

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**



**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ**

до практичних робіт  
із навчальної дисципліни

**«ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ»**

*(для студентів 3 курсу зі скороченим терміном навчання, 4 курсу денної та заочної форм навчання спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка і слухачів другої вищої освіти)*

**Харків**  
**ХНУМГ ім. О. М. Бекетова**  
**2018**

Методичні рекомендації до практичних робіт із навчальної дисципліни «Основи наукових досліджень» для студентів 3 курсу зі скороченим терміном навчання, 4 курсу денної та заочної форм навчання спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка і слухачів другої вищої освіти / Харків. нац. ун-т. міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : В. Ф. Рой, Ю. В. Ковальова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 83 с.

Укладачі: д-р фіз.-мат. наук, проф. В. Ф. Рой  
канд техн. наук, ст.викл. Ю. В. Ковальова

Рецензенти: В. М. Рудаков, доктор технічних наук, професор  
Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»;  
П. П. Рожков, кандидат технічних наук, доцент Харківського  
національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

*Рекомендовано кафедрою систем електропостачання та  
електроспоживання міст, протокол № 7 від 11.04.2018.*

## ЗМІСТ

Вступ.....	5
1 Розробка плану експерименту.....	6
1.1 Вибір математичної моделі об'єкта дослідження.....	6
1.2 Складання матриці повного факторного експерименту (ПФЄ).....	7
2 Графічне оброблення результатів експерименту.....	10
2.1 Апроксимація емпіричних кривих методом лінеаризації.....	10
2.2 Апроксимація експериментальних даних поліномами .....	17
2.3 Метод розкладання в ряд Тейлора.....	21
3 Регресійний аналіз результатів апроксимації.....	23
3.1 Сутність регресійного аналізу.....	23
3.2 Види регресійної залежності.....	24
3.3 Перевірка «нульової» гіпотези (критерій Фішера).....	27
4 Кореляційний аналіз результатів експерименту.....	33
4.1 Поняття кореляційної залежності.....	33
4.2 Визначення коефіцієнта кореляції.....	34
5 Дисперсний аналіз.....	37
5.1 Поняття про загальну, факторну та залишкову дисперсію.....	37
5.2 Задача дисперсного аналізу.....	38
6 Математична обробка результатів експерименту.....	41
6.1 Основи теорії випадкових помилок.....	41
6.2 Визначення мінімально необхідної кількості вимірів.....	45
6.3 Визначення достовірності результатів вимірів.....	49
6.4 Методи визначення точності відносних вимірів.....	51
6.5 Перевірка результатів вимірів на відтворюваність.....	52
6.6 Оцінка похибки вимірювання.....	54
7 Розв'язання задач оптимізації.....	57
7.1 Сутність задач оптимізації.....	57
7.2 Метод Гауса-Зейделя.....	58
7.3 Метод градієнта.....	59

8 Імовірно-статистичні методи дослідження.....	60
8.1 Визначення закону розподілу за даними експерименту.....	60
8.2 Основні характеристики функції розподілу.....	61
8.3 Закон нормального розподілу. Розподіл Пуассона.....	64
8.4 Показовий закон розподілу.....	66
8.5 Закон $\gamma$ – розподілу.....	67
9 Розв’язання задач з теорії надійності систем.....	69
9.1 Показники надійності системи.....	69
9.2 Основні теореми теорії надійності.....	70
9.3 Приклади рішення задач надійності систем.....	71
9.4 Приклади задач на добутки.....	73
9.5 Теорема гіпотез.....	77
10 Оформлення результатів досліджень.....	79
10.1 Форма і зміст наукового звіту.....	79
Список рекомендованих джерел.....	82

## ВСТУП

Мета та завдання вивчення дисципліни «Основи наукових досліджень» – формування у студентів системи теоретичних і практичних знань про наукові підходи до організації досліджень, форми пізнання, закони і методи дослідження в різних галузях науки та техніки. Дисципліна є нормативною, обов'язковою дисципліною у складі фундаментальних і професійно-орієнтованих предметів вищої технічної освіти. В ній викладені основи положення про закони, форми набуття знань, методах досліджень в різних галузях науки та техніки. Програма об'єднує різні наукові підходи до організації експериментальних досліджень. Детально викладається системний підхід в якості основної методології для організації та проведення експериментальних досліджень.

Завданням вивчення є опанування системного підходу в якості основної методології в організації та проведенні експериментальних досліджень. Найбільш вживаних кількісних та якісних методів обробки отриманих даних і інтерпретації результатів. Способів експериментального визначення статистичних і динамічних залежностей між змінними об'єкта дослідження. Алгоритми вирішення оптимізаційних задач, способи моделювання різноманітних об'єктів дослідження за допомогою сучасного математичного апарата.

Значення курсу полягає у формуванні творчого підходу до професійної діяльності. Визначення статистичних залежностей і законів розподілу на основі даних експерименту. Методу найменших квадратів. Визначення статистичних характеристик випадкових процесів по даним експерименту. Застосування спеціальних методів побудови математичних моделей. Визначення засобів вимірювання та погрішності результатів. Розробка програми і проведення експериментальної частини дослідження. Обробка даних експерименту, аналіз і узагальнення отриманих результатів. Оформлення результатів дослідження.

# 1 РОЗРОБКА ПЛАНУ ЕКСПЕРИМЕНТУ

## 1.1 Вибір математичної моделі об'єкта дослідження

Важливим завданням проведення експерименту є мінімізація кількості вимірів, що дозволяє зменшити витрати матеріальних, трудових і часових ресурсів. Послідовність планування експерименту:

1. **Вибір вхідних і вихідних змінних.** Вхідні змінні:  $X_i$ ,  $i = 1, \bar{k}$ , що визначають стан об'єкта – це *фактори*, які впливають на нього.

Вихідна змінна  $Y$  – це *функція відгуку*, що є метою дослідження (оптимізація, якість, швидкодія, надійність і т. і.).

2. **Вибір діапазону експериментування** (факторного простору), обумовленому по кожному фактору  $X_i$  його можливим максимальним і мінімальним значеннями ( $X_{i \min} < X_i < X_{i \max}$ ).

3. **Вибір математичної моделі об'єкта.** Якщо вид функції  $Y = f(X_1, \dots, X_k)$  невідомий, то необхідно використовувати степеневий ряд, що є математичною моделлю об'єкта дослідження:

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i X_i + \sum_{i \leq j} a_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^k a_{ii} X_i^2 + \dots, \quad (1.1)$$

де  $k$  – кількість факторів, що впливають.

Оскільки кількість членів ряду обмежують, то апроксимуюча функція становить поліном деякого ступеня. Для визначення коефіцієнтів апроксимуючого полінома, використовують метод *найменших квадратів*. Необхідною умовою одержання статистичних характеристик, є виконання умови  $N > s$  (кількість дослідів  $N$  повинна бути більше кількості коефіцієнтів полінома). Оскільки перетворення є лінійними, то в апроксимуючій функції (1.1) змінюються лише коефіцієнти за факторів:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \dots, \quad (1.2)$$

де  $x_i$  – безрозмірні змінні фактори впливу.

План експерименту необхідно розпочинати з вибору моделі об'єкта, визначення інтервалу змін факторів впливу у кожному досліді, складання таблиці (матриці) планування для незалежних ( $i = 1, k$ ) і залежних ( $i = k + 1, s - 1$ ) параметрів. *Частина незалежних параметрів і є планом експерименту.*

## 1.2 Складання матриці повного факторного експерименту (ПФЕ)

Експеримент, у якому використовуються всі можливі сполучення рівнів факторів – це *повний факторний експеримент* (ПФЕ). Якщо  $k$  факторів варіюються на 2-х рівнях, то кількість можливих сполучень факторів дорівнює  $2^k$  і ПФЕ називають – типу  $2^k$ . Якщо кількість рівнів факторів дорівнює  $n$ , то необхідний ПФЕ типу  $n^k$ .

**Приклад.** Складання плану ПФЕ типу  $2^2$ .

Кількість дослідів  $N = 2^2 = 4$ . Відповідна матриця подана у табл. 1.1.

Цей план відповідає моделі виду:

$$Y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 \quad (1.3)$$

Таблиця 1.1 – Результати вимірів

Номер дослідів	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3 = x_1 x_2$	$Y$
1	+1	-1	-1	+1	$Y_1$
2	+1	+1	-1	-1	$Y_2$
3	+1	-1	+1	-1	$Y_3$
4	+1	+1	+1	+1	$Y_4$

У першому стовпці матриці – фіктивний фактор  $x_0 = +1$  при коефіцієнті полінома  $b_0$ . Стовпці матриці  $x_1$  і  $x_2$  задають планування (умова досліду); стовпець  $x_3$  не самостійний і заповнюється за даними стовпців  $x_1$  і  $x_2$ . Його, аналогічно стовпцю  $x_0$ , використовують під час розрахунків. За результатами експерименту відповідно до плану, можна визначити всі 4 коефіцієнти полінома (1.3). Оскільки  $N = s = 4$ , умова  $N > s$  не виконується, то неможливо провести статистичної оцінки апроксимуючої залежності. Тому обмежуються лінійною залежністю без урахування взаємного впливу факторів (при цьому  $s = 3 < N = 4$ ), або здійснюють додатковий дослід у нульовій точці  $x_1 = x_2 = 0$  (тоді  $N = 5 > s = 4$ ).

**Приклад.** Необхідно нанести гальванічне покриття з мінімальною внутрішньою напруженістю, за якої забезпечується необхідна міцність покриття. З'ясувати, як на внутрішні напруження (функції відгуку) впливають різні фактори. Попередній аналіз свідчить, що найбільш дієвими є три фактори: струм  $X_1$ , температура розчину  $X_2$  і концентрація речовини покриття  $X_3$  (табл. 1.2).

Таблиця 1.2 – Рівні факторів і їх інтервали

Параметр	Струм $X_1$ , А/дм <sup>2</sup>	Температура $X_2$ , °С	Концентрація $X_3$ , кг/м <sup>3</sup>
Основний рівень $X_{i(\text{cp})}$	55	45	0,7
Інтервал зміни $I_i$	25	15	0,3
Верхній рівень $X_{i \text{ max}}$	80	60	1,0
Нижній рівень $X_{i \text{ min}}$	30	30	0,4

Аналіз відомостей про об'єкт свідчить, що найбільш дієві лінійні ефекти і парні взаємодії, тому модель об'єкта дослідження має вигляд:



$$Y = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3. \quad (1.4)$$

Для цієї моделі необхідний ПФЕ типу  $2^3$  з  $s = 7$  і  $N = 8$  (табл. 1.3).

Таблиця 1.3 – План ПФЕ типу  $2^3$  з  $N = 8$

Номер виміру, №	Послідовність вимірів	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$Y_1$	$Y_2$	$\bar{Y}$	$D_Y$
1	8; 13	+1	-1	-1	-1	3,4	3,10	3,75	0,245
2	11; 15	+1	+1	-1	-1	-0,4	-0,60	-0,50	0,020
3	6; 14	+1	-1	+1	-1	2,7	1,80	2,25	0,405
4	3; 12	+1	+1	+1	-1	2,35	3,15	2,75	0,320
5	2; 4	+1	-1	-1	+1	2,20	3,30	2,75	0,605
6	1; 9	+1	+1	-1	+1	-0,84	-1,16	-1,00	0,051
7	5; 7	+1	-1	+1	+1	0,60	0,90	0,75	0,045
8	10; 16	+1	+1	+1	+1	0,60	0,40	0,50	0,020

За формулою  $G = D_{\text{ymax}} / \sum_{i=1}^N D_{yi}$  визначимо критерій Кохрена:

$$G = 0,605/1,711 = 0,35.$$

Табличне значення  $G_T$  за  $m - 1 = 1$  і  $N = 8$  дорівнює 0,680, то  $G_p < G_T$ , і тому гіпотеза рівноточності є дійсною.

Загальну похибку дослідів оцінюємо середньою квадратичною похибкою при визначенні середнього значення

$$\bar{y}_i : \sigma_y^2 = D_y = \frac{1}{mN} \sum_{i=1}^N D_{yi} = \frac{1,711}{2 \cdot 8} = 0,107,$$

де  $m \cdot N$  – загальна кількість вимірювань. Коефіцієнти апроксимуючого поліному (1.4) розраховують за формулою:

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N Y_u x_{0u} = \frac{1}{8} (3,75 - 0,50 + 2,25 + 2,75 + 2,75 - 1,0 + 0,75 + 0,50) = 1,406.$$

Аналогічно:  $b_1 = -0,968$ ;  $b_2 = 0,156$ ;  $b_3 = -0,656$ ;  $b_{13} = -0,031$ ;  $b_{23} = -0,281$ .

Звідки:  $Y = 1,406 - 0,968x_1 + 0,156x_2 - 0,656x_3 + 1,031x_1x_2 - 0,031x_1x_3 - 0,281x_2x_3$ .

## 2 ГРАФІЧНЕ ОБРОБЛЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ

### 2.1 Апроксимації емпіричних кривих методом лінеаризації

Графічне оброблення результатів експериментальних вимірів дає уявлення про динаміку досліджуваного процесу, можливість встановити наявність екстремуму функції. Під час аналізу графічним методом функції  $y = f(x)$ , у системі прямокутних координат наносять значення  $x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n$  (рис. 2.1).

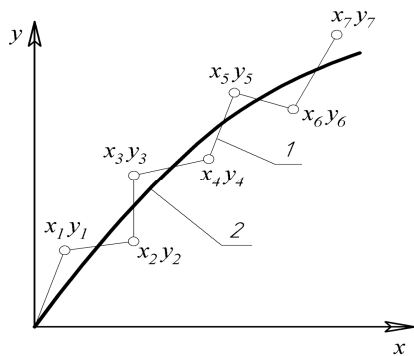


Рисунок 2.1 – Графік функції  $y = f(x)$ ;  
1 - результати вимірювань; 2 - плавна крива

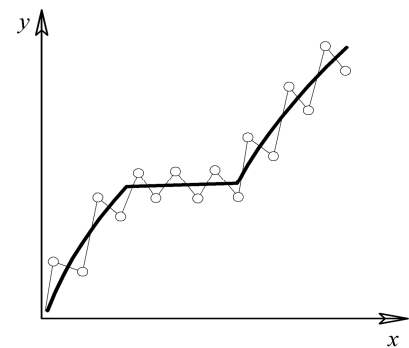


Рисунок 2.2 – Функція  $y = f(x)$  за  
наявності стрибка

Якщо функція має плавний характер, проводять криву ближче до експериментальних точок. Якщо одна-дві точки різко віддалені від кривої, це пояснюється грубою помилкою вимірів (рис. 2.2). Під час графічної обробки результатів вимірів із трьома змінними  $b = f(x, y, z)$ , застосовують **метод поділу змінних**. Однієї з величин –  $z$  у межах інтервалу вимірів  $z_1 \div z_n$  задають кілька послідовних значень, а для інших двох змінних  $x$  і  $y$  будують графіки  $y = f_1(x)$  за

$z_i = \text{const.}$  У результаті одержують сімейство кривих  $y = f_1(x)$  для різних  $z$  (рис. 2.3).

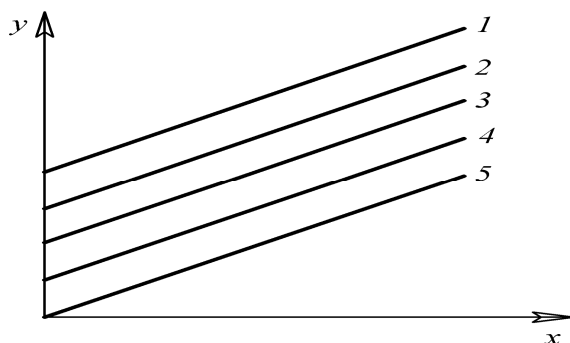


Рисунок 2.3 – Графічне представлення функції  $b = f(x, y, z)$

Функція  $y = f(x)$  має різний вигляд у різних системах координат, зокрема, нелінійні функції лінеаризуються в логарифмічних координатах, що спрощує процес апроксимації.

Маємо статистичний ряд вимірів функції  $y_1, y_2, \dots, y_n$  залежно від аргументу  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Необхідно підібрати алгебраїчне вираження функції  $y = f(x)$ , тобто здійснити апроксимацію даних експерименту аналітичним виразом. Послідовність дії така:

- результати вимірів наносять на сітку прямокутних координат, з'єднують точки плавною кривою і вибирають орієнтовно вид формули, що описує подібну криву;

- обчислюють параметри формули, яка найкраще відповідає отриманій експериментальній кривій.

Для цього використовують метод лінеаризації, який полягає в представленні експериментальної кривої лінійною функцією. Для цього криву  $y = f(x)$  перетворимо у пряму лінію вводячи нові змінні:

$$X = f_1(x, y), \quad Y = f_2(x, y). \quad (2.1)$$

У шуканому рівнянні вони повинні бути зв'язані лінійною залежністю:

$$Y = a + bX. \quad (2.2)$$

Величини  $X$  і  $Y$  можна обчислити на основі рішення системи рівнянь (2.2). Далі будуємо пряму (рис. 2.4), за якою графічно обчислюємо параметри  $a$  (це ордината точки перетинання прямої з віссю  $Y$  і  $b$  – тангенс кута нахилу прямої з віссю  $X$ ):

$$b = \operatorname{tg} \alpha = (Y_i - a) / X_i. \quad (2.3)$$

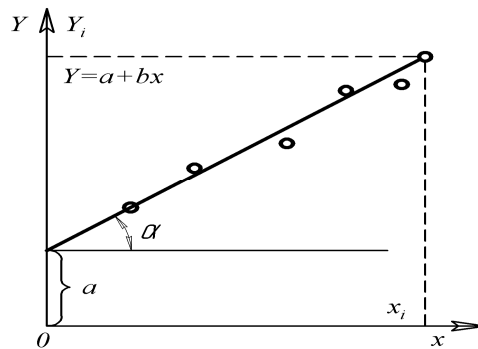


Рисунок 2.4 – Графічне визначення параметрів  $x$  і  $y$

Коефіцієнти  $a$  і  $b$  визначають методом двох крайніх точок, підставляючи їх в (2.2) і одержуючи систему двох рівнянь з двома невідомими, що зв'язує  $Y$  і  $X$  і дозволяє встановити функціональний зв'язок між  $x$  і  $y$  та емпіричну залежність  $y = f(x)$ .

**Приклад.** Підібрати емпіричну формулу вибірки:

$x$	1	2	3	4	5	6	7
$y$	12,1	19,2	25,9	33,3	40,5	46,4	54

Графічний аналіз свідчить, що експериментальні точки утворюють пряму і її можна представити залежністю  $y = a + bx$ . Координати крайніх точок підставляємо в це рівняння:

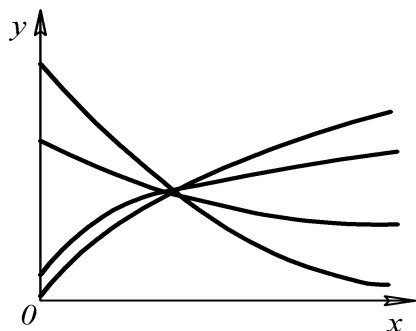
$$a + 7b = 54,0; \quad a + b = 12,1, \text{ звідки: } a = 5,12, \quad b = 6,98.$$

Тоді емпірична формула набуде вигляду:

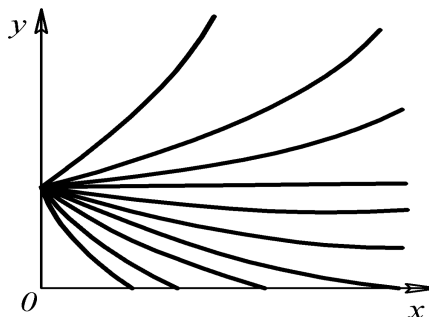
$$Y = 5,12 + 6,98 b. \quad (2.4)$$

Якщо крива має вигляд (рис. 2.1 а), то використовують формулу

$$y = ax^b. \quad (2.5)$$



а



б

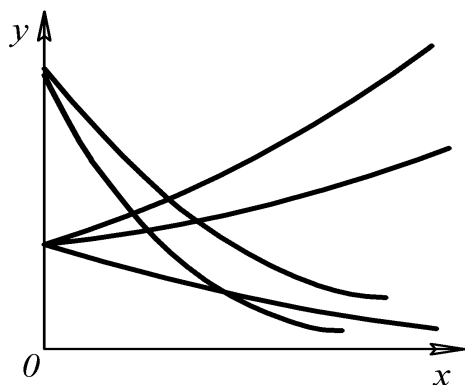
Рисунок 2.5 – Графік функції: а –  $y = ax^b$ ; б –  $y = ae^{bx}$

Замінивши  $X = \lg x$  і  $Y = \lg y$ , одержимо:  $Y = \lg a + bX$ . Отже, експериментальна крива стає лінійною в логарифмічній сітці.

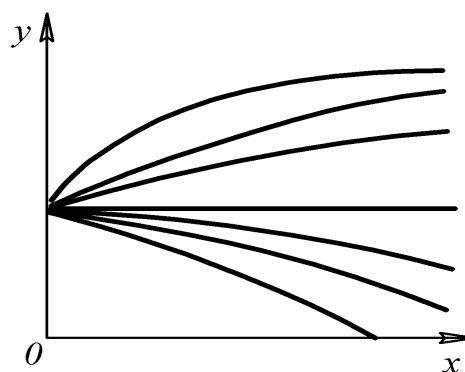
Якщо крива має вигляд (рис. 2.5, б), то використовують формулу

$$y = a \cdot e^{bx}. \quad (2.5)$$

Замінивши  $Y = \lg y$ , одержимо:  $Y = \lg a + bx \lg e$ . Крива перетворюється в пряму лінію в напівлогарифмічній сітці.



в



г

Рисунок 2.5 – Графік функції: в –  $y = c + ax^b$ ; г –  $y = c + a \cdot e^{bx}$

Якщо крива має вигляд (рис. 2.5, в), то емпірична формула має вигляд:

$$y = c + ax^b \quad (2.6)$$

При заданому  $b$  прийmemo  $X = x^b$  і одержимо пряму лінію на сітці прямокутних координат:

$$y = c + aX. \quad (2.7)$$

Якщо  $b$  невідоме, то приймають  $X = \lg x$ ; і  $Y = \lg(y - c)$ , – тут теж пряма лінія, але в логарифмічній сітці. Тут потрібно спочатку обчислити « $c$ », прийнявши на експериментальній кривій три довільні точки:  $x_1, y_1$ ;  $x_2, y_2$ ; і  $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$ ,  $y_3$  і обчислити « $c$ » із виразу

$$c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}. \quad (2.8)$$

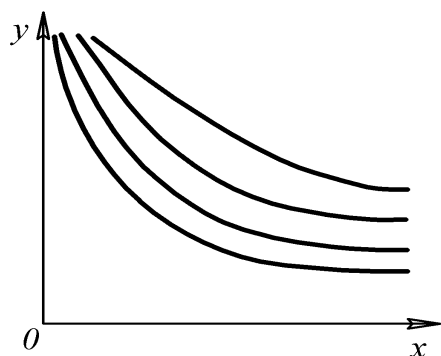
Якщо графік має вигляд (рис. 5.5 г) то використовують формулу

$$y = c + a \cdot e^{bx}. \quad (2.9)$$

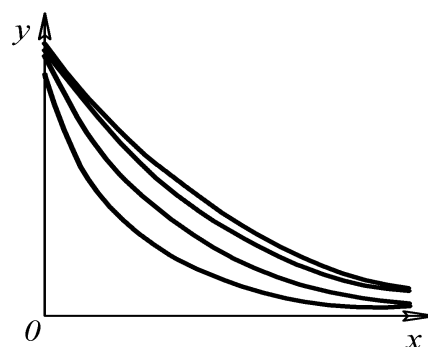
Замінивши  $Y = \lg(y - c)$ , будують пряму в напівлогарифмічній сітці

$$Y = \lg a + bx \lg c, \quad (2.10)$$

де « $c$ » попередньо знайдено за формулою (2.8). Тоді:  $x_3 = 0,5 \cdot (x_1 + x_2)$ .



д



е

Рисунок 2.5 – Графік функції: д –  $y = a + b/x$ ; е –  $y = 1/(a + bx)$

Якщо графік має вигляд (рис. 2.5, д), то використовують вираз

$$y = a + b/x. \quad (2.11)$$

Замінивши  $x = 1/z$ , одержимо пряму лінію в прямокутних координатах

$$y = a + bz. \quad (2.12)$$

Якщо графік має вигляд (рис. 2.5, е), то використовують формулу

$$Y = 1 / (a + bx). \quad (2.13)$$

Прийнявши  $y = 1/z$ , одержимо:  $z = a + bx$  тобто пряму в прямокутних координатах.

Якщо є рівняння:  $y = \frac{1}{a + bx + cx^2}$ , шляхом заміни  $y = 1/z$  одержимо

$$z = a + bx + cx^2. \quad (2.14)$$

Складну степеневу функцію  $y = ae^{nx+mx^2}$  можна перетворити в просту, прийнявши:  $lg y = z$ ;  $lg a = p$ ;  $n lg e = q$ ,  $m lg e = r$  – отже, одержимо залежність

$$z = p + qx + r x^2. \quad (2.15)$$

**Приклад.** Підібрати емпіричну формулу для вибірки:

1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
15,2	20,6	27,4	36,7	49,2	66,0	87,4	117,5

Будуємо графік (рис. 2.6) відповідно до рис. 2.1, б.

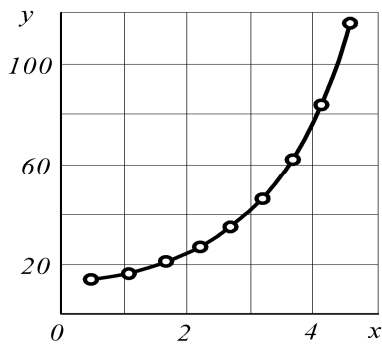


Рисунок 2.6 – Емпірична характеристика  $y = ae^{bx}$

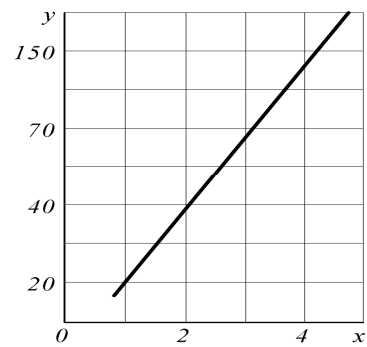


Рисунок 2.7 – Лінеаризована характеристика  $Y = \lg a + bx \lg e$

Після логарифмування виразу  $y = ae^{bx} : \lg y = \lg a + bx \lg e$ . Позначимо  $\lg y = Y$ , тоді  $Y = \lg a + bx \lg e$ , тобто в напівлогарифмічних координатах вираз для  $Y$  це пряма (рис. 2.7).

Підставивши в рівняння координати крайніх точок, одержимо

$$\lg 15,2 = \lg a + b \lg e \text{ і } \lg 117,5 = \lg a + 4,5 b \lg e.$$

Отже, 
$$\begin{cases} \lg a + b \lg e = 1,183; \\ \lg a + 4,5 b \lg e = 2,070, \end{cases}$$

звідки  $b = 0,887 / (3,5 \lg e) = 0,579$ ;  $\lg a = 1,183 - 0,254 = 0,929$ ;  $a = 1,85$ .

Кінцева емпірична формула має вигляд

$$y = 1,85 \cdot e^{0,579x}. \quad (2.16)$$

**Приклад.** Отримано ряд результатів вимірювань:  $y = f(x)$ .

X:	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Y:	10	8	6,2	5,1	4,2	3,8	3	2,3	2	1,2	0,7	0

---

X:	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Y	14	11	9,2	8	7	6	5,5	5	4,2	3,8	3	2,5

**Завдання:** побудувати графіки, знайти аналітичний вид функціональних кривих.



## 2.2 Апроксимація експериментальних даних поліномами

Для визначення емпіричних формул використовують *поліноми*

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots + A_{12}x^{12}, \quad (2.17)$$

де  $A_0, A_1, \dots, A_n$  – постійні коефіцієнти.

Поліномом апроксимують будь-які результати, якщо вони графічно представляються безперервними функціями, – навіть за невідомого точного представлення функції (2.17), можна знайти коефіцієнти  $A$ . Для визначенні коефіцієнтів  $A$  використовують *методи середніх і найменших квадратів*.

**Метод середніх квадратів** полягає в побудові декількох плавних кривих. Найкращою є та, у якої різницеві відхилення виявляються найменшими, тобто  $\sum \varepsilon \approx 0$ . Метод дає високу точність, якщо число точок не менше 3, 4. Послідовність розрахунку коефіцієнтів полінома така: визначаємо число членів ряду (2.17), (зазвичай приймають  $3 \div 4$ ). У прийнятий вираз послідовно підставляють координати  $x$  і  $y$  декількох  $m$  експериментальних точок і одержують систему з  $m$  рівнянь. Кожне рівняння прирівнюють до відповідного відхилення:

$$A_0 + A_1x_1 + A_2x_1^2 + \dots + A_nx_1^n - y_1 = \varepsilon_1;$$

$$A_0 + A_1x_m + A_2x_m^2 + \dots + A_nx_m^n - y_m = \varepsilon_m.$$

Кількість точок (кількість рівнянь) повинна бути не менше кількості коефіцієнтів  $A$ . Систему рівнянь розбивають послідовно зверху вниз на групи, кількість яких повинна дорівнювати числу коефіцієнтів  $A_0$ . У кожній групі складають рівняння і одержують нову систему рівнянь, рівну кількості груп (зазвичай  $2 \div 3$ ). Вирішуючи систему, обчислюють коефіцієнти  $A$ .

**Приклад.** Нехай виконано сім вимірювань:

4	5	6	7	8	9	10
10,2	6,7	4,8	3,6	2,7	2,1	1,7

Для визначення емпіричної формули вибираємо поліном:

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 \quad (2.19)$$

Підстановкою в це рівняння даних вимірювань систему початкових рівнянь у вигляді

$$\begin{aligned} 1. & A_0 + 4A_1 + 16A_2 - 10,2 = \varepsilon_1; \\ 2. & A_0 + 5A_1 + 25A_2 - 6,7 = \varepsilon_2; \\ 3. & A_0 + 6A_1 + 36A_2 - 4,8 = \varepsilon_3; \\ 4. & A_0 + 7A_1 + 49A_2 - 3,6 = \varepsilon_4; \\ 5. & A_0 + 8A_1 + 64A_2 - 2,7 = \varepsilon_5; \\ 6. & A_0 + 9A_1 + 81A_2 - 2,1 = \varepsilon_6; \\ 7. & A_0 + 10A_1 + 100A_2 - 1,7 = \varepsilon_7 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Розділимо рівняння на три групи та складемо рівняння у кожній підгрупі:

$$1\text{-ша група: } 2A_0 + 9A_1 + 41A_2 = 16,9;$$

$$2\text{-га група: } 2A_0 + 13A_1 + 85A_2 = 8,4;$$

$$3\text{-тя група: } 3A_0 + 27A_1 + 24A_2 = 6,5.$$

Визначивши із цих виразів коефіцієнти  $A_0$ ,  $A_1$  і  $A_2$ , одержимо шукану емпіричну формулу:  $y = 26,128 - 5,2168x + 0,2811x^2$ .

Метод середніх квадратів можна використовувати для різних кривих після їхньої лінеаризації.

**Приклад.** Маємо 8 вимірювань:

3	6	9	12	15	18	21	24
57,6	41,9	31,0	22,7	16,6	12,2	8,9	6,5

Аналіз кривої в прямокутних координатах дає можливість застосувати формулу  $y = a \cdot e^{-bx}$ .

Проведемо вирівнювання, вводячи змінні  $Y = \lg y$ ,  $X = x / 2,303$ .

Тоді:  $Y = A + BX$ , де  $A = \lg a$ ,  $B = b$ . Оскільки потрібно визначити два параметри, то всі вимірювання поділяємо на дві групи за чотирма вимірами, одержуючи рівняння:



Цю систему приводять до системи лінійних рівнянь множенням кожного рівняння відповідно на  $x_1 \dots x_m$  і наступного їхнього додавання, потім множення відповідно на  $u_1, \dots, u_m$ . Отже, одержуємо систему *нормальних рівнянь*:

$$\sum_1^m yx = a_1 \sum_1^m xx + a_2 \sum_1^m xu + \dots + a_n \sum_1^m xz \quad (2.22)$$

$$\sum_1^m yu = a_1 \sum_1^m ux + a_2 \sum_1^m uu + \dots + a_n \sum_1^m uz$$

.....

$$\sum_1^m yz = a_1 \sum_1^m zx + a_2 \sum_1^m zu + \dots + a_n \sum_1^m zz$$

Розв'язання цієї системи рівнянь дає шукані коефіцієнти.

**Приклад.** Необхідно визначити коефіцієнти  $a_1$  і  $a_2$  у рівнянні  $k_p = a_1 + a_2 c$ . Оскільки необхідно визначити два параметри, то систему рівнянь записують у такому вигляді:

$$y = a_1 x_1 + a_2 u_2 \quad \text{і} \quad (2.23)$$

$$yu_2 = a_2 x_1 u_2 + a_2 u_2^2, \quad (2.24)$$

де  $y = k_p$ ;  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = c$ .

Отримані рівняння є лінійними, тому обмежуються чотирма серіями вимірів, зведених у таблицю 2.1. Тоді систему рівнянь можна записати так:

$$\begin{aligned} 5,48 &= 4a_1 + 1100a_2; \\ 1519 &= 1100a_1 + 307350a_2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Розв'язуючи її, одержимо:  $a_1 = 0,78$ ;  $a_2 = 0,0025$ . Отже, емпірична формула має такий вигляд:

$$k_p = 0,78 + 0,0025c. \quad (2.26)$$

Таблиця 2.1 – Результати вимірювання параметрів рівнянь (2.23), (2.24)

$u_2 = c$	$y = k_p$	$u^2$	$yx$
230	1,26	52900	289
255	1,32	65025	336,6
295	1,40	87025	413,0
320	1,50	102400	480,0
1100	5,48	307350	1519,4

Для розрахунку коефіцієнтів  $A$  методом найменших квадратів необхідно використовувати типові програми для ЕОМ.

### 2.3 Метод розкладання в ряд Тейлора

Для емпіричного опису досліджуваної закономірності в діапазоні її існування, обумовленому межами зміни аргументу, використовують алгебраїчний поліном певного ступеня (ряд Тейлора).

Для визначення параметрів залежності  $Y = \varphi(X)$  запишемо її як функцію аргументу  $X$  і параметрів  $a_j, j = \overline{0, s}$ . Згідно з методом найменших квадратів,

$$\sum_{i=1}^N [x_i - \varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_j, \dots, a_s)]^2 = \min. \quad (2.27)$$

Для визначення параметрів, що задовольняють цій умові, необхідно знайти екстремуми функцій багатьох змінних  $a_j$ , шляхом узяття похідних за параметрами від цього вираження і, прирівняти їх нулю, одержавши систему  $s + 1$  рівнянь, розв'язання яких дозволить знайти параметри  $a_j$ .

$$\sum_{i=1}^N [y_i - \varphi(x_i, a_0, \dots, a_j, \dots, a_s)] d\varphi/da_j = 0, \quad j = \overline{0, s} \dots \quad (2.28)$$

У разі апроксимації цієї залежності поліномом  $s$ -го порядку отримаємо:

$$Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_sX^s. \quad (2.29)$$

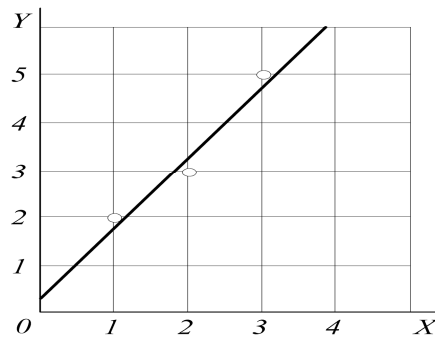


Рисунок 2.8 – Графік залежності  $Y = \varphi(X)$

Виокремивши часткові похідні за параметрами  $a_0$  і  $a_1$  і прирівнявши їх до нуля, одержимо систему нормальних рівнянь:

$$a_0 + a_1 \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N y_i;$$

$$a_0 \sum_{i=1}^N x_i + a_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N y_i x_i. \quad (2.33)$$

Підставивши значення  $x$  і  $y$ , одержимо:

$$3a_0 + 6a_1 = 10;$$

$$6a_0 + 14a_1 = 23.$$

Розв'язки системи будуть такими:  $a_0 = 1/3$ ;  $a_1 = 3/2$ .

Таким чином, шукана залежність виглядає так:  $Y = 0,33 + 1,5 X$ .

## 3 РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ АПРОКСИМАЦІЇ

### 3.1 Сутність регресійного аналізу

Регресійний аналіз – це дослідження закономірностей зв'язку між явищами (процесами), які залежать від багатьох (зокрема, невідомих) факторів. Якщо між змінними  $x$  і  $y$  існує зв'язок, за якого одному значенню  $x$  відповідає кілька значень  $y$ , то такий зв'язок є *регресійним*. Функція  $y = f(x)$  є регресійною (кореляційною), якщо кожному значенню аргументу  $x$  відповідає статистичний ряд розподілу  $y$ . Отже, регресійні залежності характеризуються *імовірнісними*

або *стохастичними* зв'язками, встановлення яких можливо лише під час виконання статистичних вимірювань.

Сутність регресійного аналізу полягає у встановленні *рівняння регресії*, тобто вигляду кривої між випадковими величинами (аргументами  $x$  і функцією  $y$ ), оцінці тісноти зв'язків між ними, імовірності і адекватності результатів вимірювань. Для попереднього визначення наявності такого зв'язку між  $x$  і  $y$  наносять точки на графік, утворюючи кореляційне поле.

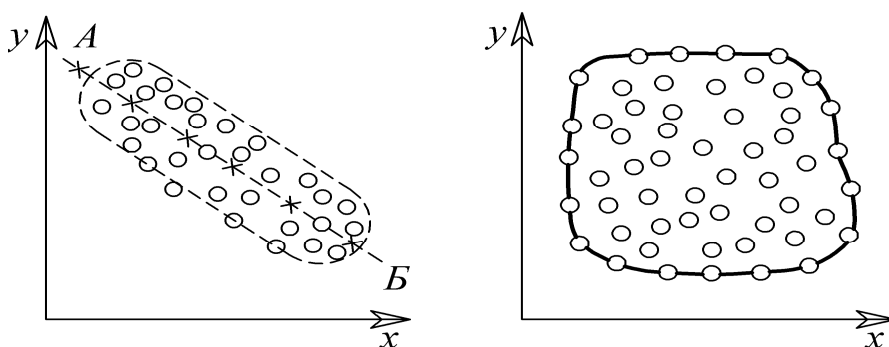


Рисунок 3.1 – Види кореляційних полів.

За характерові групування точок навколо прямої або кривої лінії, по її нахилу можна візуально визначити наявність або відсутність такого кореляційного зв'язку. З рисунку 3.1 видно, що експериментальні дані можуть мати деякий зв'язок між  $x$  і  $y$ , або такий зв'язок відсутній. Якщо усереднювати точки  $x_i$  і з'єднати точки  $y_i$ , то одержимо ламану лінію – експериментальну регресійну залежність. Провівши плавну лінію, рівновіддалену від точок  $\bar{y}$ , одержимо теоретичну регресійну залежність.

### 3.2. Види регресійної залежності

Існують *однофакторні* (парні) і *багатофакторні* регресійні залежності. Парна залежність апроксимується прямою, параболою, гіперболою, статичною, логарифмічною та іншими функціями. Двохфакторне поле апроксимується



площиною, параболоїдом, гіперболоїдом та іншими. При цьому зв'язок виражається за допомогою  $m$  – мірного простору рівняннями другого порядку:

$$y = b_o + \sum_1^m b_i x_i + \sum_j^m b_{ij} x_i x_j + \sum_1^m b_{ij} x_i^2, \quad (3.1)$$

де  $y$  – функція мети (відгуку) багатofакторних змінних;

$x_i$  – незалежні фактори;

$b_i$  – коефіцієнти, що характеризують вплив фактора  $x_i$  на функцію мети;

$b_{ij}$  – коефіцієнти, що характеризують подвійний вплив факторів  $x_i$  і  $x_j$  на функцію мети.

Оптимальною є регресійна залежність, у якій дотримується умова найменших квадратів:  $\sum (y_i - \bar{y})^2 = \min$ , де  $y_i$  – фактичні ординати поля;  $\bar{y}$  – середнє значення ординати з абсцисою  $x$ . Поле кореляції апроксимується рівнянням прямої  $y = a + bx$ . Лінію регресії розраховують із умов найменших квадратів. Коефіцієнти регресії  $a$  і  $b$  обчислюють із формул:

$$b = (n \sum xy - \sum x \sum y) / n \sum x^2 - (\sum x)^2 \quad (3.2)$$

$$a = y - bx = (\sum y) / n - b(\sum x) / n.$$

Критерієм близькості кореляційної залежності між  $x$  і  $y$  до лінійної функціональної залежності є *коефіцієнт кореляції*  $r$ :

$$r = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] \cdot [n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}} \quad (3.3)$$

де  $n$  – число вимірів.

При  $r = 1$   $x$  і  $y$  зв'язані функціональним зв'язком, тобто одному значенню  $x$  відповідає одне  $y$ . За  $r < 1$ , – лінійного зв'язку немає. За  $r = 0$  лінійний кореляційний зв'язок відсутній, але може існувати нелінійна регресія.

Кореляція задовільна при  $r \geq 0,5$ ; хороша за  $r = 0,8 \dots 0,85$ . Для визначення відсотка розкиду функції  $y$  відносно її середнього значення, що визначається зміною фактору  $x$ , розраховують коефіцієнт детермінації:

$$k_d = r^2. \quad (3.4)$$

Рівняння регресії прямої має вигляд:

$$y = \bar{y} + r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}). \quad (3.5)$$

Оцінювання погрішності експерименту (дисперсії відтворюваності) здійснюється на підставі даних паралельних вимірювань і характеризує рівноточність вимірювань в усіх дослідах.

**Приклад.** Маємо статистичний ряд даних вимірів:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10  
8 11 14 16 21 26 27 32 34 41

Необхідно знайти рівняння прямолінійної регресії та оцінити тісноту зв'язків і ступень достовірності.

Таблиця 3.1 – Розрахунок в табличній формі.

$x$	$y$	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$x^2$	$y^2$	$x \cdot y$	$(x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})$
1	8	-4,5	-15	20,25	225	1	64	8	67,5
2	11	-3,5	-12	12,25	144	4	121	22	42,0
3	14	-2,5	-9	6,25	81	9	196	42	22,5
4	16	-1,5	-7	2,25	49	16	256	64	10,5
5	21	-0,5	-2	0,25	4	25	441	105	1,0
6	26	0,5	+3	0,25	9	36	676	156	1,5
7	27	1,5	+4	2,25	16	49	729	189	6,0
8	32	2,5	+9	6,25	81	64	1024	256	22,5
9	34	3,5	+11	12,25	121	81	1156	306	31,5
10	41	4,5	+18	20,25	324	100	1681	410	81,0
55	230	—	—	82,50	1054	585	6344	1558	256,0

Тут  $\bar{x} = (55/10) = 5,5$ ;  $\bar{y} = (230/10) = 23$ ;  $\sigma_x = (82,5/10) = 8,25$ ;  $\sigma_y = (1054/10) = 10,54$

Збіжність експериментальної та теоретичної регресії наведена в табл. (3.2).

Таблиця 3.2

$y$	8	11	14	16	21	26	27	32	34	41
$y_e$	7,1	10,6	14,2	17,7	21,8	24,8	28,3	31,9	35,4	39,0

Згідно (3.3) коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{10 \times 1558 - 55 \times 230}{(10 \times 385 - 55^2)(10 \times 6344 - 230^2)} = -0,99.$$

З (3.2) знаходимо:  $b = \frac{10 \times 1558 - 55 \times 230}{10 \times 385 - 55^2} = 3,55$ ;

$$a = \frac{230}{10} - 3,55 \frac{55}{10} = 3,48.$$

Звідки рівняння регресії має вигляд:

$$y = 3,48 + 3,55x.$$

Розрахунок свідчить, що збіжність є задовільною. Коефіцієнт детермінації  $k_d = 0,992 = 0,98$  свідчить, що 98% розкиду визначається  $x$ -ом, а 2% – мінливістю функції  $y$ .

### 3.3 Перевірка «нульової» гіпотези (критерій Фішера)

Перевірка нульової гіпотези (дисперсії у всіх дослідах рівні між собою) здійснюється шляхом порівняння *найбільшої* і *найменшої* дисперсій.

Суть перевірки полягає в зіставленні отриманої або передбачуваної теоретичної функції  $y = f(x)$  з результатами вимірювань.

Одним із статистичних критеріїв визначенні помилки апроксимації дослідних даних для малих вибірок є *критерій Фішера*. При цьому

розраховують експериментальне значення критерію Фішера  $k_{\phi\delta}$  і порівнюють із теоретичним (табличним)  $k_{\phi m}$ , за необхідної довірчої імовірності  $p_\delta$  (зазвичай  $p_\delta = 0,95$ ). Якщо при цьому  $k_{\phi\delta} < k_{\phi m}$  – то модель є адекватною.

Дослідний критерій Фішера обчислюють за формулою

$$k_{\phi\delta} = D_a / D_{cp} , \quad (3.6)$$

де  $D_a$  – дисперсія адекватності;  $D_{cp}$  – середня дисперсія всього експерименту, обчислені таким чином:

$$D_a = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{it} - \bar{y}_{i\delta})^2}{n - d} ; \quad (3.7)$$

$$D_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^n (y_{it} - \bar{y}_{i\delta})^2}{mn} , \quad (3.8)$$

де  $y_{it}$  – теоретичне значення функції для кожного з вимірювань;

$y_{i\delta}$  – експериментальне значення функції;

$\bar{y}_{i\delta}$  – середнє експериментальне значення функції з  $m$  серій;

$n$  – число вимірювань в одному досліді;

$d$  – число коефіцієнтів рівняння теоретичної регресії.

Значення  $k_{\phi m}$  беруть із таблиці (3.3) для довірчої імовірності 0,95 і числа ступенів свободи  $q_1 = n - d$ ;  $q_2 = n(m - 1)$ . У формулі (3.7)  $y_{it}$  обчислюють за теоретичною регресією для фактора  $x_i$ ;  $\bar{y}_i$  – визначають як середнє з  $m$  серій вимірювань, тобто:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} (y_{i1} + y_{i2} + \dots + y_{im}) . \quad (3.9)$$

Таблиця 3.3 – Критерій Фішера

$q$	Значення $k_{\text{фм}}$ за $p_d = 0,95$ для різних $q_2$								
	1	2	3	4	5	6	12	24	36
1	16	19	21	22	23	23	24	24	24
2	18	19	19	19	19	19	19	19	19
3	10	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,7	2,4	2,1	1,9	1,7
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,7
60	4,0	3,2	2,9	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

**Приклад.** Отримано теоретичне вираження:  $y = 80x$  і для підтвердження проведений експеримент із  $m = 5$  серій по  $n = 7$  вимірювань (табл. 3.4). Встановити адекватність теоретичного вираження.

Таблиця 3.4 – Результати вимірювань

Номер досліджу	$x_i$	$y_{1e}$	$y_{2e}$	$y_{3e}$	$y_{4e}$	$y_{5e}$	$y_{ie}$	$y_{iT}$	$\Delta y_i$		$\sum_1^m (y_{im} - y_{ie})^2$
1	0,2	12	17	15	14	16	14,8	16	2,3	1,44	4,4
2	0,3	23	21	24	25	23	23,2	24	0,8	0,64	2,4
3	0,4	30	34	31	35	35	33,0	32	1,0	1,00	3,8
4	0,5	38	43	40	39	42	40,4	40	0,4	0,16	3,6
5	0,6	52	47	48	49	40	47,2	48	0,8	0,64	16,4
6	0,7	59	58	55	54	53	55,8	56	0,2	0,04	5,4
7	0,8	62	66	62	61	63	62,8	64	1,8	1,44	4,4
Разом										5,36	40,4

За ф.(3.7) визначаємо дисперсію адекватності  $D_a = 5,36/(7-1) = 0,89$ . Тут  $d = 1$ , тому що в теоретичному вираженні – один значущий член  $x$ .

Дисперсія  $D_{cp}$  спочатку обчислюється порядково для  $m$  рядів:

1. Для першого рядка  $D_1 = \Sigma(y_{iT} - y_{ie})^2 / m = 1/5[(12-16)^2 + (17-16)^2 + (15-16)^2 + (14-16)^2] = 4,4$ ; 2. Для другого рядка:  $D_2 = 1/5[(23-24)^2 + (21-24)^2 + (24-24)^2 + (25-24)^2 + (23-24)^2] = 2,4$  і т.д. Середня дисперсія всього експерименту буде:

$$D_{cp} = \sum_1^n D_i / n = 40,4 / 7 = 5,77. \quad (3.9)$$

Потім за формулою (3.6):  $k_{f\phi} = D_a / D_{cp} = 0,89 / 5,77 = 0,15$ .

Теоретичні значення критерію Фішера можна визначити з таблиці 3.3. Збіжності експериментальної і теоретичної регресії за наступних ступенів свободи:  $q_1 = 7 - 1 = 6$  і  $q_2 = 7(5 - 1) = 27$ ,  $k_{\phi m} = 3,75$ . Оскільки  $k_{f\phi} = 0,15 < k_{\phi m} = 3,75$ , то модель адекватна з довірчою імовірністю 95 %.

Для великих вибірок застосовують **критерій Пірсона**, відповідно до якого гіпотеза про закон розподілу підтверджується, якщо виконується умова:

$$p(\chi^2, q) > \alpha = 1 - \varphi(x). \quad (3.10)$$

Тут  $\alpha = 1 - \varphi(x)$  – рівень значущості, прийнятий як 0,1;  $\chi$  – критерій згоди Пірсона;  $q$  – число ступенів свободи, рівне:

$$q = m - s, \quad (3.11)$$

де  $m$  – кількість груп (серій, розрядів) великої вибірки або кількість вимірів в одній серії;  $s$  – кількість використовуваних зв'язків.

Значення  $\chi^2$  – обчислюють за формулою:

$$\chi^2 = \sum_1^m (y_{\varepsilon i} - y_{mi})^2 / y_{mi}, \quad (3.12)$$

де  $y_{\varepsilon i}$ ,  $y_{mi}$  – кількість вимірювань у кожній групі серій згідно з даними експерименту і теоретичною кривою.

Маємо велику вибірку з  $N$  статистичних вимірювань. Розбиваємо їх на  $m$  діапазонів:  $x_1 \dots x_2$ ;  $x_3 \dots x_4$ ;  $x_5 \dots x_6$  і т.д. За даними вимірювань у кожному діапазоні може виявитися  $y_{\varepsilon}$  вимірювань (частота); наприклад, у діапазоні  $x_1 \dots x_2$  буде  $y_{\varepsilon 1}$  вимірювань, у наступному числовому діапазоні  $x_3 \dots x_4$  буде  $y_{\varepsilon 2}$  вимірювань і т. д. Тоді  $\sum_1^m y_{\varepsilon i} = N$ .

За даними вимірів будуємо експериментальну криву частот:  $y_{\varepsilon i} = f(x)$  або  $y_{\varepsilon i} / N = f(x)$ . Цю криву можна апроксимувати теоретичною кривою (законом Пуассона, показовим, логарифмічним, нормальним та ін.). Для цієї теоретичної кривої встановлюють експериментальні частоти появи

значення  $y_{mi}$  у цьому діапазоні. Далі обчислюють критерій Пірсона  $\chi^2$  і порівнюють його з табл. 3.5.

Таблиця 3.5 – Критерій Пірсона

$\chi^2$	Значення критерія Пірсона при кількості степенів свободи							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,317	0,606	0,801	0,909	0,962	0,985	0,994	0,998
2	0,157	0,367	0,572	0,735	0,849	0,919	0,959	0,981
3	0,083	0,223	0,391	0,557	0,700	0,806	0,885	0,934
4	0,045	0,135	0,261	0,406	0,549	0,767	0,079	0,854
5	0,025	0,083	0,171	0,287	0,415	0,543	0,660	0,757
6	0,014	0,049	0,111	0,199	0,306	0,423	0,539	0,647
7	0,008	0,030	0,071	0,135	0,220	0,320	0,428	0,536
8	0,004	0,018	0,046	0,091	0,156	0,238	0,332	0,433
9	0,002	0,011	0,020	0,061	0,109	0,173	0,252	0,342
10	0,001	0,006	0,018	0,040	0,075	0,124	0,188	0,265
11	0,000	0,004	0,011	0,026	0,051	0,088	0,138	0,201
12	–	0,002	0,007	0,017	0,034	0,062	0,100	0,151
13	–	0,001	0,004	0,011	0,023	0,043	0,072	0,111
14	–	0,000	0,002	0,007	0,014	0,029	0,036	0,059
15	–	–	0,001	0,004	0,010	0,020	0,030	0,042

**Приклад.** Проведено  $n = 250$  вимірювань величини  $x_i$ . Необхідно визначити закон розподілу. Розбиваємо вибірку  $y_{zi}$  на сім груп, результати вимірювань нанесемо на сітку в прямокутних координатах і встановлюємо, що крива близька до закону нормального розподілу, за якою визначають відповідні теоретичні частоти:

1	23	50	82	58	28	2
1	27	57	80	57	27	1

і за формулою (4.12) обчислюємо критерій згоди  $\chi^2$ :



$$\chi^2 = (1-1)^{2/1} + (23-27)^{2/27} + (50-57)^{2/57} + (82-80)^{2/80} + (58-57)^{2/57} + (58-57)^{2/57} + (28-27)^{2/27} + (2-1)^{2/1} = 2,56$$

За кількістю розрядів  $m = 7$ , констант нормального закону  $s = 2$ ,  $q = 7 - 2 = 5$ . За таблицею 4.3, відповідно до  $p(2,56; 5)$ , визначаємо  $\chi^2 = 0,774$ . Оскільки  $0,774 > 0,10$ , то адекватність є задовільною.

## 4 КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ

### 4.1 Поняття кореляційної залежності

Для встановлення залежності однієї випадкової величини  $Y$  від однієї або декілька інших випадкових величин  $X$  і визначення тісноти цієї залежності, – використовують *кореляційний аналіз*. Величини  $Y$  і  $X$  можуть бути пов'язані функціональною або статистичною залежностями. Якщо під час зміни однієї з величин змінюється середнє значення іншої, то вона називається кореляційною.

Якщо експериментально отримані  $N$  пар чисел  $(y_i, x_i)$  залежностей  $Y$  від  $X$ , то можна оцінити тісноту лінійного зв'язку між ними. Приблизно залежність  $Y = f(X)$  може бути подана у вигляді прямої, яка є середньоквадратичною регресією  $Y$  на  $X$

$$Y = m_y + r_{yx} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - m_x) = a_0 + a_1 X, \quad (4.1)$$

де  $m_x$  і  $m_y$  – математичні очікування величин  $X$  і  $Y$ ;

$\sigma_x$  і  $\sigma_y$  – середні квадратичні відхилення цих величин;

$r_{yx}$  – коефіцієнт кореляції.

$$r_{yx} = k_{yx} / \sigma_x \sigma_y; \quad (4.2)$$

де  $k_{yx}$  – кореляційний момент випадкових величин  $X$  і  $Y$ .

Параметр  $D_{yo} = \sigma_y^2(1 - r_{yx}^2)$  – це остаточно дисперсія випадкової величини  $Y$  відносно  $X$ , що характеризує величину помилки під час апроксимації залежності  $Y = f(X)$  лінійною функцією виду (4.1).

За  $r_{yx} = \pm 1$  остаточно дисперсія  $D_{yo} = 0$ , що свідчить про функціональну залежність між  $Y$  і  $X$ . За  $r_{yx} = 0$  лінійного зв'язку між  $Y$  і  $X$  немає.

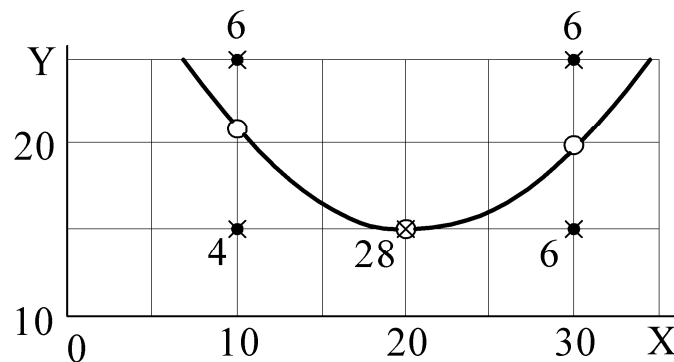


Рисунок 4.1 – Графік залежності  $Y = f(X)$ .

Отже, коефіцієнт кореляції  $-1 \leq r_{yx} \leq +1$  є характеристикою тісноти лінійного зв'язку між  $X$  і  $Y$ . Чим ближче  $r_{yx}$  до 1, тим зв'язок тісніший.

Коефіцієнти  $a_0$  і  $a_1$ , знайдені методом найменших квадратів, також характеризують тісноту лінійного зв'язку, тому що *коефіцієнт регресії*

$$a_1 = r_{yx} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}. \quad (4.3)$$

## 4.2 Визначення коефіцієнта кореляції

**Приклад.** Для попередніх умов оцінити тісноту лінійного зв'язку між випадковими величинами  $X$  і  $Y$ .

**Рішення.** Визначимо коефіцієнт кореляції  $r_{yx}$  знайшовши спочатку  $k_{yx}$ ,  $\sigma_x$ ,

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^2}, \quad (4.4)$$

де  $m_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ .

Після підставлення чисел (аналог – попередній приклад), одержимо:  $m_x = 2$ ;  $\sigma_x = 1$ . Аналогічно:  $m_y = 3,33$ ;  $\sigma_y = 1,53$ . Кореляційний коефіцієнт визначаємо за формулою:

$$k_{yx} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - m_y) \cdot (x_i - m_x) = 1,5.$$

Коефіцієнт кореляції, знайдений з (4.2):  $r_{yx} = 1,5 / (1,0 \cdot 1,53) = 0,98$ . Це свідчення тісного зв'язку між  $Y$  і  $X$ .

За необхідності визначення тісноти нелінійного зв'язку між випадковими величинами вводять параметр  $\eta_{xy}$  – *кореляційне відношення* – це відношення міжгрупового середнього квадратичного відхилення  $\sigma_{yi}$  до загального середнього квадратичного відхилення  $\sigma_y$  випадкової величини  $Y$ .

$$\eta_{xy} = \sigma_{yi} / \sigma_y \quad (4.5)$$

Якщо  $\eta_{xy} = 0$ , то  $\sigma_{yi} = 0$  і середнє значення  $Y$  за будь-яких  $X$  постійне, рівне загальному середньому, отже, кореляційного зв'язку немає. За  $\eta_{xy} = 1$ ,  $\sigma_{yi} = \sigma_y$  і величини  $X$  і  $Y$  пов'язані функціональною залежністю.

### **Приклад.**

Таблиця. 4.1 – Отримано результати експерименту

$y_i/x_i$	10	20	30	$N_{yf}$
15	4	28	6	38
25	6	-	6	12
$N_{xi}$	10	28	12	$N = 50$

$N = 50$  – загальна кількість дослідів;  $N_{xi}$ ,  $N_{yf}$  – частота появи конкретного значення  $X$  і  $Y$ . (Число  $N_{xi}$  відповідає кількості повторень дослідів у точці  $X = x_i$ ). Завдання: визначити тісноту кореляційного зв'язку  $X$  і  $Y$ .

*Розв'язання.* Наносимо точки  $(x_i, y_i)$  на графік відзначивши біля кожної точки  $x_i$  кількість повторень величини  $Y = y_i$ . (так, за  $x_i = 10$  величина  $y_i = 15$  повторюється 4 рази). Для визначення  $\eta_{xy}$ :

а) визначимо середнє величини  $Y$ :

$$m_y = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j = \frac{1}{N} (N_{y1} y_1 + N_{y2} y_2) = \frac{1}{50} (38 \cdot 15 + 12 \cdot 25) = 17,4;$$

б) умовні середні величини  $Y$  при заданому  $X = x_i$

$$m_{yi} = \frac{1}{N_{xi}} \sum_{j=1}^{N_{xi}} y_{ij}, \text{ за } i = 1 \text{ одержимо: } m_{y1} = (1/10) \cdot (4 \cdot 15 + 6 \cdot 25) = 21.$$

Аналогічно знайдемо  $m_{y2} = 15$  і  $m_{y3} = 20$  (рис. 4.1);

в) знаходимо загальне середньоквадратичне відхилення величини  $Y$ :

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N N_{yj} (y_j - m_y)^2 = (1/50 - 1) \cdot [38(15 - 17,4)^2 + 12(25 - 17,4)^2] = 18,58;$$

$$\sigma_y = 4,31;$$

г) визначимо середньоквадратичне відхилення умовних середніх значень

$$m_{yi}: \sigma_{yi}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^3 (m_{yi} - m_y)^2 \cdot N = (1/50 - 1) [(21 - 17,4)^2 \cdot 10 + (15 - 17,4)^2 \cdot 28 + (20 - 17,4)^2 \cdot 12] = 7,66;$$

$$\sigma_{yi} = 2,76.$$

Знаючи  $\sigma_{yi}$  і  $\sigma_y$  за формулою:  $\eta_{yx} = \sigma_{yi}/\sigma_y$  знаходимо кореляційне відношення;  $\eta_{yx} = 0,64$ . Оскільки воно менше 1, то нелінійний зв'язок між  $X$  і  $Y$  слабкий. Візуальний аналіз графіка (рис. 4.1) дозволяє рівняння регресії  $Y = f(x)$  подати у вигляді параболи другого порядку:  $Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$  (під  $Y$  розуміємо умовне середнє цієї величини за  $x_i = \text{const}$ , тобто  $Y = m_x$ ).

Після підстановки коефіцієнтів визначених шляхом розв'язання системи рівнянь, одержимо:  $Y = 38 - 2,25 X + 0,055 X^2$ .

## 5 ДИСПЕРСНИЙ АНАЛІЗ

### 5.1 Поняття про загальну, факторну і залишкову дисперсію

Дисперсний аналіз результатів дослідження використовують якщо необхідно перевірити ступінь точності групи  $m$  приладів і встановити вплив одного параметра приладу на точність вимірювань. Кожним приладом проведено  $n$  вимірювань – усього  $n \cdot m$ . Окреме вимірювання  $x_{ij}$ , де  $i$  – номер приладу (від 1 до  $m$ );  $j$  – номер виконаного їм вимірювання (від 1 до  $n$ ).

Дисперсійний аналіз припускає підпорядкування відхилень нормальному закону розподілу, тому обчислюють для кожної серії вимірювань середнє арифметичне і середнє з показань кожного приладу і т.д. для кожного з  $n_i$  вимірювань і  $m_i$  приладів. Після чого обчислюють суму квадратів відхилень між вимірами серій  $S_1$ , яка показує ступінь розбіжності систематичних похибок.

$$S_1 = n \sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - \bar{x})^2, \quad (5.1)$$

де  $\bar{x}_i$  – середнє арифметичне  $n$  вимірювань;

$\bar{x}$  – середнє арифметичне всіх серій вимірювань (тобто загальне середнє).

Вона показує ступінь розходження в систематичних похибках усіх  $m$  приладів, тобто характеризує розсіювання досліджуваного фактору між приладами.

Сума квадратів відхилення всередині серії  $S_2$  визначається за формулою:

$$S_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2, \quad (5.2)$$

де  $x_{ij}$  – окреме  $i$ -те вимірювання на  $j$ -тому приладі.

Вона характеризує залишкове розсіювання випадкових похибок одного приладу. При цьому допускають, що центри нормальних розподілів випадкових величин рівні, тому всі  $m \cdot n$  вимірювання розглядають як вибірку з однієї нормальної сукупності. Тому обчислюють критерій:

$$J = \frac{S_1 / (m - 1)}{S_2 / m(n - 1)}, \quad (5.3)$$

де чисельник і знаменник є дисперсії  $\sigma^2$  для  $m$  і  $n \cdot m$  спостережень. Залежно від значення  $k_1 = m - 1$  і  $k_2 = m(n - 1)$ , числа степенів свободи і імовірності  $p_0$  (0,95; 0,99) складені таблиці значень  $j_T$ . Якщо  $j \leq j_T$ , то вважають, що всі прилади мають однакові (допустимі) систематичні похибки.

## 5.2 Задача дисперсного аналізу

Якщо необхідно встановити ступінь впливу фактора  $X$  на дослідну величину  $Y$ , також використовують дисперсний аналіз. Принцип цього методу полягає в порівнянні факторної дисперсії, викликаной фактором  $X$ , і залишкової дисперсії, обумовленої випадковими причинами. У тому випадку, коли розходження в дисперсіях значне, – це означає, що фактор  $X$  істотно впливає на  $Y$ , і середні значення  $Y$  за різних  $X$  також сильно відрізняються.

**Приклад.** У процесі експерименту проведено по 2 вимірювання ( $m = 2$ ) величини  $Y$  на кожному із двох рівнів ( $N = 2$ ) фактора  $X$  (табл. 5.2).

Таблиця 5.2 – Результати вимірів

$Y_{ij} / X_i$	$Y_{i1}$	$Y_{i2}$	$Y_i$
$X_1$	$Y_{12}$	$Y_{11}$	$\bar{Y}_1$
$X_2$	$Y_{22}$	$Y_{21}$	$\bar{Y}_2$

За цією таблицею:  $x_i$  – значення факторів в  $i$ -м досліді;  $i = 1, N$ ;  $N$  – кількість дослідів, тобто кількість різних значень фактору  $X$ ;  $y_{ij}$  –  $j$ -е значення величини  $Y$  в  $i$ -том досліді;  $j = 1, m$ ;  $m$  – число повторень дослідів за  $X = x_i$ ;  $\bar{y}_i = m_{yi} = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^m y_{ij}$  – середнє значення величини  $y$  в  $i$ -му досліді (групове середнє);  $\bar{y} = m_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{y}_i = \frac{1}{mN} \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^m y_{ij}$  – загальне середнє значення  $\bar{y}$ .

1) Визначимо загальну суму квадратів відхилень величини  $Y$  від загальної середньої  $\bar{y}$ , що характеризує розсіювання всіх  $(mN)$  виміряних значень величини  $y$  навколо загального середнього цієї величини  $\bar{y}$

$$S_y = \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \bar{y})^2 \quad (5.4)$$

2) Обчислимо факторну суму квадратів відхилень середніх значень  $Y$  у кожному досліді  $\bar{y}_i$  від загальної середньої  $\bar{y}$ , що характеризує розсіювання групових середніх у всіх  $N$  дослідях (міжгрупове розсіювання):

$$S_{y\phi} = m \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \bar{y})^2. \quad (5.5)$$

3) Визначимо остаточну суму квадратів відхилень величини  $Y$  від її середньої величини в кожному досліді, що характеризує розсіювання величини  $Y$  усередині дослідів (внутрішньогрупове розсіювання):

$$S_{y0} = \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \bar{y}_i)^2. \quad (5.6)$$

Для нашого випадку одержимо:

$$S_y = (y_{11} - \bar{y})^2 + (y_{12} - \bar{y})^2 + (y_{21} - \bar{y})^2 + (y_{22} - \bar{y})^2. \quad (5.7)$$

Віднімемо і додамо до кожного спостережуваного  $y_{ij}$  відповідні групові середні  $\bar{y}_i$  і після перетворення одержимо:

$$S_y = 2 \cdot [(\bar{y}_1 - \bar{y})^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y})^2] + [(\bar{y}_{11} - \bar{y}_1)^2 + (\bar{y}_{12} - \bar{y}_1)^2 + (\bar{y}_{21} - \bar{y}_2)^2 + (\bar{y}_{22} - \bar{y}_2)^2].$$

З урахуванням (5.5) і (5.6) для  $N = 2$  і  $m = 2$  одержимо:

$$S_y = S_{y\phi} + S_{y0}. \quad (5.8)$$

Залишкову суму квадратів відхилень можна обчислити за відомими  $S_y$  і  $S_{y\phi}$ . Розділивши відповідні суми квадратів відхилень на число ступенів свободи, одержимо: **загальну, факторну і залишкову** дисперсію:

$$D_y = \frac{S_y}{N(m-1)}; \quad D_{y\phi} = \frac{S_{y\phi}}{N-1}; \quad D_{y0} = \frac{S_{y0}}{N(m-1)}. \quad (5.9)$$

*Перевірка нульової гіпотези* про рівність групових середніх сукупностей з невідомими, але однаковими дисперсіями здійснюється за допомогою критерію Фішера ( $F$  - критерій) і полягає в порівнянні  $D_{y\phi}$  і  $D_{y0}$ :

$$F = D_{y\phi} / D_{y0}. \quad (5.10)$$

У разі рівності факторної і залишкової дисперсій – нульова гіпотеза вірна. Якщо різниця значна – гіпотеза неправильна. Якщо  $D_{y\phi} < D_{y0}$ , то групові середні рівні і використовувати  $F$ -фактор не варто. У цьому суть методу дисперсного аналізу.

**Приклад.** Проведено 3 експерименти ( $N = 3$ ) і в кожному вимірюванні повторюються 4 рази ( $m = 4$ ). При рівні значущості  $\alpha = 0,05$  перевірити нульову



гіпотезу про рівність групових середніх  $\bar{y}_i$ . Закон розподілу похибок виміру – нормальний.

Таблиця 5.3 – Результати вимірювань

$x_i / y_{ij}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$y_{i1}$	51	52	42
$y_{i2}$	52	54	44
$y_{i3}$	56	56	50
$y_{i4}$	57	58	52
$\bar{y}_i$	54	55	47

*Розв'язання.* За формулами (5.5) і (5.6) визначимо загальну і факторну суми квадратів відхилень:  $S_y = 266$ ;  $S_{y\phi} = 152$ . Залишкова сума квадратів відхилень:  $S_o = S_y - S_{y\phi} = 226 - 152 = 114$ . Відповідно до (5.9) факторна і залишкова дисперсії:

$$D_{y\phi} = 152 / (3 - 1) = 76;$$

$$D_{yo} = 114 / 3(4 - 1) = 12,67.$$

Тоді  $F = 76 / 12,67 = 6$ . Порівнюючи з табличним:  $F_T = 4,26 < F = 6$  – то нульова гіпотеза не дійсна, – тобто вплив  $X$  на  $Y$  значний.

## 6 МАТЕМАТИЧНЕ ОБРОБЛЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ

### 6.1 Основи теорії випадкових помилок

Результати вимірювань потребують відповідного оброблення і представлення у вигляді графіків, таблиць, формул, статистичних оцінок розходження результатів теоретичної обробки з експериментальними даними.

В процесі проведення експериментів виникають погрішності, пов'язані з точністю вимірювальних приладів, недосконалістю методики вимірювань а

також впливом різних зовнішніх факторів. Розрізняють *систематичні* і *випадкові* погрішності. Систематичні і випадкові погрішності можуть бути виключені шляхом проведення повторних вимірів і позбавлення від впливу зовнішніх факторів. Теорія випадкових похибок базується на таких постулатах:

- за великої кількості вимірювань, випадкові похибки однакової величини, але різного знака зустрічаються однаково часто;
- імовірність появи значної похибки зменшується зі зростанням її величини;
- у разі великої кількості даних вимірювань значення вимірюваної величини дорівнює *середньоарифметичному результату всіх вимірювань*;
- поява того чи іншого результату вимірів як випадкової події підлягає закону нормального розподілу.

Теорія випадкових помилок дозволяє оцінити точність результатів за певної кількості вимірювань (або визначити мінімальну кількість вимірювань, що гарантують задану точність).

Для великої вибірки ( $n > 30$ ) і нормального закону розподілу оцінкою точності вимірювання є *дисперсія*  $D$  і *коефіцієнт варіації*  $k_g$ :

$$D = \sigma^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1); \quad k_g = \sigma / \bar{x}. \quad (6.1)$$

**Дисперсія**  $D$  характеризує однорідність вимірювань; коефіцієнт варіації  $k_g$  – мінливість вимірювань щодо середніх значень. Чим більша  $D$ , тим більший розкид результатів вимірювань. Чим більший  $k_g$ , тим більший розкид результатів відносно середніх значень вимірювань.

**Довірчим** називають інтервал значень  $x_i$ , у який потрапляє істинне значення  $x_0$  вимірюваної величини із заданою імовірністю.

**Довірчою імовірністю** вимірювання називають імовірність того, що істинне значення вимірюваної величини потрапляє в цей довірчий інтервал:  $a \leq x_0 \leq b$  і вимірюється у відсотках або в частках одиниці.

Довірча імовірність  $p_0$  описується виразом:

$$p_{\partial} = p[a \leq x_{\partial} \leq b] = (1/2)[\varphi(b - \bar{x})/\sigma - \varphi(a - \bar{x})/\sigma], \quad (6.2)$$

де  $\varphi(t)$  - інтегральна функція Лапласа, обумовлена виразом:

$$\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt. \quad (6.3)$$

Таблиця 6.1 – Інтегральна функція Лапласа

$t$	$p_{\partial}$	$t$	$p_{\partial}$	$t$	$p_{\partial}$
0,00	0,0000	0,75	0,5467	1,50	0,8664
0,05	0,0399	0,80	0,5763	1,55	0,8789
0,10	0,0797	0,85	0,6047	1,60	0,8904
0,15	0,1192	0,90	0,6319	1,65	0,9011
0,20	0,1585	0,95	0,6579	1,70	0,9109
0,25	0,1974	1,00	0,6827	1,75	0,9199
0,30	0,2357	1,05	0,7063	1,80	0,9281
0,35	0,2737	1,10	0,7287	1,85	0,9357
0,40	0,3108	1,15	0,7419	1,90	0,9426
0,45	0,3478	1,20	0,7699	1,95	0,9488
0,50	0,3829	1,25	0,7887	2,00	0,9545
0,55	0,4177	1,30	0,8064	2,25	0,9756
0,60	0,4515	1,35	0,8230	2,50	0,9876
0,65	0,4843	1,40	0,8385	3,00	0,9973
0,70	0,5161	1,45	0,8529	4,00	0,9999

Аргументом цієї функції є відношення довірчого інтервалу  $\mu$  до середньоквадратичного відхилення  $\sigma$ , тобто:

$$t = \mu / \sigma, \quad (6.4)$$

де  $t$  – гарантійний коефіцієнт.

Довірчий інтервал:

$$\mu = b - \bar{x}; \quad \mu = - (a - \bar{x}). \quad (6.5)$$

Якщо задано довірчу імовірність  $p_\partial$  (0,9; 0,95), то встановлюється точність вимірювань (довірчий інтервал  $2\mu$ ) на основі співвідношення:  $p_\partial = \varphi(\mu / \sigma)$ . Половина довірчого інтервалу дорівнює:

$$\mu = \sigma \arg \varphi(p_\partial) = \sigma \cdot t, \quad (6.6)$$

де  $\arg \varphi(p_\partial)$  – аргумент функції Лапласа, а за  $n < 30$  – функції Стюдента.

**Приклад.** Якщо виконано 30 вимірювань електричної міцності ізоляції за напруги  $U = 170$  кВ і обчисленому значенні середньоквадратичного відхилення  $\sigma = 3,1$  кВ.

Необхідну точність вимірювань можна визначити для різних рівнів довірчої імовірності  $p_\partial = 0,9; 0,95; 0,997$  прийнявши значення  $t$  за табл. 6.1. Тоді:  $\mu = \pm 3,1 \cdot 1,65 = 5,1$ ;  $\mu = \pm 3,1 \cdot 2,0 = 6,2$ ;  $\mu = \pm 3,1 \cdot 3,0 = 9,3$  (кВ).

Отже, для цього методу довірчий інтервал зростає вдвічі у разі збільшення  $p_\partial$  усього на 10 %.

Для визначення імовірності вимірювань для встановленого довірчого інтервалу (наприклад,  $\mu \pm 7$  кВ) за формулою (6.4)  $t = \mu / \sigma = 7/31 = 2,26$ . Далі за таблицею (6.1) інтегральної функції Лапласа для  $t = 2,26$  знаходимо  $p_\partial = 0,97$ . Це означає, що в заданий довірчий інтервал з 100 вимірювань не потрапляють 3.

Величина  $(1-p_\partial)$  – це рівень значимості, з якого витікає, що за нормального закону розподілу похибка, що перевищує довірчий інтервал, буде зустрічатися один раз із  $n_u$  вимірювань, де

$$n_u = p_\partial / (1 - p_\partial). \quad (6.7)$$

Звідки можна вирахувати *кількість вимірів*, з яких одне перевищить довірчий інтервал: за  $p_\partial = 0,9$ ,  $n_u = 0,9 / (1 - 0,9) = 9$  (вимірювань).

## 6.2 Визначення мінімально необхідної кількості вимірів

За статистичних методів оцінки точності  $\Delta$  отриманих результатів необхідно визначити мінімальну кількість вимірювань  $N_{min}$  при заданих значеннях довірчого інтервалу  $2\mu$  і довірчої імовірності  $p_\partial$ . Під час вимірів необхідно визначити їхню точність:

$$\Delta = \sigma_o / \bar{x}, \quad (6.8)$$

де  $\sigma_o = \sigma / \sqrt{n}$  – середньоарифметичне значення середньоквадратичного відхилення  $\sigma$  ( $\sigma_o$  – це *середня помилка*). Довірчий інтервал помилки вимірювань  $\Delta$  визначається аналогічно для вимірювань  $\mu = t \cdot \sigma_o$ . За допомогою  $t$  можна визначити довірчу імовірність помилки виміру з табл. Лапласа (3.1).

За заданою точністю  $\Delta$  і довірчою імовірністю виміру ( $p_\partial$ ) можна визначити мінімальне число вимірів, що гарантують цю точність  $\Delta$  і  $p_\partial$ , то аналогічно (6.6) з урахуванням (6.8) запишемо:

$$\mu = \sigma \arg \phi(p_\partial) = \sigma_o / \sqrt{n} t. \quad (6.9)$$

За  $N_{min} = n$  одержимо:

$$N_{min} = \sigma^2 t^2 / \sigma_o^2 = k_\epsilon^2 t^2 / \Delta^2, \quad (6.10)$$

де  $k_\epsilon$  – коефіцієнт варіації, %;  $\Delta$  – точність вимірювань, %.

Послідовність визначення  $N_{min}$  така:

- проводять експеримент з  $n = 20 \div 50$  вимірювань;
- обчислюють середньоквадратичне відхилення за формулою (6.1);
- встановлюють необхідну точність  $\Delta$  вимірювання (не повинна перевищувати точності приладів);
- встановлюють нормоване відхилення  $t$  (звичайно задається);
- за формулою (6.10) визначають  $N_{min}$ .

**Приклад.** Необхідно зробити 25 вимірювань розмірів деталі: припустимо відхилення  $\pm 0,1$  м. Обчислене  $\sigma = 0,4$  м дозволяє оцінити точність вимірювання. З (6.9) можна записати:  $t = \sqrt{n} \cdot \frac{\Delta}{\sigma} = \sqrt{25} \cdot (0,1/0,4) = 1,25$ . З таблиці (6.1) Лапласа довірча імовірність для  $t = 1,25$ :  $p_d = 0,79$ . Це низька імовірність. Похибка перевищує довірчий інтервал  $2\mu = 0,2$  м і згідно з формулою (6.6) буде зустрічатися один раз із  $0,79 / (1 - 0,79) = 3,37$ , тобто з 4-х вимірювань, що неприпустимо.

Розрахуємо мінімальну кількість вимірів з довірчою імовірністю  $p_d = 0,9$  і  $p_d = 0,95$ . За формулою (6.10)  $N_{min} = 0,42 \cdot 1,65^2 / 0,1^2 = 43$  вимірювань (коли  $p_d = 0,9$ ) і 64 вимірювань, коли  $p_d = 0,95$ , що значно перевищує встановлені 25 вимірювань.

Цей метод оцінки за допомогою  $\sigma$  і  $\sigma_0$  придатний для  $n > 30$ . Під час малих вибірок ( $n < 30$ ) використовують метод Стюдента. Тут довірчий інтервал:

$$\mu_{cm} = \sigma_0 \cdot \alpha_{ст}, \quad (6.11)$$

де  $\alpha_{ст}$  – коефіцієнт Стюдента (табл. 6.2). Знаючи  $\mu_{cm}$ , дійсне значення вимірювальної величини для малої вибірки дорівнює:

$$x_d = \bar{x} \pm \mu_{cm}. \quad (6.12)$$

За відомим  $n$  визначають довірчу імовірність  $p_d$  за умови, що похибка середнього значення вимірів не вийде за межі  $\pm \mu_{cm}$ .

Послідовність розв'язання така: визначають середнє значення  $\bar{x}$ ,  $\sigma_0$ ,  $\alpha_{ст} = \mu_{ст}/\sigma_0$ . Знаючи  $\alpha_{ст}$  і  $n$  з таблиці 3.2 визначають шукану довірчу імовірність  $p_0$ .

Таблиця 6.2 – Коефіцієнт Стюдента  $\alpha_{ст}$

$n$	$p_0$					
	0,80	0,90	0,95	0,99	0,995	0,999
2	3,080	6,31	12,71	63,70	127,30	637,20
3	1,886	2,92	4,30	9,92	14,10	31,60
4	1,638	2,35	3,188	5,94	7,50	12,94
5	1,533	2,13	2,77	4,60	5,60	8,61
6	1,436	2,02	2,57	4,03	4,77	6,86
7	1,440	1,94	2,45	3,71	4,32	9,96
8	1,415	1,90	2,36	3,50	4,03	5,40
9	1,397	1,86	2,31	3,36	3,83	5,04
10	1,383	1,83	2,26	3,25	3,69	4,78
12	1,363	1,80	2,20	3,11	3,50	4,49
14	1,350	1,77	2,16	3,01	3,37	4,22
16	1,341	1,75	2,13	2,96	3,29	4,07
18	1,333	1,74	2,11	2,90	3,22	3,96
20	1,328	1,73	2,09	2,86	3,17	3,88
30	1,316	1,70	2,04	2,75	3,20	3,65
40	1,306	1,68	2,02	2,70	3,12	3,55
50	1,298	1,68	2,01	2,68	3,09	3,50
60	1,290	1,67	2,00	2,66	3,06	3,46
$\infty$	1,282	1,64	1,96	2,58	2,81	3,29

**Приклад.** Проведено 18 вимірювань (табл. 6.3). Визначено:  $\sigma = 6,58$ ;

$\kappa_B = 8,91 \%$ . Для точності  $\Delta = 5 \%$  і  $3 \%$  за довірчої імовірності  $p_0 = 0,95$ ,  $\alpha_{CT} = 2,11$ . Тоді для  $\Delta = 5\%$ :  $N_{\min} = (8,91^2 \cdot 2,11^2) / 5^2 = 14$ , а для  $\Delta = 3 \%$ :  $N_{\min} = (8,91^2 \cdot 2,11^2) / 3^2 = 40$ .

*Висновок:* підвищення точності результатів потребує значного збільшення кількості вимірювань.

Таблиця 6.3 – Результати вимірювань та їх оброблення

$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
67	- 8	- 7,83	64
67	- 8	- 7,83	49
68	- 7	- 6,83	49
68	- 7	- 6,83	36
69	- 6	- 5,83	25
70	- 5	- 4,83	16
71	- 4	- 3,83	4
73	- 2	- 1,83	1
74	- 1	- 0,83	0
75	0	+0,17	1
76	+1	+1,17	4
77	+2	+2,17	9
78	+3	+3,17	16
79	+4	+4,17	25
80	+5	+5,17	36
81	+6	+6,17	49
82	+7	+7,17	289
92	+17	+17,27	
$\bar{x} = 74,83$	$\Sigma = - 3$	Перевірка -46,5 +46,5	$\Sigma = 737$



Під час оброблення даних експерименту виключають грубі помилки ряду, використовуючи правило **трьох сигм**: розкид випадкових величин від середнього значення не повинен перевищувати:  $x_{max}, x_{min} = \bar{x} \pm 3 \sigma$ .

### 6.3 Визначення достовірності результатів вимірів

**Приклад.** Міцність зразків до термооброблення:  $R_1 = \bar{R}_1 \pm \sigma_0 = 20 \pm 0,5 \text{ Н}$ , а після термообробки:  $R_2 = \bar{R}_2 \pm \sigma_0 = 23 \pm 0,6 \text{ Н}$ . Приріст міцності складає 15 %. Чи є це дійсний приріст міцності? Перевірку робимо за умовою:

$$\bar{x} / \sigma_1 \geq 3.$$

Перевіряємо різницю міцності:  $\bar{x} = R_1 - R_2 = 3 \text{ Н}$ . Помилка вимірювань:

$$\sigma_0 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \text{ тоді: } (R_1 - R_2) / \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = 3 / (0,25 + 0,36) = 3,84 > 3.$$

**Висновок:** приріст міцності є достовірним.

Методи на основі використання довірчого інтервалу більш ефективні. Якщо маємо статистичний ряд малої вибірки, що відповідає закону нормального розподілу, то критерії визначення грубих помилок визначають за формулами:

$$\beta_1 = (x_{max} - \bar{x}) / \sigma \sqrt{(n-1)/n}; \quad (6.13)$$

$$\beta_2 = (\bar{x} - x_{min}) / \sigma \sqrt{(n-1)/n}, \quad (6.14)$$

тут  $x_{max}, x_{min}$  – найбільша та найменша величина із  $n$  вимірювань.

Максимальні значення  $\beta_{max}$  залежно від довірчої імовірності  $p_0$ , що виникають унаслідок статистичного розкиду наведені в табл. 6.4. Якщо  $\beta_1 > \beta_{max}$ , то величину  $x_{max}$  виключають як грубу помилку. Якщо  $\beta_2 < \beta_{max}$  виключають величину  $x_{min}$ . Після виключення грубих помилок визначають нові значення  $\bar{x}$  і  $\sigma$  із  $(n-1)$  або  $(n-2)$  вимірювань.

Таблиця 6.4 – Критерій появи грубих помилок

$n$	$\beta_{\max}$ при $p_0$			$n$	$\beta_{\max}$ при $p_0$		
	0,90	0,95	0,99		0,90	0,95	0,99
3	1,41	1,41	1,41	15	2,33	2,49	2,80
4	1,64	1,69	1,72	16	2,35	2,52	2,84
5	1,79	1,87	1,96	17	2,38	2,55	2,87
6	1,89	2,00	2,13	18	2,40	2,58	2,90
7	1,97	2,09	2,26	19	2,43	2,60	2,93
8	2,04	2,17	2,37	20	2,45	2,62	2,96
9	2,10	2,24	2,46	25	2,54	2,72	3,07
10	2,15	2,29	2,54	30	2,61	2,79	3,16
11	2,19	2,34	2,61	35	2,67	2,85	3,22
12	2,23	2,39	2,66	40	2,72	2,90	3,28
13	2,26	2,43	2,71	45	2,76	2,95	3,33
14	2,30	2,46	2,76	50	2,80	2,99	3,37

У разі малої вибірки для встановлення грубих помилок використовують критерій Романовського. Задаючи довірчу імовірність  $p_0$ , згідно з таблицею 6.5, для відповідного  $n$  визначають коефіцієнт  $q$  і вираховують максимально припустиму абсолютну помилку окремого вимірювання:  $\varepsilon_{\max} = \sigma_q$ . Якщо  $x - x_{\max} > \varepsilon_{np}$ , то  $x_{\max}$  відкидають з ряду вимірювань.

Таблиця 6.5 – Коефіцієнт для визначення припустимої помилки вимірювання

$n$	Значення $q$ за $p_0$			
	0,95	0,98	0,99	0,995
2	15,56	38,97	77,96	779,7
3	4,97	8,04	11,46	36,5
4	3,56	5,08	6,58	14,46
5	3,04	4,10	5,04	9,43
6	2,78	3,64	4,36	7,41
7	2,62	3,36	3,96	6,37
8	2,51	3,18	3,71	5,73
9	2,43	3,05	3,54	5,31
10	2,37	2,96	3,41	5,01
12	2,29	2,83	3,23	4,62
14	2,24	2,74	3,12	4,37
16	2,20	2,68	3,04	4,20
18	2,17	2,64	3,00	4,07
20	2,15	2,60	2,93	3,98
	1,96	2,33	2,58	3,29

## 6.4 Методи визначення точності відносних вимірів

Важливим завданням теорії випадкових помилок є визначення помилок функції типу  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . При дослідженні функції одного змінного, граничні *абсолютні помилки*  $\varepsilon_{zp}$  і *відносні*  $\delta_{bid}$  розраховують таким чином:

$$\varepsilon_{zp} = \pm \varepsilon_x f'(x), \quad (6.15)$$

$$\delta_{bid} = \pm d \ln(x), \quad (6.16)$$

де  $f'(x)$  – похідна функції  $f(x)$ ;  $d \ln(x)$  – диференціал логарифма функції.

Якщо досліджується функція багатьох змінних, то:

$$\varepsilon_{zp} = \pm \sum_1^n \frac{df(x_1, x_2, \dots, x_n)}{dx_i} dx_i, \quad (6.17)$$

$$\delta_{bid} = \pm d \left| \ln(x_1, x_2, \dots, x_n) \right|, \% \quad (6.18)$$

Послідовність визначення помилок така: спочатку визначають абсолютні та відносні помилки аргументів (незалежних змінних), які зазвичай відомі:  $\varepsilon_{x1}, \varepsilon_{x2}, \dots, \varepsilon_{xn}$ . Потім визначають відносні помилки незалежних змінних:

$$\delta_{x1} = \varepsilon_{x1} / x_d; \quad \delta_{x2} = \varepsilon_{x2} / x_d, \dots, \delta_{xn} = \varepsilon_{xn} / x_d \quad (6.19)$$

Визначають часткові диференціали функції і згідно з формулою (6.17) визначають  $\varepsilon_{zp}$  у розмінностях функції  $f(y)$  і згідно (6.18) визначають  $\delta_{bid}$ .

Важливим завданням теорії вимірювань є встановлення **оптимальних умов** (границь) вимірювань, коли виконуються умови:  $\delta_{гр} = \delta_{грmin}$ . Методика розв'язання цієї задачі така. Під час дослідження функції з однією невідомою змінною беруть першу похідну по  $x$ , прирівнюють її до нуля і знаходять  $x_1$ .

Якщо друга похідна по  $x_1$  позитивна, то функція  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  у випадку:  $x = x_1$  – має мінімум.

За наявності декількох змінних – похідні беруть по всім  $x_1, x_2, \dots, x_n$  і в результаті мінімізації функцій встановлюють оптимальний інтервал вимірювань (інтервал напруг, сил струму, температур тощо) кожній функції, за якої відносна помилка вимірювань  $\delta_{xi}$  буде мінімальною.

## 6.5 Перевірка результатів вимірювань на відтворюваність

Відповідальні експерименти необхідно перевіряти на *відтворюваність* (повторюваність) результатів в певному діапазоні вимірювань із заданою довірчою імовірністю. Маємо кілька паралельних вимірювань (серій), і для кожної серії знаходимо середнє арифметичне  $\bar{x}_i$  ( $n$  – кількість вимірювань в одній серії, зазвичай – 3...4). Потім обчислюємо дисперсію  $D_i$  і розраховуємо критерій Кохрена:

$$k_{kp} = \max D_i / \sum_1^m D_i, \quad (6.20)$$

де  $\max D_i$  – найбільша величина дисперсій з паралельних серій  $m$ ;

$\sum_1^m D_i$  – сума дисперсій  $m$  серій (зазвичай  $2 \leq m \leq 4$ ).

Вимірювань вважають відтвореними за умови

$$k_{kp} \leq k_{km}, \quad (6.21)$$

де  $k_{km}$  – табличне значення критерію Кохрена, приймається залежно від довірчої імовірності  $p_d$  і числа степенів свободи  $q = n - 1$ . ( $m$  – кількість серій;  $n$  – кількість вимірювань у серії).

Таблиця 6.6 – Критерій Кохрена  $K_{\kappa m}$  за  $p_0 = 0,95$ 

$m$	$q = n - 1$									
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36
2	0,99	0,97	0,93	0,90	0,67	0,85	0,81	0,78	0,73	0,66
3	0,97	0,93	0,79	0,74	0,70	0,76	0,63	0,60	0,54	0,47
4	0,90	0,76	0,68	0,62	0,59	0,56	0,51	0,48	0,43	0,36
5	0,84	0,68	0,60	0,54	0,50	0,48	0,41	0,41	0,36	0,26
6	0,78	0,61	0,53	0,48	0,44	0,42	0,38	0,35	0,31	0,25
7	0,72	0,56	0,48	0,43	0,39	0,37	0,34	0,31	0,27	0,23
8	0,68	0,51	0,43	0,39	0,36	0,33	0,30	0,28	0,24	0,20
9	0,64	0,47	0,40	0,35	0,33	0,30	0,28	0,25	0,22	0,18
10	0,60	0,44	0,37	0,33	0,30	0,28	0,25	0,23	0,20	0,16
12	0,57	0,39	0,32	0,29	0,26	0,24	0,22	0,20	0,17	0,14
15	0,47	0,33	0,27	0,24	0,22	0,20	0,18	0,17	0,14	0,11
20	0,39	0,27	0,22	0,19	0,17	0,16	0,14	0,13	0,11	0,08
24	0,34	0,29	0,19	0,16	0,15	0,14	0,12	0,11	0,09	0,07
30	0,29	0,20	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,07	0,06
40	0,24	0,16	0,12	0,10	0,09	0,08	0,07	0,07	0,06	0,04
60	0,17	0,11	0,08	0,07	0,06	0,06	0,05	0,05	0,04	0,02
120	0,09	0,06	0,04	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01

Примітка:  $m$  – кількість паралельних серій дослідів;

$q$  – кількість степенів свободи;

$n$  – кількість вимірювань у серії.

**Приклад.** Проведено 3 серії вимірювань:

Серії	1	2	3	4	5	$\bar{x}_i$	$D_i$
1	7	9	6	8	4	6,8	2,96
2	9	7	8	6	5	7,0	2,0
3	8	8	7	9	8	8,0	0,4

Розраховуємо критерій Кохрена:  $k_{\kappa p} = \frac{2,96}{2,96 + 2,0 + 0,4} = 0,55$ .

Обчислимо число степенів свободи:  $q = n - 1 = 5 - 1 = 4$ . Для  $m = 3$  і  $q = 4$  за табл. (6.6) критерій Кохрена:  $k_{\kappa p} = 0,74$ . Оскільки  $0,55 < 0,74$ , то вимірювання є

відтвореними. У разі зворотного співвідношення варто збільшити кількість серій  $m$  або число вимірів  $n$ .

## 6.6 Оцінка похибки вимірювання

Під час визначення параметрів апроксимуючої залежності використовують метод найменших квадратів, який стає регресивним аналізом під час переходу до статистичних оцінок: оцінки дисперсії відтворюваності статистичних оцінок; (погрішності експерименту), оцінки адекватності й оцінки значущості коефіцієнтів. Оцінку похибки визначають за даними паралельних вимірювань.

Перевірка *нульової гіпотези* (коли дисперсії у всіх дослідах рівні між собою) здійснюється за допомогою  $F$ -критерія, шляхом порівняння найбільшої і найменшої дисперсій. Якщо різниця між ними мала, то мала і між іншими дисперсіями. Недолік методу – використання тільки екстремальних дисперсій. Більш досконала оцінка за допомогою критерію Кохрена – який визначається як відношення максимальної дисперсії до суми всіх дисперсій в  $N$  точках:

$$G = D_{y\max} \sum_{i=1}^N D_{yi}, \quad (6.22)$$

де 
$$D_{yi} = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \bar{y}_i)^2, \quad \bar{y}_i = 1/m \sum_{j=1}^m y_{ij},$$

$m$  – кількість паралельних вимірювань в  $i$ -том досліді,  $N$  – кількість дослідів.

Розраховане значення критерію Кохрена  $G$  за рівня значущості  $\alpha=0,05$  порівнюється з табличним  $G_T$  і якщо  $G < G_T$ , то гіпотеза про рівноточність правдива. Тоді середня квадратична похибка експерименту під час визначення середнього значення  $\bar{y}$ :

$$\sigma_y^2 = D_{y0} = \frac{1}{mN} \sum_{i=1}^N D_{yi}, \quad (6.23)$$

де  $m \cdot N$  – загальна кількість вимірів.

Так визначається критерій рівноточності  $G$ , здійснюється перевірка однорідності дисперсії  $D_{y_0}$  і розраховується похибка експерименту  $\overline{D_{y_0}}$ . Далі методом найменших квадратів визначають коефіцієнти апроксимуючого полінома.

З вираження  $F = D_{y_0} / \overline{D_{y_0}}$  оцінюють адекватність моделі за допомогою критерію Фішера  $F$ . Аналіз результатів експерименту завершується інтерпретацією моделі в термінах об'єкта дослідження.

**Приклад.** Об'єкт призначений для нанесення гальванопокриття з максимальною *міцністю* за мінімальним внутрішнім *напруженням*.

Визначити, як на цю *напруженість* (функція) впливають 3 фактори: густина струму ( $X_1$ ), температура ( $X_2$ ) і концентрація електроліту ( $X_3$ ).

Таблиця 6.7 – Результати розрахунку

Параметр	Густина струму $X_1, \text{ А/дм}^2$	Температура $X_2, ^\circ\text{C}$	Концентрація $X_3, \text{ кг/м}^3$
Основний рівень $\bar{X}_i$	55	45	0,7
Інтервал варіювання $I_i$	25	15	0,3
Верхній рівень $X_{i,\max}$	80	60	1,0
Нижній рівень $X_{i,\min}$	30	30	0,4

Аналіз відомостей про об'єкт свідчить про лінійність досліджуваних ефектів і парні взаємодії, тому модель об'єкта має вигляд:

$$Y = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 \quad (6.24)$$

Найбільш простим є ПФЕ типу  $2^3$  з  $N = 8$  і коефіцієнтами  $s = 8$  і  $m = 2$ . У табл. 6.8 наведені розрахункові середні значення і дисперсія відгуку в кожній точці дослідів.

Таблиця 6.8 – Результати розрахунку

Номер дослідів, $u$	Послідовність дослідів	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$Y_1$	$Y_2$	$\bar{Y}$	$D_Y$
1	8;13	+1	-1	-1	-1	3,40	3,75	3,75	0,245
2	11;15	+1	+1	-1	-1	-0,40	-0,60	-0,50	0,020
3	6;14	+1	-1	+1	-1	2,70	1,80	2,25	0,405
4	3;12	+1	+1	+1	-1	2,35	3,15	2,75	0,320
5	2;4	+1	-1	-1	+1	2,20	3,30	2,75	0,605
6	1;9	+1	+1	-1	+1	-0,84	-1,16	-1,00	0,051
7	5;7	+1	-1	+1	+1	0,60	0,90	0,75	0,045
8	10;16	+1	+1	+1	+1	0,60	0,40	0,50	0,020

За даними таблиці (6.8) згідно з (6.22) визначимо критерій Кохрена:

$$G = 0,605 / 1,711 = 0,35.$$

Табличне значення  $G_T$  за  $m - 1 = 1$  і  $N = 8$  дорівнює 0,68. Оскільки  $G = 0,35 < G_T = 0,68$ , то гіпотеза рівноточності не відкидається. Дисперсія

визначається за формулою:  $\sigma_{y_0}^2 = D_{y_0} = \frac{1}{mN} \sum_{i=1}^N D_{y_i}$ ;  $D_{y_0} = (1,711 / 2 \cdot 8) = 0,107$ .

Коефіцієнт регресії визначаємо з виразу:

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N Y_u \cdot x_{0u} = 1/8 (3,75 - 0,5 + 2,25 + 2,75 + 2,75 - 1,0 + 0,75 + 0,50) = 1,406.$$

Аналогічно:  $b_1 = -0,968$ ;  $b_2 = 0,156$ ;  $b_3 = -0,656$ ;  $b_{12} = 1,031$ ;  $b_{23} = -0,281$ .

Підставивши значення коефіцієнтів  $b$  в апроксимуючий поліном (6.24) одержимо:

$$Y = 1,406 - 0,968x_1 + 0,156x_2 - 0,656x_3 + 1,031x_1x_2 - 0,31x_1x_3 - 0,281x_2x_3.$$



За даними цієї залежності складають таблицю і обчислюють дисперсію

адекватності:  $D_{ya} = \frac{1}{N-s} \sum_{u=1}^N \Delta \cdot Y_u^2 = 0,195/(8-7) = 0,195.$

Перевірка гіпотези адекватності за критерієм Фішера:

$$F = 0,195 / 0,107 = 1,82.$$

Оскільки число степенів свободи  $N - s = 8 - 7 = 1$  і  $N(m - 1) = 8(2 - 1) = 8$ , то згідно з табл. 3.1 (Фішера)  $F_T = 5,32 > F = 1,82$ . Тобто адекватність вибраної моделі підтверджується.

## 7 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

### 7.1 Сутність задач оптимізації

Задача оптимізації досліджуваних процесів виникає під час теоретичних досліджень і полягає у визначенні екстремуму деякої функції  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  у діапазоні значень параметрів  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Для спрощення процедури використовують *метод Гауса-Зейделя (градієнтного спуску або підйому)* суть якого полягає в необхідності знайти екстремум цільової функції  $f(x_1, x_2, \dots)$ , яка описує поверхню (рис.7.1).

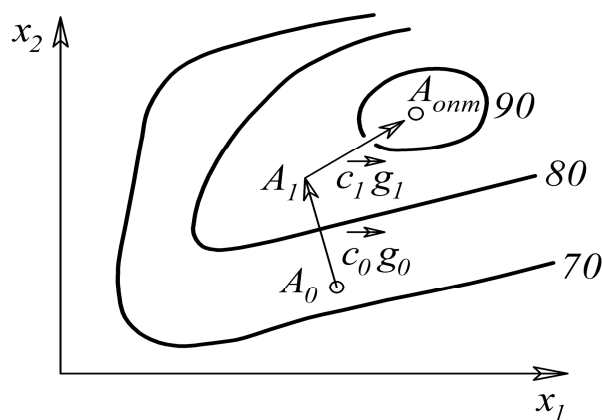


Рисунок 7.1 – Схема руху до оптимуму за градієнтом (круте сходження)

Вибираємо будь-яку точку поверхні  $A_o(x_{o1}, x_{o2})$ , потім визначаємо найбільш крутий напрямок підйому або спуску (градієнт) і позначаємо  $\vec{q}$ . За напрямком градієнта рухаємося із кроком  $c\vec{q}$  до оптимуму ( $c = \text{const.}$ ).

В результаті досягаємо нової точки  $A_1(x_{11}, x_{22})$ , у якій повторюємо цю процедуру до моменту визначення точки з дійсним екстремумом ( $A_{opt}$ ).

Такі задачі спрямовані на знаходження значень факторів, за яких відгук досягає екстремуму ( $\max$  або  $\min$ ).

**Перший** метод розв'язання полягає в створенні математичної моделі і знаходження екстремуму; лінійного, нелінійного або динамічного програмування; принципу максимуму та ін.

**Другий** метод використовує дані експерименту і моделей довільного виду на основі даних експерименту з використанням різних методів оптимізації: Гауса-Зейделя, градієнта та ін.

## 7.2 Метод Гауса-Зейделя

**Метод Гауса-Зейделя** (покоординатного сходження) полягає в послідовному просуванні до екстремуму по черговим варіюванням кожного фактора доти, поки буде досягнутий екстремум.

Процес реалізації двохфакторного експерименту представлена (рис.7.2) лініями рівних значень відгуку  $Y_j = \text{const.}$  Рух, паралельний осям координат (крива 1), відбувається доти, поки не буде досягнутий частковий екстремум, у якому  $dY / dX_i = 0$ . Ця умова виконується в точці торкання прямої, паралельної осі координат, з однієї з ліній рівних значень відгуку.

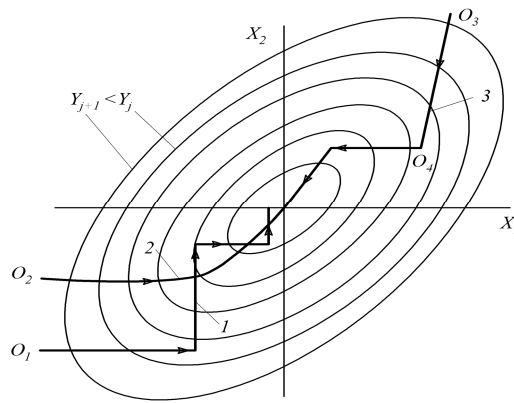


Рисунок 7.2 – Находження екстремуму функції відгуку від двох факторів

Недолік цього методу – відносна тривалість процесу пошуку екстремуму.

### 7.3 Метод градієнта

**Метод градієнта** відрізняється тим, що рух до екстремуму (крива 2) йде в напрямку вектору градієнта

$$\text{grad } Y = i_1(dY/dX_1) + i_2(dY/dX_2 + \dots + I_h(dY/dX_h), \quad (7.3)$$

де  $i$  – одиничні вектори в  $h$  – мірному просторі.

У точці екстремуму  $(X_{1m}, X_{2m})$  значення  $\text{grad } Y = 0$  і рух припиняється. Недолік методу - необхідність безперервного знаходження градієнта.

**Метод крутого сходження** полягає у тому, що напрямок вектора градієнта  $L$ , знайденого в початковій точці стану об'єкта, визначає напрямок руху у факторному просторі доти, поки частинна похідна  $dY/dL$  у цьому напрямку не обернеться в нуль. Тут не потрібно весь час визначати величину і напрямок градієнта функції.

## 8 ІМОВІРНОСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

### 8.1 Визначення закону розподілу за даними експерименту

Під час дослідження стохастичних процесів основним завданням є визначення *закону розподілу* випадкових величин це будь-яке правило, що дає змогу знайти імовірність  $p$  можливих випадків, пов'язаних із цією величиною. Методами математичної статистики, яка проводить оброблення і аналіз емпіричних подій, доведено, що імовірність появи випадкової величини підлягає певній закономірності. Для таких статистичних законів теорія ймовірностей дає змогу визначити середній результат випадкових подій тим точніше, чим більше числа аналізованих подій. Ці дві науки складають єдину математичну теорію масових випадкових процесів.

Математична статистика оперує поняттям *частоти події*  $\bar{y}(x)$ , яка дорівнює відношенню кількості випадків  $n(x)$ , коли відбулась ця подія, до загальної кількості подій  $n$ :

$$\bar{y}(x) = n(x) / n. \quad (8.1)$$

У разі зростання кількості подій частота  $\bar{y}(x)$  *прямує до імовірності*  $p(x)$ . Частота появи  $y_{oi}$  – це ряд розподілу (рис 8.1), а плавна крива – закон (функція) розподілу  $F(x)$ .

Імовірність  $p(x)$  події  $x$  – це відношення кількості випадків  $N(x)$ , які призводять до появи події  $x$ , до загального числа можливих випадків  $N$ :

$$p(x) = N(x) / N. \quad (8.2)$$

Імовірність випадкової величини (події)  $x$  – кількісна оцінка можливості її появи. Достовірна подія має імовірність  $p = 1$ . Для випадкової події  $0 \leq p(x) \leq 1$ , а сума ймовірностей усіх можливих значень:

$$\sum_0^n p_i = 1. \quad (8.3)$$

## 8.2 Основні характеристики функції розподілу

Необхідно мати характеристики функції розподілу: *середньоарифметичне і математичне очікування, дисперсію, розмах ряду розподілу*. Якщо серед  $n$  подій випадкова величина  $x_i$  повторяться  $n_i$  раз, величина  $x_2 - n_2$  раз і т.д., то середньоарифметичне значення  $x$  дорівнює:

$$\bar{x} = \sum_1^n (x_i n_i) / n. \quad (8.4)$$

Розмах можна використовувати для оцінки *варіації* ряду подій  $R$

$$R = x_{max} - x_{min}, \quad (8.5)$$

тут  $x_{max}$ ,  $x_{min}$  – значення обмірюваної величини або погрешності.

Замінивши замість емпіричних частот  $y_1, \dots, y_n$  їхніми ймовірностями  $p_1, \dots, p_n$ , одержимо важливу характеристику розподілу – *математичне очікування*:

$$m(x) = \sum_1^n x_i p_i. \quad (8.6)$$

**Приклад.** Маємо 5 вимірювань однієї вибірки:  $x_1=1$ ;  $x_2=2$ ;  $x_3=3$ ;  $x_4=4$ ;  $x_5=5$  з ймовірностями  $p_1=0,1$ ;  $p_2=0,15$ ;  $p_3=0,45$ ;  $p_4=0,3$ ;  $p_5=0$ .

Тоді середня величина  $x = 15 / 5 = 3$ , а математичне очікування відповідності

$$m(x) = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,45 + 4 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0 = 2,95.$$

Для випадкових безперервних величин математичне очікування дорівнює:

$$m(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx, \quad (8.7)$$

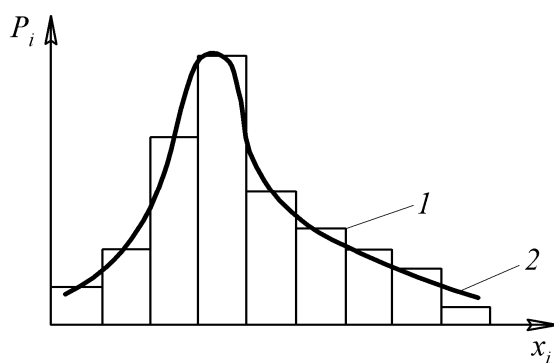


Рисунок 8.1 – Розподіл випадкових величин:

1 – гістограма 2 – крива розподілу

Якщо систематичні погрішності вимірювань повністю виключені, то дійсне значення вимірюваної величини дорівнює математичному очікуванню, а відповідну йому абсцису називають *центром розподілу*. Однакову площу під кривою розподілу можна описати різними кривими це означає, що вони можуть мати різне *розсіювання*. Мірою розсіювання (точності вимірювання) є *дисперсія* або *середньоквадратичне відхилення*.

Отже, дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини стосовно математичного очікування і визначається таким чином:

$$D(x) = \sum_1^n (x_i - m(x))^2 \cdot p_i, \quad (8.8)$$

тоді:  $D(x) = (1 - 2,95)^2 \cdot 0,1 + (2 - 2,95)^2 \cdot 0,15 + (3 - 2,95)^2 \cdot 0,45 + (4 - 2,95)^2 \cdot 0,3 + (5 - 2,95)^2 \cdot 0 = 0,83.$

Важливою характеристикою кривої розподілу є *середньоквадратичне відхилення*:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}. \quad (8.9)$$

*Коефіцієнт варіації*

$$k_g = \sigma / m(x) \quad (8.10)$$

визначається у відносних одиницях ( $k_g < 1$ ) і використовується для порівняння інтенсивності розсіювання в різних сукупностях.

Основним завданням статистики є підбор теоретичних кривих за наявним емпіричним законом розподілу. Якщо при  $n$  вимірювань випадкової величини отриманий ряд її значень:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , то під час обробки таких рядів їх групують в інтервали і встановлюють для кожного частоти появи:  $y_i$  і  $y_{oi}$ . Потім за значеннями  $x_i$  і  $y_{oi}$  будують східчасту гістограму частот і обчислюють характеристики емпіричної кривої розподілу.

Основними характеристиками емпіричного розподілу такі:

- *середньоарифметичне значення*

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n; \quad (8.11)$$

- *дисперсія*:

$$D = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n; \quad (8.12)$$

- *середньоквадратичне відхилення*:  $\sigma = \sqrt{D}$ .

Значення цих величин відповідають величинам  $\bar{x}$ ,  $D(x)$  і  $\sigma(x)$  теоретичного розподілу.

### 8.3 Закон нормального розподілу. Розподіл Пуассона

Найбільше часто використовують **закон нормального розподілу** (закон Гауса), що найчастіше зустрічається в практиці. Головна його особливість полягає в тому, що він є *граничним* законом, до якого зводяться інші закони в більшості реальних ситуацій. Він характеризується *щільністю* імовірності наступного виду

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[ -\frac{[x - m(x)]^2}{2\sigma^2} \right] \quad (8.13)$$

За  $m(x) \neq 0$  це рівняння відповідає функції нормального розподілу.

Тут максимальна ордината кривої рівна  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  і відповідає точці  $x = m$ . Під час видалення від точки  $m$  щільність розподілу падає і за  $x > \pm$  крива розподілу наближається до осі абсцис. Параметр  $m$  – математичне очікування,  $\sigma = \sqrt{D}$  середнє квадратичне відхилення величини  $x$  (рис. 8.2).

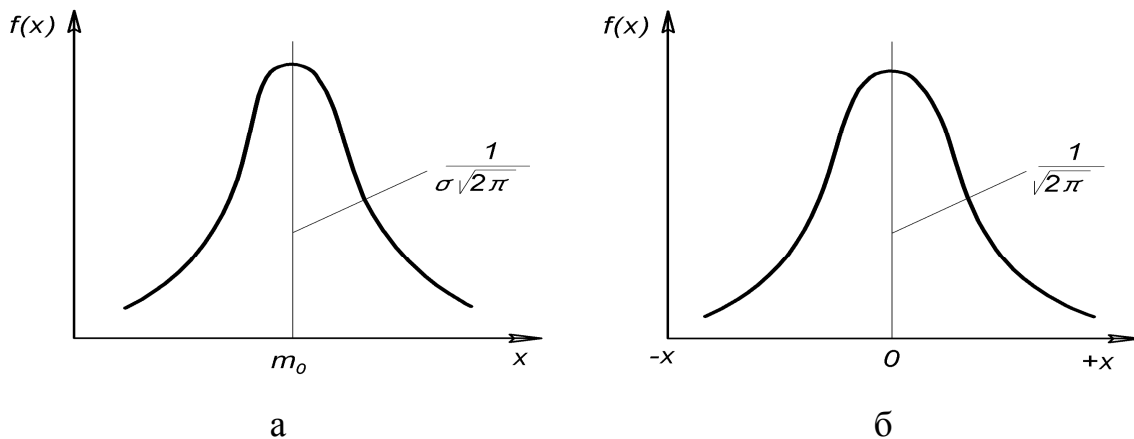


Рисунок 8.2 – Крива нормального розподілу:

а –  $m(x) \neq 0$ ; б –  $m(x) = 0$ .

Якщо пересунути вісь ординат в точку  $m$ :  $m(x) = 0$  і прийняти  $\sigma^2 = 1$ , то закон нормального розподілу описується формулою



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (8.14)$$

Оцінка розсіювання здійснюється за величиною  $\sigma$  – чим вона більша, тим більше розсіювання, а максимум кривої розподілу  $(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})$  зменшується.

Отже величину  $y = \frac{1}{\sqrt{2\sigma\pi}}$  за  $\sigma = 1$ , або  $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  називають *мірою точності*.

Чим менша  $\sigma$ , тим більша збіжність результатів експерименту. Імовірність того, що випадкові події не вийдуть із діапазону відхилення  $+\sigma - \sigma$ , становить 0,683.

Для діапазону  $\pm t\sigma$  імовірність влучення події  $x_i$  обчислюють згідно з розподілом Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{2}{2\pi} \int_0^x e^{-x_i^2} dx \quad (8.15)$$

Під час аналізу рідких випадкових дискретних процесів використовують *розподіл Пуассона*. Імовірність появи кількості подій  $x = 1, 2, 3, \dots$  в одиницю часу дорівнює:

$$p(x) = \frac{m^x}{x!} e^{-m} = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}, \quad (8.16)$$

де  $x$  – кількість подій за цей відрізок часу  $t$ ;

$\lambda$  – щільність (середня кількість подій за одиницю часу);

$\lambda \cdot t$  – кількість подій за час  $t$ ;  $\lambda \cdot t = m$ .

Для закону Пуассона дисперсія дорівнює математичному очікуванню числа настання подій за час  $t$ , тобто  $\sigma^2 = m$ .

**Приклад.** За 5 хвилин під навантаження подається 6 машин. Яка імовірність  $p(x)$  надходження за 5 хв. 10 машин? Тут:  $x = 10$ ,  $\lambda \cdot t = 6$ ; тоді  $p(x) = (\sigma^{10} e^{-6}) / 10! = 0,041$ . Отже, імовірність дуже мала.

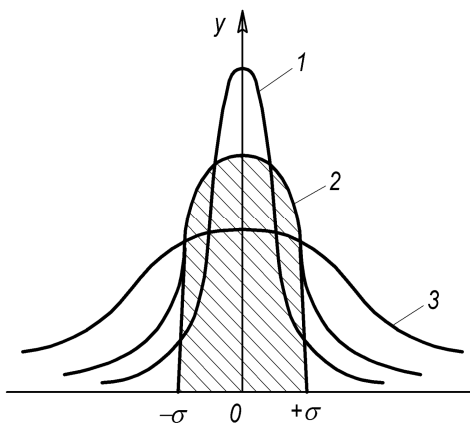


Рисунок 8.3—Розсіювання кривій нормального розподілу: 1 –  $\sigma = 0,5$ ; 2 –  $\sigma = 1$ ; 3 –  $\sigma = 2$ .

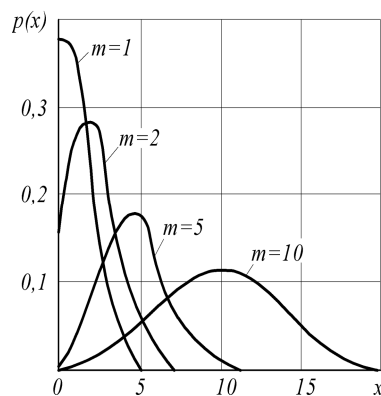


Рисунок 8.4 – Криві розподілу Пуассона.

#### 8.4 Показовий закон розподілу

Показовий закон використовують для дослідження тривалих процесів (часу відмови приладів, тривалості роботи устаткування та ін.) щільність імовірності якого виражається залежністю (рис. 8.5, а):

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}. \quad (8.17)$$

Тут щільність  $\lambda$  є величиною зворотною математичному очікуванню:

$$\lambda = 1/m(x), \text{ а } \sigma^2 = [m(x)]^2. \quad (8.18)$$

У різних сферах досліджень використовують закон розподілу Вейбулла (рис. 8.5)

$$f(x) = n \cdot \mu^n \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\mu^n x^n}, \quad (8.19)$$

де  $n, \mu$  – параметри закону,  $x$  – аргумент (зазвичай час).

Так, інтенсивність електричного старіння ізоляції залежить від факторів, що не підлягають контролю, зокрема числі кількості, розмірам та розташуванню мікронерівностей. Отже термін служби ізоляції  $t$  є випадковою величиною, яку описують виразом:

$$F(t) = 1 - \exp [-(t / b)^c], \quad (8.20)$$

де  $b$  – параметр масштабу, що дорівнює строку служби за ймовірності відмов 0,63; він пропорційний середньому значенню  $\bar{t}$  (математичному очікуванню)  $b = k_s \bar{t}$ ; ( $k_s$  залежить від параметра  $c$ : за  $c = 10 \div 15$  кВ;  $k_s = 1,03 \div 1,05$ );  $c$  – параметр форми, що залежить від стандарту розподілу. Тоді:

$$F(t) = 1 - \exp[-(\frac{t \cdot U^n}{A \cdot k_s})^c]. \quad (8.21)$$

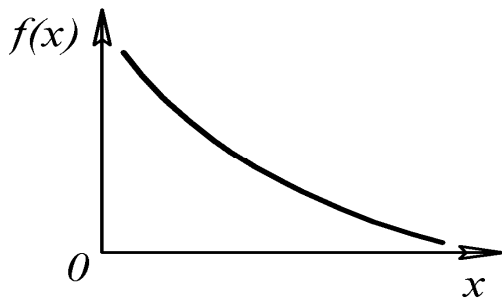
Цей вираз використовують під час статистичного аналізу експериментальних даних про термін служби.

### 8.5 Закон $\gamma$ – розподілу

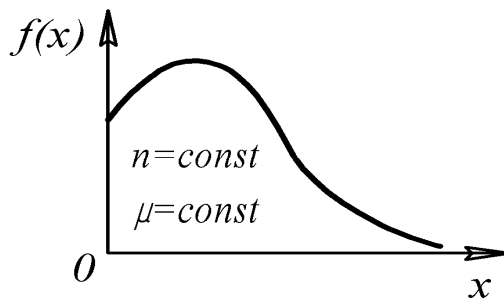
Закон  $\gamma$  – розподілу використовують для дослідження процесів поступового старіння, зниження параметрів і властивостей об’єктів у часі.

$$f(x) = (\lambda^\alpha / \alpha!) \cdot x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad (8.22)$$

де  $\lambda, \alpha$ , – параметри. Якщо  $\alpha = 1$ ,  $\gamma$  – функція перетворюється в показову.



а



б

Рисунок 8.5 – Криві розподілу: а – показова; б – Вейбулла

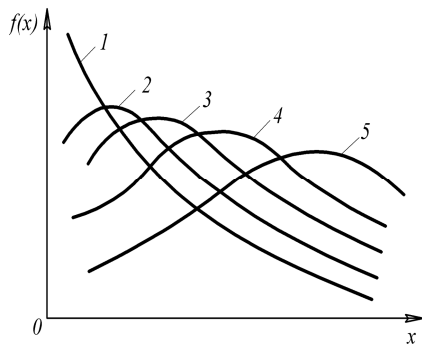


Рисунок 8.6 – Криві  $\gamma$  – розподілу: 1–  $\alpha=1$ ;  $\lambda=1$ ; 2–  $\alpha=3$ ;  $\lambda=1$ ; 3–  $\alpha=4$ ;  $\lambda=1,5$ ; 4–  $\alpha=5$ ;  $\lambda=2$ ; 5–  $\alpha=6$ .

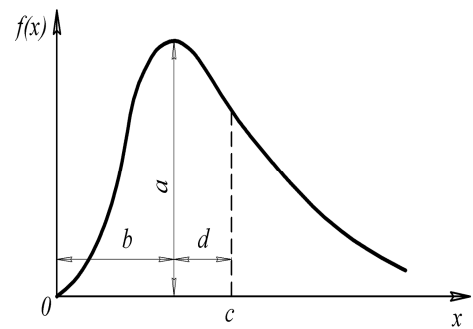


Рисунок 8.7 – Крива розподілу Пірсона

При дослідженні процесів встановлення розрахункових характеристик матеріалів, використовують закон розподілу Пірсона:

$$f(x) = a \cdot e^{dx} \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{db}, \quad (8.23)$$

де  $a$  – максимальна ордината;

$d$ ,  $b$  – відстані від максимальної ординати до центра розподілу  $c$  і початку координат  $0$ .

## 9 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ СИСТЕМ

### 9.1 Показники надійності системи

Надійність роботи системи залежить від надійності її елементів. У процесі роботи відбуваються відмови елементів. Момент часу, коли відбулась відмова або кількість відмов за певний час роботи, є випадковою величиною. Статистичне дослідження даних про відмови дає змогу визначити *показники надійності*.

**Інтенсивність відмов  $\lambda$**  – це імовірність того, що елемент системи функціонував до моменту часу  $t$ , відмовить у відрізку  $t + \Delta t$  за умови, що  $\Delta t$  мале. Визначається як відношення кількості елементів  $n(t, \Delta t)$ , які відмовили саме в інтервалі  $(t, t + \Delta t)$ , до кількості  $N(t)$  елементів, справних до моменту  $t$ :

$$\lambda(t) = \frac{n(t, \Delta t)}{N(t) \Delta t} . \quad (9.1)$$

**Імовірність безвідмовної роботи  $R(t)$**  – це імовірність того, що час безвідмовної роботи буде більший за  $t$ . Визначається як відношення кількості елементів  $N(t)$ , що безвідмовно працювали до моменту  $t$ , до загальної кількості елементів  $N(0)$ :

$$R(t) = \frac{N(t)}{N(0)} \quad (9.2)$$

**Імовірність відмови  $F(t)$**  – це імовірність того, що відмова відбулась до моменту  $t$ . Визначається відношенням елементів  $n(t)$ , які відмовили до моменту  $t$ , до початкової кількості елементів  $N(0)$ :

$$F(t) = \frac{n(t)}{N(0)} . \quad (9.3)$$

**Щільність імовірності відмови  $f(t)$**  – це похідна від імовірності відмови і означає імовірність того, що відмова елемента відбувається за одиницю часу  $(t, t+\Delta t)$ . Визначається як відношення кількості елементів  $n(t, \Delta t)$ , які відмовили за інтервал часу  $\Delta t$  до початкової кількості елементів:

$$f(t) = \frac{n(t, \Delta t)}{N(0)\Delta t}. \quad (9.4)$$

**Середній час безвідмовної роботи** – середнє арифметичне часу роботи до відмови кожного з сукупності однотипних елементів.

Математичним апаратом для визначення показників надійності є математична статистика і теорія імовірності.

## 9.2 Основні теореми теорії надійності

**Теорема додавання ймовірностей.** Імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \quad (9.5)$$

**Сума ймовірностей протилежних подій** дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (9.6)$$

**Теорема добутку:** імовірність добутку двох *неспільних* подій дорівнює добутку імовірності однієї з їх на умовну імовірність іншої, обчислену за умову, що перша відбулася:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(A / B), \quad (9.7)$$

де  $P(A / B)$  – умовна імовірність події  $A$  (це імовірність події  $A$ , визначена за умови, що відбулась інша подія  $B$ ). Ймовірність події  $A$ , яка визначена за умови, що відбулась подія  $B$ , називається **умовною імовірністю** події  $A$  і позначається  $P(A / B)$ .

Подія  $A$  є *незалежною* від події  $B$ , якщо імовірність події  $A$  не залежить від того, чи відбулась подія  $B$ , чи ні.

Подія  $A$  є *залежною* від події  $B$ , якщо ймовірність події  $A$  змінюється в залежності від того, відбулась подія  $B$ , чи ні.

Ймовірність події  $A$ , визначена за умови, що відбулась подія  $B$ , зветься умовною імовірністю події  $A$  і визначається:  $P(A / B)$ .

### 9.3 Приклади рішення задач надійності систем

**Задача 1.** У лотереї 1000 білетів. Один – на 500 грн., 10 білетів – по 100 грн., 50 білетів – по 20 грн. і 100 білетів – по 5 грн. Визначити імовірність виграти не менше 20 грн.

*Розв'язання.*  $A$  – імовірність виграти не менш 20 грн.

$A_1$  – виграти 20 грн;

$A_2$  – виграти 100 грн; тоді:  $A = A_1 + A_2 + A_3$

$A_3$  – виграти 500 грн;

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0,05 + 0,01 + 0,001 = 0,061.$$

**Задача 2.** В електричний ланцюг увімкнено послідовно три блоки. У разі відмови одного з них ланцюг втрачає працездатність. Визначити цю імовірність, якщо імовірність виходу з ладу першого – 0,01, другого – 0,008, третього – 0,025.

*Розв'язання.*  $A$  – вихід з ладу електричного ланцюга.

$A_1, A_2, A_3$  – вихід з ладу відповідних блоків.

$$\text{Тоді: } A = A_1 + A_2 + A_3.$$

$$P(A) = P(A1) + P(A2) + P(A3) = 0,01 + 0,008 + 0,025 = 0,043$$

**Задача 3.** Мішень має три зони: 1, 2 і 3. Імовірність влучення в першу зону – 0,15, у другу – 0,23, у третю – 0,17. Знайти імовірність промаху.

*Розв'язання.*  $A$  – промах,  $\bar{A}$  – влучення.

$$\text{Тоді: } \bar{A} = \bar{A}1 + \bar{A}2 + \bar{A}3$$

$$P(\bar{A}) = 0,15 + 0,23 + 0,17 = 0,55,$$

$$\text{звідки: } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0,45.$$

Теорема додавання ймовірностей для спільних подій  $A$  і  $B$  визначається за формулою

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (9.8)$$

Це витікає з геометричної інтерпретації, якщо дві зони ймовірностей  $A$  і  $B$  частково перекриваються, утворюючи сумісну зону  $AB$ .

Аналогічно імовірність суми 3-х сумісних подій визначається так:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \quad (9.9)$$

Аналогічно для добутку подій:

$$P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A+B). \quad (9.10)$$

$$P(ABC) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A+B) - P(A+C) - P(B+C) + P(A+B+C).$$

**Задача 4.** Пристрій містить три агрегати: два – першого типу  $A1$ ,  $A2$  і один агрегат іншого типу –  $B$ . Агрегати  $A1$ ,  $A2$  дублюючі, а агрегат  $B$  – не



дубльований. Відмова пристрою буде за відмови одночасно  $A1$ ,  $A2$  і  $B$ . Відмова пристрою – подія  $C$  буде:

$$P(C) = A1 \cdot A2 + B, \quad (9.11)$$

де  $A1$  – відмова агрегату  $A1$ ,  $A2$  – відмова агрегату  $A2$ ,  $B$  – відмова агрегату  $B$ . Необхідно висловити імовірність випадку  $C$  через імовірність випадків, що містять лише суми, а не добутки елементарних подій  $A$ ,  $A2$  і  $B$ .

$$\text{Розв'язання. } P(C) = P(A1A2) + P(B) - P(A1A2B)$$

$$P(A1A2) = P(A1) + P(A2) - P(A1+A2)$$

$$P(A1A2B) = P(A1) + P(A2) + P(B) - P(A1+A2)P(A1+B) - P(A2+B) + (A1+A2+B).$$

Підставляючи ці вирази у формулу (9.11) отримаємо:

$$P(C) = P(A1 + B) = P(A2 + B) - P(A1 + A2 + B) \quad (9.12)$$

#### 9.4 Приклади задач на добутки

**Задача 1.** Відбувається дуель між двома об'єктами  $A$  і  $B$ .  $A$  робить два постріли, а  $B$  – один.  $A$  робить постріл і уражає  $B$  з імовірністю 0,2. Якщо  $B$  не уражений, він робить постріл з імовірністю ураження 0,3. Якщо  $A$  не уражений, він робить наступний постріл із імовірністю 0,4. Знайти імовірність ураження  $A$  і  $B$ .

*Розв'язання.*  $A$  – ураження об'єкта  $A$ .

$B$  – ураження об'єкта  $B$ .

Для виконання події  $A$  необхідно суміщення (добуток) двох подій: 1)  $A$  не уразив  $B$  першим пострілом; 2)  $B$  уразив  $A$  пострілом у відповідь:

$$P(A) = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24.$$

Подія  $B$  складається з двох *несумісних* варіантів:  $B = B1 + B2$ , де  $B1$  – ураження об'єкта  $B$  першим пострілом  $A$ ,  $B2$  – враження об'єкта  $B$  іншим пострілом  $A$ . За теоремою складання ймовірностей:

$$P(B) = P(B1) + P(B2).$$

Згідно з умови  $P(B1) = 0,2$ . Щодо події  $B2$ , то вона складається з суміщення (добутку) трьох подій:

1. Першій постріл  $A$  не уразив  $B$ .
2. Постріл у відповідь  $B$  не повинен уразити  $A$ .
3. Останній (другий) постріл  $A$  не повинен уразити  $B$ .

За теоремою множення ймовірностей:  $P(B2) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,4 = 0,224$ , звідки:  $P(B) = 0,2 + 0,224 = 0,424$ .

**Задача 2.** Об'єкт складається з трьох елементів. Для його знищення достатньо одного улучення в перший елемент, двох улучень у другий і трьох – у третій. Імовірність улучення в той, чи інший елемент пропорційна площі цих елементів, які дорівнюють відповідно: 0,1, 0,2, 0,7 площі об'єкта. Об'єкт двічі уражений. Визначити імовірність знищення об'єкта.

*Розв'язання.*  $A$  – знищення об'єкта;  $P(A/2)$  – умовна імовірність знищення об'єкта за умови подвійного ураження. Ці два ураження можуть знищити об'єкт двома способами: якщо хоч один снаряд уразив перший елемент або обидва уразили другий елемент. Оскільки ці варіанти несумісні (в об'єкт потрапило 2 снаряди), то можна застосувати *теорему додавання*. Імовірність улучення в перший елемент визначаємо через імовірність протилежної події (жодного влучення з двох пострілів не буде), що дорівнює:  $1 - 0,92^2$ . Імовірність того, що відбудуться обидва влучення в другий елемент:  $0,2^2$ . Тоді:  $P(A/2) = 1 - 0,9^2 + 0,2^2 = 0,23$ .

**Задача 3.** Знайти імовірність знищення цього об'єкта, якщо в нього тричі улучено.

*Розв'язання.* Здійснюємо протилежну подію – не знищення об'єкта рf трьох улученнях. Це може бути тільки за двох улучень у третій елемент, а одного улучення – у другий. Таких комбінацій – три ( $3_3^2 = 3$ ),

тоді:  $P(\bar{A} / 3) = 3 \cdot 0,7^2 \cdot 0,2 = 0,294$ , звідки  $P(A/3) = 1 - 0,294 = 0,706$ .

**Задача 4.** Монета підкидається 6 разів. Знайти імовірність  $A$  того, що гербів буде більше, ніж цифр.

*Розв'язання.* Перелічимо усі можливі варіанти  $A$ :

$A_1$  – випадє 6 гербів і жодної цифри;

$A_2$  – випадє 5 гербів і 1 цифра;

$A_3$  – випадє 4 герби й 2 цифри і т.д.

Після цього складаємо усі ймовірності.

*Інше розв'язання:*

$A$  – випадє більше гербів;

$B$  – випадє більше цифр;

$C$  – випадє однакове кількість гербів і цифр.

Оскільки події  $A, B, C$  несумісні і утворюють повну групу, то

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1.$$

Ураховуючи, що  $P(A)=P(B)$ , то:  $2P(A) + P(C) = 1$ , тоді:  $P(A) = \frac{1 - P(C)}{2}$ .

Знайдемо імовірність події  $C$ . Вона дорівнює  $(1/6)^6$ . Кількість таких комбінацій дорівнює  $C_6^3 = 20$  (кількість способів, якими з шести спроб вибрати

3, коли буде герб). Отже:  $P(C) = \frac{20}{64} = 5/16$ , звідки:

$$P(A) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{5}{16} \right) = \frac{11}{32}.$$

Формула повної імовірності є наслідком обох теорем: добутку і додавання. Якщо необхідно визначити імовірність події  $A$ , яка може відбутись разом із однією із подій:  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , що утворюють повну групу *несумісних* подій, які звуть *гіпотезами*.

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i) \quad (9.13)$$

Оскільки гіпотези  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , утворюють повну групу, то подія  $A$  може

з'явитись лише в комбінації з будь-якою з цих гіпотез:

$$A = H_1A + H_2A + \dots + H_nA. \quad (9.14)$$

Оскільки гіпотези  $H_1, H_2, \dots, H_n$  несумісні, то і комбінації  $H_1A, H_2A \dots H_nA$  – теж несумісні. Використаємо теорему додавання:

$$P(A) = P(H_1A) + P(H_2A) + \dots + P(H_nA) = \sum_{i=1}^n P(H_iA). \quad (9.15)$$

Якщо застосуємо до події  $H_iA$  теорему добутку, то отримаємо:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i) \quad (9.16)$$

**Задача 5.** Маємо три урни: у першій – 2 білих і 1 чорна куля; у другій – 3 білих і 1 чорна куля; у третій – 2 білих і 2 чорних кулі. Знайти імовірність  $A$  витягти білу кулю.

*Розв'язання.* Розглянемо три гіпотези:  $H_1$  – вибір першої урни,

$H_2$  – вибір другої урни,

$H_3$  – вибір третьої урни.

Оскільки гіпотези за умовами рівноможливі, то:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3.$$

Умовні імовірності події  $A$  при цих гіпотезах дорівнюють:

$$P(A/H_1) = 2/3; \quad P(A/H_2) = 3/4; \quad P(A/H_3) = 1/2.$$

За формулою повної імовірності:

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{36}.$$

**Задача 6.** По об'єкту тричі стріляють. Імовірність улучення за першого пострілу – 0,4, за другого – 0,5, за третього – 0,7. Для виходу з ладу об'єкта достатньо трьох улучень; при одному улученні об'єкт виходить з ладу з

імовірністю 0,2; за двох улучень – з імовірністю 0,6. Знайти імовірність виходу з ладу об'єкта з трьох пострілів.

*Розв'язання.* Розглянемо чотири гіпотези:  $H_0$  – в об'єкт не влучено

$H_1$  – улучив один постріл

$H_2$  – улучено два постріли

$H_3$  – улучено три постріли.

Знайдемо імовірність цих гіпотез:  $P(H_0) = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,09$ ;

$$P(H_1) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,36$$

$$P(H_2) = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,3 = 0,41$$

$$P(H_3) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,7 = 0,14.$$

Умовні імовірності випадку  $A$  (вихід з ладу) за цих гіпотез:

$$P(A | H_0) = 0; \quad P(A | H_1) = 0,2; \quad P(A | H_2) = 0,6; \quad P(A | H_3) = 1,0.$$

Застосуємо формулу повної імовірності:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_0) \cdot P(A | H_0) + P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) + P(H_3) \cdot P(A | H_3) = \\ &= 0,36 \cdot 0,2 + 0,41 \cdot 0,6 + 0,14 \cdot 1,0 = 0,458. \end{aligned}$$

## 9.5 Теорема гіпотез

Теорема гіпотез (формула Бейеса) є наслідком теореми множення і формули повної імовірності.

Є повна група *неспільних* гіпотез  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , імовірності яких відомі:  $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ . Відбулася деяка подія  $A$ . Як треба змінити імовірності гіпотез у зв'язку з цією подією? Необхідно знайти умовну імовірність  $P(H_i | A)$  для кожної гіпотези.

З теореми множення:  $P(AH_i) = P(A) \cdot P(H_i | A) = P(H_i) \cdot P(A | H_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), звідки:

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i)P(A | H_i)}{P(A)} \quad (9.17)$$

використаємо формулу повної ймовірності:  $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i)$

(імовірність події  $A$  визначається сумою множень імовірності кожної гіпотези на імовірність події за цієї гіпотези). Отримаємо остаточний вираз формули Бейеса:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)} . \quad (9.18)$$

**Задача 1.** На підстанції режим роботи трансформатора (Тр) контролюється двома приладами. Тр працює у двох режимах – номінальному  $P1$  або перенапруженому  $P2$ . Експериментально встановлено, що в режимі  $P1$  він знаходиться 30 % годин, а в режимі  $P2$  – 70 %. Прилад П1 помиляється в 2 % випадків, а прилад П2 – у 8 %. У деякий момент часу П1 фіксує режим  $P1$ , а П2 – режим  $P2$ .

Визначити, у якому режимі перебуває Тр з більшою імовірністю.

*Розв'язання.* Логічно вірити показанням того приладу, для якого більша імовірність того, що його дані правильні. Застосуємо формулу Бейеса.

$H1$ –Тр працює в режимі  $P1$ ;

$H2$ –Тр працює в режимі  $P2$ .

Подія  $A$  полягає в такому: П1 фіксує режим  $P1$ , а П2 – режим  $P2$ .

Імовірність гіпотез до спостереження:

$$P(H1) = 0,3,$$

$$P(H2) = 0,7.$$

Визначаємо умовні ймовірності події  $A$  за цих гіпотез.

За гіпотези  $H1$ , для того, щоб відбулась подія  $A$ , необхідно, щоб П1 видав правильну інформацію, а другий – помилкову.

$$P\left(\frac{A}{H1}\right) = (1 - 0,02)0,08 = 0,0784.$$

$$\text{Аналогічно: } P\left(\frac{A}{H2}\right) = (1 - 0,08)0,02 = 0,0184.$$

За формулою Бейеса знаходимо імовірність того, що дійсний режим трансформатора є  $PI$ . 
$$P\left(\frac{H}{A}\right) = \frac{0,3 \cdot 0,0784}{0,0784 + 0,7 \cdot 0,0184} = 0,645.$$

## 10 ОФОРМЛЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

### 10.1 Форма і зміст наукового звіту

Результати, отримані під час розв'язання завдань науково-дослідної роботи, необхідно обробити, систематизувати і викласти на папері. При цьому необхідно керуватися такими вимогами: чіткістю та логічною послідовністю викладання матеріалу, стислістю та точністю формулювань, переконливістю аргументації, конкретністю подання результатів розрахунків, доведеністю і обґрунтованістю висновків. Особу увагу слід приділити аналізу результатів експерименту, на основі яких роблять висновки про підтвердження гіпотези наукового дослідження. Аналіз експерименту – це творча частина дослідження, що потребує ретельного співставлення фактів або явищ, які обумовлюють хід того чи іншого процесу, а також встановлення адекватності гіпотези і результатів експерименту.

Структура звіту повинна складатися з таких частин.

*Титульний аркуш.* Він містить офіційну назву організації; назву теми дослідження, посаду та прізвище виконавця та керівника науково-технічного дослідження; місце знаходження, рік виконання роботи.

*Реферат.* Містить відомості про об'єм роботи, кількість сторінок, ілюстрацій, таблиць і літературних джерел. Наводиться перелік (від 5 до 10) ключових слів, які характеризують зміст роботи.

У ньому формулюють завдання роботи, методи проведення розрахунків і отримані результати. Зазначаються достовірність та точність отриманих результатів.

*Зміст.* Містить перелік розділів і підрозділів з номерами сторінок.

*Перелік умовних скорочень,* символів, одиниць і термінів.

*Ключові слова* – це перелік основних технічних термінів (в кількості 5–10), що дають змогу визначити зміст проведеної роботи.

*Вступ.* Містить характеристику сучасного стану досліджуваної проблеми, її обґрунтованість і актуальність, формулюється мета проведення розрахунків та способи її досягнення.

*Основний зміст звіту.* Зміст містить анотацію і реферат з коротким викладенням задач дослідження і отриманих результатів, вступу з характеристикою вітчизняних і зарубіжних досягнень по вказаній проблемі і текст звіту. В текст звіту повинні входити:

- постановка задачі;
- формулювання технічного завдання;
- аналіз відомих методів і способів вирішення задачі;
- обґрунтування використаних методів і способів проведення дослідження;
- розрахунки і результати експериментів;
- висновки і аналізи отриманих результатів;
- прогнозів щодо шляхів їх використання.

Звіт повинен закінчуватись висновками та узагальненнями отриманих результатів. Уперше застосовані терміни повинні мати чітке роз'яснення. Загально вживані спеціальні терміни пояснювати не обов'язково, оскільки матеріал орієнтовано на підготовленого фахівця. Кожна таблиця повинна мати назву та номер, що збігається з відповідним номером певного розділу. Рисунки (графіки, схеми, осцилограми) також повинні бути пронумеровані і супроводжені підписами, що пояснюють їх зміст. Нумери сторінок проставляють у правому верхньому кутку.

*Висновки.* Повинні містити оцінку результатів роботи з точки зору їх відповідності визначеному завданню. Висновки необхідно сформулювати у вигляді невеликої кількості чітких і конкретних тверджень.



Висновки повинні відноситись тільки до того матеріалу, який викладено в роботі. Висновок робиться наприкінці роботи як підсумковий матеріал у вигляді коротко сформульованих окремих тезисів Їх необхідно представляти в компактному вигляді за принципом: у висновках необхідно прямувати від часткових до більш загальних положень.

На завершення дається узагальнення найбільш суттєвих положень наукового дослідження, підводяться його «підсумки», доводиться висунутих автором нових положень, а також формулюються нові питання, які потребують подальшого рішення. Воно повинно бути компактным по об'єму, але змістовим по кількості інформації, що дає змогу уявити якісну сутність даної роботи и зробити висновки щодо можливих напрямків подальших досліджень.

*Список використаних літературних джерел.* Оформлюється згідно з прийнятими правилами: прізвище, ім'я та по батькові автора, назва джерела інформації, видання, рік публікації, номери сторінок.

*Додатки.* До них належать допоміжні матеріали: таблиці, громіздкі математичні викладки, методики, алгоритми і програми, різного роду пояснювальні ілюстрації.

*Реферат* – це скорочене викладення змісту проведеної роботи, що містить основні фактичні відомості та висновки. Реферат на відміну від анотації виконує пізнавальну функцію.

Текст реферату містить тему, предмет і об'єкт дослідження, характер і ціль роботи, методи її проведення, конкретні результати роботи (теоретичні, експериментальні) при цьому перевагу віддають новим і перевіреним фактам, результатам довгострокового значення, відкриттям важливим для рішення практичних питань, висновкам, прийнятим і відкинутим гіпотезам, характеристику можливої сфери використання результатів роботи.

*Анотація* – це коротка характеристика звіту про наукову роботу з точки зору змісту, призначення, форми та інших особливостей, яка виконує сигнальну функцію і повинна відповідати на питання: «про що говориться в даному документі (розглядається, досліджується)».

Науково-дослідну роботу у сфері прикладних або технічних наук необхідно аналізувати на предмет можливого винаходу і оформлення заявки на отримання патенту. Об'єктами винаходу можуть бути: пристрій, *спосіб, речовина а також використання раніш відомого способу або пристрою за новим призначенням.*

Ефективність наукових досліджень визначається після їх впровадження і визначення їх віддачі народному господарству, оцінкою економічної ефективності.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Методы исследований и организация экспериментов / под ред. К. П. Власова – Харьков : Гуманитарный центр, 2002. – 255 с.
2. Основы научных исследований / под ред. В. И. Крутова – М. : Высшая школа, 1989. – 399 с.
3. Баскаков А. Я. Методология научного исследования : учебное пособие / А. Я. Баскаков. – Киев : МАУП, 2002. – 214 с.
4. Грушко И. М. Основы научных исследований / И. М. Грушко. – Харьков : Высш.школа, 1983. – 224 с.
5. Белуха Н. Т. Методологія наукових досліджень : Підручник / Н. Т. Белуха. – Київ : АБУ, 2002. – 480 с.
6. Чапяле Ю. М. Методы поиска изобретательской идеи / Ю. М. Чапяле. – Л. : Маш., 1990. – 91 с.
7. Чус А. В. Основы технического творчества / А. В. Чус. – Киев : 1983. – 275 с.
8. Шейко В. М. Организация и методика научно-исследовательской деятельности / В. М. Шейко. – К. : 1987. – 257 с.
9. Пилюшенко В. Л. Методология и организация научного исследования / В. Л. Пилюшенко. – М. : Наука, 2002. – 126 с.

*Виробничо-практичне видання*

Методичні рекомендації  
до практичних робіт  
із навчальної дисципліни

**«ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ»**

*(для студентів 3 курсу зі скороченим терміном навчання, 4 курсу денної та заочної форм навчання спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка і слухачів другої вищої освіти)*

Укладачі: **РОЙ** Віктор Федорович,  
**КОВАЛЬОВА** Юлія Вікторівна

Відповідальний за випуск *Д. М. Калюжний*  
*За авторською редакцією*  
Комп'ютерний набір *Ю. В. Ковальова*  
Комп'ютерне верстання *Ю. В. Ковальова*

План 2018, поз. 263 М

---

Підп. до друку 23.02.2018. Формат 60 × 84/16.  
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 2,6  
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:  
Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.  
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК № 5328 від 11.04.2017.