МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

С. М. Мордовцев

ВИЩА МАТЕМАТИКА
МОДУЛЬ 2

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 193 – Геодезія та землеустрій)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2018

УДК 51(075)

Мордовцев С. М.. Вища математика. Модуль 2 : конспект лекцій для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 193 – Геодезія та землеустрій / С. М. Мордовцев ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 74 с.

Автор

канд. техн. наук С. М. Мордовцев

Рецензент:

Л. Б. Коваленко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова)

Конспект лекцій складено з метою допомоги студентам будівельних спеціальностей вишів підчас підготовки до занять, заліків та іспитів із базових розділів вищої математики.

Рекомендовано кафедрою вищої математики,протокол № 1 від 31 серпня 2017 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Конспект лекцій розроблено згідно програми нормативної навчальної дисципліни «Вища математика» та робочої навчальної програми підготовки бакалавра за спеціальністю 193 – Геодезія та землеустрій, які розраховано для студентів денної та заочної форми навчання.

Теоретичний матеріал структуровано та узгоджено з аудиторними лекційними заняттями, що проводяться під час вивчення модуля «Вища математика».

Конспект лекцій містить стислий теоретичний матеріал необхідний студентам для засвоєння основних знань з вищої математики. В конспекті розміщено значну кількість прикладів розв'язання типових задач, а також задач прикладного характеру, які спрямовано на практичне застосування та закріплення отриманих знань для вирішення професійно-орієнтованих задач.

У додатках, наприкінці конспекту лекцій, розташовані додаткові відомості та матеріали.

Для більш поглибленого вивчення та пошуку довідникової інформації подано посилання на джерела, в яких можна знайти більш детальну інформацію про ті або інші математичні положення або доведення теорем, оскільки вони не були представлені у цьому конспекті.

МОДУЛЬ 2 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.2 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

ТЕМА 1 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1 Поняття первісної та невизначеного інтегралу. Таблиця інтегралів

Раніше нами було розглянуто задачу, в якій було задано функцію $F(x)$ і необхідно було знайти її похідну $f(x)=F'(x)$. Тепер ми будемо розглядати обернену задачу, коли задана функція $f(x)$ й потрібно відшукати таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнюватиме $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$.

Означення. Функція $F(x)$ називають *первісною* від функції $f(x)$ на проміжку X, якщо для всіх точок цього проміжку виконується рівність:

$$F'(x)=f(x). \tag{1.1}$$

Наприклад, знайдемо первісну для функції $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Згідно означення такою функцією можна назвати $F(x)=\ln|x|$, тому що $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$. Але такими ж первісним функція водночас є функція $\ln|x|+C$, (С – const).

Теорема 1. Якщо $F_1(x)$ та $F_2(x)$ дві первісних від функції $f(x)$ на проміжку X, то різниця між ними дорівнює постійному числу.

З цієї теореми має висновок: якщо для деякої функції $f(x)$ первісною є функція $F(x)$, то будь-яка інша первісна має вигляд $F(x)+C$, де $C=const.$

Означення. Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x)+C$ називають *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначають символом $\int f(x)dx$, тобто

$$\int f(x)dx = F(x) + C\text{, якщо } F'(x) = f(x), \qquad (1.2)$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Таким чином, невизначений інтеграл – це сімейство функції $y = F(x) + C.$ З геометричної точки зору, невизначений інтеграл є сукупністю кривих зсуву однієї з кривих паралельно самій собі вниз або вгору, тобто вздовж осі ординат.

Знаходження первісної для заданої функції називають інтегруванням.

Зауваження. Не для будь-якої функції існує невизначений інтеграл. Первісна (а, отже, й невизначений інтеграл) існує у тому випадку, коли функція $f(x)$ неперервна на проміжку *X*.

Первісна від елементарних функцій можливо й не буде представлена за допомогою кінцевого числа елементарних функцій.

Властивості невизначеного інтегралу:

1. Похідна від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Диференціал від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

3. Невизначений інтеграл від диференціалу деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Наприклад, $\int dx = x + C.$

4. Постійний множник можна винести за знак невизначеного інтегралу:

$$\int C \cdot f(x)dx = C\int f(x)dx.$$

5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми неперервних функцій дорівнює сумі їх невизначених інтегралів:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx.$$

Наприклад, $\int (4x + 2x^2 + 3x^3)dx = 4\int xdx + 2\int x^2dx + 3\int x^3dx = 2x^2 + 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^4}{4} + C$.

Теорема 2. Якщо аргумент підінтегральної функції лінійний відносно змінної, то справедливі такі формули:

$$\int f(x+b)dx = F(x+b)+C, \; b = const, \tag{1.3}$$

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+C, \; a = const, \tag{1.4}$$

Наприклад, $\int \sin x dx = -\cos x + C \;\Rightarrow\; \int \sin \alpha x dx = -\frac{1}{\alpha}\cos \alpha x + C;$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C. \tag{1.5}$$

Наприклад, $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \;\Rightarrow\; \int \frac{dx}{\alpha x + b} = \frac{1}{\alpha}\ln|\alpha x + b| + C;$

Таблиця 1.1. – Таблиця невизначених інтегралів

$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathrm{C} \quad (\alpha \neq -1), \;\Rightarrow\; \int dx = x + C, \; \int x dx = \frac{x^2}{2} + C, \; \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + \mathrm{C},$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \,, \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \mathrm{C}, \quad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + \mathrm{C}$

$\int e^x dx = e^x + \mathrm{C}, \quad \int e^{\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + \mathrm{C}, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \sin \beta x dx = -\frac{1}{\beta}\cos \beta x + C,$

$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \cos \beta x dx = \frac{1}{\beta}\sin x + C,$

$\int tgx dx = -\ln(\cos x) + \mathrm{C}, \quad \int ctgx dx = \ln(\sin x) + C,$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + \mathrm{C}, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C,$

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad \int \frac{dx}{x^2+1} = arctgx + C,$

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \mathrm{C}$ для $|x| > a$, $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{a-x}\right| + \mathrm{C}$ для $|x| < a$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \mathrm{C} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \mathrm{C}$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

$\int shx dx = chx + C, \quad \int chx dx = shx + C$

1.2 Інтегрування методом заміни змінної та інтегрування частинами

Метод заміни змінної. Існує кілька різновидів методу заміни змінних. Для розуміння суті питання розглянемо спочатку приклад.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int e^{\sin x}\cos x dx$

Рішення. Позначимо $u = e^{\sin x}$. Тоді $du = e^{\sin x}\cos x dx$ і інтеграл приймає вид

$$\int du = u + C = e^{\sin x} + C.$$

Таким чином, метод заміни змінної полягає в тому, щоб за допомогою введення нової змінної заданий інтеграл привести до табличного. Застосовуються цей метод у випадках, коли підінтегральний вираз містить функцію разом з її похідною:

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \left|\begin{array}{c} u=\varphi(x) \\ du=\varphi'(x)dx \end{array}\right| = \int f(u)du = F(u)+C = F(\varphi(x))+C,$$

Приклади. Знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{e^{tg2x}}{\cos^2 2x}dx = \int e^{tg2x}\frac{1}{\cos^2 2x}dx = \left|\begin{array}{c} u = tg2x \\ du = \dfrac{2}{\cos^2 2x}dx \Big|:2 \\ \dfrac{du}{2} = \dfrac{1}{\cos^2 2x}dx \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{tg2x} + C.$

2. $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx = \left|\begin{array}{c} u=\sin x \\ du=\cos x dx \end{array}\right| = \int \sqrt{u}\ du = \int u^{0,5}\ du = \frac{2}{3}u^{1,5} + C = \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} + C.$

3. $\int \ln x\frac{dx}{x} = \left|\begin{array}{l} u=\ln x \\ du=\dfrac{dx}{x} \end{array}\right| = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

Розглянемо інтеграли виду $\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}dx = \int \frac{d\phi}{\phi} = \ln|\phi(x)| + C.$

Приклади.

1. $\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)} = 0.5\ln(1+x^2) + C.$

2 $\int \frac{\cos x dx}{\sin x + 4} = \int \frac{d(\sin x + 4)}{\sin x + 4} = \ln|\sin x + 4| + C.$

Метод заміни змінних є одним з основних методів обчислення невизначених інтегралів. Навіть в тих випадках, коли ми інтегруємо будь-яким іншим методом, нам часто доводиться в проміжних обчисленнях використовувати метод заміни змінних.

Для того щоб успішно застосовувати метод заміни потрібні певні навички та інтуїція. Невірна заміна може ускладнити вирішення або взагалі завести в глухий кут. Наведемо низку прикладів.

Приклади.

1. $$\int x\sqrt{x-3}dx = \left| \begin{array}{c} u=\sqrt{x-3} \ \Rightarrow \ u^2 = x-3 \\ x = u^2+3 \\ dx = 2udu \end{array} \right| = \int \left(u^2+3\right) u\cdot 2udu.$$

Тоді:

$$\int (u^2+3)\cdot u\cdot 2udu = 2\int u^4 du + 6\int u^2 du = 2\frac{u^5}{5} + 6\frac{u^3}{3} + C = \frac{2}{5}(x-3)^{2,5} + 2(x-3)^{1,5} + C.$$

2. $$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx = \left| \begin{array}{l} u=\sqrt{1+\ln x} \\ u^2 = 1+\ln x \\ 2udu = \dfrac{dx}{x} \end{array} \right| = 2\int \frac{u^2 du}{u^2-1} = 2\int \frac{(u^2-1)+1}{u^2-1}du = 2\int du + 2\int \frac{du}{u^2-1}.$$

Тоді інтеграл дорівнює:

$$\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx = 2u + \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = 2\sqrt{1+\ln x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1}\right| + C.$$

У випадках, коли підінтегральний вираз представлено як добуток двох функцій, одна з яких алгебраїчна (наприклад, степенева функція), а друга – трансцендентна (логарифмічна, показникова, тригонометрична або обернена тригонометрична), то застосовують *метод інтегрування частинами*.

Нехай $U = U(x)$ і $V = V(x)$ – дві неперервні функції, які мають неперервні похідні, тоді диференціал добутку UV обчислюється за формулою:

$$d(U\cdot V) = UdV + VdU.$$

Інтегруючи обидві частини, отримаємо $\int dUV) = UV = \int UdV + \int VdU,$ або

$$\int UdV = UV - \int VdU. \qquad (1.6)$$

Отримана формула інтегрування частинами. Її зазвичай застосовують до інтегрування виразів, які можна представити у вигляді про-винищення двох функцій, які можна після простого перетворення представити у вигляді U і dV. Зазвичай формула (2.4) застосовується для інтегралів виду:

$$\int x^n \sin \beta x dx,\ \int x^n \cos \beta x dx,\ \int x^n \ln x dx,\ \int x^n e^{\beta x} dx,\ \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx,\ \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx.$$

Застосовувати цей метод доречно, коли інтеграл праворуч простіший, ніж той, що ліворуч, або йому подібний. Як правило, за U вибирають функцію, яка спрощується при диференціюванні. Тоді за dV – те, що залишилось, але ця частина має містити dx та бути інтегрованою. Саме через це частина dV не має містити такі функції, як: логарифмічні та обернені до тригонометричних. Функцію V знаходять у явному вигляді як одну з первісних $\int dv$ (поклавши $C = 0$).

Зауваження 2. Іноді метод інтегрування частинами необхідно застосовувати декілька разів. А інколи призводить до заданого інтегралу, в цьому випадку, такі інтеграли називають зворотними.

Приклади. Знайти невизначений інтеграли:

1. $\int \ln x dx$. Нехай *U=lnx, V=x.* Тоді за формулою (1.6) отримуємо:

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x d(\ln x) = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

2. $\int x\ln x dx$. Нехай *U=lnx,* $V=x^2$. Тоді за формулою (1.6) отримуємо:

$$\int x\ln x dx = 0{,}5\int \ln x d(x^2) = 0{,}5\left(x^2 \ln x - \int x^2 \frac{dx}{x}\right) = 0{,}5\left(x^2 \ln x - 0.5x^2\right) + C.$$

3. $\int x\sin x dx$. Нехай *U = x, dV = sinxdx,* де *V =- cosx.* Тоді за формулою (1.6) отримує:

$$\int x\sin x dx = -\int x d(\cos x) = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$

4. $\int arctgx dx$. Нехай *U=arctgx, V=x,* $dU=dx/(1+x^2)$, тоді за формулою (1.6) отримуємо:

$$\int arctgxdx = xarctgx - \int xd(arctgx) = xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = xarctgx - 0.5\ln(1+x^2) + C.$$

5. $J = \int xe^x dx = \int xd(e^x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

6. $J = \int e^x \sin xdx = -\int e^x d(\cos x) = -e^x \cos x + \int e^x \cos xdx,$

$$\int e^x \cos xdx = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \sin xdx = e^x \sin x - J.$$

Перенесемо невизначений інтеграл J ліворуч та отримаємо остаточну відповідь:

$$\int e^x \sin xdx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2}.$$

1.3 Інтегрування деяких функцій, що містять квадратний тричлен.

Розглянемо інтегрування виразів, що містять у знаменнику квадратний тричлен, тобто інтеграли виду:

$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, або $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, або $I_3 = \int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$, або $I_4 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Знаходження інтегралів виду I_1, I_2 приводиться до основних невизначених табличних інтегралів. Для цього необхідно в знаменнику вираз ax^2+bx+c доповнити до повного квадрату.

Випадок 1. Інтеграли виду $J_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

Перетворимо вираз ax^2+bx+c у вигляді суми або різниці квадратів:

$$ax^2+bx+c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + \frac{2b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right].$$

Тоді $ax^2+bx+c = a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 \pm k^2\right] = a\left(u^2 \pm k^2\right),$

де $\pm k^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$; $u = x + \frac{b}{2a}$.

Таким чином, $J_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u^2 \pm k^2}$, або

$$J_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u^2+k^2} = \frac{1}{ak} arctg\,\frac{u}{k} + C = \frac{1}{ak} arctg\,\frac{2ax+b}{2ak} + C,$$

$$J_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u^2-k^2} = \frac{1}{2ak}\ln\left|\frac{u-k}{u+k}\right| + C = \frac{1}{2ak}\ln\left|\frac{2ax+b-2ak}{2ax+b+2ak}\right| + C.$$

Приклади. Знайти: 1. $\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$; 2. $\int \frac{dx}{2x^2+8x-10}$.

Розв'язання.

1. $2x^2+8x+20 = 2\cdot(x^2+4x+10) = 2\cdot(x^2+4x+4+10-4) = 2\left[(x+2)^2+6\right]$,

$$\int \frac{dx}{2x^2+8x+20} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2+6} = \frac{1}{2\sqrt{6}} arctg\,\frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

2. $2x^2+8x-10 = 2\cdot(x^2+4x-5) = 2\cdot(x^2+4x+4-4-5) = 2\left[(x+2)^2-9\right]$,

$$\int \frac{dx}{2x^2+8x-10} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2-9} = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{x+2-3}{x+2+3}\right| + C = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right| + C.$$

Випадок 2. Інтеграли виду $J_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Згідно з випадком 1 маємо:

$J_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm k^2}}$, якщо $a > 0$, або $J_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{du}{\sqrt{k^2-u^2}}$, якщо $a < 0$,

Приклади. Знайти: 1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$, 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$.

Розв'язання:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+1-1+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+4}}$.

Тоді $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}} == \int \frac{du}{\sqrt{u^2+4}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+4}\right| + C = \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right| + C.$

2. Оскільки

$$4x-3-x^2 = -(x^2-4x+3) = -(x^2-4x+4-4+3) = -(x-2)^2+1 = 1-u^2,$$

маємо: $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin(x-2) + C.$

Випадок 3. Інтеграли виду $J_3 = \int \frac{(Ax+B)}{ax^2+bx+c}dx.$

Представимо чисельник у вигляді $Ax+B = \frac{A}{2a}(2ax+b)+(B-\frac{Ab}{2a})$. Тоді інтеграл можна представити у вигляді суми двох інтегралів:

$$J_3 = \int \frac{(Ax+B)}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Другий інтеграл обчислюється за формулами, представленим в випадку 1. Перший інтеграл, врахувавши що $(2ax+b)dx = d(ax^2+bx+c)$, приводиться до табличному інтегралу:

$$J_{31} == \frac{A}{2a}\int \frac{(2x+b)}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + C.$$

Приклад. Знайти $\int \frac{2x-5}{x^2-6x+13}dx.$

Розв'язання:

Представимо $2x-5 = 2x-6+1$, тоді:

$$\int \frac{2x-5}{x^2-6x+13}dx = \int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}dx + \int \frac{dx}{x^2-6x+13}.$$

Перший інтеграл правої частини дорівнює:

$$\int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}dx = \int \frac{d(x^2-6x+1)}{x^2-6x+13} = \ln\left|x^2-6x+13\right| + C_1.$$

Другий інтеграл підрахуємо, використовуючи формули з першого випадку:

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{dx}{x^2-6x+9-9+13} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+4} = \frac{1}{2}arctg\,\frac{x-3}{2} + C_2.$$

Таким чином,

$$\int \frac{2x-5}{x^2-6x+13}dx = \ln\left|x^2-6x+13\right| + 0,5arctg\,\frac{x-3}{2} + C.$$

Випадок 4. Інтеграли виду $J_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} +$$

$$+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Приклад. Знайти: $\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}$.

Розв'язання: $5x+3=\frac{5}{2}(2x+4)+3-10=2{,}5(2x+4)-7$, тоді:

$$\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}=2{,}5\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}dx-7\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}=2{,}5\int \frac{d(x^2+4x+10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}-7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}=$$
$$=5\sqrt{x^2+4x+10}\text{-}7\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C.$$

1.4 Інтегрування раціонального дробу за допомогою розкладання його на прості дробі

Означення. Раціональним дробом (дробово-раціональною функцією) називається відношення двох многочленів:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{B_0x^m+B_1x^{m-1}+B_2x^{m-2}+B_3x^{m-3}+\ldots+B_{m-1}x\ +B_m}{A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+A_3x^{n-3}+\ldots+A_{m-1}x\ +A_m},$$

де $P_m(x)$ – многочлен степені m; $Q_n(x)$ – многочлен степені n.

Якщо степінь чисельника нижче степені знаменника $m < n$, то дріб називається *правильним*, якщо, навпаки, $m \geq n$, то дріб – *неправильний*.

Будь-який неправильний раціональний дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можна подати у вигляді суми цілої частини і правильного дробу $P_m(x)/Q_n(x)=G_{m-n}(x)+R_k(x)/Q_n(x)$, причому цей розклад єдиний. Тут $G_{m-n}(x)$ – многочлен, який називають *цілою частиною* раціонального дробу, а $R_k(x)/Q_n(x)$ – правильний дріб, тобто $k<n$. Многочлени $G_{m-n}(x)$ і $R_k(x)$ – відповідно частка й остача від ділення «кутом» $P_m(x)$ на $Q_n(x)$.

Приклад. Виділити цілу частину неправильного дробу $\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}$ і подати його у вигляді суми цілої частини та правильного дробу.

Розв'язання. Для виділення цілої частини застосуємо ділення «кутом» многочлена на многочлен, але спочатку розкриємо дужки у знаменнику, виконавши множення, та представимо результат у стандартному вигляді в порядку спадання степенів:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-3 & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4+2x^3+x^2} & x^2-2x+3 \\
\quad -2x^3-x^2-3 & \\
\quad \underline{-2x^3-4x^2-2x} & \\
\qquad\qquad 3x^2+2x-3 & \\
\qquad\qquad \underline{3x^2+6x+3} & \\
\qquad\qquad\quad \text{-}4x-6 &
\end{array}
$$

Таким чином, $\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\frac{4x+6}{x^2+2x+1}$.

Зауваження. Виділення цілої частини неправильного раціонального дробу інколи можна зробити простіше, виконавши алгебраїчні перетворення чисельника.

Далі будемо розглядати правильні раціональні дроби.

Інтегрування многочленів процес не дуже складний, найбільші труднощі зустрічаються під час інтегрування правильних раціональних дробів. Для інтегрування правильних раціональних дробів використовують метод розкладання на найпростіші дробі, згідно твердження, що будь-який правильний раціональний дріб можна представити у вигляді суми найпростіших дробів.

Означення. Правильні раціональні дробі виду: $\frac{A}{x-a}$; $\frac{A}{(x-a)^n}$; $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$; $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$ називають *елементарними (найпростішими) дробами* відповідно 1, 2, 3, 4 типу.

Згідно таблиці інтегралів

1. Дріб типу 1 $\frac{A}{x-a}$: $\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C.$

2. Дріб типу 2 $\frac{A}{(x-a)^K}$: $\int\frac{A}{(x-a)^K}dx=\frac{Ax^{-K+1}}{-K+1}+C, k\geq 2.$

3. Дріб типу 3 $\frac{Px+Q}{x^2+px+q}$ за умови, що квадратний тричлен має комплексні корені. В цьому випадку можна застосувати метод, описаний в п. 1.3 (випадок 3).

$$\int \frac{Px+Q}{x^2+px+q}dx = \left\langle \frac{p^2}{4} - q < 0 \right\rangle = 0.5P\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2Q-Pp}{\sqrt{4q-p^2}} arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}.$$

Як відомо, будь-який многочлен можна записати у вигляді добутку лінійних та квадратичних множників з дійсними коефіцієнтами, тобто

$$Q(x) = (x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^t \cdot \ldots$$

Кожному множнику $(x-a)^k$ у розкладанні знаменника $Q(x)$ відповідає в розкладання дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ k доданків суми найпростіших дробів типу 2

$$\frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A_{k-2}}{(x-a)^{k-2}} + \ldots + \frac{A_1}{(x-a)};$$

а кожному множнику $(x^2+px+q)^t$ відповідає сума t найпростіших дробів типу 4

$$\frac{A_t x + B_t}{(x^2+px+q)^t} + \frac{A_{t-1}x + B_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}} + \ldots + \frac{A_1 x + B_1}{(x^2+px+q)}.$$

Постійні $A_k, A_{k-1}, \ldots, A_1$ та $A_t, A_{t-1}, \ldots, A_1$ знаходять методом невизначених коефіцієнтів або методом визначених значень (частинних значень).

У разі, якщо множники у розкладанні знаменника мають кратність 1 (тобто, $k=1,\ t=1$), то сума най простіших дробів буде складатися з найпростіших дробів типу 1 і 2І, наприклад:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5x+4}{(x+4)(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Таким чином, інтегрування правильних раціональних дробів полягає в тому, що, виконавши розкладання на множники знаменника дробу та розклавши на найпростіші дробі, заданий інтеграл заміняємо сумою інтегралів від найпростіших дробів.

Випадок 1. Корені знаменника дійсні і різні.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-b)} + \frac{A_3}{(x-c)} + \ldots$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл: $\int \frac{9-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx.$

Розв'язання. $\dfrac{9-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{D}{x-3}.$

Для знаходження постійних скористаємось методом визначених значень.

$$9-5x = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + D(x-1)(x-2)$$
$$x=1 \;\Rightarrow\; 4 = A\cdot(-1)(-2) \;\Rightarrow\; A=2;$$
$$x=2 \;\Rightarrow\; -1 = B\cdot(1)(-1) \;\Rightarrow\; B=1;$$
$$x=3 \;\Rightarrow\; -6 = D\cdot(2)(1) \;\Rightarrow\; D=-3.$$

Тоді:

$$\int \frac{9-5x}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx = 2\int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{dx}{x-2} - 3\int\frac{dx}{x-3} = 2\ln|x-1| + \ln|x-2| - 3\ln|x-3| + C.$$

Випадок 2. Корені знаменника дійсні і є кратними.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)^k} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-b)} + \frac{A_3}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{A_{k+1}}{(x-b)^k}.$$

Приклади. Знайти невизначеній інтеграл:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2}dx$; 2. $\displaystyle\int \frac{x+3}{(x-2)^3}dx.$

Розв'язання:

1. $\dfrac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2} = \dfrac{A^{\backslash(x+1)^2}}{(x-2)} + \dfrac{B^{\backslash(x+1)(x-2)}}{(x+1)} + \dfrac{D^{\backslash(x-2)}}{(x+1)^2}$, тоді

$$x^2+2 = A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + D(x-2).$$

Для знаходження постійних скористаємось методом визначених значень:

при $x=-1 \;\Rightarrow\; 3=-3D \;\Rightarrow\; D=-1$;

при $x=2 \;\Rightarrow\; 6=9A \;\Rightarrow\; A=2/3$;

при $x=0 \;\Rightarrow\; 2=A-2B-2D$. Тоді, B = 1/3.

$$\int\frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^2}dx = \frac{2}{3}\int\frac{dx}{(x-2)} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)} - \int\frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{2}{3}\ln|x-2| + \frac{\ln|x+1|}{3} + \frac{1}{(x+1)} + C.$$

2. $\dfrac{x+3}{(x-2)^3} = \dfrac{A}{(x-2)^3} + \dfrac{B}{(x-2)^2} + \dfrac{D}{(x-2)}$, тоді $x+3 = A + B(x-2) + D(x-2)^2$,

при $x=2 \Rightarrow 5=A$;

при $x=0 \;\Rightarrow\; 3=A-2B+4D \;\Rightarrow\; 2B-4D=2 \;\Rightarrow\; B-2D=1$;

при $x=1 \;\Rightarrow\; 4=A-B+D \;\Rightarrow\; B-D=1$;

Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} B-2D=1 \\ B-D=1 \end{cases}$ щодо B і D, отримаємо B = 1, D =0.

Отже, інтеграл дорівнює:

$$\int \frac{x+3}{(x-2)^3}dx = 5\int \frac{dx}{(x-2)^3} + \int \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{5}{2(x-2)^2} - \frac{1}{(x-2)} + C.$$

Випадок 3. Квадратний тричлен знаменника має комплексні корені. Розглянемо досить простий випадок:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)(x^2+b)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{Bx}{(x^2+b)} + \frac{D}{(x^2+\mathrm{b})}.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}$.

Розв'язання. $\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx}{(x^2+1)} + \frac{D}{(x^2+1)}$,

$$x = A(x^2+1) + Bx(x-1) + D(x-1);$$
$$x=1 \Rightarrow 1=2A \Rightarrow A=0,5;$$
$$x=0 \Rightarrow 0=A-D \Rightarrow D=0,5;$$
$$x=2 \Rightarrow 2=5A+2B+D \Rightarrow B=-0,5.$$

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)} = 0,5\int \frac{dx}{x-1} - 0,5\int \frac{xdx}{x^2+1} + 0,5\int \frac{dx}{x^2+1}.$$

Оскільки $\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = 0,5\ln\left(x^2+1\right)$, інтеграл дорівнює:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)} = 0,5\ln|x-1| - 0,25\ln(x^2+1) + 0,5 arctgx + C.$$

Випадок 4. Серед коренів знаменника є кратні комплексні корені.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2(x-1)}$.

Розв'язання. $\frac{x}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{(Ax+B)^{\backslash x-1}}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{(Dx+E)^{\backslash (x-1)(x^2+1)}}{x^2+1} + \frac{F^{\backslash (x^2+1)^2}}{x-1}$,

$$x = (C+B)x^4 + (A+D-E-2C)x^3 + (B-A-D+E)x^2 + (B-A-D+E)x + C-B-E.$$

При $x=1 \Rightarrow 1=4F \Rightarrow F=0,25$. Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x в правій і лівій частині. Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} F+D=0 & \text{при } x^4 \\ E-D=0 & \text{при } x^3 \\ A+D-E+2F=0 & \text{при } x^2 \\ B-A-D+E=1 & \text{при } x \\ F-B-E=0 & \end{cases}$$

Тоді: $D = -0{,}25$; $E = -0{,}25$; $A = -0{,}5$; $B = 0{,}5$.

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2(x-1)} = -0{,}5\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2}dx - 0{,}25\int \frac{x+1}{(x^2+1)}dx + 0{,}25\int \frac{dx}{x-1}.$$

$=$

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+1)} = 0{,}5\ln(x^2+1) + arctgx + C_1,$$

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C_2,$$

$$\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2}dx = 0{,}5\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = -0{,}5\frac{1}{x^2+1} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{(x^2+1-x^2)dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int x\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2} = arctgx + 0{,}5\int xd\left(\frac{1}{x^2+1}\right) =$$

$$= arctgx + 0{,}5\frac{x}{x^2+1} - 0{,}5arctgx + C_3 = 0{,}5arctgx + 0{,}5\frac{x}{x^2+1} + C_3.$$

Отже, $\int \frac{x-1}{(x^2+1)^2}dx = -0{,}5\frac{x+1}{x^2+1} - 0{,}5arctgx + C_3.$

Таким чином,

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2(x-1)} = 0{,}25\frac{x+1}{x^2+1} - 0{,}125\ln(x^2+1) + 0{,}25\ln|x-1| + C.$$

1.5. Інтегрування виразів, що містять лінійну ірраціональність.

Нехай ми маємо інтеграл вигляду

$$\int R(x, \sqrt[k_1]{ax+b}, \sqrt[k_2]{ax+b}, \sqrt[k_3]{ax+b})dx,$$

тоді потрібно скористатися підстановкою $ax+b=t^n$, де n – найменший спільний знаменник ступенів (k_1, k_2, k_3).

Якщо маємо інтеграл $\int R(x, x^{\frac{m}{k_1}}, \ldots x^{\frac{r}{k_s}})dx,$

тоді слід скористатися підстановкою $x = t^n \Rightarrow dx = nt^{n-1}dt$, де n - найменший спільний знаменник ступенів $(k_1, k_2, ..k_s)$.

Приклад 1. Знайти $J = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx.$

Розв'язання. Найменший спільний знаменник $\frac{1}{2}$ і $\frac{3}{4}$ дорівнює 4. Тоді:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx = \left| \begin{array}{c} x = t^4 \\ dx = 4t^3dt \\ x^{\frac{1}{2}} = t^2 \\ x^{\frac{3}{4}} = t^3 \end{array} \right| = 4\int \frac{t^2t^3}{t^3+1}dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt .$$

$$\begin{array}{l|l} t^5 & \underline{t^3+1} \\ \underline{t^5+t^2} & t^2 \\ \quad -t^2 & \end{array}$$

$$J = 4\int \frac{t^5dt}{t^3+1} = 4\int (t^2 - \frac{t^2}{t^3+1})dt = \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right| + C = \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|\right) + C.$$

Приклад 2. Знайти $\int \frac{dx}{\left(x^{\frac{2}{5}} + x^{\frac{1}{2}}\right)}.$

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\left(x^{\frac{2}{5}} + x^{\frac{1}{2}}\right)} = \left| \begin{array}{c} x = t^{10} \\ dx = 10t^9dt \\ x^{\frac{1}{2}} = t^5 \\ x^{\frac{2}{5}} = t^4 \end{array} \right| = 10\int \frac{t^9dt}{(t^4+t^5)} = 10\int \frac{t^5dt}{(t+1)}.$

$$\begin{array}{l|l} t^5 & \underline{t+1} \\ \underline{t^5+t^4} & t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 \\ \quad -t^4 & \\ \quad -\underline{t^4 - t^3} & \\ \qquad t^3 & \\ \qquad \underline{t^3+t^2} & \\ \qquad\quad -t^2 & \\ \qquad\quad \underline{-t^2 - t} & \\ \qquad\qquad t & \\ \qquad\qquad \underline{t+1} & \\ \qquad\qquad\quad -1 & \end{array}$$

Таким чином, $\frac{t^5}{1+t} = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}.$

$$10\int \frac{t^5 dt}{(t+1)} = 10\left[\int t^4 dt - \int t^3 dt + \int t^2 dt - \int t\ dt + \int dt - \int \frac{dt}{t+1}\right].$$

Таким чином,

$$\int \frac{dx}{\left(x^{\frac{2}{5}} + x^{\frac{1}{2}}\right)} = 2t^5 - 2{,}5t^4 + \frac{10}{3}t^3 - 5t^2 + 10t - 10\ln|1+t| + C, \text{ або}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2} + \sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 2{,}5\sqrt[5]{x^2} + \frac{10}{3}\sqrt[10]{x^3} - 5\sqrt[5]{x} + 10\sqrt[10]{x} - 10\ln\left|1 + \sqrt[10]{x}\right| + C.$$

Приклад 3. Знайти $\int \frac{\sqrt{x-1}dx}{\sqrt[3]{x-1}+2}$.

Розв'язання. $\int \frac{\sqrt{x-1}dx}{\sqrt[3]{x-1}+2} = \left| \begin{array}{c} x-1=t^6 \\ x=t^6+1, dt=6t^5dt \end{array} \right| = 6\int \frac{t^8}{t^2+2}dt.$

Оскільки підінтегральною функцією є неправильний дріб, то потрібно виділити цілу частину (зробити самостійно), а потім окремо проінтегрувати правильні дробі. У результаті отримаємо таку відповідь

$$\frac{\sqrt[6]{(x-1)^7}}{7} - \frac{2\sqrt[6]{(x-1)^5}}{5} + \frac{4\sqrt{x-1}}{3} - 8\sqrt[6]{x-1} + \frac{16}{\sqrt{2}} arctg \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt{2}} + C.$$

1.6 Інтегрування тригонометричних виразів

Нехай дано вираз раціональний від тригонометричних функцій. Оскільки усі тригонометричні функції можна представили через sin$x$ та cos$x$, то отримаємо вираз $R(\sin x, \cos x)$.

Розглянемо інтеграл виду $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + d}$, який унаслідок підстановки $u = tg\frac{x}{2}$ (універсальна тригонометрична підстановка) перетворюється на інтеграл від раціонального дробу. Згідно з тригонометричними формулами:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2tg\,\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2};$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - tg^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Повертаючись до підстановки $u = tg\,\frac{x}{2}$; отримаємо $x = 2arctgu$ і знайдемо диференціал $dx = \frac{2du}{1+u^2}$.

Універсальну тригонометричну підстановку краще застосовувати лише у випадку, коли функції sin$x$ та cos$x$ мають непарні степені. Якщо степені цих функцій парні, то зручніше використовувати підстановку $u = tgx$, тоді $dx = \frac{du}{1+u^2}$, $\sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}$.

Приклади. Знайти інтеграли:

1. $$\int\frac{dx}{\sin x} = \left|\begin{array}{l} u = tg\,\frac{x}{2}, \\ dx = \frac{2du}{1+u^2} \\ \sin x = \frac{2u}{1+u^2} \end{array}\right| = \int\frac{(1+u^2)}{2u}\frac{2du}{(1+u^2)} = \ln|u| + C = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C.$$

2. $$\int\frac{dx}{3+5\cos x} = \left|\begin{array}{l} u = tg\,\frac{x}{2}, \\ dx = \frac{2du}{1+u^2} \\ \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \end{array}\right| = \int\frac{2du}{(1+u^2)\left(3+5\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} = \int\frac{2du}{8-2u^2} = \int\frac{2du}{8-2u^2} = \int\frac{du}{4-u^2} = -\int\frac{du}{u^2-4} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\,\frac{x}{2}}{2-tg\,\frac{x}{2}}\right| + C;$$

3. $$\int\frac{dx}{\sin^2 x - 3\cos^2 x} == \left|\begin{array}{c} u = tgx,\ dx = \frac{du}{1+u^2} \\ \sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+u^2} \end{array}\right| = \int\frac{du}{u^2-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{tgx-\sqrt{3}}{tgx-\sqrt{3}} + C.$$

Знаходження інтегралу виду $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$, де $m,n \in Z$ залежить від показників степені, а отже:

1) якщо або m або n непарне, то використовують підстановку $u = \sin x$ $(u = \cos x)$

Приклад Знайти $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

Розв'язання. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx =$

$$= \left| \begin{matrix} u = \cos x, du = -\sin x dx \\ -du = \sin x dx, \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - u^2 \end{matrix} \right| = -\int \left(1 - u^2\right) \cdot u^2 du =$$

$$= -\int u^2 du + \int u^4 du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

2) якщо m і n – парні, то застосовують формули зниження порядку, а саме: $\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = \cos^2 x$, $\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \sin^2 x$.

Приклад. Знайти $\int \cos^4 2x dx$.

Розв'язання. $\int \cos^4 2x dx = \int \cos^2 2x \cdot \cos^2 2x dx =$

$$\int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 4x + \cos^2 4x\right) dx = \frac{1}{4}\int dx +$$

$$+ \frac{1}{4}\int \cos 4x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 4x dx = \frac{x}{4} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{1}{8}\int (1 + \cos 8x) dx == \frac{x}{4} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 8x}{64} + C.$$

3) якщо $m,n < 0$ та їхня сума парне число, то застосовують підстановку u=tg$x$, яка дозволяє привести інтеграл до суми інтегралів від степеневих функцій.

Приклад 11. Знайти $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right)^2 dx = \int tg^2 x \cdot (1 + tg^2 x)^2 dx,$$

тоді $\int tg^2 x \cdot (1 + tg^2 x)^2 dx = \left| \begin{matrix} tgx = u \\ x = arctgu \\ dx = \dfrac{du}{1 + u^2} \end{matrix} \right| = \int u^2 (1 + u^2) du = \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C.$

4) у разі, коли один з показників степені дорівнює нуля, а інший від'ємний, то застосовують універсальну тригонометричну підстановку.

Інтеграли виду $\int \sin mx \cos nx dx,\quad \int \sin mx \sin nx dx,\quad \int \cos mx \cos nx dx.$

Для розв'язання використовуємо відомі тригонометричні формули

$$\cos mx \cos nx = 0{,}5 \cdot [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$
$$\sin mx \sin nx = 0{,}5 \cdot [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$
$$\sin mx \cos nx = 0{,}5 \cdot [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

Приклад. $\int \sin\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x}{4}\right) \cdot dx = 0{,}5\int \left(\sin x - \sin\frac{x}{2}\right) dx = -0{,}5\cos x + \cos\frac{x}{2} + C$

Інтеграли виду $\int R(tgx)dx$.

Приклад. $\int tg^3 x dx = \begin{vmatrix} u = tgx \\ dx = du/(1+u^2) \end{vmatrix} = \int \frac{u^3}{1+u^2} du = \int \left(u - \frac{u}{1+u^2}\right) du$

$$\int tg^3\, x dx = 0{,}5\mathrm{tg}^2 x - \ln\sqrt{1+tg^2 x} + C = 0{,}5tg^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

1.7 Тригонометричні підстановки

1. Інтеграли виду $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2} dx.$

Рекомендується застосувати підстановку $x = a \sin u$. Тоді

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u} = a\sqrt{1 - \sin^2 u} = a\cos u, \quad dx = a\cos u du.$$

Приклад.

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx = \left\langle \begin{array}{c} x = 3\sin u \\ \sqrt{9 - x^2} = 3\cos u \\ dx = 3\cos u du \end{array} \right\rangle = 9\int \cos^2 x dx = 4{,}5\int (1 + \cos 2u) du =,$$

$$= 4{,}5u + 2{,}25\sin 2u + C.$$

Оскільки $u = \arcsin\frac{x}{3},\quad \sin 2u = 2\sin u \cos u = \frac{2x\sqrt{9 - x^2}}{9}$, отримує

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx = 4{,}5\arcsin\frac{x}{3} + \frac{x\sqrt{9 - x^2}}{2} + C.$$

2. Інтеграли виду $\int f(x, \sqrt{a^2+x^2}dx$

Рекомендується застосувати підстановку $x = a \cdot tgu$. Тоді:

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2tg^2u} = a\sqrt{1+tg^2x} = \frac{a}{\cos u}, \quad dx = \frac{adu}{\cos^2 u}.$$

Приклад.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \left\langle \begin{array}{c} x = 2tgu \\ \sqrt{2-x^2} = 2/\cos u \\ dx = 2du/\cos^2 x \end{array} \right\rangle = \int \frac{2}{\cos^2 x} \frac{\cos u}{8tg^2 u} du = \frac{1}{4}\int \frac{\cos u du}{\sin^2 u} = -\frac{1}{4\sin u} + C,$$

Так як

$$u = arctg\frac{x}{2}, \quad 1+tg^2u = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{2}{\sqrt{4+x^2}} \Rightarrow$$

$$\sin u = tgu \cdot \cos u = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}},$$

отримує: $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + \mathrm{C}$.

3. Інтеграли виду $\int f(x, \sqrt{x^2-a^2}dx$

Рекомендується застосувати підстановку $x = a/\cos u$. Тоді

$$\sqrt{x^2-a^2} = \frac{\sqrt{a^2-a^2\cos^2 u}}{\cos x} = atgu, \quad dx = \frac{a\sin u du}{\cos^2 u}$$

Приклад.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1} \cdot dx}{x^3} = \left\langle \begin{array}{c} x = 1/\cos u \\ dx = \sin u \cdot du/\cos^2 u \\ \sqrt{x^2-1} = tgu \end{array} \right\rangle = \int tgx \cdot \cos^3 u \frac{\sin u}{\cos^2 u} du = \int \sin^2 u du,$$

Оскільки $\cos u = 1/x \Rightarrow \sin x = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, отримуємо:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1} \cdot dx}{x^3} = \int \sin^2 u du = 0,5\int (1-\cos 2u) du = 0,5u - 0,25\sin 2u =$$

$$= 0,5\arccos\frac{1}{x} + 0,5\sin u \cos u = 0,5\arccos\frac{1}{x} - 0,5\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} + C.$$

ТЕМА 2 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

2.1 Основні властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона – Лейбніца

Визначений інтеграл – одне з основних понять математичного аналізу. Обчислення площ, обмежених кривими, довжин дуг, обсягів, роботи сили, швидкості і переміщення, моментів інерції, центрів тяжіння твердого тіла зводиться до певних інтегралів.

Нехай на відрізку $[a,b]$ задано функцію $y=f(x)$, яка є додатною, $f(x)>0$. Знайдемо площу S криволінійної трапеції (рис. 2.1) основа якої належить осі, праворуч та ліворуч відповідно обмежена прямими та зверху – кривою $y=f(x)$. Як відомо, площа фігури дорівнює сумі площ декількох фігур з яких вона складається. Отже, будь-який багатокутник можна розбити на трикутники. Потім за допомогою граничного переходу за площами правильних вписаних та описаних багатокутників можна визначити площу, але при цьому слід враховувати геометричні властивості фігури. Обчислимо площу зазначеної фігури (рис. 2.1). Для цього відрізок $[a;b]$ розіб'ємо точками $x_0=a, x_1, x_2,....,x_n=b$ (рис 2.2). У кожній точці ділення проведемо перпендикуляр до точки перетину з графіком функції $y=f(x)$ (рис 2.1).

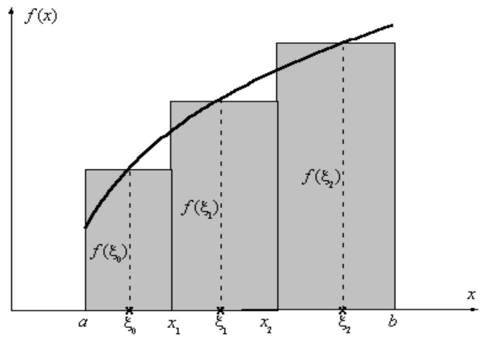


Рисунок 2.1

Таким чином, трапецію розіб'ємо на n частинних трапецій. На кожному відрізку $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$,…, $[x_{n-1},x_n]$ виберемо точку ξ_i і проведемо прямі паралельні до осі $0y$ до перетину з $y=f(x)$ та отримаємо $f(\xi_i)$.

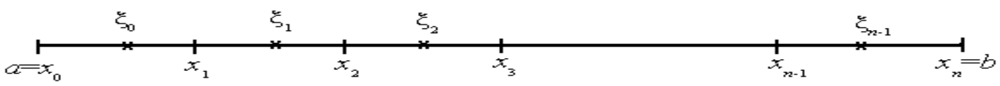


Рисунок 2.2

Суму, що має вигляд

$$S_n = f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + f(\xi_2)\cdot\Delta x_2 + f(\xi_3)\cdot\Delta x_3 + \ldots + f(\xi_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{K=1}^{n} f(\xi_K)\Delta x_K$$

будемо називати *інтегральною сумою* для функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Ця сума залежить як від способу розбиття так й від вибору точок ξ_i. Вираз $f(\xi_i)\Delta x_i$ є площею прямокутника, а їх сума – площа криволінійної трапеції. Площа ступінчастої фігури буде вважатися наближеним значенням площі заданої криволінійної трапеції, яке буде тим більш точнішим, якщо буде збільшено кількість точок розбиття (n) та чим меншим буде довжина частинного інтервалу (Δx_i).

Означення. Якщо границя інтегральної суми при $\max\Delta x_i$, що прямую до нуля, існує, кінцева та не залежить від способу вибору точок Δx_i та точок ξ_i, то цю границю називають визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ та позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$. Сама функція $f(x)$ називається інтегрованою на відрізку $[a;b]$, тобто

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{2.1}$$

де a, b – нижня та верхня границі інтегрування відповідно.

Теорема 1. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Властивості визначеного інтегралу.

1. Постійний множник можна винести за знак визначеного інтегралу:

$$\int\limits_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int\limits_a^b f(x)dx,\ c = const.$$

2. Визначений інтеграл від суми (або різниці) функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від кожного доданку:

$$\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b \mathrm{g}(x)dx.$$

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,\ a < c < b.$

4. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$, $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

5. Якщо на відрізку $[a,b]$ $f(x) \le g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$

Теорема 2 (*про оцінку визначеного інтегралу*). Значення визначеного інтегралу міститься між добутком найменшого та найбільшого значення підінтегральної функції на довжину інтегралу інтегрування:

$$m(b-a) < \int\limits_a^b f(x)dx < M(b-a),$$

де m, M – найменше та найбільше значення функції $f(x)$

$$m \le f(x) \le M.$$

Теорема 3 (теорема про середнє значення). Нехай точка належить відрізку [a, b]. Якщо функція неперервна на цьому відрізку, то справедливо рівність:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\eta).$$

Доведення. За теоремою 2 маємо $m \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \le M$, звідки

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx = \mu,$$

де η - деяке число, розташоване між найменшим та найбільшим значеннями функції на інтервалі [a, b]. Отже, $\mu = f(\eta)$.

Для обчислення визначених інтегралів користуються формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),\ \ a < c < b. \tag{2.2}$$

Приклади. Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int\limits_a^b xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

2. $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_1^4 = 2\cdot(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2.$

3. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \arcsin 1 - ar\sin 0 = \frac{\pi}{2}.$

4. $\int\limits_0^{\pi} \sin^2 xdx = 0,5\int\limits_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx = 0,5\,x\big|_0^{\pi} - 0,25\sin 2x\big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$

5. $\int\limits_0^{\pi} \sin 2x \sin 3xdx = 0,5\int\limits_0^{\pi}(-\cos 5x + \cos x)dx = -0,1\cdot\sin 5x\big|_0^{\pi} + 0,5\sin x\big|_0^{\pi} = 0.$

2.2 Заміна змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Розглянемо метод заміни змінної у визначеному інтегралі. Нехай дано інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ для безперервної на відрізку функції $y = f(x)$. Введемо змінну $x = \varphi(u)$. Якщо $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$, $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$ безперервні на відрізку $[\alpha,\beta]$і $f(\varphi(u))$визначена і неперервна на відрізку, то має місце рівність:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\phi(u))\cdot\phi'(u)dt. \qquad (2.3)$$

Зауваження. Можна не користуватися формулою (2.3). У цьому випадку досить обчислити невизначений інтеграл методом заміни змінної, потім отримати відповідь через задану змінну, а потім застосувати формулу (2.3).

Приклади. Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\cdot(1+\ln^2 x)} = \begin{vmatrix} u = \ln x \\ du = dx/x \end{vmatrix} = \int\limits_0^1 \frac{du}{1+u^2} = arctgu\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$, т.к. $\ln 1 = 0,\ \ \ln e = 1$

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\cdot(1+\ln^2 x)} = arctg(\ln x)\big|_1^e = arctg(\ln e) - arctg(\ln 1) = arctg(1) - arctg(0) = \frac{\pi}{4}.$$

2. $\int\limits_0^R \sqrt{R^2-x^2}dx = \left| \begin{array}{c} x = R\sin u \\ dx = R\cos u du \\ x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=R \Rightarrow u=\pi/2 \end{array} \right| = R^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 u du = \frac{R^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+2\cos 2u)du$**,** тоді:

$$\frac{R^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+2\cos 2u)du = \frac{R^2}{2}u\Big|_0^{\pi/2} + \frac{R^3}{2}\sin 2u\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Також використовується й метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu. \tag{2.4}$$

Приклади.1. $\int\limits_1^e \ln xdx = x\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x}{x}dx = e - 0 - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1.$

2. $\int\limits_0^\pi x\cos xdx = \int\limits_0^\pi xd(\sin x) = x\sin x\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \sin xdx = 0 - 0 + \cos x\Big|_0^\pi = -2.$

2.3 Невласний інтеграл першого роду і другого роду

Невласні інтеграли з нескінченими межами (першого роду).

Визначення. Нехай функція $f(x)$ визначена на напівнескінченому інтервалі $[a,\infty)$ та інтегрована на будь-якому відрізку $[a, b]$. Якщо існує границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то функція $fix)$ називається *інтегрованою невласно* на проміжку $[a, \infty)$, а вказана границя називається *невласним інтегралом,* вона позначається:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{2.5}$$

Якщо зазначена границя існує (і набуває скінченого значення), то невласний інтеграл називається *збіжним,* а якщо не існує (або прямує до нескінченності) - *розбіжним.*

Приклад 1. Встановити, при яких значеннях α сходиться інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$.

Розв'язання. При $\alpha > 1$ невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right) = \frac{1}{\alpha - 1} \text{ збігається.}$$

При $\alpha < 1$ невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to\infty}\left(b^{1-\alpha} - 1\right) = \infty \text{ розбігається.}$$

При $\alpha = 1$, невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x\Big|_1^b = \infty \text{ розбігається}$$

Невласний інтеграл відображає площу необмеженої області, укладеної між лініями $y = f(x),\ x = a$ и віссю Ох.

Аналогічно визначається невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty} \int\limits_{A}^{b} f(x)dx.$

Приклад 2. Встановити збіжність інтеграла_ $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}.$

Розв'язання

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to-\infty} \int_A^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to-\infty} arctgx\Big|_A^0 = \lim_{A\to-\infty}\left[arctg(0) - arctg(A)\right] = \frac{\pi}{2}.$$

Невласний інтеграл збігається.

Невласні інтеграли від розривних функцій (другого роду)

Визначення. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі $[a,\ c)$, а в точці $x = c$ вона або не визначена, або має розрив другого роду. У цьому разі не може йти мова про визначений інтеграл (за визначенням він є границею інтегральних сум), бо функція $f(x)$ не є неперервною на інтервалі $[a,\ b]$, а отже, границя може не існувати. Позначимо інтеграл від функції, яка має розрив в точці b, так:

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to c-0} \int_a^b f(x)dx. \tag{2.6}$$

Якщо існує ця границя (2.6), то функцію $f(x)$ називають інтегрованою невласно на проміжку *[a, c)*, а зазначена границя називається невласним інтегралом.

Аналогічно визначають невласний інтеграл, якщо функція $f(x)$ має розрив на нижній межі

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to a+0}\int_b^c f(x)dx. \tag{2.7}$$

Якщо функція $f(x)$ має розрив в деякій точці $x = d$, яка належить інтервалу інтегрування $[a,\ b]$, то інтеграл розбивають на два: в одному з них функція має розрив на верхній межі (2.6), а в другому - на нижній (2.7):

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^c f(x)dx.$$

Приклад 3. Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Розв'язання. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b\to 1-0}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim(2(\sqrt{1-b}-1) = 2.$

Приклад 4. Обчислити невласний інтеграл (або встановити його розбіжність) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

Розв'язання. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to -0}\int_{-1}^b \frac{dx}{x^2} + \lim_{b\to +0}\int_b^1 \frac{dx}{x^2}$.

Згідно результату з прикладу 1, інтеграл розбігається.

Зауваження. Цей інтеграл досить підступний, якщо не помітити точки розриву. Дійсно, за формулою Ньютона-Лейбніца отримаємо

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2.$$

Виходить парадокс. Функція $y = 1/x^2$ приймає тільки позитивні значення, отже, інтеграл повинен бути позитивним.

2.4 Геометричні застосування визначеного інтегралу

1. Площа плоскої фігури.

1.1. Крива задана у вигляд $y = f(x)$. Як відомо, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ це число, яке дорівнює площі криволінійної трапеції, яку зверху обмежено кривою $y = f(x)$, знизу віссю абсцис, праворуч та ліворуч прямими $x=a$, $x=b$ (рис. 2.1). Тому першим геометричним застосуванням ми розглядатимемо саме обчислення площі фігури. Якщо фігура, площу якої потрібно знайти, обмежена лініями $y = f(x)$ $\left(f(x) < 0\right)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ тобто буде розташована під віссю абсцис, то площу такої фігури слід знаходити за формулою:

$$S = -\int_a^b f(x)dx, \text{ або } S = \int_a^b |y|\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad (2.7)$$

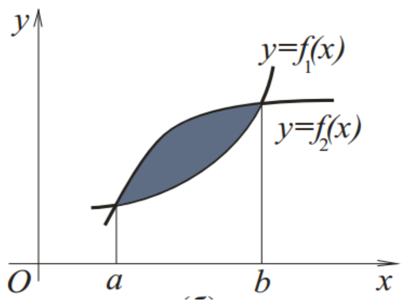


Рисунок 2.3

Якщо фігуру обмежено лініями $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \le f_2(x)$) (рис. 2.3), то площу фігури знаходять за формулою:

$$S = \int_a^b (y_1 - y_2)dx = \int_a^b \left[f_1(x) - f_2(x) \right] dx. \qquad (2.8)$$

Якщо на відрізку $[a;b]$ функція $y = f(x)$, що зверху обмежує криволінійну трапецію, є кусочно-монотонною, при цьому $c \in [a;b]$, то площу цієї фігури слід знаходити, як

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx. \qquad (2.9)$$

Приклад 1. Обчислити площу, обмежену синусоїдою $y = \sin x$ і віссю Ох на відрізку [0, 2π].

Розв'язання. Згідно (2.7) $S = \int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\,dx = -\cos x\big|_0^{\pi} + \left|-\cos x\big|_{\pi}^{2\pi}\right| = 4.$

Приклад 2. Знайти площу плоскої фігури, яку обмежено лініями $y = 2x - x^2$, $y = -x$. (рис. 2.4)

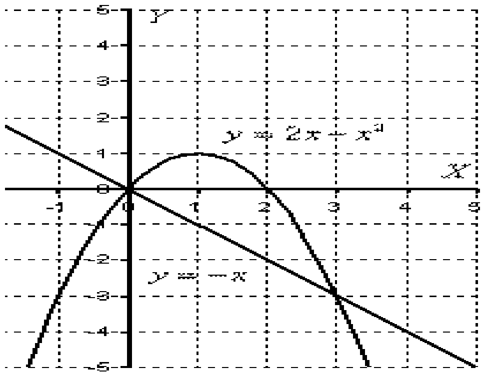


Рисунок 2.4

Розв'язання: Знайдемо точки перетину параболи $y = 2x - x^2$, і прямої $y = -x$. Для цього вирішимо рівняння: $2x - x^2 = -x$. Так як $x_1 = 0, x_2 = 3$, то нижня границя інтегрування дорівнює нулю, а верхня границя інтегрування дорівнює трьом. Згідно (2.8), площа дорівнює:

$$S = \int_0^3 \left[2x - x^2 - (-x)\right] dx = \left.\frac{3x^2}{2}\right|_0^3 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = 4{,}5.$$

Приклад 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x,\ y = \dfrac{4}{x},\ x = 0,\ x = 4,\ y = 0.$

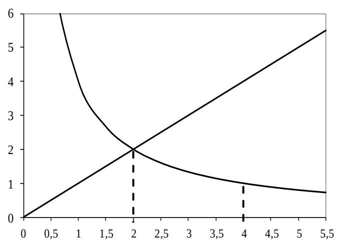


Рисунок 2.5

Розв'язання: Побудуємо фігуру (рис. 2.5). Як бачимо $y = f(x)$, яка обмежує задану фігуру, є кусочно-монотонною, тому для знаходження площі фігури скористаємось формулою (2.9). Знайдемо координати точки перетину графіків функцій, прирівняємо їх:

$$x - 4/x = 0 \ \Rightarrow\ x^2 = 4 \ \Rightarrow\ x = \pm 2.$$

Таким чином, $a = 0$, $b = 4$, $c = 2$. Значення $x = -2$ не задовольняє умові задачі. Отже, площа заданої фігури обчислюється так:

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^2 x dx + \int_2^4 \frac{4}{x} dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 + 4\ln x\Big|_2^4 = 2 + 4\ln 2 (кв.од).$$

1.2. Крива задана параметричними рівняннями. Розглянемо випадок, коли крива задана в параметричної формі:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \chi(t) \end{cases} \tag{2.10}$$

Якщо параметр t змінюється на відрізку $[\alpha, \beta]$, то $\varphi(\alpha) = a, \quad \chi(\beta) = b$. Нехай $y = f(x)$ визначено на відрізку $[a, b]$, то $dx = \varphi'(t)dt$,

$y = f(x) = f(\varphi(t)) = \chi(t)$. Отже, площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b y dx = \int_\alpha^\beta \chi(t) \cdot \phi'(t) dt. \qquad (2.11)$$

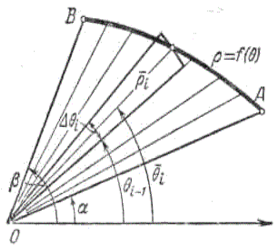
Приклад. Обчислити площу еліпса, якщо рівняння еліпса задано в параметричному вигляді $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$.

Розв'язання: Так як $dx = -a\sin t \cdot dt$, то

$$S = 2\int_\pi^0 b\sin t \cdot (-a\sin t)dt = -2ab\int_\pi^0 \sin^2 t dt = 2ab\int_0^\pi \sin^2 t dt = ab\int_0^\pi (1 - 2\cos 2t)dt.$$

Тоді $S = ab \cdot (t - 0,5\sin 2t)\Big|_0^\pi = \pi ab.$

1.3. Площа криволінійного сектора в полярних координатах. Нехай крива



задана рівнянням $\rho = f(\theta), (\alpha < \theta < \beta)$. Тоді обчислимо площу сектора *OAB* (рис. 2.6). Розіб'ємо сектор на n малих секторів. Позначимо $\bar{\rho}_k$ через довжину радіуса-вектору, відповідного кутку $\theta_{k-1} < \bar{\theta}_k < \theta_k$. Розглянемо кругової сектор

Рисунок 2.6

з центральним кутом $\Delta\theta_k$. Площа сектора буде дорівнює $\Delta S_k = 0.5\bar{\rho}_k^2 \Delta\theta_k$. Тоді сума площ $\Delta S_k = 0,5\sum_{k=1}^{n} \bar{\rho}_k^2 \Delta\theta_k = 0.5\sum_{k=1}^{n} \left[f(\bar{\theta}_k)\right]^2 \Delta\theta_k$.

Так як сума є інтегральною для функції $\rho^2 = \left[f(\theta)\right]^2$, то на відрізку $[\alpha, \beta]$ границя цієї суми при є певним інтегралом:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[f(\theta)\right]^2 d\theta. \qquad (2.12)$$

Приклад. Обчислити площу, яка обмежена лемніскатою $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ (рис 2.7).

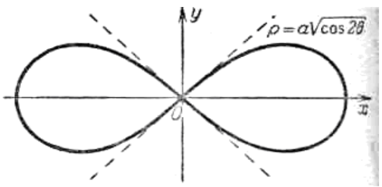


Рисунок 2.7

Розв'язання: $S = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta \cdot d\theta = a^2 \sin 2\theta\Big|_0^{\pi/4} = a^2.$

2. Обчислення довжини дуги плоскої фігури.

2.1. Крива задана у вигляд $y = f(x)$. Нехай $y = f(x)$ неперервна функція разом зі своїми похідними $f'(x)$. Такі лінії будемо називати гладкими.

Довжиною дуги кривої називатимемо границею, до якої прямує довжина вписаної в неї ламаної під час необмеженого зростання числа її ланцюжків, за умови прямування довжини найбільшого з них до нуля (рис. 2.8).

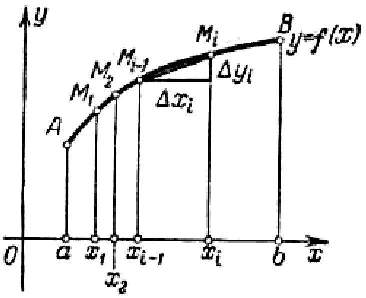


Рисунок 2.8

Поділимо дугу АВ точками M_1, M_2, M_i, ..з абсцисами x_1, x_2, x_i Поєднаємо точки відрізками AM_1, M_1M_2, M_2M_3 .. довжини яких позначимо Δl_1, Δl_2,.. $\Delta l_к$, .

Ми отримали ламану яка вписана в дугу AB . Довжина ламаної складається з довжин відрізків $l_n = \sum \Delta l_k$. Тоді

$$l = \lim_{n\to\infty} \sum \Delta l_k = \lim_{n\to\infty} \sum \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \lim_{n\to\infty} \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k,\text{, або}$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx \qquad (2.13)$$

Приклад. Знайти довжину дуги кола:

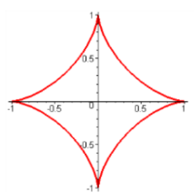
Розв'язання: $y = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, тоді, згідно (2.13)

$$l = 4\int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{(R^2 - x^2)}}\,dx = 4\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,dx = 4R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R = 4R\pi/2 = 2\pi R$$

2.2. Крива задана параметричними рівняннями (2.10). Так як,

$$f' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\chi'}{\varphi'}, \text{ то } l = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left[\frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\,\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\,dt \qquad (2.14)$$

Приклад. Знайти довжину дуги астроїди $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t$ (рис.2.9)



Розв'язання:

$$l = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)}dt =$$

$$= 12a\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t dt = -3a\cos 2t_0^{\pi/2} = -3a(-1-1) = 6a$$

Рисунок 2.9

*2.3. Крива задана в полярних координатах***.** Так як,

$$x=\rho\cos\theta,\ \ y=\rho\sin\theta\text{, то}$$

$$x=f(\theta)\cos\theta,\quad y=f(\theta)\sin\theta$$
$$x'=f'\cos\theta-f\sin\theta,\quad y'=f'\sin\theta+f\cos\theta$$
$$x'^2+y'^2=f'^2+f^2$$

Отже, довжина дуги в полярній системі координат обчислюється за формулою

$$l=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{(f')^2+f^2}\,d\theta=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{(\rho')^2+\rho^2}\,d\theta \qquad (2.15)$$

Приклад. Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho=a(1+\cos\theta)$ (рис. 2.10).

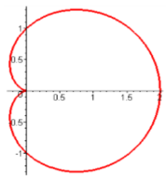


Рисунок 2.10

Розв'язання: $\rho'=-a\sin\theta$, тоді:

$$l=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a$$

3. Обчислення об'єму тіла

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана неперервна знакопостійна функція $y=f(x)$. Знайдемо об'єм тіла, отриманого обертанням лінії навколо осі абсцис (рис. 2.11,а). Для знаходження об'єму скористаємось методом проектування криволінійної трапеції на вісь абсцис. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на елементарні відрізки точками $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$, та на кожному відрізку $[x_{i-1};x_i]$ довільним чином виберемо z_i $i=1,2,...n$. Тоді деяке наближення для шуканого об'єму дасть сума $\sum_{i=1}^{n}\pi f^2(z_i)\Delta x_i$ - це об'єм циліндра з висотою $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ та радіусом основи $f(z_i)$.

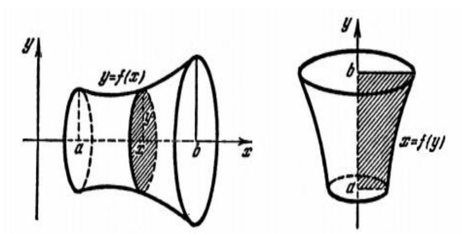


Рисунок 2.11

Очевидно, що наближення до шуканого об'єму V_x буде тим ближчим, чим менша довжина відрізка розбиття Δx_i, тому шуканий об'єм V_x знайдемо як границю $V_x=\lim\limits_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\pi f^2(z_i)\Delta x_i$, де $\max\Delta x_i$ – максимальна довжина відрізка розбиття. Це і є визначений інтеграл, тобто

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (2.16)$$

Формально замінивши змінну *x* на *y*, ми отримаємо формулу для обчислення об’єму тіла обертання навколо осі ординат (2.11, б)

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy. \qquad (2.16)$$

Приклад. Знайти об’єм тіла обертання фігури, обмеженої лініями $x = 0.5y^2, x = 3$

Розв’язання $V = \pi \int_0^3 2xdx = 9\pi$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ТЕМА 3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

3.1 Поняття про диференціальне рівняння. Загальні і частинні розв’язки. Початкові та крайові умови. Задача Коші та крайова задача

Рівняння називається *диференціальним*, якщо воно містить похідні (диференціали) шуканої функції.

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної (диференціала), що входить у нього.

Коли шукана функція $y = y(x)$ є функцією однієї змінної *x*, то диференціальне рівняння (ДР) називають *звичайним*. Далі будемо розглядати лише звичайні ДР.

Диференціальне рівняння n–го порядку зв'язує незалежну змінну *x*, шукану функцію $y = f(x)$ та її похідні $y', y'', ..., y^{(n)}$ (чи відповідні диференціали).

Диференціальне рівняння *n*–го порядку можна подати в загальному вигляді $F(x, y, y', y''...y^{(n)}) = 0$. де $y = y(x)$ – шукана функція.

Рівняння може не містити в явному вигляді незалежну змінну *x*, саму шукану функцію та її похідні нижчих порядків $y', y'', ..., y^{(n-1)}$, але до нього обов'язково повинна входити *n*-а похідна $y^{(n)}$. Це неявна форма запису ДР. Розв'язавши загальне рівняння відносно найвищої похідної, отримаємо канонічний (нормальний) вигляд ДР $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$.

Наприклад, $y'''+5(y')^4 - \sqrt{y} - 2e^x = 0$ – ДР третього порядку, подане у загальній (неявній) формі; $y^{(6)} = y'''-4x(y')^8$ – ДР шостого порядку, записане в канонічній (явній) формі.

Уже відома задача знаходження первісної $y = F(x)$ для даної функції $f(x)$ породжує найпростіше диференціальне рівняння $y' = f(x)$, розв'язування якого зводиться до інтегрування.

Вирішенням диференціального рівняння називається довільна функція $y = y(x)$, що при підстановці в це рівняння перетворює його в тотожність. Графік розв'язку ДР називається інтегральною кривою.

Зауваження 1. Розв'язок ДР n–го порядку є n разів диференційованою функцією. Тому інтегральна крива є досить гладкою лінією.

Процес знаходження розв'язку ДР називається його інтегруванням.

Зауваження 2. Розв'язок ДР, записаний у неявній формі, часто називають інтегралом диференціального рівняння.

Зауваження 3. Розв'язок ДР також може подаватися в параметричній формі.

Зауваження 4. Диференціальне рівняння вважається розв'язаним, якщо множина його рішень задається співвідношеннями без диференціювання, що можуть включати операції інтегрування відомих функцій. Серед вказаних інтегралів допускаються й ті, що не виражаються через елементарні функції у скінченному вигляді. Як правило, будемо намагатися знаходити розв'язок ДР у найбільш простій явній формі та обчислювати всі наявні інтеграли.

Щоб знайти шукану функцію з ДР n-го порядку, треба в загальному випадку виконати n операцій інтегрування, що дає n довільних сталих. Таким чином, диференціальне рівняння має безліч рішень.

Загальним вирішенням диференціального рівняння n-го порядку є функція $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, що містить n довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ і задовольняє диференціальному рівнянню при будь-яких допустимих значеннях $C_1, C_2, ..., C_n$.

Геометричний зміст: загальному розв’язку відповідає сім’я інтегральних кривих. При цьому через кожну внутрішню точку області визначення сім’ї проходить єдина інтегральна крива.

Частинним вирішенням диференціального рівняння називається розв'язок, який одержується із загального розв'язку при конкретних фіксованих значеннях довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$.

Геометричний зміст: частинному розв’язку відповідає конкретний екземпляр з сім’ї інтегральних ліній.

Наприклад, маємо рівняння $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. $y = \frac{C}{x}$ - загальний розв’язок; $y = \frac{1}{x}$ - частинний розв’язок.

Для знаходження конкретних значень довільних сталих, що входять у загальний розв’язок, звичайно використовуються:

1) *початкові умови* – відомі значення функції та її похідних в деякій одній фіксованій точці $x = x_0$; або

2) *крайові* (*граничні*) *умови* – відомі значення функції та її похідних в декількох різних фіксованих точках.

Початкових або крайових умов повинно бути стільки, скільки довільних сталих. Для ДР n-го порядку початкові умови мають вигляд:

$$y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_0';...;\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ – відомі числа (початкові дані).

Диференціальне рівняння разом з початковими умовами називають *початковою задачею (задачею Коші).* Диференціальне рівняння разом з крайовими умовами називають *крайовою* (*граничною*) *задачею*.

3.2 Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні рівняння першого порядку. Лінійні рівняння першого порядку

Для ДР першого порядку задача Коші має вигляд:

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{при} \quad y(x_0) = y_0, \text{ або}$$

$$y' = f(x, y) \text{ при } y(x_0) = y_0. \tag{3.1}$$

і з геометричної точки зору зводиться до побудови інтегральної кривої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$, в якій дотична має заданий кутовий коефіцієнт y_0'. За відповідною теоремою Коші за певними умовами ця крива існує й єдина. Загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку – це функція незалежної змінної x та довільної сталою C_1: $y = y(x, C_1)$.

Припускаємо, що в околі точки (x_0, y_0) рівняння задовольняє умовам теореми існування і одиничності рішення.

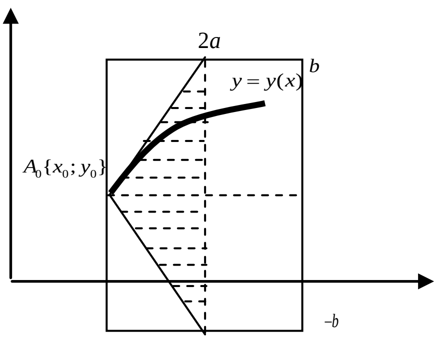


Рисунок 3.1

Це означає, що, якщо права частина рівняння (3.1) неперервна в деякій області R: $|x - x_0| < a, |y - y_0| < b$, то існує рішення, визначене в околі $|x - x_0| < d$ $(d > 0)$ (рис. 3.1). Рішення єдине, якщо виконана умова Ліпшиця

$$|F(x, \tilde{y}) - F(x, y)| \le N|\tilde{y} - y|,$$

де $N = \max|f_y'(x, y)|$ в області R.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Визначення. Диференціальні рівняння, у яких змінні можна розділити шляхом множення обох частин рівняння на один і той самий вираз, називаються диференціальними рівняннями з відокремлюваними змінними. Таким, наприклад, може бути рівняння

$$y' = f(x) \cdot g(x); \quad \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(x) \tag{3.2}$$

З (3.2) слід $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$. Тоді $\int \dfrac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

Розв'язання:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln\frac{1}{x} + \ln C = \ln\frac{C}{x} \Rightarrow y = \frac{C}{x}$$

З геометричної точки зору загальне рішення ДР – це сімейство кривих (рис. 3.2).

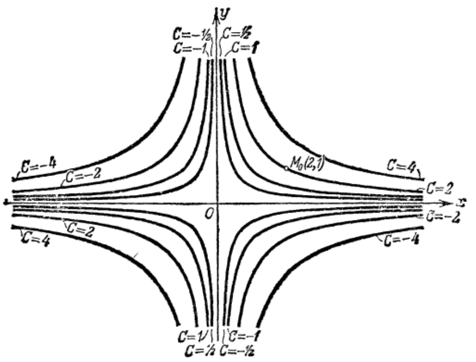


Рисунок 3.2

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $(x-1)y' + y^2 = 0$.

Розв'язання: $(x-1)\dfrac{dy}{dx} = -y^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{y^2} = -\dfrac{dx}{x-1}$,

тоді

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{dx}{x-1} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{y} = -\ln|x-1| - \ln C = -\ln|\mathrm{C(x-1)}| \;\Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{\ln|C(x-1)|}$$

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

*Визначення***.** Диференціальне рівняння першого порядку називається *однорідним*, якщо його можна подати у вигляді $y' = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ для деякої функції *g*(*x*).

Рівняння $y' = f(x, y)$ називається однорідним, якщо $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки

$$u = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y = xu,\; y' = u + xu' = u + x\frac{du}{dx} \qquad (3.3)$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

Розв'язання Поділимо чисельник і знаменник правої частини на x^2

$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2} = \frac{\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Застосуємо підстановку (3.3), тоді:

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{u}{1-u^2} \;\Rightarrow\; x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1-u^2} - u = \frac{u^3}{1-u^2}.$$

У результаті отримано диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Маємо:

$$\frac{(1-u^2)du}{u^3} = \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \int\frac{(1-u^2)du}{u^3} = \int\frac{dx}{x} \;\Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|Cx| \;\Rightarrow\; \frac{-x^3}{2y^2} = \ln|Cy|$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок ДР: $y' = \frac{y}{x} + tg\left(\frac{y}{x}\right)$

Розв'язання: $y = ux \;\Rightarrow\; x\frac{du}{dx} + u = u + tgu \;\Rightarrow$

$$\int\frac{du}{tgu} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(\sin u) = \ln(Cx) \Rightarrow \quad \sin\frac{y}{x} = Cx \;\Rightarrow\; y = x\arcsin(Cx)$$

Розглянемо ДР виду $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$. Зробимо заміну:

$$y = y_1 + h, x = x_1 + k \Rightarrow \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{ax_1 + by_1 + c + ah + bk}{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 + a_1h + b_1k}$$

Припустимо, що $\begin{cases} ah + bk = -c \\ a_1h + b_1k = -c_1 \end{cases}$ Тоді ДР приводиться до однорідного і вирішується методом, викладеним вище. Це можливо за умови, якщо визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$. В іншому випадку, тому що $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \lambda \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1} \Rightarrow z = ax + by \Rightarrow z' = a + by' \Rightarrow y' = z'/b - a/b \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b\frac{z+c}{\lambda z + c_1}$$

У цьому випадку маємо рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад. **1**. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1}$.

Розв'язання: Зробимо заміну $y = y_1 + h, x = x_1 + k \Rightarrow$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 - 3 + h + k}{x_1 - y_1 - 1 + h - k} \Rightarrow \begin{cases} h + k = 3 \\ h - k = 1 \end{cases} \Rightarrow h = 2, k = 1 \Rightarrow \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1} = \frac{1 + \frac{y_1}{x_1}}{1 - \frac{y_1}{x_1}};$$

$$y_1 = ux_1 \Rightarrow u'x_1 + u = \frac{1+u}{1-u} \Rightarrow u'x_1 = \frac{1+u^2}{1-u} \Rightarrow \int \frac{1-u}{1+u^2} du = \ln Cx_1 \Rightarrow arctgu - 0.5\ln(1+u^2) = \ln Cx_1;$$

$$acrtgu = \ln Cx_1\sqrt{1+u^2} \Rightarrow Cx_1\sqrt{1+u^2} = e^{arctgu} \Rightarrow C\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}} = e^{arctg\frac{y_1}{x_1}};$$

$$C\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{arctg\frac{y-1}{x-2}}.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$$

Розв'язання. $z = 2x + y \Rightarrow y' = z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5} \Rightarrow z' = \frac{5z+9}{2z+5}$

.

$$\int \frac{2z+5}{5z+9} dz = x + C \Rightarrow 0.4z + 0.28\ln|5z+9| = x + C \Rightarrow 10y - 5x + 7 + 7\ln|10x + 5y + 9| = C_1$$

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Визначення. Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо воно лінійне відносно шуканої функції та її похідної, тобто має такий вигляд:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{3.4}$$

де *P(x), Q(x)* – деякі функції змінної *x*. Якщо функція тотожно дорівнює нулю, то рівняння (3.4) називається *однорідним*, в іншому разі – *неоднорідним*.

Розв'язок лінійного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = uv\,. \tag{3.5}$$

Тоді:

$$y' = (uv)' = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}\,. \tag{3.6}$$

Підставимо (3.5-3.6) у рівняння (3.4)

$$\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}+P(x)uv=Q(x),$$
$$\frac{du}{dx}v+u\left[\frac{dv}{dx}+P(x)v\right]=Q(x). \tag{3.7}$$

Візьмемо в якості v будь-який частинний розв'язок рівняння

$$\frac{dv}{dx}+P(x)v=0 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v}=-P(x)dx \;\Rightarrow$$
$$\int\frac{dv}{v}=-\int P(x)dx \;\Rightarrow\; \ln v=-\int P(x)dx \;\Rightarrow$$
$$v(x)=\exp\left(-\int P(x)dx\right).$$

З другого рівняння (3.6) маємо $\frac{du}{dx}v=Q(x)$. Тоді:

$$u=\int\frac{Q(x)}{v(x)}dx=\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+C_1.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3$.

Розв'язання: $y=uv \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx}v+u\left[\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x+1}v\right]=(x+1)^3$.

$$\frac{dv}{dx}=\frac{2v}{x+1} \;\Rightarrow\; \int\frac{dv}{v}=\int\frac{2dx}{x+1} \;\Rightarrow$$
$$\ln v=2\ln(x+1) \;\Rightarrow\; v=(x+1)^2.$$

Тоді:
$$\frac{du}{dx}(x+1)^2=(x+1)^3 \;\Rightarrow\; u=\frac{(x+1)^2}{2}+C \;\Rightarrow$$
$$y=uv=\frac{(x+1)^4}{2}+C(x+1)^2.$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'\cos x+y\sin x=1$

Розв'язання:

$$y'+ytgx=1\Rightarrow\frac{du}{dx}v+u\left[\frac{dv}{dx}+vtgx\right]=\frac{1}{\cos x}.$$
$$\left[\frac{dv}{dx}+vtgx\right]=0 \;\Rightarrow\; \int\frac{dv}{v}=-\int tgxdx \;\Rightarrow\; \ln v=\ln(\cos x) \;\Rightarrow\; v=\cos x.$$
$$\int du=u=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C \;\Rightarrow$$
$$y=uv=(tgx+C)\cos x=\sin x+C\cos x.$$

ТЕМА 4 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

4.1 Диференціальні рівняння вищих порядків

Розглянемо диференціальні рівняння:

$$y'' = f(x, y').$$

і розглянемо частинні випадки, які легко зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку.

1 Права частина рівняння не містить шуканої функції та її похідної. Рівняння:

$$y^{(n)} = f(x). \qquad (4.1)$$

- це найпростіші диференціальні рівняння вищих порядків. Їхній загальний інтеграл визначається (у загальному випадку) за допомогою інтегрування n разів.

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1,$$

де x_0 – фіксоване значення.

Повторюємо процес інтегрування:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} (\int_{x_0}^{x} f(x)dx)dx + C_1(x - x_0) + C_2.$$

Таким чином,

$$y = \int_{x_0}^{x} ......\int_{x_0}^{x} f(x)dx....dx + C_1 \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n.$$

Щоб визначити частинний розв’язок рівняння (4.1), достатньо використати початкові умови.

Приклад 1. Диференціальне рівняння вигину консолі має вигляд.

$y'' = \frac{P}{EJ}(l - x), \ y\Big|_{x=0} = 0, \ y'\Big|_{x=0} = 0$. Знайти максимальний прогин балки.

Розв’язання.

$$y' = \frac{P}{EJ}\int_{0}^{x}(l - x)dx = \frac{P}{EJ}(lx - x^2/2) + C_1;$$

$$y=\frac{P}{2EJ}(lx^2-x^3/3)+C_1x+C_2.$$

Підставами початкові умови $y\Big|_{x=0}=0,\ y'\Big|_{x=0}=0$ та отримаємо C_1=C_2=0.

Таким чином, маємо $y=\dfrac{Px^2}{2EJ}\left[l-\dfrac{x}{3}\right].$

Максимальний прогин балки – при x=l: $y_{\max}=\dfrac{Pl^3}{3EJ}.$

2 Диференціальні рівняння вищого порядку, що допускають пониження порядку. Рівняння виду:

$$y''=f(x,y'). \tag{4.2}$$

за допомогою підстановок $y'=u\Rightarrow y''=u'$ зводять до диференціальних рівнянь першого порядку відносно нової шуканої функції

$$u'=f(x,u).$$

Знизивши порядок диференціального рівняння, отримаємо диференціальні рівняння першого порядку будь-якого з вивчених типів. Щоб повернутися до початкової функції, проінтегруємо цей вираз ще раз. Розглянемо алгоритм розв'язання на прикладі.

Приклад 2. Трубка з шариком масою m всередині обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω. На шарик діє відцентрова сила $F=m\omega^2x$. Знайти рівняння руху шарика.

Розв'язання. Згідно закону Ньютона:

$$ma=m\omega^2x\ \Rightarrow\ x''=\omega^2x.$$

Тоді:
$$x'=u,\ x''=u\frac{du}{dx}\ \Rightarrow\ \int udu=\omega^2\int xdx\Rightarrow$$
$$\frac{u^2}{2}=\frac{\omega^2x^2}{2}+C.$$

При $x=0,\ x'=u=0$, отже C=0. Рішення ДР має вигляд:

$$u=\omega x\ \Rightarrow\ \frac{dx}{dt}=\omega x\ \Rightarrow\ \int\frac{dx}{x}=\omega\int dt\ \Rightarrow$$

$$\ln x-\ln C=\ln\frac{x}{C}=\omega t\ \Rightarrow\ x=Ce^{\omega t}.$$

4.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку

Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку $(n \ge 1)$ називається рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x),$$

де $y = y(x)$ − шукана функція аргументу x; $a_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ та $f(x)$ − відомі неперервні функції від x (або сталі), причому $a_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ − коефіцієнти, $f(x)$ − права частина. Тобто, таке ДР є лінійним відносно шуканої функції $y = y(x)$ та всіх її похідних.

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння називається лінійним однорідним ДР (ЛОДР) (лінійним рівнянням з нульовою правою частиною), у протилежному випадку, коли $f(x) \ne 0$, − лінійним неоднорідним (ЛНДР) (лінійним рівнянням з ненульовою правою частиною).

Загальні властивості лінійних ДР вищих порядків розглянемо на прикладі лінійного ДР другого порядку:

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{4.3}$$

де $p(x)$ і $q(x)$ − коефіцієнти; $f(x)$ − права частина.

Система функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ $(n \ge 2)$ називається ***лінійно залежною*** в інтервалі $(a;b)$, якщо існують сталі числа $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$, не всі рівні нулю, такі, що для відповідної лінійної комбінації у кожній точці $x \in (a;b)$ виконується рівність $\mu_1 y_1(x) + \mu_2 y_2(x) + ... + \mu_n y_n(x) \equiv 0$.

Якщо ця тотожність виконується лише за умови, коли всі $\mu_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, то система функцій $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ називається лінійно незалежною в інтервалі $(a;b)$.

У випадку двох функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ умову лінійної залежності можна подати у вигляді $y_1(x)/y_2(x) = C = const$, $\forall x \in (a;b)$.

Наприклад, а) функції $y_1(x) = \ln x$ і $y_2(x) = \lg x$ лінійно залежні на напівпрямій $(0;+\infty)$, оскільки $y_1(x)/y_2(x) = \ln x/\lg x = \ln 10 = const$;

б) функції $y_1(x) = \sin x$ і $y_2(x) = \sin 2x$ лінійно незалежні на множині дійсних чисел R, оскільки $y_1(x)/y_2(x)=\sin x/\sin 2x=1/(2\cos x)\neq const$.

Для даного ЛОДР n-го порядку будь-яка лінійно незалежна система n його частинних рішень $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ називається фундаментальною.

Теорема. Якщо функції $y_1(x), y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему частинних рішень ЛОДР другого порядку, то їх лінійна комбінація $\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2$, де C_1 і C_2 – довільні сталі, служить загальним Вирішенням цього рівняння.

Зауваження 1. Очевидний нульовий розв'язок ЛОДР $y=0$ не утворює фундаментальної системи з довільними іншими частинними розв'язками, оскільки при цьому вронськіан тотожно рівний нулю.

Для ЛОДР *n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=0,$$

де $a_i=const\in R$.

Ейлером розроблено загальний метод його розв'язування шляхом побудови фундаментальної системи і на її основі загального розв'язку. Розглянемо його на прикладі ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами *p, q*:

$$y''+py'+qy=0. \tag{4.4}$$

Частинні розв'язки шукаємо у вигляді експоненти $y=e^{kx}$, де k – невідомий сталий коефіцієнт. Підставимо цю функцію $y=e^{kx}$ та її похідні $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$ у рівняння і дістанемо $(k^2+pk+q)e^{kx}=0$. Оскільки $e^{kx}\neq 0$, то для визначення k отримуємо співвідношення

$$k^2+pk+q=0, \tag{4.5}$$

яке називають *характеристичним рівнянням* даного ЛОДР.

Характеристичне рівняння є квадратним відносно k і на множині комплексних чисел завжди має два розв'язки k_1 і k_2. При цьому можливі три випадки, в залежності від знаку дискримінанта $D=p^2-4q$.

Випадок 1. $D>0$. Обидва корені k_1 і k_2 – дійсні різні числа $k_1\neq k_2$: $k_{1,2}=\left(-p\pm\sqrt{D}\right)/2$. Тоді $y_1=e^{k_1x}$ і $y_2=e^{k_2x}$ – лінійно незалежні розв'язки, що утворюють фундаментальну систему. Загальний розв'язок має вигляд

$$\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{4.6}$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок $y'' + 3y' + 2y = 0$.

$$k^2 + 3k + 2 = 0;\; D = 9 - 8 = 1 > 0;$$

$$k_1 = -1,\; k_2 = -2;\; \bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Випадок 2. $D = 0$. Корені k_1 і k_2 − дійсні рівні числа $k_1 = k_2 = k = -p/2$. Тобто, $k = -p/2$ - один корінь кратності $r = 2$. Тоді, $y_1 = e^{kx}$ - частинний розв'язок. Другий лінійно незалежний з ним розв'язок $y_2 = x\,e^{kx}$ (без доведення).

Отже, загальний розв'язок ЛОДР можна подати у вигляді:

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1\, e^{kx} + C_2 x\, e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \tag{4.7}$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок $y'' - y' + 0{,}25y = 0$.

$D = 1 - 1 = 0,\; k_1 = k_2 = k = 1/2;\; \bar{y} = e^{x/2}(C_1 + C_2 x)$.

Випадок 3. $D < 0$. Характеристичне рівняння має два комплексні спряжені корені $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, де $\alpha = -p/2$, $\beta = \sqrt{-D}/2$, $D = p^2 - 4q < 0$, $i = \sqrt{-1}$ − уявна одиниця.

Тоді $y_{1к} = e^{k_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x}$, $y_{2к} = e^{k_2 x} = e^{(\alpha - \beta i)x}$ − комплексні лінійно незалежні розв'язки. Їх лінійна комбінація $\bar{y}_к = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x}$ служить комплексним загальним вирішенням. Але ДР має дійсні коефіцієнти, тому бажано мати розв'язки в дійсній формі. На основі формули Ейлера маємо:

$$y_{1к} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x);\; y_{2к} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Можна показати, що для комплекснозначної функції, яка є вирішенням диференціального рівняння, її уявна та дійсна частини також будуть його розв'язками (зробіть це самостійно).

Таким чином, дістаємо лінійно незалежні дійсні частинні розв'язки $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, що утворюють фундаментальну систему. Дійсним загальним Вирішенням служить їх лінійна комбінація:

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x). \tag{4.8}$$

<u>Приклад 3</u>. Знайти загальний розв'язок $y''+4y'+13y=0$.

$k^2+4k+13=0$; $D=16-52=-36<0$;

$k_{1,2}=(-4\pm\sqrt{-36})/2=(-4\pm 6\sqrt{-1})/2=(-4\pm 6i)/2=-2\pm 3i$;

$\alpha=-2;\ \beta=3$; $\bar{y}=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

<u>Приклад 4</u>. Розв'язати задачу Коші: $y''+16y=0;\quad y(1)=-2;\ y'(1)=0$;

Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2+16k=0;\ \ k^2=-16\ \Rightarrow\ k=\pm 4i.$$

Оскільки корені k_1 і k_2 − уявні числа, то маємо випадок 3. У відповідній формі записуємо загальний розв'язок (4.8) при α=0:

$$y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x.$$

Конкретні значення довільних сталих C_1 і C_2 знаходимо, враховуючи початкові умови:

$$\bar{y}'=-4C_1\sin 4x+4C_2\cos 4x;$$

$$\begin{matrix} y(1)=-2: \\ y'(1)=0: \end{matrix}\ \begin{cases} -2=C_1\cos 0+C_2\sin 0; \\ \ \ 0=-4C_1\sin 0+4C_2\cos 0; \end{cases}\quad \begin{cases} C_1=-2; \\ C_2=0. \end{cases}$$

Тоді $y=-2\cos 4x$ − розв'язок задачі Коші.

4.3 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та з правою частиною спеціального вигляду

Теорема 1. Загальний розв'язок ЛНДР другого порядку:

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{4.9}$$

можна зобразити у вигляді суми загального розв'язку $\bar{y}$ відповідного ЛОДР $\bar{y}''+p\bar{y}'+q\bar{y}=0$ і якого-небудь частинного розв'язку y^* ЛНДР:

$$y=\bar{y}+y^*. \tag{4.10}$$

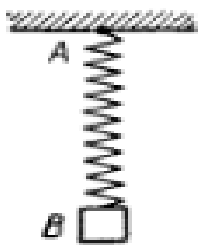
Розглянемо ЛНДР (4.9), де права частина має спеціальний вигляд. Нижче розглянуті різні випадки підбору частинного розв'язку в залежності від виду правої частини.

Випадок 1. $f(x) = H\sin\omega x + G\cos\omega x$.

Частинне розв'язання шукаємо у вигляді $y^* = D\sin\omega x + E\cos\omega x$

Підставивши розв'язання в (4.9) і прирівнювання коефіцієнти при косинусів і синусах в лівій і правій частинах можна обчислити значення невідомих *D, E*.

Продемонструємо розв'язання на прикладі моделі, яка описує процес вимушених коливань, які виникають при дії сили $F(t) = H\sin\omega t.$ (Рис.4.1). На тіло В масою *m* діють тільки сила тяжіння, сила пружності (коефіцієнт пружності пружини – *c*) і сила *F(t)*. Диференціальне рівняння руху має вигляд:



$$y'' + qy = h\sin\omega t\,, \tag{4.11}$$

де $q = c/m = \beta^2;\ h = H/m$

Тоді загальне рішення однорідного рівняння:

$$\bar{y}'' + \beta^2\bar{y} = 0.$$

Рисунок 4.1

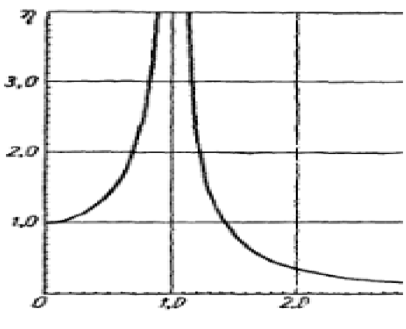
має вигляд: $\bar{y} = C_1\sin\beta t + C_2\cos\beta t.$

Частинне розв'язання шукаємо у вигляді $y^* = D\sin\omega t$. (4.12)

Тоді:

$$y^{*\prime} = D\omega\cos\omega t \;\Rightarrow\; y^{*\prime\prime} = -D\omega^2\sin\omega t \;\Rightarrow\; -D\omega^2\sin\omega t + \beta^2 D\sin\omega t = h\sin\omega t;$$

$$D = \frac{h}{\beta^2 - \omega^2}.$$



Цю константу називають амплітудою змушених коливань. Графік D в залежності від ставлення частот має приблизний вигляд на рисунку 4.2. Таким чином, рішення ДР має вигляд:

Рисунок 4.2

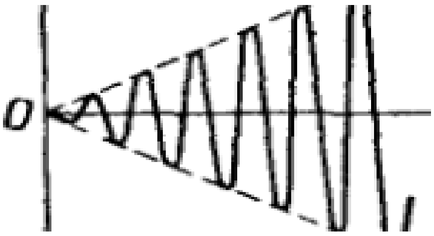
$$y = C_1\sin\beta t + C_2\cos\beta t + D = \frac{h}{\beta^2 - \omega^2}\sin\omega t.$$

При прагненні $\omega \to \beta$ $D \to \infty$, тобто амплітуди вимушених коливань необмежено зростає. Таке явище називають резонансом. Но так як $D \to \infty$ при $\omega = \beta$, то частинний розв'язок не можна вибирати у вигляді (4.12). Як же бути? У цьому випадку пропонується шукати розв'язання у вигляді:

$$y^* = Dt\cos\omega t. \tag{4.13}$$

Тоді:

$$y'^* = D\cos\omega t - D\omega t\sin\omega t; \quad y''^* = -2D\omega\sin\omega t - D\omega^2 t\cos\omega t.$$



Підставимо в (4.11), отримує $y^* = \dfrac{ht}{2\omega}\cos\omega t.$ Амплітуда вимушених коливань при резонансі необмежена зростає (рис 4.3).

Рисунок 4.3

Випадок 2. $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$.

Тут $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – многочлени відповідно степеня n і m; a і b – дійсні сталі, з яких формується характерне комплексне число $z = a + bi$.

Згідно з методом невизначених коефіцієнтів структура частинного розв'язку ЛНДР формується за виглядом правої частини $f(x)$ з урахуванням того, коренем якої кратності r $(r \ge 0)$ служить характерне число $z = a + bi$ для характеристичного рівняння. Невідомі параметри (коефіцієнти) цієї структури знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь, які одержуються прирівнюванням коефіцієнтів при подібних відносно x членах. Частинний розв’язок має вигляд:

$$y^* = x^r e^{ax}(\overline{P_s}(x)\cos bx + \overline{Q}_s(x)\sin bx), \tag{4.14}$$

де $\overline{P_s}(x)$ і $\overline{Q}_s(x)$ – многочлени степені $s = \max\{n, m\}$ з невідомими коефіцієнтами.

Приклад 1. Записати структуру частинного розв’язку ДР:

$y'' + 4y' + 20y = e^{-2x}(x^2\cos 4x - \sin 4x)$.

$y'' + 4y' + 20y = 0$; $k^2 + 4k + 20 = 0$; $D = -64$;

$k_{1,2} = -2 \pm 4i$; $z = a + bi = -2 + 4i$ – корінь

кратності $r = 1$; $s = \max\{2; 0\} = 2$;

$y_* = x^1 e^{-2x}((Ax^2 + Bx + C)\cos 4x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 4x)$,

де A, B, C, D, E, F – невідомі коефіцієнти.

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння

$y''-y'-2y=e^{x}(9\cos x-7\sin x)$.

$y''-y'-2y=0$; $k^2-k-2=0$; $D=9$; $k_1=2$;

$k_2=-1$; $\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$; $z=a+bi=1+i$ – не є коренем

$(r=0)$; $s=\max\{0;0\}=0$; $y_*=e^{x}(A\cos x+B\sin x)$;

$y_*'=e^{x}(A\cos x+B\sin x)+e^{x}(-A\sin x+B\cos x)=e^{x}(A\cos x+$

$+B\sin x-A\sin x+B\cos x)$; $y_*''=e^{x}(A\cos x+B\sin x-$

$-A\sin x+B\cos x)+e^{x}(-A\sin x+B\cos x-A\cos x-B\sin x)=$

$=e^{x}(-2A\sin x+2B\cos x)$;

$e^{x}(-2A\sin x+2B\cos x)-e^{x}(A\cos x+B\sin x-A\sin x+$

$+B\cos x)-2e^{x}(A\cos x+B\sin x)=e^{x}(9\cos x-7\sin x)\,|:e^{x}\neq 0$;

$-A\sin x+B\cos x-3A\cos x-3B\sin x=9\cos x-7\sin x$;

$$\begin{array}{l|l} \cos x & \begin{cases} B-3A=9; & B=9+3B; \qquad A=-2; \\ -A-3B=-7; & -A-27-9A=-7; \qquad B=3. \end{cases} \\ \sin x & \end{array}$$

Отже, маємо загальний розв’язок:

$$y=\bar{y}+y_*=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}+e^{x}(-2\cos x+3\sin x).$$

Випадок 3. Права частина – многочлен степені *n*:

$$f(x)=P_n(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+...+A_n.$$

Частинне розв'язання в залежності від коренів характеристичного рівняння будемо шукати у вигляді:

1. $y^*=Q_n(x)$, якщо $0\neq k_1$ и $0\neq k_2$.
2. $y^*=Q_nx$, якщо $0=k_1$ или $0=k_2$.

Приклади. а) $y''+3y'+2y=1-x^2$.

$$k_1=-1 \quad k_2=-2 \;\Rightarrow\; \bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}.$$

$$y^*=Bx^2+Dx+E\Rightarrow(y^*)'=2Bx+D,(y^*)''=2B;$$

$$2B+6Bx+3D+2Bx^2+2Dx+2E=1-x^2;$$
$$2B=-1\Rightarrow B=-0,5;$$
$$6B+2D=0\Rightarrow D=1,5;$$
$$2B+3D+2E=1\Rightarrow -1+4.5+2E=1\Rightarrow E=-1,25.$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + -0.5x^2 + 1,5x - 1,25.$$

б) $y'' - 4y' = 8x.$

$$k_1 = 0 \quad k_2 = 4 \;\Rightarrow\; \bar{y} = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

$$y^* = x(Bx + D) = Bx^2 + Dx \Rightarrow (y^*)' = 2Bx + D, (y^*)'' = 2B;$$

$$\begin{aligned} &2B - 8Bx - 4D = 8x; \\ &-8B = 8 \Rightarrow B = -1; \qquad \Rightarrow\; y = C_1 + C_2 e^{4x} - x^2 - 0.5x \\ &2B - 4D = 0 \Rightarrow D = -0,5. \end{aligned}$$

Випадок 4. Права частина $f(x) = Ae^{\alpha x}$.

Частинне розв'язання в залежності від коренів характеристичного рівняння будемо шукати у вигляді:

1. $y^* = De^{\alpha x}$, якщо $\alpha \neq k_1$ и $\alpha \neq k_2$.
2. $y^* = Dxe^{\alpha x}$, якщо $\alpha = k_1$ или $\alpha = k_2$.
3. $y^* = Dx^2 e^{\alpha x}$, якщо $\alpha = k_1$ и $\alpha = k_2$.

Приклади. а) $y'' + 4y' + 3y = 8e^{3x}$.

$$k_1 = -1 \quad k_2 = -3 \;\Rightarrow\; \bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Тоді $y^* = De^{3x} \;\Rightarrow\; (\alpha^2 + 4\alpha + 3)De^{3x} = 8e^{3x} \;\Rightarrow\; D = 1/3.$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{e^{3x}}{3}.$$

б) $y'' - 5y' - 6y = 2e^{-x}$.

$$k_1 = -1 \quad k_2 = 6 \;\Rightarrow\; \bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-6x}.$$

$$y^* = Dxe^{-x} \;\Rightarrow\; \left(y^*\right)' = De^{-x} - Dxe^{-x},\; \left(y^*\right)'' = -2De^{-x} + Dxe^{-x};$$

$$-2De^{-x} + Dxe^{-x} - 5De^{-x} + 5Dxe^{-x} - 6Dxe^{-x} = 2e^{-x};$$

$$-7D = 2 \Rightarrow D = -2/7;$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-6x} - \frac{2}{7} xe^{-x}.$$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.3 ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

ТЕМА 5 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

5.1 Поняття функції багатьох змінних.

Нехай n – деяке фіксоване натуральне число. Упорядкована множина n довільних дійсних чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ називаються n-вимірною точкою і позначається однією буквою, наприклад, M. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ називаються координатами точки M. Позначається $M(x_1, x_2, ..., x_n)$. Множина всіх n - вимірних точок називається n - вимірним точковим простором R^n.

Нехай задано деяку n - вимірну непорожню множину D. Якщо кожній точці M цієї множини відповідає одне цілком певне значення дійсної змінної u, то кажуть, що задано функцію n змінних $u = f(M) = = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. При цьому множину D називають областю визначення функції $u = f(M)$. Незалежні змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ називають аргументами, а залежну змінну u – функцією.

Якщо D – область на координатній площині Oxy (плоска, двовимірна), то функція $z = f(M) = f(x, y)$ є функцією двох змінних x, y. Якщо D – область у тривимірному координатному просторі $Oxyz$, то функція $u = f(M) = f(x, y, z)$ є функцією трьох змінних x, y, z.

Приклад 1. Знайти і зобразити штриховкою на координатній площині Oxy природну область визначення D заданої функції:

а) $z = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$; б) $z = \sqrt{y^2 - 1 - x}$.

Розв'язання. а) Природна область визначення D даної функції $z = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$ – множина всіх тих точок (x, y), для яких $9 - x^2 - 9y^2 > 0$, бо логарифм визначений тільки для додатних значень аргументу, а жодних інших обмежень на змінні x, y немає.

Щоб зобразити область D геометрично, знайдемо її межу:

$$9-x^2-9y^2=0; \quad x^2+9y^2=9; \quad x^2/9+y^2/1=1.$$

Це рівняння еліпса з півіссями $a=3$ та $b=1$. Даний еліпс у залежності від знаку виразу $9-x^2-9y^2$ ділить всю координатну площину Oxy на дві частини – внутрішню і зовнішню (рис. 5.1).

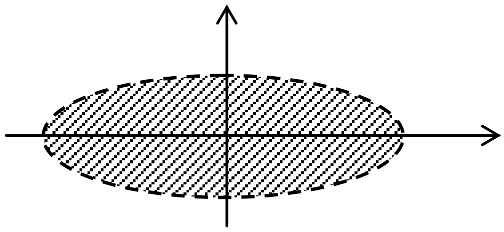


Рисунок 5.1

Щоб виявити, яка з частин входить у область визначення, тобто задовольняє умову $9-x^2-9y^2>0$, треба взяти довільно по одній пробній внутрішній точці з кожної частини і для них перевірити цю умову. Наприклад, для точки $O(0,0)$ умова виконується $9-0^2-9\cdot 0^2=9>0$, тому внутрішня область, що обмежено еліпсом, входить в D. Для точки $B(0,2)$ ця умова не виконується $9-0^2-9\cdot 2^2=-27<0$, тому область, що лежить поза еліпсом, не входить в D.

Отже, внутрішніми точками області визначення D даної функції є точки, обмежені еліпсом. Сам еліпс не належить області D, тому що для його точок $9-x^2-9y^2=0$. Область D – відкрита, її межа позначена пунктиром (рис. 5.1).

б) Квадратний корінь добувається тільки з невід'ємних чисел, тому $y^2-1-x\geq 0$. Жодних інших обмежень на аргументи x, y немає. Щоб зобразити область визначення D геометрично, знайдемо її межу:

$$y^2-1-x=0; \quad y^2=x+1.$$

Це рівняння визначає параболу, яка в залежності від знаку виразу y^2-1-x поділяє координатну площину на дві частини – внутрішню і зовнішню (рис. 5.2). Точка $O(0,0)$ лежить усередині параболи і не задовольняє належній умові. Точка $A(-2,0)$ лежить зовні параболи і задовольняє цій умові. Отже, область визначення D складається з точок, що лежать ззовні параболи. Область D – замкнена, її межа позначена суцільною лінією (рис. 5.2).

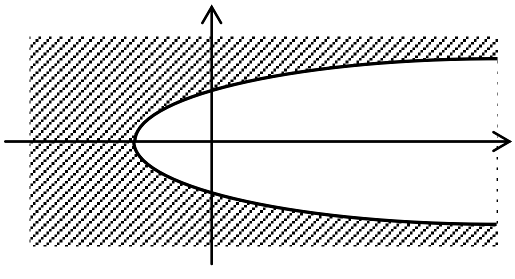


Рисунок 5.2

Множина всіх точок $P(x, y, z)$ простору, координати яких задовольняють рівняння $z = f(x, y)$, називається графіком функції двох змінних $z = f(x, y)$.

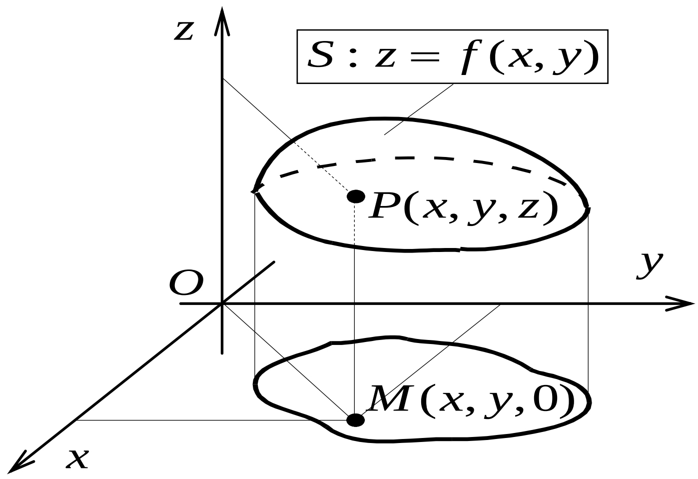


Рисунок 5.3

Звичайно графіком є деяка поверхня S, що проектується на площину Oxy на область визначення D (рис. 5.3). (Поверхня $z = f(x, y)$ – це «дах», що «нависає» над плоскою областю D). Для графічного зображення функцій двох і трьох змінних використовуються також відповідно лінії та поверхні рівня. *Лінією рівня* функції двох змінних $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок координатної площини Oxy, в яких ця функція набуває одного й того ж значення $z = C$, $C = const$. Рівняння лінії рівня $f(x, y) = C$. Через кожну точку $M_0(x_0, y_0)$ області D проходить єдина лінія рівня $f(x, y) = f(M_0)$.

При різних C дістанемо різні лінії рівня для даної функції $z = f(x, y)$, кожна з яких служить проекцією лінії перетину поверхні $z = f(x, y)$ площиною $z = C$. Поверхнею рівня функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ називається множина всіх точок простору $Oxyz$, в яких ця функція набуває одного й того ж значення $u = C$, $C = const$. Рівняння поверхні рівня $f(x, y, z) = C$. Прикладом поверхонь рівня служать еквіпотенціальні поверхні просторового електростатичного поля.

5.2 Частинні похідні. Повний диференціал.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі фіксованої точки $M(x, y)$. Надаємо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y фіксованою (рис. 5.4). Різниця $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ називається частинним приростом по x функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x; y)$, що відповідає приросту Δx незалежної змінної x. Аналогічно

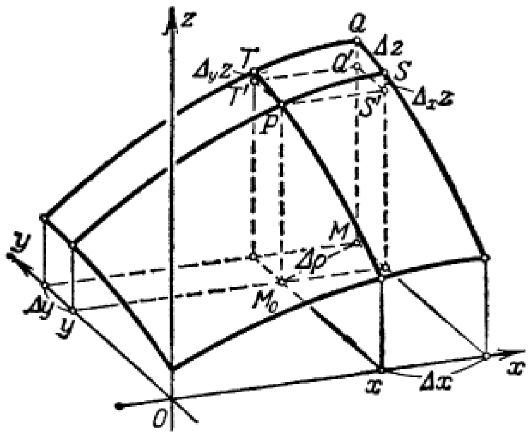


Рисунок 5.4

$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$ – частинний приріст по y.

Якщо одночасно x надати змінній приросту Δx, а змінній y приросту Δy, то різниця $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ називається повним приростом функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x; y)$.

Зауваження. Із рисунку 5.4 зрозуміло, що повний приріст Δz, у загальному випадку, не дорівнює сумі частинних приростів: $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x називається границя відношення частинного приросту по x цієї функції $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$ до відповідного приросту аргументу Δx, коли останній прямує до нуля:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \qquad (5.1)$$

Застосовуються також позначення:

$$z'_x;\; f'_x;\; f'_x(x, y);\; f'_x(M);\; \frac{\partial z}{\partial x};\; \frac{\partial f}{\partial x};\; \frac{\partial f(x, y)}{\partial x};\; \frac{\partial f(M)}{\partial x};\; \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M.$$

Аналогічно:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \qquad (5.2)$$

Таким чином,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left[\frac{dz}{dx}\right]_{y=const} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left[\frac{dz}{dy}\right]_{x=const} \qquad (5.3)$$

Приклад. Знайти всі частинні похідні заданої функції: а) $z = x^2/y - \sin y + \pi$; б) $z = x^y$; в) $u = e^{xy^2 z}/z$.

Розв'язання .

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2/y-\sin y+\pi\right)'_x=\left(x^2/y\right)'_x-\left(\sin y\right)'_x+\pi'_x=(1/y)\,(x^2)'_x-0+0=(1/y)\cdot 2x=2x/y;$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2/y-\sin y+\pi\right)'_y=\left(x^2/y\right)'_y-\left(\sin y\right)'_y+\pi'_y=x^2\,(1/y)'_x-\cos y+0=x^2\cdot\left(-1/y^2\right)-\cos y=-\,x^2/y^2-\cos y.$

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(x^y)'_x=y\,x^{y-1};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=(x^y)'_y=x^y\ln x.$

в) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\left(e^{xy^2z}/z\right)'_x=\dfrac{1}{z}\,(e^{xy^2z})'_x=\dfrac{1}{z}\cdot e^{xy^2z}(xy^2z)'_x=(1/z)\cdot e^{xy^2z}\cdot y^2z=y^2\,e^{xy^2z};$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\left(e^{xy^2z}/z\right)'_y=\dfrac{1}{z}\,(e^{xy^2z})'_y=(1/z)\cdot e^{xy^2z}(xy^2z)'_y=(1/z)\cdot e^{xy^2z}\cdot xz\cdot 2y=2xye^{xy^2z};$

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\left(e^{xy^2z}/z\right)'_z=\dfrac{(e^{xy^2z})'_z\cdot z-e^{xy^2z}\,z'_z}{z^2}=\dfrac{e^{xy^2z}\,(xy^2z)'_z\cdot z-e^{xy^2z}}{z^2}=(e^{xy^2z}\,xy^2z-e^{xy^2z})/z^2.$

Функція $z=f(M)=f(x,y)$ називається диференційованою в точці $M(x,y)$, якщо її повний приріст $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-\;-f(x,y)$ можна подати у вигляді

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

де A, B – незалежні від Δx і Δy величини; $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ і $\beta(\Delta x,\Delta y)$ – нескінченно малі при $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$ функції.

Повним диференціалом dz функції $z=f(x,y)$ в точці $M(x,y)$ називається головна частина її повного приросту в цій точці, лінійна щодо приростів Δx і Δy аргументів: $dz=A\Delta x+B\Delta y$.

Повний диференціал функції $z=f(x,y)$ дорівнює сумі добутків частинних похідних цієї функції на диференціали відповідних аргументів:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{5.4}$$

Доведемо формулу (5.4). Повний приріст функції має вигляд:

$$\Delta\ z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y),\text{ або}$$

$$\Delta\ z=[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)]+[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)].$$

Застосуємо теорему Лагранжа:

$$\begin{aligned}&f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)=f'_x(\eta,y+\Delta y)\cdot\Delta x;\\&f(x,y+\Delta y)-f(x,y)=f'_y(x,\zeta)\cdot\Delta y,\end{aligned}\quad,$$

де $x < \eta < x + \Delta x, y < \zeta < y + \Delta y$.

При $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0 \Rightarrow \eta \to x, \zeta \to y \Rightarrow$

$$f'_x(\eta, y + \Delta y) \to f'_x(x, y),$$
$$f'_y(x, \zeta) \to f'_y(x, y).$$

По теоремі про нескінченно малих можна записати:

$$f'_x(\eta, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha,$$
$$f'_y(x, \zeta) = f'_y(x, y) + \beta. \quad ,$$

де α и β нескінченно мали при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0.$.

Таким чином, маємо:

$$\Delta z = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y.$$

Останню формулу надамо у вигляді:

$$\Delta z = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y + \varepsilon \rho,$$

де $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$; $\varepsilon = \dfrac{\alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\rho}$ $\left(\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon = 0 \right)$.

Повний диференціал функції - це лінійна частина приросту:

$$dz = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y.$$

Прирощення незалежних змінних *Δx, Δy* будемо називати диференціалами незалежних змінних і позначати *dx, dy*. Отже, формула для обчислення повного диференціала функції двох змінних має вигляд:

$$dz = f'_x(x, y) \cdot dx + f'_y(x, y) \cdot dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Формулу (5.4) доведено.

5.3 Похідна від складної функції. Повна похідна. Частинні похідні вищих порядків.

Припустимо, що функція кількох змінних має вигляд:

$$z = F(u, v),$$
$$u = u(x, y), v = v(x, y)$$

Припустимо, що функції безупинні і мають безперервні похідні. Надамо приріст Δx. тоді:

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \alpha\cdot\Delta_x u + \beta\cdot\Delta_x v \Rightarrow$$
$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Спрямуємо приріст по x до нуля, отримаємо (врахувавши, що межі нескінченно малих дорівнюють нулю):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.5}$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{5.6}$$

Приклад. Надано $z = arctg(u/v)$, де $u = x + y, v = x - y$. Довести, що $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x - y}{x^2 + y^2}$.

$$u'_x = 1, u'_y = 1, v'_x = 1, v'_y = -1,$$

Розв'язання . $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{v}{u^2 + v^2}, \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{u}{u^2 + v^2},$

тоді $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{v - u}{u^2 + v^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{v + u}{u^2 + v^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x - y}{x^2 + y^2}.$$

Частинні похідні $\partial z/\partial x$ і $\partial z/\partial y$ функції двох змінних $z = f(x, y)$ також є функціями двох змінних x, y, а тому самі можуть мати частинні похідні.

Частинна похідна по x від частинної похідної по x називається другою чистою частинною похідною по x і позначається $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, або $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, або z''_{xx}. Таким чином,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).. \tag{5.7}$$

Аналогічно частинна похідна по y від частинної похідної по y називається другою чистою частинною похідною по y і позначається $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, або $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, або

z''_{yy}. Отже,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right). \tag{5.8}$$

Якщо від частинної похідної по x взяти частинну похідну по y, то отримаємо другу мішану частинну похідну по x, y, яку позначимо $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, або $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, або z''_{xy}. Отже,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right). \tag{5.9}$$

Якщо від частинної похідної по y взяти частинну похідну по x, то одержимо другу мішану частинну похідну по x, y (з іншим порядком диференціювання), яка позначається $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, або $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, або z''_{yx}. Отже,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right). \tag{5.10}$$

Зауваження. Аналогічно частинним похідним другого порядку вводяться частинні похідні третього, четвертоготощо порядку. Наприклад,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right);\quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right).$$

Теорема. Для неперервних мішаних частинних похідних порядок диференціювання значення не має $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Приклад. Для заданої функції $z=f(x,y)$ перевірити рівність указаних мішаних частинних похідних:

а) $z=\sin(xy)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$; б) $z=y\ln x$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$.

Розв'язання. а) $\frac{\partial z}{\partial x}=(\sin(xy))'_x=y\cos(xy)$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(y\cos(xy))'_y=\cos(xy)-xy\sin(xy);$$

$\partial z/\partial y=(\sin(xy))'_y=x\cos(xy)$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (x\cos(xy))'_x = \cos(xy) - xy\sin(xy);$$

Тоді: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{1}{x}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y}{x}\right) = -\dfrac{y}{x^2}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$;

Тоді: $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

Приклад. Перевірити, що задана функція $z = f(x, y)$ задовольняє вказаній умові: а) $z = arctg\dfrac{x}{y}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$;

б) $z = x\sin(x - y)$; $x\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2z = 0$.

Розв'язання а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$; $-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - 4 \cdot \dfrac{y}{x^2+y^2}\left(-x/(x^2+y^2)\right) = 0$

$$(-2xy - 2xy + 4xy)/(x^2 + y^2)^2 = 0; \quad 0 = 0.$$

Таким чином, задана функція задовольняє вказаній умові.

б) $\partial z/\partial x = \sin(x - y) + x\cos(x - y)$; $\partial z/\partial y = -x\cos(x - y)$; $\partial^2 z/\partial y^2 = -x\sin(x - y)$

$x\left(\sin(x-y) + x\cos(x-y) - -x\cos(x-y)\right) - \left(-x\sin(x-y)\right) - 2x\sin(x-y) = 0$; $0 = 0$.

Отже, задана функція задовольняє вказаній умові.

5.4. Похідна за напрямом. Градієнт

Нехай у деякій області D простору задано скалярну функцію трьох змінних $u = f(M) = f(x, y, z)$. Тоді кажуть, що в області D задане просторове скалярне поле $u = f(M)$. Функція двох змінних $z = f(x, y)$, яка визначена у плоскій області D, задає плоске скалярне поле $z = f(x, y)$.

Поле – це функція $u = f(M)$, що розглядається разом з її областю визначення D (фізичний зміст функції багатьох змінних). Приклади скалярних фізичних полів: поля температури, атмосферного тиску, електричного потенціалу.

Для геометричного зображення скалярного поля використовуються лінії рівня $f(x,y)=C$ (на площині) та поверхні рівня $f(x,y,z)=C$ (у просторі), де $C = const$. Поверхні рівня (у просторі) та лінії рівня (на площині) є основними *геометричними характеристиками* скалярного поля.

Нехай у деякому околі фіксованої точки $M(x,y,z)$ задано просторове скалярне поле $u = u(M) = u(x,y,z)$. Проведемо з цієї точки M довільний ненульовий вектор $\vec{S}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha$, $\cos\beta$ і $\cos\gamma$. У напрямі цього вектору на деякій відстані Δl від початку M візьмемо іншу точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ (рис. 5.5). Тоді:

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2};$$

$$\Delta x = \Delta s \cos\alpha; \; \Delta y = \Delta s \cos\beta; \; \Delta z = \Delta s \cos\gamma$$

Різниця:

$$\Delta_s u = u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - u(x,y,z)$$

значень функції в точках M_1 і M називається приростом функції $u = u(x,y,z)$ у напрямі вектору $\vec{S}$.

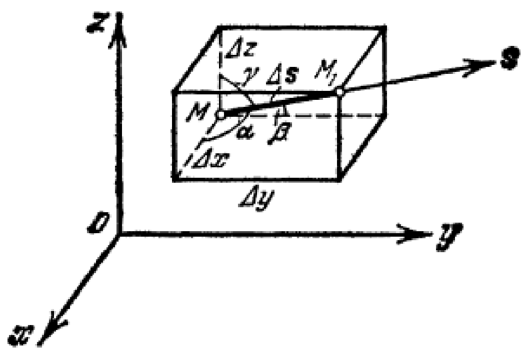


Рисунок 5.5

Якщо функція $u = u(x,y,z)$ неперервна і має неперервні частинні похідні, то:

$$\Delta_s u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

де $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, $\varepsilon_3 \to 0$ при $\Delta s \to 0$.

Тоді:

$$\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta l \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta l \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta l \cos\gamma + \varepsilon_1 \Delta l \cos\alpha + \varepsilon_2 \Delta l \cos\beta + \varepsilon_3 \Delta l \cos\gamma.$$

Похідною функції $u = u(x, y, z)$ у точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектору $\vec{s}$ називається границя $\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta_s u}{\Delta s}$.

Похідна за напрямом обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (5.11)$$

і визначає швидкість змінювання функції (скалярного поля) за напрямом вектору $\vec{s}$ у точці $M(x, y, z)$.

Градієнтом функції (скалярного поля) $u = u(x, y, z)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \qquad (5.12)$$

Теорема (зв'язок між градієнтом і похідною за напрямом). Похідна $\partial u/\partial s$ за напрямом вектору $\vec{s}$ дорівнює проекції градієнта $grad\, u$ на цей вектор

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \text{пр}_{\vec{s}} \operatorname{grad} u. \qquad (5.13)$$

Похідна $\partial u/\partial s$ скалярного поля $u = u(x, y, z)$ у даній точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектору $\vec{s}$ має найбільше значення, коли напрям цього вектору співпадає з напрямом градієнта $grad\, u$. Це найбільше значення похідної $\partial u/\partial s$ дорівнює модулю градієнта:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{\max} = |\operatorname{grad} u| \quad \text{при} \quad \vec{s}_{\max} = grad\, u.$$

Фізичний зміст градієнта. Градієнт указує напрям найшвидшого зростання скалярного поля в даній точці, а його модуль дорівнює цій найбільшій швидкості.

Градієнт скалярного поля визначається самим полем і не залежить від вибору системи координат. Похідна $\partial u/\partial s$ скалярного поля $u = u(x, y, z)$ у довільній точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектору, який перпендикулярний до градієнта $grad\, u$, дорівнює нулю: $\vec{s} \perp grad u \;\Rightarrow\; \partial u/\partial s = 0$.

Градієнт $grad\,u$ можна прийняти за вектор нормалі $\vec{n}$ до поверхні рівня $S:\ u(x,y,z)=C$ у відповідній точці $M(x,y,z)$

$$S:\ u(x,y,z)=C; \quad grad\,u \perp S \ \Rightarrow\ \vec{n}=grad\,u\ .$$

Приклад. Для заданої функції знайти градієнт і модуль градієнта в указаній точці: а) $z=x^2y-5\sin(3x-2y)$; $M_0(2,3)$; б) $u=3xyz-2x^3y+y^2/z$; $M_0(-1,2,1)$.

Розв'язання. а) $grad\,z=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$; $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy-15\cos(3x-2y)$;

$\partial z/\partial y=x^2+10\cos(3x-2y)$; $\partial z/\partial x\big|_{M_0}=2\cdot2\cdot3-15\cos(3\cdot2-2\cdot3)=-3$;

$\partial z/\partial y\big|_{M_0}=2^2+10\cos(3\cdot2-2\cdot3)=14$; $grad\,z\big|_{M_0}=-3\vec{i}+14\vec{j}$;

$|grad\,z|=\sqrt{(\partial z/\partial x)^2+(\partial z/\partial y)^2}$; $|grad\,z|_{M_0}=\sqrt{(-3)^2+14^2}=\sqrt{205}$;

б) $grad\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$; $\partial u/\partial x=3yz-6x^2y$;

$\partial u/\partial y=3xz-2x^3+2y/z$; $\partial u/\partial z=3xy-y^2/z^2$;

$\partial u/\partial x\big|_{M_0}=3\cdot2\cdot1-6\cdot(-1)^2\cdot2=-6$; $\partial u/\partial y\big|_{M_0}=3\cdot(-1)\cdot1-2\cdot(-1)^3+2\cdot2=3$;

$\partial u/\partial z\big|_{M_0}=3\cdot(-1)\cdot2-2^2/1^2=-8$; $\mathrm{grad}\,u\big|_{M_0}=-6\vec{i}+3\vec{j}-8\vec{k}$

$|grad\,u|=\sqrt{(\partial u/\partial x)^2+(\partial u/\partial y)^2+(\partial u/\partial z)^2}$; $|grad\,u|_{M_0}=\sqrt{(-6)^2+3^2+(-8)^2}=\sqrt{109}$.

ТЕМА 6 ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

6.1 Поняття екстремуму функції багатьох змінних. Необхідні умови екстремуму функції багатьох змінних

Нехай функція двох змінних $z=f(M)=f(x,y)$ визначена в деякій області D і $M_0(x_0,y_0)$ – внутрішня точка цієї області. Точка M_0 називається *точкою максимуму* функції $z=f(M)$, якщо значення функції в цій точці M_0 більше, ніж значення функції у всіх близьких сусідніх точках:

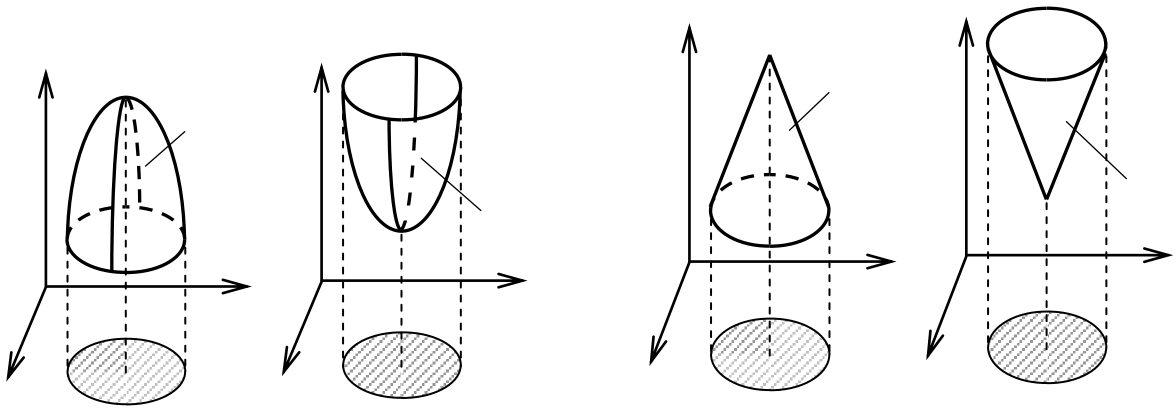
$\forall M\in U(M_0,\varepsilon),\ M\neq M_0,\ f(M_0)>f(M)\ \Leftrightarrow\ M_0-\max$, де $U(M_0,\varepsilon)$ – деякий ε-окіл точки M_0, $\varepsilon > 0$.

Аналогічно вводиться поняття *точки мінімуму*:

$\forall M \in U(M_0,\varepsilon), M \neq M_0, f(M_0) < f(M) \Leftrightarrow M_0 - \min$.

Точки максимуму та мінімуму називаються *точками екстремуму*. Значення функції $z = f(M_0) = f(x_0, y_0)$ у точці екстремуму M_0 називається її *екстремальним значенням* (*екстремумом*).

Зауваження 1. Розрізняють *гладкий екстремум* (рис. 6.1, а), в якому функція диференційована, і *гострий екстремум*, в якому хоча б одна частинна похідна першого порядку не існує (рис. 6.1, б).



а б

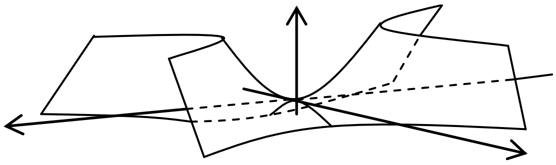
Рисунок 6.1

Теорема (*необхідні умови гладкого екстремуму*). Якщо диференційована функція $z = f(x, y)$ має екстремум у точці $M_0(x_0, y_0)$, то всі частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 0; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0; \tag{6.1}$$

Точки, в яких виконуються необхідні умови екстремуму, тобто всі частинні похідні або дорівнюють нулю або не існують, називаються *критичними точками* функції $z = z(M)$. Критичні точки, в яких всі перші частинні похідні дорівнюють нулю, називаються *стаціонарними точками* функції $z = z(M)$.

Зауваження 2. Стаціонарна точка – це точка, що «підозріла» на гладкий екстремум. Тобто у цій точці екстремум може бути, а може і не бути. Наприклад, для функції $z=(x^2-y^2)/2$ (гіперболічний параболоїд на рис. 6.2) початок координат $O(0,0)$ є стаціонарною точкою, оскільки



$\partial z/\partial x|_O = x|_O = 0$; $\partial z/\partial y|_O = -y|_O = 0$,

але екстремум у ній відсутній: $O(0,0)$ – *сідлова точка* функції $z=(x^2-y^2)/2$).

Рисунок 6.2

Приклад. Знайти стаціонарні точки функції: $u = x^3 + xy + 2yz - x + 5y + 4z - 3$.

Розв'язання. Для знаходження стаціонарних точок складаємо і розв'язуємо систему необхідних умов екстремуму:

$$\begin{cases} \partial u/\partial x = 0 \\ \partial u/\partial y = 0 \\ \partial u/\partial z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial u/\partial x = 3x^2 + y - 1 \\ \partial u/\partial y = x + 2z + 5 \\ \partial u/\partial z = 2y + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + y - 1 = 0 \\ x + 2z + 5 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1; \quad x_2 = 1 \\ z = -(5-x)/2 \Rightarrow z_1 = -3;\ z_1 = -2 \end{cases}$$

Тоді маємо стаціонарні точки $M_1(-1; -2; -2)$, $M_2(1; -2; -2)$.

6.2 Достатні умови екстремуму функції двох змінних. Найменше та найбільше значення функції двох змінних у замкненій області.

Аналогічно функції однієї змінної, наявність і характер екстремуму функції двох змінних у стаціонарній точці визначається знаком другого диференціала

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Нехай у деякому околі стаціонарної точки $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x,y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Знайдемо значення других частинних похідних у цій точці: $A = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}$; $B = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}$; $C = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}$ і обчислимо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

Теорема (*достатні умови гладкого екстремуму*). 1) Якщо визначник Δ додатний, то M_0 – точка екстремуму, причому

а) M_0 – точка мінімуму, якщо $A > 0$;

б) M_0 – точка максимуму, якщо $A < 0$.

2) Якщо визначник Δ від'ємний, то у точці M_0 екстремум відсутній (M_0 – сідлова точка функції $z = f(x, y)$).

3) Якщо визначник Δ дорівнює нулю, то у точці M_0 екстремум може бути, а може і не бути. (Сумнівний випадок. Потрібні додаткові дослідження.)

Приклад. Дослідити функцію на екстремум: $z = x^3 + y^3 - 6xy - 2$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\partial z/\partial x = 3x^2 - 6y; \quad \partial z/\partial y = 3y^2 - 6x.$$

Використовуючи необхідні умови екстремуму, знаходимо стаціонарні точки функції:

$$\begin{cases} \partial z/\partial x = 0 \\ \partial z/\partial y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} y = x^2/2; \\ \left(x^2/2\right)^2 - 2x = 0; \end{array}$$

$$x^4 - 8x = 0; \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 - 8 = 0 \end{array} \right. \left[\begin{array}{ll} x_1 = 0 & y_1 = 0; \\ x_2 = 2 & y_2 = 2. \end{array} \right.$$

Отже, стаціонарні точки $M_1(0,0)$; $M_2(2,2)$.

Для перевірки достатніх умов екстремуму знаходимо частинні похідні другого порядку $\partial^2 z/\partial x^2 = 6x$; $\partial^2 z/\partial y^2 = 6y$; $\partial^2 z/\partial x \partial y = -6$.

Дослідимо на екстремум точку $M_1(0,0)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці $M_1(0,0)$ і значення визначника Δ: $A = \left.\partial^2 z/\partial x^2\right|_{M_1} = 6 \cdot 0 = 0$; $C = \left.\partial^2 z/\partial y^2\right|_{M_1} = 6 \cdot 0 = 0$;

$B = \left.\partial^2 z/\partial x \partial y\right|_{M_1} = -6$; $\Delta = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - (-6)^2 = -36 < 0$.

Оскільки $\Delta < 0$, то у точці M_1 екстремуму немає.

Дослідимо на екстремум точку $M_2(2,2)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці $M_2(2,2)$ і значення визначника Δ:

$$A = \partial^2 z/\partial x^2\Big|_{M_2} = 6\cdot 2 = 12; \quad C = \partial^2 z/\partial y^2\Big|_{M_2} = 6\cdot 2 = 12;$$

$$B = \partial^2 z/\partial x\partial y\Big|_{M_2} = -6; \quad \Delta = AC - B^2 = 12\cdot 12 - (-6)^2 = 108 > 0.$$

З нерівності $\Delta > 0$ випливає, що M_2 – точка екстремуму.

Оскільки $A = 12 > 0$, то M_2 – точка мінімуму. Знайдемо мінімальне значення функції у цій точці: $z_{\min} = z(M_2) = 2^3 + 2^3 - 6\cdot 2\cdot 2 - 2 = -10$.

Знаходження найменшого та найбільшого значень функції в замкненій області Нехай функція $z = f(x,y)$ неперервна і диференційована в замкненій області D. Тоді вона досягає найменшого (найбільшого) значення на множині D або в одній із стаціонарних точок, що належать цій області D, або в одній із точок межі області.

Правило знаходження найменшого та найбільшого значень функції $z = f(x,y)$ у замкненій області D:

1) Побудувати область D в прямокутній системі координат Oxy. Знайти всі кутові точки – точки, що сполучають сусідні ділянки межі області;

2) Знайти стаціонарні точки функції $z = f(x,y)$. Виділити з них ті, що лежать в області D. Обчислити значення функції у виділених точках;

3) Знайти значення функції в усіх кутових точках межі області D;

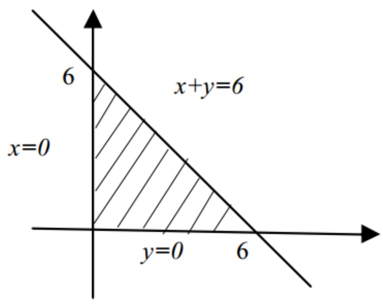
4) На кожній ділянці межі області D перейти до функції однієї змінної, що одержується з початкової функції $z = f(x,y)$ врахуванням рівняння цієї ділянки. Знайти стаціонарні точки одержаної функції однієї змінної. Виділити з них ті, що лежать на даній ділянці. Обчислити значення функції у виділених точках і на кінцях відрізка зміни аргументу;

5) Порівняти всі одержані значення функції між собою і вибрати серед них найменше – глобальний мінімум $\min\limits_{(x,y)\in D} z$ – і найбільше – глобальний мак-

симум $\max\limits_{(x,y)\in D} z$.

Приклад. Знайти найменше та найбільше значення заданої функції $z = x^2 y(4 - x - y)$ в замкненій області D, що обмежена вказаними лініями:

$$x = 0;\ y = 0;\ x + y = 6$$



Розв'язання. У декартовій системі координат Oxy побудуємо вказані лінії межі області і позначимо штриховкою саму область (рис. 6.3). Кутові точки визначаються як точки попарного перетину цих ліній:

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \end{cases};\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases};\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Рисунок 6.3

Для визначення стаціонарних точок складаємо і розв'язуємо систему необхідних умов екстремуму для функції $z = 4x^2 y - x^3 y - x^2 y^2$:

$$\begin{cases} \partial z/\partial x = 8xy - 3x^2 y - 2xy^2 = 0 \\ \partial z/\partial y = 4x^2 - x^3 - 2x^2 y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy(8 - px - 2y) = 0 \\ x^2(4 - x - 2y) = 0 \end{cases}.$$

Звідси отримаємо стаціонарні точки $M_1(0;0), M_2(2;1), M_3(0;4), M_4(0;2), M_5(8/3;0)$. Усі ці точки належать області.

Знайдемо стаціонарні точки на межі області. Розглянемо лінію $x = 0\ (0 \le y \le 6)$. Тоді $z = 0,\ \partial z/\partial y = 0.$ На цій лінії стаціонарних точок немає.

Розглянемо лінію $y = 0\ (0 \le x \le 6)$. Тоді $z = 0,\ \partial z/\partial x = 0.$ На цій лінії стаціонарних точок немає. Розглянемо лінію $y = -x + 6\ (0 \le x \le 6)$. Тоді

$$z = 4x^2(6 - x) - x^3(6 - x) - x^2(6 - x)^2 = 2x^3 - 12x^2,$$

$$\partial z/\partial x = 6x^2 - 24x = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 4;\ y_1 = 6;\ y_2 = 2.$$

Отже, на цій лінії маємо дві стаціонарні точки $M_6(0;6), M_7(4;2)$.

Обчислюємо значення функції в знайдених стаціонарних точок:

$$z|_{M_1} = 0;\ z|_{M_2} = 4;\ z|_{M_3} = 0;\ z|_{M_4} = 0;\ z|_{M_5} = 0;\ z|_{M_6} = 0;\ z|_{M_7} = -64.$$

Отже, найменше та найбільше значення функції відповідно

$$\min_{(x,y)\in D} z = z|_{M_7(4;2)} = -64;\quad \max_{(x,y)\in D} z = z|_{M_2(2,1)} = 4.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Коваленко Л. Б. Вища математика. Модуль 2 : навч. посібник / Л. Б. Коваленко ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 221 с
2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа : для втузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – [11-е изд., стер.] – СПб. : Лань, 2005. – 736 с.
3. Вища математика : Підручник / [В. А. Домбровський та ін.] ; за ред. М. І. Шинкарика. – Тернопіль : Видавництво Карп'юка, 2003 – 480 с.
4. Гусак А. А. Справочное пособие по решению задач: математический анализ / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 1998. – 228 с.
5. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики [Електронний ресурс] / Уклад. : Г. А. Кузнецова, С. Н. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 106 с. – Ч. 1. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/39383, вільний. – (дата звернення : 28.03.2018). – Назва з екрана.
6. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях: навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики [Електронний ресурс] / Уклад. : Г. А. Кузнецова, С. Н. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 142 с. – Частина 2. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/42486, вільний. – (дата звернення : 28.03.2018). – Назва з екрана.
7. Ситникова Ю. В. Вища математика : конспект лекцій з дисципліни (для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання спеціальності 241 – Готельно-ресторанна справа) / Ю. В. Ситникова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 158 с.
8. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : для втузов. / Н. С. Пискунов. – [13-е изд.] – Москва : Наука, 1985. – Том 2. – 560 с.

Навчальне видання

МОРДОВЦЕВ Сергій Михайлович

ВИЩА МАТЕМАТИКА
МОДУЛЬ 2

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
(для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 193 – Геодезія та землеустрій)

Відповідальний за випуск *А. В. Якунін*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *С.М. Мордовцев*

План 2017, поз. 113 Л

Підп. до друку 11.04.2018 . Формат 60 х 84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 3,0
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.