МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

С. М. Мордовцев

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МОДУЛЬ 1

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 193 – Геодезія та землеустрій)

Харків

ХНУМГ ім. О. М. Бекетова

2018

УДК 51(075)

Мордовцев С.М. Вища математика. Модуль 1 : конспект лекцій для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 193 – Геодезія та землеустрій / С. М. Мордовцев ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 88 с.

Автор

канд. техн. наук С. М. Мордовцев

Рецензент:

Л. Б. Коваленко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики (Харківський національний університет міського господарства імені О.М. Бекетова)

Конспект лекцій складено з метою допомоги студентам будівельних спеціальностей вишів підчас підготовки до занять, заліків та іспитів із базових розділів вищої математики.

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 1 від 31 серпня 2017 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Конспект лекцій розроблено згідно програми нормативної навчальної дисципліни «Вища математика» та робочої навчальної програми підготовки бакалавра за спеціальністю 193 – Геодезія та землеустрій, який розраховано для студентів денної та заочної форми навчання.

Теоретичний матеріал структуровано та узгоджено з аудиторними лекційними заняттями, що проводяться під час вивчення модуля «Вища математика».

Конспект лекцій містить стислий теоретичний матеріал необхідний студентам для засвоєння основних знань з вищої математики. В конспекті розміщено значну кількість прикладів розв’язання типових задач, а також задач прикладного характеру, спрямованих на практичне застосування та закріплення отриманих знань для вирішення професійно-орієнтованих задач.

У додатках, наприкінці конспекту лекцій, розташовані додаткові відомості та матеріали.

Для більш поглибленого вивчення та пошуку довідникової інформації подано посилання на джерела, в яких можна знайти більш детальну інформацію про ті або інші математичні положення або доведення теорем, оскільки вони не були представлені у цьому конспекті.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

ТЕМА 1 ВИЗНАЧНИКИ. МАТРИЦІ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1.1 Поняття визначника. Правила його обчислення. Властивості визначників

Визначником називають число записане у вигляді квадратної таблиці. Елементом визначника є число, яке позначають a_{ij}, де нижні індекси i та j вказують на місцезнаходження цього елементу у таблиці чисел. Індекс i – це номер рядка, в якому розташований елемент a_{ij}, індекс j – номер стовпця. Записують визначник як таблицю чисел у прямих дужках. Позначають визначник Δ_n, індекс n вказує порядок визначника.

Порядком визначника вважають кількість рядків (або ж стовпців, оскільки їх кількість однакова) у цьому визначнику. Наприклад, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ є визначником другого порядку і його можна позначити $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$. Якщо кажуть, що число 3 є елементом визначника Δ_2, який розміщуються в першому рядку, другому стовпці, то позначають це так: $a_{22} = 3$.

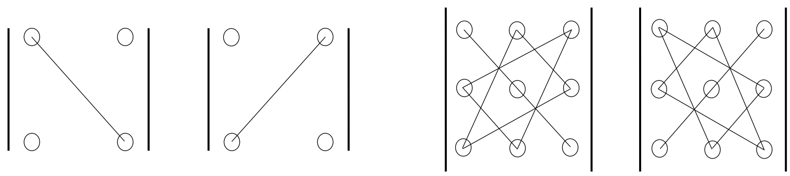
$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ є визначником третього порядку. Кількість елементів визначника дорівнює n^2. У цьому можна пересвідчитись, звернувши увагу на попередні приклади: у визначника другого порядку чотири елементи, а у визначника третього порядку їх дев'ять.

Визначник n-ого порядку (тобто довільного порядку) виглядає так:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Головною діагоналлю визначника називається діагональ, яка складається з елементів $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$. Іншу діагональ називають побічною.

На рисунку 1.1 подано схему обчислення визначника другого порядку (рис. 1.1, а), третього порядку (рис. 1.1, б), яке називають «правилом зірочки», або «правилом трикутників», також воно відомо як правило Сарюса.



а б

Рисунок 1.1 – Схема обчислення визначника:

а) – другого порядку; б) – третього порядку

Отже, елементи визначника другого порядку перемножуються хрест навхрест, а отримані добутки віднімаються.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}, \qquad (1.1)$$

Визначник третього порядку обчислюється так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - \qquad (1.2)$$

$$- \left(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}\right).$$

Приклад 1. Обчислити $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Розв'язання: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 \cdot 3 - (3 \cdot 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 1) = -10$

Щоб розглянути питання обчислення визначника будь-якого порядку, ведемо такі поняття, як «мінор» та «алгебраїчне доповнення».

Мінором будь-якого елемента a_{ij} називають визначник, який отримано завдяки викресленню в заданому визначнику того рядка та стовпця на перехресті яких цей елемент знаходиться. Позначають його M_{ij}. Наприклад, знайдемо мінор M_{23} у заданому визначнику $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Згідно представленому вище означенню для його отримання необхідно викреслити другий рядок й третій стовпець, тож у результаті отримуємо $M_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6$.

Алгебраїчним доповненням (позначають A_{ij}) елементу a_{ij} називають число, яке обчислено за такого формулою:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}, \qquad (1.3)$$

тобто це є мінор, знак якого залежить від парності чи непарності суми індексів цього елементу.

Наприклад, знайдемо алгебраїчне доповнення визначника $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. Для цього скористаємось формулою (1.3): $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11}$, де M_{11} мінор, який знайдемо як вище зазначено: $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -6$. Отже, $A_{11} = (-1)^2 \cdot (-6) = -6$. Знайдемо інші алгебраїчне доповнення:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

Обчислення визначників будь-якого порядку виконують за допомогою їх розкладання за елементами рядка (або стовпця) (*теорема Лапласа*), тобто визначник дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка (стовпця) на їх алгебраїчне доповнення.

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} \text{ або } \Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} . \qquad (1.4)$$

Приклад 2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

Розв'язання: Обчислимо визначник четвертого порядку, шляхом розкладання його за елементами першого стовпця. Згідно з формулою (1.4) отримаємо таке розкладання:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{41} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (6 + 20 - 4 - 6 - 2 + 40) + 3 \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-4 + 20 + 6 - 2 - 6 + 40) = 162.$$

Властивості визначників:

1. Величина визначника не зміниться, якщо замінити усі елементи його рядків відповідними елементами стовпців.

2. Якщо поміняти місцями два рядка (стовпця), то знак визначника зміниться на протилежний.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 9 & -5 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 9 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Визначник дорівнює нулю, якщо він містить рядок (стовпчик) з нульовими елементами.

4. Визначник дорівнює нулю, якщо він містить два однакові або пропорційні рядки (стовпці). (Зверніть увагу на приклад 2).

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -7 \\ -15 & -3 & 21 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Множник, спільний для елементів деякого рядку (стовпця), можна винести за знак визначника.

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 4 \\ 8 & 1 & -7 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & -7 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

6. Якщо елементи деякого рядка (стовпця) визначника представити у вигляді суми двох доданків, то цей визначник дорівнюватиме сумі двох визначників.

Ця властивість матиме такий вигляд:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 12 & -2 & -1 \\ 5 & 11 & -7 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5+7 & -2 & -1 \\ 3+2 & 11 & -7 \\ -3+1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 3 & 11 & -7 \\ -3 & 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & -2 & -1 \\ 2 & 11 & -7 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

7. Величина визначника не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця) помножені на одне й те саме число, яке не дорівнює нулю.

1.2 Матриці. Дії над матрицями. Поняття оберненої матриці та алгоритм її знаходження

Матриця – це прямокутна таблиця чисел. Якщо в матриці m рядків та n стовпців, то кажуть, що вона має розмірність $m \times n$. Якщо в матриці лише один стовпчик і m рядків, то її називають *матриця-стовпець*; якщо в матриці лише один рядок та n стовпців – *матриця-рядок*. Матрицю, в якій кількість рядків дорівнює кількості стовпців, називають *квадратною* матрицею. *Симетричною* матрицею називають квадратну матрицю, в якій елементи, що розташовані симетрично відносно головної діагоналі, рівні, тобто $a_{kl} = a_{lk}$. *Діагональною* матрицею називають квадратну матрицю в якій усі елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю. *Одиничною* матрицею називається діагональна матриця, діагональні елементи якої є одиниці, позначають її буквою $\mathbf{E}$, має вигляд:

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Матриці **A** і **B** називаються рівними, якщо вони мають однаковий розмір $m\times n$ та їх відповідні елементи рівні

$$\mathbf{A_{m\times n}}=\mathbf{B_{m\times n}} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij}=b_{ij},\ i=\overline{1,m};\ \ j=\overline{1,n}\ . \qquad (1.5)$$

Над матрицями виконують такі дії :

1. Множення матриці на число. Для цього необхідно кожен елемент матриці помножити на задане число, наприклад, знайти матрицю $\mathbf{C}=\mathbf{4A}$, якщо задана матриця $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -8 & 1 & 5\end{pmatrix}$,

$$\mathbf{C}=\mathbf{4A}=4\cdot\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -8 & 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 4 & -4\cdot 4 & 2\cdot 4\\ -8\cdot 4 & 1\cdot 4 & 5\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & -16 & 8\\ -32 & 4 & 20\end{pmatrix}.$$

2. Додавання (віднімання) матриць. При цьому додаються (або віднімаються) відповідні елементи матриць:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \qquad (1.6)$$

Слід звернути увагу, що ця дія може виконуватися лише в тому випадку, коли матриці-доданки мають однакову розмірність.

Наприклад, знайти суму матриць **A** і **B**, якщо

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -8 & 1 & 5\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-7 & 5 & -4\\ -8 & 3 & 2\end{pmatrix},.$$

Отримаємо

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -8 & 1 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7 & 5 & -4\\ -8 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-7 & -4+5 & 2-4\\ -8-8 & 1+3 & 5+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 1 & -2\\ -16 & 4 & 7\end{pmatrix}.$$

Підкреслимо, що дія додавання є комутативною, тобто $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$.

3. Множення матриць. Виконувати цю дію можна лише за умови, що

кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці. Матриця-результат має кількість рядків як у першої матриці, а стовпців – як у другої матриці; тобто: $\mathbf{A_{m\times k}} \times \mathbf{B_{k\times n}} = \mathbf{D_{m\times n}}$. Елементи цієї матриці отримують як суму добутків елементів рядка першої матриці на відповідні елементи стовпця другої матриці:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{in} b_{nk}. \tag{1.7}$$

Наприклад, перший елемент матриці дорівнює:

$$c_{11} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} b_{j1} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \ldots + a_{1n} b_{n1} \tag{1.8}$$

Приклад 3. Знайти добуток матриць $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

Розв'язання: $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 + (-3)\cdot(-1) & 1\cdot(9) + (-3)\cdot 3 \\ (-2)\cdot 4 + 1\cdot(-1) & (-2)\cdot 9 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -9 & -15 \end{pmatrix}.$

Множення матриць не є комутативним, тобто $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

Зауваження 3. Зазначимо деякі властивості добутку матриць:

1) $\mathbf{AE} = \mathbf{A}$; $\mathbf{EA} = \mathbf{A}$; 2) $\mathbf{(AB)C} = \mathbf{A(BC)}$;

3) $\mathbf{A(B + C)} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$; 4) $\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$;

5) для квадратних матриць **A** і **B** справедливо

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}. \tag{1.9}$$

Якщо в матриці A поміняти місцями відповідні рядки та стовпці, то отримаємо транспоновану матрицю A^T. Така операція переходу від матриці **A** до матриці A^T називається транспонуванням.

Приклад 4. Транспонувати задану матрицю **A**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}; \ \mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

До кожної квадратної матриці **A** n-го порядку приводиться у відповідність визначник

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

який називається визначником (детермінантом) матриці **A**.

Якщо визначник матриці A дорівнює нулю, тобто $\det A = 0$, то матриця називається виродженою (особливою). Якщо визначник матриці A відмінний від нуля, то матриця називається невиродженою (неособливою).

Матриця $\mathbf{A}^{-1}$ називається оберненою до невиродженої квадратної матриці **A**, якщо виконується умова $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Теорема. Для будь-якої невиродженої квадратної матриці **A** n-го порядку існує єдина обернена матриця $\mathbf{A}^{-1}$, яка обчислюється за формулою

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці **A**. (Без доведення).

Для знаходження оберненої матриці слід використовувати такий алгоритм знаходження оберненої матриці:

1. Обчислити визначник матриці $\det \mathbf{A}$. Якщо він не дорівнює нулю, то обернена матриця існує.

2. Транспонувати матрицю.

3. Обчислити усі алгебраїчні доповнення транспонованої матриці та скласти приєднану матрицю $\mathbf{A}^*$

4. Знайти обернену матрицю: $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}^*$.

Приклад 5. Знайти обернену матрицю до матриці $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання: Обчислимо її визначник $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 16$, отже, невироджена та обернена матриця існує.

Транспонуємо задану матрицю $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Знайдемо усі її алгебраїчні доповнення та визначимо обернену матрицю:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 14 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -10 & -7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,875 & 0,313 & 0,188 \\ 0,125 & 0,188 & 0,313 \\ -0,625 & -0,438 & -0,063 \end{pmatrix}.$$

1.3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язок системи. Сумісна, несумісна, визначена та невизначена системи

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь (далі СЛАР) з n невідомими x_j $(j = \overline{1, n})$ має такий вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{1.10}$$

де a_{ij} $(i = \overline{1, m};\ \ j = \overline{1, n})$ – задані коефіцієнти при невідомих;

b_i $(i = \overline{1, m})$ – задані вільні члени (праві частини).

Система, у якій число рівнянь дорівнює числу невідомих n, називається квадратною n-го порядку.

Для квадратної системи визначник Δ_n складено з коефіцієнтів при невідомих, він називається визначником системи:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_n = \det \mathbf{A}. \tag{1.11}$$

Система називається однорідною, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю $b_i = 0 \quad (i = \overline{1, m})$, і – неоднорідною, якщо хоча б один з вільних членів відмінний від нуля.

Система називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв’язок, і несумісною (суперечливою), якщо вона не має жодного розв’язку.

Однорідна СЛАР завжди сумісна, бо має тривіальний (нульовий) розв’язок $x_j = 0 \quad (j = \overline{1, n})$.

Сумісна система називається визначеною, якщо її розв’язок єдиний, і невизначеною – в протилежному випадку.

Уведемо матричні позначення СЛАР

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{A}} = \left(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ {}_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right), \tag{1.12}$$

де $\mathbf{X}$ – матриця-стовпець невідомих;

$\mathbf{A}$– основна матриця системи, складена з коефіцієнтів при невідомих;

$\mathbf{B}$ – матриця-стовпець вільних членів (правих частин);

$\tilde{\mathbf{A}}$ – розширена матриця системи розміру $m \times (n+1)$.

Тоді СЛАР можна подати в такій матричній формі:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}. \tag{1.13}$$

Якщо в СЛАР кількість рівнянь відповідає кількості невідомих (кажуть: квадратна система), то для пошуку її рішення можна застосувати матричний метод. Розглянемо його. Оскільки СЛАР можна подати в вигляді матричного рівняння (1.13), то спробуємо його розв’язати.

Оскільки матриця $\mathbf{A}$ – невироджена, то існує обернена матриця $\mathbf{A}^{-1}$. Помножимо обидві частини матричного рівняння (1.13) на $\mathbf{A}^{-1}$ ліворуч, отримаємо

$$\mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{B}.$$

Враховуючи, що

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

отримаємо

$$\mathbf{E} \times \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{B}, \text{ або}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{B}. \tag{1.14}$$

Це й є шуканий розв’язок. Отже, щоб розв’язати СЛАР матричним методом необхідно виконати наступні дії: по-перше, знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ до основної матриці системи **A**; по-друге, помножити знайдену $\mathbf{A}^{-1}$ на стовпець вільних членів **B**.

1.4 Розв’язування квадратних систем за правила Крамера методом Гаусса послідовного вилучення змінних

Для пошуку рішення СЛАР, якщо вона квадратна, застосовують метод Крамера, який інколи називають методом визначників.

Теорема *(правило Крамера)*. Якщо визначник квадратної системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв’язок, який обчислюється за формулою

$$x_j = \Delta_j / \Delta, \quad j = \overline{1,n}\ , \tag{1.15}$$

де Δ – головний визначник системи, складений з коефіцієнтів рівнянь системи a_{ij} при невідомих x_j;

Δ_j – допоміжний визначник, одержаний з основного визначника Δ заміною j-го стовпця стовпцем вільних членів $\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$

Приклад 1. Розв’язати квадратну систему методом Крамера

$$\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x-2y-2z=4 \\ x+y+3z=1 \end{cases}$$

Розв’язання. Обчислимо головний визначник системи згідно з (1.2)

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=10\neq 0.$$

Обчислимо допоміжні визначники

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-12+4+6+2+4+36=40,\ \ \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=15,\ \ \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-15.$$

Знайдемо згідно з (1.15) невідомі x_1, x_2, x_3:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{40}{10}=4,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{15}{10}=1{,}5,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-15}{10}=-1{,}5.$$

Перевірка: $2\cdot 4-3\cdot 1{,}5+1\cdot(-1{,}5)=2$.

Пошук розв’язання довільної прямокутної СЛАР доцільно проводити методом Гаусса. Розглянемо довільну прямокутну систему, в якій *m* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими x_j $\left(j=\overline{1,\,n}\right)$.

Нехай **A** – основна матриця, а $\tilde{\mathbf{A}}$ – розширена матриця цієї системи, яка складена доповненням основної матриці стовпцем з вільних членів. Елементарним перетворенням рядків розширеної матриці $\tilde{\mathbf{A}}$ і переставленню стовпців тільки основної матриці **A** відповідають наступні рівносильні перетворення лінійної системи:

1) переставлення місцями будь-яких двох рівнянь;

2) множення обох частин будь-якого рівняння на довільне ненульове число;

3) додавання до обох частин будь-якого рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на довільне число;

4) перенумеровування невідомих.

Дослідження і розв’язання СЛАР методом Гаусса складається з двох етапів. Перший етап (його називають прямий хід) методу Гаусса, полягає в тому, що розширену матрицю $\tilde{\mathbf{A}}$ завдяки застосуванню елементарних перетворень приводять до східчастого вигляду.

Східчастий вигляд матриці – це такий вигляд матриці, при якому всі елементи матриці, що знаходяться під головною діагоналлю, дорівнюють нулю.

Для того, щоб досягти такого вигляду, потрібно виконувати послідовне вилучення невідомих за допомогою вказаних рівносильних перетворень системи. Спочатку виділяють перше рівняння і відповідно перше невідоме. Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Якщо ця умова не виконується, то переставляють рівняння і/або перенумеровують невідомі так, щоб цей коефіцієнт був відмінний від нуля. Потім поступово додають перше рівняння до другого рівняння, потім до третього рівняння … до останнього, помножені на деякі множники. Ці множники підбирають так, щоб під час додавання перших коефіцієнтів, у кожному випадку, було отримано нульове значення. Потім виділяють друге рівняння і відповідно друге невідоме. Повторюють процедуру додавання другого рівняння до всіх інших, дотримуючись при цьому поради, щоб під час додавання других коефіцієнтів, у кожному випадку, було отримано нульове значення. Продовжуємо з усіма рівняннями системи. Цей процес продовжують до тих пір, доки не дійдемо до останнього найнижчого рівняння або ситуації, коли виділене рівняння та всі рівняння, що лежать нижче нього, та мають тільки нульові коефіцієнти при невідомих.

Якщо, під час перетворень, матриця набула трикутного вигляду, то система визначена сумісна і має один єдиний розв’язок. Його знаходять завдяки другому етапу методу Гаусса – зворотній хід. Для цього отриману матрицю записують знову у вигляді системи рівнянь та розв’язують «знизу вгору», починаючи з останнього рівняння, яке є звичайним лінійним рівнянням. Знайдене значення x_k підставляють у попереднє рівняння та знаходять x_{k-1} тощо.

Якщо в результаті перетворень, матриця набула трапецієвидного вигляду, то система невизначена сумісна і має безліч розв’язань. Тоді відкидають нульові рівняння (тотожності 0=0). В праву частину перенесемо всі члени, що містять вільні невідомі. Одержимо систему верхньої трикутної форми відносно базисних невідомих (дивись додаток А) та розв’язуємо, підіймаючись знизу вгору. Спочатку з останнього рівняння знаходять останнє базисне невідоме x_k. Потім одержане значення x_k підставляють у передостаннє рівняння і визначають з нього x_{k-1} тощо

Приклад 2. Розв’яжемо систему рівнянь з прикладу 6 методом Гаусса та порівняємо відповіді.

Розв’язання. Надамо поширену матрицю системи

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 7 & 3 \end{array}\right).$$

Для зручності поміняємо місцями перший та третій рядок. Вилучимо перші коефіцієнти з першого стовпця, які розташовані нижче першого рядка. Для цього будемо додавати перший рядок, помножений на (-3), до другого. Потім вилучимо коефіцієнти з другого стовпця, які розташовані нижче першого рядка. Тепер додаємо перший рядок, помножений на (-5), до третього. Виконуємо дії послідовно. У результаті отримаємо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 7 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 4 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 1+(-2)\cdot(-3) & -5+7\cdot(-3) & 4+3\cdot(-3) \\ 5 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 7 & -26 & -5 \\ 0 & -3+(-2)\cdot(-5) & 1+7\cdot(-5) & 2+3\cdot(-5) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 7 & -26 & -5 \\ 0 & 7 & -34 & -13 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 7 & -26 & -5 \\ 0 & -7+7 & 26-34 & -13+5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 3 \\ 0 & 7 & -26 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{array}\right)$$

Отримана матриця має трикутний вигляд, отже, система матиме один єдиний розв’язок, який ми й знайдемо. Складемо та розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 3 \\ 7x_2 - 26x_3 = -5 \\ 8x_3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 3 \\ 7x_2 - 26x_3 = -5 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 3 \\ 7x_2 - 26 \cdot 1 = -5 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 3 \\ 7x_2 = 21 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2 \cdot 3 + 7 = 3 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$$

1.5 Поняття про ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі. Умова наявності ненульових розв'язків однорідної квадратної системи

Виділимо в матриці **A** розміру $m \times n$ будь-які k рядків і k стовпців $(1 \le k \le \min\{m, n\})$. Визначник, складений з елементів, які стоять на перетині виділених рядів, називається мінором M_k k-го порядку матриці **A**.

Рангом $rank\,\mathbf{A}$ матриці **A** розміру $m \times n$ називається найбільший порядок відмінного від нуля мінору цієї матриці. Зрозуміло, що $0 \le rank\,A \le \min\{m, n\}$, причому ранг дорівнює нулю тільки для нульової матриці.

Базисним мінором матриці **A** називається довільний відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці. Мінор M_{k+1} $(k+1)$-го порядку, який містить у собі деякий мінор M_k k-го порядку, називається обвідним для цього мінору M_k.

Теорема 1. Якщо в матриці A існує відмінний від нуля мінор $M_r \neq 0$ r-го порядку, а всі його обвідні мінори M_{r+1} $(r+1)$-го порядку дорівнюють нулю, то число r є рангом матриці **A**. (Без доведення).

Метод обвідних мінорів знаходження рангу матриці **A** розміру $m \times n$ складається з таких кроків:

1) Покласти $k := 0$.

2) Обчислити почергово обвідні мінори M_{k+1} $(k+1)$-го порядку. Якщо деякий мінор M_{k+1} відмінний від нуля, то прийняти його за базисний і перейти до кроку 3). Якщо всі обвідні мінори $(k+1)$-го порядку дорівнюють нулю, то

перейти до кроку 4).

3) Покласти $k := k+1$. Якщо $k = \min\{m, n\}$, то перейти до кроку 4). У протилежному випадку перейти до кроку 2).

4) Покласти $rank\,\mathbf{A} = k$ і закінчити обчислення.

Приклад 3. Знайти ранг даної матриці A методом обвідних мінорів і вказати її базисний мінор

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$k = 0,\ \ M_1 = 1 \neq 0;$$

$$k = 1,\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = 0,\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 3;$$

$$k = 2,\ \ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -6 & 5 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} = 0,\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -6 & 5 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} = 0.$$

Таким чином $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ – базисний мінор; $rank\,\mathbf{A} = 2$.

Елементарними перетвореннями матриці називаються наступні операції:

1) переставлення місцями будь-яких двох паралельних рядів;

2) множення елементів будь-якого ряду на довільне ненульове число;

3) додавання до всіх елементів будь-якого ряду відповідних елементів будь-якого іншого паралельного йому ряду, помножених на одне і те ж довільне число.

Дві матриці **A** і **B** називаються еквівалентними, якщо одну з них можна одержати з іншої за допомогою елементарних перетворень. Позначається $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Теорема 2. Еквівалентні матриці мають один й той же ранг: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \ \Rightarrow\ rank\,\mathbf{A} = rank\,\mathbf{B}$. Іншими словами, елементарні перетворення не змінюють ранг матриці. (Без доведення).

Метод елементарних перетворень знаходження рангу матриці полягає у зведені даної матриці **A** розміру $m \times n$ за допомогою елементарних перетворень рядків і переставлення стовпців до еквівалентної східчастої верхнє трапецієвидної (зокрема, верхнє трикутної*)* матриці $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \tilde{a}_{2r} & \tilde{a}_{2(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{1(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

у якій ненульові діагональні елементи дорівнюють одиниці.

Ранг трапецієвидної матриці $\tilde{\mathbf{A}}$ дорівнює числу r її ненульових рядків. Тоді $rank\,\mathbf{A} = rank\,\tilde{\mathbf{A}} = r.$ За базисний мінор $\tilde{M}_r$ трапецієподібної матриці $\tilde{\mathbf{A}}$ можна обрати кутовий мінор

$$\tilde{M}_r = \begin{vmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} \\ 0 & 1 & \dots & \tilde{a}_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 4. Знайти ранг даної матриці A методом елементарних перетворень $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$

Розв'язання. Для зручності поміняємо місцями перший та другий стовпці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & -6 & -3 & 5 \\ -6 & 9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

Помножимо перший рядок на (-5) та додаємо до другого рядка, потім перший рядок помножимо на 6 й додаємо до третього, в результаті отримаємо матрицю. Зауважимо, що перший рядок при цьому залишається без змін.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 9 & 7 & 15 \\ 0 & -9 & -7 & -15 \end{pmatrix} \sim$$

Додаємо другий рядок до третього, не змінюючи другий:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 9 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 7/9 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$rank\,A = r = 2$, де R_i –i-й рядок; S_j –j-й стовпець.

Теорема Кронекера-Капеллі. Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $\mathbf{A}\times\mathbf{X}=\mathbf{B}$ сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг розширеної матриці $\tilde{\mathbf{A}}$ дорівнює рангу основної матриці **A**:

$$rank\,\tilde{\mathbf{A}} = rank\,\mathbf{A} = r. \tag{1.16}$$

У випадку сумісності: 1) якщо ранг цих матриць дорівнює числу невідомих $r = n$, то система має єдиний розв'язок (є визначеною); 2) якщо цей спільний ранг менше числа невідомих $r < n$, то система є невизначеною і має безліч розв'язань, які залежать від n-r довільних сталих (параметрів) (рис. 1.2).

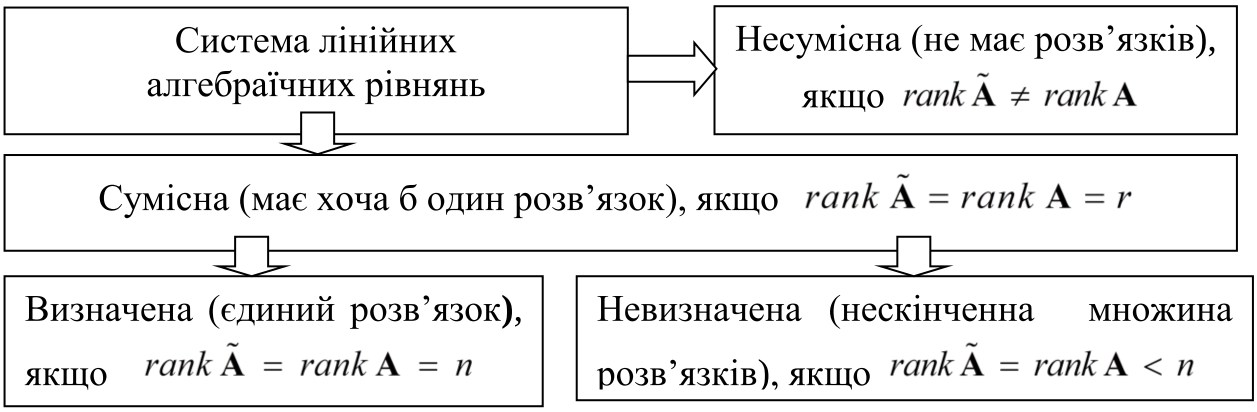


Рисунок 1.2 – Схема визначення сумісні і визначеності системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай система сумісна ($rank\,\tilde{\mathbf{A}} = rank\,\mathbf{A} = r$) і M_r – деякий (довільно вибраний) базисний мінор її основної матриці **A**. Якщо залишити в системі тільки всі ті рівняння, частина коефіцієнтів яких входить в базисний мінор, то одержана система буде рівносильна початковій. Якщо сумісна система є невизначеною ($rank\,\tilde{\mathbf{A}} = rank\,\mathbf{A} = r < n$), тоді лише ті r невідомі x_j, коефіцієнти при яких входять у вибраний базисний мінор M_r, називаються базисними, а решта n-r невідомі x_j називаються вільними.

Залишимо в системі тільки всі ті рівняння, частина коефіцієнтів яких увійшла в базисний мінор, і перенесемо вправо всі члени з вільними невідомими. Розглядаючи вільні невідомі як довільні сталі (параметри), одержуємо квадратну систему r-го порядку відносно базисних невідомих, визначником якої служить базисний мінор M_r. Оскільки $M_r \neq 0$, то базисні невідомі знаходяться однозначно. Таким чином, отримуємо загальний розв'язок початкової системи. При довільно вибраних фіксованих значеннях вільних невідомих (параметрів) одержуємо частинний розв'язок. Частинний розв'язок, який відповідає нульовим значенням вільних невідомих, називається фундаментальним розв'язань.

Приклад 3. Переконатися, що дана система $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = --4 \end{cases}$ сумісна і визначена. Користуючись методом оберненої матриці, знайти її загальний розв'язок.

Розв'язання. Для знаходження рангу використовуємо метод обвідних мінорів.

$$\det \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = 2 \;\Rightarrow\; rang\mathbf{A} = 3;\; \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -4 & -5 \\ 1 & 4 & -3 & -4 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; rank\,\tilde{\mathbf{A}} = 3.$$

Оскільки $rank\,\mathbf{A} = rank\,\tilde{\mathbf{A}} = r = 3 = n$, то система сумісна і визначена.

Рішення системи рівнянь в матричної формі має вигляд (1.14)

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{B},$$

де A^{-1} - обернена матриця;

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix};\; \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо задану матрицю **A:** $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

Знайдемо усі її алгебраїчні доповнення та визначимо обернену матрицю:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 13;\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 10;\quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -9;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 11;\quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8;\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=19; \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=14; \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-13.$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}13 & 10 & -9\\ 11 & 8 & -7\\ 19 & 14 & -13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6,5 & 5,0 & -4,5\\ 5,5 & 4,0 & -3,5\\ 9,5 & 7,0 & -6,5\end{pmatrix}$$

Тоді

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6,5 & 5,0 & -4,5\\ 5,5 & 4,0 & -3,5\\ 9,5 & 7,0 & -6,5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\ -5\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13-25+18\\ 11-20+14\\ 19-35+26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 5\\ 10\end{pmatrix}$$

Зробимо перевірку. Підставимо знайдені значення x_1, x_2, x_3 в одне з рівнянь системи (або підставляють в усі рівняння), наприклад, у друге рівняння:

$$5\cdot 6+1\cdot 5+(-4)\cdot 10=-5.$$

Ми отримали тотожність. Тож, знайдені значені x_1, x_2, x_3 є правильними.

Приклад 4. Переконатися, що система

$$\begin{cases}3x_1+4x_2-x_3=0\\ x_1-3x_2+5x_3=0\\ 4x_1+x_2+4x_3=0\end{cases}$$

сумісна і невизначена. Користуючись методом оберненої матриці, знайти її загальний розв'язок.

Розв'язання. Для знаходження рангу використовуємо метод обвідних мінорів.

$$\det\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\ 1 & -3 & 5\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}=0, \quad \begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}\neq 0 \Rightarrow rang\mathbf{A}=2; \quad \tilde{A}=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1 & 0\\ 1 & -3 & 5 & 0\\ 4 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix}; \quad rank\,\tilde{\mathbf{A}}=2\ .$$

Оскільки $rank\,\mathbf{A}=rank\,\tilde{\mathbf{A}}=2<n=3$, то система сумісна і має безліч рішень. Виберемо перше і друге незалежні рівняння, x_3 перенесемо в праву частину і надаємо йому довільне значення x_3=K.

$$\begin{cases}3x_1+4x_2=K\end{cases}$$
$$\begin{cases}x_1-3x_2=-5K\end{cases}$$

Тоді $x_1=-\dfrac{17K}{13};\ x_2=\dfrac{16K}{13};\ x_3=K.$

ТЕМА 2 ВЕКТОРИ

2.1 Поняття вектору. операції над векторами. Розкладання вектору за базисом координатних ортів

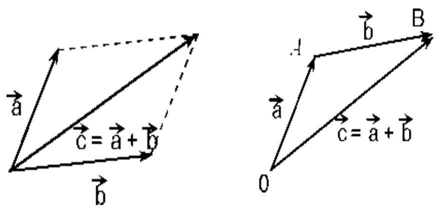
Нехай *A* і *B* - дві різні точки площини або простору. Відрізок *AB*, в якому точку *A* вважають початком, а точку *B* - кінцем, називають вектором АВ і позначають $\overrightarrow{AB}$.

Визначення. Вектор – це направлений відрізок. Напрям, який визначається променем *AB,* називають напрямом вектору $\overrightarrow{AB}$, а довжину відрізка |*AB*| називають довжиною (або модулем) вектору $\overrightarrow{AB}$. Довжину (модуль) вектору $\overrightarrow{AB}$ позначають $|\overrightarrow{AB}|$.

На рисунках вектор $\overrightarrow{AB}$ звичайно зображують прямолінійною стрілкою з початком у точці *A* і кінцем у точці *B*. Серед усіх векторів з початком у точці *A* є один вектор, довжина якого дорівнює нулю. Його називають нульовим вектором.

Рівність векторів. Нехай $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ - два вектори. Вектор $\overrightarrow{AB}$ дорівнює вектору $\overrightarrow{CD}$, якщо: довжина відрізка $\overrightarrow{AB}$ дорівнює довжині відрізка $\overrightarrow{CD}$; промені $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ однаково направлені.

Вектори звичайно позначають малими латинськими буквами: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}...$ їхні довжини - відповідно $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$, або $a,\ b,\ c$.



Додавання векторів. Нехай $\vec{a}, \vec{b}$ - два не нульові вектори. Суму двох векторів можна побудувати за правилом паралелограма або трикутника (рис 2.1): $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

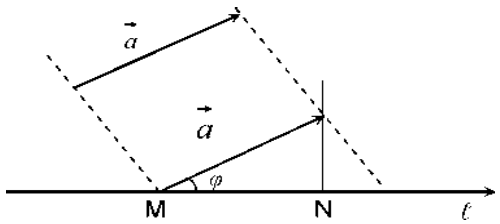
Рисунок 2.1

Визначення. Вектором, протилежним вектору $\vec{a}$, звуть такий вектор (його позначають $-\vec{a}$), що сума векторів дорівнює нульовому вектору.

Вектор, протилежний вектору $\overrightarrow{AB}$, позначають $\overrightarrow{BA}$: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=0$

Множення вектору на число. Добутком ненульового вектору $\vec{a}$ на число λ називають вектор, який має напрям $\vec{a}$, якщо λ додатне, і протилежний напрям, якщо λ від'ємне; довжина цього вектору дорівнює добутку вектору $\vec{a}$ на абсолютне значення (модуль) числа λ .

Визначення. Два ненульові вектори називають *колінеарними,* якщо їхні напрями збігаються або протилежні.



Визначення. Проекцією вектору $\vec{a}$ на вісь l називається число, яке позначається пр$_l\vec{a}$ і дорівнює $|\vec{a}|\cdot\cos\varphi$ (рис.2.2).

Рисунок 2.2

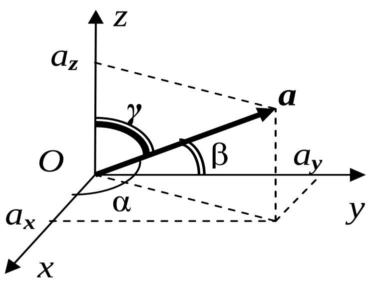
Геометрично проекцію вектору а можна визначити довжиною відрізка MN (рис. 2.2), яка береться із знаком «+», якщо $0<\varphi<\pi/2$, та із знаком «-», якщо $\pi/2<\varphi<\pi$.

Будь-вектор може бути представлений в прямокутної декартової системі координат через проекції по формулі:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}, \qquad (2.1)$$

де $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ одиничні орти декартової системи координат.

На рисунку 2.3 показано розкладання вектору $\vec{a}$ на три проекції $a_x,\ a_y,\ a_z$



. Якщо точка докладання вектору співпадає з початком координат, то такий вектор називається радіусом-вектором. Припустимо, що надано вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, координати точок A і B рівні $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Рисунок 2.3

Тоді,

$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}. \qquad (2.2)$$

Модуль вектору $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ дорівнює

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x + a_y + a_z}, \text{ або}$$
$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{2.3}$$

Направляючі косинуси визначаються за формулою

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}; \ \cos\beta = \frac{a_y}{a}; \ \cos\gamma = \frac{a_z}{a}.$$

2.2 Скалярний добуток векторів

Визначення. Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, який позначають $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, або $\vec{a} \cdot \vec{b}$, є число, що дорівнює добутку довжин векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi. \tag{2.4}$$

де cosφ – кут між напрямами двох ненульових векторів.

Якщо хоча б один з двох векторів є нульовий, то скалярний добуток цих двох векторів дорівнює нулю.

Зауваження 1. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, їх скалярний добуток дорівнює нулю з того, що cosφ = 0.

Властивості скалярного добутку векторів:

1) комутативність $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2) асоціативність відносно множення на число $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

3) дистрибутивність $\vec{a} \cdot (\overleftarrow{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \overleftarrow{b} + \vec{a} \cdot \vec{c})$

Скалярний добуток вектору на цей самий вектор дорівнює

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}. \tag{2.5}$$

Згідно з (2.1),

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}; \ \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$

Тоді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}). \qquad (2.6)$$

Оскільки $\vec{i}\cdot\vec{i}=1;\ \vec{j}\cdot\vec{j}=1;\ \vec{k}\cdot\vec{k}=1;\ \vec{i}\cdot\vec{j}=0;\ \vec{i}\cdot\vec{k}=0;\ \vec{j}\cdot\vec{k}=0$, (2.6) можна записати у вигляді

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (2.7)$$

Зауваження 1. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0 \qquad (2.8)$$

З урахуванням (2.4), (2.3), (2.7) косинус кута між векторами

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (2.9)$$

Якщо в прямокутній системі координат 0xyz точки A, B I C мають координати (x_A, y_A, z_A); (x_B, y_B, z_B); (x_C, y_C, z_C), то координатами векторів $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ буде $\vec{a}\ (x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A)$; $\vec{b}\ (x_C-x_A;\ y_C-y_A;\ z_C-z_A)$. Згідно з (2.9), отримаємо

$$\cos\varphi=\frac{(x_B-x_A)(x_C-x_A)+(y_B-y_A)(y_C-y_A)+(z_B-z_A)(z_C-z_A)}{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2+(z_B-z_C)^2}}.$$

Приклад 1.Визначити кут між двома сторонами *AB* і *AC* трикутника *ABC*, якщо дано координати точок *A*(6; 1; 2), *B*(3; -3; 2), *C*(-1; 3; 1).

Розв'язання. На сторонах *AB* і *AC* побудуємо два вектору $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ з координатами $\vec{a}(-3;-4;0)$, $\vec{b}(-7;2;-1)$.

Тоді
$$a_x=-3;\ a_y=-4;\ a_z=0;\ b_x=-7;\ b_y=2;\ b_z=-1;$$
$$a=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+0}=5;\ b=\sqrt{(-7)^2+(2)^2+(-1)^2}=7,35.$$

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{a\cdot b}=\frac{(-3)(-7)+(-4)\cdot 2+0\cdot(-1)}{5\cdot 7,35}=0,3537\ \Rightarrow\ \varphi\approx 69^o.$$

Приклад 2. При якому значенні λ вектори $\vec{a}=2\vec{i}+\lambda\vec{j}+3\vec{k},\vec{b}=\lambda\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$, взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Згідно (2.8) $2\lambda+2\lambda+3(-3)=0,\quad\Rightarrow\quad \lambda$=2,25.

Приклад 3. При якому значенні x вектори $\vec{a} = x\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ $\vec{b} = (x-1)\vec{i} - x\vec{j} - 4\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.

Розв'язання. Згідно (2.8)

$x(x-1) - 2x + 1\cdot(-4) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 - 0$

$x_1 = -1;\ x_2 = 4.$

2.3 Векторний добуток векторів

Визначення. Векторним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, який позначають $\vec{a}\times\vec{b}$ є вектор $\vec{c}$

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}, \tag{2.10}$$

що визначається такими трьома умовами:

– вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

– упорядкована трійка векторів $(\overrightarrow{a,\ b,\ c})$, відкладених від однієї точки, утворює правий (у загальному випадку косокутний) базис (рис. 2.4);

– модуль вектору c обчислюється за формулою

$$c = a\cdot b\sin\varphi. \tag{2.11}$$

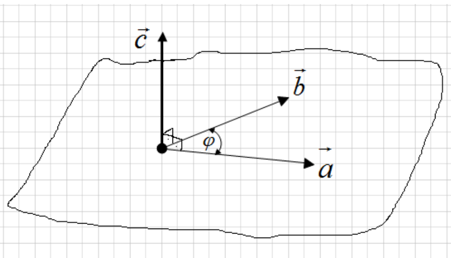


Рисунок 2.4

Властивості векторного добутку:

1) зміна місць множників дає протилежний вектор $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$;

2) асоціативність відносно множення на число

$\lambda\vec{a}\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b}$;

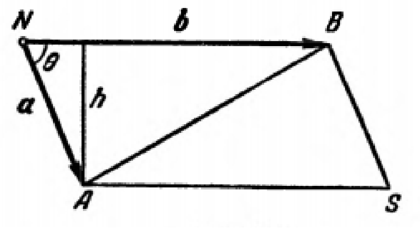
3) операції додавання і векторного добутку векторів зв'язані дистрибутивним законом множення відносно додавання $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$;

4) $\vec{a}\times\vec{a} = 0$ оскільки φ=0, sin0^o=0;

5) якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $c = a\cdot b$;

6) модуль вектору з дорівнює подвоєною площі трикутника, побудованого

на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 2.5):



$$c = 2S_{\Delta NAB}. \quad (2.12)$$

Згідно (2.11), $c = a \cdot b \sin\varphi$

З трикутника *NAB* випливає

$h = a\sin\varphi \Rightarrow c = bh = 2S_{\Delta NAB}.$

Рисунок 2.5

Доведемо, що вектор $\vec{c}$ може бути представлено через координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у вигляді

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k},$$

$$\text{де } c_x = a_y b_z - a_z b_y;\ c_y = a_z b_x - a_x b_z;\ c_z = a_x b_y - a_y b_x. \quad (2.13)$$

Згідно (2.2) і (2.10)

$$\begin{aligned} \vec{a}\times\vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \\ &= a_x b_x(\vec{i}\times\vec{i}) + a_x b_y(\vec{i}\times\vec{j}) + a_x b_z(\vec{i}\times\vec{k}) + a_y b_x(\vec{j}\times\vec{i}) + a_y b_y(\vec{j}\times\vec{j}) + a_y b_z(\vec{j}\times\vec{k}) + \\ &+ a_z b_x(\vec{k}\times\vec{i}) + a_z b_y(\vec{k}\times\vec{j}) + a_z b_z(\vec{k}\times\vec{k}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Для одиничний ортів прямокутної системи координат справедливі формули: $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0;\ \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}; \vec{j}\times\vec{k} = \vec{i};\ \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}; \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k};\ \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}\times\vec{j};\ i\times k = -j.$

Тоді приймає вид:

$$\begin{aligned} \vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} &= a_x b_y\vec{k} - a_x b_z\vec{j} - a_y b_x\vec{k} + a_y b_z\vec{i} + a_z b_x\vec{j} - a_z b_y\vec{i} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}. \end{aligned}$$

Формулу (2.13) доведено.

Приклад 4. При якому значенні x вектор $\vec{c}$, що дорівнює векторному добутку векторів $\vec{a} = 9\vec{i} + (4-x)\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = 4x\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ буде перпендикулярний осі Oz.

Розв'язання. Якщо вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до осі Oz, то його проекція c_z на цю вісь дорівнює нулю. Тоді, за формулою (2.13), одержимо

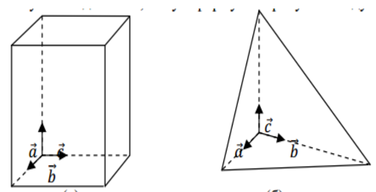
$$c_z = a_x b_y - a_y b_x = 0 \Rightarrow 9\cdot(-1) - (4-x)\cdot 4x = 0 \Rightarrow$$

$$4x^2 - 16x - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = -0{,}5;\ x_2 = 4{,}5.$$

2.4. Мішаний (скалярно-векторний) добуток трьох векторів.

На трьох векторах можна побудувати паралелепіпед (рис. 2.6, а) або трикутну піраміду (рис. 2.6, б).

Визначення. Мішаним добутком трьох ненульових некомпланарних векторів є число, абсолютна величина якого дорівнює об’єму паралелепіпеда з ребрами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, які відкладено від однієї точки (рис. 2.6, а).



Мішаний добуток векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ позначають $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ або $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c})$: $(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$.

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} \rangle = -\langle \vec{b}, \vec{a}, \vec{c} \rangle.$$

Рисунок 2.6

Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, тобто лежать в одній площині, то їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Мішаний добуток векторів заданих своїми координатами, обчислюють як визначник третього порядку

$$(\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.15)$$

Об’єм трикутної піраміди

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.16)$$

Приклад 5. Координати вершин піраміди $A(1,-1,2)$, $B(2,1,2)$, $C(1,1,4)$, $D(6,-3,8)$. Обчислити об'єм піраміди.

Розв’язання. Вектору мають координати: $\vec{a}(1;\ 2;\ 0)$; $\vec{b}(0;\ 2;\ 2)$; $\vec{c}(5;\ -2;\ 6)$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 36/6 = 6.$$

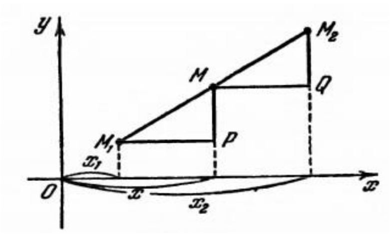
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.2 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

ТЕМА 3 ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА ПЛОЩИНІ

3.1 Метод координат

Нехай задані дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ в прямокутній системі координат. З прямокутного ΔM_1NM_2 (рис. 3.1) за теоремою Піфагора випливає, що відстань між довільними двома точками визначається формулою

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \tag{3.1}$$



Нехай задані дві точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ і відношення $\lambda = M_1M / MM_2$, у якому точка $M(x, y)$ ділить відрізок M_1M_2, починаючи від точки M_1 (рис. 3.1).

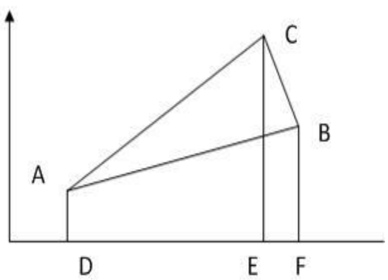
Рисунок 3.1

Координати точки $M(x, y)$, яка ділить заданий відрізок у заданому відношенні, обчислюються за формулами

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};\; y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{3.2}$$

Зауваження. Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 навпіл, то $\lambda = 1$. Тоді координати середини відрізка визначаються за формулами:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2};\; y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{3.3}$$



Використовуючи метод координат, отримаємо формулу для обчислення площі трикутника *ABC*, якщо задані координати його вершин $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ (рис. 3.2). Площі трикутника *ABC* дорівнює

Рисунок 3.2

$S_{ABC} = S_{ACED} + S_{ECBF} - S_{ADFB}$, або

$$S_{ABC}=(y_1+y_3)\cdot(x_3-x_1)/2+(y_2+y_3)\cdot(x_2-x_3)/2-(y_1+y_2)\cdot(x_2-x_1)/2=$$
$$=0,5\cdot\left[(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\right]. \tag{3.4}$$

Правило. Для обчислення виразу, що стоїть у формулі (3.4) в дужках, треба виписати в стовпець координати першої, другої, третьої і знову першої вершин трикутника і зробити множення за схемою на рисунку 3.3, розставивши знаки, як зазначено справа на рисунку.

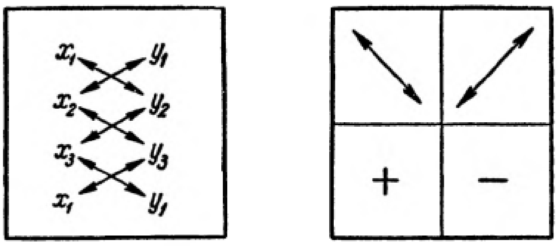


Рисунок 3.3

Формулу (3.4) можна представити у вигляді визначника третього порядку

$$S=\left|0,5\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\right| \tag{3.5}$$

Приклад 1. Трикутник ABC задано координатами вершин $A(1;1)$, $B(0;4)$, $C(5;2)$. Побудувати ΔABC в системі координат. Знайти: а) довжину медіани AM; б) площу трикутника.

Розв'язання. а) M – середина сторони BC. Згідно (3.3)

$$x_D=\frac{x_C+x_B}{2}=2,5 \quad \mathrm{y}_D=\frac{y_C+y_B}{2}=3.$$

Довжина медіани $\mathrm{AM}=\sqrt{(2,5\text{-}1)^2+(3-1)^2}\approx 2,5.$

б) Площу трикутника обчислимо, використовуючи схему на рис. 3.3:

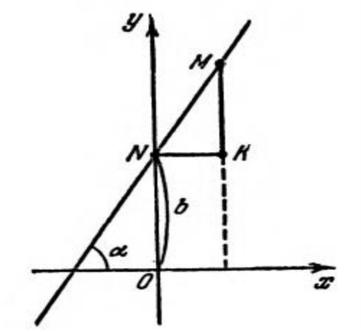
$$\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 0 & 4\\ 5 & 2\\ 1 & 1 \end{array} \quad - \quad \begin{array}{cc} 1 & 1\\ 0 & 4\\ 5 & 2\\ 1 & 1 \end{array}$$

$$S=0,5\cdot(1\cdot4+0\cdot2+5\cdot1-0\cdot1-5\cdot4-1\cdot2)=6,5 \text{ кв.ед.}$$

3.2 Пряма на площині. Основні типи рівняння прямої

1. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Нехай похила пряма утворює кут α з віссю Ox і перетинає вісь Oy у точці N(0; b) (рис. 3.4). Тангенс кута нахилу α називають кутовим коефіцієнтом k прямої: $k = tg\,\alpha$. Число b називають початковою ординатою прямої.



Нехай $M(x, y)$ – довільна точка прямої. Тоді

$\frac{MK}{NK} = tg\alpha$; $\frac{y-b}{x} = tg\,\alpha = k$; $y - b = kx$.

Звідси маємо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx + b. \tag{3.6}$$

Рисунок 3.4

Зауваження 1. Якщо $b = 0$, то пряма $y = kx$ проходить через початок координат $O(0;0)$. Якщо $k = 0$, то пряма $y = b$ паралельна осі Ox (горизонтальна).

Зауваження 2. Рівняння вертикальної прямої має вигляд $x = a$, де a – абсциса точки перетину $A(a;\,0)$ з віссю Ox.

2. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Нехай пряма проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$. Оскільки пряма l проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$, то $y - y_1 = k(x - x_1)$. Тоді

$$M_2(x_2, y_2) \in l \;\Rightarrow\; y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1);$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Звідси маємо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{3.7}$$

3. Загальне рівняння прямої та його окремі випадки

Кожна пряма описується деяким рівнянням першого ступеня. Навпаки, кожне рівняння першого ступеня є рівнянням деякої прямої. Загальним рівнянням прямої називається рівняння першого ступеня вигляду

$$Ax + By + C = 0, \tag{3.8}$$

де A, B і C – сталі коефіцієнти, причому хоча б одне з чисел A, B

відмінне від нуля, тобто $A^2 + B^2 \neq 0$.

Зауваження. У залежності від значень сталих A, B і C можливі наступні окремі випадки:

1. $C = 0$, тоді пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат;

2. $A = 0$, тоді пряма $By + C = 0$ паралельна осі Ox. Її рівняння можна подати у вигляді $y = b$, де $b = -C/B$;

3. $B = 0$, тоді пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі Oy. Її рівняння можна подати у вигляді $x = a$, де $a = -C/A$;

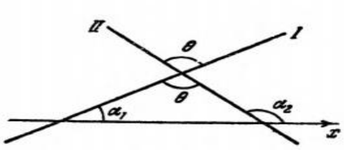
4. $A = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $y = 0$ співпадає з віссю Оx;

5. $B = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $x = 0$ співпадає з віссю Оy.

6. Рівняння прямої в відрізках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, де a = – C/A, b = – C/B.

3.3 Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих. Відстань від точки до прямої

Нехай прямі l_1 і l_2, що зображені на рис. 3.5, мають задані кутові коефіцієнти відповідно k_1 і k_2. Тоді для кута θ між ними маємо



$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1;$$

$$tg\theta = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}. \qquad (3.9)$$

Рисунок 3.5

Оскільки $tg\ \alpha_1 = k_1$; $tg\ \alpha_2 = k_2$, то тангенс кута між прямими, згідно (3.9), знаходиться за формулою

$$tg\theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}. \qquad (3.10)$$

Для паралельних прямих θ=0, tg 0=0, а для перпендикулярних прямих $\theta=90^o$, $tg90^o \to \infty$. З одержаної формули випливає, що

1) необхідною і достатньою умовою паралельності невертикальних

прямих l_1 і l_2 є рівність

$$k_1 = k_2 ; \tag{3.11}$$

2) необхідною і достатньою умовою перпендикулярності похилих прямих l_1 і l_2 є рівність

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \;\Rightarrow\; k_2 = -\frac{1}{k_1} . \tag{3.12}$$

Зауваження. Кут між прямими θ розуміється як кут повороту. Гострий кут між прямими знаходиться за формулою

$$\theta = arctg\left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|. \tag{3.13}$$

Приклад 2. У тупокутному ΔABC ($\angle A$ – тупий) задано рівняння сторін $AB:\ y = -3x + 5$, $AC:\ y = 2x - 10$ і координати вершини $C(2;3)$.

Знайти: а) $\angle A$; б) рівняння висоти CN

Розв'язання. а) Знайдемо гострий кут між прямими AB і AC:

$$k_{AB} = -3;\ k_{AC} = 2;\ \theta = arctg\left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| = arctg\left|\frac{2-(-3)}{1+2\cdot(-3)}\right| = arctg1 = \frac{\pi}{4}.$$

Тоді $\angle A = \pi - \pi/4 = 3\pi/4.$

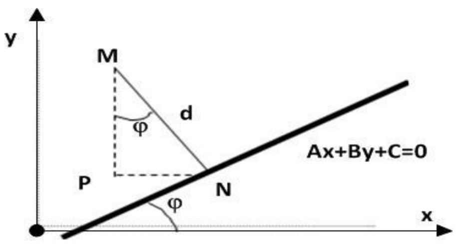
б) $CN \perp AB \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$; $k_{AB} = -3;$

$k_{CN} = -1/k_{AB} = 1/3;$ $C \in CN$; $CN:$ $y - y_0 = k(x - x_0);$

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x-2); \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$

Відстань від точки до прямої

Нехай задані точка М(x_0; y_0) і пряма своїм загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$ Відстанню d від точки до прямої називається довжина перпендикуляра MN, опущеного з даної точки на дану пряму(рис. 3.7).



Координати точки пересічення N мають вид:

Рисунок 3.6

$$x_N = x_0 + d\sin\varphi,\ y_N = y_0 - d\cos\varphi . \tag{3.14}$$

Підставимо (3.14) в рівняння прямої:

$$Ax_0 + By_0 + C = d\,(B\cos\varphi - A\sin\varphi). \qquad (3.15)$$

Якщо tgφ=–A/B , то

$$\cos\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \sin\varphi = -\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (3.16)$$

Тоді з (3.16) і (3.15) одержимо формулу для відстані від точки до прямої:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (3.17)$$

Приклад 3 . Надано вершини трикутника *ABC*: A (-3, -1), B (3,7), C (6,3). Знайти: 1. Рівняння і довжину всіх сторін 2. Рівняння і довжину медіани *BM.* 3. Рівняння і довжину висоти *AH*. 4. Рівняння і довжину бісектриси *BE.*

Розв'язання. 1. За формулами (3.1) і (3.7) знайдемо довжину і рівняння сторін трикутника

AB: $AB = \sqrt{(3-(-3))^2 + (7-(-1))^2} = 10; \quad \frac{x+3}{3+3} = \frac{y+1}{7+1} \Rightarrow \mathrm{y} = 4x/3+3;$

BC: $BC = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5; \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-7}{-4} \Rightarrow \mathrm{y} = -\frac{4x}{3} + 11;$

AC: $AC = \sqrt{(9)^2 + (4)^2} = 9{,}85; \quad \frac{x+3}{9} = \frac{y+1}{4} \Rightarrow \mathrm{y} = \frac{4x}{9} + \frac{1}{3}.$

2. Знайдемо довжину і рівняння медіани BM

$$x_M = \frac{x_C + x_A}{2} = 1{,}5 \quad \mathrm{y}_M = \frac{y_C + y_A}{2} = 1 \ \Rightarrow BM = \sqrt{(1{,}5)^2 + (6)^2} \approx 6{,}18;$$

$$\frac{x-1{,}5}{1{,}5} = \frac{y-1}{6} \ \Rightarrow \ y = 4x\text{ - }5.$$

3. Кутовий коефіцієнт прямої *B*C k_{BC} =–4/3,отже, кутовий коефіцієнт перпендикуляра *AH* до прямої *BC* дорівнює k_{AH} = 3/4. Отже, рівняння висоти *AH* має вигляд y = 0,75x + b. Так як висота проходить через A, то підставимо координати точки A в отримане рівняння прямої : –1 = 0,75 * (– 3) + b, звідки b = 1,25, тобто рівняння висоти *AH* має вигляд y = 0,75x + 1,25.

Довжину висоти знайдемо за допомогою отриманої формули (3.17). Для цього рівняння прямої BC перепишемо у вигляді

$$4x+3y-33=0 \;\Rightarrow\; A=4,\; B=3,\; C=-33.$$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|(-3)\cdot 4+(-1)\cdot 3-33|}{\sqrt{4^2+3^2}}=9,6.$$

4. Рівняння і довжину бісектриси *BE.* Бісектриса *BE* ділить відрізок *AC* в співвідношенні *AE / FE = AB / BC*=λ*.* Так як *AB*=10, *BC*=5. Тоді λ=2. Згідно (3.2) маємо: $x_E=\frac{-3+2\cdot 6}{1+2}=3;\; y_E=\frac{-1+2\cdot 3}{1+2}=5/3$

Тоді рівняння бісектриси *BE* має вигляд $\frac{x-3}{3-3}=\frac{y-7}{5/3-7} \;\Rightarrow\; \mathrm{x}=3.$

Довжина *BE* = 7-5/3 = 5,3.

3.4 Криві другого порядку. Загальне рівняння лінії другого порядку. Канонічні рівняння кола, еліпса, гіперболи та параболи

Визначення. Лінія другого порядку визначається рівнянням

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0. \tag{3.18}$$

У спрощеному вигляді рівняння кривої другого порядку має вигляд

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{3.19}$$

В залежності від співвідношення коефіцієнтів рівняння (3.19) може визначати коло, еліпс, гіперболу, параболу. Наведемо рівняння (3.18) при *C*=0 до виду

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=A\left[x^2+\frac{D}{A}x+\left(\frac{D}{2A}\right)^2\right]-A\left(\frac{D}{2A}\right)^2+B\left[y^2+\frac{E}{B}y+\left(\frac{E}{2B}\right)^2\right]-B\left(\frac{E}{2B}\right)^2+F=$$

$$=A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+B\left(y+\frac{E}{2B}\right)^2+F-\frac{D^2}{2A}-\frac{E^2}{2B}=0,$$

За умови, що $M=F-\frac{D^2}{2A}-\frac{E^2}{2B}>0$, маємо

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\pm\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, \tag{3.20}$$

де $x_0=-\frac{D}{2A};\; y_0=-\frac{E}{2B};\; a^2=\frac{M}{A};\; b^2=\frac{M}{B}.$

Знак + в (2.19) можливий за умови AB>0. В іншому випадку AB<0.

Коло.

Визначення. Коло – це геометричне місце точок, що рівновіддалені від однієї точки, яка називається центром кола. Відстань від центра кола до будь-якої точки кола називається.

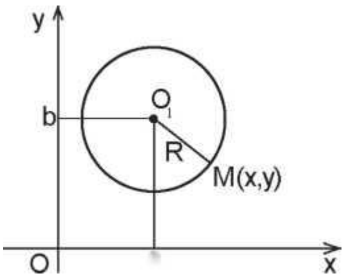


Рисунок 3.7

Виведемо рівняння кола згідно з визначенням. Нехай *M(x,y)* - будь-яка точка кола (рис. 3.7), O(x_0, y_0) - центр кола. Тоді:

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=R^2. \qquad (3.21)$$

Рівняння (3.21) називається канонічним рівнянням кола. З порівняння рівнянь (3.20) і (3.20) випливає, що крива другого порядку буде колом при виконання умови $A = B$.

Еліпс.

Визначення. Еліпс – це геометричне місце точок, сума відстаней до яких від двох заданих точок (що називаються фокусами) є величина стала і більша за відстань між фокусами: $MF_1+MF_2=2a$ (рис. 3.8)

Отримаємо канонічне рівняння еліпсу:

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2};\ \ r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+x^2-2cx+c^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

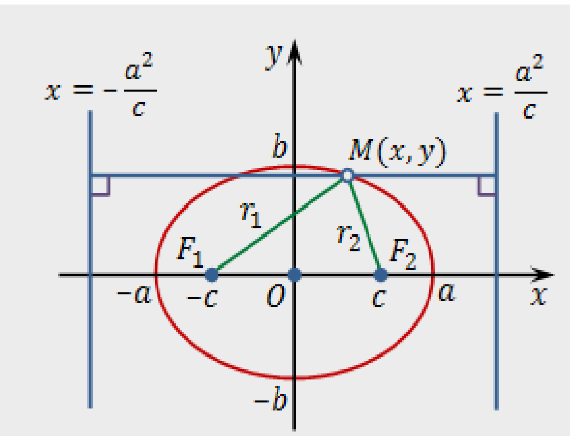


Рисунок 3.8

Введемо позначення:

$$b^2=a^2-c^2, \qquad (3.22)$$

Тоді:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (3.23)$$

Порівняння отриманого рівняння з рівнянням (3.20) приводить до висновку: крива другого порядку (3.19) є еліпсом за умови AB>0.

Точки перетину з осями симетрії, які в нашому випадку співпадають з осями координат, називаються вершинами еліпса; ($-a$, a) - велика піввісь; ($-b$, b) - - мала піввісь еліпса (рис.3.9).

Визначення. Ексцентриситетом називається відношення відстані між фокусами еліпса до довжини його великої осі:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} < 1; \text{ або } e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \tag{3.24}$$

Ексцентриситет характеризує форму еліпса: чим ближче e до 1, тим менше відношення b/a, і тим більше витягнутий еліпс; і навпаки: чим менше ексцентриситет, тим ближче відношення b/a до 1 і тим ближче еліпс за формою наближається до кола. Якщо $e = 0$, то маємо коло.

Ексцентриситет Меркурія, Венери, Землі і Марса відповідно рівні 0,21; 0,01; 0,02; 0,09. Ексцентриситет комети Галлея має значення e=0,97.

Визначення. Нехай $a > b$ (рис. 3.9). Дві прямі, що перпендикулярні великій осі і розташовані на відстані a/e від центра, називаються директрисами еліпса: $x = \pm\frac{a}{c}$.скільки $e < 1$, то права директриса розташована праворуч від правої вершини, а ліва - ліворуч від лівої вершини.

Властивість директрис еліпса. Якщо r - відстань від будь-якої точки еліпса до будь-якого фокуса, d - відстань від тієї ж точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то відношення r/d - величина незмінна і дорівнює ексцентриситету еліпса: $r/d=e$.

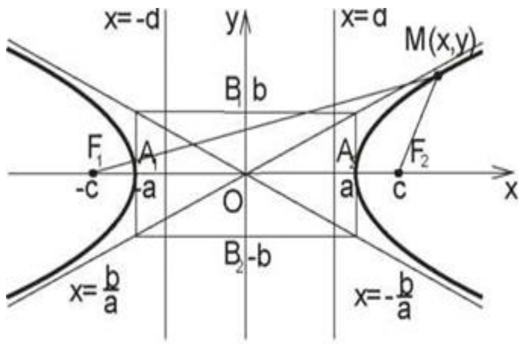
Приклад 1. Еліпс проходить через точки $M_1(\sqrt{3};\ -2); M_2(-2\sqrt{3};\ 1)$. Скласти рівняння еліпса.

Розв'язання. Підставимо координати точок в рівняння еліпса (3.23), отримаємо систему двох рівнянь, з якої визначаються a і b

$$\frac{3}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1;\ \ \frac{12}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \ \Rightarrow \begin{matrix} u = 1/a^2 \\ v = 1/b^2 \end{matrix} \ \Rightarrow \begin{cases} 3u + 4v = 1 \\ 12u + v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u = 15 \\ v = 5 \end{matrix}.$$

Тоді рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1.$

Гіпербола



Визначення. Гіперболою називається геометричне місце точок, для яких різниця відстаней від двох заданих точок (що називаються фокусами) є стала додатна величина, менша за відстань між фокусами $MF_1-MF_2=\pm 2a$ (рис 3.9).

Рисунок 3.9

Отримаємо канонічне рівняння гіперболи:

$$MF_1-MF_2=\pm 2a \qquad F_1F_2=2c;$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+x^2-2cx+c^2+y^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2};$$
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=-a^2+cx;$$
$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \qquad b^2=c^2-a^2.$$

Тоді канонічне рівняння гіперболи має вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{3.24}$$

Порівняння отриманого рівняння з рівнянням (3.20) приводить до висновку: крива другого порядку (3.19) є гіперболою за умови АВ<0.

Точки перетину гіперболи з віссю Ох називаються вершинами гіперболи. Точка О(0,0) - є центром гіперболи, відрізки A_1A_2 - дійсною віссю, B_1B_2 - умовною віссю гіперболи (рис. 3.10).

Визначення. Асимптотами гіперболи є прямі лінії, які задовольняють умові: якщо точка $(x,\ f(x))$ рухається вздовж вітки графіка функції до нескінченності, відстань від цієї точки до названої прямої прямує до нуля.

Знайдемо рівняння асимптоти. Розв’яжемо рівняння (3.24) відносно у:

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

За визначенням асимптоти спрямуємо $x \to \infty$ от, маємо:

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{3.25}$$

Визначення Характеристичним прямокутником гіперболи називається прямокутник зі сторонами $2a$ і $2b$. Діагоналі цього прямокутника є асимптотами гіперболи (рис. 3.10).

Визначення. Ексцентриситетом називається відношення відстані між фокусами гіперболи до довжини його дійсної осі:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} > 1; \text{ або } e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}. \tag{3.26}$$

Ексцентриситет характеризує форму гіперболи: чим менше e, тим більше витягнутий основний прямокутник гіперболи у напрямку осі, яка об’єднує вершини.

Визначення. Дві прямі, що перпендикулярні великій осі і розташовані на відстані a/e від центра, називаються директрисами гіперболи $x=-a/e;\ x=a/e$.

Оскільки $e > 1$, то права директриса розташована між правою вершиною і центром гіперболи, а ліва - між лівою вершиною і центром (рис. 3.10).

Властивість директрис гіперболи. Якщо r - відстань від будь-якої точки гіперболи до будь-якого фокуса, d - відстань від тієї ж точки до директриси, яка відповідає цьому фокусу, то r/d відношення — величина стала і дорівнює ексцентриситету гіперболи $r/d=e$:

Визначення. Гіпербола, у якої дійсна і уявна піввісь мають однакову довжину ($a = b$) називається рівносторонньою.

Визначення. Гіпербола $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ називається спряженою до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Її дійсна вісь розташована вздовж осі $0y$. Спряжені гіперболи мають ті ж самі асимптоти.

Парабола

Визначення. Параболою називається геометричне місце точок, для яких відстань від заданої точки, що називається фокусом, дорівнює відстані до певної заданої прямої, що називається директрисею (рис. 3.10).

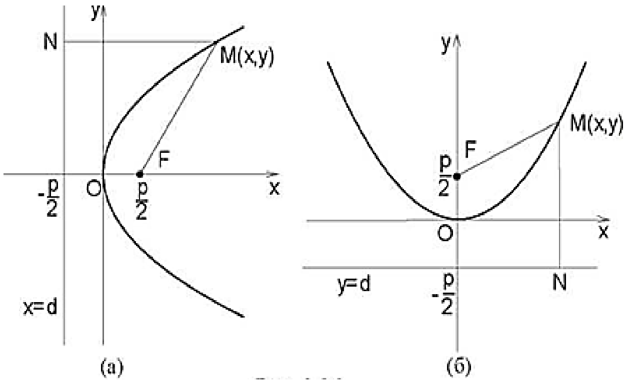


Рисунок 3.10

Нехай $M(x,y)$ - будь-яка точка гіперболи (рис. 3.10, а), то за визначенням маємо $|FM|=|MN|$. Нехай фокус має координати F(p/2; 0), а директриса задана рівнянням $x=-p/2$. Тоді маємо:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2};\ x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}.$$

Канонічне рівняння параболи:

$$y^2=2px. \qquad (3.27)$$

Точка перетину параболи з віссю симетрії називається вершиною параболи. В нашому випадку вершина співпадає з початком координат.

Рівняння (3.27) описує параболу, що симетрична вісі Ox. Якщо розглянемо параболу (рис. 3.10, б) симетричну вісі *Oy,* то її фокус має координати F(0; -*p*/2), а директриса задана рівнянням *y*=-*p*/2. Канонічне рівняння такої параболи має вигляд:

$$x^2=2py. \qquad (3.28)$$

Параметр *p,* що входить до рівнянь (3.27), (3.28) називається параметром параболи. Ексцентриситет параболи $e=1$.

ТЕМА 4 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

4.1 Основні типи рівняння площини у просторі. Окремі випадки загального рівняння площини

Нормальне рівняння площини. Положення площини у просторі буде повністю визначено, якщо задати її відстань p від початку координат 0, тобто довжину перпендикуляра *OT,* який опущено з точки *O* на площину, та одиничний вектор $\vec{e}$, перпендикулярний до площини і направлений від початку O до площини (рис. 4.1).

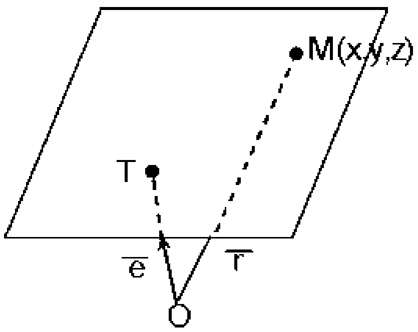


Рисунок 4.1

Нехай точка $M(x, y, z)$ - довільна точка площини, її радіус- вектор $\vec{r}$ змінюється так, що весь час $\text{пр}_{\bar{e}}\overline{OM} = OT = p$. Ця умова має місце лише для точок площини; воно не виконується, якщо точка M не лежить на площині.

Отже, маємо властивість точок площини, яку напишемо у векторній формі $\text{пр}_{\bar{e}}\overrightarrow{OM} = \vec{r}\cdot\vec{e}$. Величина зліва дорівнює p. Маємо:

$$\vec{r}\cdot\vec{e} - p = 0. \qquad (4.1)$$

Рівняння (4.1) висловлює умову, за якої точка M лежить на даній площині, і має назву нормального рівняння площини. Воно записано у векторній формі. Вектор $\vec{r}$ має координати x, y, z. Вектор $\vec{e}$ своїми проекціями має косинуси кутів α, β, γ які він утворює з координатними осями Ox, Oy та Oz. Скалярний добуток векторів $\vec{r}$ і $\vec{e}$ дає нормальне рівняння площини у координатній формі:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (4.2)$$

Одержане рівняння (4.2) - першого порядку відносно $x,y,z,$ тобто всяка площина може бути подана рівнянням першого порядку відносно поточних координат.

Загальне рівняння площини. Вище було доведено, що будь-яка площина може бути подана рівнянням першого порядку. Доведемо зворотне: будь- яке рівняння першого порядку (ступеня) між трьома змінними визначає площину.

Візьмемо рівняння першого ступеня загального вигляду:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (4.3)$$

де $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Розглядатимемо A, B і C як проекції на вісі координат Ox, Oy і Oz деякого вектору $\vec{n}$, а x,y,z як проекції радіус-вектору $\vec{r}$ точки M. Тоді рівняння (4.3) може бути переписане у вигляді

$$\vec{r}\cdot\vec{n}+D=0, \tag{4.4}$$

яке зводиться до вигляду (4.1), якщо останнє розділити на довжину вектору $\vec{n}$.

Тобто, отримаємо: $\vec{e}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|};\ p=-\frac{D}{|\vec{n}|}$.

Таким чином, рівняння (4.4) завжди може бути зведено через рівняння (4.1) до нормального вигляду (4.2). Але нормальне рівняння (4.2) завжди визначає площину. Отже, рівняння (4.4), відповідно, і початкове рівняння (4.3), визначає площину, що й треба було довести.

Рівняння вигляду (4.3) має назву загального рівняння площини.

Подивимось, які часткові положення відносно системи координат О*xyz* займає площина $Ax+By+Cz+D=0$, якщо деякі коефіцієнти цього рівняння дорівнюють нулю:

а) D=0. $Ax+By+Cz=0$, - площина проходить через початок координат;

б) A = 0, або B = 0, або C = 0. Тобто коефіцієнт біля однієї з змінних дорівнює нулю.

A=0: $By+Cz+D=0$ - це площина, яка паралельна осі О*x*;

B = 0: $By+Cz+D=0$ - це площина, яка паралельна осі О*y*;

C = 0: $Ax+By\ +D=0$ - це площина, яка паралельна осі Оz.

в) D=0; A=0, або B=0, або C=0. Тобто, коефіцієнти біля однієї з змінних та вільний член дорівнюють нулю. Наприклад, A=0 і D=0: $By+Cz\ =0$. Це площина, яка містить вісь О*x*. У другому і третьому випадках маємо площини, які містять осі О*y* і Оz відповідно;

г) коефіцієнти біля двох змінних дорівнюють нулю. Наприклад, A = 0 і B = 0. Маємо $Cz+D=0$. Це рівняння площини, яка паралельна координатній площині *xOy*. Якщо A = 0 і C = 0, або B = 0 і C = 0 будемо мати площини, які паралельні координатним площинам *xOz* і *yOz* відповідно;

д) коефіцієнти біля двох змінних і вільний член дорівнюють нулю. Наприклад, A = 0, B = 0 і D = 0. Маємо Cz = 0, $C\neq 0$, тоді z = 0 - рівняння координатної площини *xOy*.

Рівняння площини у відрізках. Розглянемо площину $Ax+By+Cz+D=0$, яка перетинає всі три координатні вісі. З попереднього відомо, що у цьому випадку жоден з коефіцієнтів не дорівнює нулю. Позначимо через a, b і c довжини відрізків, які відсікає площина на осях координат (рис. 4.2). Тоді

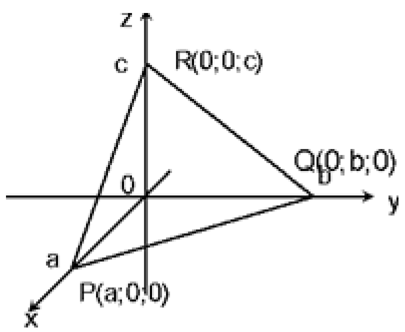


Рисунок 4.2

$$Ax+By+Cz=-D;$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{4.5}$$

де $a=-\dfrac{D}{A}$; $b=-\dfrac{D}{B}$; $c=-\dfrac{D}{C}$.

Рівняння (4.5) має назву рівняння площини у відрізках.

Рівняння площини, яка проходить через задану точку. Нехай треба знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$. Візьмемо шукане рівняння у вигляді (4.3), тобто

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0. \tag{4.6}$$

Віднімемо (4.6) з рівняння (4.3), маємо шукане рівняння:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \tag{4.7}$$

Рівняння площини, яка проходить через три дані точки. Нехай маємо три точки: $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$; $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$; $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$. Рівняння площини, яка проходить через дану точку M_1, має вигляд (4.7). Щоб знайти рівняння шуканої площини, необхідно припустити, що рівнянню (4.7) задовольняли координати двох інших точок M_2, M_3. Маємо однорідну систему трьох рівнянь з трьома невідомими A, B і C. З теорії розв’язання таких систем відомо, що вона має ненульове рішення, якщо її визначник дорівнює нулю. Тобто,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{4.8}$$

Розкривши визначник по елементах першого рядка, маємо шукане рівняння площини, яка проходить через три точки.

Приклад 1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;\ 2;\ 3)$, $M_2(-1;\ 0;\ 0)$ і $M_3(3;\ 0;\ 1)$.

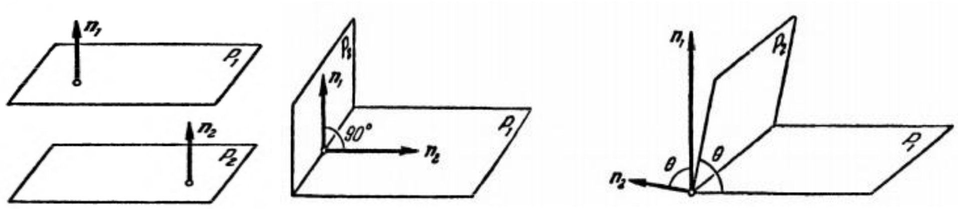
Розв'язання. Запишемо визначник (4.8) з відомими координатами точок:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1-1 & 0-2 & 0-3 \\ 3-1 & 0-2 & 1-3 \end{vmatrix} = 0, \text{звідси } (x-1)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Після обчислень та скорочення на (-2) шукане рівняння площини матиме вигляд: $x + 5y - 4z + 1 = 0$.

Взаємне розташування площ

Можливі три випадки взаємного розташування двох площ: площині паралельні (рис 4.3, а); площині перпендикулярні (рис. 4.3, б); площині пересікаються під довільним кутом (рис. 4.3, в).



а) б) в)

Рисунок 4.3

Нехай рівняння площ мають вигляд:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Таким чином, визначені проекції на вісі координат *Ox, Oy* і *Oz* векторів $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_3)$.

Випадок 1. Площині паралельні, $\vec{n}_1 // \vec{n}_2$ (рис. 4.3, а). Тоді, умова паралельності площин має вигляд

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{4.9}$$

Випадок 2. Площині перпендикулярні, $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ (рис. 4.3, б). Тоді, умова перпендикулярності площин, згідно (2.8), має вигляд

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \tag{4.10}$$

Випадок 3. Кутом між двома площами будемо називати один з двох суміжних двогранних кутів, утворених цими площами. Позначимо вибраний кут через θ. Використовуючи формулу скалярного добутки векторів, можна обчислити кут між векторами аналогічно (2.9) у вигляді

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (4.11)$$

Приклад 2. Знайти кут між площами *x+y-z-1=0; 2x+y-2z+3=0.*

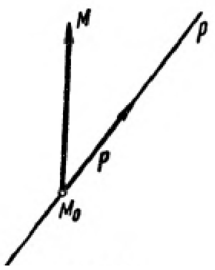
Розв'язання. Координати векторів $\vec{n}_1(1;1_1;-1)$ і $\vec{n}_2(2;1;-2)$

$$\cos\theta = \frac{1\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-1)(-2)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{9} \approx 0,961 \;\Rightarrow\; \theta \approx 16^{\circ}.$$

4.2 Основні типи рівняння прямої лінії в просторі

Нехай p - деяка пряма, розташована в просторі. Виберемо на ній довільну точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і проведемо через M_0 який-небудь вектор $\vec{p}$, що лежить на прямій p (будемо називати його спрямований вектором прямої) (рис. 4.4). Нехай l, m, n - проекції вектору $\vec{p}$ на осі Ox, Oy, Oz відповідно.

Візьмемо в просторі (не обов'язково на нашій прямій) довільну точку M (x, y, z). Ясно, що точка M буде лежати на прямій p тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ виявиться паралельним направляю щему вектору $\vec{p}$.



Так як проекціями вектору $\overrightarrow{M_0M}$ на осі будуть $(x-x_0; y-y_0; z-z_0)$, то умовою знаходження точки M на прямій p є рівність

$$\frac{x-x_o}{l} = \frac{y-y_o}{m} = \frac{z-z_o}{n}. \qquad (4.12)$$

Рисунок 4.4

Рівняння (4.12) є канонічним рівнянням прямої лінії.

Перепишемо (4.12) у вигляді:

$$\frac{x-x_o}{l} = \frac{y-y_o}{m} = \frac{z-z_o}{n} = t .$$

Тоді, отримаємо параметричні рівняння прямої лінії:

$$x = x_0 + lt;\ y = y_0 + mt;\ z = z_0 + nt. \tag{4.13}$$

Рівняння прямої, що проходить через 2 точки. Нехай маємо 2 точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$; $M_2(x_2; y_2; z_2)$ на прямої. Тоді з (4.12) маємо:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{4.14}$$

Пряма як лінія перетину двох площ. Будь-які дві не паралельні між собою площини з загальними рівняннями:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

визначають пряму їх перетину.

Рівняння (4.15), які розглядають сумісно, називають загальними рівняннями прямої.

Приклад 3. Знайти рівняння лінії перетину двох площин *2x+3y+5z-3=0, x+y+2z-1=0*

Розв'язання. Вирішимо систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 3y + 5z - 3 = 0 \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ спочатку при z=0, а потім при z=1.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow\ x = 0, y = 1.\ \begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow\ x = -1, y = 0.$$

Точки $M_1(0,1,0)$, $M_2(-1,0,1)$ лежать на прямій. Згідно (4.14), рівняння лінії перетину двох площ має вигляд: $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$

Приклад 4. Знайти координати точки перетину прямої $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{5}$ і площини $x+2y-3z-2=0$.

Розв'язання. Згідно (4.13) $x=2+3t$, $y=-1+4t$, $z=5t$.

Підставимо координати точки в рівняння площини: $2+3t+2(-1+4t)-15t-2=0$, звідки отримаємо $t=-0{,}5$. Тоді координати точки перетину прямої і площини $x=2+3(-0{,}5)=0{,}5$; $y=-1+4(-0{,}5)=-3$; $z=5(-0{,}5)=-2{,}5$.

Взаємне розташування прямих

Можливі три випадки взаємного розташування двох прямих: прямі паралельні; прямі перпендикулярні; прямі пересікаються під довільним кутом.

Нехай задані координати спрямованих векторів прямих $\vec{p}_1(l_1;m_1;n_1)$ і $\vec{p}_2(l_2;m_2;n_3)$.

Випадок 1. Прямі паралельні, $\vec{p_1}//\vec{p_2}$. Тоді, умова паралельності площ має вигляд

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}. \tag{4.16}$$

Випадок 2. Прямі перпендикулярні, $\vec{p_1}\perp\vec{p_2}$. Тоді, умова перпендикулярності площ, згідно (2.8), має вигляд

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0. \tag{4.17}$$

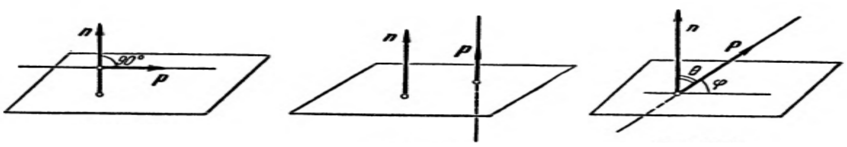
Випадок 3. Кутом між двома прямими нами будемо називати один з двох суміжних двогранних кутів, утворених цими прямими. Позначимо вибраний кут через φ. Використовуючи формулу скалярного добутки векторів, можна обчислити кут між векторами аналогічно (2.9) у вигляді

$$\cos\varphi=\pm\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+n_2^2+m_2^2}}. \tag{4.18}$$

4.3 Кути між прямою і площею. Відстань від точки до площини

Можливі три випадки взаємного розташування прямою і площиною: пряма паралельна площині (рис. 4.5,а); пряма перпендикулярна площині (рис. 4.5,б); пряма і площина пересікаються під довільним кутом (рис. 4.5,в).

Нехай задані координати векторів прямої $\vec{p}(l;m;n)$ і площини $\vec{n}(A;B;C)$:



а) б) в)

Рисунок 4.5

Випадок 1. Пряма паралельна площині (рис. 4.5,а), $\vec{p}\perp\vec{n}$. Тоді, умова паралельності, згідно (2.8), має вигляд:

$$Al + Bm + Cn = 0. \qquad (4.19)$$

Випадок 2. Пряма перпендикулярна площині (рис. 4.5,б), $\overrightarrow{p} // \vec{n}$. Тоді, умова перпендикулярності, має вигляд:

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}. \qquad (4.20)$$

Випадок 3. Кутом між прямою та площиною будемо називати будь-який з двох суміжних кутів, утворених прямою і її проекцією на площину (рис. 4.5,в). Позначимо вибраний кут через φ. Використовуючи формулу скалярного добутки векторів, можна обчислити кут між векторами аналогічно (2.9) у вигляді:

$$\cos\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi = \pm \frac{lA + mB + nC}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (4.21)$$

Відстань від точки до площини.

Нехай маємо рівняння прямої лінії у параметричної формі (4.13) і рівняння площини у форми (4.3). Припустимо, що пряма перпендикулярна до площини. Виберемо на прямій точку M(x_M; y_M; z_M) і знайдемо відстань від цієї точки до площини. Для цього спочатку визначимо точку перетину N прямої і площини, врахувавши (4.20):

$$l = \lambda A, m = \lambda B, n = \lambda C \Rightarrow \frac{x - x_M}{A} = \frac{y - y_M}{B} = \frac{z - z_M}{C} = t,$$
$$x = x_M + At;\ y = y_M + Bt;\ z = z_M + Ct,$$
$$A(x_M + At) + B(y_M + Bt) + C(z_M + Ct) + D = 0 \ \Rightarrow$$
$$t = -\frac{Ax_M + By_M + Cz_M}{A^2 + B^2 + C^2},\ x_N - x_M = -A\frac{Ax_M + By_M + Cz_M}{A^2 + B^2 + C^2} \text{ и т.д}$$

Тоді, відстань від точки до площини MN дорівнює:

$$MN = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2} \Rightarrow |t|\sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

звідки випливає:

$$MN = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (4.22)$$

Приклад 5. Знайти відстань від точки M(2,1,1) до площини $x + y - z + 1 = 0$.

Розв'язання. A=1, B=1, C=-1. Тоді з (4.22): $MN = \frac{|2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{3} \approx 1,73.$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

ТЕМА 5 ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ПОХІДНА. ДИФЕРЕНЦІАЛ

5.1 Поняття функції . Теорія границь

Сталою величиною вважають величину, яка не змінює своє значення. Зазвичай такі величини позначають латинськими буквами $a, b, c, \ldots$. Змінною величиною називають величину, яка приймає різні числові значення (позначають їх: $x, y, z, u, v, w, \ldots$).

Змінну величину y називають функцією змінної величини x, якщо кожному значенню x , яке вона приймає, відповідає єдине значення y. При цьому величну x називають незалежною змінною або аргументом; y - залежною. Функцію позначають $y = f(x)$. Значення, яке приймає функція якщо $x = a$, позначають $f(a)$.

Сукупність усіх значень аргументу, при яких функція має визначені дійсні значення, називають областю існування функції або областю визначення функції (ОВФ).

Приклад 1. Знайти область визначення заданих функцій: а) $y = \frac{x+3}{x^2+3x-4}$; б) $y = \sqrt{x^2-16}$.

Розв'язання. а) $y = \frac{x+3}{x^2+3x-4}$, ОВФ: $x^2+3x-4 \neq 0, (x-1)(x+4) \neq 0$,

$$x-1 \neq 0, x_1 \neq 1, x+4 \neq 0, x_2 \neq 4.$$

Відповідь : $x \in (-\infty;1) \cup (1;4) \cup (4;\infty)$;

б) $y = \sqrt{x^2-16}$, ОВФ: $x^2-16 \geq 0, (x-4)(x+4) \geq 0.$

Відповідь: $x \in (-\infty;-4] \cup [4;\infty)$.

Графіком функції $y = f(x)$ називають геометричне місце точок $M(x,y)$, координати яких задовольняють даній функціональній залежності. Функція може бути подана табличним, графічним, аналітичним або іншим способом.

Явною функцією називають функцію, яка задана формулою $y = f(x)$. Неявною функцією називають функцію задану рівнянням: $F(x,y) = 0$.

Функція, що визначена в області $-a < x < a$, називається парною, якщо для всіх x з області визначення виконується рівність, що $f(x) = f(-x)$. Графік такої функції буде симетричним відносно осі y.

Функція називається непарною, якщо для всіх x з області визначення виконується рівність, що $f(x) = -f(-x)$. Графік такої функції буде симетричним відносно початку координат.

Приклад 2. Встановити, чи є непарною (парною) функція $y = x + \frac{x^5}{5} + 3x^3$.

Розв'язання. Переконаємось, що виконується одна з рівностей: $f(x) = f(-x)$ або $f(x) = -f(-x)$. Замінимо x на $-x$ у виразі для функції y:

$$y(-x) = -x + \frac{(-x)^5}{5} + 3(-x)^3 = -x - \frac{x^5}{5} - 3x^3 = -(x + \frac{x^5}{5} + 3x^3) = -y(-x).$$

Як бачимо, виконується рівність $f(x) = -f(-x)$, що свідчить про те, що задана функція є непарною.

Функція називається періодичною з періодом T, якщо для будь-якого x з області визначення виконується рівність, що $f(x) = f(x+T)$.

Поняття границі змінної величини. Границя функції.

Нехай змінна величина x поступово приймає значення $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.

Таку пронумеровану множину чисел називають послідовністю й позначають $\{x_n\}$. Послідовність вважають заданою, якщо відома формула для n-го члена цієї послідовності. Розташуємо елементи послідовності $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, де n - натуральне число, на числовій осі, позначивши кожен елемент точкою. Зі зростанням порядкового номеру елементу (тобто $n \to \infty$) елементи (члени) цієї послідовності концентруються біля точки 0, тобто їх абсолютне значення наближається до нуля. Представимо визначення границі послідовності.

Число A називають *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для будь-якого наскільки завгодно малого додатного числа δ, знайдеться такий номер N (який залежить від δ, що для всіх членів послідовності починаючи з номеру $n > N$ є вірною рівність $|x_n - a| < \delta$.

З геометричної точки зору: нерівність $|x_n - a| < \delta$ рівносильна подвійній нерівності $a - \delta < x_n < a + \delta$ й означає, що члени послідовності $\{x_n\}$ розташовані поблизу точки a, точніше в δ - околі цієї точки. Зовні цього δ- околу може знаходитися лише кінцеве число членів даної послідовності. Якщо послідовність має границю, то кажуть, що вона збігається, у протилежному випадку – розбігається.

Визначення. Число b називають границею функції $y = f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого наперед узятого малого додатного числа ε>0 можна підібрати таке ж мале число δ, що для всіх *x*, які задовольняють нерівності $|x - a| < \delta$ буде справедливою нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Границю функції позначають:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \text{ або } \lim_{x \to a} y = b. \tag{5.1}$$

Зауваження 1. Означення границі не вимагає існування функції в самій точці a, оскільки розглядається значення $x \neq a$ у деякому околі точки *а*. Отже, розглядаючи $\lim_{x \to a} f(x)$, ми припускаємо, що x прямує до *а*, але може й не досягти значення a. Саме тому наявність або відсутність границі коли $x \to a$ визначається поведінкою функції в околі точки a, але не пов'язана із значенням функції (або його відсутністю) в цій точці.

Зауваження 2. Якщо при $x \to a$ змінна x приймає лише значення менші за a, або навпаки, лише значення більше за *а*, й при цьому функція $y = f(x)$ прямує до деякого числа b, то кажуть про односторонні границі функції

$y = f(x)$, відповідно границя ліворуч $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$ та границя праворуч $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$. Визначення цих границь дивись у додатку Б.

У випадку, коли змінна x прямує до нескінченності означення границі функції подається аналогічно. Завдяки цьому можемо надати розгорнуте визначення нескінченно малої величини.

Функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою величиною*, коли $x \to a$, якщо для будь-якого скільки завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ можна вказати такий момент зміни цієї величини, починаючи з якого $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Теорема. Якщо функція *y=f(x)* представлена у вигляді суми постійного числа і нескінченно малої $\alpha(x)$

$$y = b + \alpha(x), \tag{5.2}$$

то $\lim\limits_{x \to a} y = b$

Якщо $\lim\limits_{x \to a} y = b$, то функцію можна представити у вигляді $y = b + \alpha(x)$.

Доведення. З рівності (5.2) слід $| y - b|<| \alpha(x)|$. За визначенням нескінченно малої? для будь-якого скільки завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ можна вказати такий момент зміни цієї величини, починаючи з якого. Таким чином, $|y - b| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} y = b$. Якщо $\lim\limits_{x \to a} y = b \Rightarrow |y - b| = |\alpha(x)| < \varepsilon$. Таким чином, $\alpha(x)$ - нескінченно мала.

Властивості нескінченно малих (без доведення):

1) алгебраїчна сума кінцевого числа нескінченно малих є величина нескінченно мала;

2) добуток нескінченно малої величини на обмежену функцію (в тому числі й постійну та другу нескінченно малу) є величина нескінченно мала;

3) частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, границя якої відрізняється від нуля, є величиною нескінченно малою (ця властивість не розглядає випадок границі частки двох нескінченно малих величин у зв’язку її невизначеності).

Функція $\beta(x)$ називається нескінченно великою величиною, якщо для будь-якого завгодно великого додатного числа N можна вказати такий момент зміни цієї величини, починаючи з якого $|\beta(x)| > N$. Величина обернена нескінченно малій величині є величина нескінченно велика й навпаки.

Доведення основних властивостей границь ґрунтується на означенні границі та властивостях нескінченно малих. Ми розглядатимемо їх без доведення.

Теорема 1. Змінна величина в фіксованому процесі змінювання має не більше однієї границі.

Зауваження Змінна величина може не мати границі в даному процесі змінювання. Змінна величина може вести себе по-різному в різних процесах змінювання.

Теорема 2. Змінна величина, що має скінченну границю, є обмеженою у відповідному процесі змінювання.

Теорема 3. Границя сталої величини дорівнює самій цій величині: $\lim\limits_{x \to a} C = C$, $C = const$.

Теорема 4. Границя кінцевої алгебраїчної суми змінних величин дорівнює такій же сумі їх границь, якщо останні існують:

$$\lim_{x \to a}\left(f(x) + \varphi(x) - \psi(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} \varphi(x) - \lim_{x \to a} \psi(x).$$

Теорема 5. Границя добутку двох змінних величин дорівнює добутку їх границь, якщо останні існують:

$$\lim_{x \to a}\left[f(x) \cdot \varphi(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \varphi(x).$$

Наслідок 1. Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити за знак границі:

$$\lim(Cx) = C \cdot \lim x\ , \quad C = const\ .$$

Наслідок 2. Границя ступеня з натуральним показником змінної величини дорівнює відповідному степеню її границі, якщо остання існує:

$$\lim x^n = \left(\lim x \right)^n\ , \quad n \in N\ .$$

Теорема 6. Границя відношення двох змінних величин дорівнює такому ж відношенню їх границь, якщо останні існують, причому границя знаменника відмінна від нуля:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},\quad \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0.$$

Обчислення границі функції. Перша й друга визначені границі. Розкриття деяких видів невизначеностей.

Теорема 7. Якщо між функціями *u*, *v*, *w* виконується нерівність $u\leq v\leq w$, при цьому $\lim\limits_{x\to a}u=b;$ $\lim\limits_{x\to a}w=b,$ то і $\lim\limits_{x\to a}v=b.$

Теорема 8. Якщо при $x\to a$ функція $y=f(x)\geq 0$, $\lim\limits_{x\to a}y=b\geq 0.$

1. Розкриття невизначеності виду $\left|\frac{0}{0}\right|$.

Приклад 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+6x-16}{x^2-4}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+6x-16}{x^2-4}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+8)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+8)}{(x+2)}=2{,}5.$

Приклад 2. Знайти границі $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^3-27}$,

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^3-27}=\left|\frac{0}{0}\right|=$

$$=\left|\begin{array}{c}2x^2-5x-3=2(x-3)(x+1/2)\\ D=1;x_1=3;x_2=-\dfrac{1}{2}\\ x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)\end{array}\right|=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)(x+1/2)}{(x-3)(x^2+3x+9)}==\lim_{x\to 3}\frac{2(x+1/2)}{x^2+3x+9}=\frac{7}{27}.$$

2. Розкриття невизначеності виду $\left|\frac{0}{0}\right|$ для ірраціональних виразів.

Для розкриття невизначеності виду $0/0$ для ірраціональних виразів треба спочатку відповідним чином позбавитись ірраціональності, що дає нуль, потім скоротити дріб, і нарешті перейти до границі. Тобто, слід помножити і чисельник та знаменник на відповідно протилежне й застосувати формули скороченого множення: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ або $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.

Приклад 3. а) Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(2-\sqrt{x-1})}\cdot\frac{(2+\sqrt{x-1})}{(2+\sqrt{x-1})}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(4-x+1)}\cdot\frac{(2+\sqrt{x-1})}{1}=-40.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x+16}-4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x+16}-4}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{x+16}+4}\cdot\frac{\sqrt{x+16}+4}{\sqrt{1+x}+1}=8.$$

б) Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x+16}-4}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x+16}-4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x+16}-4}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{x+16}+4}\cdot\dfrac{\sqrt{x+16}+4}{\sqrt{1+x}+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-1}{x+16-16}\cdot\dfrac{\sqrt{x+16}+4}{\sqrt{1+x}+1}=8.$

3. Розкриття невизначеності виду $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$ Для розкриття невизначеності виду ∞/∞ для многочленів $P(x)/Q(x)$ треба чисельник $P(x)$ і знаменник $Q(x)$ поділити на найвищий степінь x, а потім перейти до границі.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}...+K}{Lx^m+Mx^{m-1}+Px^{m-1}...+R}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(A+\dfrac{B}{x}+\dfrac{C}{x^2}...+\dfrac{K}{x^n}\right)}{x^mL+\dfrac{M}{x}+\dfrac{P}{x^2}...+\dfrac{R}{x^m}}=\lim_{x\to\infty}\frac{Ax^n}{Lx^m}=\begin{cases}\infty & n>m\\ 0 & n<m\\ A/L & n=m\end{cases}\tag{5.3}$$

Зауваження. Це правило є справедливим для всіх випадків нескінченно великих величин ∞, $+\infty$ чи $-\infty$, тобто знак символу ∞ можна не уточнювати

Приклад 4. Знайти границі а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-5x^3+4x-1}{5x^2-2x+6}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6}$.

Розв'язання. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-2x^3+3x-1}{2x^2-7x+5}\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4\left(\dfrac{5x^4}{x^4}-\dfrac{2x^3}{x^4}+\dfrac{3x}{x^4}-\dfrac{1}{x^4}\right)}{x^2\left(\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{7x}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}\right)}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(5-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}\right)}{2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{5}{x^2}}\left|\begin{array}{c}\text{враховуючи}\\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{C}{x^n}\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{2}=\infty;$$

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(5-\dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(8-\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right)}=\dfrac{5}{8}$.

Таким чином, можна зробити висновок, що під час знаходження границі функції, яку представлено у вигляді частки двох многочленів, коли $x\to\infty$, слід звернути увагу на найвищі (старші) степені многочленів, що містяться у чисельнику та знаменнику. Якщо ці степені однакові, то границя функції дорівнюватиме відношенню коефіцієнтів при цих найвищих ступенях, якщо ж неоднакові, та найвищу степінь має многочлен, що розташований у чисельнику, то границя дорівнюватиме нескінченності. У випадку розташування многочлена з найвищим степенем у знаменнику границя дорівнює 0.

4. Обчислення границі тригонометричних функцій.

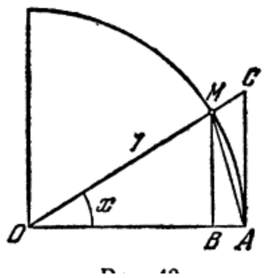


Рисунок 5.1

4.1 Перша визначена границя $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

Розглянемо окружність одиничного радіуса. З (рис. 5.1) випливає, що площі трикутника *OAM*, сектора кола *OMA*, трикутника *OCA* задовольняють нерівності

$$S_{\Delta OMA}<S_{сектора}<S_{\Delta OCA};$$

$$0.5\sin x<0.5x<0.5tgx \;\Rightarrow$$

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\quad\Rightarrow\quad 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1 \;\Rightarrow\; 1<\dfrac{\sin x}{x}<1$. Тоді по теоремі 7

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{5.4}$$

Наслідки: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\arcsin\alpha}{\alpha}=1$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{tg\alpha}{\alpha}=1$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{arctg\alpha}{\alpha}=1$.

За допомогою першої визначеної границі знаходять такі границі, як, наприклад:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 4x}{4x}=4\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}=4;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin x}{x^2}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{4x-x}{2}\cdot\cos\dfrac{x+4x}{2}}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3}{2}x\cdot\cos\frac{5}{2}x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}\sin\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}\cdot\frac{\cos\frac{5}{2}x}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty;$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{tg5x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\arcsin 2x}{2x}\cdot\dfrac{5x}{5x\cdot tg5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$.

4.2 Друга визначена границя

Розглядаючи послідовність $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, шляхом обчислення значень елементів цієї послідовності, можна з’ясувати, що вона зростаюча (оскільки з ростом *n* зростає величина кожного елементу та їх кількість) та обмежена (оцінюючи її елементи та вважаючи її геометричною прогресією, суму якої легко знайти). Тоді, згідно ознаки існування границі, монотонна та обмежена послідовність $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ має границю. Ця границя позначається літерою e.

Число *е* (*число Ейлера*), яке дорівнює $e=2{,}718281828459045...\approx 2{,}72$ відіграє важливу роль у математичному аналізі.

Функція $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ прямує, коли $x\to\infty$, до границі *е*:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{5.5}$$

Доведення можна знайти у [1; 4;7;8] зі списку літератури.

Якщо для функції $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ ввести нову змінну $z=\dfrac{1}{x}$, та виразити $x=\dfrac{1}{y}$, тоді, якщо $x\to\infty$, то $z\to 0$, отримаємо $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ й отримаємо ще один запис для числа *е*:

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e. \tag{5.6}$$

Приклад 5. Знайти границі а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x+4}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)^{4x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg2x)^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x+4}\right)^{x}=\left|1^{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x+4}\right)^{\frac{x\cdot(3x+4)}{3x+4}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x+4}\right)^{3x+4}\right)^{\frac{x}{3x+4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{3x+4}}=e^{\frac{1}{3}};$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+4}\right)^{4x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-3}{x+4}-1\right)^{4x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-3-x-4}{x+4}\right)^{4x+1}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x+4}\right)^{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-7}{x+4}\right)^{\frac{x+4}{-7}}\right)^{\frac{-7(4x+1)}{x+4}}=e^{-28};$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg2x)^{\frac{1}{x}}=\left|1^{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+tg2x)^{\frac{1}{tg2x}}\right)^{\frac{tg2x}{x}}=e^{2}.$

Зауваження. Функція вигляду $y=(f(x))^{\varphi(x)}$ називають степенево-показниковою функцією. Під час находження границі цієї функціє $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\varphi(x)}$ слід брати до уваги, наступне:

1) якщо існують кінцеві границі функцій $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$, то границя $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\varphi(x)}=A^{B}$;

2) якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, то маємо невизначеність вигляду 1^{∞} та застосовуємо другу визначену границю, як вище наведено;

3) якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\neq 1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, то використовуємо формули

$$\lim_{x\to+\infty}A^{x}=\begin{cases}0, & якщо\ 0<A<1\\ +\infty, & якщо\ A>1\end{cases};\quad \lim_{x\to-\infty}A^{x}=\begin{cases}+\infty, & якщо\ 0<A<1\\ 0, & якщо\ A>1\end{cases}.$$

Наприклад, знайдемо таку границю $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^{4x+1}$. По-перше, відшукаємо окремо границі основи та показника ступеня: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\frac{2}{1}=2$ та $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x+1)=-\infty$. Згідно зауваженню 8 п. 3, отримаємо границю заданої функцію: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^{4x+1}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}=0$.

Порівняння нескінченно малих величин

Щоб порівняти дві нескінченно малі величини потрібно знайти границю відношення цих нескінченно малих величин. Якщо ця границя не існує, то такі величини порівняти неможливо.

Визначення. Дві нескінченно малі величини $\alpha(x)$ та $\gamma(x)$ називають нескінченно малими одного порядку, якщо границя їх відношення відрізняється від нуля $\lim\frac{\alpha}{\gamma}=b,(b\neq 0)$.

Визначення. Величина $\alpha(x)$ називається нескінченно малою вищого порядку в порівнянні з $\gamma(x)$, якщо границя відношення цих величин дорівнює нулю $\lim\frac{\alpha}{\gamma}=0$

Визначення. Величина $\alpha(x)$ називається нескінченно малою нижчого порядку в порівнянні з $\gamma(x)$, якщо границя відношення цих величин є величиною нескінченно великою $\lim\frac{\alpha}{\gamma}=\infty$.

Визначення. Дві нескінченно малі величини $\alpha(x)$ і $\gamma(x)$ називають еквівалентними, якщо границя їх відношення дорівнює одиниці $\lim\frac{\alpha}{\gamma}=1$.

Позначають це так:~$\alpha(x)\sim\gamma(x)$

Еквівалентні нескінченно малі величини мають такі властивості, як:

а) різниця двох еквівалентних нескінченно малих величин є величина нескінченно мала вищого порядку в порівняння з кожною із них;

б) під час знаходження границі відношення двох нескінченно малих величин можна кожну з них замінити на іншу нескінченно малу, яка їй еквівалентна, тобто, якщо $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$; $\gamma(x)\sim\gamma_1(x)$ то:

$$\lim\frac{\alpha}{\gamma}=\lim\frac{\alpha_1}{\gamma}=\lim\frac{\alpha}{\gamma_1}=\lim\frac{\alpha_1}{\gamma_1}.$$

Доведемо наступні формули:

1. $$\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1\Rightarrow\ln(1+u)\approx u \qquad (5.7)$$

Доведення. Так як $(1+u)^{\frac{1}{u}} \to e$ то $\lim\limits_{u\to 0}\ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u} = \ln e = 1.$

Приклад 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x} = 5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{5x} = 5.$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-7x+11)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-7x+10)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-5)}{x-2} = -3.$$

2. $\lim\limits_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u} = \ln a$ (5.8)

$$\text{z} = a^u\text{-1},\ \ln(1+\text{z}) \approx \text{z} \Rightarrow\ a^u\text{-1} \approx \ln(1+a^u\text{-1}) = u\ln a$$

Доведення $\lim\limits_{u\to 0}\frac{a^u\text{-1}}{\text{u}} = \lim\limits_{u\to 0}\frac{u\ln a}{u} = \ln a.$

Приклад 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6^x-2^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{6^x-1}{x} - \frac{2^x-1}{x}\right) = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3.$

3. $\lim\limits_{u\to 0}\frac{(u+1)^a-1}{u} = a.$ (5.9)

Доведення $(u+1)^a - 1 \sim \ln((u+1)^a - 1 + 1) = a\ln(u+1)\ \Rightarrow$ (5.9)

Приклад 8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{0.5}-1}{x} = 0,5.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{0.25}-1}{x} = 0,25.$$

Таблиця 1 – Еквівалентні нескінченно малих величин

$\sin x \sim x \quad \sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\arcsin x \sim x \quad \arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
$tgx \sim x \quad \mathrm{tg}\alpha(x) : \alpha(x)$	$arctgx \sim x \quad arctg\alpha(x) \sim \alpha(x)$
$1-\cos x \sim 0,5x^2$	$\ln(x+1) \sim x$
$e^x - 1 \sim x$	$a^x - 1 \sim x\ln a$
$(1+x)^n - 1 \sim nx$	$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim x/n$
$\sqrt{1+x} - 1 \sim x/2$	$\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim x/3$

Приклад 9. $l\,im_{x\to 3}\frac{\sin(x^2-9)}{x^2-4x+3} = l\,im_{x\to 3}\frac{(x^2-9)}{x^2-4x+3} = l\,im_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-1)} = 3.$

5.2 Поняття неперервності функції. Точки розриву функції. Класифікація точок розриву

Нехай ми маємо функцію $y = f(x)$, яку визначено у деякому околі точки x_0 з центром у цій точці, при цьому $y_0 = f(x_0)$. Якщо x_0 отримає деякий зростання Δx будь-якого знаку, тобто матиме значення $x_0 + \Delta x$, то відповідно й функція отримає деяке зростання Δy та її значення буде $y_0 + \Delta y$. Виходячи з цього зростання функції матиме такий вираз: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Функція $y = f(x)$ називається *неперервною у точці* x_0, якщо в цій точці нескінченно малому зростання аргументу Δx відповідає нескінченно малий зростання функції Δy, тобто: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0$.

Геометрично неперервність функції означає, що різниця між ординатою у точці x_0 та точкою $x_0 + \Delta x$ буде достатньо малою абсолютною величиною, тільки якщо Δx достатньо мале. Користуючись поняттям границі, це можна записати так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функцію вважають неперервною на інтервалі, якщо вона неперервна в усіх точках цього інтервалу. Якщо функція визначена у деякій точці x_0 й при цьому $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то кажуть, що функція $y = f(x)$ у x_0 неперервна праворуч. Якщо функція визначена у деякій точці x_1 й при цьому $\lim\limits_{x \to x_1 - 0} f(x) = f(x_1)$, то кажуть, що функція $y = f(x)$ у x_1 неперервна ліворуч.

Неперервна функція має такі *властивості*:

1) сума неперервних функцій є функція неперервна;

2) добуток декількох неперервних функцій є функція неперервна;

3) частка двох неперервних функцій є функція неперервна в усіх точках, у яких дільник відрізняється від нуля;

4) якщо $y = f(z)$ та $z = \varphi(x)$ неперервні функції своїх аргументів, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ також неперервна;

5) якщо функція $y = f(x)$ неперервна та існує обернена $x = \varphi(y)$ то вона

також неперервна.

Якщо не виконується хоча б одна з умов неперервності, тобто, якщо функція $y=f(x)$ невизначена у точці x_0 або не існує границя функції $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ або ж $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$, хоча вирази праворуч та ліворуч існують, то при $x=x_0$ функція $y=f(x)$ є *розривною*.

Точкою розриву першого роду функції $y=f(x)$ називають таку точку x_0, в якій функція має обидві кінцеві односторонні границі (границю ліворуч та праворуч), але вони не дорівнюють одна одній, тобто $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x_0)\neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x_0)$. У випадку коли односторонні границі у точці x_0 однакові, але сама функція $y=f(x)$ невизначена, точку $x=x_0$ називають точкою *усувного розриву* функція. До *точок розриву другого роду* належать точки, в яких хоча б одна з односторонніх границь прямує до нескінченості.

Приклад. З'ясувати наявність точок розриву функцій:

а) $y=\frac{3}{(x-3)^2}$, б) $f(x)=\begin{cases} x^2, x\geq 0 \\ \frac{\sin x}{x}, x<0 \end{cases}$.

Розв'язання. а) Функція $y=\frac{3}{(x-3)^2}$ невизначена у точці $x=3$, границя функції у точці $x=3$: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3}{(x-3)^2}=\infty$, тож в цій точці функція має розрив. Обчислимо односторонні границі поблизу точки $x=3$:

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{3}{(x-3)^2}=+\infty,\ \lim_{x\to 3-0}\frac{3}{(x-3)^2}=-\infty.$$

Оскільки односторонні границі нескінчені, то точка $x=3$ є точкою розриву другого роду.

б) Функція $f(x)=\begin{cases} x^2, x\geq 0 \\ \frac{\sin x}{x}, x<0 \end{cases}$ невизначена у точці $x=0$, то вона має розрив у цій точці, розглянемо односторонні границі: $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} x^2=0$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Односторонні границі існують, але неоднакові, то в точці $x=0$ функція має розрив першого роду.

5.3 Поняття похідної функції. Геометричний зміст похідної. Основні правила диференціювання.

Поняття похідної. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ і $x_0 \in (a;b)$. Надамо аргументу зростання Δx так, щоб нова точка $x_0 + \Delta x \in (a;b)$. Оскільки точка x_0 фіксована, то відповідне зростання функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ є функцією зростання аргументу Δx. Складемо відношення $\Delta y / \Delta x$, яке також буде функцією зростання аргументу Δx.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається швидкість змінювання функції y в цій точці відносно змінювання аргументу x.

Похідна дорівнює границі відношення зростання функції до зростання аргументу, коли останній прямує до нуля

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.. \qquad (5.10)$$

Еквівалентні позначення похідної y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

Значення похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 записується так: $f'(x_0)$, або $y = f'(x)\big|_{x=x_0}$, або $df(x_0)/dx$.

Операція знаходження похідної називається диференціюванням функції. Функція, що має похідну у точці x_0, називається диференційованою у цій точці.

Коли функція $y = f(x)$ диференційована у кожній точці проміжку $(a;b)$, то кажуть, що вона диференційована на проміжку $(a;b)$. Похідна функції $y = f(x)$, диференційованої у проміжку $(a;b)$, сама є функцією x.

Приклад. 1. $y = x$ $\Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x$, тоді, згідно (5.10) $y' = 1$

2. $y = x^2$ $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 \Rightarrow y' = \lim(2x + \Delta x) = 2x.$

3. $y = 1/x$ $\Delta y = \frac{1}{(x + \Delta x)} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}.$

4. $y = x^3$ $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3$,
тоді $y' = 3x^2$

Можна довести універсальну формулу

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

В п.5.1 отримано (5.9): $\lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^a-1}{u} = a,$

тоді $y = x^n \quad \Rightarrow \quad y + \Delta y = (x+\Delta x)^n = x^n(1+\frac{\Delta x}{x})^n$

$$\Delta y = x^n\left(1+\Delta x/x\right)^n - x^n = x^n\left[\left(1+\Delta x/x\right)^n - 1\right] \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{n-1}\frac{\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n-1\right]}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Позначимо $u = \frac{\Delta x}{x} \ \Rightarrow \ \lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^n-1}{u} = n$.

Тоді $y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$.

5. Похідна від $y = \sin x$

$$y' = \lim\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim\frac{2\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x} = \lim\frac{2\sin(\Delta x/2)}{\Delta x}\lim\cos(x+\Delta x/2) = \cos x$$

6. Похідна від $y = lnx$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-lnx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{x\Delta x/x} = \frac{1}{x}\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u} = \frac{1}{x}.$$

Геометричний сенс похідної. Дотична і нормаль. Нехай дано деяку лінію і на ній точку M_0 (рис. 5.3). Дотичною до лінії у точці M_0 називається граничне положення січної M_0M_1 , якщо точка M прямує до точки M_0.

Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, графіком якої є лінія, диференційована у точці x_0. Дамо х зростання Δx. Тоді функція в точці M_0 одержить збільшення Δy. З рисунку 5.2 випливає, що кут нахилу січної M_0M_1 визначається за формулою: $tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Якщо ми почнемо зменшувати Δx, спрямовуючи до нуля, то точка M_1 буде наближатися уздовж кривої до точки M_0, а січна при цьому буде прагнути до свого граничного стану - дотичної в точці M_0.

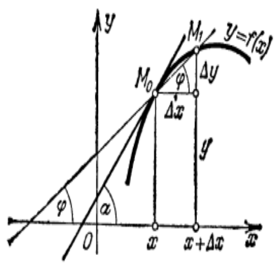


Рисунок 5.2

Кут нахилу дотичній визначається за формулою:

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = y'.$$

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$, яка проходить через точку M з координатами $(x_0; y_0)$, можна записати у вигляді:

$$y-y_0=y'_0\cdot(x-x_0). \qquad (5.11)$$

Пряма, яка проходить через точку дотику M_0 і перпендикулярна до дотичної, називається нормальною прямою (нормаллю). Її рівняння:

$$y-y_0=\left(-1/y'_0\right)\cdot(x-x_0). \qquad (5.12)$$

Правила диференціювання. Нехай маємо деякі функції $u=u(x)$, $v=v(x)$ які диференційовані у проміжку $(a;b)$. Тоді:

1) Якщо $y=cu$, то $y'=(cu)'=cu'$, де $c=const$,

тобто сталий множник можна виносити з-під знаку похідної;

2) Якщо $y=u\pm v$, то $y'=(u\pm v)'=u'\pm v'$,

тобто похідна суми або різниці функцій дорівнює відповідно сумі або різниці їх похідних;

3) Якщо $y=uv$, то $y'=(uv)'=u'v+v'u$, (5.13)

тобто похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і похідної другої функції на першу функцію;

4) Якщо $y=\dfrac{u}{v}$, де $v\neq 0$, то $y'=\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$, (5.14)

тобто похідна частки двох функцій дорівнює дробі, у якій знаменник є квадрат знаменника, а чисельник є різниця між добутками похідної чисельника на знаменник і добутком похідної знаменника на чисельник.

5.4 Похідна складеної функції. Похідні неявної та оберненої функцій. Правило логарифмічного диференціювання. Похідна параметрично заданої функції

<u>Теорема 1 (похідна складеної функції)</u>. Якщо функція $u=u(x)$ має похідну у деякій точці $x\in(a;b)$, а функція $y=f(u)$ має похідну у відповідній точці $u=u(x)$, то й складена функція $y=f(u(x))$ має похідну у точці x, причому $y'_x=(f(u(x))'=y'_u(u)\cdot u'_x(x)$, де індекси y і x біля похідних вказують, за яким аргументом обчислюють похідні.

Тобто похідна складеної функції дорівнює похідній зовнішньої функції за проміжним аргументом, помноженій на похідну внутрішньої функції.

Якщо дана складна функція *y = f (x)*, така що її можна представити у вигляді *y = F (u), u = φ (v), v = ψ (x)*, то (5) набуде вигляду

$$y'_x = y_u{}' u'_v v'_x$$

$$y = \sin^2 x \Rightarrow y' = \sin 2x; \quad y = \sin x^2 \Rightarrow y' = 2x\cos x^2;$$

Приклади. - $y = \sin[(\ln x)^3] \Rightarrow y' = \cos[(\ln x)^3] \cdot 3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}$

Теорема 2 (похідна оберненої функції). Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умові існування оберненої функції і у точці $x \in (a;b)$ має скінчену і відмінну від нуля похідну. Тоді обернена функція $x = f^{-1}(y)$ у відповідній точці $y = f(x)$ також має похідну. Похідні цих взаємно обернених функцій зв'язані рівністю $(f^{-1}(y))'_y = 1/f'_x(x)$.

Приклади. Похідні від обернених тригонометричних функцій:

$$y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y \Rightarrow x' = \cos y \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$y = arctgx \Rightarrow x = tgy \Rightarrow x' = \frac{1}{\cos^2 y} \Rightarrow y' = \cos^2 y \Rightarrow \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Похідна від функції, заданої параметрично. Рівняння кривої

$$x = \varphi(t), \;\; y = \psi(t)$$

називаються параметричними, , де t - параметр.

Для того, щоб отримати функціональну залежність *y = y (x)* треба з рівнянь виключити параметр *t*. Висловимо параметр з першого рівняння *t = F (x)*, тоді $y'_x = y'_t F'_x$.

По теоремі про диференціюванні зворотної функції:

$$F'_x = \frac{1}{\varphi'_t} \;\Rightarrow\; y'_x = \frac{\psi'}{\varphi'} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Приклад. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \Rightarrow y'_x = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{x}{y}.$

Похідна неявної функції. Нехай дві змінні пов'язані між собою за допомогою рівняння F (x, y) = 0. Якщо продиференціювати таке рівняння по x і врахувати, що y - це функція x, то отримаємо нове рівняння, з якого можна буде знайти y'. Такий прийом дозволяє отримати за допомогою оригінального методу логарифмічного диференціювання формули для обчислення похідних показових функцій.

1. $x^n \Rightarrow lny = \ln(x^n) = nlnx$

Продиференціюючи обидві частини рівності, одержимо:

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x} \Rightarrow y' = \frac{yn}{x} = nx^{n-1}.$$

2. $y = a^x \Rightarrow lny = \ln(a^x) = xlna$

Продиференціюючи обидві частини рівності, одержимо:

$\frac{y'}{y} = lna \Rightarrow y' = ylna = a^x lna$ Тогда для $y = e^x$ $y' = e^x$.

3. $y = u^v \Rightarrow lny = v\ln u$.

Продиференціюючи обидві частини рівності, одержимо:

$$\frac{y'}{y} = \frac{v}{u}u' + v'lnu \Rightarrow y' = vu^{v-1}u' + u^v v'lnu.$$

Приклад. $y = x^x$ $lny = xlnx$ $\frac{y'}{y} = lnx + 1$ $y' = x^x(1 + lnx)$.

Таблиця похідних

$$(x^n)' = nx^{n-1} \Rightarrow (x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$$

$$(\lg x)' = \frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0.4343}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

5.5 Диференціал функції

Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, визначена на проміжку $(a;b)$ і неперервна у деякій фіксованій точці x цього проміжку, і нехай зростання аргументу Δx відповідає зростання функції $\Delta y = \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$, який є функцією аргументу Δx.

Якщо для зростання функції Δy існує таке число A, що зростання функції можна записати у вигляді $\Delta y = A \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$, де множник $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x)$ задовольняє рівності $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$, то кажуть, що функція $y = f(x)$ диференційована у точці x. Головна частина $dy = A \cdot \Delta x$ зростання функції Δy, яка прямо пропорційна зростання аргументу Δx, називається *диференціалом функції.*

Теорема 4 *(зв'язок між похідною та диференціалом)*. Щоб функція $y = f(x)$ у точці x була диференційована, необхідно і достатньо, щоб вона мала у цій точці кінцеву похідну $f'(x)$. Якщо виконується ця умова, то:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \tag{5.15}$$

Тут Δx не обов'язково нескінченно мала; але якщо Δx – нескінченно мала, то й dy – нескінченно мала. Саме у цих випадках dy (за умови, що $f'(x) \neq 0$) є головною частиною нескінченно малого зростання функції Δy.

Диференціалом незалежної змінної x називають її зростання Δx, тобто $dx = \Delta x$. З урахуванням цієї рівності, маємо $dy = f'(x) \cdot dx$. Тоді:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}. \tag{5.16}$$

Тобто, похідна дорівнює відношенню диференціалів функції та аргументу. Правила обчислення диференціалів і диференціали основних елементарних функцій аналогічні відповідним формулам для похідних.

Приклад. Знайти диференціал функції: $y = e^{\sin x} \cdot \ln^2 x$.

Розв'язання: $dy = d\left(e^{\sin x} \cdot \ln^2 x\right) = \ln^2 x \cdot d\left(e^{\sin x}\right) + e^{\sin x} \cdot d\left(\ln^2 x\right) =$

$$= \ln^2 x \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx + e^{\sin x} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx.$$

Геометрична інтерпретація диференціалу. Нехай $y = f(x)$ – деяка диференційована функція, $M(x_0, y_0)$ – точка, що належить графіку функції: Проведемо через точку M дотичну до графіка функції. Кутовий коефіцієнт нахилу дотичної (тангенс кута нахилу α) дорівнює значенню похідної $f'(x_0)$. Якщо аргументу функції надати зростання Δx, то зростання функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Зростання функції Δy – довжина відрізка M_1P. При цьому зростання дотичної дорівнюватиме довжині відрізка NP. Обчисливши NP як катет прямокутного трикутника MNP, маємо: $NP = MP \cdot tg\,\alpha = f'(x_0)\Delta x$.

За означенням диференціала $f'(x_0)\Delta x = dy$. Таким чином, якщо $\Delta y = M_1P$ – зростання ординати графіка функції, то *диференціал* $dy = NP$ *є приростом ординати дотичної.*

Теорема 5 *(інваріантність форми диференціалу).* Нехай $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ – деякі диференційовані функції зазначених аргументів такі, що з них можна утворити складену функцію $y = f(\varphi(x))$. Диференціал складеної функції визначається рівністю $dy = y'_u \cdot du$. Тобто, форма диференціалу функції не залежить від того, є аргумент незалежною змінною чи функцією іншого аргументу.

Застосовують диференціал у наближених обчисленнях. Для цього керуються таким твердженням: при достатньо малому Δx можна замінити зростання функції її диференціалом, тобто $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$. Тоді наближене шукане значення функції можна знайти за формулою:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Приклад 7. Обчислити наближено $\sin 31^\circ$.

Розв'язання: Розглядатимемо функцію $y=\sin x$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{6}$, що відповідає 30°; $\Delta x = \frac{\pi}{180} = 1^0$; $x_0 + \Delta x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$, що відповідає 31°. Тоді:

$$\sin 31^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx\approx 0,5 + 0,866 \cdot 0,0175 \approx 0,5152.$$

ТЕМА 6 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

6.1 Основні теореми диференціального числення: Ферма, Ролля, Лагранжа. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей

Теорема Ферма. Нехай надано функцію *y*= *f(x*), неперервну на інтервалі [x_1; x_2] . Нехай функція *y* = *f(x*), приймає своє найбільше (або найменше) значення у деякій точці x_0, що належить інтервалу [x_1;x_2]. Якщо в точці x_0 похідна існує, то вона дорівнює нулю: $f'(x_0)=0$.

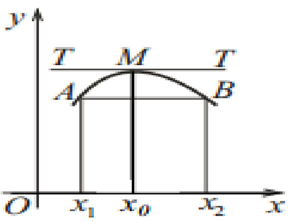


Рисунок 6.1

Геометрична інтерпретація теореми Ферма: якщо в точці x_0 функція приймає своє найбільше (або найменше) значення в деякому околі точки x_0, то дотична до графіку функції в цій точці паралельна осі Ох (см. рис 6.1).

Теорема Ролля. Нехай функція *y*= *f(x*) неперервна в замкненому інтервалі [*a*; *b*], диференційована в усіх його внутрішніх точках і має на кінцях інтервалу рівні значення: $f(x_1) = f(x_2)$. Тоді існує хоча б одна така точка *x*=*c*, для якої справедливо наступне: $f'(c)=0$

Доведення: Так як функція неперервна, то приймає мінімальне значення m і максимальне значення М на відрізку [α, b]. Покладемо М> 0, а функція приймає значення М в точці с. тоді $f(c+\Delta c)-f(c)\le 0$ як при Δx>0, так и при Δx<0. Тоді:

$$\frac{f(c+\Delta c)-f(c)}{\Delta x}\le 0 \quad \Delta x>0$$
$$\frac{f(c+\Delta c)-f(c)}{\Delta x}\ge 0 \quad \Delta x<0$$

За умовою похідна в точці *x*=*c* існує. Переходячи до границь отримуємо:

$$\lim\frac{f(c+\Delta c)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\le 0 \quad \Delta x>0$$
$$\lim\frac{f(c+\Delta c)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\ge 0 \quad \Delta x<0$$

Це можливо лише при $f'(c)=0$

Геометрична інтерпретація теореми Ролля: На лінії $y = f(x)$, де функція задовольняє умовам теореми Ролля, знайдеться точка, дотична у якій паралельна осі Ох (рис. 6.1).

Якщо $f(a) = f(b) = 0$, то *теорема Ролля* набуває вигляду: між будь-якими нулями функції існує хоча б один нуль похідної.

Приклад. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції:

$y = x^3 + 4x^2 - 7x + 10$ в інтервалі [-1; 2].

Розв'язання. Обчислимо значення функції на кінцях інтервалу:

$y(-1) = -1 + 4 + 7 + 10 = 20;$

$y(2) = 8 + 16 - 14 + 10 = 20.$

Отже, задана функція задовольняє умовам теореми Ролля.

Знайдемо похідну функції і дорівняємо її до нуля:

$$y' = 3x^2 + 8x - 7; \Rightarrow 3x^2 + 8x - 7 = 0.$$

Точка $x = c = \dfrac{-4+\sqrt{37}}{3} \approx 0,69$ належить інтервалу [-1, 2], звідси прямує, що теорема Ролля справедлива.

Теорема Лагранжа. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в замкненому інтервалі $[a, b]$, диференційована в усіх його внутрішніх точках. Тоді існує хоча б одна така точка $x=c$, для якої справедливо наступне:

$$f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a). \tag{6.1}$$

Доведення: Розглянемо допоміжну функцію:

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\cdot Q,$$

де $Q = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$F(x)$ дорівнює нулю на кінцях відрізка, $F(a)=F(b)=0$. Тоді по теоремі Ролля $F'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - Q = 0 \Rightarrow Q = f'(c)$, звідки слід $f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a)$.

Отже, теорему доказано.

Теорема Коши. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в замкненому інтервалі $[a, b]$, диференційовані в усіх його внутрішніх точках, причому $\varphi'(x)$ в цих точках не обертається в нульове значення. Тоді існує хоча б одна така точка

x=c, для якої справедливо наступне:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)\cdot}{\varphi'(c)}. \qquad (6.2)$$

Доведення: Розглянемо допоміжну функцію:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\left[\varphi(x)-\varphi(a)\right]\cdot Q,$$

де $Q=\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$.

F(x) дорівнює нулю на кінцях відрізка, *F(a)*=*F(b)*=0. Тоді за теоремою Ролля $F'(c)=0\Rightarrow f'(c)-Q=0\Rightarrow Q=f'(c)$, звідки виходить (6.2). Отже, теорему доказано.

Правило Лопіталя. Раніше ми же розглядали питання обчислення границь функції, зокрема розкриття деяких видів невизначеностей. Тепер ми зможемо для цього скористатися поняттям похідної та ознайомитися з правилом Лопіталя-Бернулі. Це правило є ефективним засобом знаходження границь функції саме у тому випадку, коли аргумент функції необмежено зростає або прямує до значення, яке не належить до області визначення цієї функції.

Теорема Лопіталя. Границя відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих функції дорівнює границі відношення похідних цих функцій, якщо вона існує або дорівнює нескінченості (без доведення).

Тобто, якщо:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left|\frac{0}{0}\right| \ \textit{або}\ \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (6.3)$$

Зауваження. Звертаємо на увагу на те, що в правій частині похідних знаходиться окремо від чисельника та знаменника, тобто відношення похідних функцій, а не похідна частки (відношення).

Приклад 1. Знайти: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{tg3x}$;

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{tg3x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\arcsin 2x\right)'}{\left(tg3x\right)'}==\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos^2 3x}{3\sqrt{1-4x^2}}=\dfrac{2}{3}$;

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x\text{-}arctgx}{\sin x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x\text{-}arctgx}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-1/(1+x^2)}{\cos x}=0.$

Приклад 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{x^2}}{-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{x^2}+2x2xe^{x^2}}{-\cos x}=-2.$

Зауваження 2. Як бачимо з прикладу 1 (в), інколи правило Лопіталя необхідно використовувати декілька разів, але при цьому, слід попередньо спростити дріб та кожен раз перед використання правила перевіряти наявність невизначеності.

Зауваження 3. Інколи застосування правила Лопіталя є недоцільним, як у прикладі 1 (г), тоді, слід пам'ятати, що застосування правило можна поєднувати з елементарними засобами знаходження границь, які були розглянуті раніше.

До попередніх випадків приводяться інші види невизначеностей, які зазвичай позначаються, як то а) $\infty-\infty$; б) $0\cdot\infty$; в) 1^{∞}.

З'ясуємо особливості розкриття зазначених вище невизначеностей:

а) границя різниці двох нескінченно великих величин: функція представлена у вигляді різниці двох функцій, невизначеність $\infty-\infty$, то перш ніж застосовувати правіло Лопіталя потрібно привести дробі до спільного знаменника, наприклад:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=|\infty-\infty|=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0;$$

б) границя добутку нескінченно малої і нескінченно великої величини: функція представлена у вигляді добутку двох функцій, невизначеність $0\cdot\infty$, тож, спочатку треба перетворити добуток на частку, замінивши одну з функцій на обернену, тобто:

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left|\frac{0}{0}\right| або \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'},$$

наприклад:

$$\lim_{x\to\pi}(1+\cos x)ctgx = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{tgx} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)'}{(tgx)'} == \lim_{x\to\pi}\frac{-\cos x\cdot\cos^2 x}{1} = 1.$$

в) випадки знаходження границі степенево-показникової функції, тож перед застосування правила Лопіталя потрібно попередньо прологарифмувати функцію:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = A,\ \ln A = \ln\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = \lim_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x),$$

наприклад:

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^{\ln x} = \left|0^0\right| = A,\ \ln A = \lim_{x\to 1}\ln(x-1)^{\ln x} = \lim_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1) = |0\cdot\infty| =$$

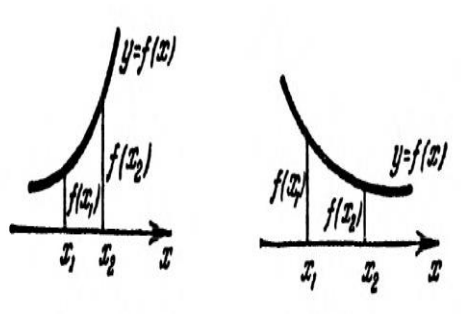
$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'} = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln^2 x}{x-1} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 1}\frac{(x\ln^2 x)'}{(x-1)'} = = \lim_{x\to 1}\frac{\ln^2 x + 2\ln x}{1} = 0.$$

тобто $\ln A = 0$, враховуючи, що $A = e^{\ln A}$, маємо остаточну відповідь: $\lim_{x\to 1}(x-1)^{\ln x} = e^0 = 1$.

6.2 Інтервали монотонності функції. Точки екстремуму. Необхідна і достатні умови екстремуму. Асимптоти функції

Вивчення якісної сторони будь-яких явищ природи приводить до встановлення й вивчення функціональної залежності між певними змінними величинами, які беруть участь у цьому явищі та впливають деяким чином на його протікання. Якщо таку функціональну залежність можна записати аналітично, тобто у вигляду деякої формули, то ми можемо дослідити цю функціональну залежність засобами математичного аналізу. Тож, розглянемо питання дослідження функції, в якому ключову роль відіграє саме поняття похідної функції.

Функція називається *зростаючою* (рис. 6.2,а) в деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 та x_2, що належать цьому інтервалу із нерівності $x_1 < x_2$ є справедливою нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.



а) б)

Рисунок 6.2

Функція називається *спадаючою* (рис. 6.2,б) в деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 та x_2, що належать цьому інтервалу із нерівності $x_1 < x_2$ є справедливою нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Умови зростання та спадання функції (достатні умови монотонності та сталості). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована в усіх його внутрішніх точках. Якщо для всіх $x \in (a;b)$ похідна $f'(x)$:

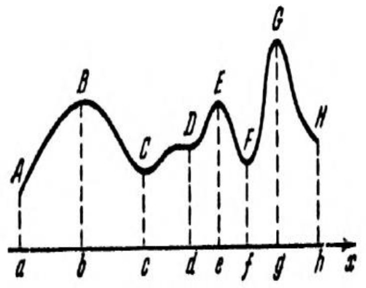
1) додатна $f'(x) > 0$, то функція на цьому відрізку зростає;

2) від'ємна $f'(x) < 0$, то функція на цьому відрізку спадає;

3) дорівнює нулю $f'(x) = 0$, то функція на цьому відрізку стала.

Зауваження. При розв'язанні задач, в яких треба визначити інтервали зростання і спадання функції, потрібно визначити область існування цієї функції.

Точка x_0 називається *точкою мінімуму* (відповідно *точкою максимуму*), якщо для всіх $x \neq x_0$ з деякого околу цієї точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$ (відповідно $f(x_0) > f(x)$). Точки обох типів – мінімуму $x_{\min}$ та максимуму $x_{\max}$ - називають *точками екстремуму*, а значення функції $y = f(x)$ в точках екстремуму – екстремальними значеннями (екстремумами) функції відповідного типу: $y_{\min} = f(x_{\min})$; $y_{\max} = f(x_{\max})$, при цьому точка x_0 це будь-яка точка деякого інтегралу, що йому належить.



Наприклад, у точках B, E, G маємо максимум; у точках C, D, F – мінімуми (рис. 6.3).

Зауваження. Слід взяти до уваги наступне: по-перше, максимум (мінімум) не є обов’язково найбільшим (найменшим) значенням, яке приймає функція.

Рисунок 6.3

За околом точки x_0 функція може приймати більші (менші) значення, ніж у цій точці; по-друге, функція може мати декілька максимумів і мінімумів; по-третє, функція, яка визначена на відрізку, може досягати екстремуму тільки у внутрішніх точках цього відрізку.

Необхідна ознака екстремуму. Функція може мати екстремум лише в тих точках області її визначення, в яких похідна дорівнює нулю, або не існує. Такі точки називають *критичними точками* аргументу екстремуму.

Зауваження. Треба пам’ятати, що ця ознака екстремуму є тільки необхідною, але недостатньою: похідна функції може дорівнювати нулю, нескінченності або не існувати не тільки в тих точках, в яких функція досягає екстремуму. Тому, знайшовши критичні точки, в яких функція може досягти максимуму, треба кожну з них окремо дослідити за допомогою достатніх умов існування екстремуму.

Теорема. Перша достатня умова екстремуму функції. Якщо у точці x_0 похідна функції $y = f(x)$ дорівнює нулю та змінює знак похідної під час переходу через цю точку, то $f(x_0)$ – екстремум функції, при цьому:

1. Якщо знак похідної змінюється з «$+$» на «$-$», то в точці x_0 функція має максимум.

2. Якщо знак похідної змінюється з «$-$»на «$+$» , то в точці x_0 - мінімум.

Приклад 1. Дослідити на монотонність і екстремум функцію $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$.

Розв’язання: Визначимо область допустимих значень: $D(x): x \in (-\infty, +\infty)$;

$E(y): y\in(-\infty,+\infty)$. Тепер знайдемо першу похідну заданої функції:

$$y'(x)=4x^3-24x^2+44x-24,$$

$$y'(x)=4(x^3-6x^2+11x-6).$$

Знайдемо критичні точки функції, для цього прирівняємо знайдену похідну до нуля, та розв'яжемо рівняння:

$$4(x^3-6x^2+11x-6)=0\ ,\ x^3-x^2-5x^2+5x+6x-$$

$$-6=0,\ (x-1)(x-2)(x-3)=0,\ x_1=1, x_2=2, x_3=3.$$

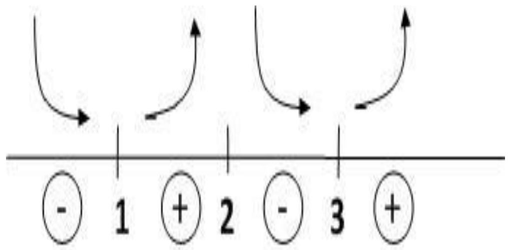


Рисунок 6.4

Знайдені критичні точки нанесемо на координатну пряму та визначимо знак похідної на кожному з отриманих інтервалів (рис. 6.4), знайдемо екстремуми функції:

$$x_{\min}=1\ \Rightarrow\ y_{\min}=y(1)=1^4-8\cdot1^3+22\cdot1-24+12=3,$$

$$x_{\max}=2\Rightarrow y_{\max}=y(2)=2^4-8\cdot2^3+22\cdot4-24\cdot2+12=4,\ x_{\min}=3\Rightarrow$$

$$y_{\min}=y(3)=3^4-8\cdot3^3+22\cdot9-24\cdot3+12=137.$$

Отже, точки мінімуму $(1;3)$ і $(3;137)$; точка максимуму $(2;4)$. Функція зростає при $x\in(1;2)$ і $x\in(3;+\infty)$; функція спадає при $x\in(-\infty;1)$ і $x\in(2;3)$.

Теорема. Друга достатня умова екстремуму функції. Якщо у точці x_0 перша похідна функції $y=f(x)$ дорівнює нулю, а друга похідна відрізняється від нуля, то x_0 буде точкою екстремуму, як то: x_0 – точка максимуму, якщо $f''(x_0)<0$ або x_0 – точка мінімуму, якщо $f''(x_0)>0$.

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x+\frac{9}{4}.$$

Розв'язання. Скористаємось другою достатньою умовою екстремуму. Знайдемо першу похідну та визначимо критичні точки

$$f'(x)=x^3-6x^2+11x-6,\ f'(x)=0,\ x^3-6x^2+11x-6=0.$$

Рівняння розв'яжемо за допомогою теореми Безу, згідно неї встановлено, що перший корінь $x=1$, розділивши «кутом» многочлен $x^3-6x^2+11x-6$ на многочлен $x-1$, отримаємо розкладання на множники

$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)=(x-1)(x-2)(x-3)$, звідси $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$.

Знайдемо другу похідну та обчислимо її значення в знайдених критичних точках

$f''(x)=3x^2-12x+11$, $f''(1)=3-12+11=2>0$, $f''(2)=12-24+11=-1<0$,

$$f''(3)=27-36+11=2>0.$$

Отже, задана функція у точці $x_2=2$ має максимум, а точках $x_1=1$ й $x_3=3$ мінімум. Обчислимо значення екстремумів:

$$y_{\min}=y(1)=\frac{1^4}{4}-2\cdot 1^3+\frac{11}{2}\cdot 1^2-6+\frac{9}{4}=0,$$

$$y_{\min}=y(3)=\frac{1\cdot 3^4}{4}-2\cdot 3^3+\frac{11}{2}\cdot 3^2-6\cdot 3+\frac{9}{4}=0,$$

$$y_{\max}=y(2)=\frac{1\cdot 2^4}{4}-2\cdot 2^3+\frac{11}{2}\cdot 2^2-6\cdot 2+\frac{9}{4}=\frac{1}{4}.$$

Як було зазначено у зауваження, точки екстремуму не є обов'язково найбільшим (найменшим) значення має функція, тож з'ясуємо як визначити найбільше та найменше значеннями неперервної функції $y=f(x)$ на заданому відрізку $[a;b]$. Для цього використаємо наступний алгоритм:

1) знайти всі критичні точки першої похідної $f'(x)$, що лежать усередині відрізка $[a;b]$;

2) обчислити значення функції $y=f(x)$ в знайдених критичних точках і на кінцях відрізку;

3) з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше і найменше.

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x^3-3x+3$ на відрізку [-3; 1,5].

Розв'язання. Спочатку встановимо критичні точки:

$$y'=3x^2-3 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow x_1=-1;\ x_2=1.$$

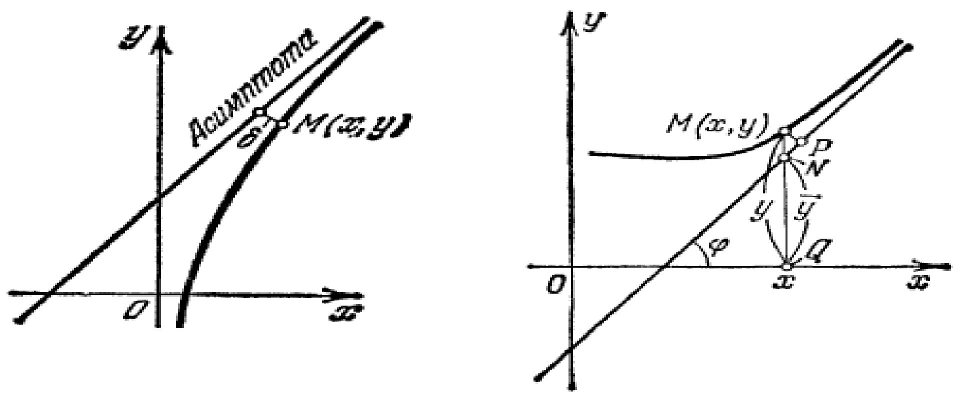
Обчислимо значення функції в критичних точках та на кінцях відрізку

$$y(-1)=5,\ \ y(1)=1,\ \ y(-3)=-15,\ \ y(1.5)=1{,}875.$$

Отже, $y(-3)=-15-$ найменше значення функції, $y(-1)=5-$ найбільше значення функції.

Асимптотою до графіку функції $y=f(x)$ називається пряма до якої необмежено наближається точка кривої при необмеженому віддалені цієї точки від початку координат (рис. 6.4).

Асимптоти бувають *вертикальні* та *похилі*, а також й *горизонтальні*, які є частинним випадком похилих асимптот. Прикладом асимптот є вісі координат, тобто прямі $y=0$ та до $x=0$, до графіка функції оберненої пропорційності $y=\dfrac{k}{x}$.



а) б)

Рисунок 6.4

Вертикальні асимптоти розташовані у точках розриву функції, тобто в точках, в яких функція невизначена. Тож, для того, щоб знайти вертикальні асимптоти, треба з'ясувати область визначення функція, встановити наявні точки розриву та обчислити границю функції в околі цих точок. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою кривої $y=f(x)$.

Рівняння похилих асимптот знаходять у вигляді $y=kx+b$, де k – кутовий коефіцієнт прямої, b– вільний доданок. Визначимо числа k і b. Нехай точка М(x, y) лежить на кривій, а $N(x,\overline{y})$ - на асимптоти. Довжина відрізка МР дорівнює відстані від М до асимптоти (рис. 6.4, б). Тоді $\lim\limits_{x\to\infty} MP=0$. З трикутника NMP $NP = MP / \cos\varphi$ (φ - кут нахилу асимптоти до осі Ox). Звідси випливає $\lim\limits_{x\to\infty} NP = 0$. Тоді

$$\lim_{x\to\infty} NP = \lim_{x\to\infty} \left|QM - QN\right| = \lim_{x\to\infty} \left|y - \bar{y}\right| = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - (kx + b) \right] = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

Так як x, то повинно виконуватися рівність $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0$. Так як $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{b}{x} = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k \right] = 0 \;\Rightarrow\; k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Тоді

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \; \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - kx \right] = b. \tag{6.4}$$

Зауваження. Якщо хоча б одна з двох границь для $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ або $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$ не існує, то відповідної похилої асимптоти крива не має.

Приклад 7. Знайти асимптоти функції $y = \frac{x^2}{x+4}$.

Розв'язання. Дана функція невизначена у точці $x = -4$, маємо

$$\lim_{x\to -4} \frac{x^2}{x+4} = \infty,$$

то пряма $x = -4$ є вертикальною асимптотою кривої

Відшукаємо похилі асимптоти, для цього обчислимо границю коли $x \to \pm\infty$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+4} : x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 + 4x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2\right)'}{\left(x^2 + 4x\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x+4} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - k_1 x \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{x+4} - x \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 - 4x}{x+4} = -4,$$

й отримуємо, що пряма $y = x - 4$ є похилою прямою.

6.3 Умови опуклості та вгнутості графіка функції та наявності перегину. Загальна схема дослідження функції та побудови графіка

Надамо визначення поняття опуклість (вгнутість) функції.

Графік функції $y = f(x)$ називається опуклим вгору (або вгнутим вниз) на деякому проміжку $(a;b)$, якщо відповідна дуга кривої розташована вище дотичної у будь-якій точці $M_0(x_0; f(x_0))$ цієї дуги (рисунок 6.5).

Графік функції $y = f(x)$ називається опуклим вниз (або вгнутим вгору) на деякому проміжку $(b;c)$, якщо відповідна дуга кривої розташована вище дотичної у будь-якій точці $M_0(x_0; f(x_0))$ цієї дуги (рисунок 6.5).

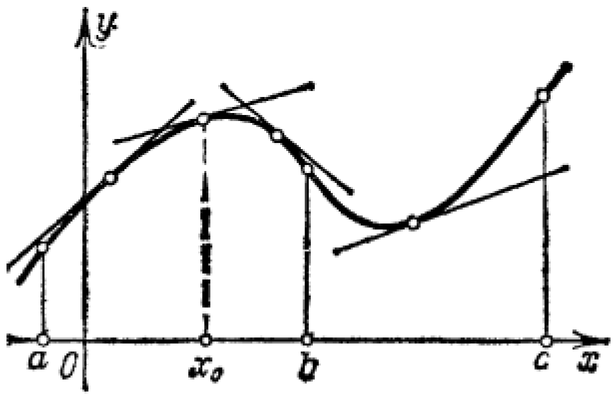


Рисунок 6.5

Теорема. Достатня умова опуклості (угнутості) кривої*:* Якщо друга похідна функції $y = f(x)$ додатна всередині проміжку $(a;b)$, то графік функції опуклий вгору на даному проміжку; якщо друга похідна $f''(x)$ від'ємна всередині проміжку $(a;b)$, то графік функції опуклий вниз на цьому проміжку.

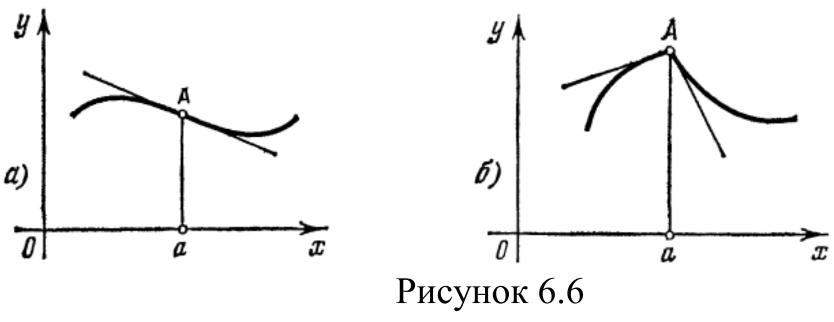


Рисунок 6.6

Точкою перегину неперервної кривої $y = f(x)$ називається точка $M_0(x_0; f(x_0))$ (рис. 6.6) при переході через яку, крива змінює опуклість на угнутість, або навпаки. Для абсциси точки перегину $x = a$ графіка функції $y = f(x)$ друга похідна дорівнює нулю або не існує (це є *необхідною умовою існування точки перегину*). Точки, в яких друга похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними точками другого роду*. Але, слід пам'ятати, що ці точки є лише «підозрілими» точками на наявність в них перегину. Для остаточного вирішення питання про наявність перегину у цій точці, треба скористатися *достатньою умовою точки перегину*. Друга похідна $f''(x)$ при переході через критичну точку, міняє знак.

Приклад. Визначити інтервали опуклості кривої $y = e^{-x^2}$

Розв'язання. Визначимо область визначення функції: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Встановимо критичні точки другого роду, для цього знайдемо похідну першого порядку, потім другого порядку та прирівняємо другу похідну до нуля

$$y' = -2xe^{-x^2};\; y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0 \;\Rightarrow$$

$$2x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}};\; x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\;.$$

Маємо точки перегину $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\; e^{-0,5}\right);\; M_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\; e^{-0,5}\right)$.

З'ясуємо знак другої похідної на кожному з інтервалів.

$\left[-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$: $y'' > 0$ крива вгнута ; $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$: $y'' < 0$ крива опукла; $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right]$: $y'' > 0$ крива вгнута.

Завдяки розглянутим нами елементів дослідження функції можна виконати повне її дослідження та побудувати графік, за допомогою якого можна аналізувати та прогнозувати певні процеси.

Загальна схема дослідження функції

1. Область визначення функції (ОВФ).

2. Точки перетину з осями координат.

3. Парність (непарність) функції. Графік парної функції симетричний відносно осі ординат, а графік непарної функції - відносно початку координат.

4. Періодичність**.** Якщо функція періодична, то y(x + T) = y(x), де T Ф 0 - період функції.

5. Асимптоти функції.

6. Знайдемо критичні точки, похідна в яких дорівнює нулю або не існує. Нанесемо на числову вісь точки, похідна в яких дорівнює нулю або не існує, та точки, в яких функція не існує. Таким чином, розіб'ємо числову вісь на часткові інтервали, в кожному з яких похідна не змінює знак. Ці інтервали є інтервалами монотонності функції.

7. З'ясуємо знак похідної в кожному з часткових інтервалів, для цього достатньо встановити знак у будь-якій точці обраного інтервалу. За знаком похідної визначаємо характер поведінки функції в кожному з інтервалів монотонності: якщо $f'(x)>0$, то функція зростає, якщо $f'(x)<0$ - спадає. Прослідкуємо за зміною знаку похідної при переході зліва направо через границі інтервалів монотонності функції і з'ясуємо, які з критичних точок є мінімумами, а які - максимумами. Може так статися, що деяка точка не є точкою екстремуму функції. Це може статися, якщо в двох суміжних інтервалах, які поділяються вказаною критичною точкою, похідна має однаковий знак. Підставимо у функцію *y=f(x)* значення незалежної змінної, в яких ми встановили існування екстремуму і обчислимо екстремальні значення функції.

8. Дослідження функції на опуклість, угнутість та точки перегину (дослідження за допомогою другої похідної).

9. Графік функції. Графік функції будується за результатами попередніх досліджень. При побудові нас цікавить поведінка функції на інтервалах і у критичних точках. Тому графік, який ми отримуємо носить якісний характер

Приклад. Дослідити функцію і побудувати графік $y=\dfrac{x^2}{x+1}$

1. ОВФ. $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$. *x*=-1 – вертикальна асимптота.

2. $y(0)=0$

3. $y(x) = -y(-x)$ - непарна функція.

4. Функція неперіодична.

5. Асимптота функції $y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2 + x} = 1;$$

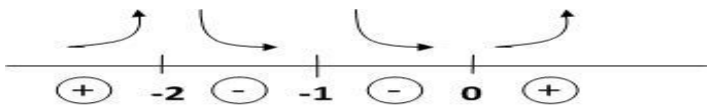
$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x+1} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{-x^2}{x^2+1}\right] = -1.$$

Таким чином, асимптота – пряма $y = x - 1$

6. $y' = \dfrac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2};$

$y' = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -2;\; x_2 = 0,\; y_1 = -4;\; y_2 = 0.$

7. З'ясуємо знак похідної в кожному з часткових інтервалів



Таким чином, при $x_{\max} = x_1 = -2;\; x_{\min} = x_2 = 0.$

8. $y'' = \dfrac{(2x+2)(x+1)^2 - 2\left(x^2 + 2x\right)(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{2}{(x+1)^3}$

З'ясуємо знак другої похідної на кожному з інтервалів.

$\left[-\infty;-1\right)$: $y'' < 0$ крива опукла; $\left(-1;+\infty\right]$: $y'' > 0$ крива вгнута.

9. Графік функції надано на рис. 6.7

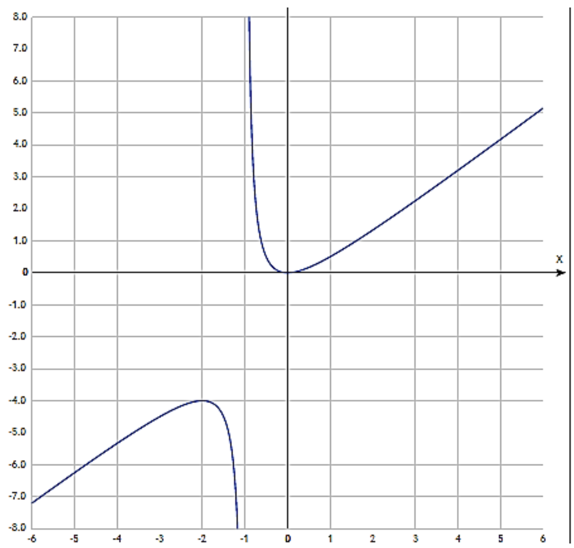


Рисунок 6.7 – Графік функції $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Коваленко Л. Б. Вища математика (модуль 1): навч. посібник / Л. Б. Коваленко, С. О. Станішевський ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 256 с

2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа : для втузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – [11-е изд., стер.] – СПб. : Лань, 2005. – 736 с.

3. Вища математика : Підручник / [В. А. Домбровський та ін.] ; за ред. М. І. Шинкарика. – Тернопіль : Видавництво Карп’юка, 2003 – 480 с.

4. Гусак А. А. Справочное пособие по решению задач: математический анализ / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 1998. – 228 с.

5. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики [Електронний ресурс] / Уклад. : Г. А. Кузнецова, С. Н. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 106 с. – Ч. 1. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/39383, вільний. – (дата звернення : 28.03.2018). – Назва з екрана.

6. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях: навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики [Електронний ресурс] / Уклад. : Г. А. Кузнецова, С. Н. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 142 с. – Частина 2. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/42486, вільний. – (дата звернення : 28.03.2018). – Назва з екрана.

7. Ситникова Ю. В. Вища математика : конспект лекцій з дисципліни (для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання спеціальності 241 – Готельно-ресторанна справа) / Ю. В. Ситникова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 158 с.

8. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : для втузов: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – [13-е изд.] – Москва : Наука, 1985. – Т. 1. – 432 с.

Навчальне видання

МОРДОВЦЕВ Сергій Михайлович

ВИЩА МАТЕМАТИКА
МОДУЛЬ 1

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 1 курсу денної та заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 193 – Геодезія та землеустрій)

Відповідальний за випуск *А. В. Якунін*

За авторською редакцією

Комп’ютерне верстання *С. М. Мордовцев*

План 2017, поз. 112 Л

Підп. до друку 11.04.2018 . Формат 60 х 84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 3,4
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.