МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

Л. П. Вороновська

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Модуль 2

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2018

УДК 517(042.3)

Вороновська Л. П. Вища математика. Модуль 2 : конспект лекцій для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології / Л. П. Вороновська ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 161 с.

Автор
канд. пед. наук Л. П. Вороновська

Рецензент
Л. Б. Коваленко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова)

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 5 від 25.11.2017.

Конспект лекцій складено з метою допомогти студентам будівельних спеціальностей вишів під час підготовки до занять та іспитів з вищої математики.

© Л. П. Вороновська, 2018
© ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2018

ЗМІСТ

Вступ	……..	5
Лекція 1	Первісна функція і невизначений інтеграл. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів. Безпосереднє інтегрування……	6
Лекція 2	Методи інтегрування заміною змінної та інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен……	11
Лекція 3	Інтегрування раціональних дробів. Метод інтегрування частинами……..	17
Лекція 4	Інтегрування тригонометричних функцій……..	30
Лекція 5	Інтегрування ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок. Визначений інтеграл. Основні властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона – Лейбниця……..	40
Лекція 6	Інтегрування частинами і заміна змінної у визначеному інтегралі. Невласні інтеграли……..	49
Лекція 7	Геометричні застосування визначеного інтеграла: площа плоскої фігури; довжина дуги плоскої кривої; об’єм тіла обертання……..	61
Лекція 8	Поняття про диференціальне рівняння. Загальний і частинний розв’язки та їх геометричний зміст. Початкові та граничні умови. Початкова задача і крайова задача. Умови існування й єдиності розв'язку задачі Коші…….	77
Лекція 9	Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні рівняння першого порядку. Лінійні рівняння першого порядку…….	83
Лекція 10	Диференціальні рівняння вищих порядків. Інтегрування диференціальних рівнянь шляхом зниження порядку……	93

Лекція 11 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Структура загального розв'язку. Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку. Принцип суперпозиції…… 102

Лекція 12 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною спеціального вигляду. Відшукання частинного розв'язку, що відповідає виду правої частини……. 108

Лекція 13 Поняття функції багатьох змінних. Область визначення функції двох змінних. Поверхня як графік функції двох змінних. Лінії рівня функції двох змінних. Поверхні рівня функції трьох змінних. Границя та неперервність функції багатьох змінних……. 122

Лекція 14 Частинні похідні. Повний диференціал функції багатьох змінних. Складені функції та їх диференціювання. Неявні функції та їх диференціювання. Частинні похідні вищих порядків……. 129

Лекція 15 Поняття екстремуму функції багатьох змінних. Необхідні та достатні умови екстремуму функції багатьох змінних. Найменше та найбільше значення функції двох змінних у замкненій області…… 142

Лекція 16 Похідна за напрямком і градієнт. Зв'язок градієнта з поверхнями рівня. Дотична площина і нормальна пряма до поверхні…… 151

Список рекомендованої літератури…… 161

Вступ

Конспект лекцій побудований за модульною технологією навчання згідно з робочими програмами курсу «Вища математика» для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології.

До конспекту увійшли лекції за темами «Інтегрування функцій однієї змінної», «Диференціальні рівняння» та «Функції декількох змінних».

Доступне, коротке подання теоретичного матеріалу супроводжується детальними ілюстраціями, великою кількістю прикладів для практичного закріплення вивченого.

Лекція 1

Первісна функція і невизначений інтеграл. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів. Безпосереднє інтегрування

1.1 Первісна функція і невизначений інтеграл

Займаючись диференціюванням функції, ми ставили перед собою завдання знайти похідну даної функції. Обернене завдання: знайти функцію, знаючи її похідну.

Визначення. *Первісною функції $f(x)$ називається функція F(x), похідна якої дорівнює даній функції*

$$F'(x) = f(x).$$

Нехай $y = x^2$. Похідна від якої функції дорівнює x^2?

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2.$$

Тому первісною від x^2 є функція $\frac{x^3}{3}$, але не тільки вона, похідною від функції $\frac{x^3}{3} - 5$ і $\frac{x^3}{3} + 14$, також є x^2, тобто $\frac{x^3}{3} + C$, де C – довільна постійна. Будь-яка функція $\frac{x^3}{3} + C$ є первісною функції x^2.

Теорема. *Будь-яка неперервна функція має нескінченну множину первісних, причому будь-які дві з них відрізняються одна від одної лише постійним доданком.*

$$(F(x) + C)' = f(x);$$
$$F'(x) = f(x).$$

Визначення. *Знаходження первісної називається невизначеним інтегруванням, а множина всіх первісних від функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається, як*

$$\int f(x)dx,$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція; $f(x)dx$ – підінтегральний вираз; x – змінна інтегрування.

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, C – довільна постійна.

Невизначене інтегрування є дією, оберненою до диференціювання. Правильність інтегрування можна перевірити диференціюванням отриманого виразу.

Графік первісної функції $f(x)$ називається інтегральною кривою функції $y = f(x)$ (рис. 1.1).

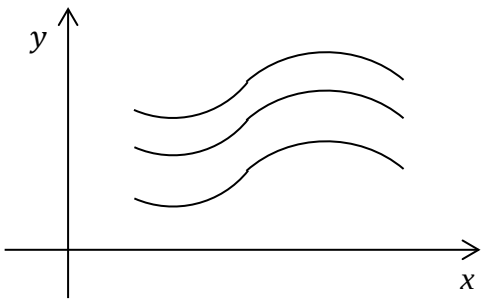

Рисунок 1.1

Невизначений інтеграл графічно представляється множиною всіх інтегральних кривих, отриманих при неперервному паралельному русі.

1.2 Основні властивості невизначеного інтеграла

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$.
2. $d(\int f(x)dx) \quad = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. ***Теорема 1.*** *Сталий множник підінтегральної функції можна виносити за символ інтеграла:*

$$\int C\, f(x)\, dx = C \int f(x)dx,$$

де C – константа.

5. ***Теорема 2.*** *Інтеграл від алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі інтегралів від кожної з функцій:*

$$\int \big(f(x) + \varphi(x) + \cdots + \psi(x)\big)dx =$$

$$= \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx + \cdots + \int \psi(x)dx,$$

де $f(x),\ \varphi(x), \dots, \psi(x) -$ функції незалежної змінної x.

6. ***Теорема 3.*** *Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд при підстановці замість незалежної змінної будь-якої диференційованої функції від неї, тобто якщо*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ то і } \int f(U)du = F(U) + C,$$

де $U = \varphi(x)$ – диференційована функція від x.

Доведення. З того що

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

випливає $F'(x) = f(x)$. Якщо $F(U) = F\big(\varphi(x)\big)$, то маємо:

$$dF(U) = F'(U)dU = f(U)dU,$$

звідси

$$\int f(U)dU = \int dF(U) = F(U) + C.$$

7. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

1.3 Таблиця основних інтегралів

1. $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1,\ \alpha \epsilon R.$
2. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$
3. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C.$
4. $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C.$
5. $\int a^u = \frac{a^u}{lna} + C, a > 0, a \neq 1.$
6. $\int e^u du = e^u + C.$
7. $\int sinu\, du = -cosu + C.$
8. $\int cosu\, du = sinu + C.$
9. $\int \frac{du}{cos^2u} = tgu + C.$
10. $\int \frac{du}{sin^2u} = -ctgu + C.$
11. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{u}{a} + C, a\epsilon R, a \neq 0.$
12. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, a\epsilon R, a \neq 0.$
13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C, |a| > |u|, a \neq 0.$
14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}} = ln\left|u + \sqrt{u^2+A}\right| + C.$

Зауважимо, що $\alpha, A\ i\ a$ – сталі, u – незалежна змінна або будь-яка диференційована функція від незалежної змінної.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл.

Розв'язання.

а) $$\int sin5x\,dx = \begin{vmatrix} u = 5x \\ du = 5dx \\ dx = \dfrac{du}{5} \end{vmatrix} = \int sinu\,\frac{du}{5} = -\frac{1}{5}cos\,u + C =$$

$$= -\frac{1}{5}cos\,5x + C\,;$$

б) $$\int e^{-3x}dx = \begin{vmatrix} u = -3x \\ du = -3dx \\ dx = -\dfrac{du}{3} \end{vmatrix} = \int e^{u}\left(-\frac{du}{3}\right) = -\frac{1}{3}e^{u} + C =$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3x} + C.$$

Для безпосереднього інтегрування будемо використовувати таку формулу:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

Приклад . Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2+3x}} = \int \frac{dx}{(2+3x)^{\frac{1}{5}}} = \int (2+3x)^{-\frac{1}{5}}dx = \frac{(2+3x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}\cdot 3} + C =$$

$$= -\frac{5\sqrt[5]{(2+3x)^4}}{12} + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{1+9x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{1+9x} = \frac{1}{9} ln|1+9x| + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{3x^2+12}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{3x^2+12} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} arctg\frac{x}{2} + C = \frac{1}{6} arctg\frac{x}{2} + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{15-5x^2}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{15-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Лекція 2
Методи інтегрування заміною змінної. Інтегрування функцій, що містять квадратний тричлен

2.1 Метод інтегрування заміною змінної

Метод заміни змінної (***підстановки***), що ґрунтується на властивості інваріантності, є основним при інтегруванні. Зокрема, підведення під знак диференціала можна розглядати як неявне застосування цього методу.

Нехай необхідно обчислити інтеграл $\int f(x)dx$, але безпосередньо підібрати первісну не можна, хоча відомо, що вона

існує.

Запишемо інтеграл $\int f(x)dx$ у вигляді $\int q\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx$, тобто виділимо диференціал деякої функції $\varphi(x)$ і, застосовуючи підстановку $u = \varphi(x)$, перейдемо в інтегралі $\int q\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx$ до нової змінної:

$$\int q\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \int q(u)\,du.$$

Після цього знайдемо розв'язок інтегралу. Повернемося до попередньої змінної x, припустивши, що $u = \varphi(x)$:

$$\int q\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \begin{vmatrix} q\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx = q(u)du \\ u = \varphi(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \int q(u)du = Q(u) + C = Q\big(\varphi(x)\big) + C.$$

Зауваження. За нову змінну вибирають функцію, похідна (диференціал) якої у вигляді множника, по суті, вже міститься у підінтегральному виразі.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-3x^2}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{8-3x^2}} = \begin{vmatrix} u = 8 - 3x^2 \\ du = -6xdx \\ xdx = -\dfrac{1}{6}du \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\int \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= -\tfrac{1}{6}\cdot 2\sqrt{u} + C = -\tfrac{1}{3}\sqrt{8-3x^2} + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2}dx$.

Розв'язання. Заданий інтеграл можна подати у вигляді:

$$\int \frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{arctg2x} \cdot \frac{2}{1+4x^2}dx = \left| \begin{array}{c} u = arctg2x \\ du = \dfrac{2}{1+4x^2}dx \\ \dfrac{du}{2} = \dfrac{1}{1+4x^2}dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int e^u \cdot du = \frac{1}{2}e^{arctg2x} + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{x^{12}+7}}$.

Розв'язання. Маємо,

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{x^{12}+7}} = \int \frac{x^5dx}{\sqrt{(x^6)^2+7}} = \left| \begin{array}{c} t = x^6 \\ dt = 6x^5dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{6x^5dx}{\sqrt{(x^6)^2+7}} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+7}} =$$

$$= \frac{1}{6}ln\left|t + \sqrt{t^2+7}\right| + C = \frac{1}{6}ln\left|x^6 + \sqrt{x^{12}+7}\right| + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл:

а) $\int sin^4xcosxdx$, б) $\int ctgxdx$.

Розв'язання. а) $\int sin^4xcosxdx = \int (sinx)^4cosxdx =$

$$= \left| \begin{array}{c} u = sinx \\ du = cosxdx \end{array} \right| = \int u^4du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{(sinx)^5}{5} + C;$$

б) $\int ctgx\,dx = \int \frac{cosx\,dx}{sinx} = \left| \begin{array}{c} u = sinx \\ du = cosxdx \end{array} \right| = \int \frac{du}{u} =$

$$= ln|u| + C = ln|sinx| + C.$$

Інтегрування функцій, які містять квадратний тричлен

Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{dx}{Ax^2+Bx+C}$ або $\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$

Щоб проінтегрувати ці інтеграли, необхідно виділити повний квадрат у знаменнику підінтегральної функції. Використуємо формулу «квадрат суми (різниці)» $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ і виконаємо наступні дії:

$$Ax^2 + Bx + C = \left| \begin{array}{c} a^2 = Ax^2; a = x\sqrt{A}; \\ 2ab = Bx; 2x\sqrt{A}b = Bx; \\ b = \dfrac{B}{2\sqrt{A}};\ \ b^2 = \dfrac{B^2}{4A} \end{array} \right| =$$

$$= Ax^2 + Bx + \frac{B^2}{4A} - \frac{B^2}{4A} + C = \left(Ax^2 + Bx + \frac{B^2}{4A}\right) + \left(C - \frac{B^2}{4A}\right) =$$

$$= \left(x\sqrt{A} + \frac{B}{2\sqrt{A}}\right)^2 \pm k^2,$$

де $k^2 = C - \frac{B^2}{4A}$. Знак плюс або мінус обирається залежно від того, яким є другий доданок: додатним чи від'ємним.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{x^2-8x+13}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у виразі, розміщеному в знаменнику підінтегральної функції. Отже,

$$x^2 - 8x + 13 = \left| \begin{array}{cc} a^2 = x^2 & a = x \\ 2ab = 8x & 2xb = 8x \\ b = 4 & b^2 = 16 \end{array} \right| =$$

$$= (x^2 - 8x + 16) - 16 + 13 = (x - 4)^2 - 3.$$

Підставимо отриманий вираз в початковий інтеграл і скористаємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{dx}{x^2-8x+13} = \int \frac{dx}{(x-4)^2-3} = \begin{vmatrix} u = x-4 \\ du = dx \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{du}{u^2-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}} ln \left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} ln \left|\frac{x-4-\sqrt{3}}{x-4+\sqrt{3}}\right| + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{5+6x-x^2}}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у виразі, під коренем в знаменнику підінтегральної функції:

$$5+6x-x^2 = -(x^2-6x-5) = \begin{vmatrix} a^2 = x^2 & a = x \\ 2ab = 6x & 2xb = 6x \\ b = 3 & b^2 = 9 \end{vmatrix} =$$

$$= -(x^2-6x+9-9-5) = -((x-3)^2-14) = 14-(x-3)^2.$$

Підставимо отриманий вираз в початковий інтеграл і скористаємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5+6x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{14-(x-3)^2}} = \begin{vmatrix} u = x-3 \\ du = dx \end{vmatrix} =$$

$$= arcsin\frac{u}{\sqrt{14}} + C = arcsin\frac{x-3}{\sqrt{14}} + C.$$

Інтеграли, які мають вигляд $\int \frac{(Mx+N)dx}{Ax^2+Bx+C}$ або $\int \frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$

Розглянемо більш загальні інтеграли. Зауважимо, що в чисельнику розташовано многочлен першого порядку, а в знаменнику (або в підкореневому виразі знаменника) – многочлен другого порядку. За методом інтегрування заміною змінної знаменник (або підкореневий вираз знаменника)

позначимо як u і доповнюємо чисельник до вигляду отриманого du шляхом тотожних перетворень.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x+3}{x^2+4x-2} dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{x+3}{x^2+4x-2} dx = \begin{vmatrix} u = x^2+4x-2 \\ du = (2x+4)dx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+3)}{x^2+4x-2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6+4-4}{x^2+4x-2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)+2}{x^2+4x-2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x-2} dx + \int \frac{dx}{x^2+4x-2} = I_1 + I_2.$$

Знайдемо отримані інтеграли:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x-2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} ln|u| + C =$$
$$= \frac{1}{2} ln|x^2+4x-2| + C;$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2+4x-2} = \begin{vmatrix} a^2 = x^2; \ a = x \\ 2ab = 4x; 2xb = 4x \\ b = 2; \ b^2 = 4 \end{vmatrix} =$$
$$= \int \frac{dx}{x^2+4x+4-4-2} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-6} =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x+2 \\ du = dx \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{6}} ln\left|\frac{x+2-\sqrt{6}}{x+2+\sqrt{6}}\right| + C.$$

Остаточно маємо:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x-2} = \frac{1}{2} ln|x^2+4x-2| + \frac{1}{2\sqrt{6}} ln\left|\frac{x+2-\sqrt{6}}{x+2+\sqrt{6}}\right| + C$$

Лекція 3

Інтегрування раціональних дробів. Метод інтегрування частинами

3.1 Інтегрування раціональних дробів

Розглянемо методику інтегрування одного з найважливіших класів елементарних функцій – ***раціональних функцій***. Будь-яка елементарна функція $R(x)$ може бути представлена у вигляді дробу $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ - многочлени: $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Нагадаємо, що якщо максимальний степінь чисельника менший за максимальний степінь знаменника $(m < n)$, дріб називається ***правильним***, якщо максимальний степінь чисельника більший або дорівнює максимальному степеню знаменника $(m \geq n)$, дріб називається ***неправильним***. Якщо $m \geq n$, то виконавши операцію ділення многочленів, будь-який неправильний дріб може бути представлений у вигляді суми многочлену (ціла частина) і правильного дробу (отриманий многочлен – результат ділення; чисельник отриманого правильного дробу – залишок від ділення):

$$R(x) = N(x) + \frac{P_{n-1}(x)}{Q_n(x)}.$$

Інтегрувати можна лише правильні раціональні дроби. Інтегрування многочлену $N(x)$ не складає труднощів, проблема полягає в інтегруванні правильного раціонального дробу.

Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та різні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має дійсні різні корені:

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n).$$

Тоді раціональний дріб можна розкласти на найпростіші дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - a_1} + \frac{B}{x - a_2} + \cdots + \frac{N}{x - a_n}.$$

Інтеграл від такого дробу зводиться до

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A \int \frac{dx}{x - a_1} + B \int \frac{dx}{x - a_2} + \cdots + N \int \frac{dx}{x - a_n} =$$

$$= A\, ln|x - a_1| + B\, ln|x - a_2| + \cdots + N\, ln|x - a_n|.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$.

Розв'язання. Підінтегральний дріб неправильний, бо степінь многочлена чисельника більший, ніж степінь знаменника. Тому виділимо спочатку цілу частину, поділивши чисельник на многочлен знаменник:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,x^5+x^4+0x^3+0x^2+0x-8 & x^3+0x^2-4x \\
\underline{x^5+0x^4-4x^3} & \overline{x^2+x+4} \\
\quad -\,x^4+4x^3+0x^2+0x-8 & \\
\quad \underline{x^4+0x^3-4x^2} & \\
\qquad -\,4x^3+4x^2+0x-8 & \\
\qquad \underline{4x^3+0x^2-16x} & \\
\qquad\qquad 4x^2+16x-8 \quad \text{(залишок).} &
\end{array}
$$

Подамо підінтегральний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного раціонального дробу:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}, \qquad \text{тоді}$$

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx.$$

В інтегралі, який залишився, підінтегральний дріб (правильний і нескоротний) розкладемо на елементарні дроби. Оскільки знаменник дробу

$$x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$$

має три прості корені: $x=0, x=2$ і $x=-2$, то його можна подати у вигляді суми трьох дробів:

$$\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Зведемо дроби до спільного знаменника, прирівнюємо чисельники:

$$x^2 + 4x - 2 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2).$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів використовують методом невизначених коефіцієнтів, за якого порівнюються коефіцієнти ліворуч та праворуч при однакових функціях, у цьому випадку степенів x. У випадку дійсних і різних коренів знаменника набагато швидше знаходять коефіцієнти, послідовно підставляючи відомі корені знаменника:

$$\begin{array}{r|l} x = 0 & -2 = -4A, \\ x = 2 & 10 = 8B, \\ x = -2 & -6 = 8C. \end{array}$$

Звідси $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{5}{4}$, $C = -\frac{3}{4}$. Таким чином,

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+2},$$

а шуканий інтеграл

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x +$$

$$+4 \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \int \frac{dx}{x} + 5 \int \frac{dx}{x-2} - 3 \int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2ln|x| + 5ln|x-2| - 3ln|x+2| + C.$$

Інтегрування раціональних дробів, корені знаменника яких дійсні та серед яких є кратні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має дійсні корені, серед яких є кратні:

$$Q(x) = (x - a_1)^n (x - a_2)^m \dots (x - a_n)^k.$$

В такому випадку раціональний дріб може бути розкладений на найпростіші дробі наступним чином:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x - a_1)^n} + \frac{B}{(x - a_1)^{n-1}} + \frac{C}{(x - a_1)^{n-2}} + \cdots \frac{L}{x - a_1} + \\ + \cdots + \frac{N}{x - a_n}.$$

Отже, зрозуміло, що кореню a_1 кратності n відповідає n доданків; кожен наступний дріб має степінь на одиницю меншу від попереднього і так до першої. Інтегрування отриманих дробів виконується за формулами таблиці інтегралів. Проілюструємо це на прикладі.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)(x^3 - 4x^2 + 3x)} dx$$

Розв'язання. Переконаємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи, що многочлен

$$(x - 1)(x^3 - 4x^2 + 3x) = x(x - 1)(x^2 - 4x + 3) =$$

$$= x(x - 1)(x - 1)(x - 3) = x(x - 1)^2 (x - 3)$$

має чотири корені, з яких $x = 0$ і $x = 3$ є простими, а $x = 1 -$ двократний, подамо дріб у вигляді суми чотирьох елементарних дробів:

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Приведемо праву частину отриманого виразу до загального знаменника. Унаслідок рівності дробів та їх знаменників отримаємо рівність чисельників, отже, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C, D:

$$x^2-2x+3=A(x-3)(x-1)^2+Bx(x-1)^2+$$

$$+Cx(x-3)+Dx(x-1)(x-3).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом (підстановкою коренів знаменника в отриману тотожність та порівняння коефіцієнтів, які розташовані біля однакового степеня змінної):

$$\begin{array}{r|l} x=0 & 3=-3A, \\ x=3 & 6=12B, \\ x=1 & 2=-2C, \\ x^3 & 0=A+B+D. \end{array}$$

Звідси: $A=-1,\ B=\frac{1}{2},\ C=-1,\ D=\frac{1}{2},$ отже,

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1},$$

$$\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$= ln|x| + \frac{1}{2}ln|x-3| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}ln|x-1| + C\ .$$

Інтегрування раціональних дробів, серед коренів знаменника якого є комплексні

Нехай дано правильний раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого має комплексні різні корені:

$$Q(x) = (x^2 + p_1x + q_1)\ldots(x^2 + p_sx + q_s).$$

В такому випадку раціональний дріб набуває вигляду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \frac{Nx+M}{x^2+p_sx+q_s}.$$

Обчислення інтегралів такого вигляду ми розглядали раніше (див. лекцію 2 п. 2.2), тому відразу звернемося до прикладів.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx.$$

Розв'язання. Переконуємося, що підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Враховуючи, що $x^2 - 2x + 10 = 0$, $D = 4 - 40 = -36 < 0$, маємо

$$\frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+10}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C:

$$4x - 10 = A(x^2 - 2x + 10) + (Bx + C)(x + 2).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{c|c} x = -2 & -18 = 18A, \\ x^2 & 0 = A + B, \\ x^0 & -10 = 10A + 2C, \end{array}$$

звідси: $A = -1, B = 1, C = 0,$ отже,

$$\frac{4x - 10}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} = -\frac{1}{x + 2} + \frac{x}{x^2 - 2x + 10}.$$

Отримаємо,

$$\int \frac{4x - 10}{(x + 2)(x^2 - 2x + 10)} dx = \int \left(-\frac{1}{x + 2} + \frac{x}{x^2 - 2x + 10}\right) dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x^2 - 2x + 10 \\ du = (2x - 2)dx \end{vmatrix} = -\int \frac{dx}{x + 2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2 - 2x + 10} dx =$$

$$= -ln|x + 2| + \frac{1}{2}\int \frac{2x - 2 + 2}{x^2 - 2x + 10} dx =$$

$$= -ln|x + 2| + \frac{1}{2}\int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 10} dx + \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 10} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 = x^2; a = x \\ 2ab = 2x; 2xb = 2x \\ b = 1;\ b^2 = 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -ln|x+2| + \frac{1}{2}ln|x^2 - 2x + 10| + \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 9} =$$

$$= -ln|x+2| + \frac{1}{2}ln|x^2 - 2x + 10| + \frac{1}{3}arctg\frac{x-1}{3} + C.$$

3.2 Метод інтегрування частинами

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ − неперервні диференційовані функції незалежної змінної. Диференціал їх добутку має вигляд

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Звідси $$udv = d(uv) - vdu.$$

Інтегруємо обидві частини отриманої рівності, отримаємо

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu.$$

або $$\int udv = uv - \int vdu.$$

Суть методу інтегрування частинами полягає в тому, що підінтегральний вираз $f(x)dx$ може бути представлений у вигляді добутку множників u і dv. Далі знаходимо v по відомому виразу dv шляхом інтегрування, і потім беремо інтеграл $\int vdu$. Цей метод застосовують, якщо обидва ці інтеграли легко знаходяться, а заданий інтеграл безпосередньо знайти неможливо.

Метод інтегрування частинами надзвичайно важливий, він охоплює інтегрування великого класу функцій і має практичне застосування при розв’язанні прикладних задач.

Отже, методом інтегрування частинами обчислюються інтеграли, що мають підінтегральну функцію виду:

1) Добуток степеневої функції $P_n(x)$ на тригонометричну:

$$\int P_n(x) \cdot \begin{matrix} sin(ax+b) \\ cos(ax+b) \\ tg(ax+b) \\ ctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx, \quad \big(u = P_n(x)\big);$$

Зрозуміло, що береться одна з тригонометричних функцій.

2) Добуток степеневої функції $P_n(x)$ на показникову:

$$\int P_n(x) a^x dx, \qquad \big(u = P_n(x)\big)$$

3) Логарифмічна функція:

$$\int \log_a(ax+b)\, dx, \quad (u = \log_a(ax+b));$$

4) Добуток степеневої функції $P_n(x)$ на логарифмічну:

$$\int P_n(x) \log_a(ax+b) dx; \quad (u = \log_a(ax+b));$$

5) Обернена тригонометрична функція:

$$\int \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx; \quad \left(u = \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \right);$$

6) Добуток степеневої функції $P_n(x)$ на обернену тригонометричну:

$$\int P_n(x) \cdot \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \cdot dx; \left(u = \begin{matrix} arcsin(ax+b) \\ arccos(ax+b) \\ arctg(ax+b) \\ arcctg(ax+b) \end{matrix} \right);$$

і багато-багато інших…

Зауваження. Перший та другий тип інтегралів з даного переліку інтегрується частинами n разів; тобто кількість інтегрування частинами дорівнює степіню многочлена $P_n(x)$.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int (x-3)e^{2x}dx$.

Розв'язання.

$$\int (x-3)e^{2x}dx = \begin{vmatrix} u = x-3, & du = dx \\ dv = e^{2x}dx, & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{vmatrix} =$$

$$= (x-3)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{x-3}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int x^2 sin3xdx.$$

Розв'язання.

$$\int x^2 sin3xdx = \begin{vmatrix} u = x^2, & du = 2xdx \\ dv = sin3xdx, & v = \int sin3xdx = -\frac{1}{3}cos3x \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 cos3x - \int \left(-\frac{1}{3}cos3x\right)2xdx =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 cos3x + \frac{2}{3}\int xcos3xdx.$$

До останнього інтеграла застосовуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int xcos3xdx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = cos3xdx, & v = \int cos3xdx = \frac{1}{3}sin3x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}xsin3x - \frac{1}{3}\int sin3xdx = \frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x.$$

Таким чином, остаточно маємо

$$\int x^2sin3xdx = -\frac{1}{3}x^2cos3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{3}x^2cos3x + \frac{2}{9}xsin3x + \frac{2}{27}cos3x + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int x^3lnxdx.$$

Розв'язання.

$$\int x^3lnxdx = \left| \begin{matrix} u = lnx, & du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^3dx, & v = \int x^3dx = \frac{x^4}{4} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^4}{4}lnx - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^4}{4}lnx - \frac{1}{4}\int x^3dx = \frac{x^4}{4}lnx - \frac{1}{16} \cdot x^4 + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int x \cdot arctgxdx$.

Розв'язання.

$$\int x \cdot arctgxdx = \begin{vmatrix} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot acrtgx - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx\right) =$$

Отриманий інтеграл – це інтеграл від неправильного раціонального дробу, який має степінь чисельника рівну степені знаменника, тому необхідно виділити цілу частину, шляхом доповнення чисельника до виду знаменника.

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 \cdot acrtgx - x + arctgx) + C.$$

Лекція 4

Інтегрування тригонометричних функцій. Інтегрування ірраціональних функцій.

4.1. Інтегрування тригонометричних функцій.

Інтеграли виду $\int \boldsymbol{sin^m x \cdot cos^n x dx}$

1) Якщо m і n – цілі числа і принаймні одне з цих чисел є непарним додатним числом, наприклад $m = 2k + 1$, то

$$\int sin^m x \cdot cos^n x dx = \int sin^{2k+1} x \cdot cos^n x dx =$$

$$= \int sin^{2k} x \cdot sinx \cdot cos^n x dx =$$

$$= \int (sin^2 x)^k \cdot cos^n x \cdot sinx dx = \int (1 - cos^2 x)^k \cdot cos^n x \cdot sinx dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = cosx \\ dt = -sinx dx \end{matrix} \right| = -\int (1 - t^2)^k \cdot t^n \cdot dt.$$

Якщо ж непарним буде число $n = 2p + 1 > 0$, то необхідно застосувати підстановку $t = sinx$.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int cos^4 x \cdot sin^5 x dx.$$

Розв'язання. Тут $m = 5, n = 4$. Враховуючи, що m непарне, виконаємо перетворення:

$$\int cos^4x \cdot sin^5xdx = \int cos^4x \cdot sin^4x \cdot sinxdx =$$

$$= \int cos^4x \cdot (sin^2x)^2 \cdot sinxdx =$$

$$= \int cos^4x \cdot (1 - cos^2x)^2 \cdot sinxdx = \begin{vmatrix} t = cosx \\ dt = -sinxdx \\ sinxdx = -dt \end{vmatrix} =$$

$$= -\int t^4(1 - t^2)^2\, dt = -\int t^4(1 - 2t^2 + t^4)dt =$$

$$= \int (2t^6 - t^4 - t^8)dt = \frac{2t^7}{7} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^9}{9} + C =$$

$$= \frac{2cos^7x}{7} - \frac{cos^5x}{5} - \frac{cos^9x}{9} + C.$$

2) Якщо обидва показники m і n – парні невід'ємні числа (зокрема один з них може бути рівним нулю), то доцільно застосувати формули зниження степеню:

$$sin^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x), \quad cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x).$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int sin^4x \cdot cos^2xdx.$$

Розв'язання. В прикладі $m = 4$, $n = 2$ обидва додатні і парні, тобто маємо

$$\int sin^4x \cdot cos^2xdx = \int sin^2x \cdot sin^2x \cdot cos^2xdx =$$

$$= \int sin^2x \cdot (sinx \cdot cosx)^2dx = \int \frac{1}{2}(1 - cos2x) \cdot \frac{1}{4}sin^2 2xdx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\int sin^2 2xdx - \int cos2x \cdot sin^2 2xdx\right).$$

Розглянемо отримані інтеграли окремо:

$$I_1 = \int sin^2 2xdx = \int \frac{1}{2}(1 - cos4x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int dx - \int cos4x\, dx\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}sin4x + C_1;$$

$$I_2 = \int cos2x \cdot sin^2 2xdx = \begin{vmatrix} u = sin2x \\ du = 2cos2xdx \\ cos2xdx = \dfrac{du}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int u^2du = \frac{1}{2}\frac{u^3}{3} + C = \frac{u^3}{6} + C_2 = \frac{sin^3 2x}{6} + C_2.$$

Підставляючи отриманні вирази та вважаючи, що $C_1 + C_2 = C,$ отримаємо розв'язок

$$\int sin^4x \cdot cos^2xdx = \frac{x}{16} - \frac{sin4x}{64} - \frac{sin^3 2x}{48} + C.$$

3) Якщо обидва показники парні, причому принаймні один із них від'ємний, то необхідно виконати заміну $tgx = t$ або $ctgx = t.$

Тоді:

$$x = arctgt \ \ (x = arcctgt),$$

$$dx = \frac{dt}{t^2+1} \ \left(dx = -\frac{dt}{t^2+1}\right).$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx$.

Розв'язання. Тут $m = 2, n = -4 < 0$ і m і n парні, тому

$$\int \frac{sin^2x}{cos^4x}dx = \left| \begin{matrix} t = tgx, x = arctgt, dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ sin^2x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, cos^2x = \dfrac{1}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{tg^3x}{3} + C.$$

Інтеграли виду $\int sinax\ cosbx\ dx$, $\int cosax\ cosbx\ dx$, $\int sinax\ sinbx\ dx$

Щоб знайти ці інтеграли, необхідно перейти від добутку тригонометричних функцій до суми за відомими формулами:

$$sinax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)\,x + \sin(a-b)\,x),$$
$$cosax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(\cos(a+b)\,x + \cos(a-b)\,x),$$
$$sinax \cdot sinbx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)\,x - \cos(a+b)\,x).$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int sin4x \cdot cos3xdx.$$

Розв'язання. Застосуємо формулу

$$sinax \cdot cosbx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)\,x + \sin(a-b)\,x),$$

отримаємо:

$$\int sin4x \cdot cos3xdx = \frac{1}{2}\int (sin7x + sinx)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{cos7x}{7} - \frac{1}{2} \cdot cosx + C =$$

$$= -\frac{cos7x}{14} - \frac{cosx}{2} + C.$$

Інтеграли виду $\int \boldsymbol{R(sinx, cosx)dx}$, де R – раціональна функція від $sinx$ і $cosx$. За допомогою так званої універсальної тригонометричної підстановки $\boldsymbol{tg\frac{x}{2} = t}$ $(-\pi < x < \pi)$ інтеграл зводиться до інтегралу від раціональної функції. При цьому

$$sinx = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctgt, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Зауважимо, що іноді замість підстановки $tg\frac{x}{2} = t$ зручніше зробити підстановку $ctg\frac{x}{2} = t$.

Слід також визначити, що в силу своєї універсальності підстановка $tg\frac{x}{2} = t$ часто призводить до занадто громіздких викладок, що ускладнює знаходження інтеграла. Тому в окремих випадках доцільно застосовувати інші підстановки, які також раціоналізують інтеграл. Наприклад:

1) Якщо виконується рівність

$$R(-sinx, cosx) \equiv -R(sinx, cosx),$$

то застосуємо підстановку $cosx = t$.

2) Якщо виконується рівність

$$R(sinx, -cosx) \equiv -R(sinx, cosx),$$

то застосуємо підстановку $sinx = t$.

3) Якщо виконується рівність

$$R(-sinx, -cosx) \equiv R(sinx, cosx),$$

то застосовуємо підстановку $tgx = t$, при цьому,

$$sinx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad cosx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad x = arctgt,$$
$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{cos^3x}{\sqrt[5]{sin^4x}}dx$.

Розв'язання. Тут $m = -\frac{4}{5}, n = 3 > 0$ і непарне, тому

$$\int \frac{cos^3x}{\sqrt[5]{sin^4x}}dx = \int \frac{cos^2x}{\sqrt[5]{sin^4x}} \cdot cosxdx = \int \frac{1-sin^2x}{\sqrt[5]{sin^4x}} \cdot cosxdx =$$

$$= \left| \begin{matrix} sinx = t \\ cosxdx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^{\frac{4}{5}}} \cdot dt = \int t^{-\frac{4}{5}} dt - \int t^{\frac{6}{5}} dt =$$

$$= 5t^{1/5} - \frac{5t^{11/5}}{11} + C =$$

$$= 5t^{1/5}\left(1 - \frac{t^2}{11}\right) + C = 5\sqrt[5]{sinx}\left(1 - \frac{sin^2x}{7}\right) + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{sinxsin2x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{sinx \cdot sin2x} = \int \frac{dx}{2sin^2x \cdot cosx}.$$

Якщо у виразі $\frac{1}{2sin^2x \cdot cosx}$ виконати заміну $cosx$ на $-cosx$, то дріб змінить знак на протилежний, тому тут необхідно застосувати підстановку $sinx = t$.

$$\int \frac{dx}{sinx \cdot sin2x} = \int \frac{dx}{2sin^2x \cdot cosx} =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = sinx, & x = arcsint \\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, & cosx = \sqrt{1-t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)} dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= -\frac{1}{2t} - \frac{1}{4} ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = -\frac{1}{2sinx} - \frac{1}{4} ln \left| \frac{sinx-1}{sinx+1} \right| + C.$$

4.2 Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграли виду $\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{\frac{m_1}{n_1}}, \boldsymbol{x}^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \boldsymbol{x}^{\frac{m_p}{n_p}}\right) \boldsymbol{dx}$, де $R -$ раціональна функція, m_i і $n_i -$ натуральні числа $(i = 1, 2, \dots, p)$. Даний інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $x = t^k$, де $k -$ найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{m_i}{n_i}$ $(i = 1, 2, \dots, p)$.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}$.

Розв'язання. Тут $n_1 = 2,\ n_2 = 3,\ n_3 = 4$, тому $k = 12$ (найменше спільне кратне чисел 2, 3 і 4). Тобто

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \left| \begin{matrix} x = t^{12} \\ dx = 12 \cdot t^{11} dt \\ t = \sqrt[12]{x} \end{matrix} \right| = \int \frac{t^6}{t^8 - t^3} 12 \cdot t^{11} dt$$

$$= 12 \int \frac{t^{17}}{t^3(t^5 - 1)} dt = 12 \int \frac{t^{14} dt}{t^5 - 1} = I$$

Отримали інтеграл від неправильного раціонального дробу. Вилучаємо цілу частину діленням многочлена на многочлен:

$$\begin{array}{l|l} -\ t^{14} & t^5 - 1 \\ \underline{t^{14} - t^9} & \overline{t^9 + t^4} \\ \quad -\ t^9 & \\ \quad \underline{t^9 - t^4} & \\ \qquad t^4 & \end{array}$$

$$I = 12\int\left(t^9 + t^4 + \frac{t^4}{t^5-1}\right)dt =$$

$$= 12\left(\int t^9 dt + \int t^4 dt + \int \frac{t^4\,dt}{t^5-1}\right) = \left|\begin{matrix} z = t^5 - 1 \\ dz = 5t^4 dt \\ t^4 dt = \dfrac{dt}{5} \end{matrix}\right| =$$

$$= 12\left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5}\int \frac{d(t^5-1)}{t^5-1}\right) =$$

$$= \frac{6}{5}\left(t^{10} + 2t^5 + 2ln\left|t^5 - 1\right|\right) + C.$$

Повертаючись до змінної x, остаточно будемо мати:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + 2ln\left|\sqrt[12]{x^5} - 1\right|\right) + C.$$

Інтеграли виду $\int \boldsymbol{R}\left[\boldsymbol{x}, \left(\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}\right)^{\frac{\boldsymbol{m_1}}{\boldsymbol{n_1}}}, \dots, \left(\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx+d}}\right)^{\frac{\boldsymbol{m_p}}{\boldsymbol{n_p}}}\right]\boldsymbol{dx}$, де $R -$ раціональна функція, m_i і $n_i -$ натуральні числа $(i = 1, 2, \dots, p)$ і визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ $(a, b, c, d -$ сталі дійсні числа). Цей інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

де $k -$ найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{n_i}$ $(i = 1, 2, \dots, p)$.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+7)^2}-\sqrt{2x+7}}.$$

Розв'язання: Маємо інтеграл другого виду від ірраціональної функції. Тут: $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, тому $k = 6$. Зробимо підстановку:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+7)^2}-\sqrt{2x+7}} = \left| \begin{array}{c} 2x+7 = t^6 \\ x = \frac{1}{2}(t^6-7) \\ dx = 3t^5 dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3t^5 dt}{t^4 - t^3} = 3\int \frac{t^5 dt}{t^3(t-1)} = I.$$

Скоротивши дріб і поділивши чисельник на знаменник, отримаємо:

$$I = 3\int \frac{t^2 dt}{t-1} = 3\int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right) dt =$$

$$= 3\left(\frac{t^2}{2} + t + ln|t-1|\right) + C.$$

Оскільки $t = \sqrt[6]{2x+7}$, то повертаючись до змінної x, будемо мати

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+7)^2}-\sqrt{2x+7}} =$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt[3]{2x+7}}{2} + \sqrt[6]{2x+7} + ln\left|\sqrt[6]{2x+7} - 1\right|\right) + C.$$

Лекція 5

Інтегрування ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок.
Визначений інтеграл.
Основні властивості визначеного інтеграла.
Формула Ньютона – Лейбниця.

5.1 Інтеграли виду

$$\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{x}^2}\right)\boldsymbol{dx}, \int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{x}^2}\right)\boldsymbol{dx}, \quad \int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{a}^2}\right)\boldsymbol{dx}$$

зводяться до інтегралів від раціональної функції відносно $sinx$ і $cosx$ за допомогою відповідної тригонометричної підстановки.

1. Для знаходження інтеграла виду $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$, застосовують підстановку:

$$x = a \cdot sint;\ dx = a \cdot cost\ dt;$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot cost;\ \ t = arcsin\frac{x}{a}.$$

2. Для знаходження інтеграла виду $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$, застосовують підстановку:

$$x = a \cdot tgt;\ dx = \frac{a}{cos^2 t}dt$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{sint};\ t = arctg\frac{x}{a}.$$

3. Для знаходження інтеграла виду $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$, застосовують підстановку:

$$x = \frac{a}{cost}; \qquad dx = \frac{a \cdot sint}{cos^2 t} dt;$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{a \cdot sint}{cost}; t = arccos\frac{a}{x}.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}} = \left| \begin{array}{c} x = 4sint \\ dx = 4costdt \\ \sqrt{16 - x^2} = 4cost \\ t = acrsin\frac{x}{4} \end{array} \right| = \int \frac{16 \cdot sin^2 t \cdot 4costdt}{4cost} =$$

$$= 16 \int \frac{sin^2 tcostdt}{cost} = 16 \int sin^2 tdt = 16 \int \frac{1}{2}(1 - cos2t)dt =$$

$$= 8 \int dt - 8 \int cos2tdt = 8t - 8 \cdot \frac{1}{2} sin2t + C = 8t - 4sin2t + C.$$

Враховуючи, що

$$sin2t = 2sint \cdot cost = 2sint \cdot \sqrt{1 - sin^2 t} =$$

$$= 2 \cdot \frac{x}{4} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} = \frac{x}{8}\sqrt{16 - x^2},$$

остаточно будемо мати

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16 - x^2}} = 8acrsin\frac{x}{4} - \frac{x}{2}\sqrt{16 - x^2} + C.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}} = \left| \begin{array}{c} x = 3tgt \\ dx = \dfrac{3dt}{cos^2 t} \\ \sqrt{x^2+9} = \dfrac{3}{cost} \\ t = arctg\dfrac{x}{3} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{3dt}{cos^2 t}}{\left(\frac{3}{cost}\right)^3} =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{cos^3 tdt}{cos^2 t} = \frac{1}{9}\int costdt = \frac{1}{9}sint + C.$$

Оскільки

$$sint = tgt \cdot cost = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}} = \frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$$

то остаточно отримаємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}} = \frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + \text{C}.$$

5.2 Визначений інтеграл

Визначений інтеграл відіграє значну роль як у суто теоретичних дослідженнях, так і в практичних застосуваннях. До його обчислення зводяться задачі знаходження площі фігури, об'єму тіла, центру ваги плоскої кривої, моменту інерції та інші.

Знайдемо площу криволінійної трапеції, яка обмежена кривою $y = f(x)$ та прямими $x = a,\ x = b$ і $y = 0$ (рис. 5.1). Функція $y = f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a; b]$. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n довільних

елементарних частин точками поділу $x_i,\ i=\overline{0,n}$ такими, що $a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$. На кожному частинному відрізку $[x_{i-1};\ x_i]$ візьмемо довільну точку $c_i, i=\overline{1,n}$. Обчислимо значення функції $f(c_i)$ і помножимо його на довжину відповідного частинного відрізка $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Таким чином отримаємо площу i-го частинного прямокутника.

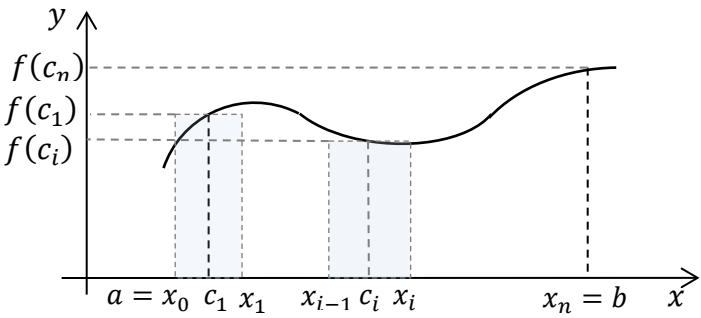

Рисунок 5.1

Складемо суму отриманих добутків:

$$S_n=f(c_1)\Delta x_1+\cdots+f(c_i)\Delta x_i+\cdots f(c_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i.$$

Цей вираз називається ***інтегральною сумою*** для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Зауваження. Інтегральна сума S_n не залежить ні від способу розбиття, тобто від вибору точок поділу $x_i,\ i=\overline{0,n},$ ні від вибору точок $c_i,\ i=\overline{1,n},$ в кожному частинному відрізку.

Добуток $f(c_i)\Delta x_i$ чисельно дорівнює площі прямокутника S_i з основою Δx_i і висотою $f(c_i)$. *Інтегральна сума* S_n чисельно дорівнює площі східчастої фігури, утвореної з таких

прямокутників, і *служить наближеним значенням площі криволінійної трапеції*: $S \approx S_n$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

її інтегральна сума на $[a; b]$. Позначимо через Δx_i найбільшу з довжин відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, n}$. Розглянемо довільну послідовність інтегральних сум при умові $\Delta x_i \to 0$. Очевидно, що при цьому число n при розбитті на елементарні частини, прямує до нескінченності $n \to \infty$.

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ називається границя послідовності інтегральних сум при необмеженому розбитті відрізка $[a; b]$:

$$\lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$$

де a і b – відповідно *нижня* і *верхня межі інтегрування*; $[a; b]$ – *відрізок інтегрування*.

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a; b]$. Тоді *визначений інтеграл* $\int_a^b f(x)dx$, *чисельно дорівнює площі* S *відповідної криволінійної трапеції*: $S = \int_a^b f(x)dx$.

Розглядаючи визначені інтеграли, надалі будемо припускати підінтегральну функцію неперервною на проміжку інтегрування.

5.3 Властивості визначеного інтеграла

1. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з функцій:

$$\int_a^b \big(f(x) + \varphi(x) + \cdots + \psi(x)\big)dx =$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx + \ldots + \int_a^b \psi(x)dx.$$

2. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. Якщо переставити місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл тільки змінить знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a, b]$ і $a < c < b$, то ця функція інтегрована і на відрізках $[a, c]$ і $[c, b]$, причому:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b \mathrm{C} \cdot f(x)dx = \mathrm{C} \int_a^b f(x)dx.$$

6. Якщо $f(x) -$ інтегрована функція на відрізку $[a, b]$ і $f(x) \geq 0$ для $x \epsilon [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

7. Якщо на відрізку $[a; b]$, де $a < b$, функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють нерівності $f(x) \leq \varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Іншими словами, нерівність між неперервними функціями можна інтегрувати почленно при умові, що верхня межа інтегрування більша нижньої.

5.4 Формула Ньютона-Лейбниця

***Теорема* (*Ньютона-Лейбниця*).** *Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і $F(x)$ – яка-небудь її первісна на цьому відрізку. Тоді визначений інтеграл від функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ дорівнює приросту первісної $F(x)$ на цьому відрізку:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Доведення.

$$I(x) = \int_a^x f(x)dx = F(x) + C_1,$$

знайдемо $I(a) = F(a) + C_1$, але так як

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

то маємо $F(a) + C_1 = 0$; $F(a) = -C_1$.

Отже

$$I(x) = F(x) - F(a).$$

При $x = b$ маємо:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \text{ або}$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Приклад. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin2xdx.$$

Розв'язання. Використовуючи таблицю первісних та формулу Ньютона-Лейбниця, одержимо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin2xdx = \frac{-1}{2} cos2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\left(cos\frac{\pi}{2} - cos0\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}.$$

Зауваження. Формула Ньютона-Лейбниця залишається справедливою для будь-якої інтегрованої на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$, що має неперервну первісну $F(x)$, яка задовольняє умові $F'(x) = f(x)$ на всьому відрізку $[a;b]$ за винятком хіба що скінченного числа точок.

Приклад. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+3x)^2}.$$

Розв'язання. Скориставшись формулою Ньютона-Лейбніца, одержимо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+3x)^2} = \int_0^1 (1+3x)^{-2}\, dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(1+3x)^{-1}}{-1}\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+3x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right) = -\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Приклад. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$$

Розв'язання. Доповнимо підкореневий вираз до повного квадрату:

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = arcsin\frac{x-2}{3}\Big|_2^5 =$$

$$= arcsin\frac{5-3}{3} - arcsin\frac{2-2}{3} = arcsin1 - arcsin0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Лекція 6
Інтегрування частинами і заміна змінної у визначеному інтегралі. Невласні інтеграли

6.1 Інтегрування частинами і заміна змінної у визначеному інтегралі

Заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема. *Нехай функція* $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a; b]$, *а функція* $x = \varphi(t)$ *неперервна разом зі своєю похідною* $x' = \varphi'(t)$ *і монотонна на відрізку* $[\alpha; \beta]$, *причому* $\varphi(\alpha) = a$ *і* $\varphi(\beta) = b$. *Тоді справедлива* ***формула заміни змінної у визначеному інтегралі***

$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t); \;\; t = \varphi^{-1}(x); \\ dx = \varphi'(t)dt; \; \alpha = \varphi^{-1}(a); \; \beta = \varphi^{-1}(b) \end{matrix} \right| = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)dt,$$

де $t = \varphi^{-1}(x)$ *– обернена функція.*

Доведення. Якщо $F(x)$ – деяка первісна для

функції $f(x)$, то можемо записати

$$\int f(x)dx = F(x) + C; \quad \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = F\big(\varphi(t)\big) + C.$$

Справедливість останньої рівності перевіряється диференціюванням обох частин по змінній t. З рівностей відповідно маємо:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a);$$

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)dt =$$

$$= F\big(\varphi(t)\big)\Big|_\alpha^\beta = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = F(b) - F(a).$$

Праві частини одержаних виразів рівні, отже, ліві частини також рівні:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)dt.$$

Зауваження 1. При заміні змінної значення функції $\varphi(t)$ не повинні виходити за межі відрізка $[a; b]$, коли аргумент t змінюється на проміжку $[\alpha; \beta]$, причому $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$.

Зауваження 2. Виконуючи заміну змінної у визначеному інтегралі, немає потреби повертатися до початкової змінної.

Приклад . Обчислити інтеграл $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+5}}$.

Розв'язання .

$$\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+5}} = \left| \begin{matrix} u = x^2+5; du = 2xdx; \\ u_н = 6;\ u_в = 9 \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int_6^9 \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{u}\Big|_6^9 = 3-\sqrt{6}.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi/2} cos^4 x sin^3 x dx$.

Розв'язання .

$$\int_0^{\pi/2} cos^4 x\, sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} cos^4 x\, sin^2 x\, sinx dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} cos^4 x(1-cos^2 x) sinx dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = cos\, x\,; du = -sinx dx; \\ u_н = cos\, 0 = 1;\ u_в = cos\ {}^{\pi}/_{2} = 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_1^0 u^4(1-u^2)(-du) = \int_0^1 (u^4-u^6)du = \left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^7}{7}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{5}-\frac{1}{7} = \frac{2}{35}.$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Нехай $U = U(x)$ і $V = V(x)$ – диференційовні функції від x на відрізку $[a; b]$. Тоді $(UV)' = U'V + UV'$. Інтегруємо обидві частини рівності у межах від a до b, маємо

$$\int_a^b (UV)'dx = \int_a^b U'Vdx + \int_a^b UV'dx\,.$$

Оскільки $\int (UV)'dx = UV + C$, тому $\int_a^b (UV)'dx = UV\Big|_a^b$ а

$$U'Vdx = VdU, \qquad UV'dx = UdV$$

Отже $UV\Big|_a^b = \int_a^b VdU + \int_a^b UdV$. Звідси отримаємо ***формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі***

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU,$$

що відрізняється від аналогічної формули для невизначеного інтеграла тільки наявністю меж інтегрування.

Приклад. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_1^3 x\,lnx\,dx.$$

Розв'язання.

$$\int_1^3 x\,lnx = \left| \begin{matrix} U = lnx;\ dV = xdx; \\ dU = \dfrac{dx}{x}; V = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} lnx\Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{9}{2} ln3 - \frac{1}{2} ln1 - \frac{1}{2}\ \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{9}{2} ln3 - \frac{1}{4}(9-1) = \frac{9}{2} ln3 - 2.$$

Приклад. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^1 arcsinx\, dx.$$

Розв'язання.

$$\int_0^1 arcsinx\, dx = \left| \begin{matrix} U = arcsinx; dV = dx; \\ dU = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\ \ V = x \end{matrix} \right| = x\ arcsinx \Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} t = 1 - x^2; dt = -2xdx; \\ t_н = 1;\ \ t_в = 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= arcsin1 - 0 + \frac{1}{2}\int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{t}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

6.2 Невласні інтеграли

При вивченні визначеного інтеграла виходили з двох умов:

а) скінченність проміжку інтегрування;

б) неперервність (або хоча б обмеженість) підінтегральної функції.

У випадку нескінченного проміжку інтегрування його не можна розбити на n частинних відрізків скінченної довжини, а у випадку необмеженої функції інтегральна сума явно не має скінченної границі.

Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла на ці випадки, приходимо до невласного інтеграла – інтеграла на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

Невласні інтеграли по нескінченному проміжку (першого роду)

Нехай функція $\boldsymbol{f(x)}$ визначена на проміжку $[\boldsymbol{a}, \infty)$ і інтегровна на відрізку $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Тоді визначений інтеграл $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)dx}$ існує при будь-якому $\boldsymbol{b} > \boldsymbol{a}$ і, отже, він є деякою функцією від $\boldsymbol{b}$, визначеною на проміжку $[\boldsymbol{a}, \infty)$:

$$I(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо функція $I(b)$ при $b \to +\infty$ має скінченну границю A, то цю границю ***називають невласним інтегралом*** від функції $f(x)$ на проміжку $[a, \infty)$і позначають як:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Таким чином, за означенням

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо вказана границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називають ***збіжним***, а підінтегральну функцію $f(x)$ – ***інтегровною*** на нескінченному проміжку $[a, \infty)$. Сама границя приймається за ***значення*** цього ***інтеграла***. При цьому вважають, що невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається (до числа A).

Якщо ж вказана границя нескінченна або взагалі не існує, то невласний інтеграл називається ***розбіжним***, а функція $f(x)$ –

неінтегровною на $[a, \infty)$.

Аналогічно визначається ***невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею.*** Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty, b]$ і інтегровна на відрізку $[a, b]$ при будь-якому $a < b$, то за означенням

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ називають збіжним, якщо існує скінченна границя, що стоїть у правій частині рівності і розбіжним, якщо такої скінченної границі не існує.

Нарешті, якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty, +\infty)$, то за означенням,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

де $c-$ будь-яке стале число, причому невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають збіжним, якщо збігаються обидва невласних інтеграли, які стоять у правій частині рівності. Якщо ж принаймні один з цих інтегралів розбігається, то невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають розбіжним.

Приклад. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{xln^6x}.$$

Розв'язання.

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{xln^6x} = \lim_{b\to+\infty}\int_{e}^{b} \frac{dx}{xln^6x} = \left| \begin{matrix} t = lnx \\ dt = \frac{dx}{x} \\ t_н = 1, t_в = lnb \end{matrix} \right| = \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{lnb} \frac{dt}{t^6} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{lnb} t^{-6}dt = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{5t^5}\Big|_{1}^{lnb}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{5ln^5b}+\frac{1}{5}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\infty}+\frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Отже, за означенням, даний інтеграл збігається.

Приклад. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x-7}.$$

Розв'язання.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x-7} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} \frac{dx}{x^2+4x-7} =$$

$$= \left| \begin{matrix} x^2+4x-7 = \\ = x^2+4x+4-4-7 = \\ = (x+2)^2-11 \end{matrix} \right| = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} \frac{dx}{(x+2)^2-11} =$$

$$= \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \left(\frac{1}{2\sqrt{11}} ln \left| \frac{x+2-\sqrt{11}}{x+2+\sqrt{11}} \right| \Bigg|_a^b \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{11}} \lim_{b\to+\infty} ln \left| \frac{b+2-\sqrt{11}}{b+2+\sqrt{11}} \right| - \frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} ln \left| \frac{a+2-\sqrt{11}}{a+2+\sqrt{11}} \right| = 0.$$

Отже, за означенням, цей інтеграл також збігається.

Невласні інтеграли від розривних функцій (другого роду)

Інтеграл у скінченному проміжку від розривної функції також називають невласним інтегралом другого роду.

Розглянемо інтеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$. За формулою Ньютона-Лейбниця маємо

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -(1+1) = -2.$$

Отримали хибний результат – від'ємне значення інтеграла від додатної функції. Це пояснюється неправомірним застосуванням формули до розривної функції.

Використаємо наступний підхід:

1) ізолюємо точку розриву разом з невеликим околом;

2) обчислимо інтеграл на кожному з відрізків, що залишились;

3) зробимо граничний перехід при стягуванні околу ізоляції в точку розриву. Якщо існує скінченна границя, то

візьмемо її за значення інтеграла.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на всьому відрізку $[a,b]$ за винятком скінченного числа точок, у яких функція необмежена. Точка $c \in [a,b]$ називається ***особливою точкою*** функції $f(x)$, якщо функція необмежена в ній, тобто $f(x) \to \infty$ при $x \to c$.

Зауваження. В особливій точці c функція $f(x)$ має вертикальну асимптоту $x = c$. Такою може бути внутрішня точка області визначення, в якій функція має розрив другого роду, або кінцева точка інтервалу області визначення.

Нехай $x = b$ – єдина особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тобто $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a,b)$ і $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$ (рис. 6.1).

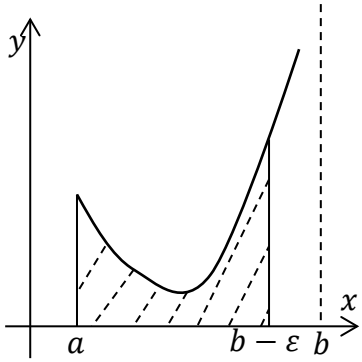

Рисунок 6.1

Тоді функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a, b-\varepsilon]$ при довільному $\varepsilon > 0$ такому, що $b - \varepsilon > a$. Невласним інтегралом від необмеженої функції називається границя

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Якщо вказана границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називають ***збіжним***, а підінтегральну функцію $f(x)$ – ***інтегровною*** на відрізку $[a,b]$. Сама границя приймається за ***значення*** цього ***інтеграла***. Якщо ж ця границя нескінченна або взагалі не існує, то інтеграл називають ***розбіжним***.

Аналогічно, якщо $x = a$ – єдина особлива точка, то невласний інтеграл визначається так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Якщо $f(x)$ необмежена в околі деякої однієї внутрішньої точки $c \in (a; b)$, то за умови існування обох невласних інтегралів

$$\int_a^c f(x)dx \text{ і } \int_c^b f(x)dx$$

за означенням вважають:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Нарешті, якщо a та b – особливі точки, то за умови існування обох невласних інтегралів

$$\int_a^d f(x)dx \text{ і } \int_d^b f(x)dx$$

за означенням вважають

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

де d – довільна фіксована точка інтервалу $(a; b)$.

Зауваження. Невласний інтеграл другого роду за своїм записом нічим не відрізняється від звичайного визначеного інтеграла. Тому необхідно перевіряти, чи не містить проміжок інтегрування особливих точок (точок де функція не існує).

Приклад. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_0^1 lnx\, dx.$$

Розв'язання.

$$\int_0^1 lnx\, dx = \left|\begin{matrix} f(x) = lnx; \\ \text{ОВФ}: x > 0 \end{matrix}\right| = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 lnx\, dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} U = lnx; dV = dx; \\ dU = \dfrac{dx}{x};\ \ V = x \end{matrix}\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(xlnx\Big|_{0+\varepsilon}^1 - \int_{0+\varepsilon}^1 x\frac{dx}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(ln1 - \varepsilon ln\varepsilon - x\Big|_{0+\varepsilon}^1\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon ln\varepsilon - 1) = |0\cdot\infty| =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{ln\varepsilon}{1/\varepsilon} - 1 = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(ln\varepsilon)'}{(1/\varepsilon)'} - 1 = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} - 1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Інтеграл збігається і дорівнює -1.

Приклад. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

$$\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x-6)^4}}.$$

Розв'язання.

$$\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x-6)^4}} = \left| \begin{matrix} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(2x-6)^4}}; \\ \text{ОВФ}: x \neq 3. \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^3 (2x-6)^{-\frac{4}{3}} dx + \int_3^8 (2x-6)^{-\frac{4}{3}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{3-\varepsilon} (2x-6)^{-\frac{4}{3}} dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{3+\varepsilon}^8 (2x-6)^{-\frac{4}{3}} dx =$$

$$= -\frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \left((2x-6)^{-\frac{1}{3}} \Big|_0^{3-\varepsilon} + (2x-6)^{-\frac{1}{3}} \Big|_{3+\varepsilon}^8 \right) =$$

$$= -\frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} = \infty.$$

Отже, невласний інтеграл розбігається.

Лекція 7
Геометричні застосування визначеного інтеграла: площа плоскої фігури; довжина дуги плоскої кривої; об’єм тіла обертання

Розглянемо задачі обчислення основних кількісних характеристик геометричних об’єктів: довжини, площі, об’єму. Для спрощення розрахунків будемо враховувати симетрію та інші особливості конкретних фігур.

7.1 Площа плоскої фігури

1.Випадок, коли лінії, що обмежують фігуру, задані рівняннями в явному вигляді у прямокутних координатах.

Якщо на відрізку $[a;b]$ функція $f(x) \geq 0$, то за геометричним тлумаченням визначеного інтеграла площа S криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою (рис. 7.1).

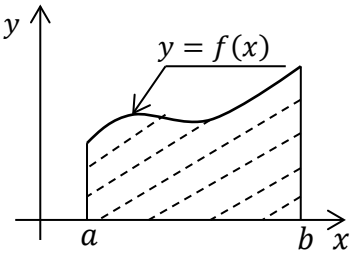

Рисунок 7.1

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Якщо $f(x) \leq 0$ на $[a;b]$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ теж від'ємний.

Площа S відповідної криволінійної трапеції задається рівністю:

$$S = -\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

Якщо $f(x)$ скінченне число разів змінює знак на відрізку $[a; b]$, то для знаходження площі S відповідної криволінійної фігури необхідно знайти суму абсолютних значень інтегралів по проміжкам знакосталості. Тоді інтеграл буде додатнім на проміжках де $f(x) \geq 0$, і від'ємним де $f(x) \leq 0$ (рис. 7.2)

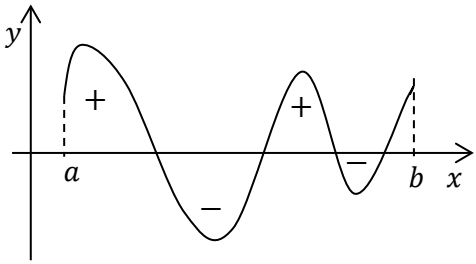

Рисунок 7.2

Інтеграл по всьому відрізку дає відповідно алгебраїчну суму площин, за абсолютними величинами.

Якщо необхідно обчислити площу області, обмеженої кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$ і $x = b$, при умові $f_2(x) \geq f_1(x)$ (рис. 7.3).

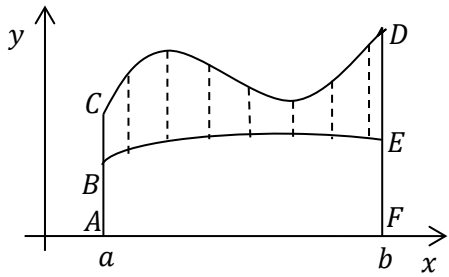

Рисунок 7.3

Знайдемо площу, як різницю площин двох криволінійних трапецій:

$$S = S_{ACDF} - S_{ABEF};$$

$$S_{ACDF} = \int_a^b f_2(x)dx,$$

$$S_{ABEF} = \int_a^b f_1(x)dx; \quad S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx,$$

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx.$$

Приклад. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої кривими $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Розв'язання. 1. Нанесемо на координатну площину лінії $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$ (рис. 7.4).

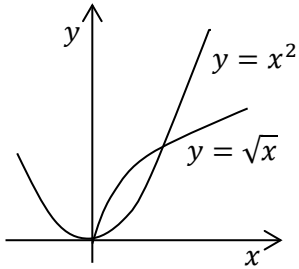

Рисунок 7.4

2. Знайдемо межі інтегрування, для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}; \quad x^2 = \sqrt{x}; \quad x^4 = x;$$

$$x^4 - x = 0; \; x(x^3 - 1) = 0;$$

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1.$$

3. Знайдемо площу фігури:

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ од. кв.}$$

Приклад. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої віссю Ox та лініями $y = (x+2)^2$ та $y = 4 - x$.

Розв'язання. 1. Область, обмежена віссю Ox та лініями $y = (x+2)^2$ та $y = 4 - x$ складається з двох частин $D = D_1 + D_2$ (рис. 7.5), тому площу знаходимо, як суму площин

$$S = S_1 + S_2.$$

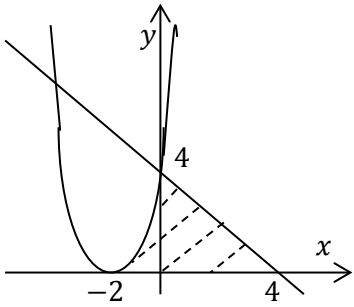

Рисунок 7.5

2. Знайдемо межі інтегрування, для цього обчислимо точки перетину параболи і прямої з віссю Ox та точку перетину параболи і прямої:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = (x+2)^2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 4 - x \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = (x+2)^2 \\ y = 4 - x \end{cases}, \quad (x+2)^2 = 4 - x,$$

$$x^2 + 5x = 0, \;\; x_1 = 0, \;\; x_2 = -5; \;\; x_1 \epsilon [-2; 4]\,.$$

3. Знайдемо площу фігури:

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-2}^{0} (x+2)^2\, dx + \int_{0}^{4} (4-x) dx =$$

$$= \frac{(x+2)^3}{3}\Bigg|_{-2}^{0} - \frac{(4-x)^2}{2}\Bigg|_{0}^{4} = \frac{8}{3} - 0 - 0 + 8 = \frac{32}{3} \text{ од. кв.}$$

2. Випадок, коли лінії, що обмежують фігуру, задані параметрично.

Нехай рівняння $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ визначає деяку функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, тому $\alpha \le t \le \beta$.

Отже,

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx,$$

виконаємо заміну $y = y(t)$, $dx = x'(t)dt$, остаточно отримаємо

$$S = \left| \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt \right|$$

Приклад. Обчислити площу області, обмеженої еліпсом

$$\begin{cases} x = acost \\ y = bsint \end{cases}.$$

Розв'язання. 1. Обчислимо площу частини еліпса, що знаходиться у першому квадранті. Знайдемо межі інтегрування з урахуванням додатного напряму руху (проти годинникової стрілки) (рис. 7.6).

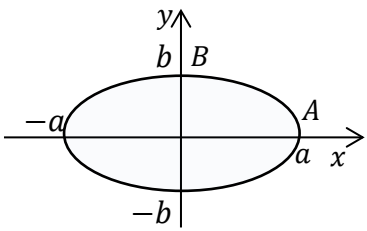

Рисунок 7.6

При $A(a, 0)$:

$$x = acost, \qquad acost = a,$$
$$cost = 1, \qquad t = 0.$$

При $B(0, b)$:

$$x = acost, \quad acost = 0,$$
$$cost = 0, \qquad t = \frac{\pi}{2}.$$

2. Обчислимо площу S_1. З урахуванням, що $dx = -a\,sint\,dt$, маємо:

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} b\,sint(-a\,sint)dt = -ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 t\,dt =$$

$$= -\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos2t)\,dt = -\frac{ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}sin2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}sin\pi - 0 + \frac{1}{2}sin0\right) = -\frac{ab\pi}{4};$$

$$S = 4|S_1| = ab\pi \text{ од. кв.}$$

3. Випадок, коли лінії, що обмежують фігуру, задані в полярній системі координат.

Нехай у полярній системі координат маємо криву, яка визначена рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$ – неперервна функція, коли $\alpha \le \varphi \le \beta$. Знайдемо площу S криволінійного сектора OAB, обмеженого кривою $\rho = \rho(\varphi)$ і координатними променями $\varphi = \alpha$ та $\varphi = \beta$.

Розіб'ємо сектор OAB на n частин довільними координатними променями $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$, …, $\varphi = \varphi_n$, де $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_i < \cdots < \varphi_n = \beta$. Позначимо через $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ кут між сусідніми променями, $i = \overline{1,n}$ (рис. 7.7).

Розглянемо елементарний криволінійний сектор, що відповідає приросту $\Delta\varphi_i$ полярного кута. Його площа ΔS_i наближено дорівнює площі сектора круга з радіусом ρ_i і центральним кутом $\Delta\varphi_i$: $\Delta S_i \approx \frac{1}{2}{\rho_i}^2\Delta\varphi_i$.

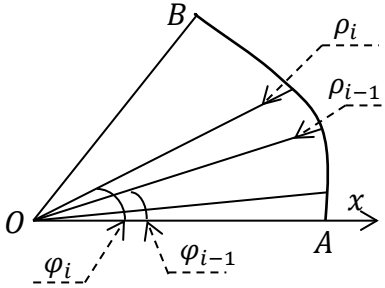

Рисунок 7.7

Сума

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} {\rho_i}^2 \Delta\varphi_i$$

дає площу сектора зі "ступінчатою" межею, що наближено визначає шукану площу S криволінійного сектора OAB.

Ця сума є інтегральною. Здійснюючи граничний перехід при $max\Delta\varphi_i \to 0$, отримуємо точне значення площі сектора OAB у вигляді визначеного інтеграла:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої трипелюстковою трояндою $\rho = sin3\varphi$.

Розв'язання. Фігура, площу якої необхідно знайти, зображена на рис. 7.8.

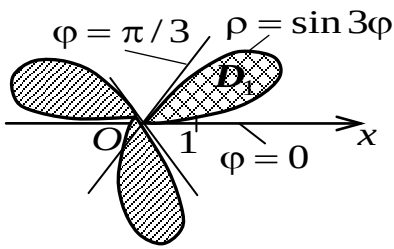

Рисунок 7.8

Як бачимо, фігура D складається з трьох однакових „пелюсток". Щоб знайти її площу S, достатньо знайти площу S_1 однієї з її „пелюсток", наприклад, D_1, що на рис. 11 позначена подвійною штриховою. Тоді $S = 3S_1$.

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} sin^2 3\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \frac{1}{2}(1 - cos6\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{24}sin6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{24}(sin2\pi - sin0) = \frac{\pi}{12}.$$

$$S = \frac{\pi}{4}\ (\text{од. кв.})$$

7.2 Довжина дуги кривої

Лінії, що задані у декартовій системі координатах

Нехай на координатній площині Oxy задана деяка лінія рівнянням у явній формі $y = y(x)$. Потрібно обчислити довжину L її дуги L_{AB}. (рис. 7.9).

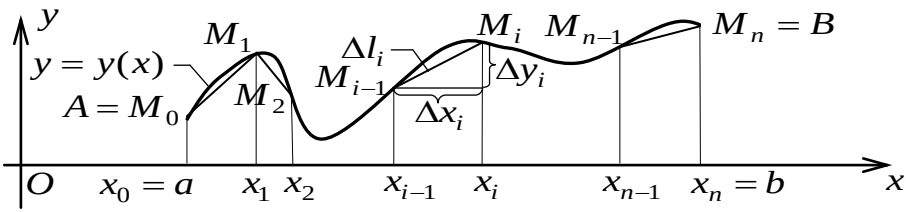

Рисунок 7.9

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних дуг Δl_i, $i = \overline{1,n}$ точками $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$ з абсцисами $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$ і проведемо хорди M_0M_1, $M_1M_2, \dots, M_{i-1}M_i, \dots, M_{n-1}M_n$, довжини яких позначимо відповідно через Δl_1, Δl_2, …, Δl_i, ..., Δl_n. Тоді маємо ламану $M_0M_1M_2 \dots M_{i-1}M_i \dots M_{n-1}M_n$, вписану в дугу L_{AB}.

Довжина ламаної L_n дорівнює сумі довжин її ланок

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$

Довжиною L дуги L_{AB} називають границю довжини L_n вписаної ламаної при необмеженому здрібненні розбиття, тобто коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля (при цьому число n цих ланок прямує до нескінченності):

$$L = \lim_{\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$

Теорема. *Якщо функція $y = y(x)$, визначена на відрізку $[a; b]$, неперервна разом зі своєю похідною на цьому відрізку, то довжина L дуги L_{AB}, що служить її графіком на відрізку $[a; b]$, обчислюється за формулою*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} dx.$$

Доведення.

Позначимо $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $\Delta y_i = y(x_i) - y(x_{i-1})$. Тоді

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} =$$

$$= \sqrt{(\Delta x_i)^2 \left(1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2\right)} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i .$$

За формулою Лагранжа про скінченні прирости маємо

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = y'(c_i), \qquad x_{i-1} < c_i < x_i .$$

Отже, $\Delta l_i = \sqrt{1 + \left(y'(c_i)\right)^2} \Delta x_i$, оскільки $\Delta x_i > 0$.

Таким чином, довжина вписаної ламаної дорівнює

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(y'(c_i)\right)^2} \Delta x_i.$$

За умовою похідна $y'(x)$ – неперервна, тому функція $\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}$ теж неперервна. Тоді вираз для довжини ламаної L_n є інтегральною сумою для неперервної функції. Отже, існує визначений інтеграл – границя L_n при необмеженому здрібненні розбиття, що дає довжину L дуги L_{AB}:

$$L = \lim_{max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(y'(c_i)\right)^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} dx\,.$$

Отже *довжину лінії, що задана у декартовій системі координат знах*одять за формулою:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} dx.$$

Приклад. Знайти довжину вказаної дуги

$$y = lnx,\ x\epsilon\left[\sqrt{3}; \sqrt{8}\right].$$

Розв'язання. Похідна $y' = \frac{1}{x}$. Тоді:

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x^2+1=t^2; x=\sqrt{t^2-1}; \\ dx=\dfrac{tdt}{\sqrt{t^2-1}};\ \ t=\sqrt{x^2+1}; \\ t_{\text{н}}=2;\ \ t_{\text{в}}=3 \end{array} \right| = \int\limits_2^3 \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \cdot \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}} =$$

$$\int\limits_2^3 \frac{(t^2-1)+1}{t^2-1} dt = \int\limits_2^3 dt + \int\limits_2^3 \frac{dt}{t^2-1} = \left. t \right|_2^3 + \frac{1}{2} ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Bigg|_2^3 =$$

$$= 3-2+\frac{1}{2}\left(ln\frac{1}{2} - ln\frac{1}{3}\right) = 1+\frac{1}{2}ln\frac{3}{2} \text{ (од.)}.$$

Лінії що, задані параметрично

Розглянемо дугу L_{AB} гладкої плоскої лінії, що задана параметрично $x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ t \in [\alpha;\ \beta]$, де функції $x = x(t)$ і $y = y(t)$ – неперервні разом зі своїми похідними, причому функція $x = x(t)$ – монотонно зростаюча, $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$. За наведеною вище формулою довжина цієї дуги

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2} dx.$$

З урахуванням рівнянь лінії та властивостей похідної параметрично заданої функції маємо:

$$dx = x'(t)dt;\ \ y'(x) = \frac{y_t'}{x_t'}.$$

Зробимо заміну змінної в інтегралі для довжини дуги:

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{1+\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)^2}\ x'(t)dt = \sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2} dt.$$

Таким чином, *довжина дуги плоскої кривої, що задана параметрично*, визначається за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 dt}$$

Приклад. Знайти довжину астроїди:

$$\begin{cases} x = acos^3 t \\ y = asin^3 t \end{cases}.$$

Розв'язання. Обчислимо довжину астроїди – замкненої кривої, що задана параметричними рівняннями (рис.7.10). Для цього спочатку знайдемо x_t' і y_t':

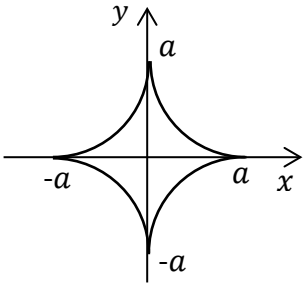

Рисунок 7.10

$$x_t' = 3acos^2 t(-sint);$$

$$y_t' = 3asin^2 t \cdot cost.$$

Чверть L_{AB} астроїди розміщена в першому квадранті від точки $A(a;0)$ до точки $B(0;a)$ (рис. 13). Знайдемо значення параметра t, що відповідають кінцям цієї дуги: $x = acos^3 t$, $acos^3 t = a, cos^3 t = 1, cost = 1, t_н = 0;$

$$acos^3 t = 0, cost = 0, t_в = \frac{\pi}{2}.$$

Тоді довжина всієї астроїди:

$$L_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 cos^4 t\, sin^2 t + 9a^2 sin^4 t\, cos^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2 cos^2 t\, sin^2 t (cos^2 t + sin^2 t)}\, dt = 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} cost\, sint\, dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = sint; du = cost\, dt; \\ u_н = 0;\ u_в = 1 \end{matrix} \right| = 3a \int_0^1 u\, du = 3a \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{3a}{2}.$$

$L = 4L_1 = 6a$ (од. довжини).

Лінія, задана у полярних координатах

Теорема. *Нехай дуга L_{AB} задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, де функція $\rho(\varphi)$ неперервна разом зі своєю похідною $\rho'(\varphi)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$, причому точкам A і B відповідають значення α і β. Тоді довжина дуги L_{AB} обчислюється за формулою:*

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2} d\varphi\ .$$

Доведення. Використовуючи формули переходу від прямокутної до полярної системи координат $x = \rho cos\varphi$ і $y = \rho sin\varphi$, перейдемо до параметричного задання дуги L_{AB}.

Для обчислення довжини дуги застосуємо формулу $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(\varphi)\right)^2 + \left(y'(\varphi)\right)^2} d\varphi$, що відповідає параметричному

випадку. Спочатку знайдемо похідні від x і y за параметром:

$$x'(\varphi) = \rho'(\varphi)cos\varphi - \rho(\varphi)sin\varphi;$$

$$y'(\varphi) = \rho'(\varphi)sin\varphi + \rho(\varphi)cos\varphi.$$

Тоді

$$\left(x'(\varphi)\right)^2 + \left(y'(\varphi)\right)^2 =$$
$$= (\rho'(\varphi)cos\varphi - \rho(\varphi)sin\varphi)^2 + (\rho'(\varphi)sin\varphi + \rho(\varphi)cos\varphi)^2 =$$
$$= \left(\rho'(\varphi)\right)^2 cos^2\varphi - 2\rho'(\varphi)cos\varphi\ \rho(\varphi)sin\varphi + \left(\rho(\varphi)\right)^2 sin^2\varphi +$$
$$+\left(\rho'(\varphi)\right)^2 sin^2\varphi + 2\rho'(\varphi)sin\varphi\ \rho(\varphi)cos\varphi + \left(\rho(\varphi)\right)^2 cos^2\varphi =$$
$$= \left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2.$$

Отже *довжину дуги лінії, що задана у полярних координатах* знаходять за формулою:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2} d\varphi\ .$$

Приклад. Знайти довжину кардіоїди

$$\rho = 6(1 + sin\varphi).$$

Розв'язання. Кардіоїда – замкнена лінія, що зображена на рис.7.11. Вона симетрична відносно осі Oy. Тому її довжину L можна знайти, подвоївши довжину L_1 її правої частини L_{OA}, що розташована в четвертій та першій чвертях і при цьому $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Проведемо обчислення: $\rho' = -6cos\varphi$;

$$\rho^2 + (\rho')^2 = \left(6(1 + sin\varphi)\right)^2 + (6cos\varphi)^2 =$$

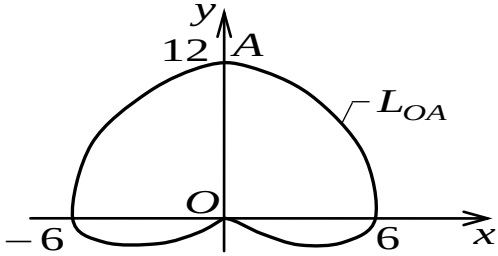

Рисунок 7.11

$$= 36(1 + 2sin\varphi + sin^2\varphi + cos^2\varphi) = 36(2 + 2sin\varphi) =$$
$$= 72(1 + sin\varphi);$$

$$L_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{72(1 + sin\varphi)}\, d\varphi = 6\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + sin\varphi} \cdot \frac{\sqrt{1 - sin\varphi}}{\sqrt{1 - sin\varphi}} d\varphi =$$

$$= 6\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - sin^2\varphi}}{\sqrt{1 - sin\varphi}} d\varphi = 6\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{cos^2\varphi}}{\sqrt{1 - sin\varphi}} d\varphi =$$

$$= 6\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos\varphi}{\sqrt{1 - sin\varphi}} d\varphi = \left| \begin{array}{c} u = 1 - sin\varphi; \\ du = -cos\varphi d\varphi; \\ u_{\text{н}} = 2;\ u_{\text{в}} = 0 \end{array} \right| = -6\sqrt{2} \int_{2}^{0} \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= 6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{u} \Big|_{0}^{2} = 24\,;\ \ L = 2L_1 = 48 \text{ (од.)}.$$

7.3 Об'єм тіла обертання

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену графіком неперервної невід'ємної функції $y = y(x)$, віссю Ox і двома прямими $x = a$ та $x = b$, де $a \le b$. Якщо обертати цю фігуру

навколо осі Ox, то утвориться тіло обертання T (рис. 7.12). Переріз цього тіла площиною, паралельною площині Oyz на відстані x від неї, – круг з площею

$$S(x) = \pi R^2 = \pi\big(y(x)\big)^2.$$

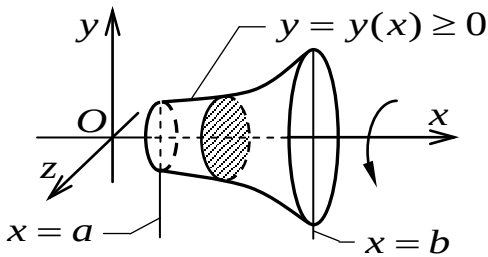

Рисунок 7.12

Об'єм тіла обертання можна обчислити за формулою

$$V = \pi \int_a^b \big(y(x)\big)^2 d\,x.$$

Приклад. Знайти об’єм параболоїда, утвореного обертанням параболи $y^2 = 2px$ навколо вісі Ox і обмеженого площиною $x = H$.

Розв’язання.

$$V = \pi \int_0^H y^2 dx = \pi \int_0^H 2px dx = 2\pi p \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^H = \pi p H^2 \text{(од.куб.)}$$

Лекція 8

Поняття про диференціальне рівняння. Загальний і частинний розв'язки та їх геометричний зміст.
Початкові та граничні умови. Початкові умови і крайова задача.
Умови існування й єдиності розв'язку задачі Коші

8.1 Поняття про диференціальне рівняння. Загальний і частинний розв'язки та їх геометричний зміст

Рівняння називається ***диференціальним***, якщо воно містить похідні (диференціали) шуканої функції.

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної (диференціала), що входить у нього.

Коли шукана функція $y = y(x)$ є функцією однієї змінної x, то диференціальне рівняння (ДР) називають ***звичайним***. Далі будемо займатися лише звичайними ДР.

Диференціальне рівняння n–го порядку зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y = f(x)$ та її похідні $y',\ y'', \dots, y^{(n)}$.

Диференціальне рівняння n–го порядку можна подати в ***загальному вигляді***

$$F\left(x, y,\ y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0,$$

де $y = y(x)$ – шукана функція. Рівняння може не містити в явному вигляді незалежну змінну x, саму шукану функцію y та її похідні нижчих порядків $y',\ y'', \dots, y^{(n)}$, але в ньому обов'язково повинна бути n-та похідна $y^{(n)}$.

Це неявна форма запису ДР. Розв’язавши загальне рівняння відносно найвищої похідної, отримаємо ***канонічний*** (***нормальний***) ***вигляд*** ДР

$$y^{(n)} = f\left(y',\, y'', \dots,\, y^{(n-1)}\right)$$

Наприклад, $y'' - 3(y')^4 + sin5x - e^y = 0$ – ДР другого порядку, подане у загальній (неявній) формі; $y^{(IV)} = y'' - 4xcosy$ – ДР четвертого порядку, записане в канонічній (явній) формі.

Уже відома задача знаходження первісної $y = F(x)$ для даної функції $f(x)$ породжує найпростіше диференціальне рівняння $y' = f(x)$, розв’язування якого зводиться до інтегрування.

Розв'язком диференціального рівняння називається довільна функція $y = y(x)$, що при підстановці в це рівняння перетворює його в тотожність.

Графік розв’язку ДР називається ***інтегральною кривою***.

Зауваження 1. Розв’язок ДР n–го порядку є n разів диференційовною функцією. Тому інтегральна крива є досить гладкою лінією.

Процес знаходження розв'язку ДР називається його ***інтегруванням***.

Зауваження 2. Розв’язок ДР, записаний ***у неявній формі***, часто називають ***інтегралом*** диференціального рівняння.

Приклад . Перевірити, що функція $y = y(x, C)$, яка задана

в неявному вигляді співвідношенням $-\frac{x^2}{2y^2} = ln|Cy|$, де C – довільна стала, служить розв'язком диференціального рівняння $dy/dx = xy/(x^2 - y^2)$.

Розв'язання. Знайдемо похідну неявно заданої функції:

$$\left(-\frac{x^2}{2y^2}\right)' = (ln|Cy|)';$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2xy^2 - 2x^2yy'}{y^4} = \frac{Cy'}{Cy};\ \ \frac{x^2yy' - xy^2}{y^4} = \frac{y'}{y};$$

$$\frac{x^2y' - xy}{y^3} = \frac{y'}{y};\ \ x^2y' - xy = y^2y';$$

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

Щоб знайти шукану функцію з ДР n–го порядку, необхідно в загальному випадку виконати n операцій інтегрування, що дає n довільних сталих. Таким чином, диференціальне рівняння має безліч розв'язків.

Загальним розв'язком диференціального рівняння n–го порядку є функція $y = y(x,\ C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n)$, що містить n довільних сталих $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$ і задовольняє диференціальному рівнянню при будь-яких допустимих значеннях $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок, який одержується із загального розв'язку при конкретних фіксованих значеннях довільних сталих $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$.

Геометричний зміст. Загальному розв'язку відповідає сім'я інтегральних кривих. Частинному розв'язку відповідає конкретна інтегральна лінії.

8.2 Початкові та граничні умови. Початкова задача і крайова задача

Для знаходження конкретних значень довільних сталих, що входять у загальний розв'язок, звичайно використовуються:

1) ***початкові умови*** – відомі значення функції та її похідних в деякій одній фіксованій точці $x = x_0$; або

2) ***крайові*** (***граничні***) ***умови*** – відомі значення функції та її похідних в декількох різних фіксованих точках.

Початкових або крайових умов повинно бути стільки, скільки довільних сталих.

Для ДР n–го порядку початкові умови мають вигляд:

$$y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = {y_0}',\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = {y_0}^{(n-1)},$$

де $x_0,\ y_0,\ {y_0}',\ \dots, {y_0}^{(n-1)}$ – відомі числа.

Диференціальне рівняння разом з початковими умовами називають ***початковою задачею*** (***задачею Коші***).

Диференціальне рівняння разом з крайовими умовами називають ***крайовою*** (***граничною***) ***задачею***.

Приклад. Розв'язати задачу Коші (знайти частинний розв'язок заданого ДР, що задовольняє вказаним початковим умовам): $y'' = e^{2x}; y(0) = 2;\ y'(0) = 1.$

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$y' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1;$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C_1\right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2.$$

В одержаний загальний розв'язок та його першу похідну підставимо задані початкові умови і знайдемо $C_1,\ C_2$:

$$\frac{1}{2} e^0 + C_1 = 1;\ C_1 = \frac{1}{2}\ ;$$

$$\frac{1}{4} e^0 + 0 + C_2 = 2;\ C_2 = \frac{7}{4};\ \ y_{\text{ч}} = \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{2} x + \frac{7}{4}.$$

8.3 Умови існування та єдності розв'язку задачі Коші

Диференціальне рівняння першого порядку має ***загальний вигляд***

$$F(x, y, y') = 0,$$

де $y = y(x)$ – шукана функція незалежної змінної x.

Припустимо, що це рівняння можна розв'язати відносно похідної і подати його в ***нормальній формі*** $y' = f(x, y)$. Для таких рівнянь виконується теорема Коші.

Теорема Коші (існування й єдиності розв'язку). *Нехай у рівнянні* $y' = f(x, y)$ *функція* $f(x, y)$ *та її частинна похідна*

$f'_y(x,y)$ неперервні у деякій області D площини Oxy. Тоді для довільної внутрішньої точки $P_0(x_0,y_0)$ цієї області існує визначений і диференційовний у деякому околі точки x_0 єдиний розв'язок $y=y(x)$ даного рівняння, що задовольняє початковій умові $y(x_0)=y_0$.

З неперервності правої частини $f(x,y)$ випливає існування розв'язку, а умова неперервності похідної $f'_y(x,y)$ забезпечує його єдиність.

Лекція 9

Диференціальні рівняння першого порядку.
Рівняння з відокремлюваними змінними.
Однорідні рівняння першого порядку.
Лінійні рівняння першого порядку.

9.1 Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння першого порядку $y'=f(x,y)$ називається ***рівнянням з відокремлюваними змінними***, якщо його права частина $f(x,y)$ може бути подана як добуток $f(x,y)=h(x)q(y)$ двох функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної.

Щоб знайти розв'язок такого ДР $y'=h(x)q(y)$, необхідно відокремити змінні: похідну записати як відношення диференціалів

$$y'=\frac{dy}{dx},$$

а потім обидві його частини помножити на dx і поділити на такий вираз $q(y)$, щоб в одну частину рівняння входила тільки змінна y, а в іншу − тільки змінна x. Шуканий розв'язок $y=y(x)$ перетворює одержане рівняння

$$\frac{dy}{q(y)} = h(x)dx$$

у тотожність. Інтегруючи її, знайдемо загальний інтеграл рівняння:

$$\int \frac{dy}{q(y)} = \int h(x)dx + C,$$

де C – довільна стала.

Зауваження. При діленні обох частин рівняння на вираз, який містить змінні x чи y, можна "втратити" розв'язки, що перетворюють цей вираз у нуль. Такі випадки необхідно розглядати окремо.

Приклад. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$xyy' = 1 - x^2$$

Розв’язання. Представимо y' як $y' = \frac{dy}{dx}$.

Маємо: $xy\frac{dy}{dx} = 1 - x^2$, $xy\frac{dy}{dx} - (1 - x^2) = 0$.

Помножимо рівняння на дріб $\frac{dx}{x}$, де $x \neq 0$ та отримаємо

$$ydy - \frac{1 - x^2}{x}dx = 0.$$

Запишемо загальний інтеграл:

$$\int ydy - \int \frac{1 - x^2}{x}dx = C.$$

$$\frac{y^2}{2} - \ln x + \frac{x^2}{2} = C \quad \text{або} \quad y^2 + x^2 - \ln x^2 = 2\text{C}$$

останній вираз є загальним розв'язком диференціального рівняння. Зауважимо, що цей розв'язок має сенс, коли $x > 0$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\sqrt{1-y^2}dx - y\sqrt{1-x^2}dy = 0$$

Розв'язання.

$$y\sqrt{1-x^2}dy = \sqrt{1-y^2}dx$$

Поділимо рівняння на добуток $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \neq 0$. Отримаємо:

$$\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Запишемо загальний інтеграл:

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \text{C}.$$

Після виконання інтегрування загальний розв'язок диференційного рівняння має вид:

$$\sqrt{1-y^2} = -arcsinx + C.$$

9.2 Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальним рівнянням з однорідною правою частиною (***однорідним рівнянням***) називається рівняння, яке можна подати у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

або $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$,

де $f(y/x)$ − однорідна функція нульового порядку однорідності; $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ − однорідні функції одного порядку однорідності.

Якщо рівняння виду $y' = F(x,y)$ або $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ не змінюються при заміні x на kx, y на ky і відповідно dx на kdy, а dy на kdy, y' на y' то вони називаються *однорідними.* Для розв'язання використовують *підстановку*:

$$y = Ux$$

де $U(x)$ – нова функція, яка перетворює однорідне рівняння в рівняння з відокремлюваними змінними. Диференціюємо підстановку:

$$y' = U'x + U,$$

і ДР $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$після перетворень приймає вигляд

$$\frac{dU}{f(U) - U} = \frac{dx}{x}.$$

Зауваження. Якщо $f(U) - U = 0$, тобто $f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} = 0$. Тоді $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$. Рівняння $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ приймає вигляд ДР з

відокремлюваними змінними $y' = \frac{y}{x}$ і розв'язується відповідним чином.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Розв'язання. Спочатку зробимо перевірку на однорідність. Зробимо заміну x на kx, y на ky, а

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{kdy}{kdx} = y',$$

отримаємо:

$$kxy' - ky = \sqrt{k^2x^2 + k^2y^2};$$

$$k(xy' - y) = \sqrt{k^2(x^2 + y^2)};$$

$$k(xy' - y) = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Після ділення обох частин рівняння на k, ми отримаємо початкове рівняння, саме це і вказує, що дане рівняння є однорідним, тому використовуємо наведену вище підстановку та її похідну і отримуємо рівняння:

$$x(U'x + U) - Ux = \sqrt{x^2 + x^2U^2};$$

$$x(U'x + U - U) = x\sqrt{1 + U^2},$$

розділимо обидві частини рівняння на $x \neq 0$, отримаємо: $U'x = \sqrt{1 + U^2}$ – це рівняння з відокремлюваними змінними; оскільки $U' = \frac{dU}{dx}$, то отримаємо рівняння виду:

$$\frac{dU}{dx}x = \sqrt{1+U^2}; \quad xdU - \sqrt{1+U^2}dx = 0.$$

Розділимо обидві частини рівняння на вираз

$$x\sqrt{1+U^2} \neq 0$$

$$\frac{dU}{\sqrt{1+U^2}} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння, отримуємо загальний інтеграл:

$$\int \frac{dU}{\sqrt{1+U^2}} - \int \frac{dx}{x} = C, \qquad \ln\left|U + \sqrt{1+U^2}\right| - \ln x = \ln C.$$

Загальний розв'язок диференційного рівняння має вид:

$$U + \sqrt{1+U^2} = Cx.$$

Так, як $U = \frac{y}{x}$, то маємо: $\frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = Cx$. Після тотожних перетворень отримуємо загальний розв'язок:

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2 \ .$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0.$$

Розв'язання. Виконаємо перевірку на однорідність, використовуючи заміни: x на kx, y на ky відповідно dx на kdy, а dy на kdy. Маємо:

$$\left(k^{\mathbf{2}}y^2 - 3k^2x^2\right)kdy + 2kxkykdx = 0,$$

$$k^3(y^2 - 3x^2)dy + 2k^3xydx = 0.$$

Поділимо весь вираз на k^3 і отримаємо початкове рівняння, отже це рівняння однорідне. Для використання підстановки необхідно розділити рівняння на dx, в результаті отримаємо:

$$(y^2 - 3x^2)y' + 2xy = 0.$$

Після відповідних підстановок матимемо:

$$(U^2x^2 - 3x^2)(U'x + U) + 2x^2U = 0,$$

$$U'x + U = \frac{-2U}{U^2 - 3}; \quad U'x = \frac{-2U}{U^2 - 3} - U; \quad U'x = \frac{U - U^3}{U^2 - 3}\ .$$

Заміною $U' = \frac{dU}{dx}$, отримали диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dU}{dx}x = \frac{U - U^3}{U^2 - 3}; \quad \frac{U^2 - 3}{U - U^3}dU = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{U^2 - 3}{U - U^3}dU - \int \frac{dx}{x} = C.$$

Виконавши інтегрування, отримаємо загальне рішення:

$$-3\ln U + \ln(1 + U) - \ln(1 - U) = \ln C + \ln x.$$

Використовуючи властивості логарифмічних функцій загальне рішення представимо:

$$\frac{U + 1}{U^3(1 - U)} = Cx.$$

Виконаємо зворотну підстановку $U = \frac{y}{x}$ і рішення буде мати вигляд:

$$\frac{\frac{y}{x} + 1}{\frac{y^3}{x^3}\left(1 - \frac{y}{x}\right)} = Cx \quad \text{або} \quad \frac{(y + x)x^2}{y^3(x - y)} = C.$$

9.3 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Диференційне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо його можна записати у вигляді

$$y' + p(x)y = g(x),$$

де $p(x)$ і $g(x)$ – відомі неперервні функції від x (або сталі), називається ***лінійним***. Тобто, таке ДР є лінійним відносно шуканої функції $y = y(x)$ та її похідної $y' = \frac{dy}{dx}$.

Якщо, $g(x) = 0$ то рівняння називається ***лінійним однорідним диференціальним рівнянням*** (*ЛОДР*) (лінійним рівнянням з нульовою правою частиною), у протилежному випадку – ***лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням*** *(ЛНДР)* (лінійним рівнянням з ненульовою правою частиною).

Лінійне неоднорідне ДР можна розв'язати безпосередньо ***методом Бернуллі***. Згідно з ним ***загальний розв'язок*** будуємо у вигляді добутку двох функцій від x:

$$y = U(x)V(x) \quad (\textit{підстановка Бернуллі}).$$

Оскільки при такій заміні вже відшукуються дві функції, то виникає додатковий ступінь вільності, що дозволяє розщепити лінійне ДР на два рівняння з відокремлюваними змінними.

$U(x), V(x) -$ нові невідомі функції, причому $U(x) \neq 0$ довільна, $V(x) -$ підбирають такою, щоб виконувалась умова $V' + p(x)V = 0$.

Похідна від добутку двох функцій:

$$y' = U'V + UV'$$

Алгоритм розв'язування лінійних неоднорідних ДР першого порядку розглянемо на прикладах.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

Розв'язання. Використовуючи підстановку $y = UV$ та її похідну $y' = U'V + UV'$, рівняння запишемо у вигляді:

$$U'V + UV' + 2xUV = xe^{-x^2},$$

$$U'V + U(V' + 2xV) = xe^{-x^2}.$$

За умовою знаходження функції $V(x)$, другий доданок останнього рівняння дорівнює нулю, тобто:

$$V' + 2xV = 0\,,$$

а перший доданок буде дорівнювати функції $g(x)$, яка стоїть праворуч, тобто:

$$U'V = xe^{-x^2}.$$

Розв'яжемо рівняння: $V' + 2xV = 0$;

$$V' = -2xV; \quad \frac{dV}{dx} = -2xV;$$

$$\frac{dV}{V} = -2xdx; \quad \ln V = -x^2; \quad V = e^{-x^2}.$$

Вважаємо, що довільна стала тут дорівнює нулю.

Тепер розв'яжемо друге рівняння, але спочатку підставимо в нього знайдену функцію $V = e^{-x^2}$:

$$U'e^{-x^2} = xe^{-x^2}; \quad U' = x; \quad \frac{dU}{dx} = x; \quad dU = xdx; \quad U = \frac{x^2}{2} + C.$$

Знайдені значення функцій записуємо у вигляді добутку і отримуємо загальний розв'язок рівняння:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot e^{-x^2}.$$

Приклад. Розв'язати задачу Коші для рівняння:

$$y' - ytgx = secx; \quad y(0) = 1.$$

Розв'язання. Застосуємо розглянутий вище алгоритм і в результаті отримаємо:

$$U'V + UV' - UVtgx = \frac{1}{cosx}, \qquad U'V + U(V' - Vtgx) = \frac{1}{cosx}.$$

Розв'яжемо рівняння: $V' - Vtgx = 0$; $V' = V\,tgx$;

$$\frac{dV}{dx} = V\,tgx;\;\; \frac{dV}{V} = tgx\,dx;$$

$$lnV = -ln|cosx|;\;\; lnV = ln\frac{1}{cosx}\;;\;\; V = \frac{1}{cosx}.$$

Знайдемо розв'язок рівняння $U'V = \frac{1}{cosx}$, підставляючи знайдене значення V:

$$U'\frac{1}{cosx} = \frac{1}{cosx};\;\; U' = 1;\;\; dU = dx;\;\; U = x + C.$$

Підставляючи знайдені значення функцій отримуємо загальний розв'язок рівняння:

$$y = (x + C)\frac{1}{cosx}.$$

Знайдемо частинний розв'язок рівняння, використовуючи задані початкові умови, тобто розв'яжемо задачу Коші:

$$(0 + C)\frac{1}{cos0} = 1;\;\; C = 1;\; y = \frac{x+1}{cosx}.$$

Зауваження. Лінійними рівняння можуть бути, як відносно y, так і відносно x.

Лекція 10
Диференціальні рівняння вищих порядків. Інтегрування диференціальних рівнянь шляхом зниження порядку

Диференціальне рівняння другого порядку може бути записане у ***загальному вигляді***:

$$F(x,\, y,\, y',\, y'') = 0.$$

Якщо це рівняння вдається розв'язати відносно старшої похідної, то воно набуває ***канонічної*** (***нормальної***) ***форми***:

$$y'' = f(x,\ y,\ y').$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку – це функція незалежної змінної x та двох довільних сталих C_1 та C_2: $y = y(x, C_1,\ C_2)$.

Для ДР другого порядку ***задача Коші*** має вигляд:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'') = 0;\ \ y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_0'$$

і з геометричної точки зору зводиться до побудови інтегральної кривої, що проходить через задану точку $P_0(x_0; y_0)$, в якій дотична має заданий кутовий коефіцієнт y_0'. За відповідною теоремою Коші при певних умовах ця крива існує й єдина.

Для ДР другого порядку може ставитися ***крайова задача***, зокрема, такого вигляду:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'') = 0;\ \ y(a) = y_a;\ \ y(b) = y_b.$$

Зауваження. При розв'язуванні задачі Коші (крайової задачі) зазвичай спочатку знаходять загальний розв'язок ДР, а вже потім враховують початкові (крайові) умови. Коли в задачі досить визначити лише відповідний частинний розв'язок, то часто простіше відразу шукати цей розв'язок, враховуючи додаткові умови поступово, безпосередньо в процесі розв'язування.

10.1 Найпростіше диференціальне рівняння вищих порядків

$$\boldsymbol{y^{(n)} = f(x)}.$$

Це ДР стає *рівнянням* $n-1$ *порядку* в результаті заміни $y^{(n-1)} = p$, де $p = p(x)$ – нова шукана функція. Тоді $y^{(n)} = p'$, і дістаємо ДР $p' = f(x)$, загальний розв'язок якого

$$p = \int f(x)dx + C_1.$$

Повертаючись до початкової змінної, знову маємо *рівняння* $n-1$ *порядку*

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1; \;\; y = \int(\int f(x)dx + C_1\,)dx + C_2$$

– загальний розв'язок вихідного ДР $n-1$ *порядку*. Послідовне інтегрування $n-$ разів дозволяє знайти загальний розв'язок ДУ.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\sqrt[3]{x+4}y'' = 1.$$

Розв'язання. Приведемо рівняння до канонічного вигляду і зробимо відповідну заміну:

$$y'' = \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}},$$

заміна $p = y'; \;\; p' = y''$.

Отримаємо найпростіше рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, яке розв'яжемо розглянутим

раніше методом:

$$p' = \frac{1}{\sqrt[3]{x+4}};\ p = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+4}} = \int (x+4)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3(x+4)^{\frac{2}{3}}}{2} + C_1;$$

$$y = \int \left(\frac{3(x+4)^{\frac{2}{3}}}{2} + C_1 \right) dx = \frac{3}{2} \frac{3(x+4)^{\frac{5}{3}}}{5} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \frac{9}{10} \sqrt[3]{(x+4)^5} + C_1 x + C_2.$$

Зауваження. У випадку ДР довільного n–го порядку $(n \geq 2)$ вигляду $y^{(n)} = f(x)$ робиться заміна $y^{(n-1)} = p$, що зводить його до такого ж найпростішого *рівняння першого порядку* $p' = f(x)$. Загальний розв'язок вихідного ДР *знаходиться* n–кратним інтегруванням.

Приклад . Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' = e^{2x} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Розв'язання. Зробимо заміну $p = y''$. Тоді:

$$y''' = p';\quad p' = e^{2x} + \frac{1}{\sqrt{x}};\ dp = \int \left(e^{2x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx;$$

$$y'' = p = \frac{1}{2} e^{2x} + 2\sqrt{x} + C_1.$$

Тепер зробимо заміну $p = y'$. Тоді:

$$y'' = p';\ p' = \frac{1}{2}e^{2x} + 2\sqrt{x} + C_1;\ dp = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + 2\sqrt{x} + C_1\right)dx;$$

$$y' = p = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1x + C_2.$$

Тоді:

$$y = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1x + C_2\right)dx;$$

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{8}{15}x^{\frac{5}{2}} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

10.2 Диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно шуканої функції y, тобто має вигляд

$$\boldsymbol{F(x,\ y',\ y'') = 0}$$

Зниження порядку досягається заміною $y' = z$, де $z = z(x)$ − допоміжна шукана функція від x. Тоді $y'' = z'$, і одержується ДР першого порядку загального вигляду $F(x, z,\ z') = 0$.

Приклад. Розв'язати задачу Коші для рівняння

$$y''(x^2 + 1) = 2xy', \quad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 3.$$

Розв'язання. Використаємо тотожність $y' = z$ та $y'' = z'$.

Рівняння матиме вид: $(x^2+1)z' = 2xz$. Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dz}{z} = \frac{2xdx}{x^2+1}.$$

Після інтегрування отримаємо: $lnz = \ln(x^2+1) + lnC_1$,

$$lnz = \ln\big(C_1(x^2+1)\big); \;\; z = C_1(x^2+1).$$

Використаємо початкову умову $z(0) = y'(0) = 3$ для визначення C_1.

$$(0+1)C_1 = 3, \text{тому} \quad z = 3x^2+3, \text{або } y' = 3x^2+3.$$

$$\text{Отже,} \quad y = \int(3x^2+3)\,dx = x^3+3x+C_2.$$

Визначимо C_2: $y(0) = 1$, $C_2 = 1$, тому розв'язком задачі Коші буде $y = x^3+3x+1$ – частинний розв'язок даного диференціального рівняння.

Приклад. Розв'язати задачу Коші:

$$xy'' = y'ln\frac{y'}{x}; \;\; y(1) = 0; \; y'(1) = 1.$$

Розв'язання. Зробимо заміну $y' = z$, де $z = z(x)$. Тоді $y'' = z'$. Отримаємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$xz' = zln\frac{z}{x}; \quad z' = \frac{z}{x}\cdot ln\frac{z}{x},$$

що є рівнянням з однорідною правою частиною. Зробимо в ньому заміну $z = Ux$. Тоді: $z' = U'x + U$.

$$U'x + U = \frac{Ux}{x} ln \frac{Ux}{x}; \;\; U'x + U = UlnU; \;\; U'x = UlnU - U;$$

$$U'x = U(lnU - 1); \;\; \frac{dU}{dx} = \frac{U(lnU - 1)}{x}; \;\; \frac{dU}{U(lnU - 1)} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dU}{U(lnU - 1)} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dU}{U(lnU - 1)} = \left| \begin{matrix} t = lnU - 1; \\ dt = \frac{dU}{U}. \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = ln|t| =$$

$$= ln|lnU - 1|; \;\; ln|lnU - 1| = ln|x| + ln|C_1|;$$

$$ln|lnU - 1| = ln|C_1 x|; \; lnU - 1 = C_1 x.$$

Повернемося до функції z, а потім до початкової функції y:

$$ln \frac{z}{x} - 1 = C_1 x; \;\; ln \frac{y'}{x} - 1 = C_1 x;$$

Використаємо початкову умову $y'(1) = 1$ і знайдемо C_1:

$$ln1 - 1 = C_1 \cdot 1; \; C_1 = -1; \; ln \frac{y'}{x} - 1 = -x;$$

$$ln \frac{y'}{x} = 1 - x; \;\; \frac{y'}{x} = e^{1-x}; \;\; y' = xe^{1-x}.$$

Дістали ще одне ДР першого порядку – рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$dy = xe^{1-x}dx; \ \int dy = \int xe^{1-x}dx\,;$$

$$\int xe^{1-x}dx = \left| \begin{matrix} u = x; du = dx; \\ dv = e^{1-x}dx; \\ v = -e^{1-x} \end{matrix} \right| = -xe^{1-x} + \int e^{1-x}dx =$$

$$= -xe^{1-x} - e^{1-x} + C_2;$$

$$y = -xe^{1-x} - e^{1-x} + C_2.$$

Знайдемо C_2, використовуючи початкову умову $y(1) = 0$, і отримаємо розв'язок задачі Коші:

$$-1 \cdot e^0 - e^0 + C_2 = 0; \ C_2 = 2;$$

$$y = -xe^{1-x} - e^{1-x} + 2.$$

10.3 Диференціальне рівняння другого порядку, що не містить явно незалежної змінної x, тобто має вигляд:

$$\boldsymbol{F(y, y', y'') = 0}.$$

У цьому випадку приймаємо $y' = p(y)$, де $p = p\big(y(x)\big)$ – допоміжна складна функція від x, причому зовнішня функція $p = p(y)$ проміжного аргументу y служить новою шуканою функцією. Тоді за правилом диференціювання складеної функції маємо

$$y'' = \big(p(y)\big)' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p$$

і приходимо до ДР першого порядку вигляду $F(y, p, p'p)$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4(y')^2 tg4y = 0.$$

Розв'язання. Зробимо заміну $y' = p(y)$. Тоді отримаємо і розв'яжемо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y'' = p'p; \quad p'p - 4p^2 tg4y = 0;$$

$$p(p' - 4ptg4y) = 0; \quad p \neq 0;$$

$$p' - 4ptg4y = 0; \; p' = 4ptg4y;$$

$$\frac{dp}{dy} = 4ptg4y; \; \frac{dp}{p} = 4tg4ydy; \; \int \frac{dp}{p} = 4\int tg4ydy\,;$$

$$lnp = -ln(cos4y) + lnC_1; \; lnp = ln\frac{C_1}{cos4y};$$

$$p = \frac{C_1}{cos4y}; \; y' = \frac{C_1}{cos4y}; \; \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{cos4y};$$

$$cos4ydy = C_1dx; \; \int cos4ydy = \int C_1dx\,;$$

$$\frac{1}{4}sin4y = C_1x + C_2; \quad sin4y = 4(C_1x + C_2);$$

$$4y = arcsin(4C_1x + 4C_2);$$

$y = \frac{1}{4}arcsin(4C_1x + 4C_2)$ – загальний розв'язок рівняння.

Лекція 11

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Структура загального розв'язку. Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку. Принцип суперпозиції

11.1 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Структура загального розв'язку

Визначення. Лінійним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння першого ступеня (лінійне) відносно шуканої функції та її похідної.

Лінійні ДР другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (*)$$

де $p(x)$ і $q(x)$ − коефіцієнти; $f(x)$ − права частина рівняння.

Розглянемо лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку $(f(x) = 0)$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Структуру загального розв'язку ЛОДР другого порядку відображає наступна теорема.

Теорема. *Якщо функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків ЛОДР другого*

порядку, то їх лінійна комбінація

$$y_o = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де C_1 і C_2 − довільні сталі, служить загальним розв'язком цього рівняння.

Доведення. Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ − фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Перевіримо, що їх лінійна комбінація $y_o = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$,

також є розв'язком (задовольняє ЛОДР). Для цього підставимо функцію y та її похідні у рівняння:

$$y_o' = C_1 y_1' + C_2 y_2'; \;\; y_o'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'';$$

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' \; + p(x)(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) = 0;$$

$$C_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = 0;$$

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Далі покажемо, що для довільних початкових умов

$$y(x_0) = y_0; \;\; y'(x_0) = y_0'$$

знаходяться єдині конкретні значення сталих C_1 і C_2.

Справді, для визначення C_1 і C_2 дістаємо лінійну алгебраїчну систему

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1{}'(x_0) + C_2 y_2{}'(x_0) = y_0' \end{cases};$$

визначником якої служить

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1{}'(x_0) & y_2{}'(x_0) \end{vmatrix}.$$

Для фундаментальної системи $y_1(x)$, $y_2(x)$ визначник відмінний від нуля. Тому система лінійних рівнянь відносно C_1 і C_2 завжди має і причому єдиний розв'язок.

Отже, $y_o = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ − загальний розв'язок ЛОДР.

Зауваження. Очевидний нульовий розв'язок ЛОДР $y = 0$ не утворює фундаментальної системи з довільними іншими частинними розв'язками, оскільки при цьому визначник системи тотожно рівний нулю.

11.2 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Для ***ЛОДР*** n ***-го порядку зі сталими коефіцієнтами***

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \qquad a_i = const.$$

Ейлером розроблено загальний метод його розв'язування шляхом побудови фундаментальної системи і на її основі загального розв'язку. Розглянемо його на прикладі ***ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами***:

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad p = const, \qquad q = const.$$

Частинні розв'язки шукаємо у вигляді експоненти $y = e^{kx}$, де k − невідомий сталий коефіцієнт. Підставимо цю функцію $y = e^{kx}$ та її похідні $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$ у рівняння і дістанемо $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$. Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то для визначення k отримуємо співвідношення

$$k^2 + pk + q = 0,$$

яке називають ***характеристичним рівнянням*** даного ЛОДР.

Характеристичне рівняння є квадратним відносно k і на множині комплексних чисел завжди має два розв'язки k_1 і k_2. При цьому можливі три випадки, в залежності від знака дискримінанта D.

Випадок 1. $D > 0$. Обидва корені k_1 і k_2 − дійсні різні числа $k_1 \neq k_2$. Тоді $y_1 = e^{k_1x}$ і $y_2 = e^{k_2x}$ − лінійно незалежні розв'язки, що утворюють фундаментальну систему. Загальний розв'язок має вигляд

$$\boldsymbol{y_o = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}}\,.$$

Приклад. Знайти розв'язок ДР $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 + 5k + 6 = 0;$$

$$D = 25 - 24 = 1;$$

$$k_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2};\ k_1 = -2;\ k_2 = -3.$$

Загальне рішення даного ДР: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$.

Випадок 2. Корені k_1 і k_2 рівняння дійсні та рівні: $D = 0$,

$$k_1 = k_2 = k.$$

В цьому випадку загальне рішення рівняння має вид:

$$\boldsymbol{y_o = e^{kx}(C_1 x + C_2)}.$$

Приклад. Знайти розв'язок ДР $y'' - 8y' + 16 = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 8k + 16 = 0;$$

$$D = 64 - 64 = 0;$$

$$k_1 = k_2 = \frac{8}{2} = 4.$$

Загальне рішення даного ДР: $y = e^{4x}(C_1 x + C_2)$.

Випадок 3. Корені k_1 і k_2 рівняння комплексні, нагадаємо, що $i^2 = -1$: $D < 0$, $x_{1,2} = \alpha \pm \beta$i. У цьому випадку загальне рішення рівняння має вид:

$$\boldsymbol{y_o = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)}.$$

Приклад. Знайти розв'язок ДР $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 4k + 13 = 0;$$

$$D = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 = -36;$$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i; \quad \alpha = 2, \qquad \beta = 3.$$

Загальне рішення даного ДР:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Приклад. Знайти розв'язок ДР $y'' + 25y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння даного ДР має вид:

$$k^2 + 25 = 0;$$

$$k^2 = -25; \quad k_{1,2} = \pm 5i; \ \beta = 5.$$

Загальне рішення даного ДР: $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$.

11.3 Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку. Принцип суперпозиції

Структуру загального розв'язку ЛНДР другого порядку визначає наступна теорема.

Теорема. *Загальний розв'язок ЛНДР другого порядку*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

можна зобразити у вигляді суми загального розв'язку y_o *відповідного ЛОДР*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

і якого-небудь частинного розв'язку $\bar{y}$ *ЛНДР*: $y = y_o + \bar{y}$.

Доведення. Перевіримо, що функція $y = y_o + \bar{y}$ є розв'язком ЛНДР:

$$y' = y_o{}' + \bar{y}'; \;\; y'' = y_o{}'' + \bar{y}'' \;;$$

$$y_o{}'' + \bar{y}'' + p(y_o{}' + \bar{y}') + q(y_o + \bar{y}) = 0 + f(x);$$

$$(y_o{}'' + py_o{}' + qy_o) + (\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y}) = f(x).$$

Оскільки $y_o = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР, то розв'язок $y = y_o + \bar{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \bar{y}$ містить дві довільні сталі C_1 і C_2. Для довільних початкових умов

$$y(x_0) = y_0; \;\; y'(x_0) = y_0'$$

знаходяться єдині конкретні значення сталих C_1 і C_2. Тобто розв'язок $y = y_o + \bar{y}$ є загальним.

Принцип суперпозиції розв'язків ЛНДР другого порядку відображає наступна теорема.

Теорема. *Якщо у ЛНДР другого порядку*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

права частина є сумою двох функцій $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *то його частинний розв'язок також можна подати у вигляді суми* $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$, *де* $\bar{y}_1$ *і* $\bar{y}_2$ *– частинні розв'язки рівнянь*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) \text{ і } \; y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

з тією ж самою частиною ліворуч і відповідними функціями $f_1(x), f_2(x)$ *праворуч.*

Зауваження. Способи знаходження загального розв'язку y ЛОДР розглянуто раніше. Частинний розв'язок $\bar{y}$ ЛНДР залежить від правої частини $f(x)$ і для його побудови розроблені методи.

Лекція 12

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною спеціального вигляду. Відшукання частинного розв'язку, що відповідає виду правої частини.

Розглянемо ***ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами***

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad p = const, q = const,$$

де права частина має ***спеціальний вигляд***

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)cos\beta x + Q_m(x)sin\beta x).$$

Тут $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ − многочлени відповідно степеня n і m; α і β − дійсні сталі, з яких формується ***характерне комплексне число*** $z = \alpha \pm \beta i$.

Зауваження 1. n і m − довільні невід'ємні цілі числа, $n \geq 0$, $m \geq 0$; α і β − довільні дійсні числа, в тому числі

$\alpha = 0, \beta = 0.$

Згідно з ***методом невизначених коефіцієнтів*** *структура частинного розв'язку* $\bar{y}$ *ЛНДР* формується за виглядом правої частини $f(x)$ з урахуванням того, коренем якої кратності r $(r \geq 0)$ служить характерне число $z = \alpha \pm \beta i$ для характеристичного рівняння. Невідомі параметри (коефіцієнти) цієї структури знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь, які одержуються прирівнюванням коефіцієнтів при подібних відносно x членах.

Частинний розв'язок має вигляд

$$\bar{y} = x^r e^{\alpha x}\left(\overline{P_s(x)} cos\beta x + \overline{Q_s(x)} sin\beta x\right),$$

де $\overline{P_s(x)}$ і $\overline{Q_s(x)}$ − многочлени степеня $s = max\{n, m\}$ з невідомими коефіцієнтами.

Розглянемо більш детально окремі випадки правої частини спеціального вигляду і відповідні форми частинного розв'язку $\bar{y}$ ЛНДР зі сталими коефіцієнтами.

Випадок 1 $\boldsymbol{f(x) = P_n(x)}$, де $P_n(x)$ − многочлен n-ї степені.

а) корені характеристичного рівняння $k_1 \neq 0$ і $k_2 \neq 0$, тоді частинне рішення нелінійного ДР має вигляд:

$$\bar{y} = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n,$$

$\bar{y}$ многочлен степені n, а $B_0, B_1, \ldots, B_n$ − невідомі, які знаходимо за методом невизначених коефіцієнтів;

б) корені характеристичного рівняння $k_1 = 0$ і $k_2 \neq 0$,

тоді частинне рішення нелінійного ДР має вигляд:

$$\overline{y} = (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n) \cdot x,$$

де $B_0, B_1, \ldots, B_n$ - невідомі коефіцієнти.

Приклад. Знайти розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3.$$

Розв'язання. Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 6k + 9 = 0;$$
$$D = 36 - 36 = 0;$$
$$k_{1,2} = 3.$$

Загальний розв'язок однорідного ДР:

$$y_o = e^{3x}(C_1 x + C_2).$$

Права частина: $f(x) = 2x^2 - x + 3$ – ступінь многочлена друга, тому

$$\overline{y} = B_0 x^2 + B_1 x + B_2.$$

Знайдемо $\overline{y}'$ та $\overline{y}''$ і підставимо в дане рівняння отримані значення відповідно замість y'', y' та y .

$$\overline{y}' = 2B_0 x + B_1;$$
$$\overline{y}'' = 2B_0.$$
$$2B_0 - 6(2B_0 x + B_1) + 9(B_0 x^2 + B_1 x + B_2) = 2x^2 - x + 3;$$
$$2B_0 - 12B_1 x - 6B_2 + 9B_0 x^2 + 9B_1 x + 9B_2 = 2x^2 - x + 3.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти B_0, B_1 і B_2 спираючись на рівність многочленів. Порівняємо коефіцієнти елементів при x^2:

$$x^2 |\ 9B_0 = 2, \qquad B_0 = \frac{2}{9}.$$

Порівняємо коефіцієнти елементів при x:

$$x |\ -12B_0 + 9B_1 = -1;\ \ -12 \cdot \frac{2}{9} + 9B_1 = -1;\ \ 9B_1 = -1 + \frac{8}{3};\ \ 9B_1 = \frac{5}{3};$$

$$B_1 = \frac{5}{27}.$$

Порівняємо коефіцієнти елементів при x^0,

$$x^0 |\ 2B_0 - 6B_1 + 9B_2 = 3;\ \ 2 \cdot \frac{2}{9} - 6 \cdot \frac{5}{27} + 9B_2 = 3;$$

$$\frac{4}{9} - \frac{10}{9} + 9B_2 = 3;$$

$$9B_2 = 3 + \frac{2}{3};\ \ 9B_2 = \frac{11}{3};\ \ B_2 = \frac{11}{27}.$$

Отже, частинний розв'язок:

$$\overline{y} = \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

Розв'язок неоднорідного ДР: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = e^{3x}(C_1 x + C_2) + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

Приклад. Знайти розв'язок неоднорідного ДР

$$2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вид:

$$2k^2 + 5k = 0;$$

$$k(2k + 5) = 0;$$

$$k_1 = 0, \qquad k_2 = -\frac{5}{2}.$$

Отже, загальне рішення однорідного ДР:

$$y_o = C_1 + C_2 e^{-\frac{5x}{2}}.$$

Права частина $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$ і $k_1 = 0, k_2 \neq 0$, тому:

$$\overline{y} = (B_0 x^2 + B_1 x + B_2) \cdot x = B_0 x^3 + B_1 x^2 + B_2 x;$$

$$\overline{y}' = 3B_0 x^2 + 2B_1 x + B_2;$$

$$\overline{y}'' = 6B_0 x + 2B_1.$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$2(6B_0 x + 2B_1) + 5(3B_0 x^2 + 2B_1 x + B_2) = 5x^2 - 2x - 1;$$

$$12B_0 x + 4B_1 + 15B_0 x^2 + 10B_1 x + 5B_2 = 5x^2 - 2x - 1.$$

Знайдемо коефіцієнти B_0, B_1 і B_2, як у попередньому прикладі:

$$x^2 |\ 15B_0 = 5;\ \ B_0 = \frac{1}{3}.$$

$$x |\ 12B_0 + 10B_1 = -2;\ \ 12 \cdot \frac{1}{3} + 10B_1 = -2;$$

$$10B_1 = -6;\ \ B_1 = -\frac{3}{5}.$$

$$x^0 |\ \ 4B_1 + 5B_2 = -1;\ \ 4 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 5B_2 = -1;$$

$$5B_2 = -1 + \frac{12}{5};\ \ 5B_2 = \frac{7}{5};\ B_2 = \frac{7}{25}.$$

Отже, частинний розв’язок:

$$\overline{y} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Рішення диференційного рівняння: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5x}{2}} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Випадок 2 $\boldsymbol{f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)}$, де $e^{\alpha x}$ – показникова функція, а $P_n(x)$ – многочлен n-ї степені.

а) корені характеристичного рівняння $k_1 \neq \alpha$ і $k_2 \neq \alpha$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n);$$

б) корені характеристичного рівняння $k_1 = \alpha$ і $k_2 \neq \alpha$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n) \cdot x\,;$$

в)корені характеристичного рівняння $k_1 = \alpha$ і $k_2 = \alpha$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n) \cdot x^2.$$

Приклад. Розв'язати задачу Коші для диференційного рівняння

$$y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3); \quad y(0) = 2, y'(0) = 2.$$

Розв'язання. Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 2k = 0;$$

$$k(k-2) = 0;$$

$$k_1 = 0 \text{ і } k_2 = 2.$$

Загальне рішення однорідного ДР: $y_o = C_1 + C_2 e^{2x}$.

Права частина рівняння: $f(x) = e^x(x^2 + x - 3)$.

Тут $\alpha = 1,\ k_1 \neq \alpha$ і $k_2 \neq \alpha$ тому:

$$\overline{y} = e^x(B_0 x^2 + B_1 x + B_2);$$

$$\overline{y}' = e^x(B_0 x^2 + B_1 x + B_2) + e^x(2B_0 x + B_1) = \\ = e^x(B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 2B_0 x + B_1);$$

$$\overline{y}'' = e^x(B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 2B_0 x + B_1) + e^x(2B_0 x + B_1 + 2B_0)$$

$$= e^x(B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 4B_0 x + 2B_1 + 2B_0).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}'', \overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 4B_0 x + 2B_1 + 2B_0 -$$

$$-2(B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 2B_0 x + B_1) = x^2 + x - 3;$$

$$B_0 x^2 + B_1 x + B_2 + 4B_0 x + 2B_1 + 2B_0 - 2B_0 x^2 - 2B_1 x - 2B_2 -$$

$$-4B_0 x - 2B_1 = x^2 + x - 3;$$

$$-B_0 x^2 - B_1 x - B_2 + 2B_0 = x^2 + x - 3.$$

Знайдемо коефіцієнти:

$$x^2 | -B_0 = 1;\ \ B_0 = -1.$$

$$x | \ -B_1 = 1;\ \ B_1 = -1$$

$$x^0 | \ -B_2 + 2B_0 = -3;\ \ -B_2 - 2 = -3;\ \ -B_2 = -1;\ \ B_2 = 1.$$

Отже, частинний розв’язок:

$$\overline{y} = e^x(-x^2 - x + 1).$$

Розв'язок диференційного рівняння: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1).$$

Знайдемо частинний розв'язок даного ДР, підставивши початкові умови в y та y' :

$$y' = 2C_2 e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1) + e^x(-2x - 1).$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 2 \\ 2C_2 + 1 - 1 = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 0 \end{cases}.$$

Задача Коші для даного диференційного рівняння має вид:

$$y = e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1).$$

Приклад. Знайти розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(3 - 4x).$$

Розв'язання. Для лівої частини рівняння запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 3k + 2 = 0;$$

$$D = 9 - 8 = 1;$$

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2};\ k_1 = 2;\ k_2 = 1.$$

Загальне рішення однорідного ДР: $y_o = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$.

Права частина рівняння: $f(x) = e^{2x}(3 - 4x)$. Тут $\alpha = 2$, $k_1 = \alpha,\ k_2 \neq \alpha$.

Тому $\overline{y}$ має вид: $\overline{y} = e^{2x}(B_0x + B_1) \cdot x$,

$$\overline{y} = e^{2x}(B_0x^2 + B_1x);$$

$$\overline{y}' = 2e^{2x}(B_0x^2 + B_1x) + e^{2x}(2B_0x + B_1) =$$

$$= e^{2x}(2B_0x^2 + 2B_1x + 2B_0x + B_1);$$

$$\overline{y}'' = 2e^{2x}(2B_0x^2 + 2B_1x + 2B_0x + B_1) +$$

$$+e^{2x}(4B_0x + 2B_1 + 2B_0) =$$

$$= e^{2x}(4B_0x^2 + 4B_1x + 8B_0x + 2B_0 + 4B_1).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}''$,$\overline{y}'$ та $\overline{y}$ в початкове рівняння:

$$4B_0x^2 + 4B_1x + 8B_0x + 2B_0 + 4B_1 -$$

$$-3(2B_0x^2 + 2B_1x + 2B_0x + B_1) + 2(B_0x^2 + B_1x) = 3 - 4x;$$

$$4B_0x^2 + 4B_1x + 8B_0x + 2B_0 + 4B_1 - 6B_0x^2 - 6B_1x -$$

$$-6B_0x - 3B_1 + 2B_0x^2 + 2B_1x = 3 - 4x;$$

$$2B_0x + 2B_0 + B_1 = 3 - 4x.$$

Знайдемо коефіцієнти:

$$x|\ 2B_0 = -4;\ \ B_0 = -2.$$

$$x^0|\ 2B_0 + B_1 = 3;\ -4 + B_1 = 3;\ \ B_1 = 7.$$

Отже, частинний розв’язок:

$$\overline{y} = e^{2x}(-2x^2 + 7x).$$

Розв'язок рівняння має вид: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + e^{2x}(-2x^2 + 7x).$$

Випадок 3 $\boldsymbol{f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x}$**,** де a і b − сталі.

а) корені характеристичного рівняння $k_{1,2} \neq \pm\beta i$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = A\cos\beta x + B\sin\beta x\ ,$$

де A і B - невідомі коефіцієнти.

б) корені характеристичного рівняння $k_{1,2} = \pm\beta i$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)\cdot x.$$

Приклад. Знайти розв'язок неоднорідного ДР

$$y'' + 4y' + 13 = 5\sin 2x.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 + 4k + 13 = 0;$$
$$D = 16 - 52 = -36;$$
$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i.$$

Загальне рішення однорідного ДР:

$$y_o = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

Права частина рівняння: $f(x) = 5\sin 2x$, $k_{1,2} \neq \pm 2i$.

$$\overline{y} = A\cos 2x + B\sin 2x;$$

$$\overline{y}' = -2A\,sin\,2x + 2B\,cos\,2x;$$

$$\overline{y}'' = -4A\,cos\,2x - 4B\,sin\,2x.$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}''$, $\overline{y}'$ та $\overline{y}$ в дане рівняння:

$$-4A\,cos\,2x - 4B\,sin\,2x + 4(-2A\,sin\,2x + 2B\,cos\,2x) +$$

$$+13(A\,cos\,2x + B\,sin\,2x) = 5\,sin\,2x\,;$$

$$-4A\,cos\,2x - 4B\,sin\,2x - 8A\,sin\,2x + 8B\,cos\,2x +$$

$$+13A\,cos\,2x + 13B\,sin\,2x = 5\,sin\,2x.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти з рівностей, що відповідають $\sin 2x$ та $\cos 2x$:

$$sin\,2x|\ -4B - 8A + 13B = 5;$$

$$cos2\,x| - 4A + 8B + 13A = 0.$$

Отримали систему рівнянь, яку розв'яжемо за правилом Крамера: $\begin{cases} -8A + 9B = 5 \\ 9A + 8B = 0 \end{cases}$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} -8 & 9 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -64 - 81 = -145,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = -45.$$

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{40}{145} = -\frac{8}{29},\ \ B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{45}{145} = \frac{9}{29}.$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідного ДР:

$$\overline{y} = -\frac{8}{29}cos\,2x + \frac{9}{29}sin\,2x.$$

Розв'язком неоднорідного диференційного рівняння є: $y = y_o + \overline{y}$, тобто

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \frac{8}{29}\cos 2x + \frac{9}{29}\sin 2x.$$

Випадок 4 $\boldsymbol{f(x) = e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x)}$,

а) корені характеристичного рівняння $k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x).$$

б) корені характеристичного рівняння $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, тому частинний розв'язок має вигляд:

$$\overline{y} = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)\cdot x$$

Приклад. Знайти розв'язок ДУ:

$$y'' - 7y' + 6y = 2e^{2x}\cos x.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вид:

$$k^2 - 7k + 6 = 0;$$
$$D = 49 - 24 = 25;$$
$$k_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2};\ k_1 = 6;\ k_2 = 1.$$

Загальне розв'язок однорідного ДР: $y_o = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x}$.

Права частина рівняння: $f(x) = 2e^{2x}\cos x$, $k_{1,2} \neq \alpha \pm \beta i$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, тому частинний розв'язок неоднорідного ДР шукаємо у вигляді:

$$\overline{y} = e^{2x}(A\,sin\,x + B\,cos\,x);$$

$$\overline{y}' = 2e^{2x}(A\,sin\,x + B\,cos\,x) + e^{2x}(A\,cos\,x - B\,sin\,x) =$$

$$= e^{2x}(2A\,sin\,x + 2B\,cos\,x + A\,cos\,x - B\,sin\,x);$$

$$\overline{y}'' = 2e^{2x}(2A\,sin\,x + 2B\,cos\,x + A\,cos\,x - B\,sin\,x) +$$

$$+e^{2x}(2A\,cos\,x - 2B\,sin\,x - A\,sin\,x - B\,cos\,x) =$$

$$= e^{2x}(4A\,sin\,x + 4B\,cos\,x + 2A\,cos\,x - 2B\,sin\,x + \\ + 2A\,cos\,x - 2B\,sin\,x - A\,sin\,x - B\,cos\,x).$$

Підставимо отримані значення $\overline{y}''$, $\overline{y}'$ та $\overline{y}$ в дане рівняння:

$$4A\,sin\,x + 4B\,cos\,x + 2A\,cos\,x - 2B\,sin\,x + 2A\,cos\,x -$$

$$-2B\,sin\,x - A\,sin\,x - B\,cos\,x -$$

$$-7(2A\,sin\,x + 2B\,cos\,x + A\,cos\,x - B\,sin\,x) +$$

$$+6(A\,sin\,x + B\,cos\,x) = cos\,x\,;$$

$$4A\,sin\,x + 4B\,cos\,x + 2A\,cos\,x - 2B\,sin\,x + 2A\,cos\,x -$$

$$-2B\,sin\,x - A\,sin\,x - B\,cos\,x - 14A\,sin\,x - 14B\,cos\,x -$$

$$-7A\,cos\,x + 7B\,sin\,x + 6A\,sin\,x + 6B\,cos\,x = cos\,x.$$

Невідомі коефіцієнти визначимо з рівностей, що відповідають $sin\,x$ та $cos\,x$:

$$cos\,x|\ 4B + 2A + 2A - B - 14B - 7A + 6B = 1,$$

$$sin\,x|\ 4A - 2B - 2B - A - 14A + 7B + 6A = 0,$$

Розв’яжемо отриману систему рівнянь за правилом Крамера:

$$\begin{cases} -3A - 5B = 1 \\ -5A + 3B = 0 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 25 = -34;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \qquad A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{3}{34};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 5 = 5, \qquad B = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{5}{34}.$$

Отже, отримаємо частинний розв’язок неоднорідного ДР:

$$\overline{y} = e^{2x}\left(-\frac{3}{34} sin\, x - \frac{5}{34}\cos x\right) = -e^{2x}\left(\frac{3}{34}\sin x + \frac{5}{34} cos\, x\right).$$

$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x} - e^{2x}\left(\frac{3}{34} sin\, x + \frac{5}{34} cos\, x\right)$ – загальний розв’язок диференціального рівняння.

Лекція 13
Поняття функції багатьох змінних. Область визначення функції двох змінних. Поверхня як графік функції двох змінних. Лінії рівня функції двох змінних. Поверхні рівня функції трьох змінних. Границя та неперервність функції багатьох змінних

13.1 Поняття функції багатьох змінних. Область визначення.

Нехай n – деяке фіксоване натуральне число. Упорядкована множина n довільних дійсних чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називаються *n-вимірною точкою* і позначається однією буквою, наприклад, M. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ називаються *координатами* точки M. Позначається $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Множина всіх n-вимірних точок називається *n-вимірним точковим простором* R^n.

Нехай задано деяку n-вимірну непорожню множину D. Якщо за вказаним правилом (*законом відповідності*) f кожній точці M цієї множини відповідає одне цілком певне значення дійсної змінної U, то кажуть, що задано *функцію n змінних* $U = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. При цьому множину D називають *областю визначення* функції $U = f(M)$. Незалежні змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$ називають *аргументами*, а залежну змінну U – *функцією*.

Якщо D – область на координатній площині Oxy (плоска, двовимірна), то функція $z = f(M) = f(x, y)$ є *функцією двох змінних x, y*.

Якщо D – область у тривимірному координатному

просторі $Oxyz$, то функція $U = f(M) = f(x, y, z)$ є *функцією трьох змінних* x, y, z.

Аналітичне завдання функції означає, що задається формула, за допомогою якої за заданим значенням незалежних змінних отримують значення функції. При аналітичному завданні функції за область визначення D приймають множину значень x і y, для яких z отримує дійсні значення.

Приклад . Знайти і зобразити штриховкою на координатній площині Oxy область визначення D заданої функції

$$z = ln\left(25 - x^2 - y^2\right).$$

Розв'язання: Область визначення D даної функції $z = ln(25 - x^2 - y^2)$ – множина всіх тих точок (x, y), для яких, $25 - x^2 - y^2 > 0$, бо логарифм визначений тільки для додатних значень аргументу, а жодних інших обмежень на змінні x, y немає.

Щоб зобразити область D геометрично, знайдемо її межу:

$$25 - x^2 - y^2 = 0; \quad x^2 + y^2 = 25.$$

Це рівняння кола з радіусом R=5. Дане коло у залежності від знаку виразу $25 - x^2 - y^2$ ділить всю координатну площину Oxy на дві частини – внутрішню і зовнішню (рис. 13.1).

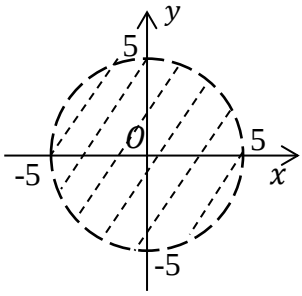

Рисунок 13.1

Щоб виявити, яка з частин входить у область визначення, тобто задовольняє умову $x^2 + y^2 < 25$, необхідно взяти довільно по одній пробній внутрішній точці з кожної частини і для них перевірити цю умову. Наприклад $O(0, 0)$, для точки

умова виконується $0^2 + 0^2 < 25$, $0 < 25$, тому внутрішня область, обмежена колом, входить в D. Для точки $B(1, 5)$ ця умова не виконується $1 + 25 < 25$, тому область, що лежить поза колом, не входить в D.

Отже, внутрішніми точками області визначення D даної функції є точки, обмежені колом. Саме коло не належить області D, тому що для його точок $x^2 + y^2 = 25$. Область D – відкрита, її межа позначена пунктиром.

13.2 Поверхня як графік функції двох змінних

Множина всіх точок $P(x, y, z)$ простору, координати яких задовольняють рівняння, називається *графіком* функції двох змінних $z = f(x, y)$. Звичайно графіком є деяка поверхня S, що проектується на площину Oxy на область визначення D(рис. 13.2).

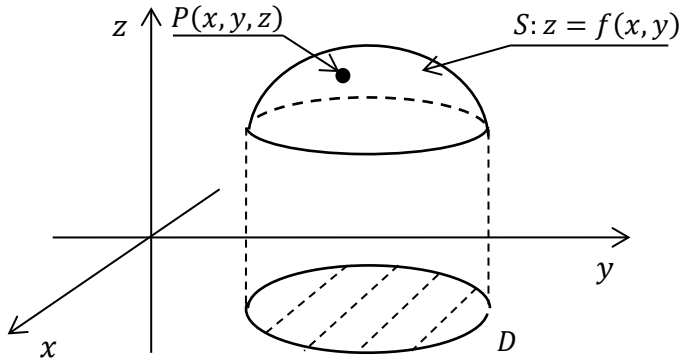

Рисунок 13.2

Приклад. Побудувати поверхню, яка є графіком функції

$z = x^2 + \frac{y^2}{4}$ (еліптичний параболоїд).

Використовуємо метод паралельних перерізів.

Знаходимо головні перерізи (перерізи координатними площинами).

Oyz: $x = 0$; $z = \frac{y^2}{4}$; $y^2 = 4z$ – парабола з вершиною у початку координат $O(0,0)$ і віссю Oz.

Oxz: $y = 0$; $z = x^2$ – парабола з вершиною у початку координат $O(0,0)$ і віссю Oz.

Oxy: $z = 0$; $x^2 + \frac{y^2}{4} = 0$; $O(0,0)$ – початок координат (вершина параболоїда).

Додатково знаходимо переріз поверхні площиною, що паралельна координатній площині Oxy $z = 9$; $x^2 + \frac{y^2}{4} = 9$;

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1 - \text{еліпс.}$$

Еліптичний параболоїд $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$ зображений на рис. 13.3.

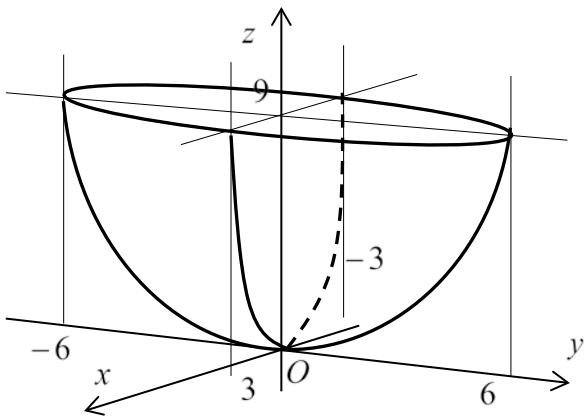

Рисунок 13.3

13.3 Лінії рівня функції двох змінних. Поверхні рівня функції трьох змінних

Для графічного зображення функцій двох і трьох змінних використовуються також відповідно лінії та поверхні рівня.

Лінією рівня функції двох змінних $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок координатної площини Oxy, в яких ця функція набуває одного й того ж значення $z = C,\ C = const$. Рівняння лінії рівня

$$f(x, y) = C.$$

Через кожну точку $M_0(x_0, y_0)$ області D проходить єдина лінія рівня $f(x, y) = f(M_0)$.

При різних C дістанемо різні лінії рівня для даної функції $z = f(x, y)$, кожна з яких служить проекцією лінії перетину поверхні $z = f(x, y)$ площиною $z = C$.

Якщо вибрати числа $C_1, C_2, \dots, C_n$ так, щоб вони утворювали арифметичну прогресію з різницею d $C_{n+1} = C_n + d$, то отримаємо топографічну карту рельєфу поверхні $z = f(x, y)$. По взаємному розміщенню ліній рівня можна судити про характер рельєфу: там, де лінії розміщуються густіше, функція $z = f(x, y)$ змінюється швидше (поверхня крутіша); там, де лінії розміщуються рідше, функція змінюється повільніше (поверхня більш полога).

Поверхнею рівня функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ називається множина всіх точок простору $Oxyz$, в яких ця функція набуває одного й того ж значення $u = C,\ C = const$. Рівняння поверхні рівня

$$f(x, y, z) = C.$$

13.4 Границя та неперервність функції багатьох змінних

Визначення. *Число A називається границею функції $z = f(x, y)$ при $x \to x_0, y \to y_0$, якщо для всіх значень x і y, що досить мало відрізняються відповідно від чисел x_0 і y_0, відповідне значення функції $f(x, y)$ як завгодно мало відрізняється від числа A.*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

В цьому визначені функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$ крім, можливо, самої точки P_0 і тому ми вважаємо, що або $x \neq x_0$, або $y \neq y_0$.

Аналогічно визначається границя функції n незалежних змінних при $n > 2$.

Нехай точка $P_0(x_0, y_0)$ належить області визначення функції $z = f(x, y)$. Приростом функції $z = f(x, y)$ в даній точці P_0 називається різниця

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0),$$

де Δx і Δy – приріст аргументів.

Визначення. *Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною в точці $P_0(x_0, y_0)$, якщо вона визначена в деякому околі цієї точки і якщо нескінченно малим приростам незалежних змінних x і y відповідає нескінченно малий приріст функції z, тобто*

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Позначивши $x_0 + \Delta x \quad - x$ і $y_0 + \Delta y \quad - \quad y$, умову неперервності функції $f(x, y)$ записати у вигляді

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} [f(x, y) - f(x_0; y_0)] = 0$$

або

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0; y_0).$$

Останнє означає, що функція неперервна в точці $(x_0; y_0)$, якщо її границя дорівнює значенню функції в цій точці.

Визначення. *Функція, яка неперервна в кожній точці області, називається неперервною в цій області.*

Точка на площині Oxy, в якій не виконується умова неперервності функції, називається *точкою розриву* функції $z = f(x, y)$, а сама функція $z = f(x, y)$ називається *розривною* в точці

Точка P_0 є точкою розриву функції $z = f(x, y)$, зокрема, в таких випадках:

1) функція визначена в деякому околі точки P_0, крім самої точки P_0;

2) функція визначена в усіх точках деякого околу точки P_0, але не існує скінченної границі $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$;

3) функція визначена в усіх точках деякого околу точки $P_0(x_0, y_0,)$ та існує скінченна границя $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$, але $\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \neq f(x_0; y_0)$.

Лекція 14

Частинні похідні. Повний диференціал функції багатьох змінних. Складені функції та їх диференціювання. Неявні функції та їх диференціювання. Частинні похідні вищих порядків.

14.1 Частинні похідні. Частинні диференціали. Повний диференціал функції багатьох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ – функція двох незалежних змінних x і y. Приріст, що отримує функція $z = f(x, y)$, коли змінюється тільки одна змінна, називається *частинним приростом функції за відповідною змінною*. Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y фіксованою.

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ *за змінною* x називається границя відношення частинного приросту по x цієї функції $\Delta_x z = f(x + \Delta x,\ y) - f(x, y)$ до відповідного приросту аргументу Δx, коли останній прямує до нуля:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x,\ y) - f(x, y)}{\Delta x}\ .$$

Застосовуються також позначення:

$$z'_x;\ f'_x;\ f'_x(x,y);\ \frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial f}{\partial x};\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\ .$$

Таким чином,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{dz}{dx}\right)\Bigg|_{y=const};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{dz}{dy}\right)\Bigg|_{x=const}.$$

Приклад. Знайти частинні похідні функцій:

а) $z = x^{lgy}$, б) $z = 3x^2y + 6y - x^9$.

Розв'язання.

а) $\frac{\partial z}{\partial x} = lgy \cdot x^{lgy-1};\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = x^{lgy} \cdot lnx \cdot \frac{1}{x \cdot ln10}$.

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 9x^8;\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + 6.$

Визначення. *Частинним диференціалом за змінною x функції $z = f(x,y)$ називається головна частина частинного приросту $\Delta_x z = f(x+\Delta x,\ y) - f(x,y)$, яка пропорційна приросту Δx незалежної змінної x .*

Аналогічно визначається частинний диференціал за змінною y.

Диференціали незалежних змінних $x\ i\ y$ дорівнюють їх приростам, тобто

$$dx = \Delta x, \qquad dy = \Delta y.$$

Частинний диференціал функції $z = f(x, y)$ за змінною x, як і у випадку функції однієї змінної, зв'язаний з відповідною частинною похідною співвідношенням

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx.$$

Аналогічно, частинний диференціал за змінною y

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Таким чином, *частинний диференціал функції двох незалежних змінних дорівнює добутку відповідної частинної похідної на диференціал цієї змінної.*

Приклад. Знайти частинні похідні, частинні диференціали функції:

$$z = cos\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right).$$

Розв'язання. Частинні похідні знаходимо від складної функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{(x^2 + y^2)'_x (x^3 + y^3) - (x^3 + y^3)'_x \cdot (x^2 + y^2)}{(x^3 + y^3)^2} =$$

$$= -sin\left(\frac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}\right) \cdot \frac{2xy^3 - x^4 - 3x^2y^2}{(x^3 + y^3)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -sin\left(\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{(x^2+y^2)'_y(x^3+y^3)-(x^3+y^3)'_y(x^2+y^2)}{(x^3+y^3)^2} =$$

$$= -sin\left(\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\right)\cdot\frac{2x^3y-y^4-3x^2y^2}{(x^3+y^3)^2}.$$

Частинні диференціали функції:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx = -sin\left(\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\right)\cdot\frac{2xy^3-x^4-3x^2y^2}{(x^3+y^3)^2}\cdot dx;$$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy = -sin\left(\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\right)\cdot\frac{2x^3y-y^4-3x^2y^2}{(x^3+y^3)^2}\cdot dy.$$

Функція $z = f(x,y)$, називається *диференційовною* в точці $P(x,y)$, якщо її повний приріст

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

де A, B – незалежні від Δx і Δy величини; $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ і $\beta(\Delta x,\Delta y)$ – нескінченно малі при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ функції.

Визначення. *Повним диференціалом* dz *функції* $z = f(x,y)$ *в точці* $P(x,y)$ *називається головна частина її повного приросту в цій точці, лінійна щодо приростів* Δx *і* Δy *аргументів:*

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Теорема 1 *(необхідна умова диференційовності). Якщо функція* $z = f(x, y)$ *диференційовна в деякій точці* $P(x, y)$*, то вона неперервна в цій точці.*

Доведення.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y) =$$

$$= A \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta x + B \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta y + \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Оскільки диференціали незалежних змінних збігаються з їх приростами $dx = \Delta x$ і $dy = \Delta y$, то

$$dz = Adx + Bdy.$$

Теорема 2. *Якщо функція* $z = f(x, y)$ *диференційовна в точці* $P(x, y)$*, тобто* $dz = Adx + Bdy$*, то ця функція має в точці* $P(x, y)$ *частині похідні* z'_x *і* z'_y*, причому*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A; \ \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Іншими словами, *повний диференціал функції* $z = f(x, y)$ *дорівнює сумі добутків частинних похідних цієї функції на диференціали відповідних аргументів*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Теорема 3. (*Достатня умова диференційовності*). *Якщо функція* $z = f(x, y)$ *має в деякій точці* $P(x, y)$ *неперервні частинні похідні* $f'_x(x, y)$ *і* $f'_y(x, y)$ *, то ця функція диференційовна в точці* P.

(Приймемо теорему без доведення).

Приклад. Знайти повний диференціал функції

$$U(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Розв'язання. Маємо функцію трьох змінних. При диференціюванні по одній змінній дві інші змінні вважаємо сталими величинами. Отже:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}};$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{-x}{\left(\sqrt{y^2 + z^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y^2 + z^2}} \cdot 2y = \frac{-xy}{(y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{-x}{\left(\sqrt{y^2 + z^2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y^2 + z^2}} \cdot 2z = \frac{-xz}{(y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Повний диференціал:

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{y^2 + z^2}} - \frac{x(ydy + zdz)}{(y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

14.2 Складені функції та їх диференціювання

Обмежимось розглядом трьох важливих випадків у припущенні, що всі частинні похідні неперервні.

1) Нехай задана функція двох змінних $z = f(x, y)$, аргументи якої самі є функціями незалежної змінної t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тоді повна похідна складеної функції однієї змінної t $z = f\big(x(t), y(t)\big)$ обчислюється за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

2) Якщо аргументи функції двох змінних $z = f(x, y)$ самі є функціями інших двох незалежних змінних $x = x(u, v)$ і $y = y(u, v)$. Тоді частинні похідні складеної функції двох змінних $z = f\big(x(u, v), y(u, v)\big)$ обчислюються за формулами:

$$\frac{dz}{du} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{dz}{dv} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

3) Нехай задана функція двох змінних $z = f(x, y)$, де другий аргумент y сам є функцією першого аргументу x: $y = y(x)$. Тоді *повна похідна* за x складеної функції однієї змінної $z = f\big(x, y(x)\big)$ обчислюється за формулою

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Зауваження. Праворуч у цій формулі перший доданок $\frac{\partial z}{\partial x}$ – це частинна похідна за x, обчислена в припущенні, що $y = const$. У лівій частині маємо $\frac{\partial z}{\partial x}$ – повну похідну за x, обчислену

при умові, що y є функцією від x: $y = y(x)$.

Третій випадок безпосередньо випливає з першого, якщо прийняти $t = x$.

Приклад. Знайти похідну функції $z = e^{x^2+y^2}$, якщо

$x = a \cdot cost;\ \ y = a \cdot sint.$

Розв'язання. Підставимо в функцію значення x, y:

$$z = e^{a^2cos^2t+a^2sin^2t} = e^{a^2(cos^2t+sin^2t)} = e^{a^2},$$

$$z' = \frac{dz}{dt} = \left(e^{a^2}\right)'_t = 0.$$

Приклад. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = x^5 + 2xy - y^3$ і, де:

$$x = cos2t;\ \ y = arctg\ t.$$

Розв'язання. Безпосередня підстановка значень x, y в функцію спрощення не дає, тому:

$$\frac{dz}{dx} = 5x^4 + 2y; \quad \frac{dz}{dy} = 2x - 3y^2;\ \frac{\partial x}{\partial t} = -2cos2t;$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Маємо:

$$\frac{dz}{dt} = (5x^4 + 2y) \cdot (-2cos2t) + (2x - 3y^2)\frac{1}{1+t^2}.$$

Підставимо замість x та y відомі вирази, отримаємо:

$$\frac{dz}{dt} = (5(cos2t)^4 + 2arctg\ t) \cdot (-2cos2t) +$$

$$+(2cos2t - 3(arctg\ t)^2)\frac{1}{1+t^2}.$$

Приклад. Знайти диференціал функції

$$z = \frac{x^2}{y}, \text{якщо } x = u - 2v \text{ і } y = 2u + v.$$

Розв'язання. Обчислимо всі частинні похідні та диференціали по відповідним змінним:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y};\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x^2}{y^2};\ \frac{\partial x}{\partial u} = 1;\ \frac{\partial x}{\partial v} = -2;\ \frac{\partial y}{\partial u} = 2;\ \frac{\partial y}{\partial v} = 1;$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv;\ \ dx = du - 2dv;$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv;\ \ dy = 2du + dv.$$

Отже, диференціал даної функції матиме вигляд:

$$dz = \frac{2x}{y}(du - 2dv) - \frac{x^2}{y^2}(2du + dv) = \left(\frac{2x}{y} - \frac{2x^2}{y^2}\right)du -$$

$$-\left(\frac{4x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dv = \frac{x}{y}\left[2\left(1 - \frac{x}{y}\right)du - \left(4 + \frac{x}{y}\right)dv\right] =$$

Переходимо до змінних u, v:

$$dz = \frac{u-2v}{2u+v}\left[2\left(1 - \frac{u-2v}{2u+v}\right)du - \left(4 + \frac{u-2v}{2u+v}\right)dv\right] =$$

$$= \frac{u-2v}{(2u+v)^2}[2(u+3v)du - (9u+2v)dv].$$

Зауваження 2. Очевидно, значення похідних будуть ті самі, якщо у вираз для зовнішньої функції $z = f(x, y)$ попередньо підставити замість x та y відповідні внутрішні функції, а потім знайти шукані похідні за внутрішніми аргументами звичайним методом.

14.3 Неявні функції та їх диференціювання

Теорема 1. (*умови існування неявної функції*). *Якщо функція* $F(x, y)$ *та її частинні похідні* $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ *визначені та неперервні в деякому околі точки* $P(x_0, y_0)$, *причому* $F(x_0, y_0) = 0$, *а* $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, *то рівняння* $F(x, y) = 0$ *в деякому околі точки*$P(x_0, y_0)$ *визначає єдину неявну неперервну і диференційовну функцію* $y = y(x)$, *причому* $y_0 = y(x_0)$.

Теорема 2. *Нехай функція* $y = y(x)$ *задається неявно рівнянням* $F(x, y) = 0$, *де функція* $F(x, y)$ *та її частинні похідні* $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ *неперервні в околі деякої точки* $P(x, y)$, *координати якої задовольняють це рівняння, причому* $F'_y(x, y) \neq 0$. *Тоді в цій точці*

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Приклад. Написати рівняння дотичної до кривої

$$l\colon\ x^3y^4 - 5xy^2 = -2 \text{ у точці } P_0\,(2; 1).$$

Розв'язання. Перевіримо, чи задовольняє точка $P_0\,(2; 1)$

рівняння лінії

$$F(x,y) = x^3y^4 - 5xy^2 + 2;\ x^3y^4 - 5xy^2 + 2 = 0;$$

$$P_0\,(2;1):\ F(x_0,y_0) = 8 - 10 + 2 = 0;\ 0 = 0;\ P_0\,(2;1)\ \epsilon\ l.$$

Рівняння дотичної прямої $y - y_0 = y_0'(x - x_0)$.

Знайдемо шукану похідну $y_0' = y_x'|_{P_0}$:

$$F_x' = 3x^2y^4 - 5y^2;\ F_y' = 4x^3y^3 - 10xy;$$

$$y_x' = -\frac{3x^2y^4 - 5y^2}{4x^3y^3 - 10xy} = \frac{3x^2y^3 - 5y}{10x - 4x^3y^2};$$

$$y_x'|_{P_0} = -\frac{7}{12}.$$

Рівняння шуканої дотичної

$$y - 1 = -\frac{7}{12}(x - 2);\ y = -\frac{7}{12}x + \frac{13}{6}.$$

Зауваження. Нехай рівняння $F(x,y,z) = 0$ задає неявно функцію двох змінних $z = f(x,y)$. Тоді, фіксуючи y, за теоремою 2 дістаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'(x,y)}{F_z'(x,y)}.$$

Фіксуючи x, аналогічно маємо

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'(x,y)}{F_z'(x,y)}.$$

14.4 Частинні похідні вищих порядків

Припустимо, що функції $z = f(x, y)$ має частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y);$$

ці похідні в свою чергу є функціями незалежних змінних x і y. Частинні похідні від цих функцій називаються *другими частинними похідними* або *частинними похідними другого порядку* від даної функції $z = f(x, y)$. Кожна похідна першого порядку має дві частинні похідні, тому мі отримуємо чотири частинні похідні другого порядку, які позначаються так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Аналогічно визначають частинні похідні 3-го, 4-го і більш високого порядку .

Частинні похідні другого або більш високого порядку, знайдені за різними змінними називаються мішаними. Такими є, наприклад, мішані похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Теорема Шварца. *Якщо частинні похідні вищого порядку неперервні, то мішані похідні одного порядку, які відрізняються лише порядком диференціювання, рівні між собою.*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Приклад. Знайти частинні похідні другого порядку функції

$$z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 8.$$

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4xy^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6x^2y^2 + 5y^4;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4y^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12x^2y + 20y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -12xy^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -12xy^2.$$

Як виявилось

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -12xy^2.$$

Лекція 15

Поняття екстремуму функції багатьох змінних. Необхідна умова екстремуму функції багатьох змінних. Достатня умова екстремуму функції двох змінних. Найменше та найбільше значення функції двох змінних у замкненій області

15.1 Екстремуми функції двох змінних

Необхідна умова екстремуму функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області D. Точка $P_0(x_0, y_0) \quad \epsilon\, D$.

Визначення. Точка $P_0(x_0, y_0)$ називається *точкою екстремуму* (максимуму або мінімуму) функції $z = f(x, y)$, $f(x_0, y_0)$, є відповідно найбільше або найменше значення функції $f(x, y)$ в деякому ε-околі точки $P_0(x_0, y_0)$.

При цьому значення $f(x_0, y_0)$ називають *екстремальним значенням* функції (відповідно максимальним або мінімальним).

Відзначимо, що максимум і мінімум мають локальний (місцевий) характер. В області D функція може мати декілька екстремумів, або не мати їх взагалі.

Теорема (необхідна умова існування екстремуму). Якщо в точці $P_0(x_0, y_0)$ диференційована функції $z = f(x, y)$ має екстремум, то її частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = 0.$$

Доведення. Розглянемо припущення, що функція $z = f(x, y)$ має в точці $P_0(x_0, y_0)$ екстремум.

Відповідно до визначення екстремуму функція $z = f(x, y)$ при постійному значенні $y = y_0$, як функція однієї змінної x, досягає екстремум при $x = x_0$. Як відомо, необхідною умовою цього є рівність нулю похідної від функції $z = f(x, y_0)$ при $x = x_0$, тобто

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = 0.$$

Аналогічно функція $z = f(x, y)$ при постійному значенні $x = x_0$, як функція однієї змінної y, досягає екстремум при $y = y_0$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = 0,$$

що і було необхідно довести.

Точки, в яких виконуються вимоги

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = 0$$

називаються *стаціонарними*.

Приклад. Знайти стаціонарні точки функції

$$z = 2x^3 - xy^2 + y^2 + 5x^2$$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 2y^2 + 10x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4xy + 2y.$$

Знайдемо розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ -2xy + 2y = 0 \end{cases}.$$

З другого рівняння маємо $y = 0$, або $x = 1$. Підставляючи по черзі ці значення в перше рівняння, отримаємо стаціонарні точки функції:

$$M_1(0, 0), M_2\left(-\frac{5}{3}, 0\right), M_3(1, 4), \ M_4(1, -4).$$

Достатня умова екстремуму функції двох змінних

Достатня умова екстремуму для функцій багатьох змінних має більш складний характер, чим для функцій однієї змінної. Розглянемо достатню умову екстремуму без доведення тільки для функцій двох змінних.

Нехай точка $P_0(x_0, y_0)$ є стаціонарною точкою функції $z = f(x, y)$, тобто

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = 0.$$

Обчислимо в точці $P_0(x_0, y_0)$ значення частинних похідних другого порядку для функції $z = f(x, y)$ і позначимо їх відповідно A, B, C:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_0} = A, \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{P_0} = B, \qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_0} = C.$$

Теорема (достатня умова екстремуму). Нехай в стаціонарній точці $P_0(x_0, y_0)$і її ε – околі функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно.

Обчислимо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A\,C - B^2$.

Якщо $\Delta = AC - B^2 > 0$, то функція $z = f(x, y)$ має в точці $P_0(x_0, y_0)$ екстремум: максимум при $A < 0$ і мінімум при $A > 0$.

Якщо $\Delta = AC - B^2 < 0$, то функція $z = f(x, y)$ не має в точці $P_0(x_0, y_0)$ екстремуму.

Якщо $\Delta = AC - B^2 = 0$, то ніякого висновку про характер стаціонарної точки зробити не можна, необхідні додаткові дослідження

Приклад. Знайти екстремум функції $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.

Розв'язання. 1. Область визначення функції: $x \epsilon R,\ y \epsilon R$. Знаходимо стаціонарні точки (необхідна умова існування екстремуму)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 3x^2;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 4y^3.$$

Виконаємо умову: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases}; \begin{cases} 3x(2y - x) = 0 \\ 3x^2 - 4y^3 = 0 \end{cases};$$

$$3x = 0,\ x = 0;\ 2y - x = 0,\ x = 2y.$$

Підставляючи в друге рівняння системи отримаємо стаціонарні точки $M_1(6,3)$, $M_2(0,0)$

2. Достатня умова існування екстремуму:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y - 6x\ ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x\ ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y^2\ .$$

Знайдемо значення частинних похідних другого порядку в стаціонарних точках: $M_1(6,3)$:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 6 \cdot 3 - 6 \cdot 6 = -18;$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{M_1} = 6 \cdot 6 = 36;$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{M_1} = -12 \cdot 9 = -108.$$

$\Delta = AC - B^2 = -18 \cdot (-108) - 36^2 = 20$, $\Delta > 0$; $A < 0 \Rightarrow$ $M_1(6,3)$ – точка максимуму

z_{max} (6,3) = 3 · 36 · 3 – 6^3 – 3^4 = 27

Аналогічно в точці $M_2(0,0)$:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_2} = 0\ ; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{M_2} 0\ ; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{M_2} = 0.$$

Отже $\Delta = AC - B^2 = 0$.

Проведемо додаткові дослідження:

а) $z(0,0) = 0$.

б) якщо $x=0$, то функція набуває вигляду: $z = -y^4; z < 0$;

якщо $y=0$, то функція набуває вигляду: $z = -x^3; z > 0$, якщо $x < 0$; $z < 0$ якщо $x > 0$. Тобто в ε – околі точки (0,0) функція приймає значення різних знаків.

Отже в точці $M_2(0,0)$ екстремуму немає.

15.2 Найменше та найбільше значення функції двох змінних у замкненій області

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена і неперервна в обмеженій замкненій області D. Тоді вона досягає в цій області найбільшого M і найменшого m значень (так званий глобальний екстремум). Ці точки розташовані всередині області, або на її межі.

Знаходження найбільшого та найменшого значень функції $z = f(x, y)$ в обмеженій замкненій області D полягає у наступних діях:

1. Знаходження всіх стаціонарних точок, які належать внутрішній частині області D і обчислення значень функції в цих точках;

2. Знаходження всіх стаціонарних точок, які належать межі області D і обчислення значень функції в цих точках;

3. Порівняння всіх знайдених значень функції з метою вибору найбільшого та найменшого значень функції.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1$ в замкненій області $\frac{|x|}{7} + \frac{|y|}{2} = 1$.

Розв'язання. Область визначення функції: $x \epsilon R,\ y \epsilon R$.

1. Досліджуємо функцію на екстремум і визначаємо, які точки знаходяться всередині області D.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -10y^2 + 2x + 10;\ \frac{\partial z}{\partial y} = -20xy;$$

$$\begin{cases} -10y^2 + 2x + 10 = 0 \\ -20xy = 0 \end{cases};$$

Одержали точки: $M_1(0,1)$, $M_2(0,-1)$, $M_3(-5,0)$, які всі належать області D. Обчислимо: $z_1(0,1) = 1$, $z_2(0,-1) = 1$ $z_3(-5,0) = -24$.

2. Досліджуємо функцію на межі області D

$$\frac{|x|}{7} + \frac{|y|}{2} = 1.$$

Межа – це ромб *ABCE* (рис. 15.1).

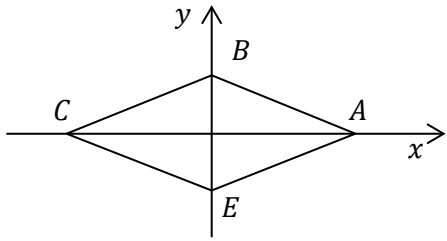

Рисунок 15.1

Обчислимо значення функції у вершинах ромба:

$A(7, 0)$: $z_4(A) = -10 \cdot 7 \cdot 0 + 7^2 + 10 \cdot 7 + 1 = 120$;

$B(0, 2)$: $z_5(B) = -10 \cdot 0 \cdot 2^2 + 0 + 10 \cdot 2 + 1 = 1$;

$C(-7, 0)$: $z_6(C) = = -10 \cdot (-7) \cdot 0 + (-7)^2 - 10 \cdot 7 + 1 = -20$;

$E(0,-2)$: $z_7(E) = -10 \cdot 0 \cdot (-2)^2 + 0 + 0 + 1 = 1$.

z(B) = z(E), тобто симетрія відносно осі Ox. Отже, достатньо дослідити $\Delta\, ABC$: знайдемо рівняння прямої AB

$$\frac{x-7}{0-7}=\frac{y-0}{2-0};\ \ \frac{x-7}{-7}=\frac{y}{2};\ -7y=2x-14;$$

$$y=-\frac{2}{7}x+2,\qquad x\epsilon[0,7];$$

Підставимо отриманий вираз у функцію:

$$z=-10x\cdot\left(-\frac{2}{7}x+2\right)^2+x^2+10x+1;$$

$$z=-\frac{40}{49}x^3+\frac{87}{7}x^2-30x+1.$$

$$z'_x=-\frac{120}{49}x^2+\frac{174}{7}x-30.$$

$$z'_x=0;\ \ -\frac{120}{49}x^2+\frac{174}{7}x-30=0;$$

$$x_1=\frac{7}{5}\in[0,7];\ \ y=\frac{8}{5}.$$

$$x_2=\frac{35}{4}\in[0,7];\ \ y_2=-\frac{1}{2}.$$

$$z_8\left(\frac{7}{5},\frac{8}{5}\right)=-10\cdot\frac{7}{5}\cdot\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{7}{5}\right)^2+10\cdot\frac{7}{5}+1=-18{,}88.$$

Отримаємо рівняння *BC* :

$$\frac{x+7}{0+7}=\frac{y-0}{2-0};\ \ \frac{x+7}{7}=\frac{y}{2};\ \ y=\frac{2}{7}x+2,\ \ x\epsilon[-7;0];$$

Підставимо отриманий вираз у функцію:

$$z = -10x \cdot \left(\frac{2}{7}x + 2\right)^2 + x^2 + 10x + 1;$$

$$z = -\frac{40}{49}x^3 + \frac{73}{7}x^2 - 30x + 1.$$

$$z'_x = -\frac{120}{49}x^2 + \frac{146}{7}x - 30 = 0;$$

$$-120x^2 + 1022x - 1470 = 0;$$

$$60x^2 - 511x + 735 = 0;$$

$$x_1 = -\frac{11}{6};\ \ y = \frac{3}{2};\ \ M_4\left(-\frac{11}{6};\frac{3}{2}\right);\ z_9(M_4) = -25{,}9.$$

$$x_2 = -6{,}65;\ \ y_2 = 0{,}1;\ \ M_5(-6{,}65; 0{,}1);\ z_{10}(M_5) = -22{,}9.$$

Порівняємо z_1 , z_2, z_3 , z_4 , z_5 , z_6 , z_7 , z_8 , z_9, z_{10} .

Найбільше значення функція приймає в точці $A(7{,}0)$ $z(A) = 120$.
Найменше значення – в точці $M_4\left(-\frac{11}{6};\frac{3}{2}\right)$; $z(M_4) = -25{,}9$.

Лекція 16

Дотична площина і нормальна пряма до поверхні Похідна за напрямком і градієнт. Зв'язок градієнта з поверхнями рівня.

16.1 Дотична площина і нормальна пряма до поверхні

1) Нехай поверхня S задана рівнянням $z = f(x, y)$ і $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – деяка точка цієї поверхні (рис. 16.1). Рівняння дотичної площини α у точці M_0 будемо шукати у вигляді

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0),$$

де A, B – невизначені коефіцієнти.

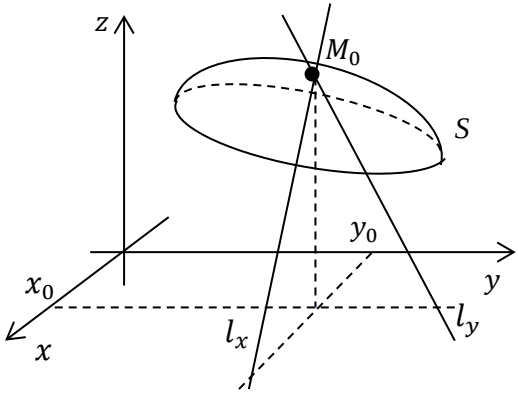

Рисунок 16.1

З геометричного змісту частинних похідних $f'_x(x_0, y_0)$ і $f'_y(x_0, y_0)$ випливає, що рівняння дотичних у точці M_0 до ліній перетину поверхні S: $z = f(x, y)$ площинами $y = y_0$ і $x = x_0$ мають відповідно вигляд:

$$l_x: \begin{cases} z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases};$$

$$l_y: \begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}.$$

Ці дві прямі лежать у дотичній площині α при перетині її відповідно з площинами $y = y_0$ і $x = x_0$.

Порівнюючи ці рівняння з попередніми рівняннями дотичних прямих, знаходимо $A = f'_x(x_0, y_0)$; $B = f'_y(x_0, y_0)$.

Отже, *рівняння дотичної площини* α має вигляд:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Вектор нормалі дотичної площини $\vec{n} = (A, B, C)$, а для площини α

$$\vec{n} = \left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\right)$$

$\vec{n}$ є також *вектором нормалі до поверхні* S у точці дотику M_0.

Пряма l, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини α у цій точці, називається *нормальною прямою* (*нормаллю*) до поверхні S у цій точці M_0.

Взявши вектор нормалі дотичної площини за напрямний вектор, можна записати *канонічні рівняння нормальної прямої* l :

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

1) Якщо поверхня S задана неявно рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то рівняння *дотичної площини* α, позначивши $F'_x(x_0, y_0, z_0) = F'_x|_{M_0}$; $F'_y(x_0, y_0, z_0) = F'_y\big|_{M_0}$; $F'_z(x_0, y_0, z_0) = F'_z|_{M_0}$, маємо

$$F'_x|_{M_0}(x - x_0) + F'_y\big|_{M_0}(y - y_0) + F'_z|_{M_0}(z - z_0) = 0.$$

Вектор нормалі $\vec{n} = \left(F'_x|_{M_0}, F'_y\big|_{M_0}, F'_z|_{M_0}\right)$.

Канонічні рівняння нормальної прямої l:

$$\frac{x - x_0}{F'_x|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{F'_y\big|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{F'_z|_{M_0}}.$$

Приклад. Написати рівняння дотичної площини та нормальної прямої до заданої поверхні $z = 2x^2 - y\,cosx + 3y^4$ при $x_0 = 0, y_0 = 1$.

Розв'язання. Рівняння поверхні задано явно $z = f(x, y)$.

Знайдемо значення z_0:

$$z_0 = 0 - 1 + 3 = 2; \quad M_0(0; 1; 2).$$

Знайдемо частинні похідні та їх значення в точці M_0:

$$f'_x = 4x + y\,sinx; \quad f'_x|_{M_0} = 0;$$

$$f'_y = -cosx + 12y^3; \quad f'_y\big|_{M_0} = 11.$$

Рівняння дотичної поверхні:

$$z - 2 = 0(x - 0) + 11(y - 1);$$

$$11y - z - 9 = 0.$$

Рівняння нормальної прямої:

$$\frac{x}{0} = \frac{y-1}{11} = \frac{z-2}{-1}.$$

Приклад. Написати рівняння дотичної площини та нормальної прямої в точці $M_0(-1; 2; -2)$ поверхні

$$\frac{x^2}{z} - \frac{y^2}{x} + z^3 + 3xyz = 8$$

Розв'язання. Перевіримо спочатку, чи лежить вказана точка $M_0(-1; 2; -1)$ на даній поверхні. Представимо поверхню у вигляді $F(x, y, z) = 0$:

$$\frac{x^2}{z} - \frac{y^2}{x} + z^3 + 3xyz - 8 = 0;$$

$$\frac{(-1)^2}{-1} - \frac{2^2}{(-1)} + (-1)^3 + 3 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-1) - 8 = 0;$$

$$-1 + 4 - 1 + 6 - 8 = 0; \quad 0 = 0.$$

Вираз істинній, тому $M_0(-1;2;-1)$ належить поверхні.

Знайдемо частинні похідні та їх значення в точці M_0:

$$F'_x = \frac{2x}{z} + \frac{y^2}{x^2} + 3yz; \;\; F'_x|_{M_0} = 2 + 4 - 6 = 0;$$

$$F'_y = -\frac{2y}{x} + 3xz; \quad F'_y\Big|_{M_0} = 4 + 3 = 7;$$

$$F'_z = -\frac{x^2}{z^2} + 3z^2 + 3xy; \;\; F'_z|_{M_0} = -1 + 3 - 6 = -4.$$

Рівняння дотичної поверхні:

$$0(x+1) + 7(y-2) - 4(z+1) = 0.$$

Рівняння нормальної прямої:

$$\frac{x+1}{0} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+1}{-4}.$$

16.2 Похідна за напрямком і градієнт. Зв'язок градієнта з поверхнями рівня

Нехай у деякій області D простору задано скалярну функцію трьох змінних $u = f(M) = f(x,y,z)$. Тоді кажуть, що в області D задане *просторове скалярне поле* $u = f(M)$.

Функція двох змінних $z = f(x,y)$, яка визначена у плоскій області D, задає *плоске скалярне поле* $z = f(x,y)$.

Поле – це функція $u = f(M)$, що розглядається разом з її областю визначення D. Приклади скалярних фізичних полів: поля температури, атмосферного тиску, електричного потенціалу.

Для геометричного зображення скалярного поля використовуються лінії рівня (на площині) та поверхні рівня (у просторі).

Визначення. *Поверхнею рівня скалярного поля називається геометричне місце точок, в яких функція u приймає постійне значення, тобто*

$$f(x, y, z) = C, \qquad \text{де } C = const.$$

Поверхні рівня (у просторі) та лінії рівня (на площині) є основними *геометричними характеристиками* скалярного поля.

Нехай задано просторове скалярне поле $u = u(x, y, z)$. Візьмемо точку $M(x, y, z)$ і деякий промінь λ, що виходить з неї. Напрямок цього проміня задамо кутами α, β, γ, які він утворює з напрямами осей Ox, Oy, Oz (рис. 16.2). Якщо e_λ – одиничний вектор, направлений вздовж променя, то його проекціями на вісі координат будуть напрямні косинуси $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. У напрямі цього променю на деякій відстані візьмемо іншу точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Відстань MM_1 позначимо ρ. Проекція вектора $\overrightarrow{MM_1}$ на вісі координат будуть з одного боку дорівнювати $\rho\cos\alpha$, $\rho\cos\beta$, $\rho\cos\gamma$, а з іншого $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$. Тому

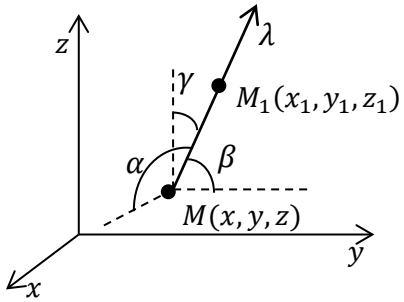

Рисунок 16.2

$$x_1 = x + \rho\cos\alpha, y_1 = y + \rho\cos\beta, z_1 = z + \rho\cos\gamma.$$

Розглянемо приріст функції u при переході з точки M в точку M_1:

$$u(M_1) - u(M) =$$
$$= u(x + \rho\cos\alpha\,, y + \rho\cos\beta\,, z + \rho\cos\gamma) - u(x, y, z).$$

Якщо M_1 змінює своє положення, то у виразі різниці $u(M_1) - u(M)$ буде змінюватися тільки ρ. Розглянемо відношення:

$$\frac{u(M_1) - u(M)}{\rho}$$

і переходячи до границі при $\rho \to 0$, за умови що ця границя існує.

Визначення. *Границя*

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{u(M_1) - u(M)}{\rho} =$$
$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{u(x + \rho\cos\alpha\,, y + \rho\cos\beta\,, z + \rho\cos\gamma) - u(x, y, z)}{\rho} \quad (*)$$

називається похідною від функції $u(x, y, z)$ *за напрямком* λ *в точці* M *і позначається символом* $\dfrac{\partial u}{\partial \lambda}$.

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{u(M_1) - u(M)}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial \lambda}.$$

Якщо напрям λ співпадає з додатним напрямом вісі Ox, тобто $\alpha = 0,\ \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, то границя $(*)$ дорівнює частинній похідній від функції $u(x, y, z)$ по x:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{u(x + \rho, y, z) - u(x, y, z)}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогічно, якщо напрям λ буде співпадати з напрямом $Oy,\ Oz$.

Частинні похідні u'_x, u'_y, u'_z характеризують швидкість зміни функції u в напрямку координатних осей, так і u'_λ є швидкістю зміни функції $u(x, y, z)$ в точці M в напрямку променя λ. Абсолютна величина похідної u'_λ визначає величину швидкості, а знак похідної – характер зміни функції (зростання або спадання).

Теорема. *Якщо функція $u(x, y, z)$ диференційована, то її похідна u'_λ в будь-якому напрямку λ існує і дорівнює*

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x} cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} cos\gamma, \qquad (**)$$

де $cos\alpha,\ cos\beta,\ cos\gamma -$ напрямні косинуси променя λ.

Якщо координати вектора $\overrightarrow{MM_1}(m_x, m_y, m_z)$, то для обчислення напрямних косинусів необхідно знайти модуль вектора

$$\left|\overrightarrow{MM_1}\right| = \sqrt{{m_x}^2 + {m_y}^2 + {m_z}^2},$$

тоді $cos\alpha = \frac{m_x}{|m|},\ cos\beta = \frac{m_y}{|m|},\ cos\gamma = \frac{m_z}{|m|}$.

Приклад. Для даної функції $u = (x^2 + y)e^z$ знайти похідну в точці $M(6, 7, 2)$в напрямі точки $M_1(8, -2, 5)$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні функції u

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^z;\ \frac{\partial u}{\partial y} = e^z;\ \frac{\partial u}{\partial z} = (x^2 + y)e^z$$

і обчислимо їх значення в точці M:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 12e^2;\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = e^2;\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 43e^2.$$

Так, як координати вектора $\overrightarrow{MM_1} = \vec{m}\ (2, -9, 3)$, а модуль

$$|\vec{m}| = \sqrt{4 + 81 + 9} = \sqrt{94}$$

то його напрямні косинуси знайдемо за формулами:

$$cos\alpha = \frac{m_x}{|m|} = \frac{2}{\sqrt{94}};\ cos\beta = \frac{m_y}{|m|} = \frac{-9}{\sqrt{94}};\ cos\gamma = \frac{m_z}{|m|} = \frac{3}{\sqrt{94}}.$$

Тому, підставляючи отримане в формулу $(**)$,отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 12e^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{94}} - e^2 \cdot \frac{9}{\sqrt{94}} + 43e^2 \cdot \frac{3}{\sqrt{94}} = \frac{144e^2}{\sqrt{94}}.$$

Знак плюс вказує, що в даному напрямі функція зростає.

Градієнтом функції (скалярного поля) $u = u(x, y, z)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

Основні правила обчислення градієнта:

2) $grad\ (u + v + w) = grad\ u + grad\ v + grad\ w$;

2) $grad\ (uv) = v\ grad\ u + u\ grad\ v$;

3) $grad\ (Cu) = C\ grad\ u\ ,\ C = const$;

4) $grad\ \frac{u}{v} = \frac{v\ grad\ u - u\ grad\ v}{v^2}$.

Теорема (*Зв'язок між градієнтом і похідною за напрямом*). *Похідна* $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ *за напрямом вектора* $\vec{\lambda}$ *дорівнює проекції*

градієнта $grad\ u$ *на цей вектор*:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = np_{\vec{\lambda}}\ grad\ u.$$

Основні властивості градієнта:

1) Похідна $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ скалярного поля $u = u(x, y, z)$ у даній точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{\lambda}$ має найбільше значення, коли напрям цього вектора співпадає з напрямом градієнта $grad\ u$. Це найбільше значення похідної $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ дорівнює модулю градієнта:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_{max} = |grad\ u|.$$

Іншими словами, *градієнт вказує напрям найшвидшого зростання скалярного поля в даній точці, а його модуль дорівнює цій найбільшій швидкості*:

$$grad\ u = \vec{\lambda}_{max};\ \ |grad\ u| = \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_{max}$$

2) Похідна $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ скалярного поля $u = u(x, y, z)$ у даній точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора, який перпендикулярний до градієнта $grad\ u$, дорівнює нулю:

$$\vec{\lambda}\ \perp grad\ u\ \ \Rightarrow\ \ \frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0.$$

3) Градієнт $grad\ u$ скалярного поля $u = u(x, y, z)$ у кожній точці $M(x, y, z)$ перпендикулярний до поверхні рівня S: $u(x, y, z) = C$, яка проходить через цю точку.

$$S:\ u(x, y, z) = C;\ grad\ u \perp S\ \ \Rightarrow\ \ \vec{n} = grad\ u.$$

Список рекомендованої літератури

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – СПб. : Профессия, 2001. – 432 с.

2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2006. – 736 с.

3. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн. / За ред. Г.Л. Кулініча. – Київ : Либідь, 2003. – Кн. 1 : Основні розділи. – 400 с. – Кн. 2 – Спеціальні розділи. – 368 с.

4. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : АСТ, 2014. – Ч.1 – 303 с., Ч.2 – 415 с.

5. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : А.С.К., 2003. – 648 с.

6. Вороновська Л. П. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» Модуль 1 для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання спеціальностей 192–Будівництво та цивільна інженерія, 185–Нафтогазова інженерія та технології / Л. П. Вороновська; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова, 2017.–161 с.

7. Методичні вказівки з вищої математики для самостійної роботи студентів 1 курсу заочної форми навчання . Частина2. / Харк. нац. акад. міськ. госп-ва; уклад.: Л.П. Вороновська., Є.С. Пахомова, С.С. Шульгіна – Х.: ХНАМГ, 2013. – 82 с.

8. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецьк : Сталкер, 2003. – 495 с.

9. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 2011. Т.1. − 430 с. Т.2. − 580 с.

10. Розендорн Э. Р. Теория поверхностей / Э. Р. Розендорн. – М. : Физматлит, 2006. – 304 с.

11. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005.–270 с.

12. Методичні вказівки з вищої математики для самостійної роботи студентів 1 курсу всіх спеціальностей, частина 2. С.С. Шульгіна, Л.П. Вороновська, Є.С. Пахомова . – Харків : ХНАМГ, 2012.–112 с.

Навчальне видання

ВОРОНОВСЬКА Лариса Петрівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Модуль 2

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 1 курсу денної і заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальностями 192 – Будівництво та цивільна інженерія, 185 – Нафтогазова інженерія та технології)

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *Л. П. Вороновська*

План 2017, поз. 111Л

Підп. до друку 23.04.2018. Формат 60 × 84/16.
Друк на ризографі. Ум. друк арк. 4,0
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Харківський національний університет
міського господарства імені О.М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.