МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

М. В. Федоров, О. М. Хренов

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 2 курсу денної форми навчання
освітнього рівня «бакалавр»
126 – Інформаційні системи та технології)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2018

УДК 512(07)

Федоров М. В. Системний аналіз : конспект лекцій для студентів 2 курсу денної форми навчання освітнього рівня «бакалавр» спеціальності 126 – Інформаційні системи та технології / М. В. Федоров, О. М. Хренов, О. М. Штельма ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 62 с.

Автори

канд. техн. наук, доц. М. В. Федоров,

канд. техн. наук, доц. О. М. Хренов,

ст. викл. О.М. Штельма

Рецензент

І. В. Наумейко, кандидат технічних наук, доцент кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки

Рекомендовано кафедрою прикладної математики і інформаційних технологій, протокол № 1 від 31.08.2017.

Конспект лекцій складено з метою допомогти студентам спеціальності 122 – Комп'ютерні науки та 126 – Інформаційні системи та технології під час підготовки до занять та іспитів з курсу «Системний аналіз»

ЗМІСТ

ВСТУП

Метою викладання навчальної дисципліни «Системний аналіз» є виробити навички системного мислення у студентів і підготувати їх до рішення практичних задач аналізу і синтезу систем.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Системний аналіз» є вивчення методології системного підходу, широко застосовуваного при вирішенні глобальних і спеціальних проблем, таких як екологічний моніторинг, керування технологічними процесами, промисловими і транспортними системами, наукові дослідження, технічне діагностування.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

– знати парадигму імперативного об᾽єктно-орієнтованого логічного програмування; основи системного аналізу, моделювання систем;

– вміти аналізувати та вибирати обчислювальні методи розв'язання задач проектування за критеріями мінімізації обчислювальних витрат, стійкості, складності тощо; вибирати стратегії для планування життєвого циклу системи; визначати організаційну, економічну, технічну та операційну здійсненність проекту.

– мати компетентності: аналізу організаційного оточення, існуючі системи, синтезу вимог до системи; розробки вимог та специфікації компонентів інформаційних систем і об'єктів професійної діяльності.

ЛЕКЦІЯ 1

СИСТЕМА ЯК ОБ’ЄКТ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Місце системного аналізу серед наукових дисциплін. Основна мета системного аналізу.

1.2. Об’єкти і системи.

1.3. Класифікація систем.

1.1. Місце системного аналізу серед наукових дисциплін. Основна мета системного аналізу

Навколишній нас світ і діяльність людини, спрямовані на пізнання і перетворення світу, з точки зору сучасної науки, носять системний характер.

Системність світу виражається у вигляді об'єктивно існуючої ієрархії різна організованих, взаємодіючих між собою природних і штучних систем.

Системність мислення полягає в тому, що наші знання представляються у вигляді ієрархічної системи взаємопов’язаних моделей навколишнього світу.

У найпростішій трактуванні термін «система» означає множину елементів і відносин між ними.

Термін «відносини» включає наступний набір родинних понять: структура, організація, зв'язок, взаємозалежність, кореляція, обмеження і т. п.

Класифікацію всіх наукових напрямків можна здійснити за допомогою одного з двох фундаментальних критеріїв відмінності:

– виділення напрямків, які базуються на певних типах елементів;

– виділення напрямків, які базуються на певних типах відносин.

За допомогою першого критерію здійснюється традиційний підрозділ науки і техніки на дисципліни та спеціальності. Кожна з них займається певним типом елементів, наприклад, фізичних, хімічних, економічних і т. д. При цьому ніякий тип відносин не фіксується. Ця класифікація має експериментальну основу, тому що елементи різних типів вимагають експериментальних (інструментальних) засобів, для збору даних.

Другий критерій дозволяє виділити клас наукових напрямів, який задається певним типом відносин, а тип елементів, на яких визначаються ці відносини, не фіксуються. Така класифікація пов'язана з обробкою даних, а не з їх збиранням, і основа її переважно теоретична.

Другим класом систем і займається системологія як наука. Характерною особливістю системології є те, що її знання і методологія можуть бути використані у всіх без винятку розділах традиційної науки, саме тому їх іноді називають метазнаннями або знаннями, інваріантними до об'єкта дослідження (рис. 1.1).

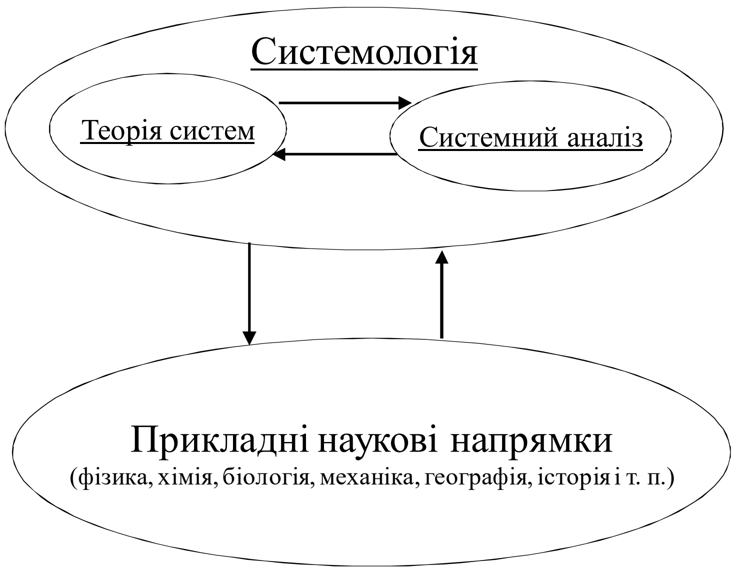


Рисунок 1.1 – Зв’язок системології з іншими науками

Системологія як наука включає два наукових напрямки теорію систем і системний аналіз.

Теорія систем займається питаннями дослідження і побудови моделей складних систем, виявлення їх ізоморфних властивостей. Основними категоріями теорії систем є: система, елемент, підсистема, відносини, структура, властивість.

Системний аналіз розглядається як сукупність методологічних засобів, використовуваних для підготовки і обґрунтування рішення складних проблем, що виникають в процесі відносин об’єктів із зовнішнім середовищем. Системний аналіз це сукупність формалізованих, слабо формалізованих і неформалізованих методів і процедур, що дозволяють реалізувати системний підхід до управління системною діяльністю людини і функціонуванням складних систем на різних етапах життєвого циклу. Іноді кажуть, що системний аналіз це прикладна діалектика, тому що саме діалектика (наука про загальні закони руху, зміни, поновлення і розвитку природи, суспільства і мислення) є його методологічною основою.

Практична цінність системного аналізу полягає в тому, що він є методикою і практикою цілеспрямованого перетворення як самої людини, так і навколишнього його світу.

Процедури системного аналізу спрямовані на виявлення альтернативних варіантів вирішення проблеми, виявлення масштабів невизначеності по кожному з варіантів і зрівняння варіантів по тим чи іншим критеріям ефективності.

Основною метою системного аналізу є побудова узагальненої моделі взаємодії даного об'єкту з навколишнім середовищем в конкретній ситуації і вироблення рекомендацій по досягненню цим об’єктом певної мети.

В історичному плані системний аналіз є наступником дослідження операцій - напряму кібернетики заснованого на апараті оптимального математичного програмування, теорії масового обслуговування, теорії ігор.

1.2. Об’єкти і системи

Під об'єктом розуміється частина світу (природного або штучного, матеріального або абстрактного), виділеного дослідником як єдине ціле для досягнення будь-яких цілей дослідження або використання. Об’єкти мають практично нескінченне число властивостей, і немає можливості і необхідності їх всі вивчати. У кожному конкретному випадку для вирішення певної задачі для об’єкта виділяється сукупність основних (з точки зору дослідника) властивостей, які потім піддаються процедурі вимірювання, відображаючи кожну властивість у вигляді деякої абстрактної змінної.

Система – це виділена з середовища сукупність матеріальних або абстрактних об’єктів (що володіють певним набором властивостей), взаємодія яких забезпечує досягнення необхідної мети протягом певного часу.

Будь-яка система має такі властивості як:

– відокремленістю від навколишнього середовища – наявність кордонів;

– характер зв’язків з навколишнім середовищем;

– структурованість – наявність елементів і зв’язків між ними;

– динамічність – здатність змінюватися в часі;

– емерджентність – поява таких властивостей системи, які не були у її елементів;

– ієрархічність – така структура, коли кожна частина системи теж являє собою систему, що складається з елементів;

– підпорядкованість функціонування всіх елементів системи однієї мети.

Таким чином, системне уявлення об’єкта дослідження означає:

– виявлення елементного складу, що породжує властивості системи;

– побудова термінологічного простору у вигляді набору вихідних понять (сигнатур), пов’язаних з розглянутими властивостями системи;

– знаходження (встановлення) системо утворюючих відносин між елементами одного рівня системи і відносин між ієрархічними рівнями системи;

– встановлення емерджентной (системо утворюючій) властивості системи, яка перетворює сукупність окремих компонент в систему;

– побудова комплексної кваліметричної моделі властивостей якості системи.

Кваліметрія – кількісна оцінка якості.

1.3. Класифікація систем

Поняття система охоплює майже всі об’єкти оточуючого нас світу, тому існує велика різноманітність класифікацій систем. На рисунку 1.2 представлена класифікація систем за походженням.

Класифікація систем за походженням

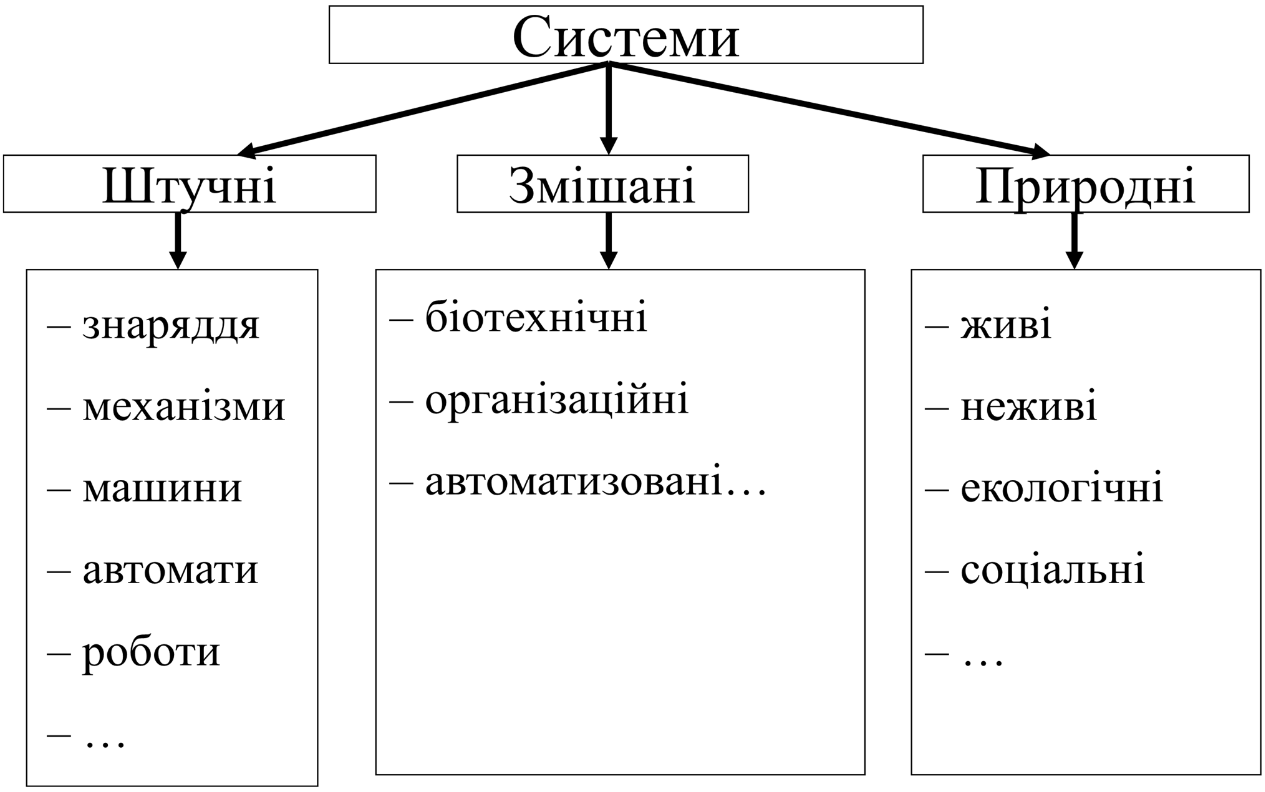


Рисунок 1.2 – Класифікація систем за походженням.

Штучною називають систему, яка має кінцеву мету свого функціонування (існування) і генетичний опис, тобто план, за яким побудована її структура, пов'язані функції складових її частин.

Природні системи відрізняються від штучних тим, що для них важко сформулювати мету їх існування. У системах змішаного типу (соціально - технічні системи, наприклад науково – виробничі об'єднання або орбітальна станція) цілі, як правило, мають ієрархічну структуру. Цілі верхнього рівня (метацілі) зазвичай носять суб'єктивний характер, а на нижніх рівнях для різних підсистем мають місце як суб'єктивні, так і об'єктивні цілі.

Класифікація систем по характеру зв'язку із зовнішнім середовищем.

Відкриті – системи, які в процесі свого життєвого циклу обмінюються з середовищем, масою, енергією та інформацією.

Закриті (ізольовані, замкнуті) системи такої здатності не мають.

Особливість замкнутих систем полягає в тому, що для них виконується другий закон термодинаміки, який проявляється у вигляді зростання ентропії. Ентропія характеризує міру невизначеності стану системи (міру хаосу): чим більше міра невизначеності, тим більше ентропія.

Класифікація систем за складністю:

1) неживі:

- статичні структури або їх основи (кристал);
- прості динамічні із заданим законом поведінки (годинник);
- кібернетичні системи з управлінськими циклами зворотного зв'язку (термостат, робот);

2) живі:

- відкриті системи з структурою, яка сама зберігається (клітини);
- живі організми з низькою здатністю сприймати інформацію (рослини);
- живі організми з більш розвиненою системою сприйняття інформації (тварини);
- живі організми з самосвідомістю (людина);
- соціальні системи (етнос, нація);
- трансцендентні системи або системи, що лежать поза нашим розумінням.

ЛЕКЦІЯ 2

СИСТЕМА ЯК ОБ'ЄКТ ДОСЛІДЖЕННЯ (ПРОДОВЖЕННЯ). ЗАСАДИ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ

2.1. Життєвий цикл системи.

2.2. Управління системою.

2.3. Визначення понять моделі та моделювання.

2.4. Принципи моделювання.

2.5. Класифікація моделей.

2.6. Пізнавальні та прагматичні моделі.

2.1. Життєвий цикл системи

Життєвим циклом системи називають період часу від моменту появи потреби в створенні системи до моменту її утилізації.

Формальна модель життєвого циклу системи представлена на рисунку 2.1.

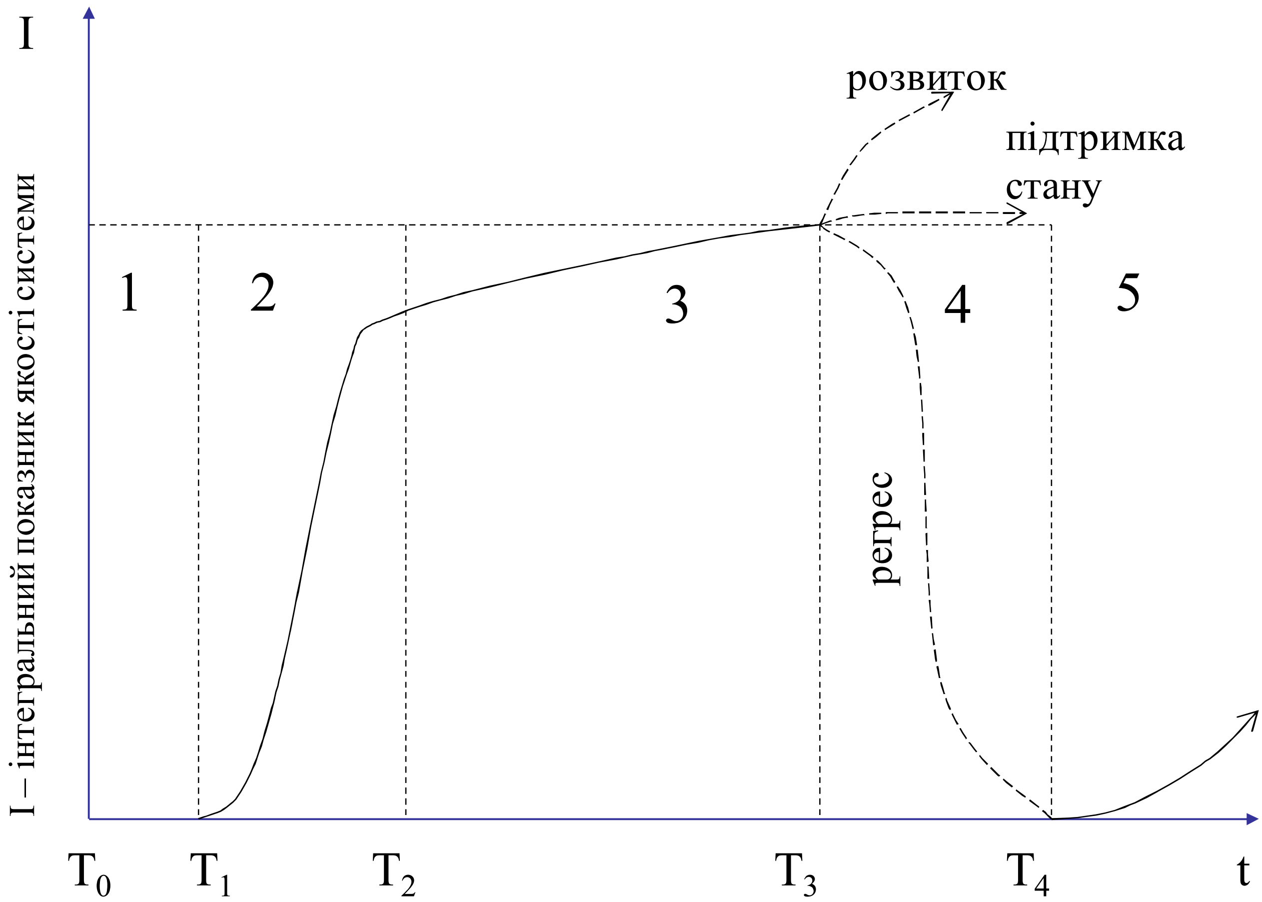


Рисунок 2.1 – Формальна модель життєвого циклу системи

Етапи життєвого циклу системи:

1) етап появи функціональної потреби в системі;

2) етап формування системи;

3) етап нормального функціонування, зростання і розвитку системи;

4) етап регресу (загибелі системи);

5) етап формування утилізованої системи для досягнення інших цілей.

2.2. Управління системою

Види узагальненої мети системи:

– досягнення певного кінцевого стану;

– реалізація необхідного порядку зміни станів (необхідний рух);

– забезпечення необхідного напрямку руху системи без конкретизації кінцевого стану системи.

Найпростіший контур управління системою показаний на рисунку 2.2.

Рисунок 2.2 – Найпростіший контур управління системою

Замкнутими називаються системи, що мають зворотній зв’язок.

Роз’єднаними називаються системи які не мають зворотного зв’язку.

Закон управління – це певне правило вироблення послідовності управляючих дій, що забезпечують досягнення керованою системою заданої мети.

Цільова функція управління - це показник якості управління.

Етапи програмно-цільового методу управління:

1) вироблення програмного управління для забезпечення програмного руху об’єкта управління до мети;

2) вироблення коригуючого управління, що зводить відхилення результату реального управління від програмного руху до допустимого значення.

Закон необхідної різноманітності Ешбі: для управління будь-якою системою керуюча система повинна бути здатна до сприйняття принаймні тієї ж кількості різних сигналів, яке може з’явитися на виході керованої системи.

2.3. Визначення понять моделі та моделювання

Модель (лат. – міра, зразок) – це якийсь об’єкт, який в певних умовах замінює об’єкт-оригінал, відтворюючи властивості і характеристики оригіналу, які цікавлять нас, маючи при цьому суттєві переваги використання (наочність, видимість, доступність випробувань та ін.)

Моделювання – це дослідження будь-яких процесів, явищ або систем (об’єктів) шляхом побудови і вивчення їх моделей; використання моделей для визначення або уточнення характеристик і раціоналізації способів побудови знову створюваних об’єктів.

Мета – це образ бажаного майбутнього, тобто модель стану, на досягнення якого спрямована діяльність.

Модель є не взагалі якимось відображенням оригіналу, а цільовим відображенням.

2.4. Принципи моделювання

Побудова і використання моделей базується на наступних основних принципах:

- інформаційної достатності;
- здійсненності;
- множинності моделей;
- агрегування;
- параметризації.

2.5. Класифікація моделей

Підставою для класифікації моделей є мета моделювання. Цільова орієнтація моделей дозволяє класифікувати їх за типами цілей, по способам відтворення, зі зміни на різних етапах життєвого циклу (рис. 2.3):

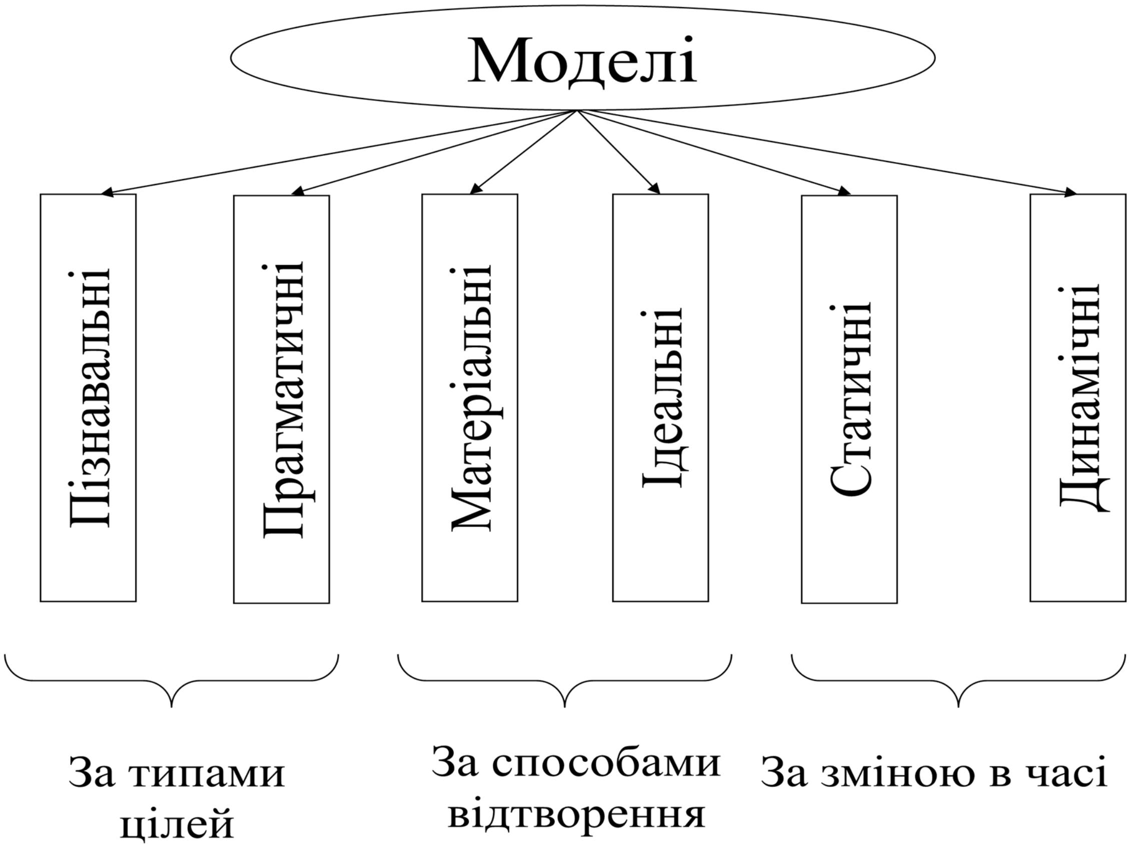


Рисунок 2.3 – Класифікація моделей

2.6. Пізнавальні та прагматичні моделі

Різниця пізнавальних і прагматичних моделей проявляється в їх відношенні до оригіналу в процесі діяльності.

Пізнавальні моделі є формою організації та подання знань, засобом з’єднання нових знань з наявними.

Прагматичні моделі є засобом управління практичними діями, способом подання необхідних дій або їх результату, тобто є робочим поданням цілі.

ЛЕКЦІЯ 3

ЗАСАДИ ТЕОРІЇ МОДЕЛЮВАННЯ (ПРОДОВЖЕННЯ)

3.1. Класифікація ідеальних (абстрактних) моделей.

3.2. Матеріальні моделі.

3.3. Якість моделі.

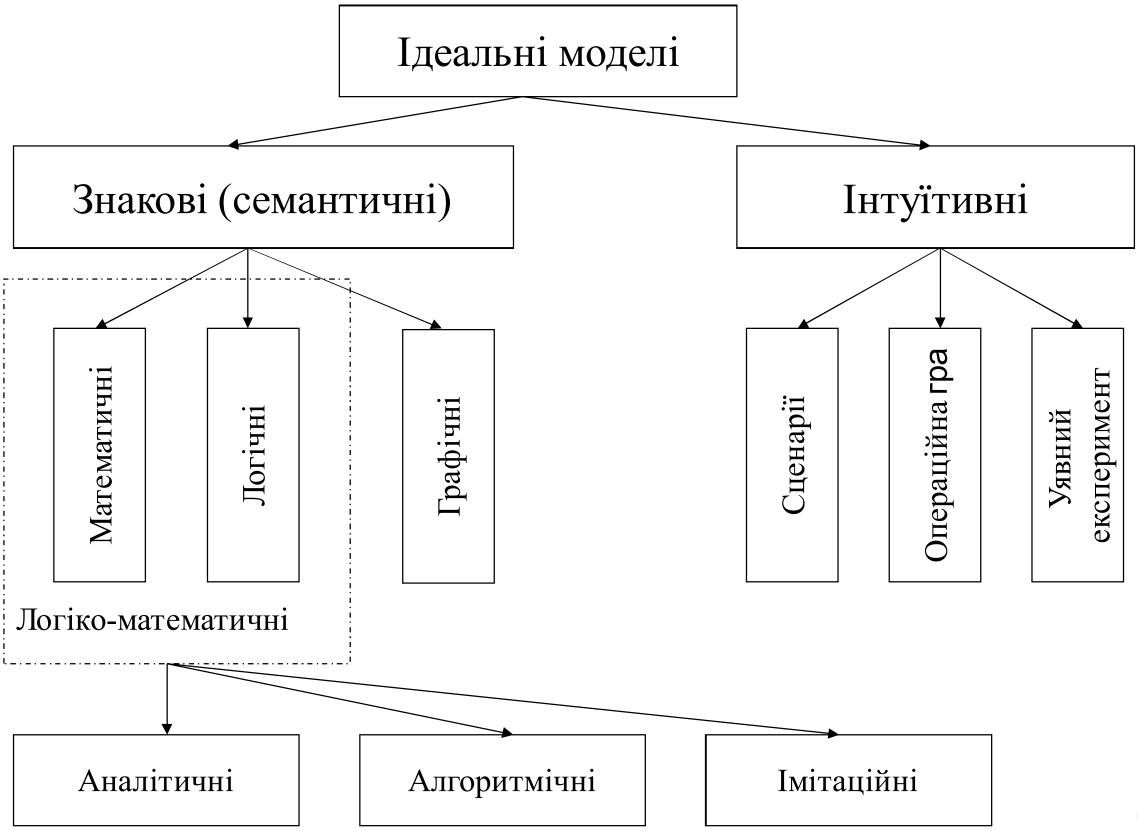
3.4. Відношення між моделлю і реальністю.

3.1. Класифікація ідеальних (абстрактних) моделей

Класифікація ідеальних моделей представлена на рисунку 3.1.

За способом подання семантичних моделей розрізняють: математичні, логічні та графічні. Математичні моделі відіграють визначальну роль серед інших форм знакових моделей.

Інтуїтивні моделі будуються на вербальному рівні.



6.

Рисунок 3.1 – Класифікація ідеальних моделей.

3.2. Матеріальні моделі

Класифікація матеріальних моделей представлена на рисунку 3.2.

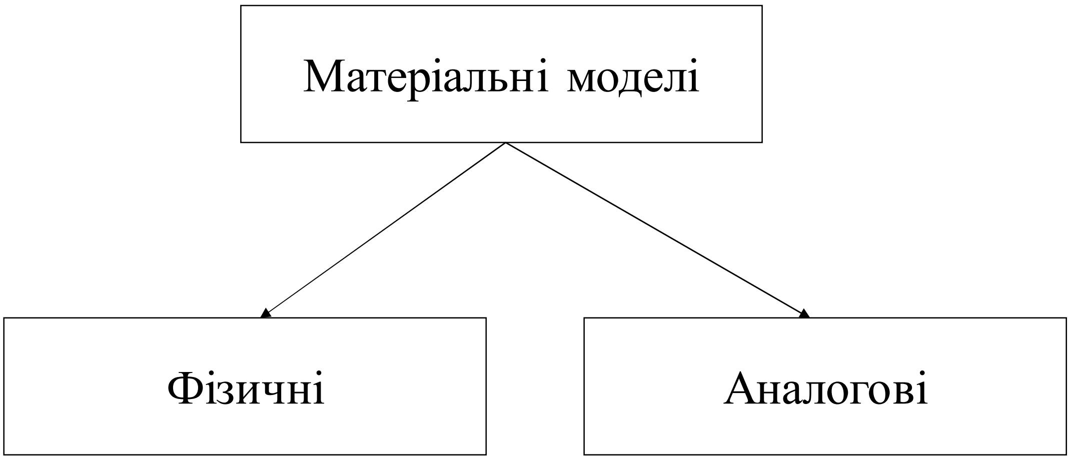


Рисунок 3.2 – Класифікація матеріальних моделей.

Для того щоб матеріальна модель могла замінити оригінал в процесі цілеспрямованої діяльності необхідно між моделлю і оригіналом встановити відносини подібності.

Основні види подібності:

- пряме (фізичне);
- непряме;
- умовне.

Приклади прямої (фізичної) подібності:

- голографічний знімок об’єкта;
- скульптурний портрет людини;
- модель літака;
- копія твору мистецтва (картини, шкатулки, скульптури і т. п.).

Непряму подобу встановлюється шляхом виявлення об’єктивно існуючих в природі аналогій між розглянутим об’єктом і будь-яким іншим. Приклад: багато електричних і механічних процесів описуються однаковими рівняннями.

Умовну подобу встановлюється в результаті угоди. Приклади:

- паспорт (офіційна модель власника);

– гроші (модель вартості;

– креслення (модель вироби);

– сигнали (моделі повідомлення);

– результати психологічного тесту (модель людини);

– і т. п.

3.3. Якість моделі

Якість моделі, як і любого іншого об'єкта, являє собою сукупність різних властивостей, що мають ієрархічну структуру (рис 3.3).

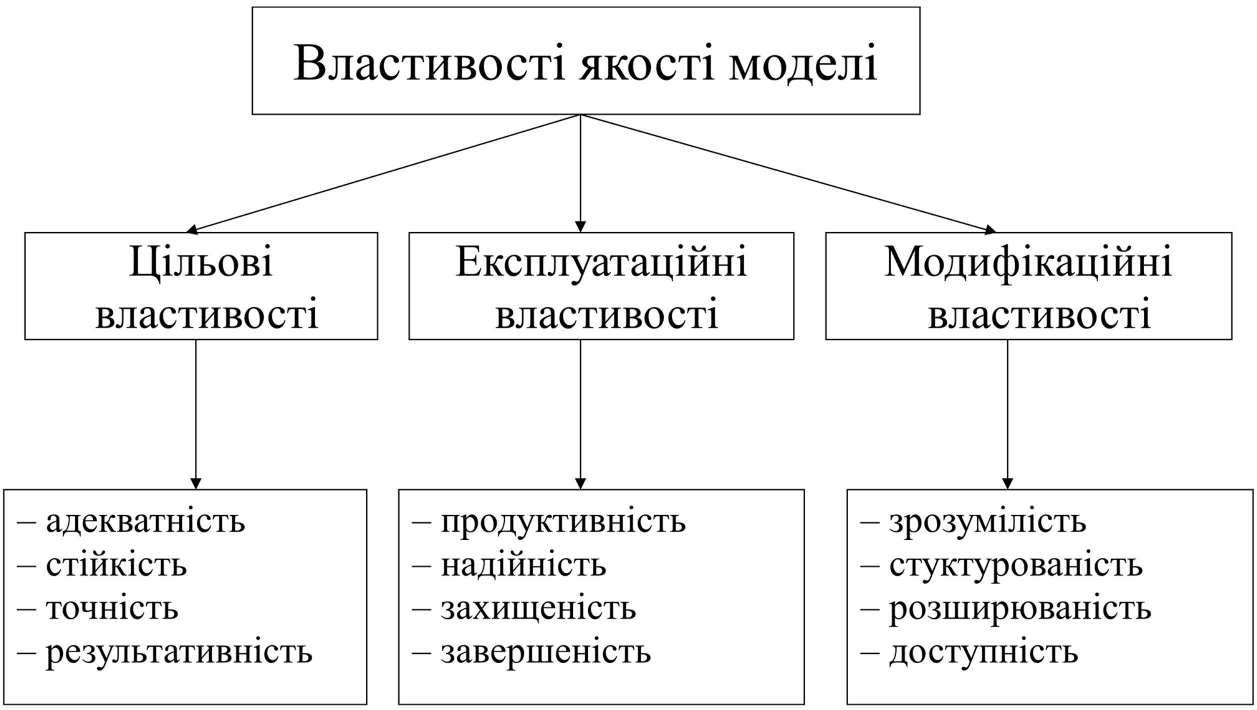


Рисунок 3.3 – Властивості якості моделі

3.4. Відношення між моделлю і реальністю

Існує чотири типи відносин між справжньою системою і моделлю, в залежності від їх природи: фізичної або абстрактної. Ці відносини представлені на рисунку 3.4.

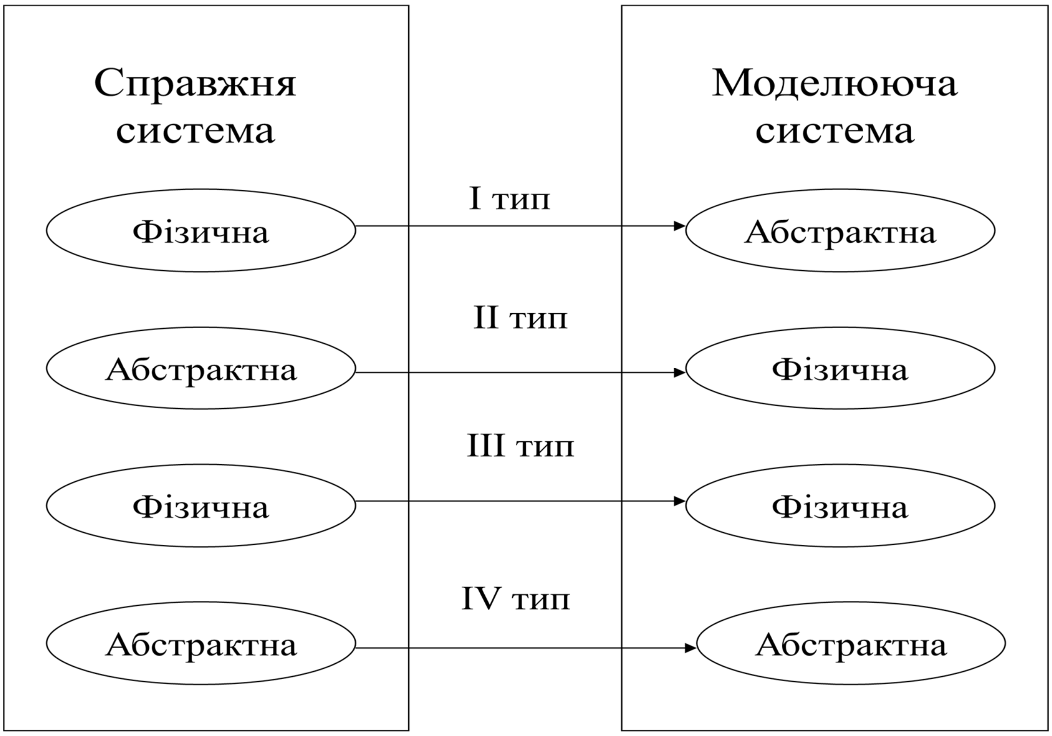


Рисунок 3.4 – Типи відношень між моделлю і реальністю

Для оцінки ступеня відповідності моделі і оригіналу вводиться поняття «адекватність моделі».

Адекватною називають таку модель, для якої вимоги повноти точності і істинності моделі виконуються не взагалі в повній мірі, а тільки в тій мірі, яка призводить до досягнення мети.

ЛЕКЦІЯ 4

ТЕХНОЛОГІЇ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

4.1. Аналіз і синтез в системних дослідженнях.

4.2. Декомпозиція.

4.3. Побудова ієрархій (структуризація відносин). Математична модель ієрархії. Поняття про ієрархії.

4.4. Побудова ієрархій для системи з циклами.

4.1. Аналіз і синтез в системних дослідженнях

Аналіз – це процес визначення властивостей, притаманних системі.

Суть аналізу полягає в поділі цілого на частини, складного – на сукупність простіших компонент.

Синтез – з’єднання різних елементів об’єкта в єдине ціле.

Синтез – це процес породження функцій і структур, необхідних і достатніх для отримання певних результатів

Таблиця 4.1 – Порівняльна характеристика етапів аналізу і синтезу

Номер етапу	Аналіз	Синтез
1	Поділ об'єкта на частини.	Розгляд об'єкта як цілого (частини макросистеми).
2	Пояснення поведінки кожної частини об'єкта окремо.	Пояснення поведінки об'єкта в макросистемі.
3	Знання про частини перетворюється в знання про ціле.	Розуміння змісту макросистеми використовується для пояснення її частин. Це досягається шляхом розкриття їх ролей (функцій) в макросистемі.
4	В аналізі розкривається структура системи і те, як вона працює. Продукт аналізу – знання.	Синтез функціонування системи показує, чому вона має саме такий вигляд. Продукт синтезу – розуміння.

Мета аналізу – знання.

Мета синтезу – розуміння.

4.2. Декомпозиція

Декомпозиція – це процедура формального поділу цілого на частини, що передує подальшому аналізу цих частин.

В основі наукового підходу до декомпозиції лежить твердження про те, що підставою всякої декомпозиції є модель даної системи.

Наприклад, в конструкторсько-технічної документації часто зустрічаються два види декомпозиційних моделей: блок-схема і принципова схема технічної системи.

Елементами блок-схеми (точка зору технолога) є технологічні одиниці, які випускаються промисловістю.

Принципова схема (точка зору конструктора і споживача) передбачає декомпозицію, яка повинна пояснювати функціонування об'єкта.

Модель системи, за якою (або за допомогою якої) здійснюється декомпозиція, в системному аналізі називається моделлю-основою

4.3. Побудова ієрархій (структуризація відносин). Математична модель ієрархії. Поняття про ієрархії

Ієрархія – це система, що складається з об'єктів (елементів), згрупованих у незалежні підмножини (групи). Об'єкти *і-ої* групи перебувають під впливом об'єктів *(i + 1)* групи і, у той же час, впливають на об'єкти *(i - 1)* групи. Ці групи, розташовані певним чином (над або під іншою групою), називаються рівнями (або кластерами). Вважається (для багатьох задач), що елементи одного рівня незалежні.

Існує кілька видів ієрархій, два з яких представлені на рисунку 4.1:

– домінантні ієрархії (а, б);

– холархії (в).

Домінантні ієрархії бувають повними й неповними. Повними називаються такі, у яких кожний елемент нижнього *(i + 1)* рівня зв'язаний з кожним елементом *і-го* рівня (рис. 4.1, а), а неповними називаються такі ієрархії, для яких ця умова не виконується, тобто деякі елементи *(i + 1)* рівня зв'язані не з всіма елементами *і-го* рівня.

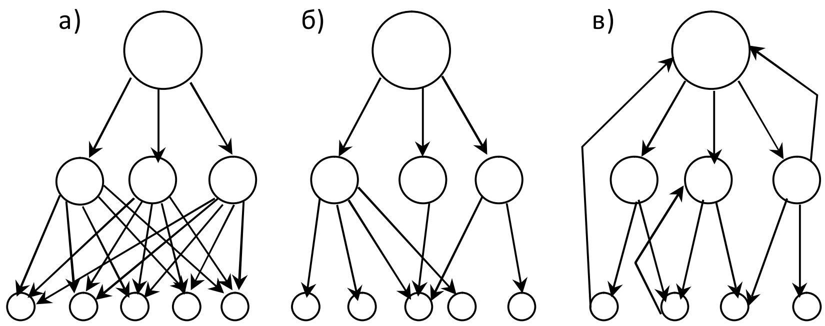


Рисунок. 4.1 – Види ієрархій:

а) домінантна повна;

б) домінантна неповна;

в) холархія.

Холархіями називають домінантні ієрархії зі зворотним зв’язком (рис. 4.1, в). Холархії також бувають повними й неповними.

Існує ще один вид ієрархій, який називають іноді «китайською шкатулкою». Він представляє таке співвідношення між класами об’єктів, коли один клас об’єктів є підмножиною більш могутньої множини, що, у свою чергу, є підмножиною наступних ще більш могутніх множин і т.д. Таку ієрархічну структуру має навколишній нас світ з усіма його складними об’єктами.

Побудова простих ієрархій домінантного типу

Припустимо, що мається деяка множина елементів, між якими існують визначені відносини.

Опис такої системи може бути реалізовано у двох взаємозалежних формах: у виді бінарної матриці й у виді спрямованого графа.

Бінарна матриця може бути представлена матрицею досяжності, що визначається по матриці залежності.

Матриця залежності *B* заповнюється в такий спосіб. Якщо множина вершин *H* визначена, то за допомогою бінарного відношення «залежить від» можна заповнити матрицю так, що відповіді «так» фіксують «одиницею», а відповіді «ні» фіксують «нулем», тобто елемент b_{ij} матриці

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ÿêùî і çàëåæèòü â³ä j} \\ 0, \text{ÿêùî і íå çàëåæèòü â³ä j.} \end{cases}$$

Побудувавши в такий спосіб матрицю, переходимо до формування матриці досяжності.

Для цього формуємо бінарну матрицю *(I+B)*, (де *I* – одинична матриця) і зводимо її у деякий ступінь *k*, такий що виконується умова: $(I+B)^{k-1} \leq (I+B)^{k} = (I+B)^{k+1}$.

Матриця $(I+B)^{k} = (I+B)^{k+1}$ і буде матрицею досяжності.

Матриця досяжності може бути побудована і більш простим шляхом, безпосередньо по вихідному спрямованому графі. У цьому графі дуга виходить із залежного елемента. Заповнення матриці бінарними елементами здійснюється по рядку (ліворуч праворуч) за правилом

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ якщо з } \text{і} \textit{ можно попасти в } \text{j} \\ 0, \textit{ інакше} \end{cases}$$

Наявність матриці досяжності дозволяє розділити множину вершин на підмножини рівнів.

Для цього вершини поділяють на досяжні й попередні.

Вершину h_j називають досяжною з вершини h_i, якщо в орієнтованому графі існує шлях із h_i до h_j. Позначимо підмножину вершин, досяжних із вершини h_i через $R(h_i)$. Вершину h_j називають попередній вершині h_i, якщо можливо досягнення h_i із h_j. Позначимо підмножину вершин, що передують вершині h_i через $A(h_i)$.

Множина тих вершин $A(h_i)=R(h_i)\cap A(h_i)$, для яких виконується умова недосяжності з кожної з залишившихся вершин множини H, може бути позначена як рівень ієрархії. Тобто, для структуризації деякої множини елементів *H*, зв'язаних визначеними відносинами залежності, необхідно виконати наступні процедури:

1) скласти спрямований граф відносин між елементами множини *H*;

2) сформувати матрицю досяжності по спрямованому графі;

3) сформувати таблицю з елементами h_i, $R(h_i)$, $A(h_i)$ і $R(h_i) \cap A(h_i)$.

Для формування підмножини $R(h_i)$ з *і-ої* рядка матриці досяжності виписуються номери тих елементів, що містять одиниці. Для формування підмножини $A(h_i)$ з *і-го* стовпця матриці досяжності виписуються номери тих елементів, що містять одиниці.

Підмножина $R(h_i) \cap A(h_i)$ формується як логічне перетинання (сполучення) елементів двох підмножин;

4) знайти елементи в таблиці, для яких виконується умова:

$$A(h_i)=R(h_i) \cap A(h_i).$$

Ці елементи й утворять перший рівень;

5) Викреслити отримані на першій ітерації елементи і застосувати вищеописані процедури (пп. 1–4) знову. Ітерації повторюються доти, поки залишається більш одного елемента.

4.4. Побудова ієрархій для системи з циклами

Ця задача, багато в чому, аналогічна задачі розглянутої в попередньому пункті, але її особливість полягає в тому, що аналізована система є більш складною й представлена графом з циклами. Тому для її рішення спочатку потрібно об'єднати елементи, зв'язані циклом, у групи (у класи еквівалентності).

Елементи x_i і x_j зв'язані циклом, якщо вони задовольняють відношенню: існує шлях з елемента x_i в елемент x_j і назад. Зокрема, при i = j елемент x_i може замикатися на себе, тобто є циклічним елементом. У матриці залежності цикл між елементами x_i, x_j представляється послідовністю одиниць у відповідних осередках, що зв'язують x_i і x_j, наприклад, якщо (i, j) = 1 і (j, i) = 1, то x_i, x_j зв'язані циклом; якщо (i, j) = 1 і (j, k) = 1 і (k, i) = 1, то x_i, x_j зв'язані циклом і т.д. Циклічний елемент у матриці залежності представляється одиницею у відповідному йому осередку, наприклад, якщо (i, i) = 1, то елемент x_i циклічний. Після виконання зазначеної операції об'єднання множина елементів виявляється розбитою на кілька класів еквівалентності, наприклад: C1 = {x1, x5, x6)}, C2 = {x3, x4}, C3 = {x2, x7, x10}, C4 = {x8} і т. д. Елементи у кожному класі зв'язані між собою циклами, тобто вважаються нерозрізненими. Потім алгоритм рішення задачі, розглянутої в роботі № 1 застосовується вже не до окремих елементів, а до класів C1, C2, C3, C4, тому що ці класи утворюють простий граф без контурів. Для побудови рівнів порядку на класах у вихідній матриці всі одиниці в осередках матриці, що зв’язують елементи з одного класу, заміняються нулями. Після цього до рядків і стовпців одного класу застосовується операція додавання.

ЛЕКЦІЯ 5
ТЕХНОЛОГІЇ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ (ПРОДОВЖЕННЯ)

5.1. Метод аналізу ієрархій. Основні етапи методу аналізу ієрархій

5.2. Шкала Т. Сааті.

5.3. Метод парних порівнянь.

5.4. Ступінь погодженості.

5.5. Вектор пріоритетів.

5.6. Розрахунок локальних пріоритетів. Синтез пріоритетів.

5.1. Метод аналізу ієрархій. Основні етапи методу аналізу ієрархій

Будь-яка проблема являє собою складний об’єкт, що має ієрархічну структуру. При аналізі такого об’єкта дослідник, звичайно, зіштовхується зі складною системою взаємодії компонент проблеми (ресурси, мети, впливові особи й групи, політичні, економічні й інші фактори), які потрібно проаналізувати.

Метод аналізу ієрархій (МАІ) є систематичною процедурою для ієрархічного представлення компонентів проблеми. Метод становить у декомпозиції проблеми на усе більш прості складовій і подальшій обробці послідовності суджень особи, що приймає рішення (ЛПР), за парними порівняннями. У результаті може бути отриманий відносний ступінь (інтенсивність) взаємодії (впливу) компонентів нижнього i рівня на компоненти верхнього (i-1) рівня або i рівня на самий верхній (нульовий) рівень. Ці оцінки виражаються потім чисельно. МАІ включає процедури синтезу множинних суджень, одержання пріоритетності критеріїв і пошуку альтернативних рішень.

Теорія систем надала концептуальну основу для побудови нової методології, що дозволяє, описувати систему і її проблеми в термінах взаємозалежної ієрархічної структури. Ця методологія пропонує засоби для встановлення упорядкування пріоритетів і виміру інтенсивності взаємодії компонент, що описують структуру системи ієрархії. Методологія враховує роль людини (як елемента ієрархії) у складних соціальних і організаційних системах і примиряє численні і суперечливі устремління, що маються в людей, чиї інтереси торкають поводження системи.

Метод аналізу ієрархій включає наступні основні етапи:

– декомпозиція проблеми;
– побудова ієрархічної структури моделі проблеми;
– експертне оцінювання переваг;
– побудова локальних пріоритетів;
– оцінка погодженості суджень;
– синтез локальних пріоритетів;
– висновки й пропозиції для прийняття рішень.

5.2. Шкала Т. Сааті

Метод аналізу ієрархій при побудові єдиної шкали для різних компонентів проблеми використовує міру ступеня впливу кожного фактора одного рівня на фактори верхнього рівня або на кінцеву мету. Ця міра утвориться в результаті висловлення суджень про ступінь впливу (важливості) цих факторів. Американський фахівець із системного аналізу Т. Сааті запропонував шкалу відносної важливості (значущості, переваги) представлену в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Шкала відносної значущості

Ступінь переваги одного об'єкта перед іншим	Міра важливості (значимості) переваги
Рівна важливість (значимість). Немає переваги	1
Слабка перевага по важливості. Слабка перевага.	3
Істотна або сильна перевага по важливості (значимості). Сильна перевага.	5
Дуже сильна або значна перевага по важливості (значимості). Дуже сильна перевага.	7
Абсолютна перевага.	9
Проміжна оцінка міри переваги між сусідніми значеннями	2, 4, 6, 8

Вибір дискретної шкали «1 – 9» для оцінки порівняльної міри важливості (значимості або рівня переваг), одержуваної в результаті висловлення суджень експертом, ґрунтується на наступних передумовах:

1) якісні розходження значимі на практиці і мають елемент точності, коли величина порівнюваних об’єктів (предметів, явищ, процесів, видів діяльності) одного порядку або об'єкти близькі щодо властивості, по якій вони порівнюються;

2) психометричні властивості людини дозволяють досить добре проводити якісні розмежування мір властивостей порівнюваних об'єктів по наступним рівням: *немає розходження, слабке розходження, сильне розходження, дуже сильне розходження, абсолютне розходження*. З огляду на компромісні оцінки розходження між перерахованими вище рівнями значущості (важливості), одержуємо дев'ять рівнів (ступенів) розходження, що можуть бути добре погоджені;

3) у психології існує поняття психологічної межі здатності людини одночасно розрізняти якесь число предметів по якійсь властивості. Ця межа дорівнює 7±2, тобто для створення шкали, на якій ці предмети будуть розбірливі, необхідно 9 точок. З огляду на вищесказане, шкалу Сааті іноді називають психометричною шкалою.

5.3. Метод парних порівнянь

Для побудови шкали пріоритетів (переваг), одержуваної при експертному висловленні суджень про рівень розходження між порівнюваними об'єктами в МАІ застосовується метод парних порівнянь. Якщо для порівняння обране n (A_1, A_2,…,A_n) об'єктів, то результати порівнянь заносяться в квадратну n -мірну матрицю (рис. 5.1).

	A_1	A_2	…	A_j	…	A_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…
A_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nj}	…	a_{nn}

Рисунок. 5.1 – Матриця парних порівнянь

Елементом цієї матриці a_{ij} є міра переваги об'єкта A_i у порівнянні з об'єктом A_j. Таким чином, i-й рядок матриці показує міру переваги i-го об'єкта над іншими (n-1) об'єктами і над самим собою. Міра переваги виражається експертом у шкалі Сааті і приймає значення від 1 до 9, якщо об'єкт A_i більш важливий, чим об'єкт A_j. У випадку, коли i = j, міра переваги дорівнює 1, тобто діагональні елементи матриці парних порівнянь завжди рівні 1. Варто враховувати, що для матриці парних порівнянь виконується така умова:

$$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}.$$

Це означає, що якщо по шкалі Сааті об'єкт A_i більш важливий, чим об'єкт A_j і ця міра переваги дорівнює a_{ij} (наприклад a_{ij}=5), то міра переваги A_j-го об'єкта в порівнянні з об'єктом A_i – величина зворотна a_{ij} (тобто a_{ji}=1/5). Таким чином, експертом заповнюється тільки верхня наддіоганальна частина матриці парних порівнянь і матриця здобуває наступний вид (наприклад, для чотирьох порівнюваних об'єктів, рис. 5.2):

	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	a_{12}	a_{13}	a_{14}
A_2	$1/a_{12}$	1	a_{23}	a_{24}
A_3	$1/a_{13}$	$1/a_{23}$	1	a_{34}
A_4	$1/a_{14}$	$1/a_{24}$	$1/a_{34}$	1

Рисунок. 5.2 – Матриця парних порівнянь для чотирьох порівнюваних об'єктів

5.4. Ступінь погодженості

У загальному випадку під погодженістю мається на увазі те, що при наявності основного масиву неопрацьованих даних усі інші дані можуть бути логічно отримані з них. Якщо порівнюються n об'єктів, то досить (n-1) судження, у яких порівнювані об'єкти представлені, принаймні, один раз. Усі інші судження (у випадку погодженості суджень) можуть бути виведені з них.

Повна погодженість включає як *порядкову погодженість*, що називають ще властивістю *транзитивності* (якщо A_i має перевагу над A_j, а A_j має перевагу над A_k, то A_i має перевагу над A_k), так і *кардинальну погодженість* ($a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$).

Очевидно, що домогтися повної погодженості матриці парних порівнянь при експертних оцінках об'єктів неможливо. Природно після експертних оцінок по методу парних порівнянь порушити питання про ступінь погодженості отриманих оцінок.

Як міру погодженості розглядають два показники:

– індекс погодженості (ІП);

– відношення погодженості (ВП).

З теорії матриць відомо, що погодженість зворотно симетричної матриці (яка виходить як результат застосування експертом методу парних порівнянь по шкалі Сааті) еквівалентна вимозі рівності її максимального власного значення λ_{max} і числа порівнюваних об'єктів n ($\lambda_{max} = n$).

Тому як міру неузгодженості розглядають нормоване відхилення λ_{max} від n, називане *індексом погодженості*:

$$ІП = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}.$$

Для того щоб оцінити, чи є отримане узгодження прийнятним чи ні, його порівнюють із випадковим індексом (ВІ).

Випадковим індексом називають індекс погодженості, розрахований для квадратної n-мірної позитивної зворотно симетричної матриці, елементи якої генеровані датчиком випадкових чисел, розподілених по рівномірному закону для інтервалу значень: 1/9, 1/8, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Для матриці з фіксованим значенням n індекс розраховується як середнє значення для вибірки N (наприклад, N = 100). Нижче представлена таблиця величин випадкового індексу для різних матриць порядку від 2 до 15.

Таблиця 5.2 – Таблиця величин випадкового індексу

Порядок матриці (n × n)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Випадковий індекс (ВІ)	0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,54	1,56	1,57	1,59

Одержавши в результаті розрахунку індекс погодженості і, вибравши з таблиці випадковий індекс для заданого порядку матриці, розраховують *відношення погодженості (ВП)*:

$$ВП = \frac{ІП}{ВІ}.$$

Якщо величина ВП менше 0,1, то ступінь погодженості варто вважати гарною. У деяких випадках прийнятним ступенем погодженості можна вважати діапазон (0,1 – 0,3). Це, як правило, відноситися до проблем, для яких прийняті по експертних висновках рішення не спричиняють серйозних негативних наслідків. У противному випадку (якщо ОС > 0,1 – 0.3) експерту рекомендується переглянути свої судження. Для цього необхідно виявити ті позиції в матриці суджень, що вносять максимальний вклад у величину відносини погодженості, і спробувати змінити міру непогодженості в меншу сторону на основі більш глибокого аналізу питання.

5.5. Вектор пріоритетів

Проведемо математичну обробку матриці парних порівнянь у шкалі Сааті з метою одержання вектора пріоритетів порівнюваних об'єктів. З математичної точки зору задача зводиться до обчислення головного власного вектора, що після нормалізації стає вектором пріоритетів.

Точний спосіб обчислення головного власного вектора матриці парних порівнянь полягає в зведенні матриці в достатньо великі ступені і поділ суми кожного рядка на загальну суму елементів матриці. Ми скористаємося іншим, більш простим, способом, що дає добре наближення (табл. 5.3).

Таблиця 5.3 – Таблиця обчислення вектора пріоритетів

	A_1	A_2	…	A_n	Головний власний вектор	Вектор пріоритетів
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	V_1	P_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	V_2	P_2
…	…	…	…	…	…	…
A_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nn}	V_n	P_n

Компонента головного власного вектора обчислюється як середнє геометричне значень у рядку матриці:

$$V_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}} .$$

Компонента вектора пріоритетів обчислюється як нормоване значення головного власного вектора:

$$P_i = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} .$$

Наближені значення λ_{max} для оцінки відносини погодженості можна розрахувати за наступною формулою:

$$\lambda_{max} = \sum_{j=1}^{n} M_j P_j ,$$

де $M_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ – сума елементів i-го стовпця матриці;

P_j – вектор пріоритетів аналізованої матриці.

5.6. Розрахунок локальних пріоритетів. Синтез пріоритетів

Розглянемо проблему «Вибір і покупка будинку *із заданим рівнем якості* або покупка такого будинку, який би викликав *загальне задоволення*».

Як альтернативні варіанти розглядаємо три будинки (А, Б, В)

Для того щоб прийняти обґрунтоване рішення на вибір будинку необхідно, виконати наступне.

Після побудови ієрархічної моделі проблеми починаємо перший етап аналізу, що складається в дослідженні ступеня впливу показників властивостей якості будинку на загальне задоволення будинком. У формальному виді цей етап складається в аналізі впливу факторів першого рівня ієрархії на мету аналізу – нульовий рівень.. Заповнюємо матрицю парних порівнянь для факторів 1-го рівня судженнями експерта по шкалі Сааті. На підставі цих даних визначаємо вектор пріоритетів, λ_{max}, ІП, ВП.

На другому етапі переходимо до розгляду впливу факторів другого рівня на фактори першого рівня, тобто до аналізу «ваги» (переваги) кожного з розглянутих будинків (А, Б, В) стосовно кожного фактора першого рівня. Для цього необхідно сформувати й обробити стільки експертних матриць парного порівняння скільки є факторів першого рівня.

На третьому етапі здійснюється синтез локальних пріоритетів або оцінка узагальнених (глобальних) пріоритетів. У нашім прикладі мова йде про одержання вектора глобальних пріоритетів будинків стосовно мети верхнього рівня – загального задоволення будинком.

Для цього матрицю локальних пріоритетів 2-го рівня множать на вектор локальних пріоритетів першого рівня.

У результаті одержуємо узагальнений (глобальний) вектор пріоритетів будинків (А, Б, В) стосовно кінцевої мети – покупці будинку.

ЛЕКЦІЯ 6

МЕТОДИ ПОШУКУ Й ВИБОРУ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ. КЛАСИЧНІ КРИТЕРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

6.1. Математична постановка задачі

Задача прийняття рішення трактується як задача вибору одного варіанта E_i з деякої множини варіантів рішень : $E_i \in E$. Будемо розглядати випадок, коли мається лише кінцеве число варіантів $E_1, E_2, ..., E_i, ..., E_m$. Умовимося, що кожним варіантом E_i однозначно визначається деякий результат e_i. Ці результати повинні допускати кількісну оцінку, яку також будемо позначати символом e_i. Будемо шукати варіант із максимальним результатом, тобто метою нашого вибору є $\max\limits_i e_i$. Результати e_i частіше характеризуються, як виграші, корисності або надійності. Таким чином, вибір оптимального варіанта рішення виробляється за допомогою критерію

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \,/\, E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i e_i \right\}. \qquad (6.1)$$

Правило (6.1) інтерпретується в такий спосіб: множина E_0 оптимальних варіантів складається з тих варіантів E_{i0}, що належать множині E усіх варіантів, і оцінка e_{i0} максимальна серед всіх оцінок e_i.

Розглянутий випадок прийняття рішень, при якому кожному варіанту рішення відповідає єдиний зовнішній стан (єдиний результат), є випадком детермінованих рішень. Цей випадок є найпростішим і частковим. У більш складних структурах кожному варіанту рішення E_i внаслідок різних зовнішніх умов F_j можуть відповідати різні результати e_{ij} рішень.

Під результатом рішення e_{ij} будемо розуміти оцінку, що відповідає варіанту E_i й умовам F_j і яка характеризує економічний ефект (прибуток), корисність або надійність виробу. Сімейство рішень описується деякою матрицею:

$$\begin{array}{c} \\ E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} F_1 & \cdots & F_j & \cdots & F_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1j} & \cdots & e_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_{i1} & \cdots & e_{ij} & \cdots & e_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_{m1} & \cdots & e_{mj} & \cdots & e_{mn} \end{pmatrix} \end{array}. \tag{6.2}$$

Особа, що приймає рішення (ОПР), намагається вибрати рішення з найкращими результатами. У даному випадку, первісна задача максимізації відповідно до критерію (6.1) повинна бути замінена іншою, котра буде враховувати всі наслідки кожного з варіантів рішення E_i.

Щоб прийти до однозначного і найвигіднішого варіанта рішення, коли якимнебудь варіантам рішень можуть відповідати різні умови, можна ввести підходящі оцінні (цільові) функції. При цьому матриця (6.2) зводиться до одного стовпця.

$$\begin{array}{c} \\ E_1 \\ \vdots \\ E_i \\ \vdots \\ E_m \end{array} \begin{array}{c} F_r \\ \begin{pmatrix} e_{1r} \\ \vdots \\ e_{ir} \\ \vdots \\ e_{mr} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Кожному варіанту приписується, таким чином, деякий результат, що характеризує, у цілому, усі наслідки цього рішення. Такий результат ми будемо надалі позначати символом e_{ir}.

Процедура вибору оптимального рішення зводиться до проблеми вкладення змісту в результат e_{ir}. З погляду ОПР частіше бажаний результат формується між оптимістичними й песимістичними способами побудови оцінних функцій.

6.2. Види оцінних функцій

Розглянемо оцінні функції, що може вибрати ОПР:

1) оптимістична позиція ОПР:

$$\max_i e_{ir} = \max_i(\max_j e_{ij}). \tag{6.3}$$

Точка зору азартного гравця. ОПР робить ставку на те, що буде найвигідніший випадок;

2) позиція нейтралітету:

$$\max_i e_{ir} = \max_i\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\right). \tag{6.4}$$

ОПР виходить із того, що усі відхилення результату від «середнього» випадку припустимі, і вибирає рішення, оптимальні з цього погляду;

3) Песимістична позиція ОПР:

$$\max_i e_{ir} = \max_i\left(\min_j e_{ij}\right). \tag{6.5}$$

ОПР виходить з того, що треба орієнтуватися на найменш сприятливий випадок і приписує кожному з альтернативних варіантів найгірший з можливих результатів. Після цього він вибирає самий вигідний варіант, тобто очікує найкращого результату в найгіршому випадку;

4) Позиція відносного песимізму ОПР:

$$\min_i e_{ir} = \min_i \max_j\left(\max_i e_{ij} - e_{ij}\right). \tag{6.6}$$

Для кожного варіанта рішення ОПР оцінює втрати в результаті в порівнянні з визначеним по кожному варіанту найкращим результатом, а потім із сукупності найгірших результатів ОПР вибирає найкращий відповідно до представленої оцінної функції.

Ряд таких оцінних функцій можна було продовжити. Деякі з них одержали широке поширення в господарській діяльності. Так, якщо умови експлуатації заздалегідь не відомі, орієнтуються, звичайно, на найменш сприятливу ситуацію. Це відповідає оцінної функції (6.5). Часто використовуються також функції (6.4) і (6.6). Оцінна функція (6.3) дотепер у технічних додатках не застосовувалася. Розглянемо класичні критерії прийняття рішень.

6.3. Мінімаксний критерій (ММ)

Цей критерій використовує оцінну функцію (6.5), що відповідає позиції крайньої обережності, тобто

$$z_{MM} = \max_i \min_j e_{ij}, \tag{6.7}$$

де z_{MM} – оцінна функція ММ-критерію і справедливо наступне співвідношення

$$E_0 = \left\{E_{i0} / E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij}\right\}.$$

Обрані варіанти цілком виключають ризик. Це означає, що ОПР не може зштовхнутися з гіршим результатом, чим той, на який вона орієнтується. Які би умови F_j ні зустрілися, результат не може виявитися нижче z_{MM}. Ця властивість змушує вважати мінімаксний критерій одним із фундаментальних. Тому в технічних задачах він застосовується найчастіше, як свідомо, так і не усвідомлено. Однак, положення про відсутність ризику коштує різних утрат.

Нехай матриця рішень представлена у виді:

$$\begin{array}{ccc} & F_1 & F_2 \\ E_1 & 1 & 100 \\ E_2 & 1{,}1 & 1{,}1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & F_r \\ E_1 & 1 \\ E_2 & 1{,}1 \end{array}, \qquad z_{MM} = 1{,}1.$$

Хоча варіант E_1 здається більш вигідним, відповідно до ММ-критерію (6.7) оптимальним варто вважати $E_0 = \{E_2\}$. Ухвалення рішення за даним критерієм може виявитися ще менш розумним, якщо стан F_2 зустрічається частіше, ніж стан F_1 і рішення реалізується багаторазово.

Вибираючи варіант E_2, що пропонується ММ-критерієм, ми уникаємо невдалого результату 1, що реалізується у варіанті E_1 при зовнішньому стані F_1, зате втрачаємо виграш 100, одержуючи усього тільки 1,1. Цей приклад показує, що в численних практичних ситуаціях песимізм ММ-критерію може виявитися дуже невигідним.

Тому застосування ММ-критерію виправдується, якщо ситуація, у якій приймається рішення, характеризується наступними обставинами:

- про можливості появи зовнішніх станів F_j нічого не відомо;
- рішення реалізується лише один раз;
- необхідно виключити який би те ні було ризик, тобто ні при яких умовах F_j не допускається одержати результат, менший чим z_{MM}.

6.4. Критерій Байєса – Лапласа (BL-критерій)

Нехай p_j – імовірність появи зовнішнього стану F_j, тоді для BL-критерію оцінна функція має вигляд

$$z_{BL} = \max_i e_{ir} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j \,, \tag{6.8}$$

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \,/\, E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j \wedge \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \right\}.$$

Правило вибору можна інтерпретувати в такий спосіб: матриця рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що містить математичне чекання значень кожного з рядків. Вибираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких є найбільше значення e_{ir} цього стовпця .

Умови, при яких використовується даний критерій:

- імовірності появи станів F_j відомі і не залежать від часу;

– рішення реалізується (теоретично) нескінченно багато разів;

– для кінцевого числа реалізацій рішення допускається деякий ризик.

6.5 .Критерій Севіджа (S-критерій)

Сформуємо оцінну функцію. Нехай

$$a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij} \qquad 6.9)$$

$$e_{ir} = \max_j a_{ij} = \max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right), \qquad (6.10)$$

тоді оцінна функція має вигляд

$$z_S = \min_i e_{ir} = \min_i \left(\max_j \left(\max_i e_{ij} - e_{ij} \right) \right). \qquad (6.11)$$

Тоді множина оптимальних варіантів рішення є

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \,\middle|\, E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \min_i e_{ir} \right\}.$$

Величину $a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}$ можна інтерпретувати подвійно:

– як максимальний додатковий виграш, що досягається, якщо в стані F_j замість варіанта E_i вибрати інший, оптимальний для цього зовнішнього стану варіант;

– як утрати (штрафи), що виникають у стані F_j при заміні оптимального для нього варіанта на варіант E_i.

Тоді величина e_{ir} являє собою – при інтерпретації a_{ij} як утрати – максимально можливі втрати (по всіх зовнішніх станах $F_j, j = 1,...,n$) у випадку вибору варіанта E_i. Далі максимально можливі втрати мінімізуються за рахунок вибору підходящого варіанта E_i.

Правило вибору оптимального варіанта за критерієм Севіджа:

– кожний елемент матриці рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ віднімається з найбільшого результату $\max\limits_{i} e_{ij}$ відповідного стовпця. Різниці a_{ij} утворять матрицю залишків $\left\| a_{ij} \right\|$. Ця матриця доповнюється стовпцем найбільших різниць e_{ir};

– вибираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких є найменше для цього стовпця значення.

Умови застосування S-критерію такі ж, як для ММ-критерію.

6.6. Приклад використання критеріїв

Дано матрицю рішень $\left\| e_{ij} \right\|$, розміром $m \times n$, $m = 8$, $n = 8$, результатами якої є збитки (рис. 6.1). Здійснити вибір найкращого варіанту рішення за допомогою критеріїв: мінімаксного, Байєса – Лапласа і Севіджа. Відомо, що імовірності появи зовнішніх станів F_j, j=1,...,8 мають наступні значення: $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = ... = 0{,}1$.

$$\left\| e_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} -5{,}1 & -7{,}5 & -2{,}4 & -7{,}1 & -8{,}17 & -6{,}2 & -3{,}85 & -6{,}4 \\ -5{,}7 & -5{,}06 & -6{,}3 & -7{,}9 & -8{,}0 & -5{,}1 & -4{,}8 & -6{,}22 \\ -8{,}5 & -5{,}72 & -6{,}18 & -3{,}1 & -1{,}2 & -5{,}5 & -7{,}2 & -3{,}16 \\ -7{,}51 & -6{,}15 & -4{,}2 & -1{,}58 & -7{,}7 & -6{,}2 & 9{,}11 & -4{,}18 \\ -4{,}8 & -6{,}12 & -6{,}0 & -8{,}2 & -5{,}13 & -7{,}14 & -9{,}02 & -5{,}17 \\ -3{,}11 & -5{,}46 & -6{,}2 & -7{,}3 & -3{,}11 & -9{,}26 & -7{,}0 & -6{,}0 \\ -5{,}17 & -3{,}26 & -5{,}4 & -4{,}8 & -6{,}8 & -5{,}3 & -6{,}12 & -5{,}3 \\ -2{,}1 & -6{,}83 & -5{,}2 & -5{,}7 & -6{,}11 & -8{,}5 & -5{,}4 & -6{,}81 \end{matrix} \right\|$$

Рисунок 6.1 – Матриця рішень

Рішення. Спочатку будемо шукати оптимальний варіант рішення за допомогою ММ-критерію, для цього матрицю рішень доповнюємо стовпцем $e_{ir} = \min\limits_{j} e_{ij}$ – найменших результатів кожного рядка, тобто

$$\left\| e_{ir} \right\| = \left\| \begin{array}{c} -8{,}17 \\ -8{,}0 \\ -8{,}5 \\ -9{,}11 \\ -9{,}02 \\ -9{,}26 \\ -6{,}8 \\ -8{,}5 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow E_7 \\ \\ \end{array}$$

Тепер будемо вибирати варіанти E_{i0}, у рядках яких є найбільше значення e_{ir} цього стовпця, тобто $Z_{MM} = \max\limits_{i} e_{ir} = -6{,}8$. Цей результат відповідає оптимальному варіанту $E_{i0} = \{ E_7 \}$.

Застосуємо критерій Байєса – Лапласа для пошуку оптимального варіанта. Знайдемо математичні чекання кожного рядка $\sum\limits_{j=1}^{n} e_{ij} p_j$ і запишемо їх у додатковий стовпець e_{ir}:

$$\left\| \begin{array}{lll} -5{,}10 \times 0{,}3 & - & 0{,}1 \times (7{,}50 + 2{,}40 + 7{,}10 + 8{,}17 + 6{,}20 + 3{,}85 + 6{,}40) \\ -5{,}70 \times 0{,}3 & - & 0{,}1 \times (5{,}06 + 6{,}30 + 7{,}90 + 8{,}00 + 5{,}10 + 4{,}80 + 6{,}22) \\ -8{,}50 \times 0{,}3 & - & 0{,}1 \times (5{,}72 + 6{,}18 + 3{,}10 + 1{,}20 + 5{,}50 + 7{,}20 + 3{,}16) \\ -7{,}51 \times 0{,}3 & - & 0{,}1 \times (6{,}15 + 4{,}20 + 1{,}58 + 7{,}70 + 6{,}20 + 9{,}11 + 4{,}18) \\ -4{,}80 \times 0{,}3 & - & 0{,}1 \times (6{,}12 + 6{,}00 + 8{,}20 + 5{,}13 + 7{,}14 + 9{,}02 + 5{,}17) \\ -3{,}11 \times 0{,}3 & - & 0{,}1 \times (5{,}46 + 6{,}20 + 7{,}30 + 3{,}11 + 9{,}26 + 7{,}00 + 6{,}00) \\ -5{,}17 \times 0{,}3 & - & 0{,}1 \times (3{,}26 + 5{,}40 + 4{,}80 + 6{,}80 + 5{,}30 + 6{,}12 + 5{,}30) \\ -2{,}10 \times 0{,}3 & - & 0{,}1 \times (6{,}83 + 5{,}20 + 5{,}70 + 6{,}11 + 8{,}50 + 5{,}40 + 6{,}81) \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} -5{,}692 \\ -6{,}048 \\ -5{,}756 \\ -6{,}165 \\ -6{,}118 \\ -5{,}366 \\ -5{,}249 \\ -5{,}085 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \\ \\ \\ = \left\| e_{ir} \right\| \\ \\ \\ \\ \leftarrow E_8 \end{array}$$

Далі застосуємо оцінну функцію (6.8) і знайдемо оптимальний варіант. Оскільки $Z_{BL} = \max\limits_{i} e_{ir} = -5{,}085$, то такий результат відповідає оптимальному варіанту $E_{i0} = \left\{ E_8 \right\}$.

Для використання критерію Севіджа побудуємо матрицю різниць $\left\| a_{ij} \right\|$ відповідно до формули (6.9):

$$\left\| a_{ij} \right\| = \left\| \begin{array}{cccccccc} 3{,}00 & 4{,}24 & 0{,}00 & 5{,}52 & 6{,}97 & 1{,}10 & 0{,}00 & 3{,}24 \\ 3{,}60 & 1{,}80 & 3{,}90 & 6{,}32 & 6{,}80 & 0{,}00 & 0{,}95 & 3{,}06 \\ 6{,}40 & 2{,}46 & 3{,}78 & 1{,}52 & 0{,}00 & 0{,}40 & 3{,}35 & 0{,}00 \\ 5{,}41 & 2{,}89 & 1{,}80 & 0{,}00 & 6{,}50 & 1{,}10 & 5{,}26 & 1{,}02 \\ 2{,}70 & 2{,}86 & 3{,}60 & 6{,}62 & 3{,}93 & 2{,}04 & 5{,}17 & 2{,}01 \\ 1{,}01 & 2{,}20 & 3{,}80 & 5{,}72 & 1{,}91 & 4{,}16 & 3{,}15 & 2{,}84 \\ 3{,}07 & 0{,}00 & 3{,}00 & 3{,}22 & 5{,}60 & 0{,}20 & 2{,}27 & 2{,}14 \\ 0{,}00 & 3{,}57 & 2{,}80 & 4{,}12 & 4{,}91 & 3{,}40 & 1{,}55 & 3{,}65 \end{array} \right\|$$

Для цієї матриці побудуємо додатковий стовпець $e_{ir} = \max\limits_{j} a_{ij}$ відповідно формулі (6.10) і за допомогою оцінюючої функції $Z_S = \min\limits_{i} e_{ir} = 4{,}91$ знайдемо оптимальний варіант рішення $E_{i0} = \left\{ E_8 \right\}$.

$$\left\| e_{ir} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 6{,}97 \\ 6{,}80 \\ 6{,}40 \\ 6{,}50 \\ 6{,}62 \\ 5{,}72 \\ 5{,}60 \\ 4{,}91 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow E_8 \end{array}$$

Таким чином, використовуючи класичні критерії, ми одержали ряд оптимальних варіантів $E_{i0} = \left\{ E_7, E_8 \right\}$. Для вибору найкращого з них необхідні додаткові умови.

ЛЕКЦІЯ 7

МЕТОДИ ПОШУКУ Й ВИБОРУ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ. ПОХІДНІ КРИТЕРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

7.1. Критерій Гурвіца (HW-критерій).

7.2. Критерій Ходжа – Лемана (HL-критерій).

7.3. Критерій Гермейєра (G-критерій).

7.4. Приклад використання похідних критеріїв.

7.1. Критерій Гурвіца (HW-критерій)

Намагаючись зайняти найбільш урівноважену позицію, Гурвіц запропонував критерій, оцінна функція якого знаходиться десь між точками зору граничного оптимізму і крайнього песимізму.

$$z_{HW} = \max_i e_{ir} = \max_i \left(c \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij} \right), \tag{7.1}$$

де $0 \le c \le 1$ – множник ваги.

Тоді

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \left(c \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij} \right) \wedge 0 \le c \le 1 \right\}.$$

Правило вибору відповідно до HW-критерію формулюється в такий спосіб: матриця рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ доповнюється стовпцем, що містить середні зважені найменшого і найбільшого результатів для кожного рядка.

Вибираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких є найбільші елементи e_{ir} цього стовпця.

Для $c = 1$ критерій Гурвица перетворюється в ММ-критерій, а для $c = 0$ він перетворюється в критерій азартного гравця. Найчастіше множник ваги приймається в якості деякої «середньої» точки зору, $c = 0{,}5$.

При виборі HW-критерію пред'являються наступні вимоги:

– про ймовірності появи станів F_j нічого невідомо;

– реалізується лише мала кількість рішень;

– допускається деякий ризик.

7.2. Критерій Ходжа – Лемана (HL-критерій)

Оцінна функція даного критерію визначається:

$$z_{HL} = \max_i e_{ir} = \max_i \left(\nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j + (1-\nu) \min_j e_{ij} \right), 0 \le \nu \le 1. \quad (7.2)$$

Множина оптимальних рішень записується у виді:

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \left[\nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j + (1-\nu) \min_j e_{ij} \right] \wedge 0 \le \nu \le 1 \right\}.$$

Параметр ν виражає ступінь довіри до розподілу ймовірностей. Цей параметр практично не піддається оцінці, тобто вибір параметра ν піддається впливу суб'єктивізму.

7.3. Критерій Гермейєра (G-критерій)

Даний критерій орієнтований на величини втрат, тобто на негативні значення усіх e_{ij}.

Як оцінна функція виступає вираз:

$$z_G = \max_i e_{ir} = \max_i \min_j e_{ij} p_j, \quad (7.3)$$

тоді

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij} p_j \wedge e_{ij} < 0 \right\}.$$

Оскільки в господарських задачах переважно мають справу з витратами, умова $e_{ij} < 0$ звичайна виконується.

У випадку ж, коли серед величин e_{ij} зустрічаються і позитивні значення, можна перейти до строго негативних значень за допомогою перетворення $e_{ij} - a$, при $a > 0$, де $a = \max_{i,j} e_{ij} + 1$. Вибір оптимального варіанта рішення істотно залежить від a.

Правило вибору відповідно до G-критерію формулюється в такий спосіб: матриця рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що містить у кожному рядку найменший добуток наявного у ній результату на ймовірність відповідного стану F_j. Вибираються ті варіанти E_{i0}, у рядках яких знаходиться найбільше значення e_{ir} цього стовпця.

G-критерій узагальнює ММ-критерій. У випадку рівномірного розподілу $p_j = \frac{1}{n}, j = 1,2,...,n$ критерії G і ММ стають ідентичними.

Умови застосовності G-критерію:

– імовірності появи станів F_j відоме;

– рішення реалізовується один або багато разів;

– допускається деякий ризик.

Якщо функція розподілу відома не настільки явно, то при вживанні G-критерію, мають невиправдано великий ризик.

7.4. Приклад використання похідних критеріїв

Розглядається задача вибору оптимального варіанта рішення за допомогою похідних критеріїв Гурвіца, Ходжа – Лемана, Гермейєра для матриці рішень з лекції 6 із такими ж умовами розподілу ймовірностей появи зовнішніх станів, якщо відомо, що c = 0,5, v = 0,5.

Рішення. Спочатку знайдемо оптимальний варіант рішення за допомогою HW-критерію, для цього визначимо максимальні $\max\limits_{j} e_{ij}$ і мінімальні $\min\limits_{j} e_{ij}$ результати кожного рядка і помножимо їх на коефіцієнти (1-c)=0,5, c=0,5, відповідно. Адже:

$$0{,}5 \times \max_{j} e_{ij} = \begin{Vmatrix} -2{,}4 \times 0{,}5 \\ -4{,}8 \times 0{,}5 \\ -1{,}2 \times 0{,}5 \\ -1{,}58 \times 0{,}5 \\ -4{,}8 \times 0{,}5 \\ -3{,}11 \times 0{,}5 \\ -3{,}26 \times 0{,}5 \\ -2{,}1 \times 0{,}5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1{,}2 \\ -2{,}4 \\ -0{,}6 \\ -0{,}79 \\ -2{,}4 \\ -1{,}55 \\ -1{,}63 \\ -1{,}05 \end{Vmatrix}$$

$$0{,}5 \times \min_{j} e_{ij} = \begin{Vmatrix} -8{,}17 \times 0{,}5 \\ -8{,}0 \times 0{,}5 \\ -8{,}5 \times 0{,}5 \\ -9{,}11 \times 0{,}5 \\ -9{,}02 \times 0{,}5 \\ -9{,}26 \times 0{,}5 \\ -6{,}8 \times 0{,}5 \\ -8{,}5 \times 0{,}5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -4{,}08 \\ -4{,}0 \\ -4{,}25 \\ -4{,}55 \\ -4{,}51 \\ -4{,}63 \\ -3{,}4 \\ -4{,}25 \end{Vmatrix}$$

Додатковий стовпець $e_{ir} = \left(c \min\limits_{j} e_{ij} + (1 - c) \max\limits_{j} e_{ij} \right)$ здобуває виду

$$\| e_{ir} \| = \begin{Vmatrix} -1{,}2 \\ -2{,}4 \\ -0{,}6 \\ -0{,}79 \\ -2{,}4 \\ -1{,}55 \\ -1{,}63 \\ -1{,}05 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -4{,}08 \\ -4{,}0 \\ -4{,}25 \\ -4{,}55 \\ -4{,}51 \\ -4{,}63 \\ -3{,}4 \\ -4{,}25 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -5{,}28 \\ -6{,}4 \\ -4{,}85 \\ -5{,}34 \\ -6{,}91 \\ -6{,}18 \\ -5{,}03 \\ -5{,}3 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow E_3 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

По формулі (7.1) значення оцінюючої функції критерію Гурвіца є $Z_{HW} = -4{,}85$, що відповідає оптимальному варіанту $E_{i0} = \{ E_3 \}$.

Застосуємо критерій Ходжа – Лемана для пошуку оптимального варіанта. Знайдемо математичні чекання $\sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j$ і мінімальні елементи $\min_j e_{ij}$ кожного рядка і помножимо їх на коефіцієнти v = 0,5 і (1- v)=0,5, відповідно. Адже:

$$0{,}5 \times \sum_{j=1}^{n} e_{ij}\, p_j = \begin{Vmatrix} -5{,}692 \times 0{,}5 \\ -6{,}048 \times 0{,}5 \\ -5{,}756 \times 0{,}5 \\ -6{,}165 \times 0{,}5 \\ -6{,}118 \times 0{,}5 \\ -5{,}366 \times 0{,}5 \\ -5{,}249 \times 0{,}5 \\ -5{,}085 \times 0{,}5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2{,}846 \\ -3{,}024 \\ -2{,}878 \\ -3{,}082 \\ -3{,}059 \\ -2{,}683 \\ -2{,}624 \\ -2{,}542 \end{Vmatrix}$$

$$0{,}5 \times \min_j e_{ij} = \begin{Vmatrix} -8{,}17 \times 0{,}5 \\ -8{,}0 \times 0{,}5 \\ -8{,}5 \times 0{,}5 \\ -9{,}11 \times 0{,}5 \\ -9{,}02 \times 0{,}5 \\ -9{,}26 \times 0{,}5 \\ -6{,}8 \times 0{,}5 \\ -8{,}5 \times 0{,}5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -4{,}08 \\ -4{,}0 \\ -4{,}25 \\ -4{,}55 \\ -4{,}51 \\ -4{,}63 \\ -3{,}4 \\ -4{,}25 \end{Vmatrix}$$

Додатковий стовпець $e_{ir} = \left[v \sum_{j=1}^{n} e_{ij} p_j + (1 - v) \min_j e_{ij} \right]$ здобуває виду:

$$\left\| e_{ir} \right\| = \begin{Vmatrix} -2,846 \\ -3,024 \\ -2,878 \\ -3,082 \\ -3,059 \\ -2,683 \\ -2,624 \\ -2,542 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -4,08 \\ -4,0 \\ -4,25 \\ -4,55 \\ -4,51 \\ -4,63 \\ -3,4 \\ -4,25 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -6,926 \\ -7,024 \\ -7,128 \\ -7,632 \\ -7,569 \\ -7,313 \\ -6,024 \\ -6,792 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow E_7 \\ \\ \end{matrix}$$

Далі застосуємо оцінюючу функцію (7.2) і знайдемо оптимальний варіант. Оскільки $Z_{HL} = \max\limits_{i} e_{ir} = -6,024$, то такий результат відповідає оптимальному варіанту $E_{i0} = \left\{ E_7 \right\}$.

Для використання критерію Гермейєра побудуємо додатковий стовпець $e_{ir} = \min\limits_{j} \left(e_{ij} \; p_j \right)$:

$$\min_j \begin{Vmatrix} -5,1 \times 0,3 & -7,5 \times 0,1 & -2,4 \times 0,1 & -7,1 \times 0,1 & -8,17 \times 0,1 & -6,2 \times 0,1 & -3,85 \times 0,1 & -6,4 \times 0,1 \\ -5,7 \times 0,3 & -5,06 \times 0,1 & -6,3 \times 0,1 & -7,9 \times 0,1 & -8,0 \times 0,1 & -5,1 \times 0,1 & -4,8 \times 0,1 & -6,22 \times 0,1 \\ -8,5 \times 0,3 & -5,72 \times 0,1 & -6,18 \times 0,1 & -3,1 \times 0,1 & -1,2 \times 0,1 & -5,5 \times 0,1 & -7,2 \times 0,1 & -3,16 \times 0,1 \\ -7,51 \times 0,3 & -6,15 v 0,1 & -4,2 \times 0,1 & -1,58 \times 0,1 & -7,7 \times 0,1 & -6,2 \times 0,1 & -9,11 \times 0,1 & -4,18 \times 0,1 \\ -4,8 \times 0,3 & -6,12 \times 0,1 & -6,0 \times 0,1 & -8,2 \times 0,1 & -5,13 \times 0,1 & -7,14 \times 0,1 & -9,02 \times 0,1 & -5,17 \times 0,1 \\ -3,11 \times 0,3 & -5,46 \times 0,1 & -6,2 \times 0,1 & -7,3 \times 0,1 & -3,11 \times 0,1 & -9,26 \times 0,1 & -7,0 \times 0,1 & -6,0 \times 0,1 \\ -5,17 \times 0,3 & -3,26 \times 0,1 & -5,4 \times 0,1 & -4,8 \times 0,1 & -6,8 \times 0,1 & -5,3 \times 0,1 & -6,12 \times 0,1 & -5,3 \times 0,1 \\ -2,1 \times 0,3 & -6,83 \times 0,1 & -5,2 \times 0,1 & -5,7 \times 0,1 & -6,11 \times 0,1 & -8,5 \times 0,1 & -5,4 \times 0,1 & -6,81 \times 0,1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \min_j \begin{Vmatrix} -1,53 & -0,75 & -0,24 & -0,71 & -0,82 & -0,62 & -0,39 & -0,64 \\ -1,71 & -0,51 & -0,63 & -0,79 & -0,80 & -0,51 & -0,48 & -0,62 \\ -2,55 & -0,57 & -0,62 & -0,31 & -0,12 & -0,55 & -0,72 & -0,32 \\ -2,25 & -0,62 & -0,42 & -0,16 & -0,77 & -0,62 & -0,91 & -0,42 \\ -1,44 & -0,61 & -0,60 & -0,82 & -0,51 & -0,71 & -0,90 & -0,52 \\ -0,93 & -0,55 & -0,62 & -0,73 & -0,31 & -0,93 & -0,70 & -0,60 \\ -1,55 & -0,33 & -0,54 & -0,48 & -0,68 & -0,53 & -0,61 & -0,53 \\ -0,63 & -0,68 & -0,52 & -0,57 & -0,61 & -0,85 & -0,54 & -0,68 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} -1{,}53 \\ -1{,}71 \\ -2{,}55 \\ -2{,}25 \\ -1{,}44 \\ -0{,}93 \\ -1{,}55 \\ -0{,}85 \end{Vmatrix} = \| e_{ir} \| \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow E_8 \end{matrix}$$

Величина оцінюючої функції відповідно до формули (7.3) є $Z_G = \max_i e_{ir} = -0{,}85$.

Знайдемо оптимальний варіант рішення: $E_{i0} = \{ E_8 \}$.

ЛЕКЦІЯ 8

КЛАСТЕРНИЙ АНАЛІЗ. КЛАСИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ.

8.1. Основна мета кластерного аналізу.

8.2. Нормування показників об'єктів.

8.3. Поняття метрики.

8.4. Основні властивості кластерів.

8.5. Огляд методів кластерного аналізу.

8.6. Прямий алгоритм класифікації n об’єктів.

8.1. Основна мета кластерного аналізу

Основна мета *кластерного аналізу* – виділити у вихідних багатомірних даних такі однорідні підмножини, щоб об’єкти усередині групи були схожі один на одного, а об’єкти з різних груп – не схожі. Під подібністю розуміється близькість об’єктів у багатомірному просторі ознак, і тоді задача зводиться до виділення в цьому просторі природних скупчень (кластерів) об’єктів, що вважаються однорідними групами.

У кластерному аналізі існує проблема виміру близькості об’єктів. Основні труднощі, що виникають при цьому: неоднозначність вибору способу нормування й визначення відстані між об’єктами.

8.2. Нормування показників об'єктів

Нормування показників (ознак) об'єктів являє собою перехід до деякого однакового опису всіх ознак і введенню нової умовної одиниці виміру. Нормування необхідно, коли ознаки обмірювані в різних одиницях виміру.

Приведемо найбільш розповсюджені способи нормування ознак (перехід від вихідних значень x до нормованого z):

$$z^1 = (x - \bar{x})/\sigma,$$
$$z^2 = x/\bar{x},$$
$$z^3 = x/x',$$
$$z^4 = x/x_{\max},$$
$$z^5 = (x - \bar{x})/(x_{\max} - x_{\min}),$$

де $\bar{x}, \sigma$ – відповідно середнє й середнє квадратичне відхилення ознаки x; x' – деяке еталонне (нормативне) значення x, $x_{\max}, x_{\min}$ – найбільше й найменше значення x.

8.3. Поняття метрики

Відстанню (метрикою) між об'єктами в просторі ознак називається така величина $d(x, y)$, що задовольняє аксіомам:

1) симетрія: $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$;

2)нерівність трикутника. Дано три об'єкти x, y, z відстані між ними задовольняють умові: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$;

3) розрізнення нетотожних об'єктів: якщо $d(x, y) \neq 0$, те $x \neq y$;

4) нерозрізненість ідентичних об'єктів: якщо $d(x, y)$=0, те x й y ідентичні.

Перераховані чотири вимоги повинні бути обов'язковими атрибутами міри подібності між об'єктами. Розглянемо основні способи визначення близькості між об'єктами або міри подібності. Виділяють наступні метрики:

Лінійна відстань (манхетеньска відстань або відстань міських кварталів):

$$d_{ij}^L = \sum_{k=1}^{m} \left| x_{ik} - x_{jk} \right|, \tag{8.1}$$

де d_{ij} – відстань між об'єктами i, j, x_{ik} – значення k-ї ознаки для i-го об'єкта;

Евклідова відстань:

$$d_{ij}^{E} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(x_{ik} - x_{jk}\right)^{2}} \ . \qquad (8.2)$$

Узагальнена відстань Мінковського:

$$d_{ij}^{P} = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{m} \left(x_{ik} - x_{jk}\right)^{p}} \ . \qquad (8.3)$$

Метрики відстані мають недоліки, що складаються в тім, що оцінка подібності залежить від розходжень у зсуву даних. Ознаки, у яких одночасно великі абсолютні значення і стандартні відхилення, можуть принизити вплив ознак із меншими абсолютними розмірами і стандартними відхиленнями. Щоб зменшити такий вплив, вихідні дані нормують за допомогою нормувань z^1 або z^5.

8.4. Основні властивості кластерів

Хоча немає загальноприйнятого строгого математичного визначення поняття «кластер», багато дослідників виділяють основні *властивості кластерів* – щільність, дисперсія, розмір, форма й віддільність.

Щільність – це властивість, що дозволяє визначити кластер, як скупчення точок у просторі даних, відносно щільне в порівнянні з іншими областями простору, що містять або мало точок, або не мають їх зовсім.

Дисперсія характеризує ступінь розсіювання точок у просторі щодо центра кластера. Дисперсія й щільність тісно взаємозалежні між собою. Кластер можна назвати «щільним», якщо всі точки знаходяться поблизу його центра ваги.

Властивість кластерів – *розмір* зв'язаний з дисперсією. Якщо кластер можна ідентифікувати, то можна виміряти його радіус. Ця властивість корисна, якщо розглянуті кластери є гіперсферами в багатомірному просторі.

Форма – це розташування точок у просторі. Незважаючи на те що кластери зображують у формі гіперсфер або еліпсоїдів, можливі кластери, які мають подовжені форми.

Віддільність характеризує ступінь перекриття кластерів і наскільки далеко друг від друга вони розташовані в просторі.

Згідно Еверіту кластери – це безперервні області простору з відносно високою щільністю точок, відділені від інших таких само областей областями з відносно низькою щільністю точок.

8.5. Огляд методів кластерного аналізу

Кластерні методи утворюють сім основних сімейств:

1) ієрархічні агломеративні методи;

2) ієрархічні дівізімні методи;

3) ітеративні методи угруповання;

4) методи пошуку модальних значень щільності;

5) факторні методи;

6) методи згущень;

7) методи, що використовують теорію графів.

Дані сімейства відповідають різним підходам до створення груп, і застосування різних методів до тих самих даних може привести до результатів, які сильно розрізняються.

Із сімейств кластерних методів найбільше часто на практиці вживаються ієрархічні агломеративні методи, що використовують метрики відстані d_{ij}^{L}, d_{ij}^{E}, d_{ij}^{P} для визначення міри подібності між об'єктами. Ієрархічні агломеративні методи розрізняються, головним чином, за правилами (стратегіями) побудови кластерів. Існує багато різних стратегій створення кластерів, кожна з яких породжує специфічний ієрархічний метод: найближчого сусіда, далекого сусіда, середнього незваженого зв'язку, гнучкий, агломеративне об'єднання й інші. Однак, усі ці методи підлеглі єдиному алгоритму – прямому алгоритму класифікації n об'єктів.

8.6. Прямий алгоритм класифікації n об'єктів

Нехай задана матриця $A_{n\times m}$, де n – число об'єктів, m – число ознак, що описують кожний об'єкт; $a_{ij}, i=1,...,n, j=1,...,m$ – елемент матриці $A_{n\times m}$, що визначає значення j ознаки для i об'єкта; $a_{ij} \geq 0$.

Крок 1. На цьому кроці кожний об'єкт вважається окремим кластером, тобто на початку маємо n кластерів. Обчислимо усі відстані d_{ij}, i, j=1,2,...,n по одній з формул (1) – (3). Складемо матрицю G розміром $n \times n$ відстаней між усіма n об'єктами, тобто

$$G = \begin{Vmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ . & . & . & . \\ d_{n-1,1} & d_{n-1,2} & \cdots & d_{n-1,n} \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{Vmatrix}$$

Крок 2. У матриці G відшукаємо мінімальну відстань d_{ij}, $i \neq j$, (це значить, що i-й і j-й об'єкти мають максимальну міру подібності) і складемо з них новий (n+1)-й кластер. Позначимо цей кластер через $h=(i \cup j)$. Якщо є декілька мінімальних d_{ij}, то вибирають який-небудь із них.

Крок 3. Обчислимо відстані між новим кластером h і іншими об'єктами, що залишилися ще некласифікованими , по формулі

$$d_{kh} = \alpha_1 d_{ik} + \alpha_2 d_{jk} + \beta d_{ij} + \gamma \left| d_{ik} - d_{jk} \right| \tag{8.4}$$

$$k = 1,2,...,i-1,i+1,...,j-1,j+1,...,n,$$

де d_{ik} – відстань між k-м об'єктом і i-м об'єктом, що входить у кластер h, d_{jk} – відстань між k об'єктом і j об'єктом, що входить у кластер h, d_{ij} – відстань, що було знайдено на кроці 2. По формулі (8.4) не визначається відстань між окремими об'єктами, а визначається відстань між кластером і кластером або між кластером і об'єктом.

Параметри α_1, α_2, β, γ визначають стратегії об'єднання кластерів у нові кластери.

Крок 4. Побудуємо нову матрицю відстаней G_1 з матриці G шляхом додавання (n+1) рядка і (n+1) стовпця з елементами d_{kh}, k=1,2,...,i-1,i+1,...,j-1,j+1,...,n, потім i-й і j-й рядки, а також i-й і j-й стовпці викреслюються. Для матриці G_1 шукаємо знову мінімальну відстань d_{ij}, $i \neq j$ і формуємо наступний (n+2) кластер. Далі, якщо цей кластер має номер (2n-1), то процедура формування кластерів закінчується й переходимо до кроку 5, якщо номер кластера не дорівнює (2n-1), те переходимо до кроку 3. На кожному кроці запам'ятовуємо мінімальну величину і до якого кластера вона відноситься.

Крок 5. Будуємо так називану дендрограму (графік покрокової класифікації об'єктів), де по осі абсцис відкладаємо номера об'єктів (кластерів), а по осі ординат рівень об'єднання або значення мінімальних d_{ij}. Кінець алгоритму.

ЛЕКЦІЯ 9

КЛАСТЕРНИЙ АНАЛІЗ. КЛАСИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ. СТРАТЕГІЇ СТВОРЕННЯ КЛАСТЕРІВ

9.1. Стратегія найближчого сусіда.

9.2. Приклад використання стратегії найближчого сусіда.

9.3.Стратегія далекого сусіда.

9.4. Стратегія середнього зв'язку, що не зважується.

9.5. Гнучка стратегія.

9.6. Стратегія агломеративного об'єднання.

9.1. Стратегія найближчого сусіда

Відстань між двома кластерами визначається як відстань між двома найближчими об'єктами в цих кластерах:

$$d_{kh} = \min(d_{ik}, d_{jk}) \tag{9.1}$$

Параметри стратегії: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5, \beta = 0, \gamma = -0,5$.

Стратегія є монотонною, тобто від кроку до кроку значення максимальної міри подібності не зменшується.

Дана стратегія стійка до будь-яких перетворень даних і будь-якому переупорядкуванню об'єктів у матриці A . Головний недолік стратегії найближчого сусіда в тім, що вона приводить до появи «ланцюжків» (появі великих довгастих кластерів).

9.2. Приклад використання стратегії найближчого сусіда

Дано матрицю ознак $\left\| e_{ij} \right\|$ розміром $n \times m$, n=7, m=2. Здійснити класифікацію об'єктів у схожі групи (кластери), використовуючи прямій алгоритм класифікації. Для обчислення відстані між об'єктами необхідно використовувати метрику Евкліда й стратегію найближчого сусіда.

Рішення.

Крок 1. Маємо сім об'єктів, що описуються двома ознаками e_1, e_2.

$$\left\| e_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} 8 & 5 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 9 & 3 \\ 7 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{matrix} \right\|$$

Вважаємо, що кожний окремий об'єкт визначає кластер. Побудуємо початкову матрицю відстаней G, для цього обчислимо відстані Евкліда по формулі

$$d^{E}_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^{2} \left(e_{ik} - e_{jk} \right)^2} \ , \ i, j = 1, 2, \ \ldots, 7 \ , \ i \neq j \ .$$

Матриця відстаней симетрична і має вигляд (табл. 9.1):

Таблиця 9.1 – Початкова матриця відстаней G

Номер кластера	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**		min
1	0,00	5,66	5,83	2,24	1,00	4,12	4,24		1,00
2		0,00	1,41	5,39	5,00	5,00	1,41		1,41
3			0,00	6,08	5,00	4,12	2,00		2,00
4				0,00	2,83	5,83	4,12		2,83
5					0,00	3,16	3,61		3,16
6						0,00	4,12		4,12
7							0,00		

Крок 2. Елемент $d_{15} = \min\limits_{i,j} d_{ij}^{E} = 1$ матриці відстаней G є мінімальний, тобто об’єкти 1 і 5 найбільш схожі, і складають новий 8 кластер або $8 = (1 \cup 5)$.

min=1,00 Кластер 8: 1,5

Крок 3,4. Обчислимо по формулі (9.1) відстані між новим 8 кластером і іншими об’єктами, що залишилися поки некласифікованими, тобто

$$d_{k8} = \min(d_{1k}, d_{5k}),\ k = 2,3,4,6,7,$$

$$d_{28} = 5{,}00\ ,\ d_{38} = 5{,}00\ ,\ d_{48} = 2{,}24\ ,\ d_{68} = 3{,}16\ ,\ d_{78} = 3{,}61$$

Нова матриця відстаней G_1 формується з матриці G шляхом додавання 8 рядка і 8 стовпця з елементами d_{28} , d_{38} , d_{48} , d_{68} , d_{78} , а потім 1, 5 рядки і 1, 5 стовпці віддаляються (табл. 9.2).

Таблиця 9.2 – Матриця відстаней G_1

Номер кластера	**2**	**3**	**4**	**6**	**7**	**8**		min
2	0,00	1,41	5,39	5,00	1,41	5,00		1,41
3		0,00	6,08	4,12	2,00	5,00		2,00
4			0,00	5,83	4,12	2,24		2,24
6				0,00	4,12	3,16		3,16
7					0,00	3,61		3,61
8						0,00		

На матриці G_1 шукаємо мінімальний елемент, тобто – це елемент 1,41, що відповідає d_{23} або d_{27}. Обираємо який-небудь з них, наприклад, d_{23} = 1,41, тобто об’єкти 2 і 3 поєднуються в новий 9 кластер.

min=1,41 Кластер 9: 2,3

Оскільки номер 9 кластера не дорівнює (2n-1)=13, то повторюємо кроки 3,4.

По формулі (9.1) обчислимо відстані між 9 кластером і іншими об’єктами й кластерами, тобто:

$$d_{k9} = \min(d_{2k}, d_{3k}),\ k = 4,6,7,8.$$

$$d_{49} = 5{,}39,\ d_{69} = 4{,}12,\ d_{79} = 1{,}41,\ d_{89} = 5{,}00$$

Нова матриця відстаней G_2 формується з матриці G_1 шляхом додавання рядка й стовпця з елементами d_{49} , d_{69} , d_{79} , d_{89} , потім 2, 3 рядки і 2, 3 стовпці віддаляються (табл. 9.3).

Таблиця 9.3 – Матриця відстаней G_2

Номер кластера	**4**	**6**	**7**	**8**	**9**		min
4	0,00	5,83	4,12	2,24	5,39		2,24
6		0,00	4,12	3,16	4,12		3,16
7			0,00	3,61	1,41		1,41
8				0,00	5,00		5,00
9					0,00		

На матриці G_2 шукаємо мінімальний елемент, це елемент 1,41, що відповідає d_{79}, тобто об'єкти 7 і 9 поєднуються в новий 10 кластер.

min= 1,41 Кластер 10: 7,9

Оскільки номер $10 \neq 13$, то знову повторюємо кроки 3, 4.

Обчислюємо відстані між 10 кластером і іншими об'єктами й кластерами, тобто

$$d_{k,10} = \min(d_{7k}, d_{9k}),\ k = 4,6,8.$$

$$d_{4,10} = 4{,}12,\ d_{6,10} = 4{,}12,\ d_{8,10} = 3{,}61$$

Нова матриця відстаней G_3 формується з матриці G_2 шляхом додавання рядка й стовпця з елементами $d_{4,10}$, $d_{6,10}$, $d_{8,10}$, причому 7, 9 рядки і 7, 9 стовпці віддаляються (табл. 9.4).

Таблиця 9.4 – Матриця відстаней G_3

Номер кластера	**4**	**6**	**8**	**10**		min
4	0,00	5,83	2,24	4,12		2,24
6		0,00	3,16	4,12		3,16
8			0,00	3,61		3,61
10				0,00		

Мінімальний елемент матриці G_3 є $d_{4,8} = 2{,}24$, тобто об'єкти 4 і 8 поєднуються в новий 11 кластер.

min = 2,24 Кластер 11: 4,8

Оскільки номер $11 \neq 13$, то знову повторюємо кроки 3, 4.

Обчислимо відстані між 11 кластером і іншими об'єктами або кластерами, тобто

$$d_{k,11} = \min(d_{4k}, d_{8k}),\ k = 6{,}10.$$

Отже, $d_{6,11} = 3{,}16$, $d_{10,11} = 3{,}61$.

Нова матриця відстаней G_4 формується з матриці G_3 шляхом додавання рядка й стовпця з елементами $d_{6,11}$, $d_{10,11}$, причому 4, 8 рядки і 4, 8 стовпці віддаляються (табл. 9.5).

Таблиця 9.5 – Матриця відстаней G_4

Номер кластера	**6**	**10**	**11**		min
6	0,00	4,12	3,16		3,16
10		0,00	3,61		3,61
11			0,00		

Мінімальний елемент матриці G_4 є $d_{6,11} = 3{,}16$, тобто об'єкти 6 і 11 поєднуються в новий 12 кластер.

min= 3,16 Кластер 12: 6,11

Оскільки номер $12 \neq 13$, то знову повторюємо кроки 3, 4.

Обчислимо відстані між 12 кластером і іншими об'єктами й кластерами, що залишилися, тобто

$$d_{k,12} = \min\left(d_{6k}, d_{11k}\right), \; k = 10.$$

$$d_{10,12} = 3{,}61$$

Нова матриця відстаней G_5 формується з матриці G_4 шляхом додавання рядка й стовпця з елементом $d_{10,12}$, причому 6, 11 рядки і 6, 11 стовпці віддаляються(табл. 9.6).

Таблиця 9.6 – Матриця відстаней G_5

Номер кластера	**10**	**12**		min
10	0,00	3,61		3,61
12		0,00		

Мінімальний елемент матриці G_5 єдиний $d_{10,12} = 3{,}61$, тобто об'єкти 10 і 12 поєднуються в новий 13-й кластер. Тому що номер 13 = 13, то алгоритм закінчується й переходимо до кроку 5.

Крок 5. Будуємо дендрограму об'єднань (рис. 9.1).

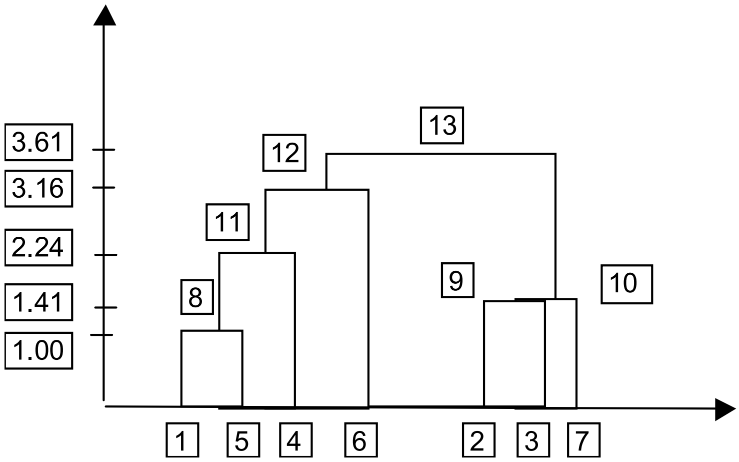


Рисунок 9.1 – Дендрограма

9.3. Стратегія далекого сусіда

У цій стратегії відстань між двома кластерами визначається як відстань між двома самими віддаленими представниками цих кластерів:

$$d_{kh} = \max(d_{ik}, d_{jk}) \tag{9.2}$$

Параметри стратегії: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5, \beta = 0, \gamma = 0{,}5$

Головний недолік даної стратегії полягає в тому, що на перших кроках утворюються кластери з несхожих об'єктів.

9.4. Стратегія середнього зв'язку, що не зважується

Запропонована Міченером і Сокелом у 1958 році як засіб боротьби із крайностями стратегій найближчого й далекого сусіда. Найчастіше використовується варіант, коли обчислюють середню арифметичну подібність між об'єктами кластера й кандидатом на включення. Стратегія монотонна.

$$d_{kh} = \alpha_1 d_{ik} + \alpha_2 d_{jk} + \beta d_{ij} + \gamma \left| d_{ik} - d_{jk} \right| \tag{9.3}$$

$$k = 1,2,...,i\text{-}1,i\text{+}1,...,j\text{-}1,j\text{+}1,...,n,$$

Параметри стратегії у формулі (8.4) наступні $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5, \beta = \gamma = 0.$

Тобто

$$d_{kh} = 0{,}5\,d_{ik} + 0{,}5\,d_{jk}$$

Дана стратегія вибудовує кластери, що у просторі ознак утворюють гіперсфери.

9.5. Гнучка стратегія

Для цієї стратегії: $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta = 1,\ \alpha_1 = \alpha_2, \beta < 1, \gamma = 0.$ Стратегія монотонна, її властивості цілком залежать від β. Якщо β>0, то стратегія стискає простір і навпаки розтягує простір при β<0. На практиці, звичайно, використовують значення $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}625, \beta = -0{,}25, \gamma = 0.$

$$d_{kh} = 0{,}625\,d_{ik} + 0{,}625\,d_{jk} - 0{,}25\,d_{ij}$$

Стратегія дає кластери у виді гіперсфер.

9.6. Стратегія агломеративного об’єднання

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1,\ \beta = \gamma = 0.$$

$$d_{kh} = d_{ik} + d_{jk}\,.$$

Усі перераховані стратегії належать до класу монотонних стратегій з параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma,$ для яких справедливі нерівності: $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta \geq 1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 \geq 0, \quad \gamma \geq -\min(\alpha_1, \alpha_2)$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Спицнадель В. Н. Основы системного анализа : учеб. пособие / В. Н. Спицнадель. – СПб : Изд. дом «Бизнесс-пресса», 2000. – 326 с.

2. Романов В. Н. Системный анализ для инженеров / В.Н. Романов. – СПб : СПб. гос. университет, 1998. – 200 с.

3. Саати Т. Аналитическое планирование. Организация систем / Т. Саати, К. Кернс. – М.:Радио и связь, 1991. – 150 с.

4. Перегудов Ф. И. Введение в системный анализ / Ф. И. Перегудов, Ф. П. Тарасенко. – М. :Высш. школа, 1989. – 205 с.

5. Мандель М. Д. Кластерный анализ / М. Д. Мандель. – М. : Финансы и статистика, 1988. – 157 с.

6. Месарович М. Общая теория систем: Математические основы / М. Месарович, И. Такахара. – М. : Мир, 1978. – 343 с.

7. Основы системного анализа : методические указания к практическим занятиям / В. Н. Романов. – СПб. : СЗПИ, 2000. – 78 с.

8. Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу «Теорія прийняття рішень в задачах контролю та управління» для студентів денної форми навчання спеціальностей «Прикладна математика», «Системний аналіз та управління», «Інформатика» / Д. О. Примаков, Л. Ю. Артюх. – Харків. : ХТУРЕ, 1999. – 48 с.

Навчальне видання

ФЕДОРОВ Микола Вікторович,

ХРЕНОВ Олександр Михайлович,

ШТЕЛЬМА Ольга Миколаївна

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 2 курсу денної форми навчання
освітнього рівня «бакалавр» спеціальності
126 – Інформаційні системи та технології)

Відповідальний за випуск *М. В. Булаєнко*

За авторською редакцію

Комп'ютерне верстання *М. В. Федоров*

План 2017, поз. 256 Л

Підп. до друку 25.04.2018. Формат 60 × 84 1/16.
Друк. на різографі. Ум. друк. арк. 2,5.
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені. О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса : rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.