал.

Для цієї схеми навантаження радіальні реакції опор вала (окремо від дії кожної із сил  $F_t$ ,  $F_r$  і  $F_a$ ) визначаються з рівнянь рівноваги такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} R_{1t} &= F_t b (a + b); & R_{2t} &= F_t a (a + b); \\ R_{1r} &= F_r b (a + b); & R_{2r} &= F_r a (a + b); \\ R_{1a} &= R_{2a} = 0,5 F_a d / (a + b). \end{aligned}$$

Сумарні радіальні реакції опор вала знаходимо як результат геометричної суми окремих складових:

$$R_1 = \sqrt{(R_{1r} + R_{1a})^2 + R_{1t}^2}; \quad R_2 = \sqrt{(R_{2r} - R_{2a})^2 + R_{2t}^2}. \quad (3.97)$$

Осьова реакція опори 1 дорівнює осьовій силі  $F_a$ , тобто  $R_{1x} = F_a$ . Після побудови епюр згинальних моментів  $M$  (також окремо від дії сил  $F_t$ ,  $F_r$  і  $F_a$ ) та крутного моменту  $T$  можна стверджувати, що найнебезпечнішим перерізом буде переріз  $A-A$  (рис. 3.71,а) під зубчастим колесом. У цьому перерізі діють крутний момент, який дорівнює зовнішньому обертовому моменту  $T$ , та максимальні згинальні моменти  $M_r$ ,  $M_a$  й  $M_t$  відповідно від сил  $F_r$ ,  $F_a$  й  $F_t$ :

$$M_r = R_{1r}a = R_{2r}b; \quad M_a = R_{1a}a; \quad M_t = R_{1t}a = R_{2t}b.$$

Результуючий максимальний згинальний момент  $M_{\max}$  визначається як геометрична сума окремих складових:

$$M_{\max} = \sqrt{(M_r + M_a)^2 + M_t^2}. \quad (3.98)$$

Згідно з наведеною схемою навантаження вала в перерізі  $A-A$  мають місце нормальне напруження згину  $\sigma_z$ , дотичне напруження кручення  $\tau$  та напруження стиску  $\sigma_c$ , яке обумовлене осьовою силою  $F_a$  та осьовою реакцією  $R_{1x}$  опори 1 вала. Тому еквівалентне напруження можна визначити за формулою

$$\sigma_E = \sqrt{(\sigma_{z2} + \sigma_c)^2 + 4\tau^2}, \quad (3.99)$$

де складові напруження

$$\begin{aligned} \sigma_{z2} &= M_{\max} / W_x = 32M_{\max} / (\pi d_4^3); \\ \sigma_c &= F_a / A_n = 4F_a / (\pi d_4^2); \\ \tau &= T / W_p = 16T / (\pi d_4^3). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Тут  $W_x = \pi d_4^3 / 32$ ,  $A_n = \pi d_4^2 / 4$ ,  $W_p = \pi d_4^3 / 16$  – відповідно осьовий момент опору, площа перерізу і полярний момент опору площі перерізу вала круглого діаметра  $d_4$ .

Отже, визначивши еквівалентне напруження  $\sigma_E$  для небезпечного перерізу вала та маючи коефіцієнт  $K_L$  короточасних перевантажень, можна перевірити за умовою (3.96) статичну міцність вала при його перевантаженнях.

Звичайно, перевіряють виконання умови статичної міцності (3.96) і в інших перерізах, у яких змінюється діаметр вала.

Границі витривалості матеріалу валів для необмеженого строку служби можна брати: при симетричному циклі згину  $\sigma_{-1} \approx 0,45\sigma_B$ ; при симетричному циклі кручення  $\tau_{-1} \approx 0,25\sigma_B$ .

Для вала, зображеного на рисунку 3.72,а, у перерізі  $A-A$  нормальні напруження згину змінюються за симетричним циклом, а нормальні напруження стиску постійні. Тому для цього перерізу маємо амплітуду та середнє значення нормальних напружень:

$$\sigma_a = \sigma_{3r} = M_{\max}/W_x; \quad \sigma_m = \sigma_c = F_a/A_n.$$

Щоб визначити амплітуду та середнє значення дотичних напружень, треба знати справжній характер зміни крутного моменту  $T$  у реальних умовах експлуатації машини. Оскільки це важко встановити, у розрахунках беруть зміну дотичних напружень за пульсуючим циклом для валів, що обертаються тільки в один бік, і за симетричним циклом для валів зі змінним напрямом передачі навантаження. Відповідно в першому випадку (переріз вала  $A-A$  на рис. 3.72,а)

$$\tau_a = \tau_m = 0,5\tau = T/(2W_p),$$

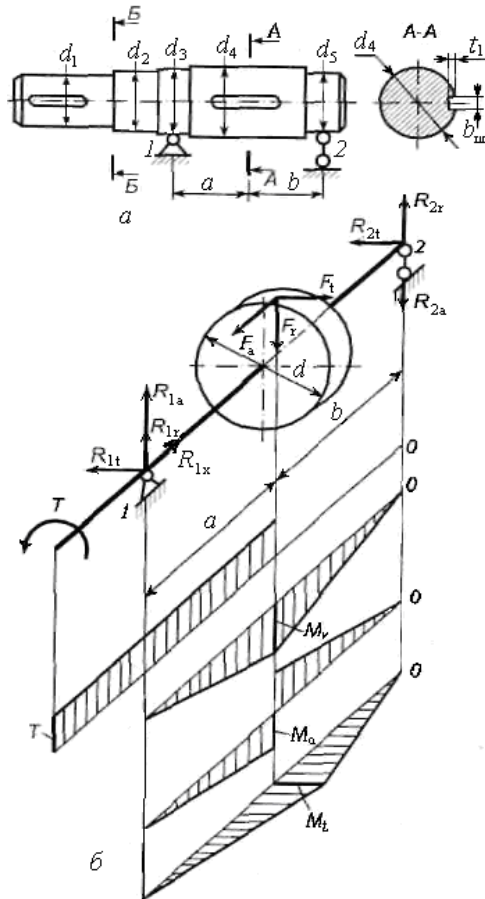


Рисунок 3.72

а в другому

$$\tau_a = \tau = T/W_p, \quad \tau_m = 0.$$

У виразах для визначення амплітуд та середніх напружень осьовий  $W_x$  і полярний  $W_p$  моменти опору перерізу, а також площу  $A_n$  перерізу треба брати за фактичними розмірами перерізів. Наприклад, якщо в перерізі є шпонковий паз (рис. 3.4.9, а), то

$$W_x = \pi d_4^3/32 - b_{ш} t (d_4 - t)^2/(2d_4);$$

$$W_p = \pi d_4^3/16 - b_{ш} t (d_4 - t)^2/(2d_4);$$

$$A_n = \pi d_4^2/4 - b_{ш} t.$$

**Розрахунок осей та валів на витривалість.** Розрахунки осей та валів на витривалість (стійкість проти втомного руйнування) є перевірними. Тому для виконання таких розрахунків треба мати всі розміри і форму осі чи вала. Для навантажених постійними за напрямом та модулем силами нерухомих осей такі розрахунки не виконують, а для осей, що обертаються, розрахунки здійснюють за таким же принципом, як і для валів.

Розрахунок валів на витривалість є основним і обов'язковим. У ньому враховуються характер зміни напружень, характеристики витривалості матеріалів, фактори концентрації напружень, тощо. Розрахунок на витривалість у більшості випадків виконують у вигляді перевірки коефіцієнтів запасу міцності  $s$  в певних перерізах валів за умовою

$$s \geq [s] = 1,5 \dots 2,5.$$

Розрахунковий коефіцієнт запасу міцності визначають у загальному випадку за формулою

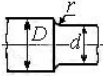
$$s = s_\sigma s_\tau / \sqrt{s_\sigma^2 + s_\tau^2}, \quad (3.101)$$

де коефіцієнти запасу міцності за нормальними  $s_\sigma$  і дотичними  $s_\tau$  напруженнями відповідно розраховуються за формулами

$$s_\sigma = \sigma_{-1} / (K_\sigma \sigma_a / K_d + \psi_\sigma \sigma_m); \quad s_\tau = \tau_{-1} / (K_\tau \tau_a / K_d + \psi_\tau \tau_m). \quad (3.102)$$

Ефективні коефіцієнти концентрації напружень  $K_\sigma$  і  $K_\tau$  вибирають залежно від механічних характеристик матеріалу вала та форми концентратора напружень у перерізі вала, де визначають коефіцієнт запасу міцності. Концентраторами напружень для валів можуть бути галтелі, кільцеві канавки, поперечні отвори, різьба, шпонкові пази, напрусування на вал інших деталей тощо.

Якщо у перерізі вала є кілька концентраторів напружень, то у розрахунках беруть той, для якого  $K_\sigma$  і  $K_\tau$  більші. Значення  $K_\sigma$  і  $K_\tau$  для деяких форм концентраторів напружень наведені у табл. 3.12 і 3.13.



Таблиця 3.12

D/d	r/d	K <sub>σ</sub> для валів зі сталі, що має σ <sub>B</sub> , МПа			K <sub>τ</sub> для валів зі сталі, що має σ <sub>B</sub> , МПа		
		500	800	1000	600	800	1000
1,05	0,02	1,70	1,88	2,05	1,24	1,29	1,33
	0,05	1,48	1,57	1,63	1,15	1,18	1,2
	0,1	1,28	1,33	1,36	1,08	1,10	1,12
	0,15	1,20	1,23	1,25	1,06	1,08	1,09
	0,20	1,16	1,20	1,22	1,05	1,06	1,07
1,10	0,02	2,0	2,24	2,47	1,40	1,52	1,62
	0,05	1,64	1,70	1,75	1,25	1,28	1,30
	0,1	1,37	1,42	1,45	1,12	1,16	1,18
	0,15	1,27	1,31	1,34	1,09	1,12	1,14
	0,2	1,20	1,24	1,27	1,06	1,08	1,10
1,25	0,02	2,12	2,68	3,10	1,64	1,73	1,80
	0,05	1,81	1,97	2,10	1,40	1,45	1,48
	0,1	1,47	1,54	1,60	1,20	1,27	1,32
	0,15	1,35	1,40	1,43	1,15	1,20	1,24
	0,2	1,30	1,32	1,34	1,09	1,13	1,16

Коефіцієнти, що характеризують чутливість матеріалу вала до асиметрії циклу напружень, можна брати для сталевих валів:

$$\psi_{\sigma} = 0,02 + 2 \cdot 10^{-4} \sigma_B; \quad \psi_{\tau} = 0,5 \psi_{\sigma}$$

де σ<sub>B</sub> – границя міцності матеріалу вала, МПа.

Коефіцієнти, що враховують вплив абсолютних розмірів перерізу вала, залежать від його матеріалу та діаметра перерізу і можуть бути визначені за табл. 3.14.

Виконуючи розрахунок вала на витривалість для визначення коефіцієнтів запасу міцності, потрібно вибирати перерізи, де виникають максимальні напруження і розміщені концентратори напружень.

Таблиця 3.13

σ <sub>B</sub> , МПа для матеріалу вала	Шліц		Шпонковий паз		Поперечний отвір	
	K <sub>σ</sub>	K <sub>τ</sub> *	K <sub>σ</sub> **	K <sub>τ</sub>	K <sub>σ</sub> ***	K <sub>τ</sub>
500	1,45	2,25/1,37	1,64/1,38	1,37	2,00/1,65	1,70
600	1,55	2,36/1,46	1,76/1,46	1,54	2,05/1,85	1,80
800	1,65	2,55/1,58	2,01/1,62	1,88	2,10/1,90	1,95
1000	1,72	2,70/1,58	2,26/1,77	2,22	2,20/2,00	1,90

\*У чисельнику – для валів із прямокутними шліцами, в знаменнику – для валів із евольвентними шліцами.  
 \*\* У чисельнику – для пазів, виконаних пальцевою фрезою, у знаменнику – для пазів, виконаних дисковою фрезою.  
 \*\*\* У чисельнику при відношенні діаметра отвору до діаметра вала 0,05... 0,15, у знаменнику – при 0,15...0,25.

Таблиця 3.14

Матеріал вала	$K_d$ при діаметрі перерізу $d$ , мм							
	10	20	30	40	50	70	100	200
Вуглецева сталь $\sigma_B = (400...500)$ МПа	0,98	0,92	0,88	0,85	0,82	0,76	0,70	0,63
Вуглецева або легована сталь $\sigma_B = (500...800)$ МПа	0,97	0,89	0,85	0,81	0,78	0,73	0,68	0,61
Легована сталь $\sigma_B = (800...1200)$ МПа	0,95	0,86	0,81	0,77	0,74	0,69	0,65	0,59

У деяких випадках наявність фактора концентрації напружень у будь-якому перерізі вала є достатньою умовою потреби виконання розрахунку на витривалість навіть при незначних номінальних напруженнях у цьому перерізі.

У деяких перерізах валів можуть виникати тільки нормальні  $\sigma$  або тільки дотичні  $\tau$  напруження. Тоді визначають  $s_\sigma$  або  $s_\tau$  а розрахунковий коефіцієнт запасу міцності буде відповідно  $s = s_\sigma$  або  $s = s_\tau$ .

**Проектний розрахунок валів та їхнє конструювання.** Розглянуті вище розрахунки валів на статичну міцність при перевантаженнях та на витривалість є перевірними розрахунками і їх виконують за відомими розмірами всіх конструктивних елементів валів.

Під час виконання проектного розрахунку на початковому етапі відомі лише деталі, що розміщуються на валу, та діючі зовнішні навантаження. Ураховуючи умови роботи вала та деякі вимоги, що ставляться до конструкції вала, вибирають матеріал для його виготовлення. Надалі орієнтовно визначають діаметр вала в характерних його перерізах за умовою міцності на кручення

$$\tau = T / W_p \leq [\tau]. \quad (3.103)$$

Беручи полярний момент опору перерізу  $W_p = \pi d^3 / 16$ , в якому діє крутний момент  $T$ , із умови (3.103) можна визначити потрібний діаметр вала

$$d \geq \sqrt[3]{16 T / (\pi [\tau])}. \quad (3.104)$$

Діаметр вала за умовою (3.104) визначають для перерізів, у яких діє тільки крутний момент, до того ж у цьому випадку для сталевих валів допустиме напруження беруть  $[\tau] = (35...40)$  МПа. Наприклад, у конструкції вала на рисунку 3.73,а ділянка вала діаметром  $d_1$  зазнає тільки деформації кручення, тому значення цього діаметра попередньо можна оцінити за умовою міцності на кручення.



У деяких випадках, наприклад, у конструкції проміжного вала зубчастого редуктора (рис. 3.73,б), немає перерізів, що зазнають тільки деформації кручення. Між опорами вал зазнає згину у всіх перерізах, а ділянка вала між зубчастими колесами додатково скручується.

Тут також діаметр  $d$  під зубчастим колесом попередньо можна оцінити з умови міцності на кручення [див. формулу (3.104)], враховуючи крутний момент  $T$  на валу і заздалегідь занижене допустиме напруження  $[\tau] = (25 \dots 30) \text{ МПа}$ .

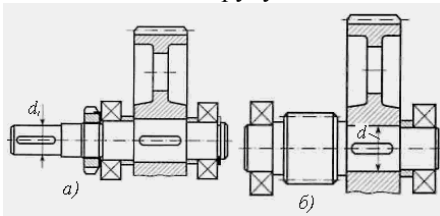


Рисунок 3.73

Маючи розміри деталей, що розміщуються на валу, та враховуючи зручність їхнього монтажу й способи їхньої фіксації, надалі розробляють усю конструкцію вала. При цьому слід забезпечувати мінімальні перепади діаметрів сусідніх ступенів вала, але достатні для створення упорних буртиків, потрібних для осової фіксації деталей. Радіуси галтелей слід брати достатньо великими для зменшення концентрації напружень, їхнє значення повинно бути однаковим, бо при цьому зменшується номенклатура різців для обробки вала. Якщо для вала передбачено кілька шпонкових пазів, то їх слід розміщувати на одній лінії. Під час конструювання вала треба приділяти значну увагу технологічності та економічності виготовлення з урахуванням обсягу виробництва. На цьому етапі призначають також посадки деталей на вал.

У результаті попередньої розробки конструкції вала отримують розміри всіх його конструктивних елементів. За цими розмірами виконують перевірні розрахунки. Якщо результати розрахунків будуть незадовільні, то розміри вала слід коректувати.

**Приклад 3.6.** Розрахувати й сконструювати ведений вал редуктора з косозубою циліндричною зубчастою передачею, розрахунок якої виконано в прикладі 3.2.

**Розв'язання.** 1. *Вихідні дані для розрахунку* (див. приклад. 3.2.). Номінальний обертовий момент на веденому валу  $T = T_2 = 280 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Коефіцієнт короточасних перевантажень  $K_{\Pi} = 2$  (перевантаження до 200 %) Ділильний діаметр розташованого на валу колеса  $d = d_2 = 195,88 \text{ мм}$ . Ширина зубчастого колеса  $b_2 = 50 \text{ мм}$ .

Сили, що діють на колесо: окружна сила  $F_t = 2956 \text{ Н}$ ; радіальна сила  $F_r = 1109 \text{ Н}$ ; осова сила  $F_a = 741 \text{ Н}$ .

2. *Проектний розрахунок вала і його конструювання.*

Для виготовлення вала призначаємо нормалізовану сталь 45, для якої границя текучості  $\sigma_T = 363$  МПа і границя міцності  $\sigma_B = 598$  МПа.

Діаметр вала з умови міцності на кручення попередньо визначаємо для перерізу, який знаходиться на вихідній ділянці вала, тобто ділянці, яка передає тільки крутний момент. Для такої ділянки  $[\tau] = 40$  МПа й за формулою (3.104) маємо

$$d \geq \sqrt[3]{16T_2 / \pi[\tau]} = \sqrt[3]{16 \cdot 280 \cdot 10^3 / (\pi \cdot 40)} = 32,92 \text{ мм.}$$

Конструкцію вала для косозубого зубчастого колеса можна прийняти такою, яка зображена на рисунку 3.72,а. Тоді можна прийняти такі діаметри ділянок вала:  $d_1 = 34$  мм;  $d_2 = 38$  мм;  $d_3 = d_5 = 40$  мм (ділянки для розташування підшипників кочення);  $d_4 = 42$  мм (ділянка, на якій розташовується зубчасте колесо). Оскільки зубчасте колесо розташовується на валу симетрично відносно опор вала (підшипників), то розміри  $a$  і  $b$  однакові (див. рис. 3.72,а). Якщо врахувати, що ширина зубчастого колеса  $b_2 = 50$  мм, відстані від торців колеса до корпусу передачі однакові – по 12 мм, а ширина підшипників становить орієнтовно 18 мм, то відстань між опорами вала

$$a + b = 50 + 2 \cdot 12 + 18 = 92 \text{ мм, або } a = b = 92/2 = 46 \text{ мм.}$$

Розміри шпонкового паза в перерізі  $A-A$  вала діаметром  $d_4 = 42$  мм за стандартом такі:  $b_w = 12$  мм;  $t_1 = 5$  мм.

### 3. Перевірка статичної міцності вала.

Розрахункова схема цього вала відповідає тій, що зображена на рис. 3.4.9,б, де вказані силові фактори, які діють на вал і зображені епюри крутного моменту  $T$  і згинальних моментів від сил  $F_t$ ,  $F_r$  і  $F_a$ , у двох взаємно перпендикулярних площинах.

Радіальні реакції опор 1 і 2 вала від дії прикладених до колеса сил для випадку  $a = b = 46$  мм:

$$R_{1r} = R_{2r} = R_r / 2 = 1109 / 2 = 554,4 \text{ Н;}$$

$$R_{1t} = R_{2t} = R_t / 2 = 2956 / 2 = 1478 \text{ Н;}$$

$$R_{1a} = R_{2a} = 0,5 F_a R_d / (a + b) = 0,5 \cdot 741 \cdot 195,88 / (46 + 46) = 789 \text{ Н.}$$

Сумарні радіальні реакції опор вала:

$$R_1 = \sqrt{(R_{1r} + R_{1a})^2 + R_{1t}^2} = \sqrt{(554,5 + 789)^2 + 1478^2} = 1998 \text{ Н;}$$

$$R_2 = \sqrt{(R_{2r} - R_{2a})^2 + R_{2t}^2} = \sqrt{(554,5 - 789)^2 + 1478^2} = 1497 \text{ Н.}$$

Максимальні згинальні моменти від сил  $F_t$ ,  $F_r$  і  $F_a$ :

$$M_t = R_{1t} a = 1478 \cdot 46 = 67988 \text{ Н}\cdot\text{мм;}$$

$$M_r = R_{1r} a = 554,5 \cdot 46 = 25507 \text{ Н}\cdot\text{мм;}$$

$$M_a = R_{1a} a = 789 - 46 = 36294 \text{ Н}\cdot\text{мм}.$$

Сумарний максимальний згинальний момент у перерізі  $A-A$  вала

$$M_{\max} = \sqrt{(M_r + M_a)^2 + M_t^2} = \\ = \sqrt{(25507 + 36264)^2 + 67988^2} = 91879 \text{ Н}\cdot\text{мм}.$$

Номінальні напруження в перерізі  $A-A$ :

$$\sigma_{3r} = M_{\max} / W_{OH} = 32 M_{\max} / (\pi d_4^3) = 32 \cdot 91879 / (3,14 \cdot 42^3) = 12,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_c = F_a / A_4 = 4 F_a / (\pi d_4^2) = 4 \cdot 741 / (3,14 \cdot 42^2) = 0,54 \text{ МПа};$$

$$\tau = T / (2W_{pH}) = 16 T / (\pi d_4^3) = 16 \cdot 280 \cdot 10^3 / (3,14 \cdot 42^3) = 19,3 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_E = \sqrt{(\sigma_{3r} + \sigma_c)^2 + 4\tau^2} = \sqrt{(12,6 + 0,54)^2 + 19,3^2} = 23,4 \text{ МПа}.$$

Максимальне еквівалентне напруження мри короточасних перевантаженнях

$$\sigma_{E\max} = \sigma_E K_{II} = 23,4 \cdot 2 = 46,8 \text{ МПа}.$$

Допустиме еквівалентне напруження

$$[\sigma]_E = 0,8 \sigma_r = 0,8 \cdot 363 = 290 \text{ МПа}.$$

Умова статичної міцності вала виконується, оскільки

$$\sigma_{E\max} = 46,8 \text{ МПа} < [\sigma]_E = 290 \text{ МПа}.$$

#### 4. Розрахунок вала на витривалість.

Небезпечними перерізами цього вала є такі: переріз  $A-A$ , оскільки в цьому перерізі виникають найбільші напруження і концентратором напружень є шпонковий паз, утворений пальцевою фрезою; переріз  $B-B$ , де концентратором напружень є галтель (перехід від діаметра  $d_1 = 34 \text{ мм}$  до діаметра  $d_2 = 38 \text{ мм}$ ).

а) Визначення коефіцієнта запасу міцності вала в перерізі  $A-A$ .

Оскільки в перерізі  $A-A$  діють нормальні і дотичні напруження, то спочатку визначаємо  $s_\sigma$  і  $s_\tau$ , а відтак і загальний коефіцієнт запасу міцності  $s$  (див. формули (3.101) і (3.102)).

Границі витривалості матеріалу вала

$$\sigma_{-1} = 0,45 \sigma_B = 0,45 \cdot 598 = 269 \text{ МПа}; \tau_{-1} = 0,25 \sigma_B = 0,25 \cdot 598 = 150 \text{ МПа}$$

Амплітуди нормальних і дотичних напружень

$$\sigma_a = M_{\max} / W_{OH} = 9179 / 6295 = 14,6 \text{ МПа};$$

$$\tau_a = T / (2W_{pH}) = 280 \cdot 10^3 / (2 \cdot 13569) = 10,4 \text{ МПа}.$$

У даному випадку моменти опору перерізу обчислюємо з урахуванням шпонкового паза (рис. 3.72,а):

$$W_{OH} = \pi d_4^3 / 32 - b_{ш} t_1 (d_4 - t_1)^2 / (2 d_4) = \\ = 3,14 \cdot 42^3 / 32 - 12 \cdot 5 (42 - 5)^2 / (2 \cdot 42) = 6295 \text{ мм}^3;$$

$$W_{pH} = \pi d_4^3 / 16 - b_{ш} t_1 (d_4 - t_1)^2 / (2 d_4) = \\ = 3,14 \cdot 42^3 / 16 - 12 \cdot 5 (42 - 5)^2 / (2 \cdot 42) = 13569 \text{ мм}^3.$$

Середні значення нормальних і дотичних напружень:

$$\sigma_m = F_a / (\pi d_4^2 / 4 - b_{uu} t_1) = 741 / (3,14 \cdot 42^2 / 4 - 12 \cdot 5) = 0,6 \text{ МПа};$$

$$\tau_m = \tau_a = 10,4 \text{ МПа} - \text{для нереверсивної передачі.}$$

Ефективні коефіцієнти концентрації напружень від шпонкового паза (див. табл. 3.11):

$$K_\sigma = 1,76; K_\tau = 1,54.$$

Коефіцієнти, що характеризують чутливість матеріалу вала до асиметрії циклів напружень:

$$\psi_\sigma = 0,02 + 2 \cdot 10^{-4} \sigma_B = 0,02 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot 598 = 0,14;$$

$$\psi_\tau = 0,5 \psi_\sigma = 0,5 \cdot 0,14 = 0,07.$$

Коефіцієнт, що враховує вплив абсолютних розмірів перерізу вала за табл. 3.14  $K_d = 0,80$ .

Коефіцієнти запасу міцності за нормальними і дотичними напруженнями:

$$s_\sigma = \sigma_{-1} / (K_\sigma \sigma_a / K_d + \psi_\sigma \sigma_m) = 269 / (1,76 \cdot 14,6 / 0,80 + 0,14 \cdot 0,6) = 8,3;$$

$$s_\tau = \tau_{-1} / (K_\tau \sigma_a / K_d + \psi_\tau \tau_m) = 150 / (1,54 \cdot 10,4 / 0,80 + 0,07 \cdot 10,4) = 7,1.$$

Загальний розрахунковий коефіцієнт запасу міцності вала в перерізі А—А

$$s = s_\sigma s_\tau / \sqrt{s_\sigma^2 + s_\tau^2} = 8,3 \cdot 7,1 / \sqrt{8,3^2 + 7,1^2} = 5,4.$$

У перерізі А—А витривалість вала достатня, оскільки

$$s = 5,4 > [s] = 1,5 \dots 2,5.$$

б) Визначення коефіцієнта запасу міцності вала в перерізі Б—Б.

У перерізі Б—Б вала діють тільки дотичні напруження, тому загальний коефіцієнт запасу міцності  $s = s_\tau$ . Концентратором напружень тут є галтель. Приймаємо радіус галтелі  $r = 1 \text{ мм}$ , тоді  $r / d_1 = 1/34 = 0,03$ ,  $d_1 / d_2 = 38/34 = 1,12$  і за табл. 3.12 маємо  $K_\tau = 1,45$ .

Амплітуда й середнє дотичне напруження в перерізі Б—Б:

$$\tau_a = \tau_m = 16T / (2\pi d_1^3) = 16 \cdot 280 \cdot 10^3 / (2 \cdot 3,14 \cdot 34^3) = 18,2 \text{ МПа.}$$

Коефіцієнт запасу міцності вала в перерізі Б—Б

$$s = s_\tau = \tau_{-1} / (K_\tau \tau_a / K_d + \psi_\tau \tau_m) = 150 / (1,45 \cdot 18,2 / 0,82 + 0,07 \cdot 18,2) = 4,5 > [s] = 1,5 \dots 2,5.$$

У перерізі Б—Б витривалість вала також достатня.

### Контрольні запитання до пункту 3.4.1

1. Які опорні частини валів та осей називаються цапфами?
2. Яких деформацій зазнають вали в процесі роботи?
3. Розшифруйте величини, що входять до умови статичної міцності вала  $\sigma_{Emax} = \sigma_E K_n \leq [\sigma]_E$ .

4. Розшифруйте величини, що входять до формули, за якою обчислюється коефіцієнт запасу міцності  $s = s_{\sigma} s_{\tau} / \sqrt{s_{\sigma}^2 + s_{\tau}^2}$ .

5. За якою умовою міцності виконують розрахунок валів на витривалість?

6. Як вибираються перерізи, в яких виконуються розрахунки вала на витривалість для визначення коефіцієнтів запасу міцності?

### 3.4.2 Опори валів та осей

Опори валів та осей, що обертаються, називаються підшипниками. Підшипники сприймають радіальні та осьові навантаження, які прикладені до вала чи осі, і зберігають задане постійне розташування геометричної осі обертання деталей. Від якості і надійності підшипників значною мірою залежать роботоздатність і ресурс окремих складових частин машин.

Підшипники за характером взаємодії їх з валами поділяють на два види: підшипники ковзання, у яких опорна ділянка вала чи осі ковзає по поверхні підшипника; підшипники кочення, у яких тертя ковзання замінене на тертя кочення завдяки використанню додаткових деталей – кульок або роликів.

**Підшипники ковзання** – це елементи опор валів і осей, поверхня цапфи яких взаємодіє через шар мастила або безпосередньо з нерухомою поверхнею підшипника, яка її охоплює. Нормальна робота підшипників ковзання без систематичного спрацьовування поверхонь цапфи вала і підшипника можлива лише при розділенні цих поверхонь шаром мастила достатньої товщини. Наявність шару мастила між робочими поверхнями може бути забезпечена лише надлишковим тиском, який буває гідродинамічним, що створюється при обертанні цапфи, або гідростатичним, що виникає внаслідок подачі мастила відповідною помпою. Переважно застосовують підшипники з гідродинамічним змащуванням.

Підшипники ковзання в сучасному машинобудуванні не так поширені як підшипники кочення. Однак за деякими своїми позитивними характеристиками вони в деяких випадках мають переважне, або однакове використання з підшипниками кочення. Підшипники ковзання застосовують у таких випадках:

а) для опор валів ( $\omega > 500$  рад/с), у режимах роботи яких довговічність підшипників кочення досить низька;

б) для валів та осей, до яких ставляться високі вимоги щодо точності монтажу і забезпечення постійного положення осі обертання;

в) для валів великого діаметра через відсутність стандартних підшипників кочення;

г) у випадках, коли підшипники за умовами складання машини повинні бути роз'ємними (наприклад, для опор колінчастих валів);

д) під час роботи підшипників у воді або агресивному середовищі, де підшипники кочення нероботоздатні;

е) якщо необхідні малі діаметральні розміри, наприклад, для близько розмішених паралельних валів;

є) для тихохідних валів та осей невідповідальних механізмів, де підшипники ковзання простіші за конструкцією й дешевші, ніж підшипники кочення.

Підшипники ковзання вимагають систематичного нагляду та неперервного змащування, мають більші втрати на тертя при малих швидкостях обертання валів і потребують підвищених пускових моментів під час пуску машини. Крім того, цапфи валів та осей, що працюють у підшипниках ковзання, повинні мати високу якість поверхні для того, щоб запобігти прискореному спрацюванню підшипника та цапфи.

За конструкцією підшипники ковзання бувають дуже різноманітні. У найпростішому вигляді підшипник ковзання (рис. 3.74,а) складається з корпусу 1 та вкладиша 2, який розміщують і фіксують у корпусі. Взаємодія опорної цапфи вала з підшипником відбувається через вкладиш та шар мастила між їхніми поверхнями.

Для подачі мастила у корпусі і у вкладиші підшипника передбачається отвір та пази. Матеріал вкладишів повинен бути стійким проти спрацювання та заїдання, мати достатню пластичність, а коефіцієнт тертя пари цапфа – вкладиш повинен бути мінімальним.

При дії значних осьових навантажень використовують підп'ятники (рис. 3.74,б) – це кінцеві або проміжні опори, переважно вертикальних валів (вал – 1), що приймають осьові навантаження. Підп'ятники, конструкція яких ґрунтується на терті ковзання (рис. 3.74,б), мають вкладиші – 2, 3, що мають антифрикційні властивості (матеріал – бронза чи бабіт). Такі підп'ятники мають пристрої (отвір 4) для змащування рідкими або пластичними мастилами. Частина опорної поверхні п'яти, що розміщена безпосередньо біля осі вала, перебуває в умовах малих швидкостей ковзання і посиленого тертя, через що можливі заїдання й задири робочих поверхонь. Тому поверхню п'ят, що мають витримувати значні навантаження, роблять кільцевою з отвором у центральній частині (рис. 3.74,б).

Основними розмірами підшипників ковзання є діаметр підшипника  $d$  та його довжина  $l$  (рис. 3.64,а).

Умовні розрахунки підшипників ковзання виконують, якщо режим рідинного тертя не може бути забезпеченим. Такі наближені розрахунки запобігають інтенсивному спрацюванню, перегріванню та заїданню підшипників. При цих розрахунках обмежується тиск  $p$  у підшипниках та параметр  $pv$ . Обмеження тиску  $p$  гарантує не видавлювання мастила, а обмеження параметру  $pv$  – нормальний тепловий режим і відсутність заїдання. Розрахункові умови записують у такому вигляді:

$$p = F/(dl) \leq [p]; \quad (3.105)$$

$$pv_s \leq [pv_s], \quad (3.106)$$

де  $F$  – радіальне навантаження на підшипник;

$d$  – діаметр цапфи;

$l$  – довжина підшипника;

$v_s = 0,5\omega d$  – швидкість ковзання або окружна швидкість цапфи, що обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ .

При високих швидкостях ковзання і невеликих тисках можливе підвищення температури. У такому разі обмежують швидкість ковзання за умовою:

$$v_s \leq [v_s]. \quad (3.107)$$

Допустимі значення тиску  $[p]$ , параметра  $[pv_s]$  та швидкості ковзання  $[v_s]$  наведені в довідниках.

**Підшипники кочення** – це елементи опор осей, валів та інших деталей, що працюють на використанні принципу тертя кочення.

Здебільшого підшипник кочення (рис. 3.75) складається із зовнішнього 1 та внутрішнього 3 кілець, тіл кочення 2 і сепаратора 4. Внутрішнім кільцем підшипник розмішують на валу або осі, а зовнішнім – у корпусі опори. Відносне обертання внутрішнього кільця стосовно зовнішнього забезпечується за рахунок тіл кочення між кільцями.

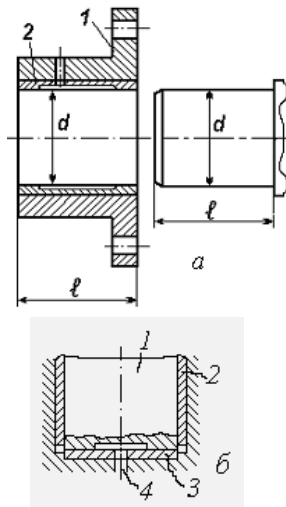


Рисунок 3.7

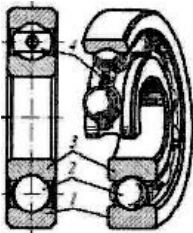


Рисунок 3.75

Тіла кочення перекочуються по доріжках кочення (бігових доріжках), які передбачені на зовнішньому та внутрішньому кільцях підшипника. Сепаратор розділяє тіла кочення і утримує їх на однаковій відстані.

Підшипники кочення належать до групи деталей, які найширше стандартизовані у міжнародному масштабі і централізовано виготовляються на спеціалізованих заводах масовим виробництвом. Останнім часом підшипники кочення є основними видами опор у машинах. Світовий обсяг випуску підшипників кочення вимірюється мільярдами штук на рік. Їх виготовляють близько 20 000 різних типорозмірів у діапазоні зовнішніх діаметрів від 1 мм до 3 м і масою від 0,5 г до 7 т.

Широке використання підшипників кочення для опор різних обертових деталей зумовлене деякими їхніми перевагами порівняно з іншими видами опор. Це такі переваги:

- а) малі втрати на тертя, що забезпечує високий ККД опор (до 0,99);
- б) висока несуча здатність;
- в) малі габаритні розміри в осьовому напрямі;
- г) незначні витрати мастильних матеріалів;
- д) невисокі вимоги до матеріалу та якості поверхонь цапф валів і осей, що розміщуються в підшипниках кочення.

До недоліків підшипників кочення належать такі:

- а) значні діаметральні габаритні розміри, що утруднює застосування

їх при малих відстанях між осями валів;

- б) обмежений строк служби, особливо при великих навантаженнях та швидкостях;

- в) низька здатність демпфірування ударних навантажень;

- г) підвищений шум при високих швидкостях обертання.

**Класифікація.** Підшипники кочення поділяють за такими ознаками:

1. За формою тіл кочення підшипники бувають кулькові та роликові. Основні форми тіл кочення зображені на рисунку 3.76,а-ж.

Роликові підшипники за тією ж ознакою ділять на підшипники: із короткими та довгими роликами (рис. 3.76,б,в); із витими роликами (рис. 3.76,г); із конічними роликами (рис. 3.76,д); із бочкоподібними роликами (рис. 3.76,е,є) і з голчастими роликами (рис. 3.76,ж).



2. За числом рядів тіл кочення – одно-, дво- та чотирирядні.

3. За способом компенсації перекосів вала – несамоустановні та самоустановлювальні сферичні. Самоустановні

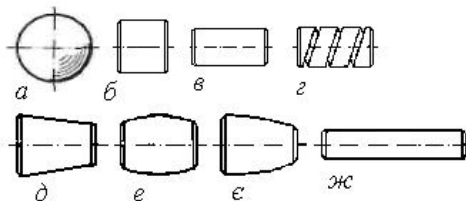


Рисунок 3.76

підшипники допускають перекоси кілець до  $2-3^\circ$ , завдяки чому можуть працювати при збільшених деформаціях валів і при не співвісному розміщенні отворів під підшипники в окремих опорах вала.

4. За радіальними розмірами підшипники кочення з одним і тим же внутрішнім діаметром  $a''$  ділять на 5 серій діаметрів (надлегка, особливо легка, легка, середня та важка) і на 4 серії відносно ширини (особливо вузька, вузька, нормальна широка, особливо широка). Співвідношення розмірів підшипників різних серій показано на рисунку 3.77 (а – особливо легка серія; б – легка; в – легка широка; г – середня; д – середня широка; е – важка серія).

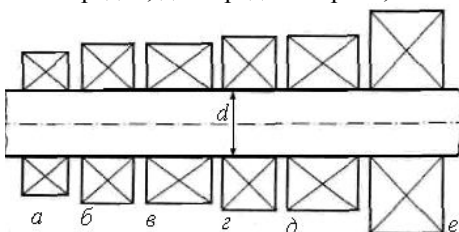


Рисунок 3.77

За напрямом сприйманого навантаження підшипники кочення поділяють на радіальні – сприймають тільки радіальне навантаження, яке направлене перпендикулярно до осі обертання (деякі радіальні підшипники, наприклад,

кулькові, можуть сприймати певні осьові навантаження); упорні сприймають тільки осьове навантаження; радіально – упорні – здатні сприймати радіальне та осьове навантаження; упорно-радіальні – сприймають значне осьове й незначне радіальне навантаження.

**Конструкції** деяких основних типів **підшипників** кочення наведено на рисунку 3.78.

Кулькові підшипники звичайні радіальні (рис. 3.78,а) і радіально-упорні (рис. 3.78,в) ліпше працюють при підвищених швидкостях обертання й менш чутливі до перекосів. Дворядний сферичний кульковий підшипник зображений на рисунку 3.78,б. Роликові підшипники радіальні (рис. 3.78,г) та радіально-упорні конічні (рис. 3.78,д) мають вищу вантажність (приблизно на 70-90%) порівняно з кульковими, але вимагають жорстких валів і корпусів, оскільки не допускають

перекосів. Упорні кулькові підшипники однорядні (рис. 3.78,е) та подвійні (рис. 3.78,є) мають кільця з бітовими доріжками на торцях.

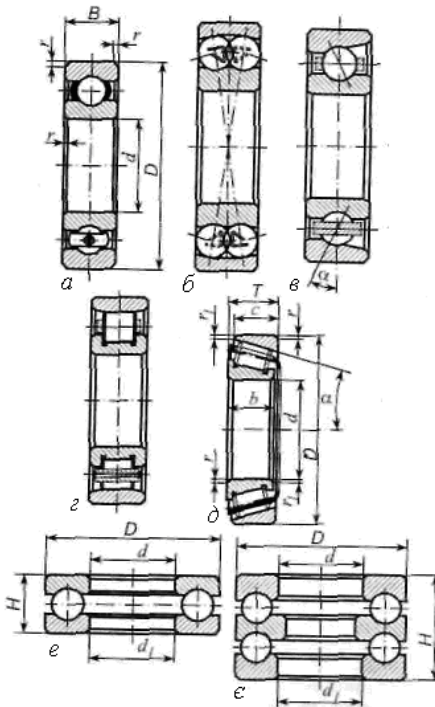


Рисунок 3.78

Роликопідшипники радіальні дворядні сферичні (рис. 3.79) мають бочкоподібні ролики. Такі підшипники допускають перекіс кілець до  $2^\circ$  і крім радіального навантаження можуть приймати й осьове. Роликопідшипники голчасті (рис. 3.79) мають малий діаметр зовнішнього кільця. Вони приймають тільки радіальне навантаження.

Для характерних типів підшипників на рисунку 3.78 показані основні розміри: внутрішній діаметр  $d$ , зовнішній діаметр  $D$ , ширина підшипника  $B(T)$ , а для упорних підшипників висота  $H$ . Для радіально-упорних підшипників (рис. 3.78,в)  $\alpha$  – кут контакту тіл кочення.

#### **Умовні позначення.**

Усі підшипники кочення мають умовне позначення, яке складається з ряду цифр. Дві перші цифри, рахуючи справа, означають умовно внутрішній діаметр підшипників, до того ж для всіх підшипників із внутрішнім діаметром 20 мм і більше ці дві цифри означають частку від ділення діаметра (мм) на 5. Для підшипників із внутрішнім діаметром до 9 мм перша цифра праворуч показує фактичний розмір внутрішнього діаметра, мм. Внутрішні діаметри 10; 12; 15 і 17 мм позначають двома цифрами 00; 01; 02 і 03 відповідно.

Третя цифра праворуч разом із сьомою свідчать про серію підшипників всіх діаметрів ( $d \geq 10$  мм); основна з особливо легких серій позначається цифрою 1, легка – 2, середня – 3, важка – 4, легка широка – 5, середня широка – 6 і т. д.

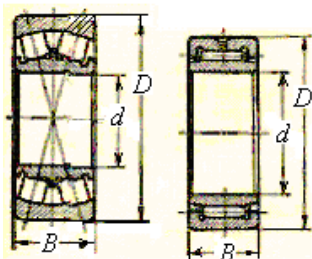


Рисунок 3.79

радіально-упорний кульковий; 7 – роликовий конічний; 8 – упорний кульковий; 9 – упорний роликовий.

П'ята та шоста цифри праворуч, що вводяться не для всіх підшипників, характеризують їхні конструктивні особливості.

Цифри 6, 5, 4 і 2, що стоять через знак «тире» перед умовним позначенням підшипника, означають його клас точності (2 – найвищий клас точності). Нормальний клас точності позначається цифрою 0, яку не показують.

Приклади позначення підшипників: 318 – внутрішній діаметр  $d = 18 \cdot 5 = 90$  мм; 3 – середня серія; 0 – радіальний кульковий однорядний підшипник (нулі перед значущими цифрами спереду позначення не записуються); 7216 – внутрішній діаметр 80 мм, легка серія, підшипник роликовий конічний.

Основні параметри стандартних підшипників – розміри, маса, вантажність (статична й динамічна), гранична швидкість обертання – наводяться в спеціальних каталогах підшипників кочення.

#### ***Матеріали деталей і точність підшипників кочення.***

Основний матеріал для кілець та тіл кочення підшипників – це підшипникові високовуглецеві хромисті сталі ШХ9, ШХ15 і ШХ15ГС. Твердість після відповідної термообробки кілець і роликів становить 60...65 HRC, а кульок – 62...66 HRC.

Сепаратори здебільшого виготовляють із м'якої вуглецевої сталі методом штампування; для високошвидкісних підшипників використовують масивні сепаратори з антифрикційних бронз, латуні, алюмінієвих сплавів або пластмас (текстоліт, поліамід).

Підшипники кочення поділяють на п'ять класів точності, які позначаються цифрами (у порядку підвищення точності): 0, 6, 5, 4 і 2. Точність підшипників кочення в основному характеризується: а) точністю основних розмірів (внутрішнього і зовнішнього діаметрів підшипника та ширини кілець); б) точністю форми взаємного розміщення поверхонь кілець; в) точністю обертання.

Із підвищенням класу точності вартість підшипника кочення значно зростає. Підшипник класу точності 2 приблизно в 10 разів дорожчий, ніж підшипник нормальної точності класу 0. Для більшості валів та осей загального призначення використовують підшипники нормальної точності класу 0, а підшипники більш високих класів точності – для валів, що вимагають точного обертання згідно з призначенням машини.

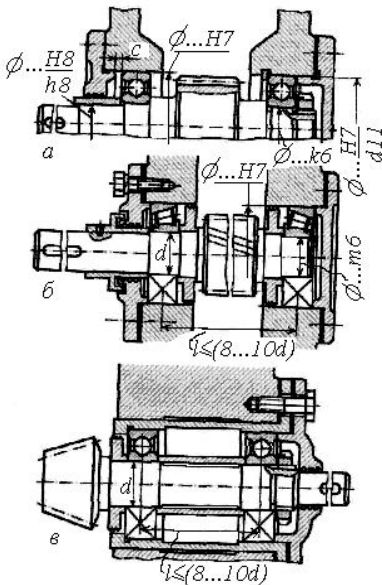


Рисунок 3.80

**Конструкції опор валів з підшипниками кочення** бувають дуже різноманітні. Вони залежать від величини і напрямку навантаження, типу підшипників, податливості валів і корпусів опор, способів змащування, ущільнення підшипникових вузлів, тощо. На рисунку 3.80 наведені деякі конструкції опор валів з радіальними і радіально-упорними підшипниками.

#### **Вибір типу підшипників.**

Тип підшипників в опорах валів залежить від напрямку їхнього навантаження. Якщо підшипники навантажуються радіальними силами (перпендикулярно до осі вала), то застосовують радіальні підшипники (рис. 3.78,а), а у випадку одночасного навантаження

радіальними та осьовими силами необхідно використовувати радіально-упорні підшипники (рис. 3.78,б,в). Перевага в обох випадках надається кульковим підшипникам. Треба мати на увазі, що радіальні кулькові підшипники здатні сприймати незначні осьові навантаження порівняно з їхнім радіальним навантаженням.

**Кріплення підшипників на валу і в корпусі.** Кріплення радіальних підшипників на валу і в корпусі у двох опорах вала переважно здійснюють так, як показано на рисунку 3.80,а. Таке кріплення застосовують у випадках, коли відстань між підшипниками  $l > 8d$ , де  $d$  – діаметр вала під підшипниками. Якщо відстань між підшипниками менша, ніж  $8d$ , можна застосовувати схему кріплення за рис. 3.80,б,в з використанням кулькових радіальних підшипників.

Радіально-упорні підшипники, кулькові чи конічні роликові встановлюють і закріплюють на валу і в корпусі так, як показано на рисунку 3.80,б,в, але за умови, що відстань між підшипниками не перевищує 10d.

**Регулювання підшипників та їхні посадки.** Підшипники кочення які встановлюються за схемою на рис. 3.80,а, не вимагають регулювання, а радіально-упорні за схемою установки на рис. 3.80,б,в вимагають регулювання, щоб запобігти появі осьових зміщень вала. Таке регулювання здійснюється боковими кришками підшипникових вузлів шляхом зміни товщини прокладок під ними.

Посадки підшипників кочення в корпусі опор і на валу можна здійснювати такими, які вказані на рисунку 3.80.

**Змащування та ущільнення підшипників.** Змащування підшипників потрібне для зменшення тертя між тілами кочення, кільцями і сепаратором а також для захисту від корозії і герметизації підшипникових вузлів. Практичне застосування для змащування підшипників кочення мають рідки мінеральні та пластичні мастила.

Якщо підшипники змащуються рідким мастилом, що знаходиться, наприклад, у корпусі зубчастієї передачі, то підшипникові вузли повинні бути відкритими з внутрішньої сторони для попадання в них мастила за рахунок його розбризкування зубчастими колесами. Такий варіант зображено на рис. 3.80,а.

Пластичні мастила застосовують тоді, коли неможливо або утруднено використання рідких мастил. У цьому випадку пластичні мастила закладають у підшипникові гнізда на 0,3-0,6 їхнього вільного об'єму й періодично поновлюють. Для того щоб запобігти випаданню пластичного мастила з підшипникових гнізд, останні повинні бути закритими з обох боків відповідними шайбами чи кільцями (див. рис. 3.80,б,в).

Щоб захистити підшипники кочення від забруднення та запобігти витіканню з них мастила, слід застосовувати в опорах валів ущільнювальні пристрої: контактні (на рис. 3.81,а,б – манжетні), щілинні (на рис. 3.81,б,е), лабіринті та комбіновані (рис. 3.81,д). У щілинних та лабіринтних ущільненнях вузькі щілини заповнюють пластичним мастилом, чим досягається їхня захисна властивість.

Схему ефективного торцевого ущільнення подано на рисунку 3.81,в. У цьому ущільненні кільце 1 виготовляють з антифрикційних матеріалів, таких як фторопласт або вуглеграфіт, випалений і просочений фенолформальдегідною смолою та ін. Кільце 2 – із хромистої сталі, загартованої до високої твердості. Кільце 1 до кільця

2 притискує пружина 3. Гумове кільце 4 є так званим статичним ущільненням.

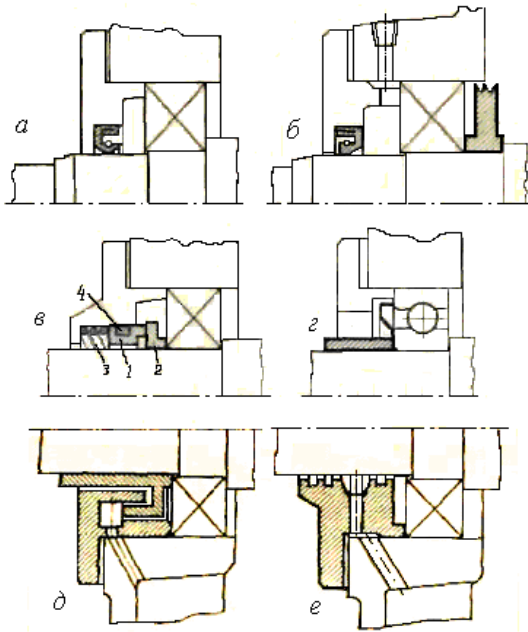


Рисунок 3.81

Ефективне також торцеве ущільнення еластичними сталевими шайбами (рис. 3.81,г). Типові конструкції лабіринтного й щілинного ущільнень показано на рисунку 3.81,д,е. Зазори цих ущільнень заповнюють пластичним мастилом. Рідке масло, що просочується через можливі щілини, повертається в масляну ванну через дренажні отвори.

**Види руйнувань і критерії розрахунку підшипників кочення.** Підшипники кочення втрачають свою роботоздатність внаслідок руйнування їхніх деталей, яке проявляється в різних формах.

Втомне викришування робочих поверхонь відбувається внаслідок дії циклічно змінних контактних напружень на бігових доріжках кілець і спостерігається у підшипників які довгочасно працюють у нормальних умовах. Здебільшого викришування починається на доріжках кочення найбільш навантажених кілець: у більшості підшипників – на внутрішніх, а в сферичних – на зовнішніх кільцях.

Спрацьовування кілець та тіл кочення спостерігається при недостатньому захисті підшипників від впливу зовнішнього абразивного середовища. Спрацьовування підшипників можна зменшити, забезпечивши достатнє змащування та використовуючи надійні конструкції ущільнень.

Руйнування кілець підшипника та тіл кочення пов'язане з ударними перевантаженнями, неправильним монтажем опори, який може спричинити перекося кілець і заклинювання підшипника. При нормальній експлуатації руйнування кілець підшипників не спостерігається.

Руйнування сепараторів – результат дії відцентрових сил та навантаження сепаратора з боку тіл кочення.

Залишкові деформації на бігових доріжках кілець виникають внаслідок динамічних та ударних навантажень у формі місцевих ямок та вм'ятин. Спостерігаються у важко навантажених тихохідних підшипниках, а також у підшипниках, кільця яких при роботі повертаються на невеликий кут.

На сучасному етапі розрахунок підшипників кочення виконують тільки за двома критеріями – за умовою запобігання появі залишкових деформацій (розрахунок на статичну вантажність) і за умовою запобігання появі ознак втомного руйнування робочих поверхонь протягом розрахункового строку служби (розрахунок на динамічну вантажність). Розрахунки за іншими критеріями не розроблені, оскільки ці критерії пов'язані з випадковими факторами, які неможливо оцінити на практиці.

Через обмежене число типів та розмірів стандартних підшипників кочення експериментально встановлені для кожного підшипника статична та динамічна вантажності, які наводяться в каталогах. Методика підбору підшипників кочення стандартизована.

Згідно з ГОСТ 18854-82 і ГОСТ 18855-82 розрізняють підбір підшипників за статичною і динамічною вантажностями.

**Підбір підшипників за статичною вантажністю.** Підшипники кочення вважають статично навантаженими тоді, коли кутова швидкість рухомого кільця підшипника не перевищує 0,1 рад/с (або частота обертання не більша за 1 хв<sup>-1</sup>). Підбір таких підшипників здійснюється за умовою

$$R_0 \leq C_0, \quad (3.108)$$

де  $R_0$  – розрахункове статичне навантаження на підшипник;

$C_0$  – базова статична вантажність (наводиться в каталогах для кожного типорозміру підшипників).

Базова *статична вантажність* – це таке статичне навантаження на підшипник (радіальне – для радіальних і радіально-упорних підшипників; центральне осьове – для упорних і упорно-радіальних підшипників), якому відповідає загальна залишкова деформація тіл кочення і кілець у найбільш навантаженій точці їхнього контакту, що дорівнює 0,0001 діаметра тіла кочення.

Розрахункове статичне навантаження на підшипник визначають за формулою:

$$R_0 = X_0 R_r + Y_0 R_a, \quad (3.109)$$

де  $R_r$ ,  $R_a$  – радіальне та осьове навантаження на підшипник відповідно, Н;

$X_0$ ,  $Y_0$  – коефіцієнти радіального та осьового статичного навантаження відповідно (наведені в табл. 3.15 і в каталогах підшипників). Якщо в розрахунках виявиться, що  $R_0 < R_r$ , то треба брати  $R_0 = R_r$ .

Якщо умова (3.108) для вибраного за діаметром цапфи вала підшипника не виконується, то слід орієнтуватись на підшипники більш важких серій. При незадовільному результаті і в цьому розглянутому випадку треба збільшити діаметр цапфи вала чи осі і відповідно вибрати підшипник більшого діаметра.

**Підбір підшипників за динамічною вантажністю.** Динамічно навантаженими вважають такі підшипники, у яких рухоме кільце обертається зі швидкістю  $\omega > 0,1$  рад/с, до того ж при  $0,1 < \omega < 1$  рад/с у розрахунках беруть  $\omega = 1$  рад/с. Динамічно навантажені підшипники підбирають за фактичною їхньою довговічністю в заданих умовах експлуатації, якщо відсутні прояви втомного руйнування.

Введемо поняття: *базова динамічна вантажність* – це постійне радіальне навантаження (а для упорних і упорно-радіальних підшипників осьове навантаження), яке підшипник може умовно сприймати протягом одного мільйона обертів без ознак втомного руйнування деталей при ймовірності безвідмовної роботи 90%.

На основі результатів багатьох експериментальних досліджень була встановлена залежність між навантаженням на підшипник та його строком служби (ресурсом):

$$L = a_1 a_{23} (C_r / R)^p. \quad (3.110)$$

Тут  $L$  – строк служби підшипника до появи ознак втоми деталей, млн. об;  $a_1$  і  $a_{23}$  – коефіцієнти;  $C_r$  – базова динамічна вантажність;  $R$  – розрахункове еквівалентне навантаження на підшипник;  $p$  – показник степеня, який згідно з результатами експериментів для кулькових підшипників дорівнює 3, а для роликових підшипників – 10/3.



Базова динамічна вантажність  $C_r$  для всіх типорозмірів підшипників кочення наводиться в каталогах. Отже, підбір підшипників кочення за динамічною вантажністю фактично зводиться до визначення їхнього строку служби в конкретних умовах роботи.

Таблиця 3.15

Типи підшипників	Кут кон-такту $\alpha^0$	Параметр осьового навантаження, $e$	$R_a / (V \cdot R_r) \leq e$		$R_a / (V \cdot R_r) > e$		$X_0$	$Y_0$
			X	Y	X	Y		
Радіальні кулькові тип 0000	0	$0,518(F_a/C_0)^{0,24} \geq 0,19$	1	0	0,56	0,44/e	0,6	0,5
Радіально-упорні кулькові тип 36000 тип 46000 тип 66000	12°	$0,631(F_a/C_0)^{0,24} \geq 0,3$	1	0	0,45	0,55/e	0,5	0,46
тип 46000	26°	0,68	1	0	0,41	0,87	0,5	0,37
тип 66000	36°	0,95	1	0	0,37	0,66	0,5	0,28
Радіально-упорні роликові тип 7000		$1,5 \operatorname{tg} \alpha$						
тип 27000	9... 17°		1	0	0,40	$0,4 \operatorname{ctg} \alpha$	0,5	$0,22 \operatorname{ctg} \alpha$
тип 27000	25...29°	$1,5 \operatorname{tg} \alpha$	1	0	0,40	$0,4 \operatorname{tg} \alpha$	0,5	$0,55 \operatorname{tg} \alpha$

Якщо відома кутова швидкість  $\omega$ , рад/с, рухомого кільця підшипника, то за добутим із формули (3.110) значенням  $L$  строк служби  $L_k$ , год., можна визначити за співвідношенням

$$L_k = 10^6 \pi L / (1800 \omega) = 1745 L / \omega. \quad (3.111)$$

Потрібний ресурс підшипників  $L_k$  визначається строком служби машини між капітальними ремонтами. У загальному машинобудуванні беруть

$$L_k = (3000 \dots 50000) \text{ год.}$$

Стандарти запроваджують ресурс підшипників:  $L_k = 10000$  год. для зубчастих редукторів;  $L_k = 5000$  год. для черв'ячних редукторів.

Коефіцієнти  $a_1$  і  $a_{23}$  у формулі (3.110) уведені за рекомендацією ISO. Коефіцієнт  $a_1$  враховується в разі потреби мати підшипники підвищеної надійності:  $a_1 = 1$  при 90 %-й надійності;  $a_1 = 0,62$  при 95 %-й;  $a_1 = 0,44$  при 97 %-й;  $a_1 = 0,33$  при 98 %-й. Коефіцієнт  $a_{23}$  враховує якість матеріалу деталей підшипника та умови експлуатації. Для звичайних умов роботи серійних підшипників: кулькових, крім сферичних,  $a_{23} = 0,7 \dots 0,8$ ; кулькових сферичних і роликових із

циліндричними роликами  $a_{23} = 0,5...0,6$ ; роликових конічних  $a_{23} = 0,6...0,7$ .

Якщо ресурс підшипників, що розрахований за базовою динамічною вантажністю, незадовільний, то слід підібрати підшипник більшого типорозміру.

*Розрахунковим еквівалентним навантаженням на підшипники кочення  $R$  для радіальних та радіально-упорних підшипників називається така постійна радіальна сила, яка при її дії на підшипник (зовнішнє кільце нерухоме, а внутрішнє обертається) забезпечує ресурс, що даний підшипник буде мати при дійсних умовах навантаження й обертання. Для упорних та упорно-радіальних підшипників – це постійна центральна осьова сила при обертанні кільця, закріпленого на валу, і нерухомому кільці в корпусі.*

Розрахункове еквівалентне навантаження на радіальні кулькові та радіально-упорні кулькові і роликові підшипники знаходять за залежністю

$$R = (XVR_r + YR_a)K_\delta K_m. \quad (3.112)$$

В інших частинних випадках розрахункове еквівалентне навантаження знаходять за простішими формулами:

для радіальних кулькових та роликових підшипників, не навантажених осьовою силою ( $R_a = 0$  і  $X = 1$ ),

$$R = VR_r K_\delta K_m \quad (3.113)$$

для упорних кулькових та роликових підшипників ( $R_r = 0$ ;  $V = 1$ )

$$R = R_a K_\delta K_m. \quad (3.114)$$

У формулах (3.112)...(3.114) взяті такі позначення:  $R_r$ ,  $R_a$  – радіальне та осьове зовнішні навантаження на підшипник відповідно;  $X$  і  $Y$  коефіцієнти радіального та осьового навантаження відповідно;  $V$  – коефіцієнт обертання ( $V = 1$  – якщо відносно вектора навантаження внутрішнє кільце обертається і  $V = 1,2$  – якщо не обертається);  $K_\delta$  – коефіцієнт безпеки ( $K_\delta = 1$  – при спокійному навантаженні;  $K_\delta = 1,2$  – при легких поштовхах і короткочасних перевантаженнях до 125 %;  $K_\delta = 1,5$  – при помірних поштовхах і перевантаженнях до 150 %;  $K_\delta = 2$  – при значних поштовхах та вібраціях і перевантаженнях до 200 %;  $K_\delta = 3$  – при ударному навантаженні та перевантаженнях до 300%);  $K_m$  – температурний коефіцієнт (якщо робоча температура опори  $t \leq 100^\circ\text{C}$ , то  $K_t = 1$ ; якщо  $t = 125^\circ\text{C}$ , то  $K_m = 1,05$ ; якщо  $t = 150^\circ\text{C}$ , то  $K_m = 1,1$ ).

Значення коефіцієнтів  $X$  і  $Y$  вибирають на основі порівняння відношення  $R_a/(V \cdot R_r)$  і параметра осьового навантаження  $e$  (табл. 3.15). Це пов'язано з тим, що через наявність радіального зазору в підшипнику за відсутності осьового навантаження має місце

підвищена нерівномірність навантаження тіл кочення. Зі збільшенням осевого навантаження при постійному радіальному відбувається зменшення зазору, і навантаження на тіла кочення розподіляється більш рівномірно. Для деякого значення  $R_a/(V \cdot R_r)$  це компенсує в однорядних підшипниках збільшення загального навантаження на підшипник із ростом осевої сили  $R_a$ . Тому значення  $X$  і  $Y$  різні при  $R_a/(V \cdot R_r) \leq e$  і  $R_a/(V \cdot R_r) > e$ . В однорядних підшипниках при  $R_a/(V \cdot R_r) \leq e$  розрахунок ведеться на дію як би одного радіального навантаження, тобто беруть  $X = 1$  і  $Y = 0$ .

Параметр осевого навантаження  $e$  для кулькових (радіальних і радіально-упорних типу 36000) підшипників вибирають залежно від відношення  $R_a/C_0$  (табл. 3.15 і каталоги підшипників). Для інших типів підшипників параметр  $e$  безпосередньо беруть у каталозі.

Осьові навантаження  $R_a$  на радіальні кулькові підшипники має дорівнювати зовнішнім осьовим силам  $F_a$ , що діють на вал.

Осьові навантаження  $R_a$  на радіально-упорні підшипники визначають за зовнішньою осьовою силою  $F_a$ , що діє на вал, і осьовими складовими  $F_{s1}$  та  $F_{s2}$  що виникають у двох опорах вала при радіальному навантаженні їх. Осьову складову силу  $F_s$ , що виникає при радіальному навантаженні радіально-упорного підшипника, знаходять із залежностей:  $F_s = eR_r$  – для кулькових підшипників;  $F_s = 0,83eR_r$  – для роликових конічних підшипників. Розрахункові осьові навантаження  $R_{a1}$  і  $R_{a2}$  на радіально-упорні підшипники двох опор вала визначають залежно від схеми розміщення радіально-упорних підшипників та напрямку зовнішньої осевої сили  $F_a$ . Завжди для двох радіально-упорних підшипників опор вала повинні зберігатись умови  $R_{a1} \geq F_{s1}$ ;  $R_{a2} \geq F_{s2}$ . З урахуванням цих умов та умови рівноваги вала  $F_a - R_{a1} + R_{a2} = 0$  знаходять розрахункові осьові навантаження  $R_{a1}$  та  $R_{a2}$ .

**Приклад 3.7.** Визначити розрахунковий ресурс радіальних кулькових підшипників для вала, зображеного на рисунку 3.69,а за такими даними: вал встановлений на підшипниках 208; підшипники лівої і правої опор вала навантажені однаковою радіальною силою  $R_r = 2850$  Н; кутова швидкість вала  $\omega = 100$  рад/с; навантаження на підшипник з легкими поштовхами і короткочасними перевантаженнями до 125%; робоча температура підшипників  $t < 100$  °С.

**Розв'язання.** Згідно з каталогом підшипників для підшипника 208 маємо:  $d = 40$  мм;  $D = 80$  мм;  $B = 18$  мм; базова динамічна вантажність  $C_r = 25600$  Н; гранична частота обертання  $n_{gp} = 8000$  об/хв.

Для заданих умов роботи підшипників: коефіцієнт безпеки  $K_\phi = 1,2$ ; температурний коефіцієнт  $K_t = 1$ ; коефіцієнт  $a_1 = 1$  при

90%-й надійності підшипників і коефіцієнт  $a_{23} = 0,65$  при звичайних розрахункових умовах експлуатації.

Еквівалентне динамічне навантаження підшипників за формулою (3.113)

$$R = V R_r K_6 K_t = 1 \cdot 2850 \cdot 1,2 \cdot 1 = 3420 \text{ Н.}$$

Тут  $V = 1$ , оскільки в підшипнику обертається внутрішнє кільце.

Розрахунковий ресурс підшипників за формулою (3.110)

$$L = a_{1a_{23}} (C_r / R)^p = 1 \cdot 0,75 \cdot (25600/3240)^3 = 370 \text{ млн. обертів.}$$

Розрахунковий ресурс підшипників у годинах за формулою (3.111)

$$L_h = 1745 \cdot L / \omega = 1745 \cdot 370/100 = 6456 \text{ год.}$$

**Приклади 3.8.** Визначити розрахунковий ресурс роликових конічних підшипників для вала, зображеного на рис. 3.80,б за такими даними: вал встановлений на підшипниках 7208; підшипник лівої опори 1 навантажений радіальною силою  $R_{1r} = 3850 \text{ Н}$ , а правої опори 2 радіальною силою  $R_{2r} = 4240 \text{ Н}$ ; осьова сила, що діє на вал зліва направо,  $F_a = 1480 \text{ Н}$ ; кутова швидкість вала  $\omega = 75 \text{ рад/с}$ ; навантаження на підшипники з легкими поштовхами і короточасними перевантаженнями до 125%; робоча температура підшипників  $t < 100^\circ\text{C}$ .

*Розв'язання.* Згідно з каталогом підшипників для підшипника 7208 маємо:  $d_1 = 40 \text{ мм}$ ;  $D = 80 \text{ мм}$ ;  $B = 20 \text{ мм}$ ;  $T = 19,75 \text{ мм}$ ;  $\alpha = 14^\circ$ ;  $n_{zp} = 6300 \text{ об/хв}$ ; базова динамічна вантажність  $C_r = 42400 \text{ Н}$ ; базова статична вантажність  $C_0 = 32700 \text{ Н}$ ; параметр  $e = 0,38$ .

Для заданих умов роботи підшипників (див. підбір підшипників за статичною та динамічною вантажністю): коефіцієнт безпеки  $K_6 = 1,2$ ; температурний коефіцієнт  $K_t = 1$ ; коефіцієнт  $a_1 = 1$  при 90%-й надійності підшипників і коефіцієнт  $a_{23} = 0,65$  при звичайних розрахункових умовах експлуатації.

Осьові складові, що виникають у підшипниках 1 і 2 при їхньому радіальному навантаженні:

$$F_{s1} = 0,83e R_{1r} = 0,83 \cdot 0,38 \cdot 3850 = 1214 \text{ Н;}$$

$$F_{s2} = 0,83e R_{2r} = 0,83 \cdot 0,38 \cdot 4240 = 1337 \text{ Н.}$$

Для заданої схеми встановлення підшипників і напрямку осьової сили  $F_a$  повинні виконуватись умови

$$R_{a1} \geq F_{s1}; \quad R_{a2} \geq F_{s2}; \quad F_a + R_{a1} - R_{a2} = 0.$$

Приймемо  $R_{a1} = F_{s1} = 1214 \text{ Н}$ , тоді

$$R_{a2} = F_a + R_{a1} = 1480 + 1214 = 2694 \text{ Н.}$$

Оскільки  $R_{a2} = 2694 \text{ Н} > F_{s2} = 1337 \text{ Н}$ , то записані умови виконуються.

Коефіцієнти  $X$  і  $Y$  для підшипників 1 і 2 (табл. 3.15):

$$R_1 / (V R_{1r}) = 1214/3850 = 0,31 < e = 0,38, \text{ тоді } X_1 = 1; Y_1 = 0;$$

$$R_{a2}/(V R_{2r}) = 2694/4240 = 0,63 > e = 0,38,$$

$$\text{тоді } X_2 = 0,40; Y_2 = 0,4 \operatorname{ctg} \alpha = 0,4 \operatorname{ctg} 14^\circ = 1,6.$$

Еквівалентне динамічне навантаження підшипників 1 і 2 за формулою (3.112):

$$R_1 = (X_1 V R_{1r} + Y_1 R_{a1}) K_\sigma K_m = (1 \cdot 1 \cdot 3850 + 0) \cdot 1,2 \cdot 1 = 4620 \text{ Н};$$

$$R_2 = (X_2 V R_{2r} + Y_2 R_{a2}) K_\sigma K_m = (0,40 \cdot 4240 + 1,6 \cdot 2694) \cdot 1,2 \cdot 1 = 7207 \text{ Н}.$$

Розрахунковий ресурс підшипників за формулою (3.110):

$$L_1 = a_1 a_{23} (C_r/R_1)^p = 1 \cdot 0,65 (42400/4620)^{10/3} = 1044 \text{ млн. обертів};$$

$$L_2 = a_1 a_{23} (C_r/R_2)^p = 1 \cdot 0,65 (42400/7207)^{10/3} = 237 \text{ млн. обертів}.$$

Розрахункова довговічність підшипників у годинах за формулою (3.111):

$$L_{h1} = 1745 L_1 / \omega = 1745 \cdot 1044 / 75 = 17170 \text{ год};$$

$$L_{h2} = 1745 L_2 / \omega = 1745 \cdot 237 / 75 = 5677 \text{ год}.$$

### Контрольні запитання до пункту 3.4.2

1. Як поділяються підшипники за характером взаємодії їх з валами?
2. Переваги й недоліки підшипників ковзання.
3. В яких випадках використовують під'ятники?
4. Розшифруйте величини, що входять до формул, за яких перевіряються підшипники ковзання:  $p = F/(dl) \leq [p]$ ;  $p v_s \leq [p v_s]$ .
5. Основні деталі з яких складається підшипник кочення.
6. Переваги й недоліки підшипників кочення.
7. Як поділяються підшипники кочення за формою тіл кочення?
8. Як поділяються підшипники кочення за способом компенсації перекосів вала?
9. Як поділяються підшипники кочення за радіальними розмірами?
10. Як поділяються підшипники кочення за напрямом сприйманого навантаження?
11. Які навантаження сприймають радіальні підшипники, радіально-упорні та упорні підшипники?
12. Види руйнувань підшипників кочення.
13. Підбір підшипників кочення за статичною вантажністю виконується за умовою  $R_0 \leq C_0$ . Розшифруйте величини, що входять до цієї формули.
14. Як визначається розрахункове статичне навантаження на підшипник кочення?
15. В яких випадках виконується підбір підшипників кочення за

динамічною вантажністю, а в яких за статичною вантажністю?

16. Розшифруйте величини, що входять до формули:  
 $L = a_1 a_{23} (C_r/R)^p$ .

17. Розшифруйте величини, що входять до формули:  
 $R = (XVR_r + YR_a)K_6 K_T$ .

### 3.5 Елементи механічних приводів машин

#### 3.5.1. Загальна характеристика приводів машин

**Структура машини та її привод.** У загальному випадку структуру довільної машини можна подати у вигляді таких складових частин (рис. 3.82); енергоперетворювач (двигун Д) – передавально-перетворюючий пристрій (механічна передача МП) – споживач механічної енергії (робочий орган машини РОМ). У деяких машинах зустрічається також керуюча (КС) або регулювальна система, що забезпечує оптимізацію робочого процесу.

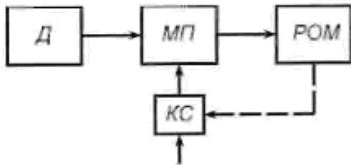


Рисунок 3.82

В енергетичних машинах енергоперетворювачами можуть бути парові або газові турбіни, електродвигуни, а споживачами механічної енергії – електрогенератори, компресори. У технологічних машинах енергоперетворювачі – це різні двигуни, а споживачі механічної

енергії – це робочі органи машини (шпинделі металообробних верстатів, валки прокатних станів, ротори бурових машин, механізми дробарок, барабани млинів тощо). У транспортних машинах енергоперетворювачами можуть бути також різного виду двигуни, а споживачами механічної енергії – приводні ходові колеса транспортних засобів, стрічкові, ланцюгові та гвинтові конвеєри, різні помпи.

До складу передавально-перетворюючих пристроїв входять вали, муфти для з'єднання валів і різного виду механічні передачі (фрикційні, пасові, ланцюгові, зубчасті, черв'ячні, передачі гвинт – гайка). Деякі з механічних передач можуть бути виконаними у вигляді окремих агрегатів – редукторів, коробок швидкостей, варіаторів.

Такі складові частини, як енергоперетворювач та передавально-перетворюючий пристрій, утворюють привід машини. Для переважної більшості машин привід складається з двигуна, системи механічних

передач та муфт, що з'єднують окремі вали. Отже, *приводом* називається пристрій для приведення в дію робочого органу машини.

У машинах найпоширеніші механічні приводи, які прості за конструкцією та в експлуатації, дешеві, достатньо надійні і мають високий ККД.

У сучасній техніці значна кількість машин має обертовий рух приводного вала робочого органу. До таких машин належать транспортні машини, різні верстати, пристрої та засоби механізації різних робіт. Приводи більшої частини машин допускають використання стандартних двигунів, муфт та механічних передач, що дає змогу віднести ці приводи до категорії загального призначення.

За типом двигунів розрізняють такі приводи: з електродвигунами, з двигунами внутрішнього згоряння, з паровими та газовими двигунами, гідро- та пневмодвигунами.

До складу механічних приводів можуть входити такі типи передач: зубчасті (циліндричні та конічні), черв'ячні, передачі з гнучкою проміжною ланкою (пасові, ланцюгові), передача гвинт – гайка. Передачі в приводі можуть бути однотипні або комбіновані.

Елементи механічного привода машини (двигуни, муфти та механічні передачі) доцільно розглядати в сукупності як окрему систему. Це пояснюється тим, що характеристики складових частин привода повинні бути взаємозв'язані і їх потрібно узгоджувати, проектуючи машини. Наприклад, частоти обертання вала двигуна та його пускова характеристика повинні бути узгоджені з характеристиками та властивостями муфт і механічних передач привода, або застосування у приводі фрикційних чи пасових передач виключає потребу запобіжних муфт.

**Структурні схеми приводів машин.** При подачі механічної енергії до робочого органу машини слід узгодити параметри обертального руху двигуна з оптимальними параметрами обертального руху приводного вала робочого органу. Ці параметри можуть бути постійними або можуть мінятися із зміною робочого режиму машини.

Привід машини, звичайно, забезпечує передавання до робочого органу тільки обертального руху, а його перетворення в інші види руху (зворотно-поступальний, періодичний обертовий, коливний або інший складний рух) здійснюється механізмами робочого органу машини згідно з її функціями та призначенням.

Структурні схеми приводів машин бувають дуже різноманітними. Наявність того чи іншого елемента у структурі привода залежить від ступеня узгодженості параметрів двигуна і потрібних параметрів руху (кутової швидкості, обертального моменту, напряму обертання)

приводного вала робочого органу машини. Практично до складу всіх приводів входять двигун, механічні передачі та муфти для з'єднання валів. Механічні передачі можуть бути використані у відкритому вигляді (пасові та ланцюгові передачі, рідко – відкриті зубчасті передачі) або виготовлені у вигляді окремих агрегатів (зубчасті та черв'ячні редуктори, коробки швидкостей, варіатори).

Деякі прості схеми приводів машин показані на рисунку 3.83.

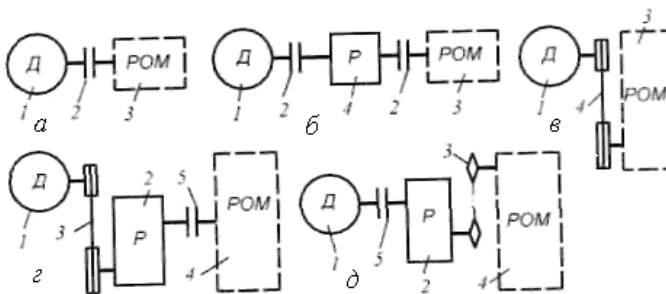


Рисунок 3.83

У найпростішому варіанті привода (рис. 3.83,а) вал двигуна 1 з'єднується з приводним валом робочого органу машини 3 за допомогою муфти 2. Такі приводи застосовують, якщо кутові швидкості вала двигуна збігаються з найдоцільнішою кутовою швидкістю приводного вала робочого органу машини.

Більш складні схеми приводів показані на рисунку 3.83,б,в, де двигун 1 з'єднується з робочим органом машини 3 через механічну передачу 4, яка може бути виконана у вигляді окремого агрегату або бути відкритою. Тоді в першому варіанті для з'єднання валів використовують муфти 2, а в другому варіанті муфти не потрібні.

Структурні схеми приводів машин із комбінованими механічними передачами зображені на рисунку 3.83,г,д. У двох наведених схемах привода присутні механічні передачі, які виконані у вигляді окремих агрегатів (наприклад, редукторів), і відкриті передачі (пасова на рис. 3.83,г і ланцюгова на рис. 3.83,д). Після двигуна 1 доцільно розмістити пасову передачу 3 як таку, що має меншу тягову здатність (порівняно з ланцюговою) і допускає вищі швидкості. Ланцюгові передачі краще працюють при малих швидкостях і передають більші зусилля, тому їх вигідно розмішувати між редуктором 2 і робочим органом машини 4 (рис. 3.83, д), хоча можуть бути варіанти розміщення ланцюгової передачі між двигуном і редуктором. Якщо характеризувати дві схеми (рис. 3.83, г, д) привода



машини з точки зору розміщення муфт 5, то можна відзначити перевагу варіанта за схемою рисунку 3.83,д, оскільки у цьому варіанті муфта навантажується значно меншим обертовим моментом.

Розглянуті вище деякі структурні схеми приводів машин є найтиповішими і не охоплюють усіх можливих варіантів, що зустрічаються на практиці. Однак принципи аналізу довільних схем приводів та їхня техніко-економічна оцінка подібні при проектуванні та конструюванні машин різного призначення.

**Порівняльна оцінка механічних передач приводів машин.** Вибір механічних передач у приводі машини є однією з важливих інженерних задач у розробці проекту машини. Як зазначалося вище, у деяких приводах можна обійтись без механічних передач, а в інших застосовують дві й більше механічних передач, до того ж різного типу.

Кінематичним параметром, який визначає потребу застосування механічних передач у приводі, є його передаточне число.

Загальне передаточне число механічного привода (МП) визначається відношенням кутової швидкості вала двигуна (Д)  $\omega_{дв}$  до кутової швидкості  $\omega_{пр}$  приводного вала робочого органу машини (РОМ) (рис. 3.84):

$$u_{заг} = \omega_{дв} / \omega_{пр}.$$



Рисунок 3.84

Оскільки кутова швидкість вала більшості двигунів є високою і постійною або змінюється у незначних межах, а найвигідніша кутова швидкість приводного вала робочого органу машини є низькою, то передаточне

число привода  $u_{заг} > 1$ . Якщо  $u = 1$ , а зміну напрямку обертання приводного вала робочого органу машини можна здійснити за допомогою реверса двигуна, то приводний вал робочого органу машини можна з'єднувати муфтою безпосередньо з валом двигуна. В усіх інших випадках складовою частиною привода є механічні передачі.

Можливість використання в приводі машини тієї чи іншої механічної передачі залежить від низки факторів: особливостей окремих передач; загального передаточного числа  $u_{заг}$  привода; переданої потужності та швидкості обертання валів; віддалі між валами і їх взаємного розташування; наявності необхідних умов для технічного обслуговування; ресурсу привода та ін.

Для загальної орієнтації в доцільності використання в приводі машини основних типів механічних передач можна порівняти усереднені показники (табл. 3.16) деяких характеристик одноступінчастих передач, що найчастіше застосовуються в серійних

приводах енергетичних, технологічних та транспортних машин. Показники відносних габаритних розмірів, маси та вартості передач наведені в табл. 3.16 у порівнянні із зубчастою циліндричною передачею.

Найдоцільніше в приводах машин застосовувати механічні передачі, які виконані у вигляді окремих механізмів – зубчастих і черв'ячних редукторів, коробок швидкостей, варіаторів.

Таблиця 3.16

Тип передачі	Найбільша потужність, кВт	Найбільша окружна швидкість, м/с	ККД	Передаточне число	Відносний габаритний розмір	Відносна маса/вартість.
Зубчаста циліндрична	3000	60	0,98	$\leq 8$	1	1/1
Зубчаста конічна	500	30	0,97	$\leq 5$	1,8	1,2/2
Черв'ячна	100	25	0,6-0,8	$\leq 80$	1,5	1,1/1,6
Ланцюгова	150	10	0,96	$\leq 6$	1,6	0,8/0,4
Клинопасова	100	25	0,93	$\leq 7$	5	0,5/0,3
Плоскопасова	100	25	0,95	$\leq 5$	10	0,4/0,2
Фрикційна	20	25	0,94	$\leq 6$	3	1,5/0,8

Редуктори мають високу несучу здатність, малі габаритні розміри, можуть забезпечити достатньо високе передаточне число, прості в догляді при експлуатації. Коробки швидкостей застосовують в разі потреби керування роботою механічного привода ступінчастою зміною передаточного числа під час різних режимів роботи машини або зміни напрямку обертання приводного вала робочого органу машини при постійному напрямі обертання вала двигуна. Варіатори забезпечують можливість плавної безступінчастої зміни передаточного числа привода й можливість його реверсу. Вони дозволяють вибирати найвигідніші режими роботи машин, однак варіатори складні за конструкцією і мають низьку несучу здатність.

Застосування в приводах окремих відкритих механічних передач (пасових, ланцюгових) переважно зумовлено компоновкою машини, а також деякими особливостями і перевагами їх порівняно з іншими передачами.

Розподіл загального передаточного числа привода між передачами різних типів, а також між ступенями однотипних передач здійснюють на основі техніко-економічних розрахунків різних

варіантів. Крім того, при розподілі загального передаточного числа привода слід брати до уваги габаритні співвідношення передач окремих типів, щоб отримати відповідні пропорційні форми привода й всієї машини.

### 3.5.2 Двигуни в приводах машин

Для приводів машин можуть застосовуватись двигуни таких видів: електродвигуни, двигуни внутрішнього згоряння, гідро - або пневмодвигуни. Тип двигуна вибирають з урахуванням таких факторів: призначення машини, для якої проектується привід; наявності того чи іншого джерела енергії; потрібної потужності; обмеження за масою, габаритними розмірами та умовами роботи; режиму роботи привода та відповідності його механічної характеристики умовам роботи.

*Гідро- та пневмодвигуни* застосовують переважно в багатодвигунних приводах машин. Енергоносієм для таких двигунів є стиснена рідина або повітря. Для використання гідро- та пневмодвигунів у приводах окремих агрегатів машини треба мати відповідну централізовану систему подачі енергоносія.

*Двигуни внутрішнього згоряння* мають найбільше застосування в транспортних засобах, а також у приводах енергетичних машин – електрогенераторів та компресорів. Вони незамінні для приводів машин, що працюють у районах, де відсутні електромережі. Одним із головних недоліків двигунів внутрішнього згоряння є забруднення навколишнього середовища продуктами відпрацьованих вихлопних газів.

*Електродвигуни* найчастіше використовують у приводах енергетичних, технологічних і транспортних машин. Вони стандартизовані і випускаються промисловістю різних типорозмірів у діапазоні потужностей 10 Вт – 400 кВт і більше. Електродвигуни можуть застосовуватись в різних кліматичних умовах, на відкритому повітрі, у заповнених приміщеннях та у вологих і хімічно активних середовищах. За допомогою електродвигунів досить просто здійснювати зміну напрямку обертання валів робочих органів машин.

Електродвигуни поділяють на двигуни постійного і змінного струму.

*Двигуни постійного струму* забезпечують плавне регулювання швидкості в широких межах, мають відповідні механічні характеристики, дають змогу забезпечити достатню точність руху. Ці

двигуни застосовують для приводу електричних транспортних засобів, деяких підйомних кранів та технологічних машин.

*Двигуни змінного струму* бувають однофазні асинхронні (мають невелику потужність і використовуються переважно у приводах побутових машин та приладів), трифазні синхронні (їхня частота обертання не залежить від навантаження і застосовують їх у приводах великої потужності) і трифазні асинхронні. Останні найпоширеніші в різних галузях господарства; їхні переваги порівняно з двигунами інших типів: простота конструкції, менша вартість, висока експлуатаційна надійність.

До основних типів сучасних електродвигунів змінного струму належать такі.

1. Трифазні асинхронні двигуни єдиної серії 4А з короткозамкненим ротором потужністю 0,06-400 кВт і висотою осі обертання ротора 50-355 мм. Такі двигуни призначені для приводів машин, до яких не ставляться особливі вимоги щодо пускових характеристик. Одношвидкісні двигуни єдиної серії 4А мають синхронні частоти обертання: 3000, 1500, 1000 і 750 хв<sup>-1</sup>. У каталогах цих двигунів подаються такі параметри: тип двигуна, номінальна потужність  $P_n$ , номінальна частота обертання, габаритні та установчі розміри, маса та інші дані.

Асинхронні двигуни єдиної серії 4А випускають в основному виконанні (серія 4А), із підвищеним ковзанням (серія 4АС) та із підвищеним пусковим моментом (серія 4АР).

2. Трифазні асинхронні двигуни кранові та металургійні з короткозамкненим ротором серій МТКФ й МТКН та з фазним ротором серій МТФ і МТН. Вони призначені для приводів кранових механізмів загальнопромислового призначення, а також механізмів, що працюють із короткочасним і повторно-короткочасним режимами роботи та значними перевантаженнями. Кранові і металургійні електродвигуни сприймають тривалі перевантаження, мають великі пускові моменти і малий період розгону. Ці двигуни мають синхронні частоти обертання 1000, 750 і 600 хв<sup>-1</sup> при роботі від електромережі із частотою 50 Гц. У каталогах двигунів наводяться такі параметри: тип двигуна, номінальна потужність при тривалості вмикання (ТВ) 25, 40, 60 і 100 %, частота обертання, габаритні установочні розміри, маса.

**Визначення потужності електродвигуна приводу.** Правильний вибір потужності електродвигуна має велике значення: двигун недостатньої потужності перегрівається і передчасно виходить із ладу (перевантаження двигуна з бавовняною і шовковою ізоляцією обмоток на 25% зменшує строк служби з 20 років до кількох місяців, а

перевантаження на 50% роблять двигун непридатним для використання протягом кількох годин його роботи); застосування двигуна завищеної потужності економічно недоцільне і, крім того, спричинює зменшення його енергетичних показників (ККД і коефіцієнта потужності  $\cos\varphi$ ), може призвести до підвищеного спрацювання і навіть до руйнування елементів машини.

Особливості роботи електроприводу різних машин, тобто змінне навантаження, періодичне вмикання або вимикання, тривалість перерв у роботі, ставлять специфічні вимоги до вибору потужності електродвигуна. Двигун повинен задовольняти такі основні вимоги:

а) пусковий момент  $T_n$  електродвигуна повинен бути достатнім для забезпечення розгону машини з певним прискоренням. Одночасно потужність електродвигуна не повинна бути надзвичайно великою, щоб високі прискорення не вплинули негативно на роботу окремих механізмів машини;

б) під час роботи машини в режимі періодичних вмикань чи вимикань протягом необмеженого часу двигун не повинен перегріватись.

Залежно від характеру виконуваної машиною функції розрізняють три режими роботи електродвигуна й відповідну їм перевірку двигуна на перевантаження.

*Довгочасний режим роботи* характеризується тривалою роботою, достатньою для того, щоб температура нагрівання двигуна досягала усталеного значення. Якщо в цьому випадку маємо незмінні обертовий момент  $T_{np}$  на приводному валу робочого органу машини та кутову швидкість  $\omega_{np}$  цього вала (рис. 3.84), то розрахункова потужність електродвигуна

$$P_{дв.р} = T_{np} \omega_{np} / \eta_{заг} . \quad (3.115)$$

Коли маємо постійну силу опору  $F_p$  і швидкість  $V_p$  робочого органу машини, що збігаються за напрямом при русі, то

$$P_{дв.р} = F_p V_p / \eta_{заг} , \quad (3.116)$$

де  $\eta_{заг}$  – загальний ККД передавального пристрою (муфти і механічних передач) між двигуном і робочим органом машини.

При змінному обертовому моменті  $T_{np}$  (або сили  $F_p$ ) на приводному валу робочого органу машини у розрахунок беруть максимальний довгочасно діючий обертовий момент (або силу  $F_p$ ). Маючи  $P_{дв.р}$  за каталогом можна вибрати електродвигун, номінальна потужність якого  $P_{дв.} \geq P_{дв.р}$ . У цьому випадку нагрівання не буде спричинювати передчасний вихід електродвигуна з ладу.

*Короточасний режим роботи* характеризується загальною тривалістю роботи двигуна під навантаженням  $10 \text{ хв} < t_m < 60 \text{ хв}$ . За

такий час двигун не нагрівається до ustalеної температури. Тривалість кожної перерви між окремими періодами навантаження достатня для вирівнювання температури двигуна з температурою навколишнього середовища. При короткочасному режимі роботи електродвигуна його розрахункова і номінальна потужності визначаються так само, як і при довгочасному режимі роботи.

*Повторно-короткочасний режим роботи* відрізняється частими пусками і зупинками електродвигуна. Тривалість періоду роботи двигуна під навантаженням  $t_m$ , і періоду перерви  $t_0$  становить  $t_m + t_0 \leq 10$  хв. Тривалість вмикання  $TB$ , %, електродвигуна

$$TB = 100 \, t_r / (t_r + t_0). \quad (3.117)$$

Тривалість вмикання розраховують за відомими періодами  $t_r$  і  $t_0$ . Щоб вибрати електродвигун, треба взяти найближче до розрахункового значення  $TB$  стандартне значення тривалості вмикання  $TB_c$  із ряду значень, наведених у каталозі двигунів. Тоді розрахункова потужність електродвигуна при постійній частоті обертання його ротора

$$P_{\text{дв.р}} = \sqrt{TB / TB_c} T_{\text{нр}} \omega_{\text{нр}} / \eta_{\text{заг}}. \quad (3.118)$$

Тут  $T_{\text{нр}}$  – обертовий момент на приводному валу робочого органу,  $\omega_{\text{нр}}$  – кутова швидкість цього валу,  $\eta_{\text{заг}}$  – ККД пристрою (ті самі величини, що й у формулі (3.115)). Потрібний електродвигун і його номінальну потужність для  $TB_c$  вибирають за умовою  $P_{\text{дв}} \geq P_{\text{дв.р}}$ .

Вибираючи частоту обертання вала електродвигуна, беруть до уваги реальний діапазон робочих частот обертання стандартних двигунів різних типів. Здебільшого частоти обертання приводних валів робочих органів машин менші за мінімальні частоти обертання двигунів. Тому при виборі частоти обертання двигуна слід розв'язувати комплексну задачу, пов'язану з вибором двигуна і передавального механізму (механічних передач) між двигуном та робочим органом машини. При цьому критеріями оцінки оптимальності вибраної частоти обертання двигуна можуть бути габаритні розміри, маса, ККД, електричні втрати і надійність усієї електромеханічної системи.

У всіх електродвигунах однієї і тієї ж потужності із зменшенням номінальної частоти обертання значно зростають їхні габаритні розміри, маса і вартість. Тому доцільніше застосовувати двигуни з високими частотами обертання. Однак зі збільшенням частоти обертання двигуна зростає потрібне передаточне число передавального пристрою (механічних передач) і відповідно його вартість. Практикою виявлено, що в загальному випадку деяке

підвищення вартості механічних передач окуповується використанням високошвидкісних двигунів.

### 3.5.3 Муфти приводів

**Загальні відомості та класифікація муфт.** Муфтами називають пристрої, що з'єднують вали і передають обертовий момент. Інколи муфтами з'єднують вали із розміщеними на ньому деталями – зубчастими колесами, шківками, зірочками.

Застосування муфт пов'язане з тим, що більшість машин, у тому числі і їхній привод, компонують з окремих складальних одиниць, що мають вхідні та вихідні вали. Такими складальними одиницями є, наприклад, двигун, редуктор і робочий орган машини (див. рис. 3.5.2,б). Безпосередній кінематичний і силовий зв'язок між двигуном і редуктором, редуктором і робочим органом здійснюється за допомогою муфт. Потреба в муфтах виникає і в тих випадках, коли довгі вали за умовами технології виготовлення і складання або транспортування слід виготовляти з кількох складових частин.

З'єднання валів і передавання обертового моменту є спільним, але не єдиним призначенням муфт. Муфти можуть виконувати й інші функції, такі як компенсування похибок взаємного розміщення валів, захист елементів машини від перевантажень, зменшення динамічних навантажень, з'єднання і роз'єднання робочого органу машини з двигуном без його вимикання (керовані муфти).

У машинобудуванні використовують муфти дуже різноманітних конструкцій. Як самостійні складальні одиниці найчастіше застосовувані муфти стандартизовані.

Основною характеристикою кожної муфти є обертовий момент  $T_p$ , на передавання якого вона розрахована. Іншими важливими показниками конструкцій муфт є гранична частота обертання, габаритні розміри, маса і момент інерції муфти щодо осі обертання.

Стандартні муфти не розраховують, а підбирають за обертовим моментом у відповідних довідниках. Лише в деяких випадках у разі потреби виконують перевірні розрахунки.

Муфти обчислюють за розрахунковим обертовим моментом

$$T_p = K_n T, \quad (3.119)$$

де  $T$  – номінальний обертовий момент;

$K_n$  – коефіцієнт, що враховує короточасні перевантаження або режим роботи муфти.

Для машин із невеликими приводними масами й спокійному навантаженні  $K_n = 1,0 \dots 1,5$ , для машин із середніми приводними

масами та змінним навантаженням (поршневі компресори, стругальні верстати)  $K_n = 1,5 \dots 2,0$ . У машинах із великими приводними масами та ударним навантаженням (молоти, прокатні стани, роторні дробарки) беруть  $K_n = 2,5 \dots 3,0$ .

Усі муфти приводів машин за принципом роботи поділяють на три основні типи: механічні, електричні та гідравлічні. Нижче розглянемо тільки найпоширеніші та типові конструкції механічних муфт.

Класифікація механічних муфт наведена на рисунку 3.85 у вигляді структурної схеми. Відповідно до цієї схеми усі муфти поділяють на чотири класи: некеровані, керовані, самокеровані та комбіновані. Кожний клас муфт складається з груп, а кожна група має відповідні підгрупи, види.

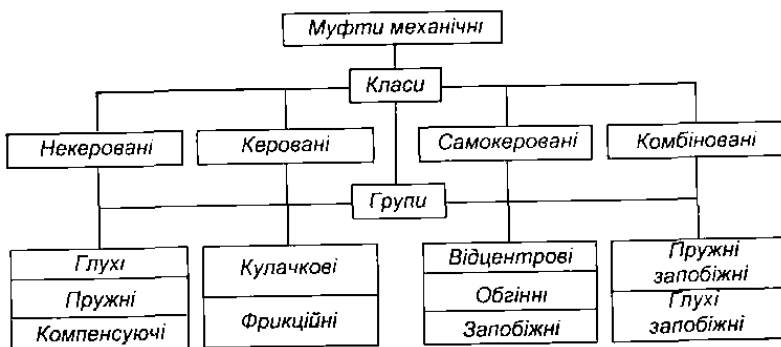


Рисунок 4.85

**Конструкції та розрахунок деяких муфт.** Розглянемо деякі найпростіші конструкції муфт, які досить широко застосовують у приводах машин.

**Втулкова муфта** – найпростіша з глухих муфт, суцільна і насаджується на кінці валів (рис. 3.86,а,б), які підлягають з'єднанню. З'єднання суцільної втулки з валами може здійснюватись за допомогою штифтів, шпонок або за допомогою шліців. Під час монтажу або демонтажу муфти виникає потреба у відносному осьовому зміщенні валів. Тому для втулкових муфт не використовують посадки з гарантованим натягом.

Втулкові муфти застосовують здебільшого для діаметрів валів  $d \leq (60 \dots 70)$  мм. Матеріал втулок – сталь 40, 45, а при великих розмірах – чавун СЧ 18, СЧ 20. Штифти виготовляють зі сталей 45, 50.

Міцність муфти визначається міцністю її з'єднання з валами, а також міцністю самої втулки.



Розрахунок втулки виконують за умовою міцності на кручення:

$$\tau = T_p / W_p = 16 T_p / \{ \pi d_l^3 [1 - (d/d_l)^4] \} \leq [\tau], \quad (3.120)$$

а штифтів – за умовою міцності на зріз

$$\tau_{zp} = F / A_p = 4 T_p / (\pi d_{ш}^2) \leq [\tau]_{zp}. \quad (3.121)$$

Розрахункові розміри в залежностях (3.120) і (3.121) відповідають позначенням на рисунку 3.86,а. Допустимі напруження при розрахунках такі:  $[\tau] = (30 \dots 40)$  МПа;  $[\tau]_{zp} = (40 \dots 45)$  МПа.

Фланцева муфта (рис. 3.86,в) складається з двох виконаних у вигляді фланців півмуфт, які насаджені на кінці валів і з'єднані між собою болтами.

Болти муфти ставлять із зазором (варіант I) або без зазору (варіант II). У першому випадку момент  $T_p$  передається за рахунок моменту сил тертя, що виникає в площині стику півмуфт від затяжки болтів, а в другому випадку – безпосередньо болтами, на які діють деформації зрізу.

Фланцеві муфти стандартизовані для валів діаметром 12-220 мм і обертових моментів 8-45000 Н·м.

Півмуфти виготовляють зі сталі 35, сталевого литва 35Л або із чавунного литва. Болти, що ставляться із зазором, переважно зі сталі Ст3, а болти без зазору - зі сталей 40, 45.

Міцність муфти визначається міцністю болтового з'єднання фланців (див. приклад 3.2.1 – пункт 3.2.2).

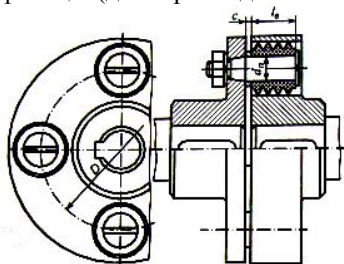


Рисунок 3.87

виготовленими.

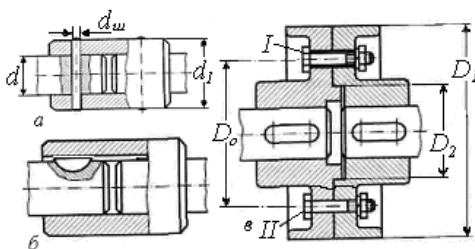


Рисунок 3.86

Якщо болти у муфті поставлені з зазором, то за розрахунками отримаємо масу муфти набагато більша, ніж для варіанта болтів без зазору для одного і того ж обертового моменту. Однак болти, що ставляться без зазору, вимагають виготовлення для них отворів у півмуфтах підвищеної точності й самі болти повинні бути також точно

Розглянуті глухі муфти прості за конструкцією, мають малі габаритні розміри, але не компенсують похибок у взаємному розміщенні валів, що вимагає досить високої точності їх центрування.

*Муфта пружна втулково-пальцева* (МПВП) складається з двох півмуфт (рис. 3.87), нерухомо закріплених в одній півмуфті пальців, на яких розміщені гумові гофровані втулки, що взаємодіють із другою півмуфтою. Пружність муфти забезпечується за рахунок гофрованих втулок, здатних деформуватись при передаванні муфтою обертового моменту  $T_p$ . МПВП допускає зміщення валів: осьове  $\Delta_0 = (1...5)$  мм, радіальне  $\Delta_r = (0,2...0,5)$  мм і кутове  $\Delta_\alpha = (0,5... 1,0)^\circ$ . Однак зміщення  $\Delta_r$  і  $\Delta_\alpha$  збільшують спрацювання пружних елементів і додатково навантажують вали у радіальному напрямі. МПВП стандартизовані для валів діаметром 10...160 мм.

Роботоздатність МУВП визначається міцністю пальців та гумових втулок. Перевірний розрахунок гумових втулок виконують за умовою обмеження тиску на поверхні контакту з пальцями, а самих пальців – за умовою міцності на згин.

*Зубчаста муфта* (рис. 3.87) складається з півмуфт 1 і 2, що мають зубчасті вінці, і роз'ємної обойми 3 і 4 з двома внутрішніми зубчастими вінцями, які з'єднані за допомогою болтів. Зубці елементів муфти мають евольвентний профіль, аналогічний профілю зубців зубчастих коліс, що дає змогу нарізати їх нормальним зуборізним інструментом.

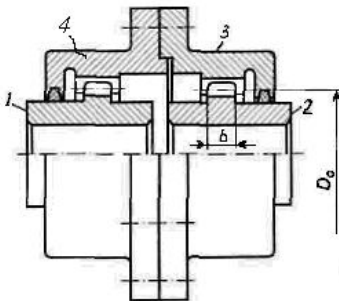


Рисунок 3.87

радіальна  $\Delta_r = (1,5...2)$  мм; кутова  $\Delta_\alpha = (0,5...1,0)^\circ$ .

Зубчаста муфта компенсує осьове, радіальне й кутове зміщення валів, бо її зубчасте зачеплення виготовляють із гарантованим боковим зазором і з можливістю вільного осьового зміщення спряжених зубців, а самі зубці мають бочкоподібну форму зі сферичною зовнішньою поверхнею. Компенсаційна здатність зубчастих муфт: осьова  $\Delta_0 = (3...4)$  мм;

Широке використання в машинобудуванні зубчастих муфт пояснюється їхніми перевагами: невеликою масою і габаритними розмірами; високою несучою здатністю, що визначається великою кількістю зубців у зачепленні; муфта допускає високі окружні швидкості.

Зубчасті муфти стандартизовані для діаметрів валів 40-200 мм і оберткових моментів 1000-63 000 Н·м.

Деталі зубчастих муфт виготовляють із вуглецевих сталей марок 45, 50 або 40Х. Для підвищення стійкості проти спрацювання зубці півмуфт піддають термообробці до твердості не менше ніж 45 HRC, а зубці обойми не менше ніж 40 HRC. Тихохідні муфти можна виготовляти з твердістю зубців  $H \leq 350$  HB.

Компенсація неспіввісності валів під час роботи муфти супроводжується неперервним ковзанням у контакті зубців і відповідним їхнім спрацюванням. Практика експлуатації зубчастих муфт показала, що спрацювання зубців є основною причиною виходу муфт із ладу. Для зменшення спрацювання в обойму муфти заливають рідке мастило високої в'язкості.

Стійкість зубців муфти (рис. 3.87) проти прискореного спрацювання можна перевірити за умовою

$$\sigma_{3M} = T_p / (0,9 D_o^2 b) \leq [\sigma]_{3M}, \quad (3.122)$$

де  $D_o$  – дільний діаметр зубчастих вінців;

$b$  – ширина вінця півмуфти.

Для стандартних зубчастих муфт допустиме напруження зминання  $[\sigma]_{3M} = (12 \dots 15)$  МПа.

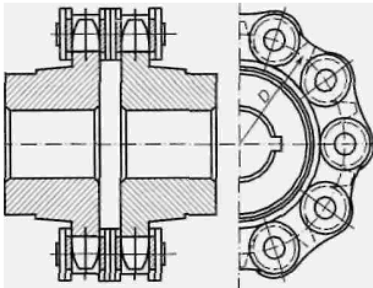


Рисунок 3.88

Втрати потужності в зубчастій муфті оцінюється ККД  $\eta = 0,98 \dots 0,99$ , а радіальне навантаження валів при їхньому радіальному зміщенні  $F_M \approx (0,2 \dots 0,3) T_p / D_o$ .

*Ланцюгова муфта* (рис. 3.88) складається з двох півмуфт, що виконані у формі двох зірочок з однаковим числом зубців, охоплених одно- або дворядним ланцюгом.

За допомогою ланцюгових муфт можна компенсувати кутові  $\Delta_\alpha = (0,5 \dots 1,0)^\circ$  і радіальні  $\Delta_r = (0,5 \dots 1)$  мм зміщення валів. Зазори в зачепленні ланцюга з півмуфтами забезпечують значний вільний хід, тому не можна рекомендувати використовувати ланцюгові муфти в приводах із частими реверсами.

Для ланцюгових муфт характерні простота конструкції, порівняно невеликі габаритні розміри, зручність монтажу і демонтажу без осевих зміщень валів. Габаритні розміри ланцюгових муфт приблизно в 1,5 разу менші, ніж пружних втулково-пальцевих муфт.

Ланцюгові муфти стандартизовані для валів діаметром 20-130 мм і обертових моментів 63-8000 Н·м.

Неспіввісні вали, що з'єднані ланцюговою муфтою, навантажують радіальною силою  $F_M \approx 0,6 T_p / D$ .

### 3.5.4 Редуктори і мотор-редуктори в приводах машин

**Загальні відомості і характеристика редукторів.** Редуктором називають механізм, що складається зі змонтованих у окремому закритому корпусі передач зачепленням і призначений для зміни параметрів обертового руху – зменшення швидкості обертання й відповідно підвищення обертового моменту. Подібні механізми, які використовуються для збільшення швидкості обертання і зменшення обертового моменту, називають мультиплікаторами.

Інколи виникає потреба зміни кутової швидкості тихохідного вала редуктора. У такому разі його передаточне число можна міняти змінюючи з'єднання деяких зубчастих коліс. Редуктори, що дозволяють ступінчасто змінювати передаточне число, називають коробками швидкостей.

Розміщення передач зачепленням у окремому закритому корпусі гарантує достатню точність монтажу, добре змащування й відповідно високий ККД, менше спрацювання деталей, а також надійний захист передач від впливу навколишнього середовища.

Редуктори бувають одно- і багатоступінчасті. Передаточне число редуктора з одним ступенем у вигляді циліндричної пари коліс звичайно, не перевищує  $u_{\max} = 8$ . Для конічних косозубих передач  $u_{\max} = 5 \dots 6$ . Двоступінчасті редуктори мають досить великі передаточні числа, але не більші за  $u = 18$ . Для передаточних чисел від 31,5 до 400 виготовляють триступінчасті редуктори. Редуктори, які мають більш як три ступені, трапляються рідко. Для великих передаточних чисел застосовують також редуктори: черв'ячні, циліндрично-черв'ячні або черв'ячно-циліндричні, двоступінчасті черв'ячні і планетарні передачі.

Редуктори проектують або спеціально для певної машини, або використовують серійні, які призначені для встановлення на різних машинах.

Серійні редуктори добирають за каталогами заводів-виготовлювачів відповідно до необхідного моменту і передаточного числа.

Перевагу слід надавати редукторам з меншим числом ступенів. Проте одноступінчасті редуктори (рис. 3.89,а) мають більші розміри порівняно з двохступінчастими (рис. 3.89,б) (або багатосту-

пінчастими). На рисунку 3.89,а,б зображені редуктори з передаточним числом  $u = 8$  при однаковому моменті.

В одноступінчастих редукторах з циліндричними колесами звичайно, вали розміщені горизонтально.

Колеса можуть бути з прямими, косими або шевронними зубами. Корпуси редукторів найчастіше виготовляють литими чавунними, рідше – зварними сталевими. Вали зубчастих передач редукторів монтують на підшипниках кочення або ковзання. Останні, звичайно, застосовують у редукторах важкого машинобудування.

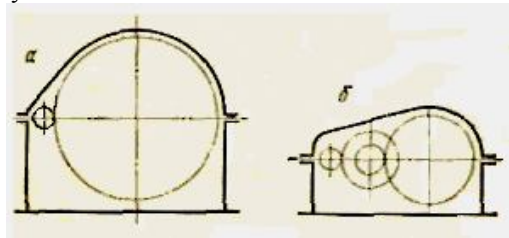


Рисунок 3.89

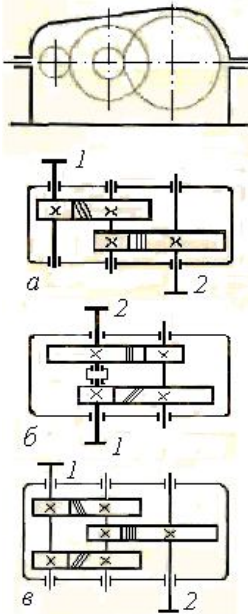


Рисунок 3.90

Двоступінчасті редуктори виготовляють за розгорнутою схемою (рис. 3.90,а,в) або за схемою, яку зображено на рисунку 3.90,б. Тут осі вхідного 1 і вихідного 2 валів збігаються, утворюючи одну лінію. Тому такі редуктори називають співвісними. Їх перевага – менша довжина порівняно з редукторами, виготовленими за першою схемою.

Несиметричне розміщення зубчастих коліс відносно опор (рис. 3.90,а) призводить при деформаціях валів до нерівномірного розподілу навантаження по довжині зуба. У схемі з роздвоєним ступенем (рис. 3.90,в) більш навантажене тихохідне колесо розміщене відносно опор симетрично. Для рівномірного розподілу навантаження між колесами тихохідного ступеня, які працюють паралельно, нахил лінії зубів коліс, установлених на

одному валу, роблять протилежного напрямку.

Редуктори випускають з горизонтальним (рис. 3.90), вертикальним (рис. 3.91), а іноді з похилим розміщенням площини осей валів.

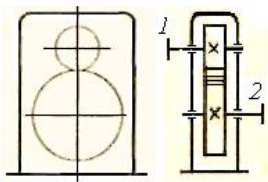


Рисунок 3.91

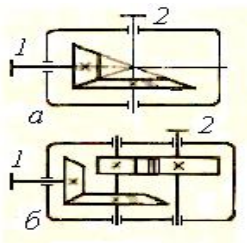


Рисунок 3.92

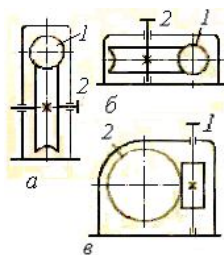


Рисунок 3.93

Якщо треба передавати обертаючий момент між валами з взаємно перпендикулярним розміщенням осей, застосовують одноступінчасті (рис. 3.92,а) або двоступінчасті конічні редуктори. Передаточні числа таких редукторів з прямозубими конічними колесами не перевищують  $u = 4$ , а для косих і криволінійних зубів – не більше  $u = 5$  (рідко 6). При великих передаточних числах застосовують конічно-циліндричні редуктори (рис. 3.92,б).

Черв'ячні редуктори можуть бути з верхнім, бічним, вертикальним (рис. 3.93,а,б,в) або нижнім розміщенням черв'яка. Нижнє розміщення застосовують при окружних швидкостях черв'яка до 4-5 м/с.

Конструкція редуктора (схема розміщення коліс і валів, загальне передаточне число тощо) визначається в кожному окремому випадку його призначенням. На рисунку 3.94 зображено конструкцію двоступінчастого редуктора. Корпус редуктора литий чавунний, складається з основи 3 і кришки 2, скріплених між собою болтами. На кришці є оглядовий люк 1, який розміщують звичайно, поза зони зачеплення коліс. Вали 4, 5 і 6 розміщені горизонтально і спираються на підшипники кочення.

Масло для змащування зачеплення і підшипників заливають у корпус редуктора з таким розрахунком, щоб зуби і частина вінця колеса занурювались у нього. Під час швидкого обертання коліс масло розбризкується і потрапляє в зачеплення.

Стікаючи по стінках і спеціальних каналах у площині рознімання корпусу, масло проникає і в підшипники валів.

Змащування розбризкуванням ефективне, коли окружна швидкість зубчастих коліс не менша як 2,5 м/с. При менших швидкостях одне з коліс кожної пари повинно занурюватись в масло. Але якщо окружні швидкості перевищують 12 м/с, то змащування зануренням недопустиме, оскільки через бурхливе перемішування масла з дна масляної ванни піднімаються брудні осадки, які,

потрапляючи на третю поверхню, прискорюють спрацювання зубчастих коліс і підшипників. Щоб запобігти витіканню масла через зазори між валами і кришками, крізь які проходять вали, застосовують ущільнення. Рівень масла контролюють за допомогою маслопоказників різної конструкції.

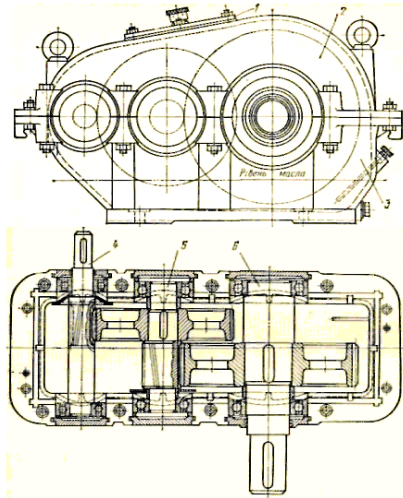


Рисунок 3.94

Редуктори різних типів із постійним передаточним числом надзвичайно широко використовують у всіх галузях господарства. Коробки швидкостей – переважно в приводах транспортних машин, металообробних верстатів та деяких інших машин, де потрібна зміна кутової швидкості приводного вала робочого органу. Мультиплікатори застосовують рідше, лише в приводах, де вимагаються високі швидкості обертання робочих органів – центрифуг, сепараторів та ін.

Для зменшення маси і габаритів приводних пристроїв мають широке застосування мотор-редуктори – механізми, в яких електродвигун і редуктор виконуються як один агрегат. Використання мотор-редукторів досить раціональне і перспективне, оскільки тут електродвигун безпосередньо з'єднується з корпусом редуктора і його вал несе на собі одне із зубчастих коліс редуктора. Використанням мотор-редукторів можна зменшити кількість муфт у приводі машини.

Промисловість випускають стандартизовані редуктори і мотор-редуктори загальномашинобудівного застосування, тобто такі, що

відповідають технічним вимогам, спільним для більшості випадків їхнього конкретного використання в приводах різних машин.

Характеристики стандартизованих редукторів, що визначають доцільність і можливість їхнього використання в конкретних приводах машин, регламентуються такими параметрами: передаточне число, обертовий момент на тихохідному валу, допустимі радіальні навантаження на вихідні вали, ККД і маса редукторів.

Стандартизовані редуктори у приводах машин переважно використовують з електродвигунами. За стандартом параметри редукторів визначаються для номінальної частоти обертання швидкохідного вала  $n_{ш} = 1500 \text{ хв}^{-1}$ . Стандарт передбачає використання редукторів і з більшою частотою обертання швидкохідного вала, але окружна швидкість зубчастих коліс не повинна бути більшою, ніж 16 м/с, а швидкість ковзання в черв'ячних передачах – 10 м/с. Технічні параметри редукторів зі збільшенням частот обертання будуть дещо нижчими від поданих у каталогах і повинні бути узгодженими між замовником і організацією, що виготовляє редуктори.

Усі стандартизовані редуктори розраховані на тривалий постійний режим навантаження і можуть працювати з довільним напрямом обертання валів. 90%-й ресурс зубчастих передач редукторів становить 36000 годин, черв'ячних передач – 20000 годин, а підшипників кочення опор валів – 10000 годин.

Вихідні вали стандартизованих редукторів для з'єднання з іншими органами машини можуть мати різне виконання. Для переважної більшості редукторів передбачаються вихідні вали такої форми виконання: циліндричні; конічні; у вигляді зубчастої півмуфти; з формою, придатною для приєднання приладів керування; порожнисті вали.

Можливі компоновальні вирішення приводів машин із використанням стандартизованих редукторів (а) та мотор-редукторів (б) показані на рисунку 3.95, де позначено: 1 – електродвигун; 2 – редуктор; 3 – муфта. Такі рішення можуть забезпечити ідентичні вихідні параметри приводу (частоти обертання,

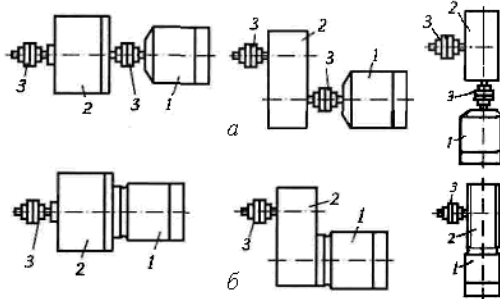


Рисунок 3.95



обертовий момент), але з різними варіантами взаємного розміщення складових частин приводу.

Вибір того чи іншого компоновального вирішення привода залежить від конструкції машини, обмежень за габаритами та масою, наявності комплектувальних виробів та інших техніко-економічних показників.

Циліндричні од-ноступінчасті горизонтальні редуктори типу ЦУ реалізують передаточні числа в межах 2,0...6,3 при обертових моментах на тихохідному валу  $T_m = (250...4000)$  Н·м. Основні технічні характеристики редукторів типу ЦУ, такі як міжосьова відстань  $a_w$ , передаточне число  $u$ , номінальний обертовий момент на тихохідному валу  $T_m$ , допустиме радіальне навантаження на вихідні ділянки валів  $F_r$ , та інші дані наведені у табл. 3.17. До складу редукторів входить пара циліндричних косозубих коліс із валами, розміщеними на конічних роликових підшипниках.

Циліндричні двоступінчасті редуктори типу Ц2У здатні забезпечити передаточні числа в межах 8...40 при обертових моментах на тихохідному валу  $T_T = (250...4000)$  Н·м.

Таблиця 3.17

Типо-розмір редуктора	$a_w$ , мм	$u$	$T_m$ , Н·м	$F_r$ , Н, на вал		ККД	Маса, кг
				швидко-хідний	тихо-хідний		
ЦУ-100	100	2; 2,24; 2,5;	250	500	2000	0,98	27
ЦУ-160	160	2,8; 3,15;	1000	1000	4000		75
ЦУ-200	200	3,55; 4; 4,5;	2000	2000	5600		135
ЦУ-250	250	5; 5,6; 6,3	4000	3000	8000		250

Циліндричні двоступінчасті співвісні редуктори типу Ц2С мають передаточні числа в межах 8...50 при обертових моментах на тихохідному валу  $T_m = (1250...1000)$  Н·м.

Мотор-редуктор – це механізм, в якому конструктивно електродвигун і редуктор виконуються як один агрегат. Для комплектування мотор-редукторів використовують асинхронні трифазні електродвигуни з короткозамкнутим ротором серії 4А...Р3.

Мотор-редуктори МЦ2С-63-МЦ2С-125 забезпечують обертові моменти на тихохідному валу  $T_m = (125...1000)$  Н·м при частотах його обертання  $n_m = (28...180)$  хв<sup>-1</sup>.

Серійно виготовляються циліндричні двоступінчасті співвісні мотор-редуктори типу МЦ2С, одноступінчасті планетарні редуктори типу МПз і двоступінчасті планетарні редуктори типу МПз2.

Характеристики, габаритні, монтажні і приєднувальні розміри редукторів ЦУ, Ц2У, Ц2С, МЦ2С, МПз і МПз2 наводяться у відповідних каталогах та довідниках.

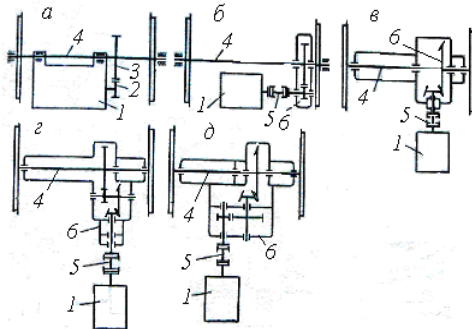


Рисунок 3.96

редукторна передача з конічно - циліндричним редуктором, д - кардано-редукторна передача з циліндрично - конічним редуктором.

Тут позначено: 1 - електродвигун, 2, 3 - шестерня й зубчасте колесо, 4 - вісь колісної пари, 5 - карданний вал, 6 - редуктор.

**Приклад 3.9.** Підібрати електродвигун 4, котрий рухає за допомогою барабана 3 й редуктора 5 вантажівку 1, яка підіймається по направляючим 6 зі швидкістю « $v_1$ » (рис. 3.5.17,а). Тертя в блоках, їх масу, масу барабана й масу зубчастих коліс не враховувати. Визначити значення передатного числа  $u_{43}$  редуктора 5 й накреслити його схему. Режим роботи привода довгочасний.

Маса вантажівки  $m = 1960$  кг;

швидкість вантажівки  $v_1 = 3$  км / год. =  $3000/3600 = 0,83$  м/с;

коефіцієнт опору при русі вантажівки  $f_{on} = 0,08$  від нормальній реакції коліс;

кут нахилу направляючих  $\alpha = 10^\circ$ ;

радіус барабана 3  $r_3 = 0,3$ м;

коефіцієнт корисної дії (ККД) редуктора  $\eta = 75\%$ .

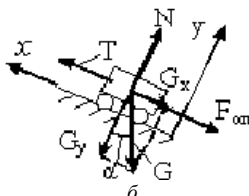
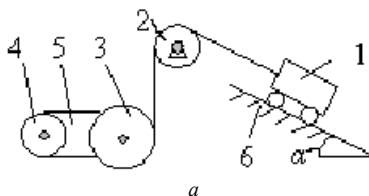


Рисунок 3.97

**Розв'язання.** Для вибору двигуна зображаємо сили, які діють на вантажівку при її русі вгору  $s$  постійною швидкістю « $v_1$ » (рис. 3.97,б):  $T$  – натяг тросу,  $G = mg$  – сила тяжіння,  $N$  – нормальна реакція напрямних,  $F_{on} = f_{on} N$  – сила опору руху. Записуємо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{kx} = T - G \sin \alpha - F_{on} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = N - G \cos \alpha = 0.$$

Із другого рівняння знаходимо нормальну реакцію напрямних  $N = mg \cdot \cos \alpha$  і відповідну силу опору  $F_{on} = f_{on} mg \cdot \cos \alpha$ .

З першого рівняння рівноваги знаходимо натяг тросу при сталому русі вантажівки (при  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ )

$$T = mg (\sin \alpha + f_{on} \cos \alpha) = 1960 \cdot 9,8 (\sin \alpha + 0,08 \cos \alpha) = 4849 \text{ Н.}$$

Необхідна потужність при русі вантажівки на валу барабана 3

$$N_3 = T v_1 = 4849 \cdot 0,83 = 4025 \text{ Вт} = 4,03 \text{ кВт},$$

необхідна потужність при сталому русі на валу двигуна 4

$$N_4 = N_3 / \eta = 4,03 / 0,75 = 5,37 \text{ кВт}.$$

Приймаємо з каталогу електродвигун серії 4А, потужність якого  $N_4 = 5,5 \text{ кВт}$ , а частота обертання  $n_4 = 1445 \text{ об/хв}$ .

Кутова швидкість

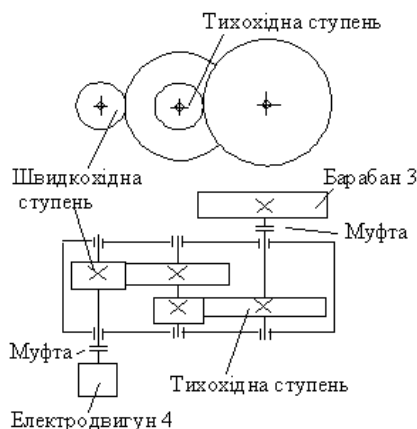


Рисунок 3.98

двигуна 4 і барабана 3

$$\omega_4 = \pi n_4 / 30 = \pi \cdot 1445 / 30 = 151,3 \text{ рад/с},$$

$$\omega_3 = v_1 / r_3 = 0,83 / 0,3 = 2,77 \text{ рад/с}.$$

Знаходимо необхідне значення передатного числа редуктора 5:

$$u_{43} = \omega_4 / \omega_3 = 151,3 / 2,77 = 55.$$

Приймаємо для механізму двохступеневий редуктор. Передатне число тихохідної ступені

$$u_m = 0,9 \sqrt{u_{43}} = 5,4,$$

швидкохідної ступені

$$u_{ш} = u_{43} / u_m = 55 / 5,4 = 10,2.$$

Схема редуктора наведена на рисунку 3.98.

**Приклад 3.10.** Маса автомобіля з колесами дорівнює  $M_a$ , радіус колеса  $r = 0,3 \text{ м}$ . Автомобіль починає горизонтальний рух зі стану спокою. На ведучі колеса автомобіля діє від двигуна крутний момент

$M_{кр}$ . Опір повітря пропорційний квадрату швидкості  $R = \mu v^2$ , де коефіцієнт  $\mu = 0,3 \text{ Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^2$ .

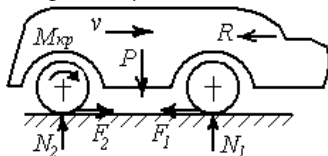


Рисунок 3.99

Нехтуючи тертям кочення і не враховуючи обертання коліс визначити необхідну потужність двигуна й загальне передаточне число  $u$  привода, щоб розігнати автомобіль до найбільшої швидкості  $v_{\max} = 200 \text{ км/год.} = 55,6 \text{ м/с}$ , якщо ККД приводу  $\eta = 0,7$ , частота обертання вала двигуна  $n = 3500 \text{ хв}^{-1}$ .

*Розв'язання.* Зобразимо сили, які діють на автомобіль при його русі (рис. 3.99): сила ваги  $P$ ; нормальні реакції на колеса  $N_1, N_2$ ; сили тертя  $F_1, F_2$ ; сила опору повітря  $R$ . Крутний момент від двигуна  $M_{кр}$  намагається обертати ведучі колеса за рухом стрілки годинника, а сила тертя ведучих коліс  $F_2$  перешкоджає цьому обертанню і тому вона направлена у бік руху автомобіля – саме тому сила тертя  $F_2$  – рушійна сила.

Запишемо диференціальну форму теорему про зміну кінетичної енергії системи

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i.$$

Поділивши цю рівність на  $dt$  і, враховуючи, що  $dA/dt = N$  – потужність сили, запишемо теорему в такому вигляді

$$dT/dt = \sum dA_k^e/dt + \sum dA_k^i/dt. \quad (3.123)$$

Знаходимо:

- кінетична енергія автомобіля  $T = M_a v^2/2$ ;
- сума елементарних робіт зовнішніх і внутрішніх сил на переміщенні автомобіля  $ds$ :

$$\sum dA_k^e + \sum dA_k^i = M_{кр} d\varphi - R ds = M_{кр} ds/r - \mu v^2 ds.$$

Тут робота сил  $P, N_1, N_2, F_1, F_2$  дорівнює нулю тому, що сила  $P$  перпендикулярна переміщенню (рис. 3.96), а сили  $N_1, N_2, F_1, F_2$  прикладені в миттєвому центрі швидкості, швидкість якого й переміщення у будь-який момент часу дорівнює нулю; кутове переміщення колеса  $d\varphi = ds/r$ .

Підставимо значення кінетичної енергії і суму елементарних робіт зовнішніх і внутрішніх сил у рівняння (3.123)

$$M_a v dv/dt = M_{кр} v/r - \mu v^2 v,$$

або

$$M_a a = M_{кр}/r - \mu v^2,$$

де  $[M_a v^2/2]/dt = M_a [d(v^2)/dt]/2 = [M_a 2v dv/dt]/2 = M_a va$ ;  $dv/dt = a$  – прискорення автомобіля;  $ds/dt = v$  – швидкість автомобіля.

Коли швидкість автомобіля прямує до свого найбільшого значення, прискорення прагне до нуля, отже  $M_{кр}$  знаходиться з рівняння

$$M_{кр}/r - \mu v_{\max}^2 = 0.$$

З останнього рівняння знаходимо крутний момент

$$M_{кр} = \mu r v_{\max}^2 = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 55,6^2 = 278,2 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Необхідна потужність на колесах

$$N_{\kappa} = \omega_{\kappa} M_{кр} = 185,3 \cdot 278,2 = 51564 \text{ Вт} \approx 52 \text{ кВт},$$

де  $\omega_{\kappa} = v_{\max} / r = 55,6 / 0,3 = 185,3 \text{ рад/с}$  – кутова швидкість коліс.

Необхідна потужність двигуна

$$N_{\partial\partial} = N_{\kappa} / \eta = 52 / 0,7 = 74 \text{ кВт}.$$

Загальне передаточне число  $u$  привода

$$u = \omega_{\partial\partial} / \omega_{\kappa} = 366,3 / 185,3 = 1,98.$$

Тут  $\omega_{\partial\partial} = \pi n / 30 = 3,14 \cdot 3500 / 30 = 366,3 \text{ рад/с}$  – кутова швидкість двигуна.

### Контрольні запитання до розділу 3.5

1. З яких складових частин можна подати структуру довільної машини?
2. Який пристрій називається приводом машини?
3. Які двигуни використовуються для привода машин?
4. Які типи передач використовуються для привода машин?
5. Які елементи входять до складу привода машини?
6. Як визначається загальне передаточне число механічного привода, якщо відомі кутові швидкості вала двигуна і приводного вала робочого органу машини?
7. Які існують типи електродвигунів?
8. Розшифруйте величини, що входять до формул, які визначають потужність електродвигуна:  $P_{\text{дв.р}} = T_{\text{пр}} \omega_{\text{пр}} / \eta_{\text{заг}}$ ,  $P_{\text{дв.р}} = F_{\text{р}} V_{\text{р}} / \eta_{\text{заг}}$ .
9. Які пристрої називають муфтами?
10. На які класи поділяють муфти?
11. Який механізм називають редуктором, а який коробкою швидкостей?
12. Який механізм називають мотор-редуктором і які він має переваги?

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Є. С. Уманський. – Київ : Вища шк., 2004. – 655 с.
2. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М., 1986. – 592 с.
3. Прикладна механіка : навч. посіб. / В. Т. Павлище, Є. В. Харченко та ін. – Львів, 2004. – 368 с.
4. Прикладная механика / Т. В. Путята, Н. С. Можаровский и др. – Киев, 1977. – 534 с.
5. Эрдеди А. А. Техническая механика / А. А. Эрдеди, Ю. А. Медведев, Н. А. Эрдеди. – М., 1991. – 304 с.
6. Гонтаровська Т. М. Технічна механіка / Т. М. Гонтаровська. – Житомир, 2001. – 242 с.
7. Технічна механіка / О. О. Ердеді, І. В. Анікін та ін. – Київ, 1983. – 378 с.
8. Устюгов И. И. Детали машин / И. И. Устюгов. – М., 1981. – 383 с.

*Навчальне видання*

**ШПАЧУК** Володимир Петрович,  
**КУЗНЕЦОВ** Олександр Миколайович

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

з дисциплін  
**«ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА».**  
**«ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА»**

*(для студентів 1–4 курсів денної і заочної форм навчання  
освітнього рівня «бакалавр» за спеціальностями 141 –  
Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка;  
263 – Цивільна безпека. Охорона праці)*

Відповідальний за випуск *В. П. Шпачук*

*За авторською редакцією*

Комп'ютерне верстання *О. М. Кузнецов*

План 2017, поз. 122Л

---

Підп. до друку 06.06.2017. Формат 60×84/16  
Друк на ризографії. Ум. друк. арк. 10,2  
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова  
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002  
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК № 5328 від 11.04.2017.