

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

О. О. Чупринін

В. О. Пушня

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

**«ОПІР МАТЕРІАЛІВ І БУДІВЕЛЬНА
МЕХАНІКА»**

*(для студентів 1-2 курсу денної і заочної форм навчання за
спеціальністю 192 – Будівництво та цивільна інженерія
(спеціалізація (освітня програма) «Гідротехніка
(Водні ресурси)»)*

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2018

Чупринін О. О. Конспект лекцій з дисципліни «Опір матеріалів і будівельна механіка» (для студентів 1-2 курсу денної і заочної форм навчання за спеціальністю 192 – Будівництво та цивільна інженерія (спеціалізація (освітня програма) «Гідротехніка (Водні ресурси)») / О. О. Чупринін, В. О. Пушня; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018.– 91 с.

Автори: канд. техн. наук, доц. О. О. Чупринін,
канд. техн. наук, доц. В. О. Пушня

Рецензент канд. техн. наук, доц. Н. В. Середа

*Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол № 7 від 16.02.2017.*

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ	6
1.1 Основні гіпотези опору матеріалів	6
1.2 Класифікація елементів конструкцій	6
1.3 Зовнішні навантаження	7
1.4 Внутрішні зусилля	8
1.5 Напруження	10
2 ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ	11
2.1 Відомості про будівельні матеріали	11
2.2 Експериментальні дослідження властивостей матеріалів..	12
2.3 Коефіцієнт поперечної деформації	15
2.4 Методи розрахунків конструкцій на міцність	16
3 РОЗТЯГ І СТИСК	18
3.1 Поздовжня сила	18
3.2 Напруження в стержнях при розтягу-стиску	19
3.3 Деформації і переміщення	22
3.4 Врахування власної ваги	24
3.5 Статично невизначені задачі	26
4 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРЕЗІВ	29
4.1 Площа перерізу	29
4.2 Статичні моменти перерізу	29
4.3 Моменти інерції перерізу	31
5 ЗГИН БАЛОК	36
5.1 Внутрішні зусилля при згині	37
5.2 Напруження і деформації при згині	43
5.3 Внутрішні зусилля в рамах	49
6 ЗСУВ І КРУЧЕННЯ	51
6.1 Чистий зсув	51
6.2 Розрахунок на зріз	51
6.3 Кручення стержнів із круглим поперечним перерізом ..	52
6.4 Внутрішні зусилля при крученні. Крутний момент	53
6.5 Напруження і деформації при крученні	54
7 ПЕРЕМІЩЕННЯ ПРИ ЗГИНІ	60
7.1 Прогін та кут повороту перерізу	60
7.2 Метод початкових параметрів	63
7.3 Метод Мора	66
7.4 Правило Верещагіна	69
8 СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНІ БАЛКИ	71
8.1 Загальна схема розв'язання	71
8.2 Рівняння трьох моментів	72

9 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ	76
9.1 Основні поняття	77
9.2 Формула Ейлера	78
9.3 Приведена формула Ейлера	80
10 ПЛОСКІ ФЕРМИ	81
10.1 Визначення. Конструкція. Особливості роботи	81
10.2 Методи розрахунку простих ферм	81
10.3 Розподіл зусиль в стержнях балкової ферми	84
11. РОЗПІРНІ СИСТЕМИ	86
11.1 Основні теоретичні відомості	86
11.2 Визначення опорних реакцій	87
11.3 Внутрішні зусилля в арці	88
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ	91

ВСТУП

Опір матеріалів – це розділ механіки, якій вивчає інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкцій та споруд, їх взаємодію між собою та іншими конструкціями [1–5].

Основним елементом, що розглядає опір матеріалів, є брус (стержень, балка, вал) із прямолінійною віссю (прямолінійний брус), тобто тіло, у якого розмір в одному напрямку набагато більше двох інших розмірів.

Розрахунки на міцність полягають у визначенні, чи буде конструкція протистояти зовнішнім впливам, чи зруйнується під дією цих навантажень.

Метою розрахунків на жорсткість є визначення таких розмірів елементів конструкцій, при яких зміна розмірів і форми не перевищує заданих величин, що визначаються з умов експлуатації.

Стійкість конструкції – це її здатність зберігати свою форму рівноваги. У процесі експлуатації часто виявляється, що деформації багатьох конструкцій при дії деякого виду навантажень незначні, поки їхні величини менше деяких значень, що називаються критичними. При навантаженнях, що перевищують критичні значення, деформації конструкції різко зростають. І вона приймає іншу від первісної форму рівноваги, унаслідок чого руйнується або втрачає свої експлуатаційні характеристики. Розрахунок конструкції, що має метою не допустити втрати стійкості, називається розрахунком на стійкість.

Для того, щоб конструкція цілком відповідала вимогам міцності, жорсткості та стійкості, а отже була надійна в експлуатації, треба надати її елементам найбільш раціональної форми і, знаючи властивості матеріалів, з яких вона виготовляється, визначити відповідні розміри залежно від навантаження та його характеру. При проведенні розрахунків необхідно сполучити розглянуті вище характеристики з дешевиною, що є наслідком економії матеріалу.

Дисципліну Будівельна механіка вивчають студенти після засвоєння курсу опору матеріалів, де об'єктом вивчення є окремі елементи та їх міцність. Будівельна механіка займається переважно розрахунком споруд, як систем стержнів, що з'єднані між собою. Її завданням, окрім вивчення методів розрахунку споруд, є створення нових найбільш економічних і раціональних схем споруд [6].

Будівельна механіка є однією з важливих дисциплін, необхідних для освітньої підготовки та практичної діяльності спеціаліста–будівельника.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

1.1 Основні гіпотези опору матеріалів та будівельної механіки

При дослідженні деформування конструкцій прийнято використовувати ряд припущень, що істотно спрощують проведення розрахунків. Ці припущення, як показують експерименти, можна використовувати при рішенні більшості практичних задач.

Приведемо основні гіпотези.

1. Матеріал конструкції є однорідним і суцільним.

Ця гіпотеза затверджує, що властивості матеріалу не залежать від розмірів і форми конструкції й однакові у всіх її точках. Дане допущення дозволяє не враховувати дискретну структуру матеріалу і розглядати нескінченно малий елемент конструкції (точку тіла).

2. Матеріал конструкції ізотропний.

Ця передумова припускає, що властивості матеріалу однакові у всіх напрямках. Дана гіпотеза використовується при рішенні більшості задач опору матеріалів.

3. Матеріал конструкції ідеально пружний.

Ідеальна пружність – це властивість матеріалу цілком відновлювати форму і розміри конструкції після того, як були усунуті причини, що викликали її деформування. Деформування ідеально пружних тіл залежить тільки від навантажень, і не залежить від того, у якій послідовності вони прикладені.

4. Деформації в точці прямо пропорційні напруженням в даній точці.

5. Результат впливу на конструкцію системи навантажень дорівнює сумі результатів впливу кожного навантаження окремо.

6. Принцип Сен-Венана. Відповідно до нього, результат дії навантажень, прикладених до малої області тіла, швидко убуває в міру видалення від цієї області

1.2 Класифікація елементів конструкцій

У будівельних конструкціях об'єкти за геометричними характеристиками прийнято розподіляти на ряд типів:

Фундаменти (масиви) – тіла, у яких усі габаритні розміри одного порядку.

Пластини (плити) – тіла плоскої форми, у яких два габаритні розміри (довжина та ширина) великі в порівнянні з третім (товщиною).

Оболонки – тіла, обмежені криволінійними поверхнями, які розташовані на близькій відстані одна від одної.

Стержень (брус), прямолінійний, криволінійний – тіло, у якого два габаритні розміри малі в порівнянні з третім (довжиною).

Серед прямолінійних стержнів розрізняють балки, стійки, колони, осі, вали. Криволінійні стержні – це арки, колісні ободи, вантажнопідйомні гаки та ін.

1.3 Зовнішні навантаження

Навантаження, що діють на конструкцію, є стосовно неї зовнішніми силами. Ці навантаження, прикладені до елементів конструкції, і розподілені деяким чином на ділянках її поверхні. Їх можна поділити на:

1. Зосереджені сили ($F[\text{кН}]$), моменти ($M[\text{кНм}]$).
2. Розподілені сили ($q[\text{кН/м}]$) та моменти ($m[\text{кНм/м}]$).

Крім того, навантаження можна розділити на постійні (які діють в усі часи існування конструкції) і тимчасові, діючі тільки визначений проміжок часу.

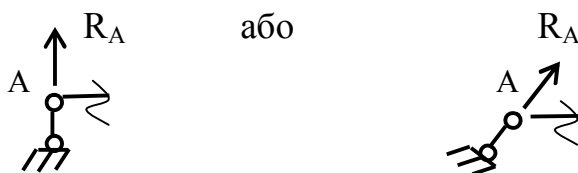
За характером впливу навантаження можна розділити на статичні і динамічні. Статичні, навантажують конструкцію поступово, під час експлуатації вони не змінюються або змінюються повільно. У цьому випадку всі її елементи знаходяться в рівновазі, а сили інерції відсутні чи ними можна знехтувати.

Якщо прискорення різних частин тіла істотно і силами інерції не можна знехтувати (зміна навантажень, а, отже, і швидкості елементів за невеликий період часу), то в цьому випадку вважається, що прикладені динамічні навантаження.

Опори та опорні реакції. Конструктивні форми опор дуже різноманітні. Для розрахунку їх схематизують у вигляді трьох основних типів:

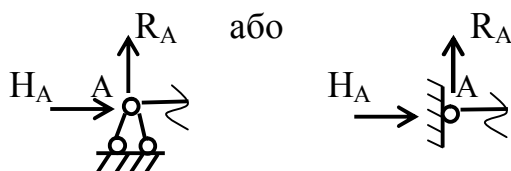
Шарнірно-рухома опора.

В ній виникає тільки одна складова реакції R_A , що спрямована уздовж опорного стержня.



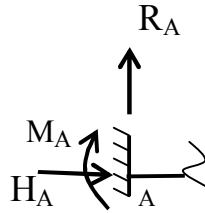
Шарнірно-нерухома опора.

У ній можуть виникати дві складові – вертикальна реакція R_A і горизонтальна H_A .



Затиснення (жорстке закріплення).

Де можуть бути три складові – вертикальна реакція R_A , горизонтальна H_A й опорний момент M_A .



Реакції в'язів належать до зовнішніх, що діють на елементи конструкції і визначаються з умови рівноваги конструкції або її окремих елементів. Усі реакції вважаються прикладеними у центрі ваги опорного перерізу [7].

1.4 Внутрішні зусилля

Зовнішнє навантаження викликає появу внутрішніх сил у елементах конструкції. Під внутрішніми силами ми будемо мати на увазі сили взаємодії між окремими елементами конструкції чи їхніми частинами. При цьому будемо вважати, що до навантаження тіла вони були відсутні. Внутрішні сили прийнято визначати методом перерізів.

Розглянемо рівновагу деякого елемента конструкції, на який діє система зовнішніх сил. Умовно розсічемо елемент поперечним перерізом. Сили взаємодії частин елемента будуть рівні за величиною і протилежні за напрямом. При цьому для кожної окремої частини тіла, що також повинні знаходитися в рівновазі, вони є зовнішніми, а для всього елемента – внутрішніми.

Зовнішні навантаження, які діють на частину елемента урівноважуються внутрішніми силами в перерізі. Зведемо систему внутрішніх сил до головного вектора $\bar{R} (N_x, Q_y, Q_z)$ й головного моменту $\bar{M} (M_x = M_{кр}, M_y, M_z)$ (рис. 1.1).

Таким чином, взаємодія будь-яких двох частин елементів конструкції цілком визначаються шістьма складовими, котрі називаються внутрішніми силовими факторами:

N_x – подовжня сила;

Q_y, Q_z – поперечні сили;

$M_{кр}$, – момент, що крутить;

M_y, M_z – згинальні моменти.

По аналогії розрізняють види навантаження.

Розтяг-стиск виникає, у випадку, коли з усіх внутрішніх силових факторів ненульовою буде тільки подовжня сила. Згин прямої балки відбувається в тому випадку, коли на неї діють зосереджені моменти чи зовнішні сили, перпендикулярні осі балки. У цьому випадку з усіх внутрішніх силових факторів в перерізі виникає тільки згинальний момент й поперечна сила. Кручення виникає при дії на вал зовнішніх сил, які утворюють момент, що крутить щодо осі вала. У цьому випадку з усіх внутрішніх силових факторів в перерізі буде тільки момент, що крутить. Деформація зсуву виникає, коли зовнішні сили зміщують два рівнобіжних плоских перетини відносно один одного при незмінній відстані між ними. У цьому випадку у внутрішніх перерізах виникають тільки поперечні сили.

У результаті одночасної дії на брус системи зовнішніх сил, окремі компоненти якої, викликають різні види деформування, загальна картина деформування буде більш складна, чим розглянуті вище прості види – розтяг і стиск, згин, кручення і зсув. Багато елементів конструкцій, розрахункова схема, яких відповідає прямолінійному брусу, піддаються спільному впливу сил, що викликають різні види деформування: згин і розтяг-стиск, згин і кручення, і інші сполучення розглянутих вище видів деформування. У цьому випадку при розрахунках розділяють різні види зовнішніх навантажень і розв'язують ці задачі окремо. Загальне рішення буде суперпозицією рішень окремих задач.

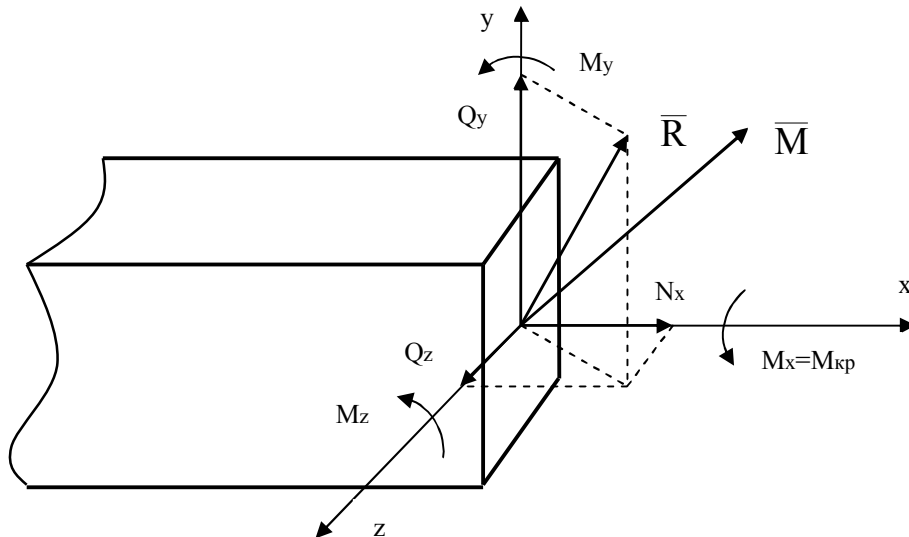


Рисунок 1.1

Внутрішні сили і моменти в різних перерізах того самого елемента конструкції в загальному випадку будуть різні. Як змінюються внутрішні силові фактори уздовж стержня прийнято показувати епюрами – графіками, вісь абсцис, якого відповідає з осі стрижня, а ординати

відповідають величині силових факторів. Ці графіки будують за визначеними правилами:

1. Вісь епюри вибирають таким чином, щоб вона була рівнобіжна чи збігалася з віссю стержня.
2. Ординати відкладають у відповідному масштабі від осі епюри по перпендикуляру.
3. Штрихують епюри, лініями, перпендикулярними до осі.
4. Крім того, в поле епюри в колі ставлять відповідний знак зусилля.

1.5 Напруження

Зовнішні зосереджені навантаження в дійсності не існують, а являють собою деяку ідеалізацію реального розподіленого навантаження. Аналогічно зосереджені внутрішні силові фактори, що характеризують взаємодію між окремими частинами конструкції, є статичним еквівалентом внутрішніх сил, розподілених по площі перерізу.

Прикладені до тіла зовнішні сили викликають появу в тілі внутрішніх сил. У загальному випадку на кожній грані систему сил можна звести до головного вектора (ΔR – рівнодіюча внутрішніх сил на деякій площадці перерізу ΔA) і головного моменту. При досить малих розмірах цих граней, значення головного моменту буде близько до нуля, а середнє напруження:

$$p_{cp} = \frac{\Delta R}{\Delta A}$$

Більш зручним у практичному використанні є представлення взаємодії між частинами тіла через напруження в такий спосіб:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}, \quad (1.1)$$

Таким чином, напруженням наголошується внутрішня сила, яка віднесена до одиниці площі у даної точки перерізу. Вони вимірюються в одиницях сили, ділених на одиниці довжини у другому ступені ($[кН/см^2]$).

Цю рівнодіючу можна розкласти на дві складові: нормальну ΔN і дотичну ΔQ . По цих складових визначають нормальні й дотичні напруження:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}; \quad \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}, \quad (1.2)$$

де $\Delta Q = \sqrt{Q_y^2 + Q_z^2}$ – сумарна поперечна сила. Нормальні й дотичні напруження являють собою проекції повного напруження на нормаль і площину площадки відповідно. Повне напруження:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (1.3)$$

2 ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ

2.1 Відомості про будівельні матеріали

До основних матеріалів, із яких виготовляються будівельні конструкції, відносяться сталь, алюміній і його сплави, залізобетон, деревина, пластмаси та ін.

Сталлю називають сплав заліза з вуглецем і головними додачками марганцю, кремнію (вуглецева сталь). Для поліпшення її властивостей сталь легують додаючи хрому, нікелю, міді, молібдену, титану, ванадію, цирконію (легована сталь). Шкідливими домішками є сіра і фосфор.

Будівельні сталі застосовують переважно у вигляді прокатних профілів, листів; арматурні – у вигляді стержнів або дроту, одержуваного волочінням.

Алюміній і сплави відіграють другорядну роль і застосовуються в тих випадках, коли це економічно доцільно або неможливо застосування сталі. Алюміній легше за сталь майже в 3 рази, міцність його сплавів мало їй поступається, але модуль пружності також майже в 3 рази менше, що визначає велику його деформативність у конструкціях. Для будівельних конструкцій застосовують сплави алюмінію з міддю, із марганцем, магнієм, сплави з додачками цинку і міді.

Залізобетон – комплексний матеріал, що вдало сполучає два різнорідних матеріали: сталь і бетон. Тривала і надійна спільна робота сталі і бетону забезпечується їхніми фізико-механічними властивостями, а також виконанням правил сполучення цих матеріалів (при конструюванні залізобетонних елементів).

Бетон добре опирається стисканню і набагато гірше – розтягу. Тому у всіх залізобетонних конструкціях розтягнуті, а іноді і стиснуті від навантаження зони бетону посилюють сталлю, яка добре опирається розтягу-стиску.

Деревина – найдавніший будівельний матеріал. У головних елементах будівельних конструкцій використовують хвойну деревину, тому що вона містить менше дефектів, ніж листяна деревина, а також містить смоли, що чинить кращий опір зволоженню і загниванню. З хвойної деревини найбільш часто використовують соснову деревину. Серед листяних порід виділяється дубова деревина, що має підвищену міцність і стійкість проти загнивання, але більшу вартість.

Пластмаси. Конструкційні пластмаси використовують у складі елементів несучих і огорожуючих конструкцій. З найбільш міцних склопластиків виконують елементи несучих конструкцій. Прозорі склопластики застосовують в елементах огорожуючих конструкцій будівель. Надлегкі пінопласти використовують у середніх прошарках легких покриттів і стін.

2.2 Експериментальні дослідження властивостей матеріалів

Щоб мати можливість судити про міцність конструкцій при навантаженні, потрібно вивчити головні властивості застосовуваних матеріалів і їхнє поведіння при збільшенні навантаження аж до руйнування. Для цього зразки матеріалу випробують у лабораторії на спеціальних машинах.

Металеві зразки для випробування на розтяг виготовляють у вигляді стержнів круглого або прямокутного перерізу. Круглі зразки мають на кінцях стовщення (головки), а плоскі – поширення. Цими кінцями зразки закладають у захвати випробувальної машини, після чого розтягують. Для одержання порівняльних результатів випробувань даного матеріалу, зроблених на різноманітних зразках, необхідно, щоб зразки мали певні співвідношення розмірів. Ці співвідношення і самі розміри встановлені стандартом (ДСТУ 1497-84).

Найбільш часто використовується циліндричний стандартний нормальний зразок (рис. 2.1). Діаметр перерізу d_0 такого зразка може бути взятий від 3 до 25 мм.

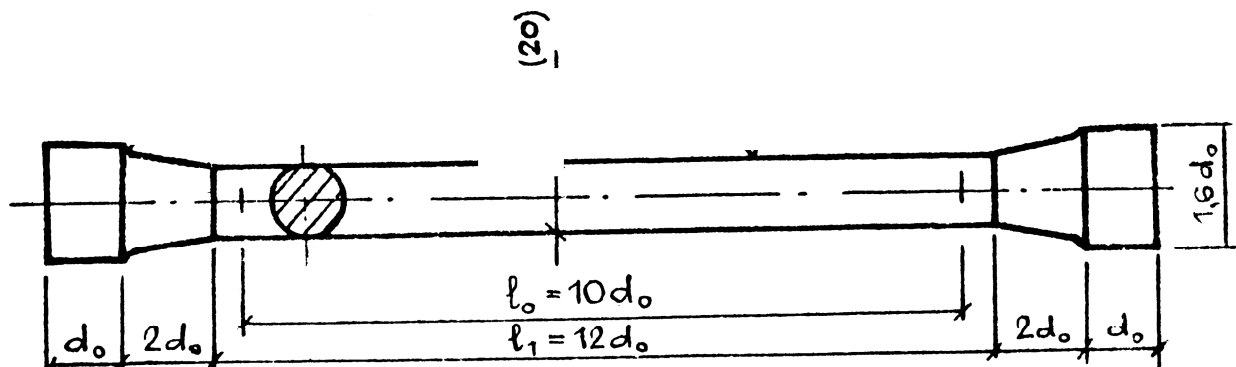


Рисунок 2.1

Розрахункову довжину l_0 на зразках помічають рисками. Ця довжина повинна бути меншою, ніж відстань між кінцівками, щоб виключити вплив способу прикладання зовнішніх сил і концентрації напружень в місцях зміни перерізу. Зона цього впливу на підставі принципу Сен-Венана не перевищує меншого розміру перерізу [8].

Особливості поведінки зразка при випробуванні на розтяг наочно ілюструються діаграмою розтягу – графіком залежності між навантаженням F та абсолютним подовженням Δl . Для маловуглецевої сталі вона має вигляд, наведений на рисунку 2.2.

На цій діаграмі можна відокремити три ділянки: лінійна АВ; горизонтальна CD й нелінійна DHG.

На ділянці АВ подовження Δl пропорційне навантаженню F , тобто дійсний закон Гука [1–5; 9] так, що однаковим приростам ΔF навантаження відповідають однакові прирости Δl подовження зразка. Величина $F_{\text{пц}}$ визначає навантаження, що відповідає межі пропорційності. Дуже близьке до нього значення $F_{\text{пр}}$, яке визначає межу пружної роботи матеріалу, тобто відсутні деформації пластичності.

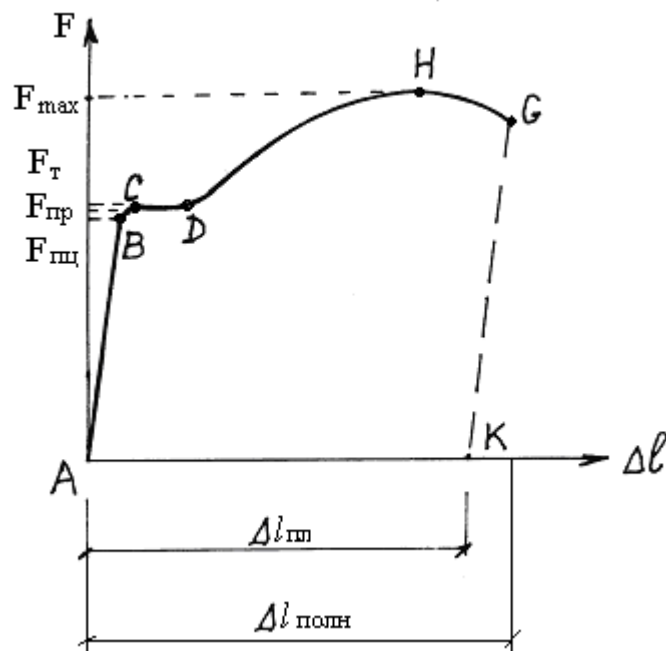


Рисунок 2.2

На ділянці CD подовження Δl зростають при незмінному навантаженні. Таке явище, характерне для пластичних матеріалів, називається текучістю. Текучість – критичний стан матеріалу, при якому підвищується температура, змінюється електропровідність, магнітні властивості. F_T – навантаження, що відповідає межі текучості матеріалу.

Коли зона текучості минає, навантаження знову зростає до найбільшого навантаження F_{max} , після чого стрімко падає до миті розриву зразка (точки G). Падіння навантаження після досягнення F_{max} обумовлене тим, що в цей час на зразку утворюється місцеве звуження – так звана шийка (рис. 2.3). У результаті цього несуча здатність зразка знижується. На рисунку 2.3 d – діаметр шийки.

Діаграма розтягу будується для даного зразка і її масштаб залежить від розмірів останнього. Потім на основі цієї діаграми будують діаграму напружень. Залежність між напруженнями:

$$\sigma = \frac{F}{A_0}, \quad (2.1)$$

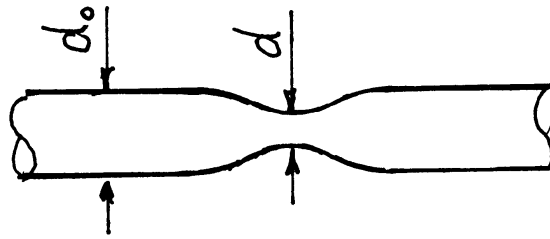


Рисунок 2.3

де A_0 – площа поперечного перерізу зразка, і відносним подовженням

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0}. \quad (2.2)$$

Ця діаграма напружень є характеристикою матеріалу безвідносно до розмірів зразка (рис. 2.4). Вона містить, декілька характерних точок:

$\sigma_{\text{пц}} = \frac{F_{\text{пц}}}{A_0}$ – межа пропорційності (напруження, при якому порушується лінійна залежність між силою і деформацією);

$\sigma_{\text{пр}} = \frac{F_{\text{пр}}}{A_0}$ – межа пружності (напруження, при якому з'являються деформації пластичності);

$\sigma_{\text{Т}} = \frac{F_{\text{Т}}}{A_0}$ – межа текучості (напруження, яки відповідають зоні текучості);

$\sigma_{\text{max}} = \frac{F_{\text{max}}}{A_0}$ – межа міцності (напруження, яки відповідають найбільшому навантаженню).

Модуль пружності E , що характеризує пружні якості матеріалу, та справедливий коли напруження менше ніж межа пропорційності, визначають з формули для абсолютного подовження:

$$E = \frac{F \ell_0}{A_0 \Delta \ell}, \quad (2.3)$$

де F – навантаження в межах пропорційності;

ℓ_0 – база вимірювального приладу;

$\Delta \ell$ – подовження бази, що відповідає навантаженню F .

Замість абсолютного значення F для визначення модуля пружності можна взяти приріст навантаження ΔF , а також приріст подовження $\delta \Delta \ell$:

$$E = \frac{\Delta F \cdot \ell}{A_0 \delta \Delta \ell}. \quad (2.4)$$

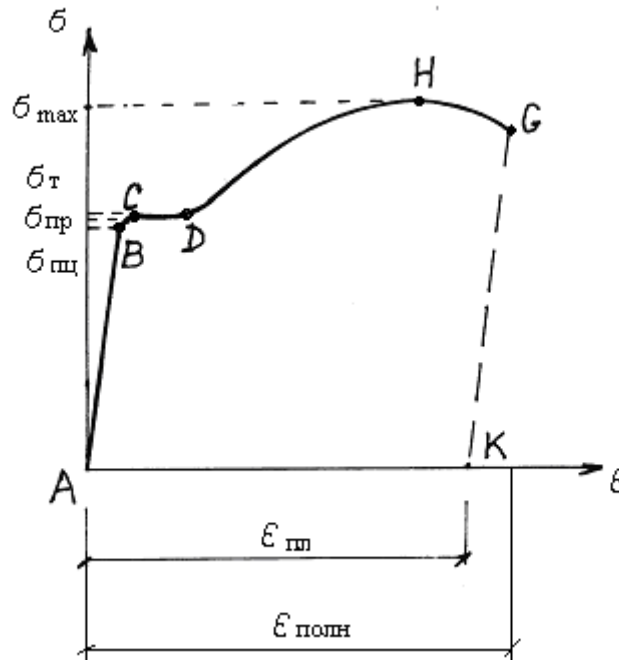


Рисунок 2.4

2.3 Коефіцієнт поперечної деформації

Для розтягу використовують плоский сталевий зразок у вигляді смужки прямокутного перерізу. Щоб виключити вплив напруженого стану у місцях затиску зразка на показання тензометрів, вважають, що його довжина повинна у чотири-п'ять разів перевищувати ширину

Експериментально доведено, що при одночасному розтягу (стиску) сталевго стержня останній змінює свої розміри як у поздовжньому, так і в поперечному напрямках. При розтягу поздовжні його розміри збільшуються, а поперечні – зменшуються. Здатність матеріалу до деформування характеризується відносними деформаціями:

поздовжньою $\epsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell_0}.$

та поперечною $\epsilon' = \frac{\Delta b}{b_0},$

де $\Delta \ell = \ell_1 - \ell_0$ – абсолютна поздовжня деформація, що визначається як різниця між довжиною ℓ_1 стержня при її навантаженні і первісною довжиною ℓ_0 ;

$\Delta b = b_1 - b_0$ – абсолютна поперечна деформація, що визначається як різниця між шириною b_1 стержня при дії навантаження та первісною шириною b_0 .

Модуль частки, одержаної поділенням відносної поздовжньої на відносну поперечну деформацію, називається коефіцієнтом поперечної деформації або коефіцієнтом Пуассона [1–5; 9]:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (2.5)$$

Коефіцієнт Пуассона залежить виключно від пружних властивостей матеріалу і постійний для нього в межах лінійної пружності. Модуль пружності та коефіцієнт Пуассона цілком характеризують пружні властивості матеріалу.

2.4 Методи розрахунків конструкцій на міцність

Визначення напружень у конструкціях є основою розрахунків на міцність. При конструюванні розміри елементів конструкції повинні бути такими, щоб під дією зовнішніх навантажень вона не руйнувалася, при цьому в більшості випадків не слід допускати появи необоротних деформацій.

При деформуванні матеріалів, коли напруження не перевищують деяку величину, що називається границею пружності і позначається $\sigma_{пр}$, при розвантаженні тіло повністю відновлює свою форму та розміри (остаточні деформації не перевищують 0.02%). Необоротні деформації з'являються при деформуванні, коли напруження досягають деякої величини, що називається границею текучості і позначається σ_T – це таке напруження, при якому деформування тіла здійснюється при незмінному зусиллі. Руйнування настає в момент досягнення напруженнями свого максимального значення, що називається тимчасовим опором і позначається σ_{max} . Для того щоб конструкції працювали надійно, напруження не повинні перевищувати небезпечних величин.

При деформуванні пластичних матеріалів небезпечним напруженням вважається границя текучості, для крихких – тимчасовий опір. Для крихкого матеріалу в момент руйнування деформації можуть бути невеликими. Але ці напруження не можуть бути прийняті як допустимі. Для того, щоб конструкції експлуатувалися в безпечних умовах, величина напруження повинна бути зменшена деяким чином. Для цього вводиться коефіцієнт запасу в такий спосіб: $[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}$, де $[\sigma]$ – допустимі напруження, тобто максимальні напруження, які можна допустити при розрахунку конструкції, σ_0 – небезпечні напруження, n – коефіцієнт запасу міцності.

Небезпечні напруження (границя текучості чи тимчасовий опір) визначається опитним шляхом і є характеристикою матеріалу. Величина коефіцієнта запасу залежить від багатьох факторів – матеріалу, умов експлуатації, призначення конструкції.

Таким чином, умовою міцності елементів конструкції при розрахунках буде наступне співвідношення:

$$\sigma \leq [\sigma], \quad (2.6)$$

де σ – напруження, що виникає в елементах конструкції.

Незначне перевищення максимальних напружень над тими, що допускаються (до 5%), не небезпечно [1–3].

Аналогічно вводиться умова міцності і для дотичних напружень, що виникають у конструкції:

$$\tau \leq [\tau], \quad (2.7)$$

де τ – дотичне напруження, що виникає в елементах конструкції.

Небезпечні напруження, як нормальні, так і дотичні, визначаються експериментальним шляхом, для цього досліджується розтяг-стиск і чистий зсув стержнів відповідно. Ці величини для різних матеріалів приводяться в довідниках. Як правило, для більшості конструкційних матеріалів спостерігається співвідношення

$$[\tau] = (0.5 \div 0.6)[\sigma].$$

Цей метод поки залишається головним при розрахунку механічних вузлів і елементів будівельних конструкцій. Умова міцності визначається:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (2.8)$$

де σ_{\max} – найбільше напруження, що виникає в одній з точок небезпечного перерізу конструкції й визначається розрахунком;

$[\sigma]$ – допустиме для даного матеріалу напруження, отримане на підставі експериментальних досліджень, з урахуванням коефіцієнту запасу.

Значення коефіцієнта запасу залежить від матеріалу, призначення споруди, характеру дії навантаження та інших умов експлуатації. Він встановлюється нормами проектування. Головними чинниками, що впливають на вибір його значення, є: відповідність механічних властивостей матеріалу конструкції й окремо випробуваних зразків; урахування конкретних умов роботи конструкції; ступень точності методу розрахунку та завдання зовнішнього навантаження; довговічність та відповідальність проектованої споруди.

Для будівельних сталей значення коефіцієнту запасу міцності приймається $n = 1,4 - 1,6$, для крихких – $n = 2,5 - 3,5$, для деревини – $n = 3,5 - 6$.

3 РОЗТЯГ І СТИСК

Центральним розтягом-стиском називається такий вид напружено-деформованого стану, коли в поперечному перерізі бруса виникає тільки подовжня (розтягуюча або стискаюча) сила, а всі інші силові фактори відсутні.

3.1 Поздовжня сила

Розглянемо деформування стержнів силою F , дія якої збігається з його віссю. На рисунку 3.1 зображені прямі стержні, закріплені з одного боку, а з іншої навантажені силою спрямованою уздовж осі.

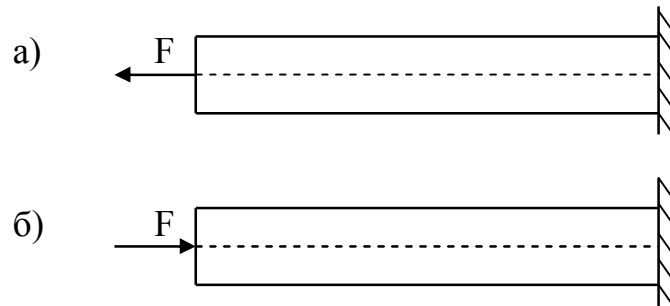


Рисунок 3.1

В усіх поперечних перерізах стержня виникають тільки поздовжні сили – що розтягують (рис. 3.1,а) чи стискають (рис. 3.1,б) його. Будемо вважати поздовжні сили, що розтягують – додатними, а що стискають – від’ємні. Поздовжні сили відповідно до загального правила визначення внутрішніх зусиль, знаходять методом перерізів. Наприклад, розглянемо стержень, наведений на рисунку 3.2,а. Визначимо поздовжню силу N_1 в перерізі I-I стержня. Для цього розглянемо статичну рівновагу лівої відсіченої частини стержня, наведеної на рисунку 3.3.

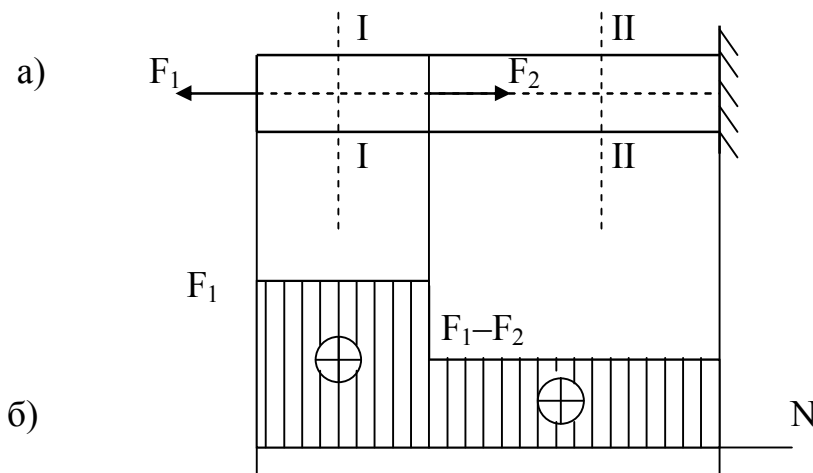


Рисунок 3.2

Напрямок внутрішніх сил показується в припущенні, що вони є додатними, тобто що розтягують. Якщо в результаті розрахунків внутрішня сила додатна, стержень розтягується, від'ємна – стискається.

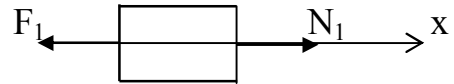


Рисунок 3.3

$$\sum F_x = -F_1 + N_1 = 0,$$

звідси:

$$N_1 = F_1.$$

Для визначення внутрішнього зусилля у перерізі II–II стержня розглянемо статичну рівновагу лівої відсіченої частини:

$$\sum F_x = -F_1 + F_2 + N_2 = 0,$$

звідси:

$$N_2 = F_1 - F_2.$$

На рисунку 3.2,б наведена епюра подовжньої сили N , побудована відповідно до загальних правил побудови епюр внутрішніх силових факторів (епюри побудовані в припущенні, що $F_1 > F_2$).

У перерізі, де уздовж осі прикладена зосереджена сила, значення подовжньої сили буде мінятися стрибкоподібно. Якщо на ділянці стержня не має зовнішніх сил, подовжня сила незмінюватиметься.

3.2 Напруження в стержнях при розтягу-стиску

При розрахунках на міцність крім внутрішніх сил, що діють у перерізі необхідно визначати і напруження в різних точках перерізу.

Подовжня сила, що виникає в поперечному перерізі стержня, є рівнодіючої внутрішніх нормальних сил, що діють на елементарних площадках, розподілених по площі перерізу. Вона зв'язана з нормальними напруженнями співвідношенням (1.4). Для визначення напружень у кожній точці необхідно знати закон розподілу напружень по перерізу стержня.

При спостереженні деформування стержня, навантаженого подовжніми силами, відзначено, що якщо нанести на його поверхню лінії, перпендикулярні осі, то ці лінії після додатка навантаження переміщуються паралельно первісному положенню, залишаються прямими і перпендикулярними осі стержня. Якщо припустити, що аналогічна картина спостерігається й усередині перерізу, то можна зробити висновок, що поперечний переріз стержня, плоский до деформування, залишається плоским і після нього, переміщуючись поступально уздовж осі стержня. Це припущення називається «гіпотезою плоских перерізів». Якщо

розглядати деформування стержнів у припущенні про однорідність матеріалу, то можна зробити висновок, що однаковим подовженням відповідають однакові напруження. Таким чином, напруження в поперечних перерізах усіх волокон рівні між собою і, отже, у всіх точках поперечного перерізу стержня.

Тому що величина напруження в поперечному перерізі не змінюється, то в співвідношенні (1.4) напруження можна винести з-під знака інтегрування:

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A, \quad (3.1)$$

відкіля (рис. 3.4):

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (3.2)$$

де A – площа поперечного перерізу стержня.

Аналогічним чином визначають напруження і при стиску, при цьому вони, так само як і подовжня сила мають від’ємну величину.

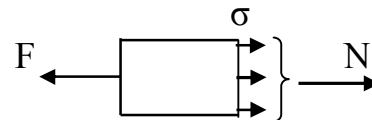


Рисунок 3.4

Таким чином, у поперечних перерізах стержня при центральному розтязі чи стиску виникають рівномірно розподілені нормальні напруження, рівні відношенню подовжньої сили до площі поперечного перерізу стержня.

При цьому необхідно мати на увазі, що співвідношення (3.2) справедливе тільки для тих перерізів, що досить вилучені від місць прикладення зосереджених навантажень. Це впливає з принципу Сен-Венана. У близь цих місць розподіл напружень носить складний характер і його опис вимагає більш точних методів досліджень.

Визначимо тепер величини напружень, що виникають у похилих перерізах стержнів при розтягу-стиску. Розглянемо стержень, на котрий діють протилежно спрямовані сили, що розтягують. Проведемо переріз I-I під кутом α до поперечного перерізу, як показано на рисунку 3.5, а, тобто поворот проти годинної стрілки від напрямку сили до нормалі n перерізу.

Розглянемо рівновагу правої частини (рис. 3.5, б). Напрямок вектора напружень буде збігатися з напрямком дії сили, що розтягує, а його результуюча буде дорівнювати F . Так як, внутрішні силові фактори рівномірно розподіляються по перерізу, то абсолютна величина вектора напружень дорівнює:

$$p = \frac{F}{A_\alpha},$$

де A_α – площа перерізу I-I.

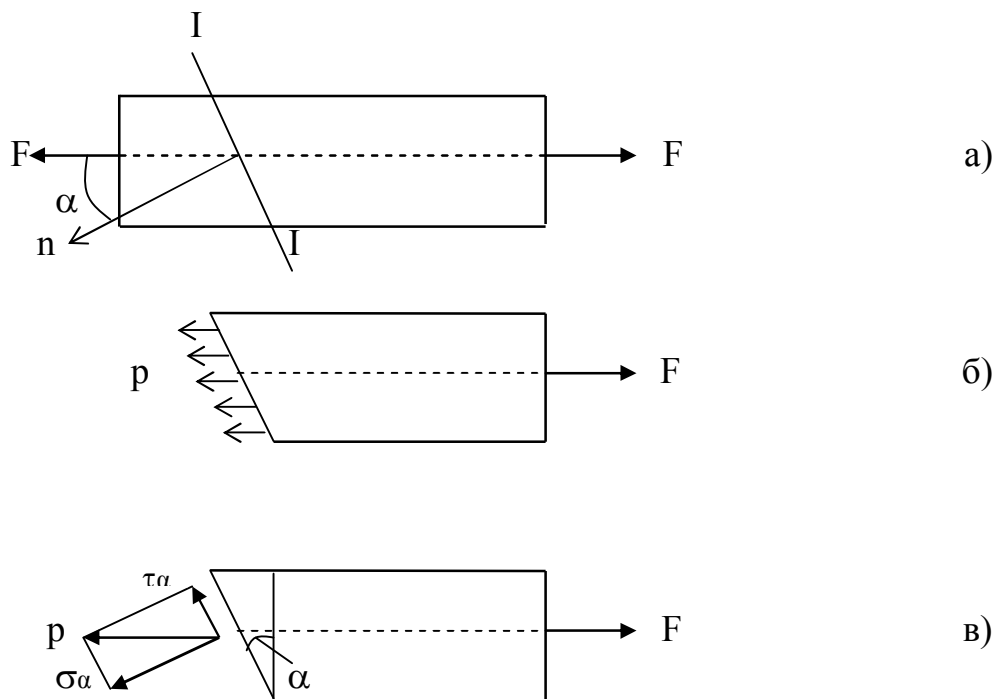


Рисунок 3.5

Нормальні напруження у поперечному перерізі знайдемо зі співвідношення (3.2):

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0},$$

де A_0 – площа поперечного перерізу.

Площа похилого перерізу

$$A_0 = \frac{A}{\cos \alpha},$$

тоді:

$$p = \frac{F}{A_\alpha} = \frac{F \cos \alpha}{A} = \sigma_0 \cos \alpha.$$

Вектор напружень являє собою рівнодіючу внутрішніх сил на елементарній площадці похилого перерізу площею ΔA_1 . Цю рівнодіючу можна розкласти на дві складові: нормальну і дотичну, як показано на рисунку 3.5,в. Ці складові є нормальними і дотичними напруженнями:

$$\sigma_\alpha = p \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha, \quad (3.3)$$

$$\tau_{\alpha} = p \sin \alpha = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.4)$$

Дотичне напруження вважається позитивним, якщо його напрямок збігається з напрямком нормалі, поверненої на 90° по годинній стрілці.

Таким чином, при розтязі стержня подовжньою силою в ньому виникають одночасно нормальні і дотичні напруження і відповідні їм лінійні і кутові деформації. Вони будуть змінюватися в залежності від кута нахилу перерізу. Визначимо максимальні значення компонентів напружень. З виразу (3.3) випливає, що максимальне значення нормального напруження досягається при $\alpha = 0^\circ$ і дорівнює: $\sigma_{\alpha \max} = \sigma_0$.

При цьому, дотичні напруження в поперечному перерізі дорівнюють нулю, тому що, згідно (3.4): $\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_0}{2} \sin 0 = 0$.

Максимальне по абсолютній величині значення дотичних напружень буде на площадках, нахилених під кутом 45° до поперечного перерізу, і дорівнюють половині максимального нормального напруження:

$$\tau_{\alpha \max} = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 90^\circ = \frac{\sigma_0}{2}. \quad (3.5)$$

Нормальні напруження в цих перетинах також, згідно (3.3), будуть дорівнюють половині максимального нормального напруження:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_0 \cos^2 \alpha = \sigma_0 \cos^2 45^\circ = \sigma_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\sigma_0}{2}. \quad (3.6)$$

В поздовжніх перерізах (при $\alpha = 90^\circ$) напруження відсутні.

3.3 Деформації і переміщення

При навантаженні тіла деформуються, тобто змінюють свою форму і розміри. Розглянемо деформацію стержня постійного поперечного перерізу (рис. 3.6) під дією розтягу силою F .

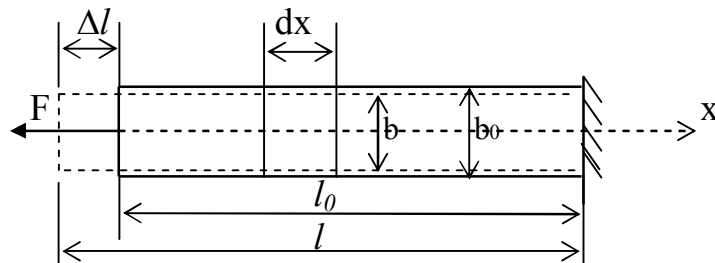


Рисунок 3.6

Під дією сили F стержень подовжиться на величину Δl , що називається абсолютним подовженням. Досвіди показують, що поки навантаження на стержень не досягає визначеної межі (напруження не досягнуть межі пропорційності, що є характеристикою матеріалу), абсолютна деформація прямо пропорційна силі, що розтягує F , довжині стержня l і обернено пропорційна площі поперечного перерізу A :

$$\Delta l = \frac{F l}{EA}, \quad (3.7)$$

де E – коефіцієнт пропорційності, що є характеристикою матеріалу.

Цей коефіцієнт називається модулем пружності чи модулем Юнга. А сама формула (3.7) зветься «закон Гука».

Це співвідношення можна перетворити в відносних величинах:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (3.8)$$

де $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ – відносна лінійна деформація.

Співвідношення (3.7) і (3.8) можна використовувати для перебування абсолютної та відносної подовжньої деформації тільки в тому випадку, якщо поперечна сила в стержні і площа перетину уздовж його постійні. При подовжнім навантаженні розподілена по довжині стержня подовжня сила змінюється. Крім того, стержень може бути виконаний таким чином, що площа його поперечного перерізу буде мінятися. У такому випадку будемо вважати, що стержень складається з нескінченної кількості елементарних ділянок довжиною dx (рис. 3.6). Тому що на таких ділянках сила і площа перерізу міняється нескінченно мало, те до них можна застосувати закон Гука (3.8) у вигляді

$$\Delta dx = \frac{N dx}{EA},$$

де N – подовжня внутрішня сила на ділянці dx .

Повна деформація стержня довжиною l буде (якщо вважати, що він виконаний з ізотропного матеріалу) сумі подовжень усіх нескінченно малих елементарних ділянок:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \int_l \frac{N dx}{A}. \quad (3.9)$$

Переміщення всіх точок перерізу при розтязі-стиску уздовж осі, відповідно до гіпотези плоских перерізів, будуть однакові і дорівнюють абсолютній зміні довжини ділянки стержня між цим перерізом і закріпленим кінцем. Це називається подовжнім переміщенням і позначається U . Переміщення вважається позитивними, якщо воно по

напрямку збігається з віссю x і негативним, якщо воно відбувається в протилежному напрямку.

Подовжнє навантаження стержнів, крім подовжніх деформацій, викликає і поперечні деформації. Співвідношення між ними є постійними для кожного матеріалу. При розтязі поперечні розміри зменшуються, при стиску – збільшуються, як показано на рис. 3.6.

Крім того, у наслідок зміни температури в елементах конструкцій з'являються *температурні деформації*.

Температура впливає лише на лінійні розміри тіла, при цьому його форма остається незмінною, тобто можна вважати, що кутові деформації відсутні.

Лінійна деформація змінюється, згідно з експериментальними даними за формулою

$$\varepsilon = \alpha \Delta t, \quad (3.10)$$

де α – коефіцієнт лінійного поширення матеріалу,

$\Delta t = t - t_0$ – зміна температури відносно тієї, при якій споруда була змонтована (t_0).

3.4 Врахування власної ваги

Власна вага конструкції є зовнішнім навантаженням, що розподілена по всьому об'єму тіла. При розрахунку деяких конструкцій власною вагою не можна зневажати.

Як враховується власна вага при розтязі-стиску стержнів, розглянемо на прикладі прямого стержня постійного поперечного перерізу великої довжини, закріпленого верхнім кінцем і навантаженого на вільному кінці розтягуючою силою F (рис. 3.7,а).

Визначимо подовжню силу в поперечному перерізі на відстані x від краю (рис. 3.7,б). Тут $G(x)$ – вага відсіченої частини, $N(x)$ – внутрішня подовжня сила, що виникає в цьому перерізі. З умови рівноваги знаходимо внутрішню силу:

$$N(x) = F + \rho Ax,$$

де ρ – об'ємна щільність матеріалу;

Ax – об'єм відсіченої частини стержня.

Це лінійна залежність подовжньої сили від координати перерізу. Мінімальне значення буде при $x = 0$: $N(0) = F$, максимальне при $x = l$: $N(l) = F + \rho Al$. Ці значення наведені на епюрі (рис. 3.7,в).

Нормальні напруження в перерізі на відстані x від краю визначимо, поділивши значення подовжньої сили на площу перерізу. Зі співвідношення (3.2) знаходимо напруження в цьому перерізі:

$$\sigma(x) = \frac{F}{A} + \rho x.$$

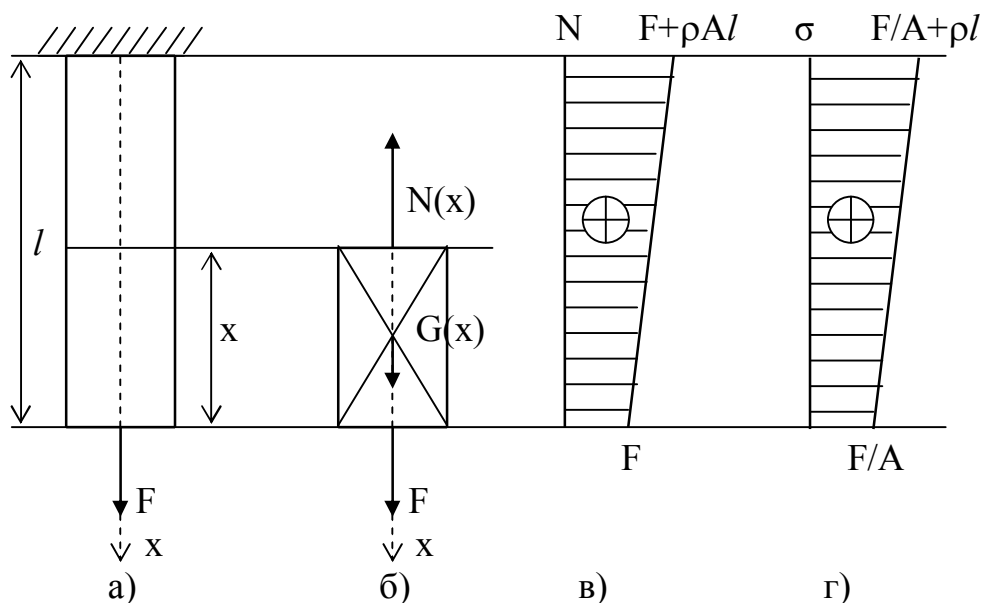


Рисунок 3.7

Це лінійна залежність нормального напруження від координати перерізу. Мінімальне значення напруження буде при $x = 0$: $\sigma(0) = \frac{F}{A}$, максимальне при $x = l$: $\sigma(l) = \frac{F}{A} + \rho l$. Ці значення наведені на епюрі (рис. 3.7,г).

Визначимо тепер деформацію цього стержня. З (3.10) знайдемо абсолютну поздовжню деформацію стержня:

$$\Delta \ell = \int_{\ell} \frac{N(x)dx}{EA} = \int_{\ell} \frac{Fdx}{EA} + \int_{\ell} \frac{\rho x dx}{E} = \frac{F\ell}{EA} + \frac{\rho \ell^2}{2E},$$

або:

$$\Delta \ell = \frac{N_{\text{cp}} \ell}{EA}, \quad (3.11)$$

де N_{cp} – середнє значення поздовжньої сили в стержні, рівне:

$$N_{\text{cp}} = F + \frac{\rho A \ell}{2}.$$

У такий само спосіб, як і власна вага конструкції, при розрахунках враховуються й інші об'ємні сили, наприклад, сили інерції.

3.5 Статично невизначені задачі

Стержні й стержневі конструкції, у яких внутрішні силові фактори від заданого навантаження можна визначити з рівнянь рівноваги, називаються статично визначними. Відповідно статично невизначеними називають стержні і конструкції, силові фактори в яких не можна визначити тільки з рівнянь рівноваги. Зусилля у стержнях статично визначних систем виникають тільки від зовнішніх навантажень. У статично невизначених стержнях і конструкціях внутрішні зусилля можуть виникати і при відсутності зовнішніх навантажень, наприклад, у результаті зсуву опор чи неточності виготовлення різних елементів.

Усі статично невизначені системи мають додаткові, чи «зайві» зв'язки у виді закріплень чи стержнів. Зайвими такі зв'язки називаються тому, що вони не є необхідними для рівноваги чи геометричної незмінюваності системи. Наявність таких зв'язків обумовлюється експлуатаційними факторами чи умовами міцності конструкцій.

Для розрахунку статично невизначених стержнів і стержневих конструкцій необхідно складати додаткові рівняння – рівняння спільності деформацій, що враховують характер деформування системи під дією зовнішніх навантажень. Різниця між числом невідомих і числом рівнянь рівноваги визначає ступінь статичної невизначеності і відповідно число додаткових рівнянь, які необхідно скласти. Складання рівнянь спільності деформацій є найбільш важливим етапом у рішенні статично невизначених задач.

Як приклад, розглянемо розрахунок статично невизначеного стержня, навантаженого подовжньої силою, наведеного на рисунку 3.8,а.

У розглянутому стержні всі навантаження діють уздовж осі стержня, тому на його закріплених кінцях будуть діяти тільки вертикальні складові реакцій R_A і R_B , як показано на рисунку. З рівняння рівноваги: $\sum F_x = 0$ одержуємо:

$$R_A + R_B = F.$$

У цьому рівнянні рівноваги дві невідомі сили, отже, задача один раз статично невизначена, і потрібно скласти одне рівняння спільності деформацій. Для цього розглянемо деформування приведенного стержня. Так як він з обох країв жорстко закріплений, те його сумарна абсолютна деформація буде дорівнювати нулю $\Delta \ell = 0$, а деформації кожної ділянки (рис. 3.8,б і рис. 3.8,в) запишемо за законом Гука (3.7):

$$\Delta \ell = \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 = \frac{R_A \ell_1}{EA} - \frac{R_B \ell_2}{EA},$$

$$\frac{R_A \ell_1}{EA} - \frac{R_B \ell_2}{EA} = 0.$$

Це буде друге рівняння. Таким чином, для визначення реакцій опор R_A і R_B у нас є два рівняння з двома невідомими, з яких знаходяться невідомі сили:

$$R_A = \frac{\ell_2}{\ell_1 + \ell_2} F; \quad R_B = \frac{\ell_1}{\ell_1 + \ell_2} F.$$

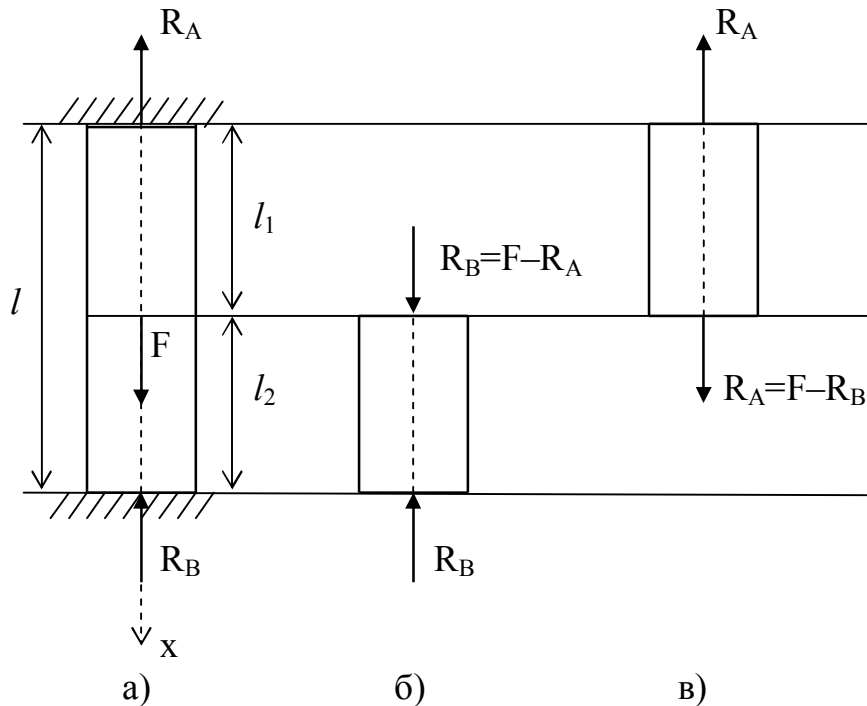


Рисунок 3.8

Розглянемо ще один приклад розв'язання статично невизначених систем. На рисунку 3.9,а наведена розрахункова схема статично невизначеної стержневої конструкції.

Запишемо умову рівноваги вузла А. Так як це система сил, що сходиться, то рівнянь рівноваги можна скласти тільки два - суми проекцій усіх сил на осі x і y :

$$\sum F_x = -N_2 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0;$$

$$\sum F_y = N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha - F = 0.$$

У цих двох рівняннях рівноваги три невідомих зусилля, отже, задача один раз статично невизначена, потрібно скласти одне рівняння спільності деформацій. Перетворимо рівняння рівноваги в такий спосіб: із першого рівняння виходить $N_2 = N_3$. З обліком чого друге рівняння можна подати у вигляді

$$N_1 + 2N_2 \cos \alpha = F.$$

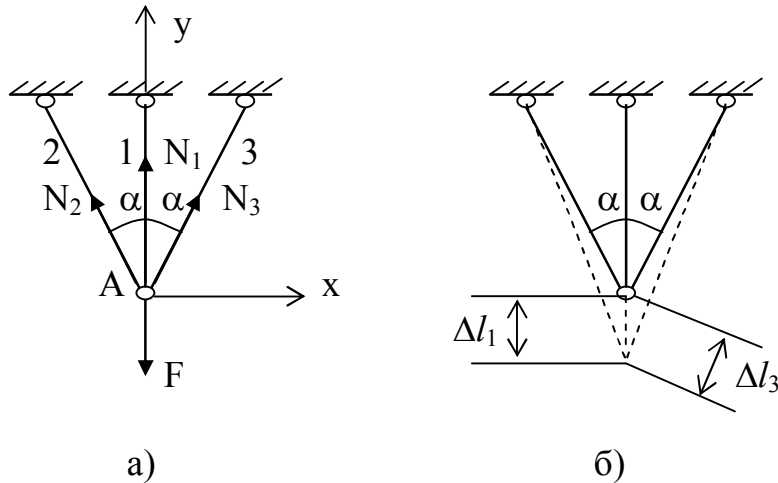


Рисунок 3.9

Таким чином, у нас маємо одне рівняння з двома невідомими. Для того щоб одержати рівняння спільності деформацій, розглянемо деформування наведеної на рисунку конструкції. Так як, система симетрична щодо осі середнього стержня, то вузол А при деформуванні опуститься по вертикалі на деяку величину (рис. 3.9,б). На таку ж величину подовжиться і середній стержень (на рисунку Δl_1), бічні стержні так само подовжаться на Δl_3 і займуть положення, показане на рисунку штриховими лініями. Оскільки абсолютні деформації стержнів малі в порівнянні з їхніми геометричними розмірами, то кути між стержнями в первісному і деформованому стані будуть відрізнятися незначно і можна одержати рівняння спільності деформацій у такий спосіб: $\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l_1 \cos \alpha$.

Запишемо деформації стержнів за законом Гука (3.7):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \ell_1}{EA_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \ell_2}{EA_2}.$$

Підставимо ці деформації у попередній вираз:

$$\frac{N_1 \ell_1}{EA_1} \cos \alpha = \frac{N_2 \ell_2}{EA_2}.$$

Таким чином, одержано рівняння спільності деформацій. Остаточно для визначення внутрішніх зусиль у стержнях маємо два рівняння з двома невідомими. Розв'язання їх дає:

$$N_1 = \frac{F \ell_2 A_1}{\ell_2 A_1 + 2 \cos^2 \alpha \ell_1 A_2};$$

$$N_2 = \frac{F \cos \alpha \ell_1 A_2}{\ell_2 A_1 + 2 \cos^2 \alpha \ell_1 A_2}.$$

4 ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

При навантаженні конструкцій істотну роль у розрахунках на міцність, жорсткість і стійкість грають геометричні розміри і форма поперечних перерізів елементів конструкцій. Розглянемо деякі геометричні характеристики перерізів, найбільш часто використовувані при рішенні задач. Геометричні характеристики перерізів простої форми можна визначити за спеціальними формулами. Крім того, характеристики профілів стандартного прокату (куточки, двотаври, швелери) наведені в спеціальних таблицях, називаних сортаментами (див. додатки).

4.1 Площа перерізу

Площа є найпростішою характеристикою поперечного перерізу. Якщо представити переріз, що складається з незліченної кількості елементарних площадок dA , тоді площа всього перерізу можна визначити співвідношенням (рис. 4.1):

$$A = \int_A dA. \quad (4.1)$$

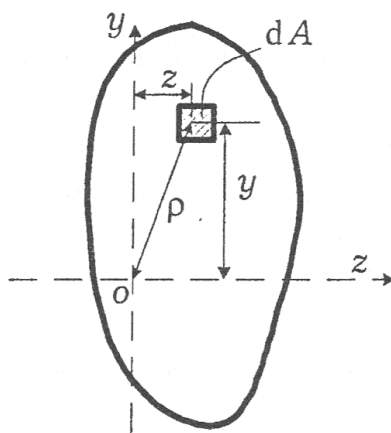


Рисунок 4.1

Властивості площі перерізу:

- 1) площа перерізу завжди додатна;
- 2) площа складеного перерізу дорівнює сумі площ фігур її складових;
- 3) площа перерізу не залежить від системи координат.

4.2 Статичні моменти перерізу

Статичним моментом перерізу відносно деякої осі називається узятя по всій його площі сума добутків елементарних площадок на відстані від цієї осі, наприклад, у площині yz :

$$\begin{aligned} S_z &= \int_A y dA; \\ S_y &= \int_A z dA, \end{aligned} \quad (4.2)$$

де y і z – відстані до осей z і y відповідно (рис. 4.1).

Для складного перерізу, що складає з n частин, вирази (4.5) можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} S_z &= \int_A y dA = \sum_{i=1}^n S_z^i; \\ S_y &= \int_A z dA = \sum_{i=1}^n S_y^i, \end{aligned} \quad (4.3)$$

де S_z^i, S_y^i – статичні моменти i -тої частини перерізу відносно осей z і y відповідно.

Таким чином, статичний момент складного перерізу щодо якої-небудь осі дорівнює сумі статичних моментів усіх частин цього перерізу відносно цієї осі.

Залежність між статичними моментами перерізу щодо двох рівнобіжних осей (розташованих на відстані a друг від друга). Вираз статичних моментів щодо цих осей можна представити у вигляді (4.2):

$$\begin{aligned} S_z &= \int_A y dA; \\ S_{z_1} &= \int_A y_1 dA, \end{aligned} \quad (4.4)$$

відкіля:

$$S_{z_1} = \int_A (y - a) dA = \int_A y dA - \int_A a dA = S_z - aA.$$

Остаточно можна записати:

$$S_{z_1} = S_z - aA. \quad (4.5)$$

Аналогічно, можна розглянути дві рівнобіжні осі y і y_1 , розташовані на відстані b одна від одної. У цьому випадку одержимо наступний вираз:

$$S_{y_1} = S_y - bA. \quad (4.6)$$

Використовуючи співвідношення (4.5) і (4.6) можна знайти положення осей z_C і осі y_C , щодо яких статичні моменти дорівнюють нулю:

$$S_z - y_C A = 0 ; S_y - z_C A = 0$$

або

$$y_C = S_z / A ; z_C = S_y / A . \quad (4.7)$$

Точка перетинання таких осей називається центром ваги перерізу. Осі, що проходять через центр ваги, називаються центральними осями. Щодо будь-якої центральної осі статичний момент дорівнює нулю.

Якщо переріз складається з декількох фігур, то

$$S_z = \sum_{i=1}^n y_C^i A_i ; S_y = \sum_{i=1}^n z_C^i A_i , \quad (4.8)$$

де y_C^i і z_C^i – відстань до відповідних осей від центра ваги перерізу;

A_i – площа i -тої частини перерізу. Однак треба пам'ятати, що при використанні формул (4.8) необхідно враховувати знаки координат центрів ваги окремих частин цього перерізу.

Статичні моменти перерізу має наступні властивості:

- 1) Крім того, він може дорівнювати нулю, якщо вісь проходить через центр ваги;
- 2) статичний момент складеного перерізу дорівнює сумі статичних моментів фігур її складових щодо відповідної осі;
- 3) статичний момент може бути як додатним, так і від'ємним. статичний момент перерізу буде мінятися при зміні системи координат.

4.3 Моменти інерції перерізу

Осьовим, чи екваторіальним моментом інерції перерізу відносно деякої осі називають взятую по всій його площі суму добутків елементарних площадок на квадрат відстані від цієї осі. Так, моменти інерції довільної фігури щодо осей zy (рис. 4.1):

$$\begin{aligned} I_z &= \int_A y^2 dA; \\ I_y &= \int_A z^2 dA, \end{aligned} \quad (4.9)$$

де y і z – відстані до осей z і y відповідно.

Осьовий момент інерції складеного перерізу щодо будь-якої осі дорівнює сумі відповідних моментів інерції всіх частин цього перерізу відносно цієї осі.

Полярним моментом інерції перерізу відносно деякої точки (як правило, начало координат – перетинання осей y і z) називають узятую по всій його площі суму добутків елементарних площадок на квадрат відстані від цієї точки:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA, \quad (4.10)$$

де ρ – відстані до відповідної точки (рис. 4.1).

Порівнюючи співвідношення (4.9) і (4.10) можна установити, що сума осьових моментів інерції будь-якого перерізу щодо двох перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції щодо точки їхнього перетинання.

Дійсно, відстань від будь-якої крапки перерізу до початку координат можна визначити як:

$$\rho^2 = y^2 + z^2.$$

Отже

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA$$

або

$$I_\rho = I_y + I_z. \quad (4.11)$$

Співвідношення (4.11) справедливе для будь-яких двох взаємно перпендикулярних осей, отже при всіх можливих поворотах осей відносно початку координат, сума осьових моментів інерції залишається величиною постійною і дорівнює полярному моменту інерції.

Відцентровим моментом інерції перерізу щодо двох взаємно перпендикулярних осей називають взятую по всій його площі суму добутків елементарних площадок на відстані до цих осей. Так, у площині yz :

$$I_{yz} = \int_A zy dA, \quad (4.12)$$

де y і z – відстані до осей z і y відповідно.

У залежності від положення осей відцентровий момент інерції може бути додатним, від'ємним, або дорівнювати нулю. Осі, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю, називаються головними осями інерції. Головні осі, що проходять через центр ваги, називаються головними центральними осями. Якщо хоча б одна з осей є віссю симетрії перерізу, то ці осі є головними.

При визначенні моментів інерції фігур, що мають просту геометричну форму, можна користатися методом безпосереднього інтегрування виразів (4.9), (4.10) і (4.12).

Осі, що проходять через центр ваги перерізу, називаються центральними осями, а моменти інерції відносно цих осей називаються центральними моментами інерції. Розглянемо взаємозв'язок моментів інерції перерізу відносно центральних осей, і деяких інших, рівнобіжних їм.

Допустимо, що для якого-небудь перерізу осі y , z є центральний, відносно якої момент інерції I_y , I_z відомі. Потрібно визначити момент інерції перерізу відносно осей y_1 , z_1 , рівнобіжних центральним, віддалених

на відстані a та b (рис. 4.2). За визначенням, моменти інерції, щодо обох осей, знаходять в такий спосіб:

$$I_y = \int_A z^2 dA; \quad I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA, \quad (4.13)$$

Відстань від усіх елементарних площадок до осей y_1 , z_1 буде: $y_1 = y + a$, $z_1 = z + b$ (рис.4.2). Із співвідношень (4.13) одержимо:

$$I_{z_1} = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA.$$

Перший доданок цього виразу є центральним моментом інерції I_z . Другий доданок дорівнює нулю, тому що інтеграл, який у нього входить, є статичним моментом перерізу відносно осі, що проходить через центр ваги (4.10). Третій доданок дорівнює добутку квадрата відстані між осями і площі перетину. Отже, можна записати:

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A. \quad (4.14)$$

Аналогічно для іншої осі:

$$I_{y_1} = I_y + b^2 A, \quad (4.15)$$

Таким саме способом можна одержати співвідношення для відцентрового моменту інерції:

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} + abA. \quad (4.16)$$

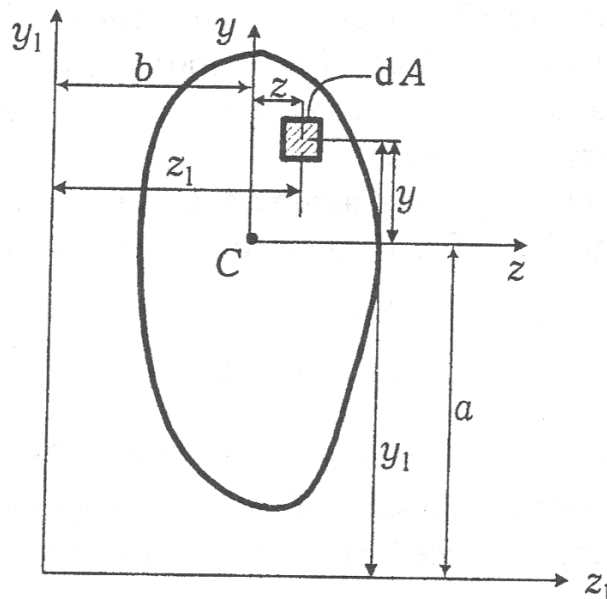


Рисунок 4.2

Розглянемо зміни моментів інерції при повороті осей (рис. 4.3).

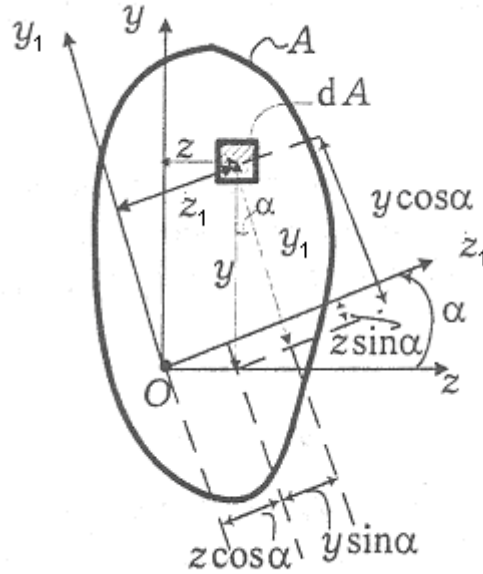


Рисунок 4.3

Ці співвідношення можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha; \\ I_{z_1} &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha; \\ I_{z_1 y_1} &= I_{yz} \cos 2\alpha - \frac{1}{2}(I_y - I_z) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Вони дозволяють установити, як змінюються величини моментів інерції перерізу при повороті осей на деякий кут α . Для деяких значень цього кута осьові моменти інерції будуть досягати максимуму чи мінімуму.

Зі співвідношення (4.11) випливає, що коли осьовий момент інерції відносно деякої осі є максимальним, то осьовий момент інерції щодо перпендикулярної осі є мінімальним, тому що сума осьових моментів щодо двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції.

Для знаходження такого кута повороту осей, при якому значення осьових моментів інерції будуть екстремальними, досліджують функцію I_{z_1} на екстремум по α . Тоді щодо кута α_0 :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}. \quad (4.20)$$

Отримане рівняння (4.20) значення кута α_0 визначає положення головних осей. Якщо кут α додатний, то систему координат треба повернути проти годинникової стрілки, щоб вона співпала з головними осями, якщо від'ємний – по годинникової стрілці.

Для визначення головних моментів інерції I_{\max} і I_{\min} розглянемо вираз (4.20), і, використовуючи тригонометричні перетворення, одержимо:

$$\begin{aligned} I_u = I_{\max} &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2} \right); \\ I_v = I_{\min} &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2} \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

де u і v – головні центральні осі, щодо яких момент інерції перерізу максимальний і мінімальний відповідно.

Головні осі інерції можна одержати для будь-якої точки, взятої у площині перерізу. Але у практичних розрахунках використовуються тільки осі, що проходять через центр ваги перерізу. Такі осі називаються головними центральними осями інерції, а моменти відносно їх головними центральними моментами інерції.

Моменти інерції перерізу мають такі властивості:

- 1) осьові й полярні моменти інерції перерізів завжди додатні, відцентровий момент може бути як додатним, від'ємним, а відносно головних осей він дорівнює нулю;
- 2) моменти інерції складеного перерізу дорівнюють сумі моментів інерції фігур його складових;
- 3) осьові, полярні і відцентрові моменти інерції залежать від системи координат.

5 ЗГИН БАЛОК

Згин балок, пов'язаний з виникненням у поперечних перерізах згинальних моментів – моментів, щодо осі, розташованої у площині поперечного перерізу, що проходить через його центр ваги. Ці моменти діють у площині, перпендикулярній поперечному перерізу балки.

У залежності від напрямку згинаючого моменту розрізняють прямий і косий згини. Прямий згин виникає у випадку, коли дії згинальних навантажень збігається з однією із головних осей інерції. Тоді і згинальний момент у поперечному перерізі діє в площині, що проходить через одну з головних центральних осей інерції. На рисунку 5.1 показаний випадок навантаження бруса, коли зовнішні сили розташовані у площині ux , що збігається з головною віссю перерізу u . Деформації згину в цьому випадку відбуватися в площині дії моменту.

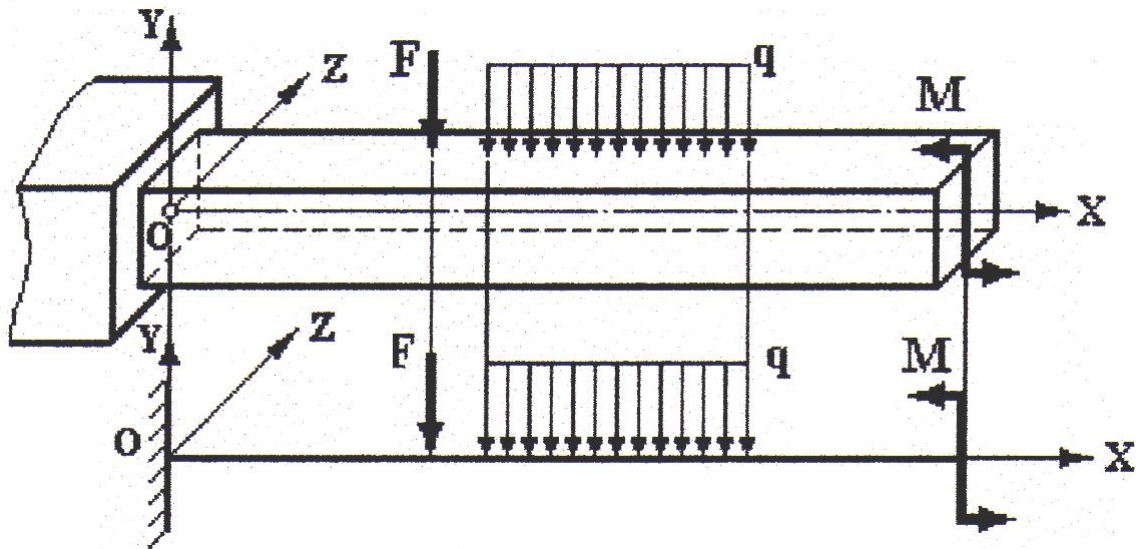


Рисунок 5.1

Якщо площина дії згинальних моментів не збігається з жодною з головних осей, то таке деформування називається косим згином. У таких випадках усі зовнішні навантаження (сили і моменти) розкладають на дві складові, таким чином косий згин розкладається на два прямих поперечних згину.

Якщо при згині в поперечному перерізі балки діє тільки згинальний момент, то таке деформування називається чистий згин. Коли крім згинаючого моменту в поперечному перерізі діє ще і поперечна сила, тоді такий вид деформування називається поперечний згин. Коли усі поперечні перерізи деякої ділянки балки знаходяться в стані чистого згину, тоді вся ця ділянка перебуває у стані чистого згину.

5.1 Внутрішні зусилля при згині

Зовнішні навантаження, що діють на елементи конструкції, викликають появу в ньому внутрішніх зусиль. При дії на брус зовнішніх навантажень, розташованих в одній площині (наприклад, xy , якщо вісь x збігається з віссю бруса), що проходить через вісь бруса, у кожному поперечному перерізі виникають внутрішні зусилля, що діють у тій же площині: подовжня сила, поперечна сила і згинальний момент.

Коли в перерізі виникає подовжня сила, тоді необхідно окремо розглядати дві задачі: розтяг-стиск і згин бруса, а потім одержати суперпозицію двох рішень. У такий само спосіб необхідно розглядати розв'язання двох окремих задач і у випадку, коли зовнішні сили діють у площині, що не містить у собі головні осі.

Надалі ми будемо розглядати задачу прямого згину. У цьому випадку в площині перерізу балки будуть наступні внутрішні зусилля: поперечна сила, що діє в площині перерізу ($Q = Q_y$) і проходить через його центр ваги і згинальний момент, перпендикулярний до поперечного перерізу $M = M_z$, де z – вісь, щодо якої діє момент.

Згинальний момент M в поперечному перерізі бруса (рис. 5.2) вважається додатним, якщо на лівому торці правої частини балки він спрямований по годинниковій стрілці, а на правому торці лівої частини – проти годинниковій стрілки (або можна казати, що додатний момент є такий, котрий згинає балку нагору), як показано на рисунку 5.2. При додатному згинальному моменті верхні волокна будуть стискуватися, нижні – розтягуватися.

При від'ємному згинальному моменті верхні волокна розтягуються, нижні – стискаються.

Поперечна сила Q позитивна, коли на правому торці лівої частини бруса вона спрямована зверху вниз, на лівому торці правої частини – знизу догори, як показано на рисунку. Додатна поперечна сила прагне завжди обернути відсічену частину балки проти годинниковій стрілки відносно центру ваги перерізу.

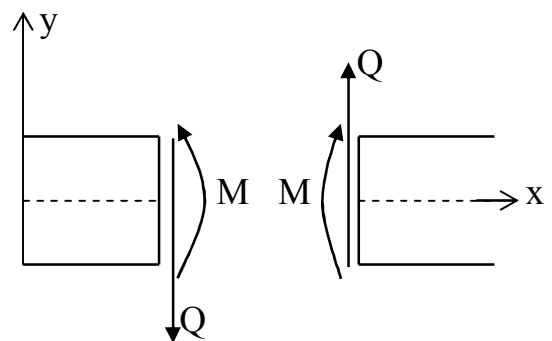


Рисунок 5.2

Згинальний момент і поперечна сила, що діють у перерізі, зв'язані з напруженнями, що виникають у ньому (1.4):

$$\begin{aligned} Q &= \int_A \tau_y dA; \\ M &= \int_A \sigma_z y dA. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Для того щоб визначити проекції на будь-яку вісь внутрішніх силових факторів у перерізі, необхідно, як показано в п. 1.2, скористатися методом перерізів.

Проаналізуємо внутрішні силові фактори в поперечному перерізі балки при прямому поперечному згині, сформулюємо основні правила визначення сил і моментів при згині.

Розглянемо консольний брус із затисненим правим торцем та навантажений силами F_1 і F_2 (рис. 5.3). Нехай $F_1 > F_2$.

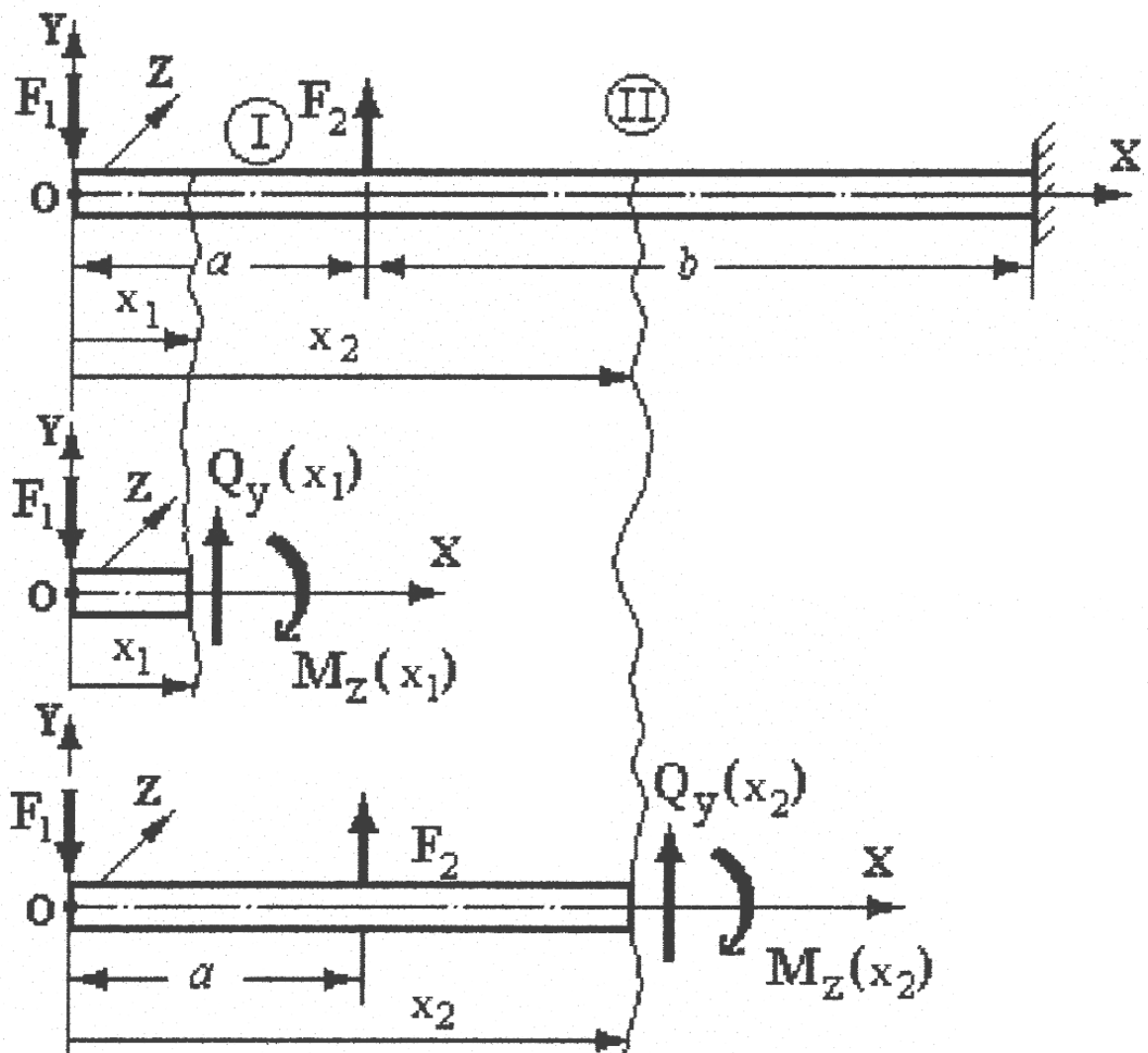


Рисунок 5.3

Згідно з методом виберемо переріз на першій і другій ділянках, покажемо відсічені частини, замінимо дію відкинутих частин на залишену внутрішніми силовими факторами Q_y і M_x . З умов статки (суми проекцій сил на вісь y і суми моментів щодо осі x , що проходить через центр ваги розглянутого перерізу) визначимо їхні значення:

1-а ділянка.

$$\sum F_i = -F_1 + Q_y(x_1) = 0, \text{ звідки}$$

$$Q_y(x_1) = F_1;$$

$$\sum M_i = F_1 x_1 - M_z(x_1) = 0, \text{ звідки}$$

$$M_z(x_1) = F_1 x_1.$$

2-а ділянка.

$$\sum F_i = -F_1 + F_2 + Q_y(x_2) = 0, \text{ звідки}$$

$$Q_y(x_2) = F_1 - F_2;$$

$$\sum M_i = F_1 x_2 - F_2(x_2 - a) - M_z(x_2) = 0, \text{ звідки } M_z(x_2) = F_1 x_2 - F_2(x_2 - a);$$

З цього методу випливає, що для визначення внутрішніх зусиль у перерізі, необхідно просумувати усі зовнішні сили та моменти, що діють на одну з частин, розташованих праворуч чи ліворуч від перерізу.

Використовуючи такі уявлення, сформулюємо наступні правила для визначення поперечної сили й згинального моменту при згині.

Поперечна сила $Q = Q_y(x)$ за величиною і знаком дорівнює сумі проекцій усіх зовнішніх сил, прикладених до лівої частини балки, на головну центральну вісь у площині згину, проведenu в розглянутому перерізі, чи сумі проекцій на ту ж вісь, взяту зі зворотним знаком, усіх зовнішніх сил, прикладених до правої частини балки. При цьому проекції вважаються позитивними, якщо сили спрямовані по осі (догори):

$$Q = \sum_{\text{лев}} F_y = - \sum_{\text{прав}} F_y. \quad (5.2)$$

Правило знаків. Поперечна сила вважається додатною, якщо обертає розглянуту відсічену частину балки щодо центра ваги перерізу за годинниковою стрілкою, і від'ємною – якщо проти годинникової стрілки (рис. 5.4).

Згинальний момент $M = M_z(x)$ щодо головної центральної осі z поперечного перерізу за величиною і знаком дорівнює сумі моментів щодо цієї осі від усіх зовнішніх навантажень, прикладених до лівої частини балки, чи сумі моментів щодо тієї ж осі, взятої зі зворотним знаком, усіх моментів від зовнішніх навантажень, прикладених до правої частини. Моменти від зовнішніх навантажень додатними, якщо вони діють проти годинникової стрілки:

$$M = - \sum_{\text{лев}} M_z = \sum_{\text{прав}} M_z. \quad (5.3)$$

Правило знаків. Згинальний момент вважається додатним, якщо відсічена частина згинається опуклістю вниз (стиснуте волокно вгорі, розтягнуте вниз), та від'ємним – якщо навпаки. Таким чином, епюра згинальних моментів будується з боку розтягнутого волокна (рис. 5.4).

При визначенні внутрішніх зусиль моменти і проекції сил необхідно визначати від усіх зовнішніх сил, прикладених до балки по одну сторону від розглянутого поперечного перерізу. У число цих сил треба включати і реакції опор, що виникають у закріплених точках перерізів. Ці реакції

знаходяться з рівнянь рівноваги всієї балки з урахуванням усіх діючих на неї навантажень.

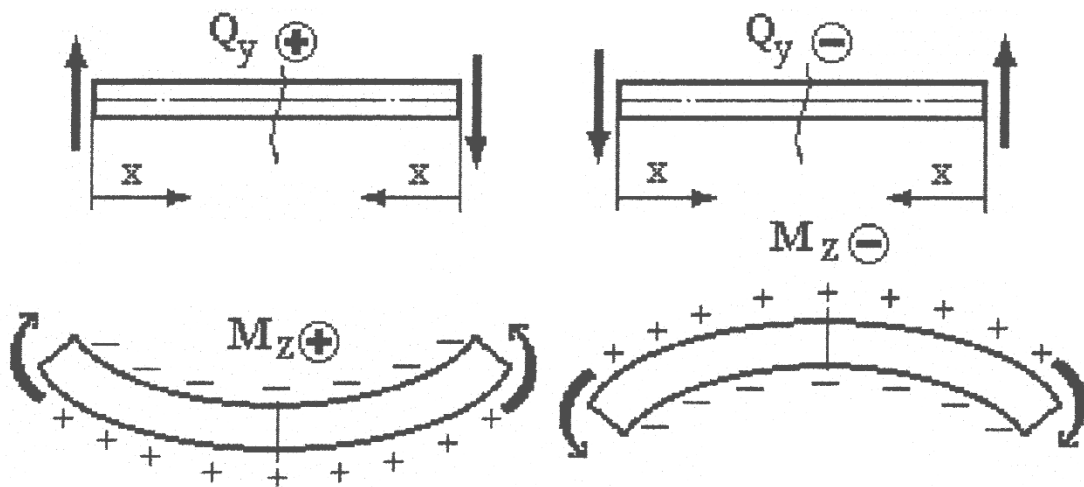


Рисунок 5.4

Балки, в яких загальне число реакцій більше числа рівнянь рівноваги, називаються статично невизначеними. Для таких балок реакції опор визначаються зі спільного розв'язання рівнянь рівноваги і рівнянь спільності деформацій, що описують умови деформування балок.

Величина внутрішніх зусиль у перерізах залежить від того, які і яким чином, прикладені навантаження, що діють на балку.

Для того щоб визначити ці залежності між зовнішніми навантаженнями і внутрішніми зусиллями, розглянемо балку, що знаходиться під дією деякої системи сил.

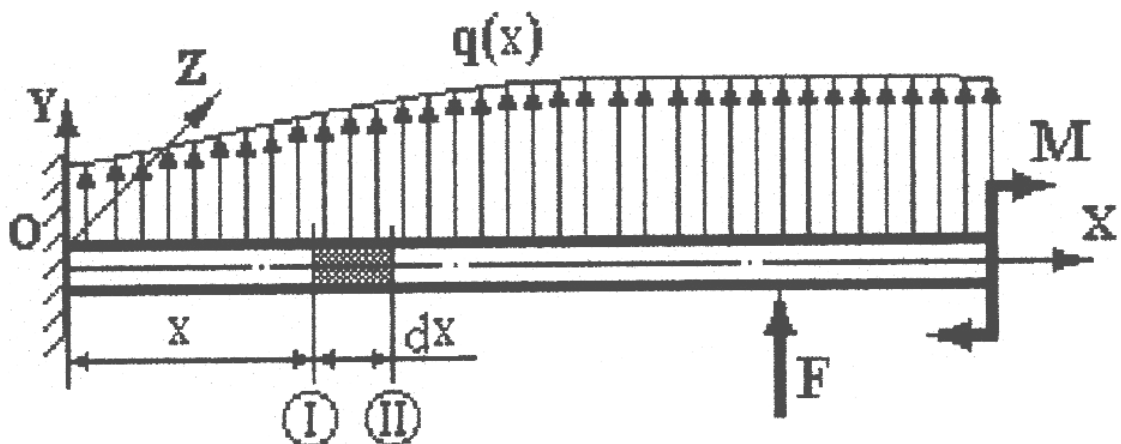


Рисунок 5.5

Вимелемо елементарну ділянку балки довжиною dx (рис. 5.6), на яку діє тільки розподілене навантаження інтенсивністю q , що діє перпендикулярно до осі балки, й внутрішні зусилля. Розглянемо її рівновагу, на лівий торець цього елемента діють деякі внутрішні зусилля M і Q , на правий $M+dM$ і $Q+dQ$, де dM і dQ – збільшення величин внутрішніх силових факторів на ділянці dx .

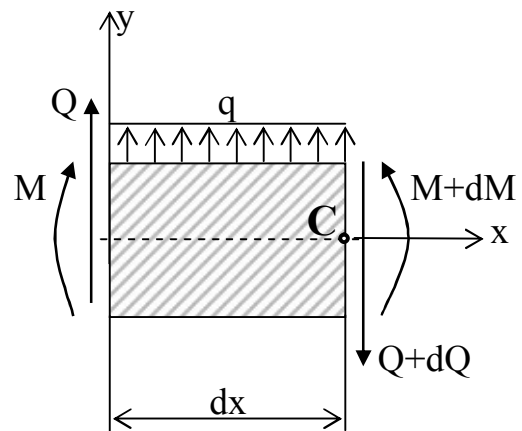


Рисунок 5.6

Цей елемент, як і вся балка в цілому, повинен знаходитися в рівновазі:

$$\sum F_y = Q + qdx - (Q + dQ) = 0 \Rightarrow qdx - dQ = 0,$$

відкіля:

$$\frac{dQ}{dx} = q. \quad (5.4)$$

Таким чином, похідна від поперечної сили по довжині дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження.

Тепер складемо рівняння рівноваги елемента щодо центра ваги перерізу (точка C) правого торця елемента:

$$\sum M_C = M + Qdx + qdx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0,$$

або:

$$Qdx + qdx \frac{dx}{2} - dM = 0.$$

Так як доданок $qdx \frac{dx}{2}$ має другий порядок мализни, на відміну від інших додатків, що мають перший порядок мализни, ним можна знехтувати: $Qdx - dM = 0$, або:

$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (5.5)$$

Таким чином, похідна від згинаючого моменту за довжиною дорівнює поперечній силі.

Підставляючи вираз (5.5) у залежність (5.4) одержуємо зв'язок другої похідної від згинального моменту за довжиною і інтенсивності розподіленого навантаження:

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}. \quad (5.6)$$

Співвідношення (5.4)–(5.6), справедливі в тому випадку, якщо вісь абсцис спрямована в праву сторону.

При розрахунках балок на згин необхідно знати розподіл внутрішніх зусиль у поперечних перерізах по її довжині. Цей розподіл прийнятий показувати у виді епюр. Епюри при згині будуються за загальними правилами аналогічно епюрам подовжньої сили при розтягу–стиску. Кожна ордината епюри M чи Q являє собою величину згинаючого моменту чи поперечної сили у відповідному перерізі балки. При побудові епюри сил прийнято додатні значення сили відкладати догори від осі епюри, а від'ємні – відповідно донизу. При побудові епюри згинальних моментів, навпаки – додатні значення відкладаються вниз, від'ємні – нагору.

Вид епюр поперечної сили і згинаючого моменту залежить від виду зовнішнього навантаження. Аналізуючи залежності (5.2)–(5.6) можна зробити наступні висновки, які можна використовувати при побудові й перевірці епюр:

1. У перерізі, до якого до балки прикладена зосереджена сила, значення поперечної сили Q зміниться стрибкоподібно на величину прикладеної сили. Коли зосереджена сила спрямована нагору, на епюрі Q є скачок догори, а коли сила спрямована вниз – скачок униз.

2. Якщо до балки прикладений зосереджений момент, значення згинаючого моменту M зміниться стрибкоподібно на величину прикладеного моменту. Коли зосереджений момент спрямований проти годинникової стрілки, на епюрі M має скачок догори, а коли момент спрямований за годинникової стрілки – скачок униз.

3. Тангенс кута між дотичною до лінії, що обмежує епюру моментів M і віссю епюри, дорівнює поперечній силі Q .

4. На ділянках балки, на яких поперечна сила додатна, згинальний момент зростає, а де вона від'ємна – убуває.

5. Чим більше по абсолютній величині значення поперечної сили, тим крутіше лінія, що обмежує епюру згинальних моментів.

6. На ділянці балки, де поперечна сила має постійне значення, епюра моментів обмежена прямою лінією.

7. Якщо в деякому перерізі балки епюра поперечної сили не має стрибка, то лінії, що обмежують епюру моментів із двох сторін, сполучаються без перелому, тобто мають у точці сполучення загальну дотичну.

8. Якщо в деякому перерізі балки епюра поперечної сили має стрибок, то лінії, що обмежують епюру моментів із двох сторін мають точку перелому, тобто не мають у точці сполучення загальної дотичної.

9. На ділянках, де діє зовнішнє розподілене навантаження, згинальний момент досягає максимуму чи мінімуму в перерізах балки, де поперечна сила дорівнює нулю (дотична до лінії, що обмежує епюру моменту, при цьому в розглянутому перерізі буде рівнобіжна осі епюри).

10. На ділянках, де діє розподілене навантаження, поперечні сили змінюються за довжиною балки по прямій, а епюри моментів обмежені кривою лінією.

11. На ділянках, де розподілене навантаження відсутнє, поперечні сили постійні, а епюри моментів змінюються за лінійним законом.

5.2 Напруження і деформації при згині

Розглянемо нормальні напруження, що виникають при чистому плоскому згині в поперечному перерізі балки. З усіх внутрішніх зусиль, що можуть виникати в перерізах, ненульовим буде тільки згинальний момент, щодо осі, перпендикулярної осі балки. Цей момент буде зв'язаний з нормальними напруженнями співвідношенням (5.1).

Розглянемо, як деформується балка в умовах чистого згину. Досвіди дослідження деформацій при згині балок, показують, що:

- 1) подовжні лінії викривляються по дузі кола;
- 2) поперечні лінії залишаються прямими і при цьому не змінюють свою довжину;
- 3) контури поперечних перерізів балки залишаються плоскими;
- 4) лінії контурів перерізів скрізь перетинаються під прямим кутом.

На підставі цих спостережень, можна зробити висновок, що при чистому згині поперечні перерізи балки залишаються плоскими і повертаються так, що залишаються нормальними до вигнутої осі балки (рис.5.7). Таким чином, при згині, як і при розтязі-стиску, справедлива гіпотеза плоских перерізів, що має назву „гіпотези Бернуллі”.

Дослідження деформування балок в умовах згину показує, що при навантаженні балки від'ємним згинальними моментами верхні волокна балки подовжуються, нижні – коротшають, додатнім – навпаки. При цьому можна знайти волокна, довжина яких залишається незмінною. Сукупність таких волокон утворить деякий шар, що називається нейтральним. Кожен поперечний переріз перетинається з нейтральним шаром по прямій, що називається нейтральною лінією перерізу.

При плоскому згині нейтральний шар виявляється перпендикулярним до силової площини, отже, нейтральна лінія перпендикулярна до силової лінії у перерізі, при цьому вона перетинає

центр ваги перерізу. Таким чином, нейтральна лінія збігається з головною центральною віссю перерізу і називається нейтральною віссю.

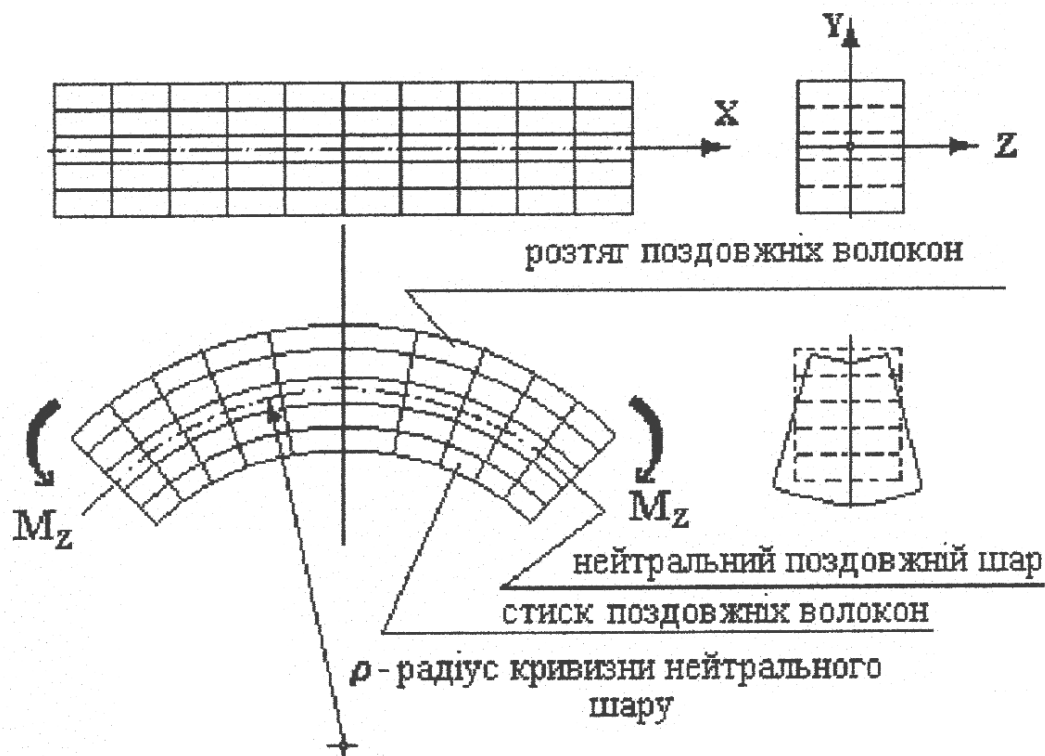


Рисунок 5.7

Використовуємо гіпотезу плоских перерізів для визначення нормальних напружень при чистому згині (рис.5.8). Для цього виділимо елемент, обмежений двома поперечними перерізами, на відстані dx (рис. 5.9,а). Торцеві перерізи при деформуванні залишаються плоскими і при цьому повернуться на деякий кут $d\varphi$ (рис. 5.9,б).

Прямолінійний відрізок нейтрального шару A_0B_0 перетворюється в дугу A_1B_1 з радіусом ρ , при цьому він не змінить своєї довжини. Волокно AB , що знаходиться на відстані y від нейтрального шару перейде в дугу A_2B_2 радіуса $\rho+y$, при цьому він змінить свою довжину. Відносне подовження цього волокна буде

$$\varepsilon = \frac{A_2B_2 - AB}{AB}.$$

З урахуванням того, що

$$\begin{aligned} A_2B_2 &= (\rho + y)d\varphi; \\ AB &= A_0B_0 = dx = \rho d\varphi, \end{aligned}$$

і скоротивши на $d\varphi$, одержуємо вираз для знаходження відносної деформації волокна на відстані y від нейтрального шару:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}.$$

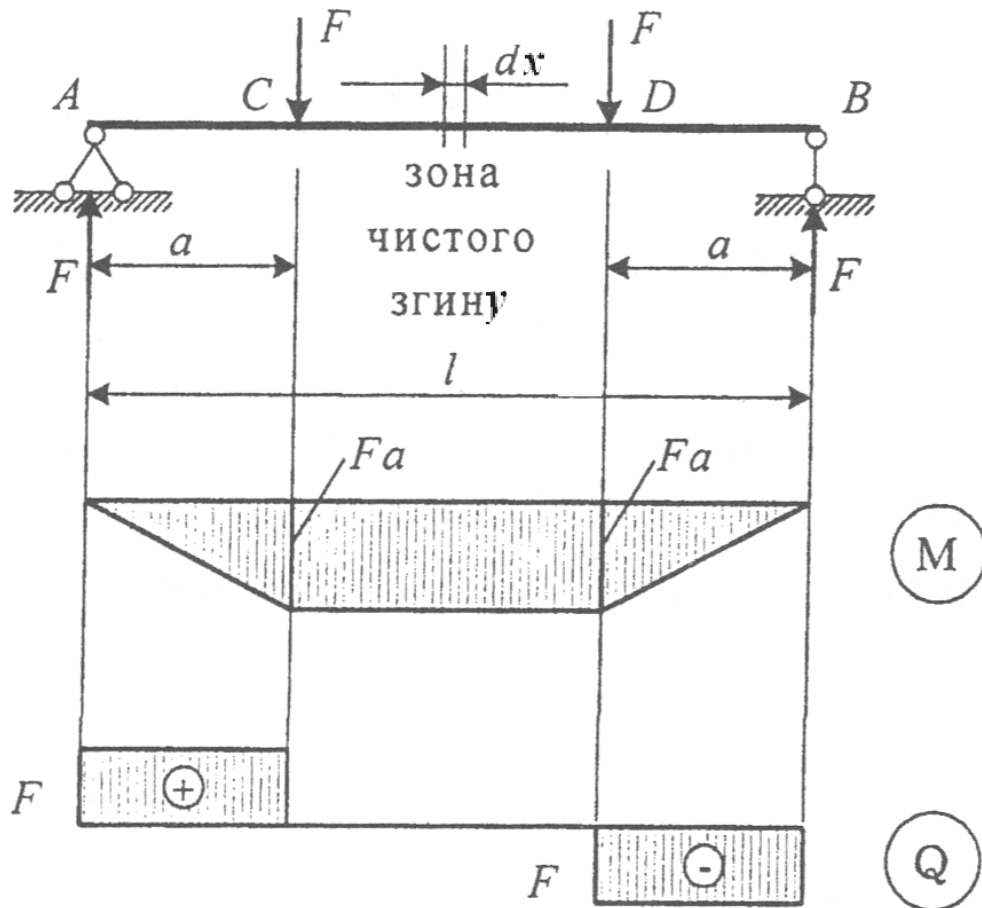


Рисунок 5.8

Тепер розглянемо, в якому напруженому стані знаходиться досліджуване волокно АВ. У поперечних перерізах немає дотичних напружень, тому що при чистому згині відсутня поперечна сила. З урахуванням парності дотичних напружень їх немає й у перерізах, рівнобіжних осі балки. Нормальні напруження в перерізах, рівнобіжних осі балки, так само дорівнюють нулю, тому що, відповідно до гіпотези плоских перерізів, лінійні деформації у перпендикулярному осі напрямку відсутні. Таким чином, волокно АВ знаходиться в лінійному напруженому стані (розтяг-стиск). У цьому випадку напруження і відносні деформації зв'язані між собою за законом Гука (3.9): $\sigma = \varepsilon E$. У результаті чого, замінивши в цьому співвідношенні відносну деформацію, відповідно до отриманої залежності, маємо:

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y. \quad (5.7)$$

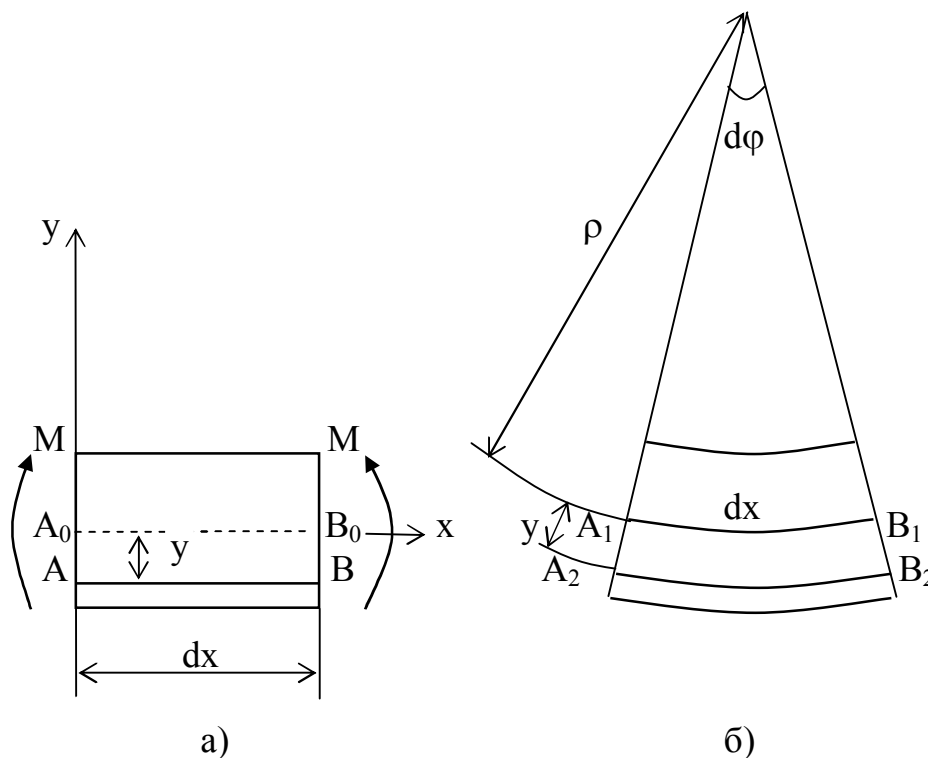


Рисунок 5.9

Підставляючи отриману залежність (5.7) у друге рівняння співвідношення (5.1) і з огляду на те, що модуль пружності й кривина нейтральної осі постійні в розглянутому перерізі і їх можна винести за знак інтеграла, одержуємо:

$$\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M.$$

Так як відповідно до виразу (4.9) інтеграл $\int_A y^2 dA$ являє собою момент інерції перерізу щодо нейтральної осі (осі z) попереднє співвідношення можна представити у вигляді:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}. \quad (5.8)$$

Отриманий вираз зв'язує між собою кривину осі балки і згинальний момент, що діє в перерізі. Аналізуючи (5.8), можна зробити висновок, якщо балка виготовлена з однорідного матеріалу, і має постійний поперечний переріз, то при чистому згині вісь її викривляється по дузі

кола. При цьому кривина і згинальний момент прямо пропорційні, а величина EI_z називається жорсткістю при згині.

Підставимо (5.8) в (5.7) і одержимо:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z}. \quad (5.9)$$

Ця формула дозволяє знаходити нормальні напруження при чистому згині в будь-якій точці перерізу. У випадку прямого згину, коли деформування відбувається у площині головних центральних осей, індекс z в осьовому моменті інерції перерізу часто опускають.

Отримане співвідношення між нормальними напруженнями і згинальними моментами дозволяє зробити висновок, що яку б форму і розміри не мав поперечний переріз, напруження в точках, що знаходяться на нейтральній осі ($y = 0$), дорівнюють нулю. Величина нормального напруження лінійно зростає в міру віддалення від нейтральної осі. При цьому напруження не змінюються по ширині перерізу. Отже, максимальна і мінімальна величина нормальних напружень для будь-яких перерізів, що мають горизонтальну вісь симетрії, буде збігатися з точністю до знака.

У розрахунках на міцність мають значення найбільші за абсолютною величиною значення напружень, які виникають у волокнах, найбільш віддалених від нейтральної осі:

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot y_{\max}}{I},$$

де y_{\max} - відстань від нейтральної осі до найбільш віддалених точок перерізу.

З урахуванням (2.8), одержуємо умову міцності при чистому згині:

$$W_z \geq \frac{M}{[\sigma]},$$

де $[\sigma]$ – допустимі напруження;

W_z – осьовий момент опору при згині щодо головної центральної осі – нейтральної осі при згині, який визначається відносно головних центральних осей і дорівнює відношенню осьового моменту інерції до відстані від цієї осі до максимально віддаленої від точки перерізу:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}},$$

У випадку прямого згину індекс z в моменті опору перерізу часто опускають.

З урахуванням цього умову міцності для балки при згині можна записати у вигляді

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}, \quad (5.10)$$

де M_{\max} – максимальний згинальний момент, що виникає в балці під дією зовнішніх навантажень.

Усі формули для визначення відносних деформацій і нормальних напружень, наведені вище (5.7)–(5.10) отримані для чистого прямого згину балок. Практика показує, що при поперечному згині балок, коли в перерізі крім згинаючого моменту діє ще і поперечна сила, можна користатися формулами, отриманими для чистого згину. При цьому погрішність виявляється несуттєвою. Крім того, напруження, що обумовлені наявністю поперечної сили, можна досліджувати окремо.

При поперечному згині, крім нормальних напружень у поперечних перерізах балки виникають також і дотичні напруження. Якщо поперечний згин є *прямим*, то згинальний момент діє в площині, що збігається з однієї з головних площин балки. Поперечна сила при цьому, як правило, рівнобіжна площині дії згинаючого моменту, і проходить через центр ваги цього перерізу.

Поперечна сила зв'язана з дотичними напруженнями, що виникають у цьому перерізі, і визначається співвідношенням (1.4). У цьому випадку, дотичні напруження в поперечному перерізі балки при прямому згині (коли вважати, що всі зовнішні навантаження рівнобіжні осі y) мають один напрямок з поперечною силою і їх прийнято позначати без індексу, що позначає напрямок. Передбачається, що дотичні напруження по всій ширині перерізу в горизонтальному напрямку, рівнобіжному осі z , однакові, а їхня величина змінюється тільки за висотою перерізу і дорівнює, згідно з формулою Журавського [1–2; 4–5]:

$$\tau = \frac{QS^*}{Ib}. \quad (5.11)$$

де Q – поперечна сила, що виникає в розглянутому поперечному перерізі балки;

S^* – статичний момент щодо нейтральної осі частини перерізу, розташованого вище або нижче лінії, що проходить через точку, у якій визначаються дотичні напруження;

I – момент інерції всього поперечного перерізу щодо нейтральної осі;

b – ширина поперечного перерізу на тому рівні, де визначаються напруження.

Приведена формула Журавського (5.11), отримана їм у припущенні, що переріз являє собою вузький прямокутник (при $\frac{h}{b} > 2$, де h – висота прямокутника, а b – його ширина), однак, як показує практика, її можна використовувати для будь-яких перерізів, крім тих місць у перерізі, де є

вузькі прямокутники, розташовані перпендикулярно напрямку дії поперечної сили. Знак дотичних напружень у перерізі збігається зі знаком поперечної сили.

Максимальні дотичні напруження відповідно до отриманого співвідношення (5.11) будуть у точках, розташованих на нейтральній осі балки. Це твердження справедливе для всіх поперечних перерізів, крім, тих, в яких у районі нейтральної осі спостерігається різке збільшення ширини. Таким чином вираз для максимальних дотичних напружень має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{I} \left(\frac{S^*}{b} \right)_{\max}.$$

З урахуванням (2.9), одержуємо умову міцності при прямому поперечному згині балок по дотичних напруженнях для балки, в якій виникає поперечна сила Q :

$$\frac{Q_{\max}}{I} \left(\frac{S^*}{b} \right)_{\max} \leq [\tau], \quad (5.12)$$

де $[\tau]$ – допустимі дотичні напруження;

Q_{\max} – максимальне значення поперечної сили, що діє в поперечних перерізах балки.

Формули для визначення дотичних напружень і підбору перерізу (5.11) і (5.12) отримані для прямого поперечного згину балок.

У точках поперечного перерізу балки, найбільш віддалених від нейтральної осі, дотичні напруження дорівнюють нулю. У цих точках відповідно нормальні напруження досягають максимального значення (5.9). А в точках, де нормальні напруження дорівнюють нулю (5.9), відповідно дотичні напруження досягають максимальної величини (5.11). Отже, перевірка на міцність по нормальних і дотичних напруженнях при згині балок варто проводити окремо. При цьому в переважній більшості задач нормальні напруження істотно вище дотичних, тому основною формулою для розрахунків балок на міцність буде співвідношення (5.10).

5.3 Внутрішні зусилля в рамах

Стержнева система, елементи котрої (стійки – вертикальні і ригелі – горизонтальні) у всіх або деяких вузлах жорстко сполучені між собою, *називаються рамою*. Вісь таких систем являє собою ламану лінію. Якщо ламана лінія рами лежить в одній площині. То її називають плоскою. Будемо розглядати плоскі рами, навантажені в її площині. Тоді внутрішні зусилля, які виникають в якому-небудь перерізі, можна звести до трьох величин: згинального моменту M , поперечної сили Q і подовжніх зусиль N .

Визначення поперечної сили в даному випадку розширюється, тому що у ламаного бруса сили не завжди перпендикулярні до осі. Отже поперечною силою будемо вважати проекцію всіх сил, прикладених до лівої або правої частини бруса, на нормаль до осі бруса в тому перерізі, для якого визначається поперечна сила.

Поздовжньою силою будемо вважати проекцію всіх сил, прикладених до лівої або правої частини бруса, на дотичну до його осі.

Поняття “зліва”, “справа”, “донизу” й “вверх” при розгляді вертикальних елементів системи залежить від спостерігача. В опорі матеріалів, як правило, прийнято спостерігати з середини контуру, який утворює рама. Тоді правило знаків для згинальних моментів і поперечних сил залишається таким же як і при згині балок (рис. 5.1).

Поздовжня сила, як і при розтягу-стиску стержнів, вважається додатною, якщо вона викликає розтяг стержня у перерізі, що розглядається, і від’ємною, якщо вона викликає стиск.

Крім перевірок з використанням диференціальних залежностей, при згині рам, необхідно ще перевірити рівновагу вузлів рами, тобто частин рами, отриманих проведенням перерізів, розташованих на нескінченно малих відстанях від точці з’єднання стержнів і окремих її частин.

6 ЗСУВ І КРУЧЕННЯ

6.1 Чистий зсув

У розрахунках деяких елементів конструкцій зустрічається вид навантаження, коли в перерізах діють тільки дотичні напруження. Такий напружений стан називається *чистим зсувом*. Він характеризується зміною спочатку прямих кутів – кутовою деформацією чи відносним зсувом.

Кутові деформації є наслідком дотичних напружень і зв'язані з ними функціональними залежностями. У межах пружності між відносним зсувом і дотичними напруженнями (рис. 6.1), що діють по гранях елемента, існує лінійна залежність. Ця залежність називається законом Гука при зсуві [1-3]:

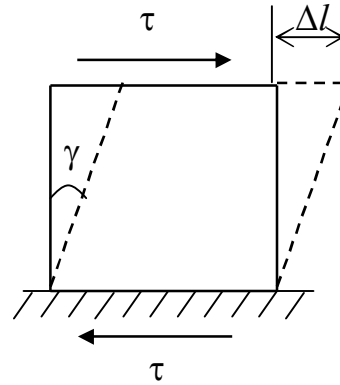


Рисунок 6.1

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (6.1)$$

де G – модуль пружності другого роду (модуль пружності при зсуві). Він визначається дослідним шляхом і є характеристикою матеріалу;

γ – кутова деформація.

Співвідношення (6.1) можна подати у вигляді

$$\tau = G\gamma. \quad (6.2)$$

Для ізотропних матеріалів між модулем пружності при зсуві і модулем пружності при розтягу-стиску існує зв'язок виду:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

де E – модуль пружності при розтягу-стиску;

μ – коефіцієнт Пуассона.

6.2 Розрахунок на зріз

Деформації зсуву в тілах спостерігаються в тих випадках, коли з усіх внутрішніх силових факторів, що діють у перерізі, ненульовими є тільки поперечні сили. На практиці зсув в чистому виді одержати важко, як правило, деформації зсуву супроводжуються іншими видами деформацій – стиском чи згином [1–2; 10].

З достатнім ступенем наближення деформація зсуву практично може бути отримана у випадку, коли на брус із протилежних сторін на близькій

відстані друг від друга діють дві рівні сили, перпендикулярні його осі і спрямовані в протилежні сторони, як показано на рисунку 6.2. Руйнування бруса при такому типі навантаження називається зрізом.

Розглянемо внутрішні силові фактори, напруження і деформації, що виникають при навантаженні бруса в такий спосіб. У даному випадку з усіх внутрішніх факторів у розглянутому перерізі I-I ненульовим буде тільки поперечна сила Q_y , що відповідно до методу перерізів дорівнює всім силам у відкинутій частині. Надалі не будемо вказувати індекс при силі, що показує, в якому напрямку вона діє: $Q = F$.

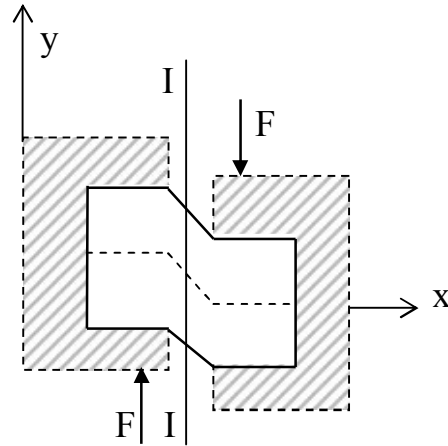


Рисунок 6.2

Припустимо, що величина дотичних напружень у поперечному перерізі не змінюється, тоді:

$$Q = \int_A \tau dA = \tau \int_A dA = \tau A, \quad (6.3)$$

відкіля:

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{F}{A}. \quad (6.4)$$

На практиці припущенням про рівномірність розподілу дотичних напружень користуються при розрахунках на зріз болтів, заклепувальних з'єднань, шпонок і інших деталей.

6.3 Кручення стержнів із круглим поперечним перерізом

Крученням називається такий вид деформування, при якому з усіх внутрішніх силових факторів ненульовим є тільки момент що крутить, $M_{кр}$. Кручення прямого бруса відбувається при навантаженні його зовнішніми крутними моментами, площина дії яких перпендикулярна до подовжньої осі бруса. Бруси, що працюють на кручення, звичайно називають валами, осями [3-5].

Розглянемо круглий брус АВ, жорстко закріплений у площини MN, до вільного кінця якого прикладена пара сил, яка лежить у площині, перпендикулярній до осі бруса (рис. 6.3).

Ця пара сил створює момент $M_{кр} = Fa$, що скручує брус. Досвід показує, що при закрученні на невеликий кут у межах пропорційності матеріалу діаметр бруса і його довжина не змінюються, вісь залишається

прямою, а поперечний переріз плоским. Зміна форми відмічається твірними ab стержня, що із прямих ліній стають гвинтовими bb' (рис. 6.3). Тобто при крученні відбувається зсув поперечних перерізів бруса, кожний поперечний переріз повертається навколо осі x як жорсткий тонкий диск.

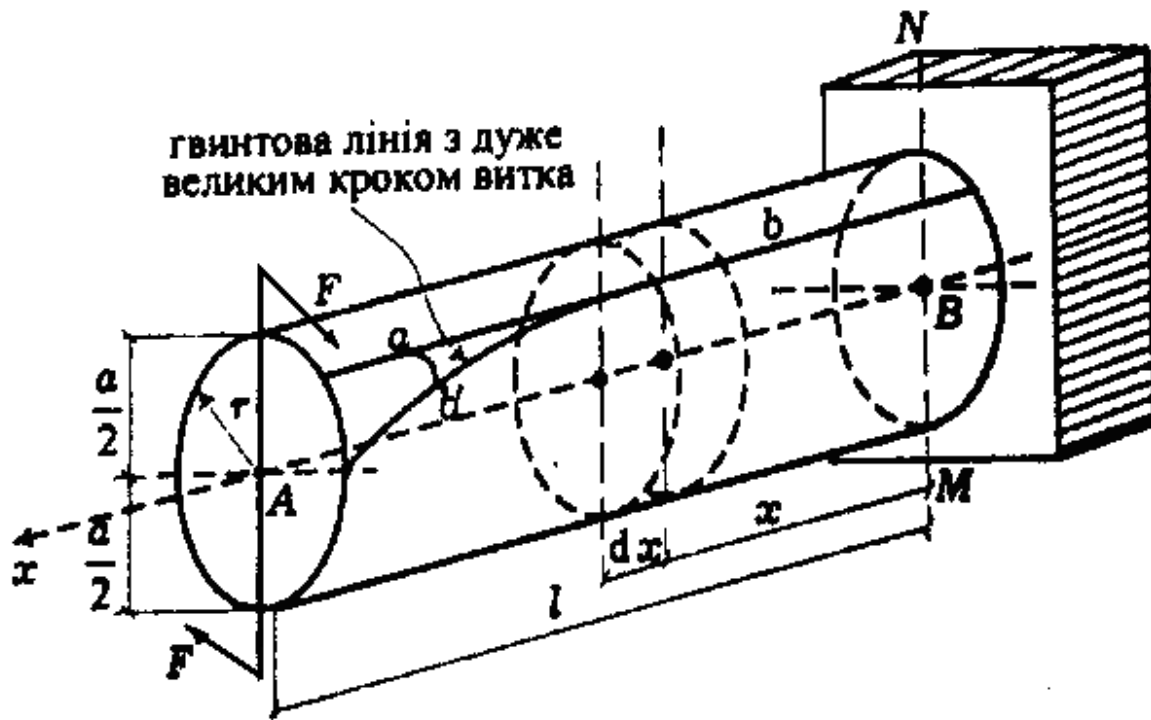


Рисунок 6.3

6.4 Внутрішні зусилля при крученні. Крутний момент

Внутрішні крутні моменти в поперечних перерізах валу визначаються методом перерізів з умови рівноваги відсіченої частини валу:

$$\sum M_x = 0.$$

Крутний момент у довільному поперечному перерізі валу дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, що скручують (включаючи і реакції закріплення), прикладених до нього по одну сторону від розглянутого перерізу.

У найпростішому випадку, коли вал, навантажений по краях тільки двома зовнішніми моментами, що рівні один одному за величиною і зворотними з напрямком, крутний момент у будь-якому поперечному перерізі валу за величиною дорівнює цим зовнішнім моментам.

У більш складних випадках, коли до вала прикладені кілька зовнішніх моментів, крутні моменти у поперечних перерізах будуть неоднакові на різних ділянках вала.

При розрахунках на міцність і жорсткість знак моменту, що крутить, не має особливого значення, однак для зручності прийняте наступне правило знаків: крутний момент, вважається додатним, якщо при погляді в торець відсіченої частини вала, зовнішній момент представляється спрямованим по годинниковій стрілці. Додатні і від'ємні напрямки моменту, що крутить, показані на рисунку 6.4.

Зміну крутних моментів по довжині вала зручно представляти за допомогою епюр моментів, які будуються згідно загальним правилам.

При побудові епюр моментів варто мати на увазі, що в перерізі, у якому на вал діє зовнішній зосереджений момент, ордината епюри міняється стрибкоподібно на величину, рівну значенню цього моменту.

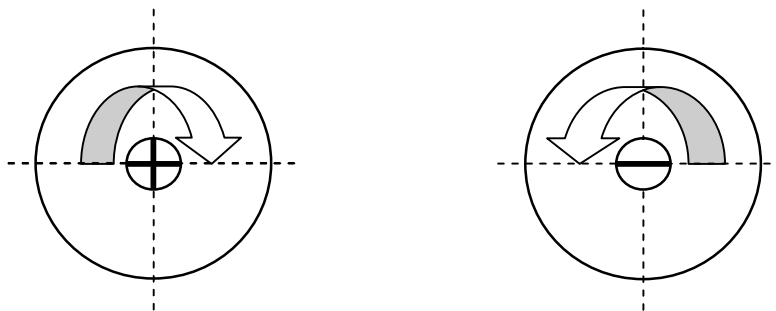


Рисунок 6.4

Якщо прями́й вал знаходиться у стані спокою чи рівномірного обертання, то алгебраїчна сума всіх зовнішніх моментів, прикладених до нього дорівнює нулю.

6.5 Напруження і деформації при крученні

Для того, щоб визначити напруження, які виникають у поперечних перерізах вала, розглянемо внутрішні зусилля, що виникають у цих перерізах при крутінні. З усіх силових факторів ненульовим виявляється тільки крутний момент, відповідно до співвідношень (1.4), який можна визначити в такий спосіб, якщо сполучити систему координат з центром ваги перерізу:

$$M_{кр} = \int_A (\tau_z y - \tau_y z) dA = \int_A \tau \rho dA; \quad (6.8)$$

де τ – дотичне напруження, що діє на елементарній площадці dA , напрямок якого є перпендикулярним до прямої, проведеної до цієї площадки від центра ваги перерізу, як показано на рисунку 6.5;

ρ – відстань від центра перерізу до елементарної площадки dA .

Для того щоб з'ясувати геометричну картину деформування круглого вала при крученні, на його поверхню наносять сітку, що складається з ліній, рівнобіжних осі і ліній, що представляють рівнобіжні кола. При дії моменту, що скручує, твірні циліндра переходять у гвинтові лінії, з великим шагом; рівнобіжні кола не викривляються і відстань між ними не міняється; радіуси, проведені на торцях бруса, після деформування залишаються прямими. Припускаючи це приходимо до гіпотези плоских перерізів:

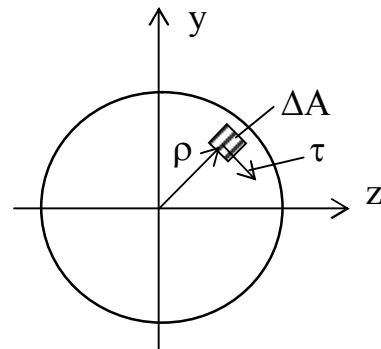


Рисунок 6.5

1) поперечні перерізи вала, плоскі й перпендикулярні до його осі до деформування, залишаються плоскими і перпендикулярними до осі і після деформування, вони тільки повертаються на деякі кути навколо неї;

2) радіуси поперечних перерізів не викривляються і зберігають свою довжину;

3) відстані уздовж осі вала між поперечними перерізами у процесі деформування не змінюються.

Ці припущення справедливі (як показує практика і більш точні дослідження деформування) для брусів, що мають суцільний круглий чи кільцевий поперечний переріз.

Розглянемо деякий вал, навантажений моментом, що скручує, $M_{\text{скр}}$. Виділимо деяку ділянку вала (рис. 6.6), яка наведена на рисунку 6.3, довжиною dx . Припустимо, кут повороту перерізу I-I, щодо нерухомої системи координат, буде φ , а кут повороту перерізу II-II, розташованого на відстані dx буде $\varphi + d\varphi$. Таким чином, кут закручування розглянутої ділянки буде $d\varphi$.

Розглянемо деформування прямокутного елемента $AB'D'C$, виділеного в поверхні вала, як показано на рисунку. Так як радіуси залишаються прямими, то відрізок $O'B'$ повернеться в площині поперечного перерізу на кут закручування $d\varphi$ і займе положення $O'B$, а твірна AB' займе нове положення AB під кутом γ , аналогічно, твірна CD' займе положення CD .

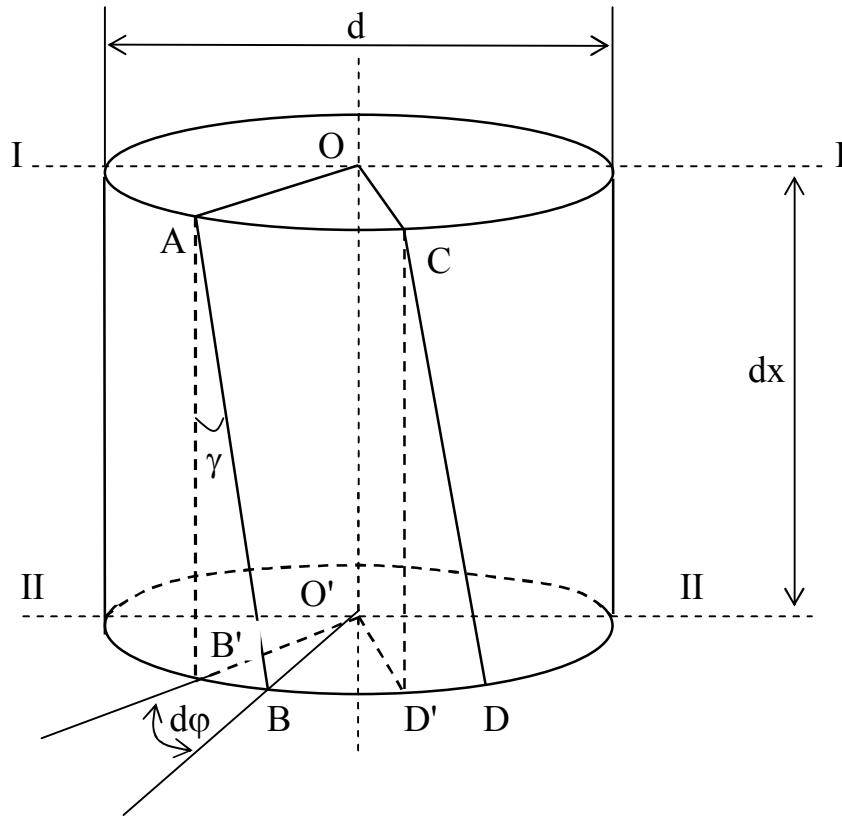


Рисунок 6.6

Так як довжина цих відрізків не змінюється, деформування прямокутного елемента $AB'D'C$ полягає в зміні спочатку прямих кутів на величину γ , як наведено на рисунку 6.7, а кутові деформації є наслідком дотичних напружень. Таким чином, розглянутий елемент знаходиться в умовах чистого зсуву і на його гранях діють дотичні напруження τ .

З урахуванням цього кут γ є кутом зсуву і, з урахуванням його малості, дорівнює:

$$\gamma = \operatorname{tg} \gamma = \frac{B'B}{AB'}.$$

Оскільки що $AB' = dx$, а $B'B = R d\phi$, кут зсуву на поверхні вала дорівнює:

$$\gamma = \vartheta R, \quad (6.9)$$

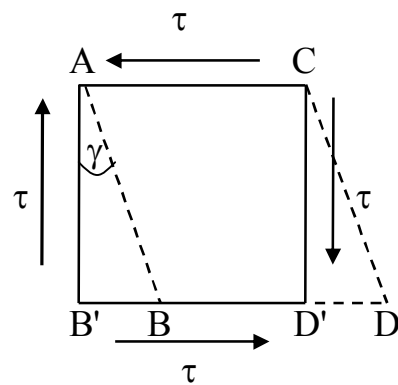


Рисунок 6.7

де $\vartheta = \frac{d\varphi}{dx}$ – відносний, чи погонний кут закручування;

$R = \frac{d}{2}$ – радіус зовнішнього кола.

Аналогічно можна виділити такий само елемент усередині вала на довільній циліндричній поверхні радіуса ρ . У цьому випадку кут зсуву буде дорівнювати:

$$\gamma = \vartheta \rho. \quad (6.10)$$

Так як розглянутий елемент усередині вала на циліндричній поверхні радіусом ρ знаходиться у стані чистого зсуву, то співвідношення (6.10), з обліком (6.2) можна подати у вигляді:

$$\tau = G\vartheta\rho. \quad (6.11)$$

Зі співвідношень (6.10) і (6.11) випливає, що кути зсуву і дотичні напруження в поперечному перерізі змінюються за лінійним законом прямо пропорційно відстані від центра ваги перетину (рис. 6.8). Максимальні дотичні напруження будуть на зовнішній поверхні вала, де $\rho=R$:

$$\tau_{\max} = G\vartheta R. \quad (6.12)$$

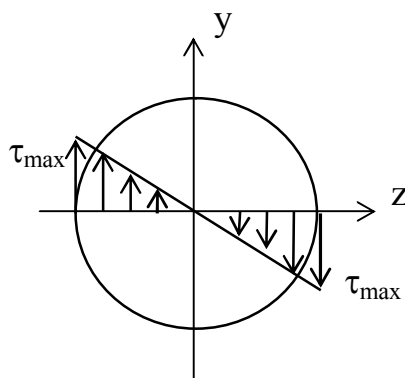


Рисунок 6.8

Для того, щоб зв'язати внутрішні зусилля, що виникають у валу і його деформації, підставимо співвідношення (6.11) у (6.8) і з обліком (4.10):

$$M_{\text{кр}} = \int_A \tau \rho dA = G\vartheta \int_A \rho^2 dA = G\vartheta I_p, \quad (6.13)$$

де I_p – полярний момент інерції розглянутого перерізу.

Зі співвідношення (6.13) можна одержати формулу для визначення відносного кута закручування вала:

$$\vartheta = \frac{M_{\text{кр}}}{GI_{\rho}}, \quad (6.14)$$

де GI_{ρ} – жорсткість вала при крученні.

Використовуючи вираз (6.14), можна визначити кут закручування φ двох перерізів, розташованих на відстані l відносно один одного:

$$\varphi = \int_0^l \vartheta dx = \int_0^l \frac{M_{\text{кр}}}{GI_{\rho}} dx. \quad (6.15)$$

Якщо в межах розглянутої ділянки, крутні моменти і жорсткість не змінюється уздовж вала, то можна записати:

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l}{GI_{\rho}}. \quad (6.16)$$

Ця формула встановлює лінійний зв'язок між внутрішнім зусиллям при крученні (крутним моментом) і деформацією (кут закручування) і називається *законом Гука при крученні*. Формула справедлива у випадку, коли дотичні напруження не перевершують межі пружності.

Для визначення дотичних напружень у точках перерізу на відстані ρ від центра ваги підставимо у формулу (6.11) вираження відносного кута закручування (6.14):

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}} \rho}{I_{\rho}}. \quad (6.17)$$

Максимальне дотичне напруження, що діє на зовнішній поверхні вала, буде відповідно (6.12):

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{кр}} R}{I_{\rho}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}}, \quad (6.18)$$

де R – радіус круглого перерізу чи радіус зовнішнього кола кільцевого перерізу;

W_{ρ} – момент опору при крученні.

Момент опору при крученні дорівнює відношенню полярного моменту інерції до максимально вилученої від центру ваги точки перерізу ρ_{max} :

$$W_{\rho} = \frac{I_{\rho}}{\rho_{\text{max}}}, \quad (6.19)$$

Для круглого перерізу:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Для кільцевого перерізу, із внутрішнім діаметром d і зовнішнім D буде дорівнює:

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4),$$

де $\alpha = \frac{d}{D}.$

З умови міцності найбільші дотичні напруження, що виникають, не повинні перевищувати допустимих напружень (2.9):

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (6.20)$$

При розрахунку на міцність по заданих навантаженнях і геометричних характеристиках вала по формулі (6.18) визначаються найбільші дотичні напруження і порівнюються з допустимими (6.19). При цьому найбільші дотичні напруження визначаються в небезпечному перерізі, в якому крутний момент найбільший по абсолютній величині. Для визначення небезпечного перерізу зручно будувати епюру крутних моментів.

При підборі поперечного перерізу по заданому навантаженню із умови міцності визначається необхідна величина полярного моменту опору:

$$W_p = \frac{|M_{\text{кр}}|_{\max}}{[\tau]}, \quad (6.21)$$

де $|M_{\text{кр}}|$ – максимальне по абсолютній величині значення крутного моменту.

Розрахунок вала на жорсткість полягає в тім, щоб у ньому не виникали деформації більше припустимих, котрі визначаються умовами експлуатації.

Умова жорсткості вала при крутінні має вигляд

$$\vartheta_{\max} \leq [\vartheta], \quad (6.22)$$

де ϑ_{\max} – найбільший відносний кут закручування, що визначається за формулою (6.14);

$[\vartheta]$ – відносний кут закручування, що допускається (для різних елементів конструкцій $[\vartheta] = (0.2-5) \cdot 10^{-4}$ радіан на 1 см довжини).

7 ПЕРЕМІЩЕННЯ ПРИ ЗГИНІ

7.1 Прогін та кут повороту перерізу

При прямому згині під дією зовнішніх сил, розташованих в одній з головних площин спочатку прямої балки, її вісь викривляється в тій же площині, при цьому точки осі переміщуються. Скривлена вісь балки називається *пружною лінією*. Переміщення точок осі балки по нормалі до її первісної форми називається прогинами балки і позначаються V . При деформуванні вісь балки не змінює своєї довжини, тому що вона знаходиться в нейтральному шарі, у якому нормальні напруження дорівнюють нулю.

Скривлення осі балки викликає не тільки прогини, але і переміщення точок по горизонталі. Однак ці переміщення, як правило, набагато менше прогинів і ними зневажають. При цьому прогини вважаються набагато менше довжини балки.

При деформації балки її поперечні перерізи не тільки переміщуються, але і повертаються. Зневажаючи деформаціями зрушення, будемо вважати, що кут повороту поперечного перерізу балки θ дорівнює куту між дотичної, проведеної до вигнутої осі балки в цьому перерізі і недеформованою віссю балки, чи його тангенсу, тому що цей кут досить малий.

Необхідність визначення пружної лінії балки виникає в розрахунках елементів конструкції на жорсткість. Виникнення прогинів, що виникають у балці, обумовлюється тим, що при розрахунках часто ставиться вимога, щоб не тільки виникаючі в балці напруження не перевершували напружень, що допускаються, але і максимальні прогини були не більше наперед заданого значення, обумовленого умовами експлуатації конструкції.

Раніше, отримано зв'язок між радіусом кривизни осі балки, згинальним моментом і жорсткістю поперечного перерізу при згині (5.8). Представимо це співвідношення у наступному вигляді:

$$M = \frac{EI}{\rho}, \quad (7.1)$$

де ρ – радіус кривизни пружної лінії балки;

EI – жорсткість балки на згин;

M – згинальний момент.

Ця формула виражає найважливіше співвідношення теорії прямого згину балок. З неї випливає, що в будь-якій точці пружної лінії балки радіус кривизни прямо пропорційний жорсткості балки на згин і зворотно пропорційний згинальному моменту, що виникає в перерізі. Якщо балка постійного поперечного перерізу згинається таким чином, що на деякій ділянці згинальний момент не змінюється, то і радіус кривизни в цьому

випадку також буде постійною величиною. В даному випадку пружна лінія балки буде дугою кола. На інших ділянках пружна лінія балки матиме різний вигляд.

Для одержання рівняння пружної лінії у декартової системі координат направимо вісь x , що збігається з віссю недеформованої балки, вправо, а вісь y , що збігається з головною центральною віссю перетину вертикально догори. Прогини балки V будуть рівнобіжні осі y . При цьому рівнянням пружної лінії буде залежність між прогином і координатою x точки осі балки, у якій цей прогин визначається, тобто: $V = f(x)$.

Розглянемо положення пружної лінії у координатах (x, y) . У курсі вищої математики відомо наступне співвідношення для радіуса кривизни плоскої кривої в деякій точці з координатами (x, y) кривої $V = f(x)$ (рис. 7.1):

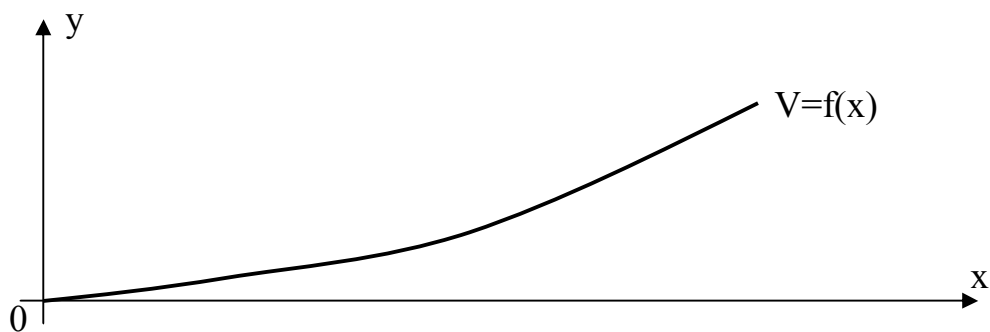


Рисунок 7.1

$$\rho = \pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dV}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2V}{dx^2}}.$$

Це точний вираз радіуса кривизни можна перетворити, і одержати більш просте наближене вираження. Візьмемо до уваги те, що прогини, що допускаються, при згині балок досить маленькі в порівнянні з її довжиною (вони рідко перевищують однієї тисячної від довжини балки). Отже, пружна лінія балки мало відрізняється від прямої. Величина $\frac{dV}{dx}$, рівна куту повороту перерізу θ , являє собою тангенс кута між дотичною, проведеною до вигнутої осі балки в цьому перерізі, і віссю x і настільки мала, що її величина, зведена в квадрат, стає пренебрежімо малою у

порівнянні з одиницею, з якою вона складається. Через цей вираз $\left(\frac{dV}{dx}\right)^2$ у розглянутому співвідношенні можна зневажити як нескінченно малою величиною другого порядку. А тому радіус кривизни пружної лінії балки можна представити більш простим співвідношенням:

$$\rho = \pm \frac{1}{\frac{d^2V}{dx^2}}.$$

Підставимо в це співвідношення радіус кривизни, виражений через згинальний момент у перерізі (7.1) одержимо рівняння пружної лінії у диференціальній формі:

$$\pm EI \frac{d^2V}{dx^2} = M.$$

Якщо ми будемо вважати, що позитивні прогини V будуть спрямовані нагору (рис. 7.1), то знак кривизни, чи другої похідної $\frac{d^2V}{dx^2}$, буде збігатися зі знаком моменту. Звідси випливає, що при такій системі координат рівняння пружної лінії у диференціальному вигляді:

$$EI \frac{d^2V}{dx^2} = M(x). \quad (7.2)$$

Для одержання рівняння пружної лінії таким чином, щоб у нас була функціональна залежність між прогином і координатою точки осі балки, у якій цей прогин вважається, необхідно проінтегрувати рівняння (7.2) два рази. Таке інтегрування можна провести на ділянках досліджуваної балки на який можна одержати залежність згинаючого моменту від координати перерізу.

Перше інтегрування дає рівняння $\theta(x) = \frac{dV}{dx} = \frac{1}{EI} \left[\int M(x) dx + C \right]$, що зв'язує кути повороту перерізів θ з абсцисами осі x , при цьому позитивні кути відповідають повороту перерізу проти годинної стрілки. Друге інтегрування приводить до шуканого рівняння пружної лінії $V(x) = \frac{dV}{dx} = \frac{1}{EI} \left[\iint M(x) dx dx + Cx + D \right]$, що дає безпосередній зв'язок між прогином і віссю абсцис. Позитивним напрямком, у прийнятій системі координат (рис. 7.1) буде переміщення точок осі балки нагору.

Після кожного інтегрування виходить невідома постійна. Отже, на кожній ділянці балки після дворазового інтегрування рівняння пружної лінії буде дві постійні інтегрування (C, D).

Цей метод (метод безпосереднього інтегрування) при великому числі ділянок балки приводить до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь з великим числом невідомих постійних. Ці постійні визначаються з умов рівності прогинів і кутів повороту перерізів на границях сусідніх ділянок і з умов закріплення балки на кінцях. Однак, дотримуючи деяких умов і прийоми складання й інтегрування рівнянь згинальних моментів завжди можна скоротити число невідомих до двох – переміщенню V_0 і куту повороту θ_0 на початку координат. Цей прийом одержав назву «метод початкових параметрів» і його застосування істотно спрощує задачу побудови пружної лінії балки, що має кілька ділянок.

7.2 Метод початкових параметрів

Розглянемо балку, що знаходиться в рівновазі під дією, прикладених до неї зовнішніх навантажень, включно з опорними реакціями, як показано на рисунку 7.2. Тут прикладені навантаження, що викликають позитивні згинальні моменти в перерізі з координатою x (крім розподіленого навантаження, спрямованого вниз). Початок координат візьмемо в точці O , вісь x направимо по осі балки вправо, вісь V – нагору [1–3; 11].

Визначимо прогин $V(x)$ і кут повороту $\theta(x)$ перерізу на відстані x від початку координат. Для цього запишемо величину згинаючого моменту, що виникає в розглянутому перетині від прикладених до балки навантажень по окремої. Потім, скориставшись формулою (7.2), визначимо прогин і кут повороту перетину для кожного навантаження окремо. А дійсний прогин і кут повороту, відповідно до принципу незалежності дії сил, будуть рівні їхній сумі.

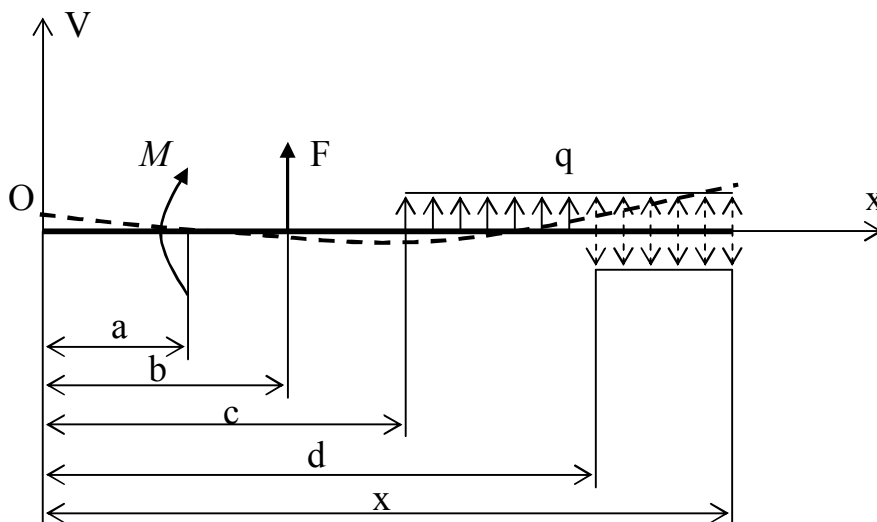


Рисунок 7.3

Дія моменту M.

Згинальний момент у перерізі x дорівнює прикладеному на відстані a від початку координат моменту:

$$M(x) = M \text{ або } M(x) = M(x-a)^0.$$

Це вираження справедливе, тому що будь-яке число в нульовій ступені дорівнює одиниці.

Зі співвідношення (1.2):

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{1}{EI} [M(x-a)^0].$$

Інтегруємо це співвідношення два рази й одержуємо вираз для перебування кутів повороту і прогинів:

$$\frac{dV(x)}{dx} = \theta(x) = \frac{1}{EI} [M(x-a)^1 + C_1];$$

$$V(x) = \frac{1}{EI} [M \frac{(x-a)^2}{2} + C_1 x + D_1].$$

Тут C_1 і D_1 – невідомі константи інтегрування.

Дія зосередженої сили F.

Згинальний момент у перерізі x дорівнює силі, помноженої на відстань від цієї сили до розглянутого перерізу:

$$M(x) = F(x-b)^1.$$

Зі співвідношення (1.2):

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{1}{EI} [F(x-b)^1].$$

Після інтегрування одержуємо вираження для визначення кутів повороту $\theta(x)$ і прогинів $V(x)$:

$$\frac{dV(x)}{dx} = \theta(x) = \frac{1}{EI} [F \frac{(x-b)^2}{2} + C_2];$$

$$V(x) = \frac{1}{EI} [F \frac{(x-b)^3}{6} + C_2 x + D_2],$$

де C_2 і D_2 – невідомі константи інтегрування.

Дія розподіленого навантаження q.

Розглянемо по окремої дію розподіленого навантаження, спрямованого нагору і вниз. Згинальний момент у перетині x дорівнює:

напрямок – нагору

$$M(x) = q \frac{(x-c)^2}{2}.$$

напрямок – униз

$$M(x) = -q \frac{(x-d)^2}{2}.$$

З урахуванням співвідношення (1.2) після інтегрування одержуємо вираз для визначення кутів повороту $\theta(x)$ і прогинів $V(x)$:

$$\frac{dV(x)}{dx} = \theta(x) = \frac{1}{EI} \left[q \frac{(x-c)^3}{6} + C_3 \right]; \quad \frac{dV(x)}{dx} = \theta(x) = \frac{1}{EI} \left[-q \frac{(x-d)^3}{6} + C_4 \right];$$

$$V(x) = \frac{1}{EI} \left[q \frac{(x-c)^4}{24} + C_3 x + D_3 \right]; \quad V(x) = \frac{1}{EI} \left[-q \frac{(x-d)^4}{24} + C_4 x + D_4 \right],$$

де C_3, D_3, C_4, D_4 – невідомі константи інтегрування.

Остаточно, з урахуванням незалежності дії сил кут повороту $\theta(x)$ і прогин $V(x)$ в перерізі x від усіх діючих на балку навантажень буде:

$$EI\theta(x) = C + M \frac{(x-a)^1}{1} + F \frac{(x-b)^2}{2} + q \frac{(x-c)^3}{6} - q \frac{(x-d)^3}{6}.$$

$$EIV(x) = D + Cx + M \frac{(x-a)^2}{2} + F \frac{(x-b)^3}{6} + q \frac{(x-c)^4}{24} - q \frac{(x-d)^4}{24}.$$

де $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$;

$D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$.

Фізичний зміст постійних C і D можна визначити, якщо розглянути деформування пружної лінії при балки $x = 0$:

$$C = EI\theta_0; \quad D = EIV_0.$$

де θ_0, V_0 – кут повороту і прогин перерізу на початку координат.

З урахуванням цього рівняння кутів повороту і прогинів в загальному вигляді можна записати в наступним виді:

$$EI\theta(x) = EI\theta_0 \pm \sum M \frac{(x-a)^1}{1!} \pm \sum F \frac{(x-b)^2}{2!} \pm$$

$$\pm \sum q \frac{(x-c)^3}{3!} \mp \sum q \frac{(x-d)^3}{3!}.$$

$$EIV(x) = EIV_0 + EI\theta_0 x \pm \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} \pm \sum F \frac{(x-b)^3}{3!} \pm$$

$$\pm \sum q \frac{(x-c)^4}{4!} \mp \sum q \frac{(x-d)^4}{4!}.$$
(7.3)

Унаслідок того, що невідомі константи інтегрування являють собою прогин і кут повороту на початку координат, цей метод одержав назву „метод початкових параметрів”.

Рівняння (7.3) називаються *узагальненими* чи *універсальними рівняннями пружної лінії балки*. У них варто підставляти тільки ті навантаження, включаючи і реакції опор, що розташовані між початком координат і розглянутим перерізом.

При використанні цих рівнянь варто пам'ятати, що показані на рисунку 7.2 навантаження, діють у позитивному напрямку. Якщо навантаження спрямоване в іншу сторону, то воно вноситься в рівняння з протилежним знаком. Рівняння (7.3) отримані в припущенні, що на балку діють розподілені навантаження, що у деякому перетині з'явилися і продовжуються до кінця балки. Якщо розподілене навантаження в якомусь перетині закінчилася, тоді її фіктивно продовжують до кінця і на цій ділянці прикладають протилежну за напрямком і рівну їй за величиною навантаження, що компенсує, як показано на рисунку 1.2 пунктирними стрілками.

Нагадаємо, що при визначенні переміщення конкретного перерізу необхідно враховуватись лише складові, що відповідають силам, розташованим ліворуч від нього. У зв'язку з цим у наведених рівняннях необхідно відкидати доданки, у яких при підстановці x в дужках одержують число, яке менше або дорівнює нулю.

Напрямок прогину і кута повороту перерізу визначається їхнім знаком. При позитивному знаку переміщення точок осі балки відбувається нагору, при негативному – униз (рис. 7.1). При позитивному знаку, поворот перетину відбувається проти годинної стрілки, при негативному – по годинній стрілці.

Початкові параметри в рівняннях (7.3) для статично визначних балок визначаються з умов закріплення. Якщо балка жорстко затиснена, і місце защемлення збігається з початком координат, то і прогин і кут повороту перерізу на початку координат дорівнюють нулю. Якщо балка вільно обперта на двох опорах (рис. 7.3), при цьому одна опора розташована на початку координат, необхідно визначити тільки один початковий параметр – кут повороту перерізу. Тому що прогин на опорі, що збігається з початком координат, дорівнює нулю. Інший початковий параметр - кут повороту перерізу на початку координат, визначається з рівності нулю прогину на другій опорі.

1.3 Метод Мора

Розрахунок статично невизначних систем, а також усіх систем на жорсткість пов'язаний із необхідністю обчислення переміщень. Найбільш загальними методами визначення переміщень у пружних системах є енергетичні, засновані на дослідженні потенціальної енергії системи. Одним із методів, що застосовується для визначення переміщень у лінійно деформованих системах, є *метод Мора*.

Нехай треба визначити переміщення Δ_i деякої точки балки від дії заданого навантаження (рис. 1.4, *a*). Розглянемо два стани цієї споруди: перший – дійсний стан при дії заданого навантаження (рис. 1.4, *a*), другий – допоміжний або одиничний стан, у якому за напрямком

шуканого переміщення прикладена одинична узагальнена сила (рис. 1.4, б).

Робота одиничної сили на переміщеннях заданого стану $W_{if} = 1 \cdot \Delta_i$ за теоремою Бетті [11; 12] дорівнює роботі W_{fi} заданих сил на переміщеннях одиничного стану, звідки:

$$\Delta_i = \sum_{(l)} \int \frac{M \bar{M}_i ds}{EI} + \sum_{(l)} \int \mu \frac{Q \bar{Q}_i ds}{GA} + \sum_{(l)} \int \frac{N \bar{N}_i ds}{EA}, \quad (7.4)$$

де M, Q, N - зусилля від заданого навантаження; $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ - зусилля від одиничної сили у допоміжному стані.

Формулу (7.4) називають формулою Мора. За її допомогою можна визначити переміщення від навантаження при довільному навантаженні. Для цього:

- 1) визначають зусилля M, Q, N від заданого навантаження;
- 2) за напрямком шуканого переміщення прикладають одиничну узагальнену силу;
- 3) знаходять зусилля $\bar{M}_i, \bar{Q}_i, \bar{N}_i$ від одиничної сили;
- 4) вирази зусиль підставляють у праву частину (7.4) та інтегруванням уздовж осей усіх елементів споруди визначають шукане переміщення.

Обчислення переміщень за допомогою формули (7.4) називають *методом Мора*.

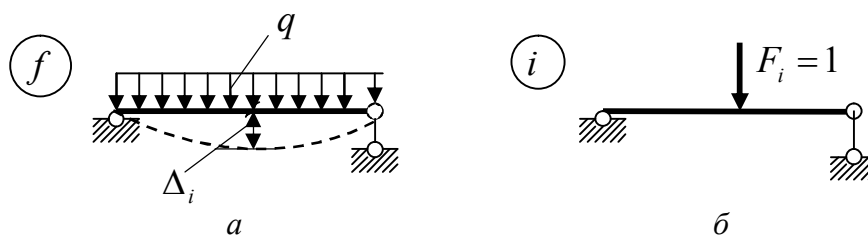


Рисунок 1.4

В окремих випадках формула Мора набуває простішого вигляду. При розрахунку систем із переважним згином – балок і рам – вплив поперечних і поздовжніх деформацій на переміщення точок незначний. Тому для таких систем ураховують лише перший інтеграл виразу (7.4), тобто:

$$\Delta_i = \sum_{(l)} \int \frac{M \bar{M}_i ds}{EI}.$$

Якщо розбити систему на відрізки постійної жорсткості, маємо:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{EI} \int_l M \overline{M}_i ds \right)_j. \quad (7.5)$$

Інтеграл $\int_l M \overline{M}_i ds$ у (7.5) називають інтегралом Мора. У деяких випадках обчислення цього інтегралу можна спростити.

У загальному випадку на ділянці прямого стержня постійної жорсткості раціонально скористатися *формулою Сімпсона* для чисельного інтегрування. Відповідно до цієї формули визначений інтеграл від функції $\varphi(s)$ на відрізку $0 \leq s \leq l$ можна наближено знайти так:

$$\int_0^l \varphi(s) ds \approx \frac{l}{6} \left[\varphi(0) + 4\varphi\left(\frac{l}{2}\right) + \varphi(l) \right].$$

Ця формула ґрунтується на заміні підінтегральної функції квадратною параболою, тому у випадку, якщо функція $\varphi(s)$ дійсно квадратна парабола, вираз дає точний результат.

Застосовуючи формулу Сімпсона для перемноження двох епюр на відрізок прямого стержня постійної жорсткості (рис. 1.13), одержуємо

$$\int_0^l M \overline{M}_i ds = \frac{l}{6} (M_{лів} \overline{M}_{лів} + 4M_{сер} \overline{M}_{сер} + M_{пр} \overline{M}_{пр}). \quad (7.6)$$

Тут індекси *лів*, *сер* і *пр* означають лівий, правий кінці та середину відрізка довжиною l .

Як свідчить аналіз, формула (7.6) є точною й у випадку, коли підінтегральна функція $M \overline{M}_i$ на відрізку від 0 до l є кубічною параболою, тобто містить вантажні моменти, окреслені за квадратною параболою (при $q = const$) та лінійно змінні одиничні моменти. Отже, формула Сімпсона дає точний результат для переважної більшості епюр, що зустрічається в практичних розрахунках.

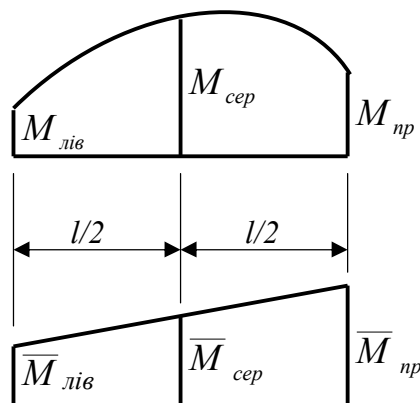


Рисунок 7.5

В інших випадках застосування формули Сімпсона потребує розбивання епюр на відрізки досить малої довжини.

Якщо вантажні моменти окреслені за лінійною залежністю (при $q = 0$), тоді обидва моменти у середині ділянки можливо виразити через крайні значення (рис. 7.7):

$$M_{сер} = \frac{M_{лів} + M_{пр}}{2};$$

$$\overline{M}_{сер} = \frac{\overline{M}_{лів} + \overline{M}_{пр}}{2}.$$

Це дозволяє вираз (7.6) получить у вигляді:

$$\int_0^l M \overline{M}_i ds = \frac{l}{6} (2M_{лів} \overline{M}_{лів} + 2M_{пр} \overline{M}_{пр} + M_{пр} \overline{M}_{лів} + M_{лів} \overline{M}_{пр}). \quad (7.7)$$

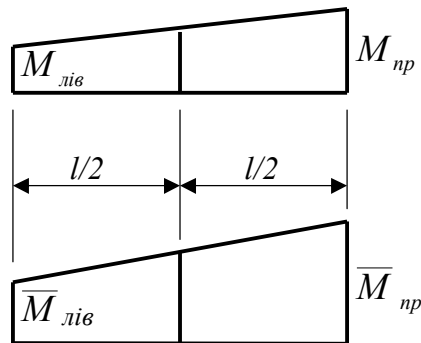


Рисунок 7.6

1.4 Правило Верещагіна

У випадку, коли підінтегральний вираз у формулі (7.5) представляє з себе добуток двох функцій ($M \overline{M}_i$), одна з яких довільна, друга – лінійна (\overline{M}_i завжди лінійна, так як являє собою згинальний момент від одиничного навантаження – сили або моменту) інтеграл можливо обчислити наступним чином:

$$\int_l M \overline{M}_i ds = \omega \cdot M_i^c,$$

де ω – площа вантажної епюри;

M_i^c – значення одиничного моменту під центром ваги вантажного моменту (рис. 7.7).

З урахуванням цього вираз (7.5) набуває вигляду:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\omega \cdot M_i^c}{EI} \right)_j. \quad (7.8)$$

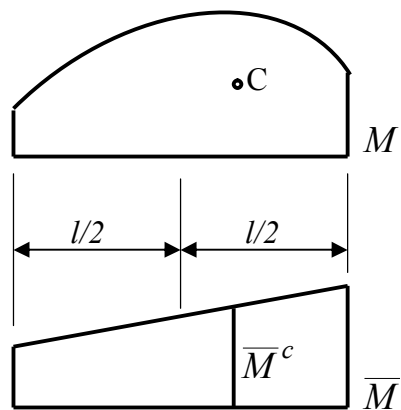


Рисунок 7.7

8 СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНІ БАЛКИ

8.1 Загальна схема розв'язання

Статично невизначеною балкою називається така балка, у якої число невідомих реакцій опор більше, ніж число рівнянь рівноваги.

Різниця між числом рівнянь рівноваги і числом невідомих реакцій називається *ступенем статичної невизначеності балки*.

Усі статично невизначені системи мають додаткові, чи «зайві» зв'язки у виді закріплень, що не є необхідними для рівноваги чи геометричної незмінюваності системи. Наявність таких зв'язків обумовлюється експлуатаційними чи факторами умовами міцності конструкцій.

Ці «зайві» невідомі реакції накладають на балку додаткові умови деформації. Ці умови, виражені математичними співвідношеннями, дають відсутнє число рівнянь для визначення реакцій і називаються *умовами спільності деформацій*. Вони враховують характер деформування системи під дією зовнішніх навантажень. Різниця між числом невідомих і числом рівнянь рівноваги визначає ступінь статичної невизначеності і відповідно число додаткових рівнянь, який необхідно скласти.

Складання рівнянь спільності деформацій є найбільше важливим етапом у розв'язанні статично невизначених задач. Для їхнього складання використовують ту обставину, що зайві в'язі накладають визначені обмеження на деформування тих перетинів, у яких вони прикладені.

Розглянемо загальну схему розрахунку статично невизначених балок, що містить у собі наступні етапи.

1. Установлюється ступінь статичної невизначеності.
2. Видаляються «зайві» в'язі – вихідна система заміняється статично визначною, котра називається основною. Необхідно враховувати умови геометричної незмінюваності основної системи. Вибір основної системи залежить від розраховувача, однак раціональний вибір основної системи може істотно спростити розрахунки.
3. Завантажують основну систему заданим навантаженням і невідомими зусиллями, що заміняють реакції вилучених в'язей. Така система називається статично еквівалентною системою.
4. Для еквівалентності основної системи з вихідною, невідомі зусилля повинні бути такої величини, щоб деформування статично визначної основної системи не відрізнялося від деформування статично невизначеної вихідної системи. Для цього варто дорівняти нулю переміщення і кути повороту перерізу в точках прикладення невідомих зусиль по напрямку їхньої дії. Ці вираження і будуть рівняннями спільності деформацій для статично невизначених балок. При цьому переміщення і кути повороту можна визначати, розглянутими вище методами: початкових параметрів, Мора або Верещагіна. З отриманих у

такий спосіб рівнянь спільності деформацій визначають значення «зайвих» невідомих зусиль.

5. Після визначення невідомих зусиль визначаються реакції, внутрішні силові фактори, напруження, переміщення чи кути повороту перетину звичайними способами, як для будь-яких статично визначних балок.

8.2 Рівняння трьох моментів

Рівняння трьох моментів зручно використовувати при розрахунку *нерозрізних балок*. Нерозрізними називають балки, що лежать на декількох опорах і не мають проміжних шарнірів. Такі балки, широко застосовані в різних конструкціях, є статично невизначними, якщо кількість опор складає більше двох. На рисунку 8.1 наведена довільно навантажена балка, що спирається на N шарнірних опор. Одна з опор робиться шарнірно-нерухомою для сприйняття осевого навантаження, інші – шарнірно-рухомими, що дає змогу балці вільно змінювати довжину, при цьому при її навантаженні поперечними силами, не виникають внутрішні подовжні зусилля.

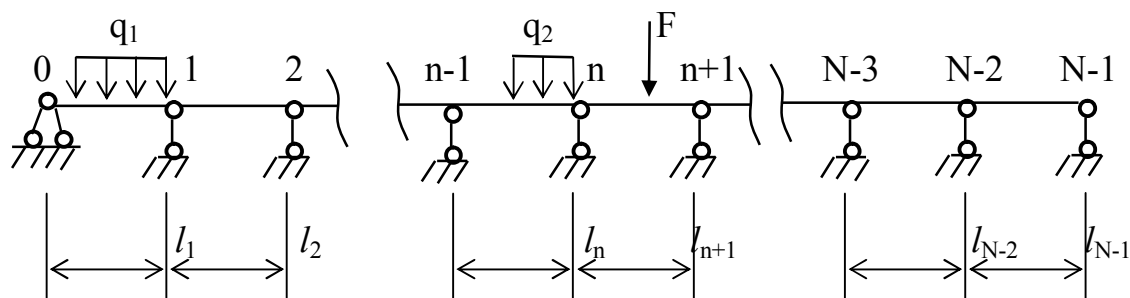


Рисунок 8.1

При обпиранні на N шарнірних опор маємо стільки ж вертикальних реакцій. Дана система буде $(N-2)$ рази статично невизначеною, тому що рівнянь рівноваги можна скласти тільки два.

Таким чином, число «зайвих» зв'язків, а отже, і число «зайвих» реакцій буде дорівнювати кількості проміжних опор. Якщо крайня опора виконана у вигляді жорсткого защемлення, то ступінь статичної невизначеності збільшується на одиницю в порівнянні із шарнірним обпиранням.

Найбільш зручним вибором основної системи для нерозрізної балки є введення шарнірів у перерізах над усіма проміжними опорами. «Зайвими» невідомими в цьому випадку будуть згинальні моменти в опорних перерізах балки, як показано на рисунку 8.2, де F , q_1 , q_2 – задане навантаження.

Таким чином, еквівалентна система являє собою ряд простих шарнірно обпертих однопрогонних балок, навантажених заданим навантаженням і невідомими опорними згинальними моментами M_i , де $i = 1, 2, \dots, N-2$, як показано на рисунку. Тут для визначеності показані позитивні опорні моменти. При такому виборі основної системи дія заданого навантаження поширюється тільки на проліт, на якому вона прикладена, вплив її на інші прольоти виражається через опорні згинальні моменти.

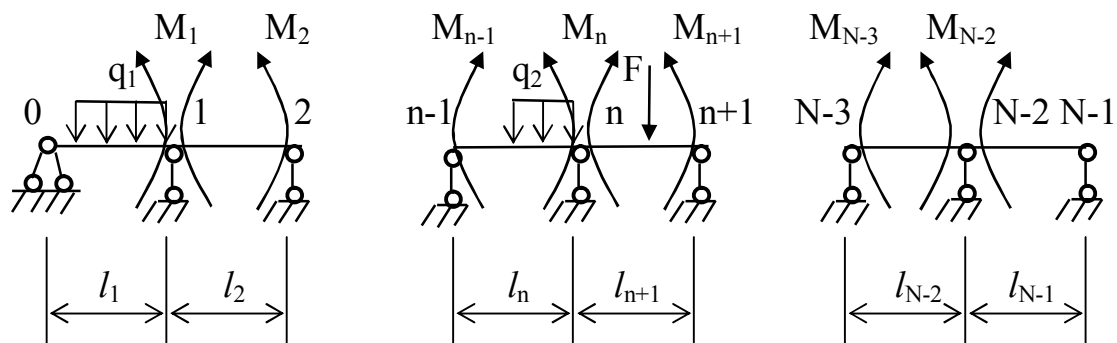


Рисунок 8.2

Для розв'язання статично невизначених задач потрібно скласти додаткові рівняння – рівняння спільності деформацій. У даному разі вони будуть являти собою рівність кутів повороту опорних перерізів для суміжних балок.

Кожна двохопорна балка основної системи під дією заданого навантаження й опорних моментів деформується незалежно одна від другої. Однак у вихідній статично невизначеній системі кожна пара перерізів на опорних шарнірах являє собою один переріз, отже кут повороту в них повинен бути рівний, що можна записати в такий спосіб:

$$\Delta_n^l + \Delta_n^{pr} = 0, \quad (8.1)$$

де $\Delta_n^l, \Delta_n^{pr}$ – кути повороту торцевих перерізів суміжних балок, що примикають до n -ної опори ліворуч і праворуч від неї відповідно. При цьому позитивні напрямки цих кутів повороту перерізів збігаються з позитивним напрямком опорних згинальних моментів.

Тому що основна система складається з окремих, не зв'язаних між собою двохопорних балок, то для розкриття отриманого рівняння спільності деформацій досить розглянути тільки два сусідніх прольоти, розташованих ліворуч і праворуч від опори.

Відповідно до теореми про взаємність робіт співвідношення (8.1) можна подати у вигляді (рис. 8.3):

$$\delta_{n,n-1}M_{n-1} + \delta_{n,n}M_n + \delta_{n,n+1}M_{n+1} + \Delta_{n,p} = 0, \quad (8.2)$$

де $\delta_{n,n-1}M_{n-1}$ – кут повороту перерізу на n -ній опорі від опорного моменту, що виникає на опорі $n-1$;

$\delta_{n,n}M_n$ – кут повороту перерізу на n -ній опорі від опорного моменту, що виникає на цій же опорі;

$\delta_{n,n+1}M_{n+1}$ – кут повороту перерізу на n -ній опорі від опорного моменту, що виникає на опорі $n+1$;

$\Delta_{n,p}$ – кут повороту перерізу на n -ній опорі від заданого навантаження F , q_2 , прикладеного на двох сусідніх з розглянутою опорою прольотах.

Для визначення наведених вище кутів повороту перерізу застосуємо правило Верещагіна.

На рисунку 2.3 наведена вантажна епюра M_p – епюра згинальних моментів від заданого навантаження, й одиничні епюри M_{n-1} , M_n , M_{n+1} – епюри згинальних моментів від одиничних моментів, що діють у напрямку опорних моментів M_{n-1} , M_n , M_{n+1} відповідно.

Вважаючи, що жорсткість балки на згин по всій довжині постійна, представимо доданки, що входять у рівняння (2.2), у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \delta_{n,n-1}M_{n-1} &= \frac{M_{n-1}}{EI} \left(\frac{\ell_n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{\ell_n}{6EI} M_{n-1}; \\ \delta_{n,n}M_n &= \frac{M_n}{EI} \left(\frac{\ell_n}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{\ell_{n+1}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \right) = \left(\frac{\ell_n}{3EI} + \frac{\ell_{n+1}}{3EI} \right) M_n; \\ \delta_{n,n+1}M_{n+1} &= \frac{M_{n+1}}{EI} \left(\frac{\ell_{n+1}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{\ell_{n+1}}{6EI} M_{n+1}; \\ \Delta_{n,p} &= \frac{1}{EI} \left(\omega_n \frac{a_n}{\ell_n} + \omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{\ell_{n+1}} \right), \end{aligned}$$

де ω_n – площа епюри згинаючого моменту, що виникає від заданого навантаження на n -ному прольоті;

ω_{n+1} – площа епюри згинаючого моменту, що виникає від заданого навантаження на прольоті $n+1$;

a_n – відстань від опори $n-1$ до центру ваги епюри моменту від заданого навантаження на n -ному прольоті;

b_{n+1} – відстань від опори $n+1$ до центру ваги епюри моменту від заданого навантаження на прольоті $n+1$.

Підставляючи отримані вирази в рівняння спільності деформацій (8.2) і скорочуючи жорсткість на згин, одержуємо рівняння, що зв'язують між собою опорні моменти, які виникають на трьох сусідніх опорах:

$$M_{n-1}\ell_n + 2M_n(\ell_n + \ell_{n+1}) + M_{n+1}\ell_{n+1} = -6\left(\frac{\omega_n a_n}{\ell_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{\ell_{n+1}}\right). \quad (8.3)$$

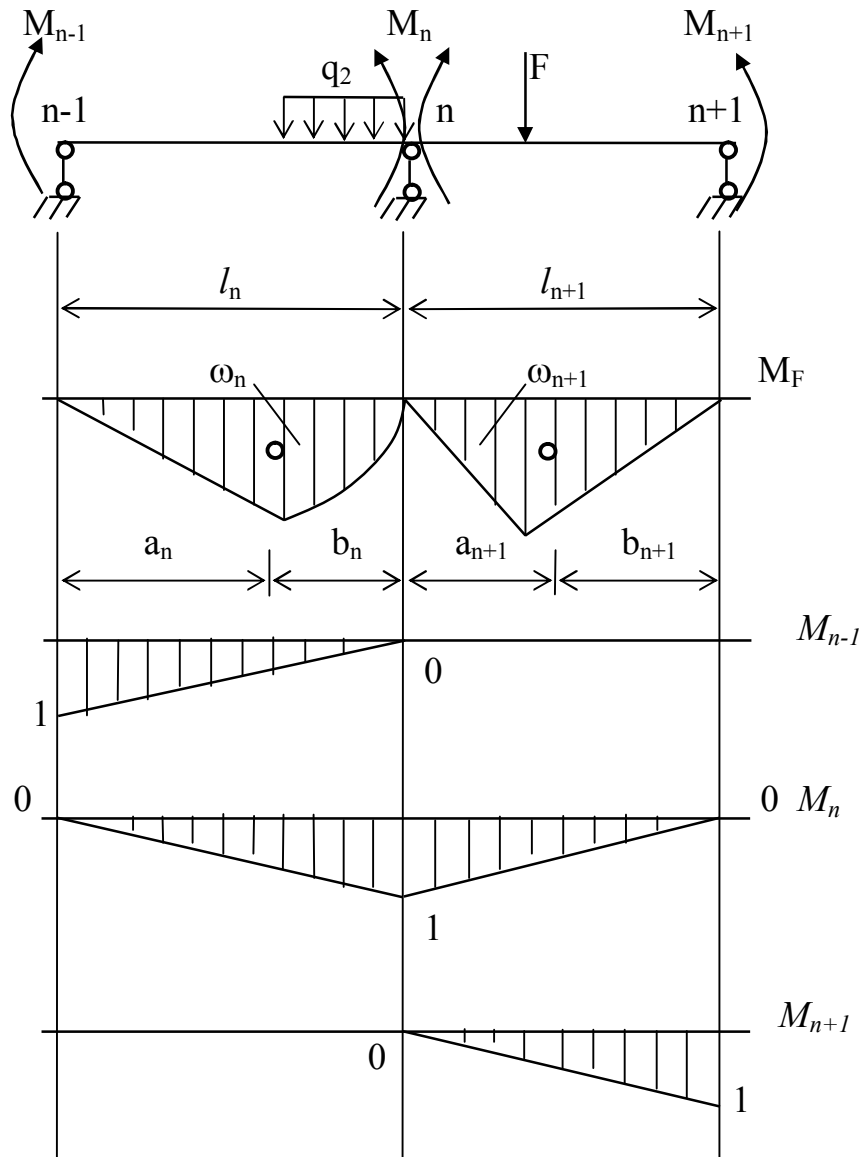


Рисунок 2.3

Це рівняння називається “рівняння трьох моментів”, тому що в нього входять опорні моменти на трьох сусідніх опорах. Цих рівнянь виходить стільки, скільки вводиться шарнірів для утворення основної системи. Як було показано вище, їхнє число дорівнює кількості проміжних шарнірних опор. Для того щоб одержати систему рівнянь послідовно записують рівняння (8.3) для кожної проміжної опори. Оскільки це рівняння отримане для n -ної опори, то для складання системи треба додати цьому індексу значення $n = 1, 2, \dots, N-2$, відповідні номерам проміжних опор. В

отриманій системі лінійних алгебраїчних рівнянь кожне рівняння буде містити три невідомих опорних моменти, а перше й останнє тільки два.

У перше й останнє рівняння системи будуть входити моменти на крайніх опорах. Якщо на крайній шарнірній опорі не прикладений зосереджений момент, то в рівнянні (8.3) його слід дорівнювати нулю. Якщо на цій опорі прикладений зосереджений момент, то в рівняння підставляється його значення. Аналогічно треба діяти, коли балка має консоль. У цьому випадку момент на крайній опорі буде дорівнювати моменту від навантаження, прикладеного до консолі.

Якщо який-небудь край балки жорстко затиснутий, то закладення слід замінити додатковим прольотом нескінченно малої довжини. У розрахунках ця заміна полягає в тому, що замість жорсткого затиснення на краю вводять два шарніри на нульовій відстані між собою.

Епюру згинальних моментів будують після знаходження невідомих опорних моментів з рівнянь (8.3). Остаточна ця епюра згинальних моментів M_n буде дорівнювати сумі епюр від заданого навантаження і від опорних моментів, що має вигляд ламаної лінії, яка з'єднує відрізки, відкладені над опорами і рівні знайденим опорним моментам.

Епюру поперечної сили одержують з побудованої раніше епюри згинальних моментів. Для цього використовують диференціальні залежності при згині (5.4-5.5), що отримані для того випадку, якщо вісь абсцис спрямована в правий бік. З наведених залежностей випливає, що поперечну силу на будь-якій ділянці, знаючи величину згинальних моментів на його границях, можна знайти в таким чином:

$$Q_{уч} = \frac{M_{діл}^{пр} - M_{діл}^{л}}{\ell_{діл}} + Q_0, \quad (8.4)$$

де $Q_{діл}$ – поперечна сила на розглянутій ділянці;

$M_{діл}^{пр}$ – значення згинаючого моменту на правій границі розглянутої ділянки;

$M_{діл}^{л}$ – значення моменту на лівій границі ділянки;

$\ell_{діл}$ – довжина ділянки;

Q_0 – доданок, присутній у тому випадку, якщо на ділянці прикладене розподілене навантаження інтенсивністю q , у цьому виразі даний доданок змінюється за довжиною ділянки, і на його границях (правій і лівій відповідно) буде дорівнювати:

$$Q_0^л = \frac{q\ell_{уч}}{2}; \quad Q_0^{пр} = -\frac{q\ell_{уч}}{2}. \quad (8.5)$$

9 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ

9.1 Основні поняття

Розглянемо різні випадки положення кульки на криволінійній поверхні (рис. 9.1). Якщо з положення 1 на ввігнутій поверхні кульку відхилити, то, зробивши декілька коливань, вона повернеться на колишнє місце. Таке положення називається положенням стійкої рівноваги. Якщо аналогічно відхилити кульку з положення 2, то вона скотиться з опуклої поверхні. Таке положення називається положенням хиткої рівноваги.



Рисунок 9.1

Стійкістю називають здатність спорудження і його частин зберігати своє первісне положення й напружено-деформований стан при діючих навантаженнях [2; 4].

Втрата стійкості – це перехід від стійкого стану в нестійкий.

У спрощеному вигляді визначення стійкої рівноваги можна сформулювати в такий спосіб: стан рівноваги є стійким, якщо при досить малих збудженнях відхилення системи протягом усього часу руху залишаються малими, причому, зменшуючи збурювання, можна зробити ці відхилення як завгодно малими.

Розрізняють стійкість положення й стійкість форми рівноваги в деформованому стані. Втрата стійкості положення є результатом порушення умов рівноваги зовнішніх сил (перекидання баштового крана, перекидання або зрушення підпірної стінки).

Втрата стійкості форми рівноваги в деформованому стані є наслідком порушення рівноваги між зовнішніми й внутрішніми силами. При цьому відбувається перерозподіл внутрішніх сил і рівновага відновлюється лише в новому деформованому стані. Далі ми будемо розглядати тільки стійкість форми рівноваги.

Розглянемо поведінку прямого стержня, стислого силою F (рис. 9.2). При величині сили, менших деякого значення, стрижень буде зберігати прямолінійну форму. Якщо при цьому його злегка відхилити й відпустити, то він, зробивши ряд коливань щодо вертикального положення, повернеться до первісної прямолінійної форми. Таким чином, вихідна прямолінійна форма стрижня є стійкою.



Рисунок 9.2

При збільшенні сили стержень випрямлюється усе повільніше й, нарешті, при певній її величині прямолинійна форма стає нестійкою. Якщо тепер відхилити стержень на деяку малу величину, то він не повернеться у первісний стан, а буде відхилятися усе далі або залишиться у відхиленому положенні.

Теоретично вихідна, прямолинійна, форма стрижня можлива, але поряд з нею з'являється нова – скривлена форма рівноваги. Найбільша сила (навантаження), до якого вихідна форма рівноваги є стійкою, називається *критичною силою* (критичним навантаженням). Основною метою розрахунків на стійкість є визначення критичного навантаження.

9.2 Формула Ейлера

Розглянемо стійкість прямого стислого стержня постійної жорсткості із шарнірно закріпленими кінцями (рис. 9.3, а). Застосовуючи статичний метод розглянемо рівновагу стрижня в суміжному стані (рис. 9.3, б). Умову рівноваги запишемо в диференціальній формі: $EIy'' = M$. Згинальний момент: $M = -y \cdot F$. З урахуванням цього: $EIy'' = -y \cdot F$. Або:

$$y'' + n^2 y = 0, \quad (9.1)$$

де

$$n^2 = \frac{F}{EI}. \quad (9.2)$$

Отримане рівняння (9.1) є однорідним диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами. Розв'язання якого буде

$$y = C_1 \cdot \sin(nx) + C_2 \cdot \cos(nx). \quad (9.3)$$

Вильни коефіцієнти C_1 і C_2 знайдемо з граничних умов: при $x = 0$ та $x = l$ маємо $y = 0$.

З першої граничної умови визначимо $C_2 = 0$.

З другої (вважаючи, що $C_2 \neq 0$, так як це відповідає недеформованому стержню, знайдемо – $\sin(nl) = 0$. Або:

$$nl = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots = k\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (9.4)$$

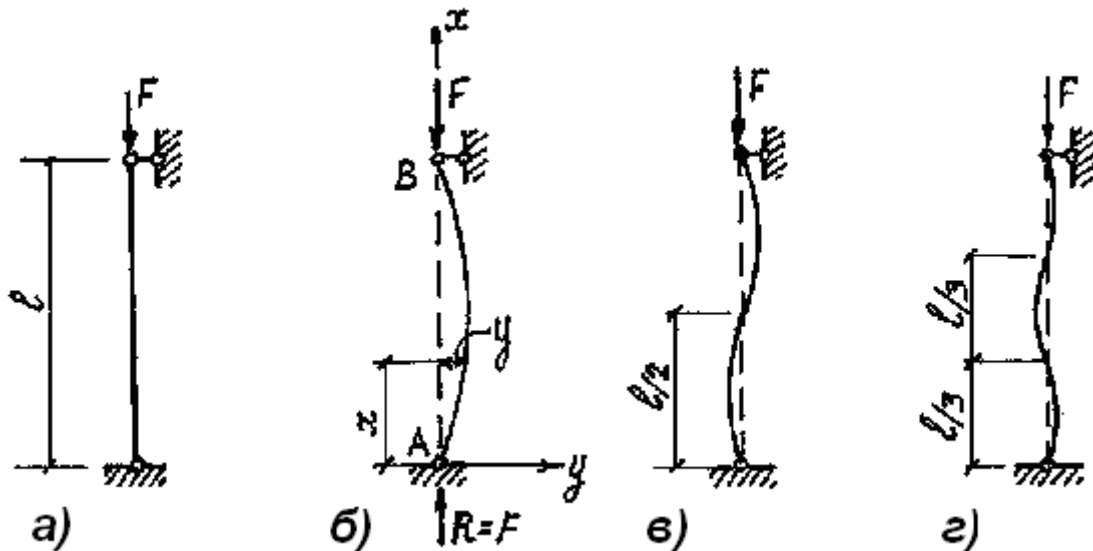


Рисунок 4.3

Розглянемо перший відмінний від нуля розв'язок $nl = \pi$. З урахуванням (9.2) отримаємо $\ell \sqrt{\frac{F_{61}}{EI}} = \pi$. Відкіля можливо визначити першу біфуркаційну сілу F_{61} :

$$F_{61} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}. \quad (9.5)$$

Підставимо $nl = \pi$ у рівняння (9.3) можна визначити, що першої біфуркаційної сили відповідає деформація стрижня по одній напівхвилі синусоїди (рис. 9.3, б). Другому розв'язку ряду (9.4) відповідає деформація стрижня по двох напівхвилях синусоїди (рис. 4.6, в). Для третього розв'язку (4.3) третя форма втрати стійкості показана на рисунку 4.6, г.

Очевидно, що цей ряд форм втрати стійкості й біфуркаційних сил нескінченний і відповідає нескінченному числу ступенів вільності стрижня. Як виходить з визначення, критичною силою є найменша з отриманих біфуркаційних сил:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}. \quad (9.6)$$

Цій вираз називаються *формулою Ейлера*.

Помітимо, що реалізація другої й далі форм втрати стійкості можлива тільки при постановці додаткових в'язей, що перешкоджають

переміщенням за першою формою втрати стійкості. Так, для реалізації другої форми втрати стійкості можлива лише при постановці опорного стрижня в середині прольоту стержня. Таким чином, постановка додаткових в'язей приводить до збільшення жорсткості системи в цілому й, відповідно, до збільшення критичної сили.

9.3 Приведена формула Ейлера

Формулу Ейлера (9.6) можна поширити на інші варіанти закріплення кінців стержня. Для цього варто звернути увагу на наступну обставину. Форми втрати стійкості шарнірно закріпленого стержня (рис. 9.3) відрізняються друг від друга кількістю напівхвиль синусоїди, що укладаються на довжині стрижня при його згині. Так, для другої форми це число становить два, для третьої – три й т.д.

Кожна частина стержня, на який укладається одна напівхвиля синусоїди l_c , поводить себе так само, як окремий стержень довжиною l_c . Дійсно, при другій формі втрати стійкості $l_c = 1/2 \times l$, при третьої $l_c = 1/3 \times l$, і т.д.

Відповідно до цього одержують формулу для визначення критичної сили при різних закріпленнях кінців стрижня:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}. \quad (9.7)$$

де μ – коефіцієнт приведення довжини, що показує частку довжини стержня, на якій при його згині укладається одна напівхвиля синусоїди.

Вираз (9.7) називаються *приведеною формулою Ейлера*.

Значення коефіцієнта μ наведені на рисунку 9.4.

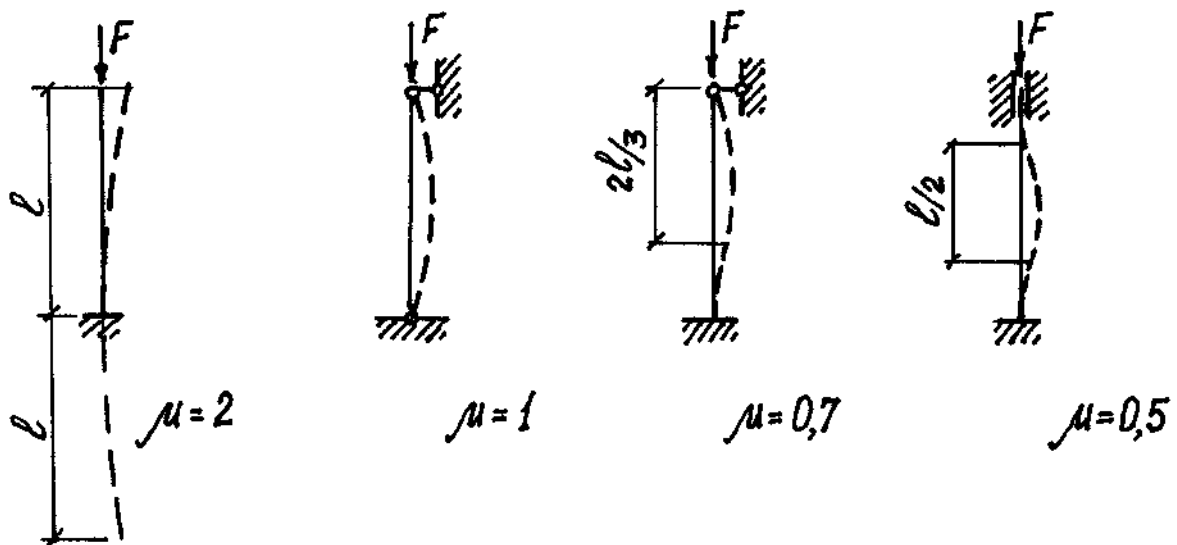


Рисунок 9.4

10 ПЛОСКІ ФЕРМИ

10.1 Визначення. Конструкція. Особливості роботи

Ферма – це система, що складається з прямих стрижнів, зеднаних у вузлах шарнірами. Жорсткість з'єднань стрижнів в реальній фермі вважається несуттєво впливає на розподіл зусиль. Навантаження вважається прикладеною у вузлах, тому стрижні ферм працюють тільки на розтяг (стиск). В розтягнутих стрижнях матеріал стрижнів використовується в роботі повністю (напруги в перерізі постійні), на відміну від зігнутих стрижнів, де середня по висоті частину перерізу недовантажена. Тому ферма є більш економічною конструкцією, ніж балка.

У фермі виділяють наступні елементи (рис. 10.1): верхній і нижній пояси, решітка, що складається з похилих стержнів – раскосів і вертикальних – стійок і підвісок.

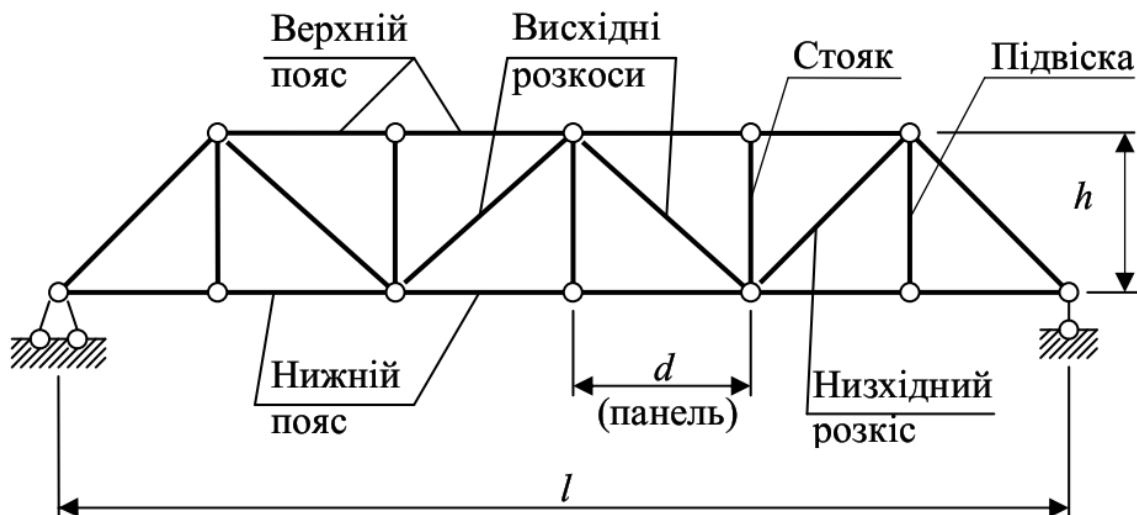


Рисунок 10.1

За напрямом опорних реакцій при вертикальному навантаженні розрізняють балкові і розпірні ферми; за призначенням: мостові та кроквяні; по контуру поясів: з паралельними поясами, з трикутним обрисом поясів, з полігональними обрисом поясів; по системі решітки: з трикутною решіткою, розкосів, двох – і багатораскосні, зі складною сіткою, наприклад, шпренгельні.

10.2 Методи розрахунку простих ферм

У спорудах, елементами яких є ферми, передбачають передачу навантаження у вузли ферми, тому її стержні працюють на розтяг-стиск. Розрахунок ферм полягає у визначенні зусиль у стержнях. Для цього застосовують статичний метод – метод перерізів. Для простих ферм залежно від розміщення та конфігурації перерізу метод перерізів

здійснюється переважно такими способами: вирізання вузлів, моментної точки, проєкцій [6; 13].

Спосіб вирізання вузлів починають застосовувати з двостержневого вузла, наприклад, для ферми, наведеної на рисунку 10.1, з вузла 1, з умов рівноваги якого знаходять зусилля N_{1-2} та N_{1-6} . Далі переходять до наступного вузла, в який входять два невідомих зусилля (вузол 2 на рисунку 10.2 в). Обчисливши зусилля N_{2-3} та N_{2-5} , продовжують розглядати наступні вузли в такій послідовності, щоб в кожному новому вузлі зустрічалось не більше двох невідомих зусиль (вузли 3,4,5). Після обчислення усіх зусиль залишається невикористаний вузол (вузол 6). Виконання умов рівноваги для цього вузла свідчить про правильність обчислення зусиль.

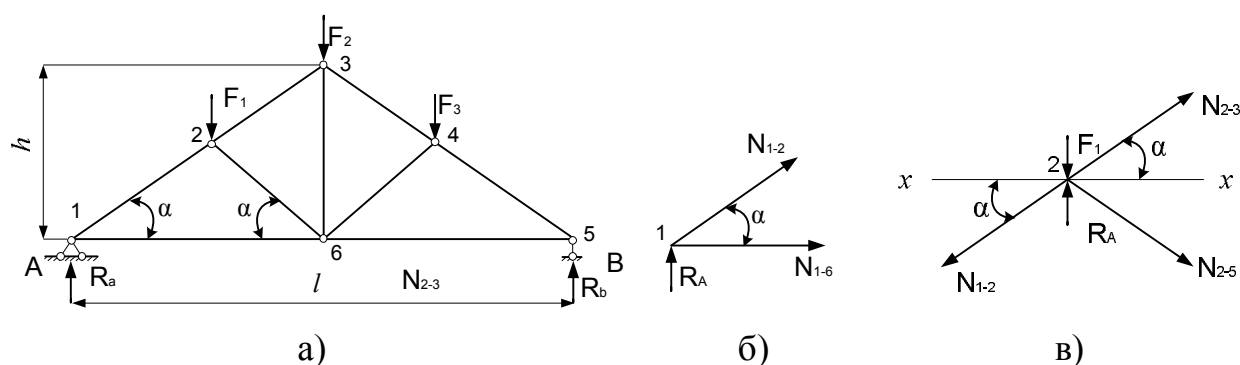


Рисунок 10.2

Перевагою способу вирізання вузлів є одноманітність обчислення зусиль. До його вад відносять накопичення похибок розрахунку при переході від вузла до вузла та необхідність обчислення допоміжних зусиль при визначенні поодиноких зусиль.

У деяких випадках для обчислення зусиль не потрібний запис умов рівноваги. Ці особливі випадки розташування стержнів та навантаження у вузлах наведено на рисунку 10.3 (в усіх випадках на рисунку 10.3 кут α не дорівнює 0 або 180°).

Спосіб моментної точки і спосіб проєкцій застосовують при обчисленні поодиноких зусиль у стержнях ферми. Ферма умовно розрізається наскрізним перерізом на дві частини, як це зображено на рисунку 10.4. Переріз проводять так, щоб розтинались три стержні з невідомими зусиллями. Три рівняння рівноваги однієї з частин розрізаної ферми дозволяють визначити ці невідомі зусилля. Вдалий вибір моментних точок та осей проєкцій сил дозволяє уникнути спільного рішення системи рівнянь. В цьому випадку кожне невідоме зусилля визначається окремо від інших.

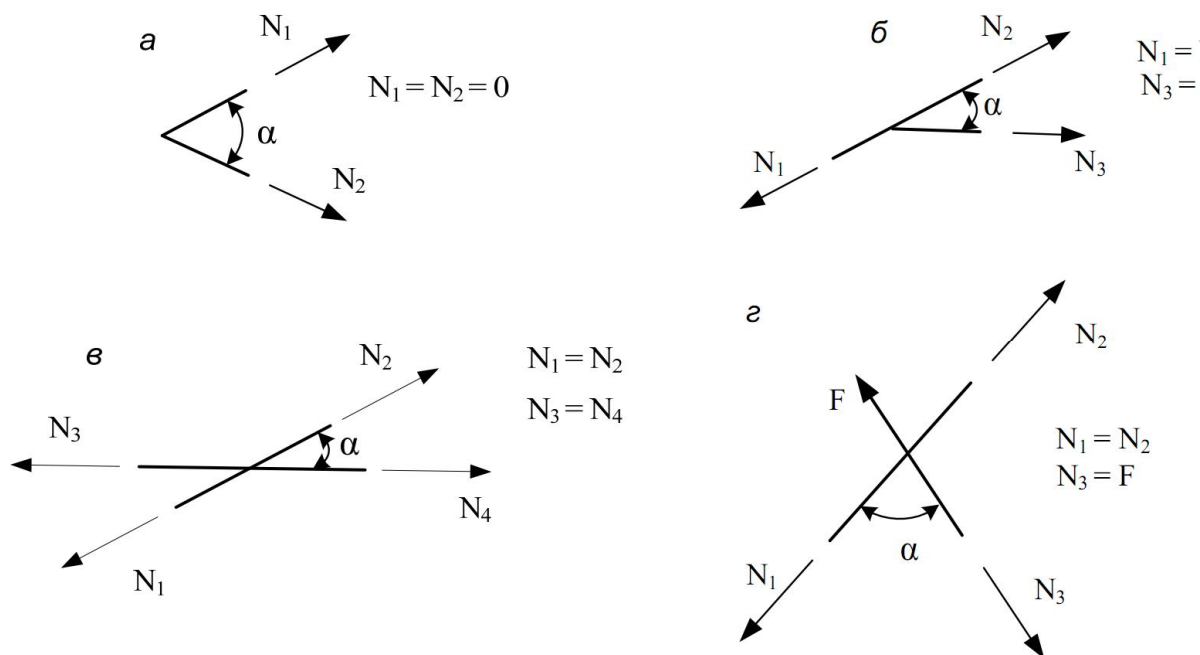


Рисунок 10.3

Стосовно вибору моментних точок: якщо зусилля у двох перерізаних стержнях перетинаються при продовженні, то ця точка перетину є моментною точкою для визначення зусилля у третьому стержні (*спосіб моментної точки*). Якщо зусилля у двох стержнях паралельні одне одному, для визначення третього зусилля беруть суму проєкцій сил на вісь, перпендикулярну до паралельних зусиль (*спосіб проєкцій*).

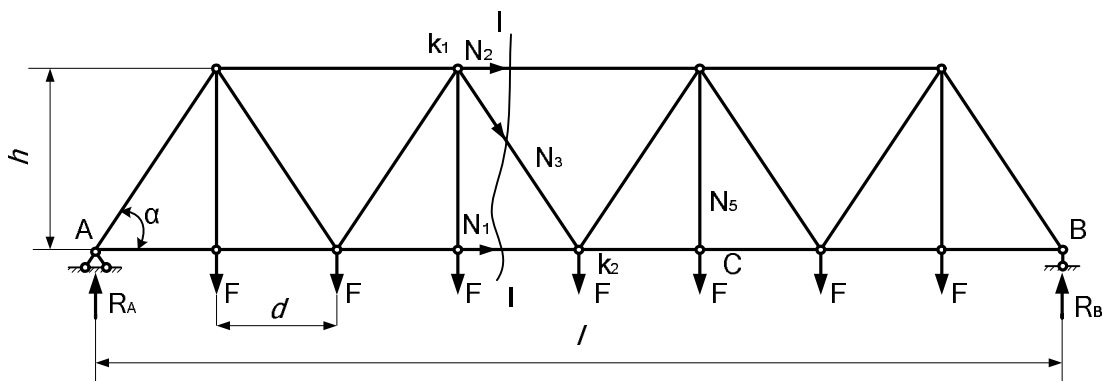


Рисунок 10.4

Для визначення зусилля N_1 у фермі, що наведена на рисунку 3, проведемо переріз I-I. Оскільки зусилля N_2 та N_3 , що попали в цей переріз, перетинаються в точці k_1 , ця точка є моментною для зусилля N_1 . Отже одержуємо.

$$\sum M_{K_1} = 0, \quad R_A \cdot 3d - F(2d + d) - N_1 \cdot h = 0;$$

$$N_1 = \frac{R_A \cdot 3d - F(2d + d)}{h}.$$

Так само для зусилля N_2 маємо моментну точку k_2 :

$$\sum M_{K_2} = 0, \quad R_A \cdot 4d - F(3d + 2d + d) - N_2 \cdot h = 0;$$

$$N_2 = \frac{R_A \cdot 4d - F(3d + 2d + d)}{h}.$$

Для обчислення зусилля N_3 скористаємося способом проекцій, бо інші розрізані стержні паралельні одне одному:

$$\sum y = 0, \quad R_A - 3F - N_3 \cdot \sin \alpha;$$

$$N_3 = \frac{R_A - 3F}{\sin \alpha}.$$

10.3 Розподіл зусиль в стержнях балкової ферми

Розглянемо балкову ферми з паралельними поясами і трикутними ґратами (рис. 10.3, а).

Опорні реакції знайдемо з умови симетрії:

$$R_A = R_B = \frac{\sum F}{2} = 3,5F$$

Проведемо перетин I-I і розглянемо рівновагу лівої частини ферми. Слідуючи вказівкам параграфа 10.2, для визначення зусилля застосуємо спосіб моментної точки

$$\sum M_{K_1} = 0; \quad R_A \cdot 3d - F(2d + d) - N_1 \cdot h = 0$$

Аналізуючи зусилля в балці (рис. 10.3, б), що замінює ферму, отримуємо $M_{K_1}^0 = R_A \cdot 3d - F(2d + d)$. Тоді $M_{K_1}^0 - N_1 \cdot h = 0$ і

$$N_1 = \frac{M_{K_1}^0}{h}. \quad (10.1)$$

Аналогічно для зусилля N_2 в стержні верхнього пояса

$$N_2 = -\frac{M_{K_2}^0}{h}. \quad (10.2)$$

Для визначення зусилля в низхідному раскосі N_3 застосуємо спосіб проекцій:

$$\sum y = 0; \quad R_A - 3F - N_3 \cdot \sin \alpha = 0.$$

Для балки (рис. 10.5, б) $Q_1^0 = R_A - 3F$. Тоді $Q_1^0 - N_3 \cdot \sin \alpha = 0$ і

$$N_3 = \frac{Q_I^0}{\sin \alpha}. \quad (10.3)$$

Аналогічно, проведя переріз II-II, знайдемо

$$N_4 = -\frac{Q_{II}^0}{\sin \alpha}. \quad (10.4)$$

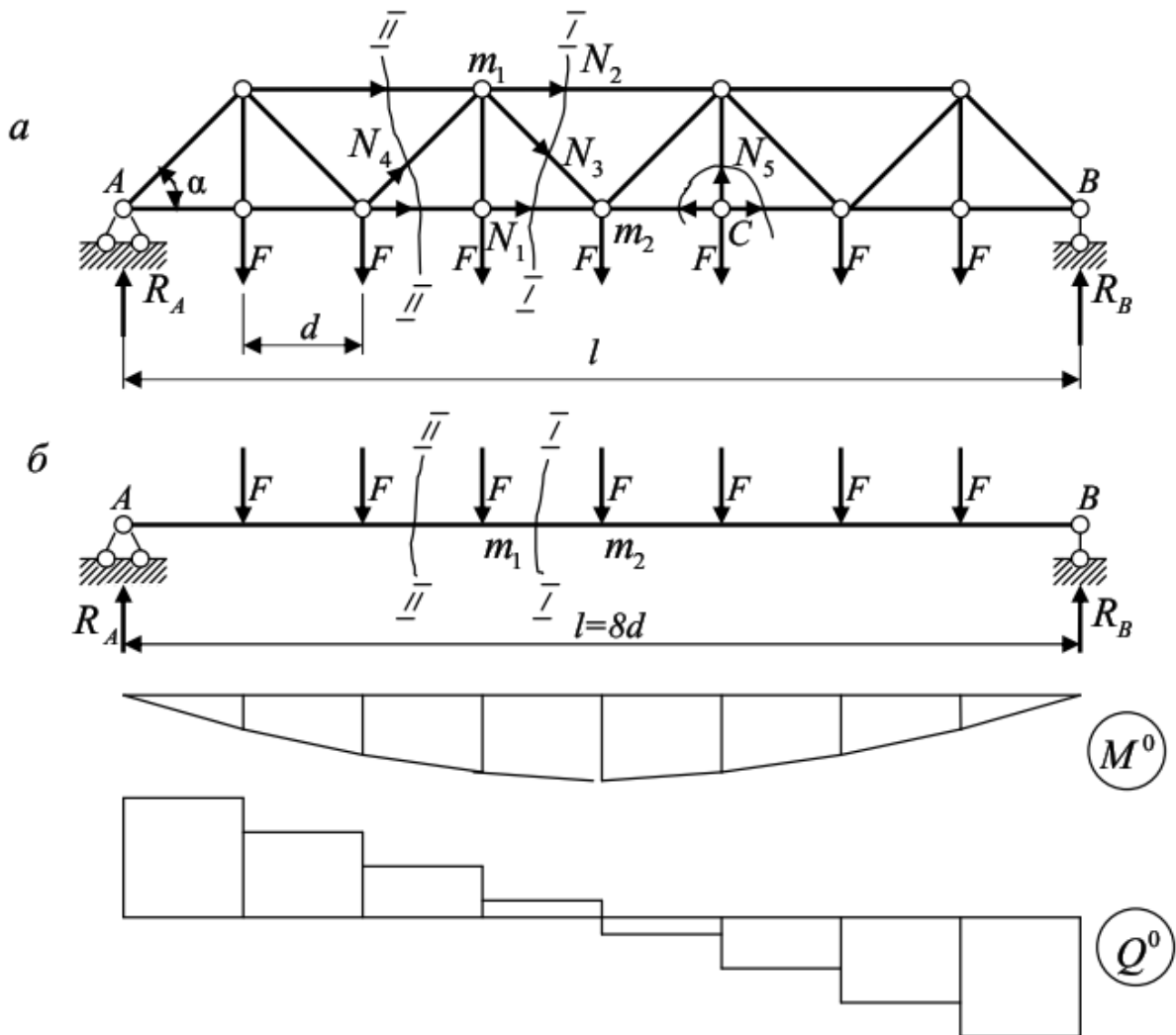


Рисунок 10.5

Таким чином, пояси ферми сприймають згинальний момент; верхній пояс стиснутий, нижній – розтягнутий. Решітка ферми сприймає поперечну силу; висхідні розкоси стиснуті, низхідні – розтягнуті.

З рівноваги вузла С випливає, що зусилля в підвісці дорівнює вузловий силі F, тобто підвіска розтягнута і сприймає місцеве навантаження.

11 РОЗПІРНІ СИСТЕМИ

11.1 Основні теоретичні відомості

Брус з криволінійною віссю малої кривизни, наведений на рисунку 11.1, є балочною системою, яку називають аркою. На відміну від простої двохопорної балки в такому брусі від вертикального навантаження з'являються значні горизонтальні опорні реакції. Ці реакції називають розпором, а системи, в яких вони з'являються, *розпiрними*. Рами теж відносяться до розпiрних систем [6; 13].

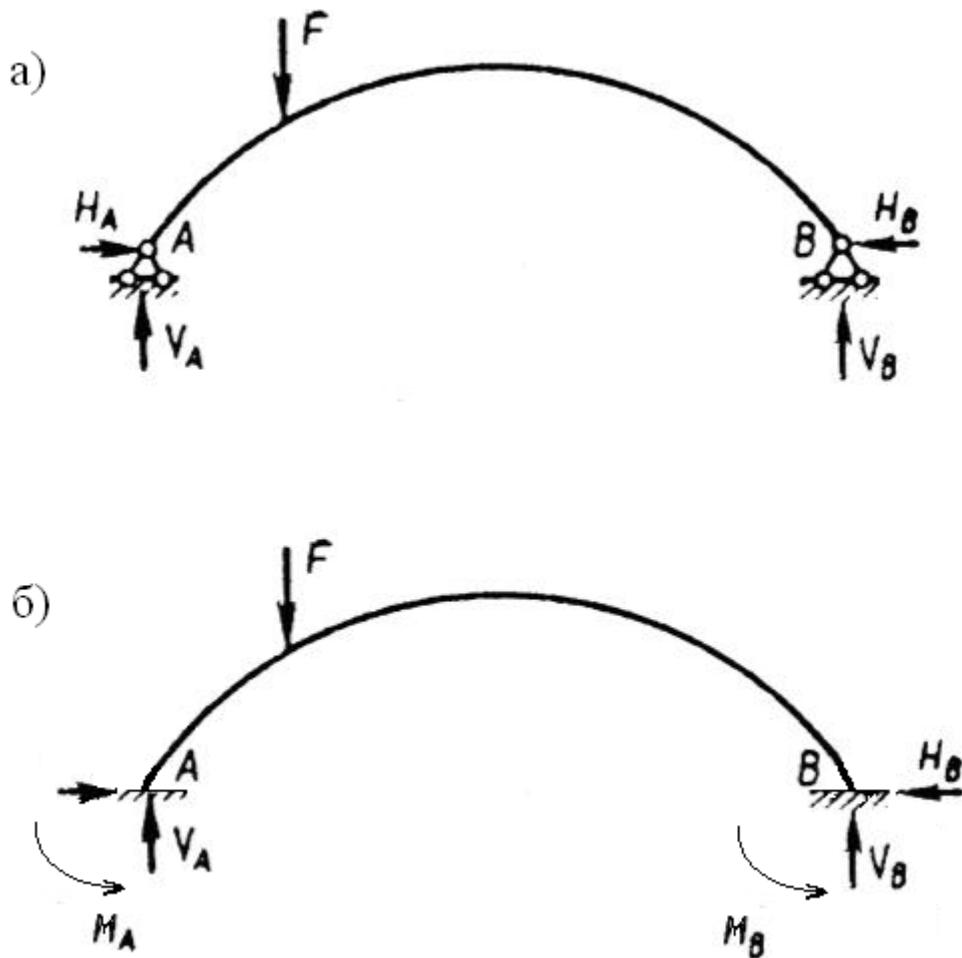


Рисунок 11.1

Розпір створює в перерізі арки чи рами момент, протилежний за знаком моменту вертикальних сил. За рахунок цього згинаючі моменти в розпiрних системах зменшуються порівняно з балками, тому що деформація згину поєднується з деформацією стиску, що робить ці системи більш економічними.

Арку, показану на рисунку 11.1, а, називають двошарнірною. Така арка один раз статично невизначна. Якщо опори арки защемлені (рис. 11.1, б), арка називається *безшарнірною*, вона тричі статично невизначна.

Арка, наведена на рисунку 11.2, називається *тришарнірною*. Вона статично визначна. Розглянемо такі арки і рами. Точки обпирання арки називають п'ятами, точку, найбільш віддалену від опор (С) – *замком*. Найкоротшу відстань від лінії, що з'єднує опори, до замка називають стрілою підйому арки і позначають f . Вісь арки найчастіше приймають окресленою за параболою або дугою кола. Арки в цьому випадку називають відповідно *параболічними* й *циркульними*.

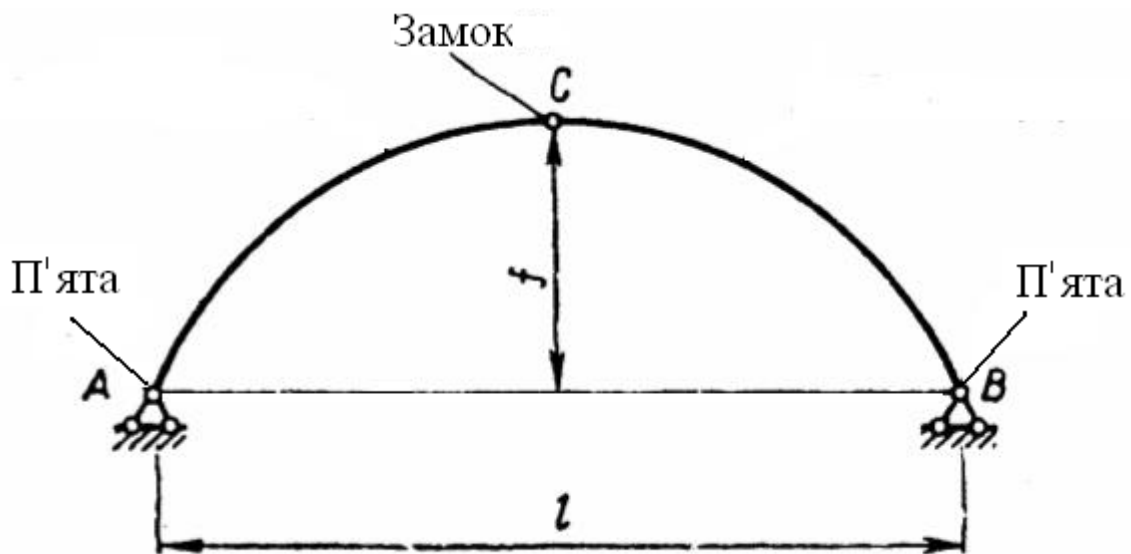


Рисунок 11.2

11.2 Визначення опорних реакцій

Ці реакції мають вертикальні й горизонтальні складові (рис. 3,а). З умови $\sum x = H_A - H_B = 0$ виходить, що горизонтальні складові опорних реакцій (розпір) арки при вертикальному навантаженні дорівнюють одна одній:

$$H_A = H_B = H. \quad (11.1)$$

Для визначення вертикальних складових реакцій використовують ті ж рівняння, що і в балці на двох опорах:

$$\sum M_A = 0,$$

звідки

$$V_B = \sum F_i \cdot a_i / l; \quad (11.2)$$

і $\sum M_B = 0$, тоді

$$V_B = \sum F_i \cdot (\ell - a_i) / \ell; \quad (11.3)$$

де F_i і a_i – сили та координати їх місця дії відповідно (рис. 11.3,а).

Реакції V_A й V_B цілком відповідають опорним реакціям простої балки того ж прогону при тому самому навантаженні (рис. 11.3,б). Тому ці реакції називають балочними.

Для визначення розпору використовують умову рівності нулю згинаючого моменту в проміжному шарнірі С (замку). Цей момент можна записувати для лівих або правих сил:

$$\sum M_C^{\text{л}} = 0 \quad \text{або} \quad \sum M_C^{\text{пр}} = 0. \quad (11.4)$$

Наприклад, для правих сил знаходимо

$$\sum M_C^{\text{пр}} = V_B \cdot \frac{\ell}{2} - F_2 \left(a_2 - \frac{\ell}{2} \right) - H_B \cdot f = 0. \quad (11.5)$$

З одержаного рівняння легко визначити розпір. Звернемо увагу на те, що усі члени лівої частини рівняння (11.5), крім складової від розпору, являють собою балочний згинаючий момент M_C^0 у перерізі С (рисунку 11.3, б). Таким чином, одержуємо залежність

$$H = M_C^0 / f. \quad (11.6)$$

У цьому виразі і надалі індекс 0 означає, що відповідна величина визначена для балки. Звідси виходить, що розпір зменшується при збільшенні стріли підйому.

11.3 Внутрішні зусилля в арці

Розглянемо обчислення внутрішніх зусиль у довільному перерізі К з координатами x_K і y_K (рис. 11.3,а).

Визначаємо згинаючий момент у перерізі К по лівим від перерізу силам:

$$M_K = V_A \cdot x_K - F_1(x_K - a_1) - H \cdot y_K.$$

Одержуємо

$$M_K = M_K^0 - H \cdot y_K, \quad (11.7)$$

де $M_K^0 = V_A \cdot x_K - F_1(x_K - a_1)$.

Рівняння (11.7) підтверджує, що згинаючі моменти в арці менші, ніж у балці. Різниця в згинаючих моментах визначається наявністю моменту, створеного розпором.

Можна вирішити питання про окреслення осі арки за законом, при якому згинаючі моменти в усіх її перетинах дорівнюють нулю. Знаходимо з (11.7), що цей закон відповідає рівнянню

$$y = M^0 / H = k \cdot M^0,$$

яке пропорційне балочному згинаючому моменту. Така арка називається раціональною. Наприклад, при дії рівномірно розподіленого вздовж прольоту навантаження q отримуємо рівняння осі арки за параболічним законом:

$$y = (4f/\ell^2) \cdot x \cdot (\ell - x).$$

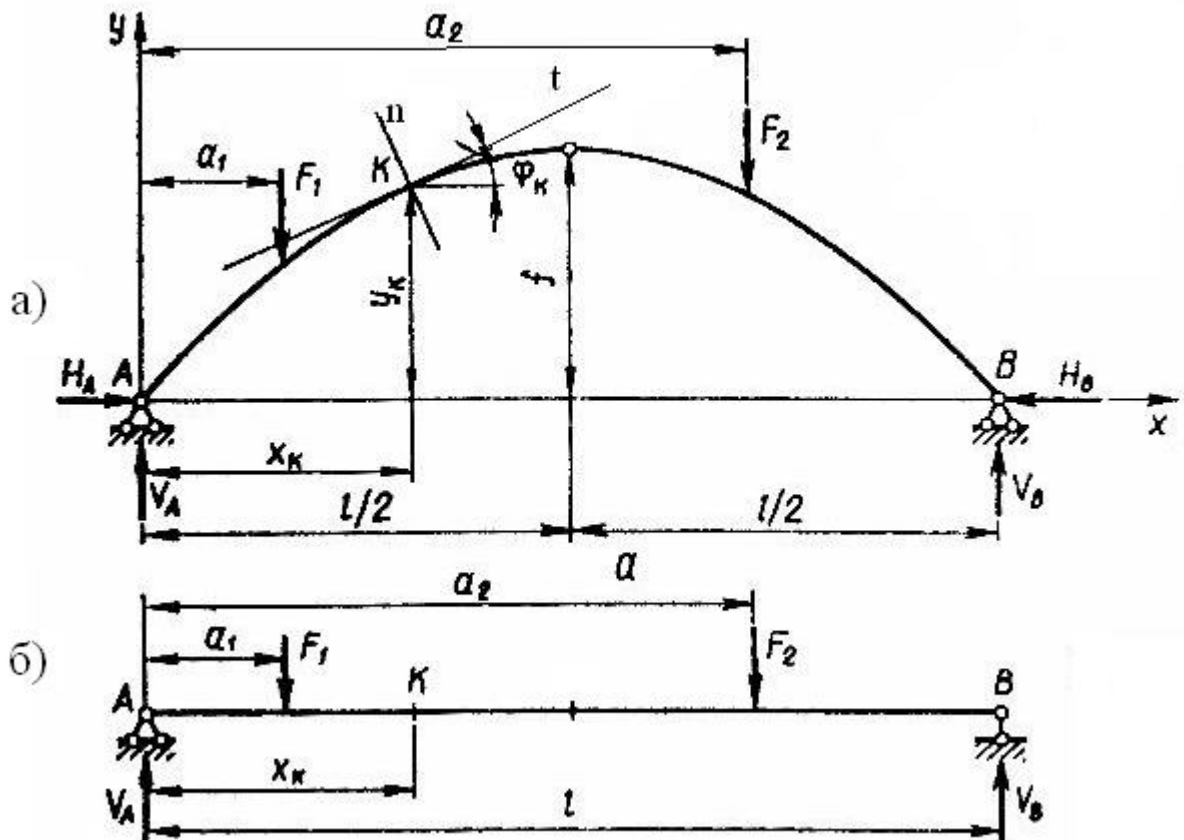


Рисунок 11.3

Для визначення поперечної і поздовжньої сил у перерізі K запишемо суму проекцій (наприклад, лівих) сил відповідно на нормаль n і на дотичну до осі арки t . Кут нахилу між дотичною до осі арки і горизонталлю в точці K позначимо φ_K (рис. 11.3, а).

$$Q_K = (V_A - F_1) \cdot \cos \varphi_K - H \cdot \sin \varphi_K;$$

$$N_K = -(V_A - F_1) \sin \varphi_K - H \cdot \cos \varphi_K.$$

У наведених рівняннях складові, взяті в дужки, дорівнюють поперечній силі в перерізі балки К (рис. 11.3, б). Тому рівняння для поперечної і поздовжньої сил записують так:

$$Q_K = Q_K^o \cdot \cos \varphi_K - H \cdot \sin \varphi_K; \quad (11.8)$$

$$N_K = -Q_K^o \cdot \sin \varphi_K - H \cdot \cos \varphi_K. \quad (11.9)$$

З рівняння (11.9) видно, що поздовжні сили в арці при дії вертикального навантаження завжди стискаючі. Епюри внутрішніх зусиль в арці змінюються за нелінійними законами (11.7 – 11.9). Для побудови епюр арку розбивають уздовж осі x на рівні відрізки довжиною Δx . Обчисливши в одержаних таким чином перерізах внутрішні зусилля M , Q , N , за ними будують епюри. Більш раціонально при побудові епюр обчислювати значення M , Q , N в перерізах на межі ділянок (точки прикладання зосереджених сил і моментів, точки на межі розподілених навантажень і в одному чи декількох проміжних перерізах (залежно від характеру епюри і довжини ділянки).

Для параболічної арки з віссю, окресленою за рівнянням $y = \frac{4f}{\ell^2} x(\ell - x)$, початок координат розташований на лівій опорі, визначають

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{\ell^2} (\ell - 2x), \quad (11.10)$$

а потім $\sin \varphi$ і $\cos \varphi$.

Для циркульної арки, вісь якої окреслена по дузі кола

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\ell}{2} - x\right)^2} - R + f, \quad (11.11)$$

початок координат на лівій опорі, де

$$R = \frac{f}{2} + \frac{\ell^2}{8f}; \quad \sin \varphi = \frac{\ell - 2x}{2R}; \quad \cos \varphi = \frac{y + R - f}{R}. \quad (11.12)$$

Розрахунок тришарнірної рами відрізняється від розрахунку інших рам лише визначенням опорних реакцій. Їх знаходять з рівнянь рівноваги, аналогічних рівнянням рівноваги тришарнірної арки. Епюри внутрішніх зусиль будують на осях рами. Для розрахунку тришарнірної рами на вертикальне навантаження внутрішні зусилля можуть бути визначені за формулами (11.7 – 11.9). Для тришарнірної рами ординати й необхідні для розрахунків кути нахилу стержнів рами, які співпадають з нахилом дотичної до них, визначають безпосередньо із схеми рами.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дарков, А. В. Сопротивление материалов [Текст] / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : «Высшая школа». 1975. – 654 с.
2. Беляев, Н. М. Сопротивление материалов [Текст] / Н. М. Беляев. – М., Л. : ГИТТЛ, 1951. – 856 с.
3. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності [Текст] / В. Г. Піскунов, Ю. М. Феодоренко, В. Ю. Шевченко та ін. . – К. : Вища школа. 1994. – 423 с.
4. Сопротивление материалов [Текст] / Под общ. ред. Г. С. Писаренко. – К. : Вища школа. 1979. – 696 с.
5. Чихладзе, Е. Д. Опір матеріалів [Текст] : Навч. Посібник / Е. Д. Чихладзе. – Х. : УкрДАЗТ. 2002. – 362 с.
6. Шутенко, Л. Н. Строительная механика. Краткий курс. Раздел 1. Статически определимые стержневые системы [Текст] / Л. Н. Шутенко, В. П. Пустовойтов, Н. А. Засядько. – Х. : ХГАГХ, 2003. – 90 с.
7. Шпачук, В. П. Теоретична механіка: Статика [Текст] : Конспект лекцій / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, О. І. Рубаненко, А. О. Гарбуз. – Х. : ХНАМГ, 2005. – 95 с.
8. Шутенко, Л. Н. Основы теории упругости и пластичности [Текст] : Уч. пособие для студентов строительных специальностей / Л. Н. Шутенко, Н. А. Засядько, А. А. Чупрынин. – Х. : ХНАГХ, 2007. – 135 с.
9. Шутенко, Л. М. Опір матеріалів [Текст] : Навч.–метод. посібник до лабораторних робіт / Л. М. Шутенко, В. П. Пустовойтов, М. А. Засядько. – Х. : ХНАМГ, 2004. – 79 с.
10. Опір матеріалів. Ч. 1. Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при базових навантаженнях [Текст] : Конспект лекцій / За заг. ред. В. П. Шпачука; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; – Х. : ХНАМГ, 2010. – 139 с.
11. Опір матеріалів. Ч. 2. Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при складних навантаженнях Опір матеріалів стержневих елементів конструкцій при базових навантаженнях [Текст] : Конспект лекцій / За заг. ред. В. П. Шпачука; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; – Х. : ХНАМГ, 2014.– 109 с.
12. Шутенко, Л. Н. Строительная механика [Текст] : Краткий курс. Раздел 3 / Л. Н. Шутенко, В. П. Пустовойтов, Н. А. Засядько. – Х. : ХГАГХ, 2005. – 116 с.
13. Шутенко, Л. Н. Строительная механика: Конспект лекцій з курсу «Будівельна механіка» [Текст] / Л. Н. Шутенко, В. П. Шпачук, Н. А. Засядько. – Х. : ХГУГХ, 2013. – 136 с.

Навчальне видання

ЧУПРИНІН Олександр Олексійович,

ПУШНЯ Валентин Олександрович

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«ОПІР МАТЕРІАЛІВ І БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА»

*(для студентів 1-2 курсу денної і заочної форм навчання за
спеціальністю 192 – Будівництво та цивільна інженерія
(спеціалізація (освітня програма) «Гідротехніка
(Водні ресурси)»)*

Відповідальний за випуск *А. О. Гарбуз*

За авторською редакцією

Комп'ютерний набір і верстання *О. О. Чупринін*

План 2017, поз. 121 Л

Підп. до друку 17.02.2017. Формат 60×84 1/16

Друк на ризографі. Ум.-друк. арк. 3,8

Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,

вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002

Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 5328 від 11.04.2017.