МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

В. В. Бізюк

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МОДУЛЬ 3

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів другого курсу денної та заочної форм навчання за спеціальністю 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка; освітня програма «Електромеханіка та електротехнології»)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2018

Бізюк В. В. Вища математика. Модуль 3 : конспект лекцій для студентів другого курсу денної та заочної форм навчання освітнього рівня «бакалавр» за спеціальністю 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка; освітня програма «Електромеханіка та електротехнології» / В. В. Бізюк ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 205 с.

Автор
В. В. Бізюк

Рецензент:
Л. Б. Коваленко, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики (Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова)

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 1від 31.08.2017.

Конспект лекцій складено з метою допомогти студентам електротехнічних спеціальностей під час підготовки до занять, заліків та іспитів із курсу «Вища математика».

ЗМІСТ

ВСТУП

Конспект лекцій за модульною технологією містить розділи, що відповідають третьому семестру курсу вищої математики за діючою програмою для студентів електротехнічних спеціальностей. Головна увага приділяється розкриттю суті понять, їх взаємозв'язків та спрямованістю на застосування до електротехнічних задач. Теоретичні відомості подаються лаконічно й аргументовано з ілюстрацією на типових прикладах, частина з яких розрахована на самостійне опрацювання.

Числові та функціональні ряди викладено в класичному стилі . Теоретичні положення реалізуються на прикладах. Наведено застосування рядів до обчислення інтегралів, розв'язування диференціальних рівнянь.

Функції кількох змінних введено як рівняння, що описують поверхні другого порядку, а також як аналітичний метод дослідження цих поверхонь.

Поняття кратних інтегралів визначаються під час розв'язування практичних задач геометричного чи фізичного змісту, що ілюструє їх застосування.

Викладення ряду понять теорії поля (циркуляція, потік векторного поля) здійснюється одночасно з розкриттям понять криволінійного та поверхневого інтегралів. Відповідно визначаються характеристики скалярних та векторних полів.

Основою даного конспекту є лекції з вищої математики, що читаються на факультеті електропостачання і освітленні міст Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Конспект лекцій максимально наближений для практичного застосування на аудиторних заняттях студентів електротехнічних спеціальностей, проте може використовуватись студентами споріднених спеціальностей за схожою тематикою.

ЛЕКЦІЯ 1 ЧИСЛОВИЙ РЯД, ЧЛЕНИ РЯДУ, ЧАСТИННІ СУМИ. ЗБІЖНІСТЬ І РОЗБІЖНІСТЬ РЯДУ. СУМА РЯДУ. ЗАЛИШОК РЯДУ. НЕОБХІДНА ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ ТА ДОСТАТНЯ ОЗНАКА РОЗБІЖНОСТІ

Нехай $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – нескінченна числова послідовність. Нескінченна сума $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається числовим рядом, а її доданки $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – відповідними членами ряду, причому n-й член u_n також має назву загального члена.

Скінченна сума $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ всіх перших членів ряду до u_n включно називається n-ю частковою сумою ряду ($n = 1, 2, ...$).

Ряд називається збіжним, якщо існує скінченна границя при $n \to \infty$ послідовності $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ його часткових сум:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n .$$

Число S називають сумою ряду і пишуть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. Якщо вказана границя нескінченна чи взагалі не існує, то ряд називається розбіжним.

Ряд $u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+k} + ...$, який утворюється з початкового ряду $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ відкиданням перших n членів називається n-м залишком ряду .

Розглянемо геометричний ряд (геометричну прогресію)

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

з першим членом $a \neq 0$ і знаменником q. Знайдемо границю при $n \to \infty$ послідовності його часткових сум:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{a - aq^n}{1 - q} & при \;\; q \neq 1, \\ na & при \;\; q = 1; \end{cases} \quad n = 1, 2, ...$$

Якщо $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ і

$$\lim_{n\to\infty} S_n = (\frac{a}{1-q}) \lim_{n\to\infty}(1-q^n) = a/(1-q).$$

Ряд збігається і його сума $S = \frac{a}{1-q}$.

Якщо $|q|>1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$ і тоді $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Таким чином, ряд розбігається.

Якщо $q=1$, то ряд має вигляд $a+a+a+...+a+...$ і тоді $\lim_{n\to\infty} S_n = a \lim_{n\to\infty} n = \infty$. Отже, ряд розбігається.

Якщо $q=-1$, то ряд має вигляд $a-a+...+(-1)^{n-1}a+....$ У цьому разі

$$S_n = a(1-(-1)^n)/2 = \begin{cases} 0 & при \quad n=2k, \\ a & при \quad n=2k-1; \end{cases} \quad k=1,2,....$$

Отже, S_n при $n \to \infty$ границі не має – ряд є розбіжним.

Таким чином, ряд геометричної прогресії збігається при $|q|<1$ і розбігається при $|q|\geq 1$.

Для прикладу розглянемо геометричну прогресію

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

Часткові суми $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = \frac{1-1\cdot\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$, їх границя $\lim_{n\to\infty}\frac{1-1\cdot\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2$ і є сумою ряду.

Властивості числових рядів

1. Збіжність або розбіжність ряду не порушиться, якщо змінити, відкинути чи добавити скінченне число членів.

2. Для збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ його n-й залишок $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} = R_n$ служить похибкою наближення $S \approx S_n$ суми ряду S його n-ю частковою сумою S_n. При цьому $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

3. Якщо члени ряду помножити на один і той самий відмінний від нуля сталий множник $C = const \neq 0$, то його збіжність не порушиться. У випадку збіжного ряду його сума буде помножена на C:

$$\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n = C\sum_{n=1}^{\infty} u_n ;$$

4. Два збіжні ряди

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n ,$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

можна почленно додавати і віднімати. Одержані ряди також збігаються і при цьому:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = (u_1 + v_1) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n) = (u_1 - v_1) + \ldots + (u_n - v_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n .$$

5. Сума (різниця) збіжного і розбіжного рядів є розбіжним рядом.

6. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то довільний ряд, отриманий з даного групуванням його членів, що не змінює порядку їх розташування, також збігається і має ту саму суму.

Розглянемо ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots .$$

Знайдемо часткову суму ряду

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} .$$

Границя часткової суми буде сума ряду

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 .$$

Таким чином, ряд є збіжним, та не завжди можна обчислити суму ряду для з’ясування збіжності.

На практиці часто досить знати лише відповідь на принципове питання про збіжність ряду. Для цього використовуються ознаки збіжності, що ґрунтуються на властивостях загального члена ряду.

Теорема (необхідна ознака збіжності). Якщо ряд збігається, то його загальний член u_n прямує до нуля при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Доведення. Розглянемо ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

Запишемо часткові суми

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n ,$$

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} ,$$

тоді $a_n = S_n - S_{n-1}$, а його границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$

Наслідок (достатня ознака розбіжності)

Якщо границя загального члена u_n при $n \to \infty$ відмінна від нуля, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

Приклад. Дослідити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+5}$ на збіжність.

Знайдемо границю n-го члена u_n при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+5} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+5/n} = \frac{1}{3} \neq 0 .$$

За достатньою ознакою розбіжності ряд розбігається.

Розглянемо ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} .$$

Перевіримо необхідну ознаку збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 ,$$

яка виконується.

Перетворимо заданий ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ldots .$$

Як бачимо, частинні суми ряду необмежено зростають, отже, ряд розбігається.

Висновок. Розглянута ознака є тільки необхідною, але не є достатньою. Тобто, з того що загальний член u_n при $n \to \infty$ прямує до нуля, ще не випливає, що ряд збігається. Для дослідження збіжності числового ряду потрібні достатні ознаки збіжності.

ЛЕКЦІЯ 2 ДОСТАТНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ЗНАКОДОДАТНИХ РЯДІВ. ОЗНАКА ПОРІВНЯННЯ. ОЗНАКА ДАЛАМБЕРА. РАДИКАЛЬНА ОЗНАКА КОШІ ІНТЕГРАЛЬНА ОЗНАКА КОШІ. ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ. ОЗНАКА ЛЕЙБНІЦА. АБСОЛЮТНА Й УМОВНА ЗБІЖНІСТЬ

Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів

Числовий ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається знакододатним, якщо всі його члени – невід'ємні числа:

$$u_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Розглянемо найпоширеніші достатні ознаки збіжності таких рядів.

Ознака порівняння

Нехай задані два ряди з додатними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots , \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \qquad . \qquad (2)$$

І нехай кожний член ряду (1) не більше відповідного члена ряду (2):

$$u_n \leq v_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тоді:

1) якщо збігається ряд (2), то збігається ряд (1);

2) якщо розбігається ряд (1), то розбігається ряд (2).

При застосуванні ознак порівняння ряд, що досліджується на збіжність, порівнюється з еталонним рядом, про який відомо збігається він чи розбігається.

За еталонні ряди зазвичай приймають:

а) узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, що збігається, коли $\alpha > 1$, і розбігається при $\alpha \le 1$;

б) геометричну прогресію $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n}$.

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Порівняємо заданий ряд з еталонним рядом

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

який розбігається.

Оскільки

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad n > 1,$$

то заданий ряд розбігається.

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^{2}}+\frac{1}{3\cdot 2^{3}}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^{n}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{n}}.$$

Порівняємо заданий ряд з еталонним рядом

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{2^{3}}+\ldots+\frac{1}{2^{n}}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n}},$$

який збігається.

Оскільки

$$\frac{1}{n2^{n}} < \frac{1}{2^{n}} \quad \text{при} \quad n > 1,$$

то заданий ряд збігається.

На практиці зручно використовувати ознаку порівняння в такому вигляді:

якщо границя відношення u_n до v_n існує і не дорівнює нулю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A>0,$$

То ряди (1) і (2) або обидва збігаються, або обидва розбігаються.

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+4/n).$$

Візьмемо ряд

$$v_n=1/n.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+4/n)}{1/n}=$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+4/n)}{1/n}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\alpha=4/n\to 0\ \textit{при}\ n\to\infty\right|=$$

$$=4\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=4\ (\neq 0,\neq\infty).$$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+4/n)$ розбігається.

Ознака Даламбера

Теорема. Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ існує границя $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ відношення наступного члена до попереднього, то

- при $q<1$ ряд збігається;

- при $q>1$ ряд розбігається;

- при $q=1$ не можна зробити висновок, збігається ряд чи розбігається.

Доведення. Нехай $q<1$. За означенням границі завжди можна підібрати таке число $N,$ що для всіх $n\geq N$ справедлива нерівність

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon=q_1,$$

де $\varepsilon>0$ візьмемо настільки малим, щоб $q_1=q+\varepsilon$ залишалось меншим за 1. Тоді

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}<q_1,\quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<q_1\quad \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}}<q_1,\quad \ldots.$$

Інакше маємо:

$$a_{N+1} < q_1 a_N$$
$$a_{N+2} < q_1 a_{N+1} < q_1^2 a_N$$
$$a_{N+3} < q_1 a_{N+2} < q_1^3 a_N$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

звідки випливає, що члени ряду

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \dots,$$

що становлять залишок заданого ряду, менші за відповідні члени нескінченно спадної геометричної прогресії

$$q_1 a_N + q_1^2 a_N + q_1^3 a_N + \dots, \qquad (q_1 < 1).$$

Отже, залишок ряду збігається, тож і сам заданий ряд збігається.

Нехай тепер $q > 1$, тоді можна підібрати таке число $N,$ що для всіх $n \geq N$ буде справедливою нерівність

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon = q_1,$$

де ε беремо настільки малим, щоб $q_1 = q - \varepsilon$ залишалось більшим за 1.

Але тоді кожний наступний член ряду буде більшим за попередній і, оскільки всі вони додатні і не може виконуватись необхідна ознака збіжності ряду. Отже, ряд розбігається.

У випадку, коли $q = 1$ ознака Даламбера непридатна: ряд може бути як збіжним, так і розбіжним.

Приклад. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ на збіжність.

Тут $a_n = \frac{n}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$. За ознакою Даламбера

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1} n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд збігається.

Приклад. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n^2+2n}$ на збіжність.

$$a_{n+1}=\frac{(n+1-1)!}{(n+1)^2+2(n+1)}=\frac{n!}{n^2+4n+3}=\frac{(n-1)!n}{n^2+4n+3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n(n^2+2n)}{(n^2+4n+3)(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2}{n^2+4n+3}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{3}{n^3}}=\left|\frac{1}{0}\right|=+\infty>1.$$ Ряд розбігається.

Ознака Коші (радикальна)

Теорема. Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

то

- при $q<1$ ряд збігається;
- при $q>1$ ряд розбігається;
- при $q=1$ не можна зробити висновок, збігається ряд чи розбігається.

Доведення. Нехай $q<1$. За означенням границі завжди можна підібрати таке число N, що для всіх $n\geq N$ справедлива нерівність

$$\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon=q_1,$$

де $\varepsilon>0$ візьмемо настільки малим, щоб $q_1=q+\varepsilon$ залишалось меншим за 1. Тоді

$$a_n<q_1^n \qquad \text{для всіх} \quad n>N,$$

інакше кажучи, залишок ряду

$$a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+\ldots$$

можна порівняти з нескінченно спадною геометричною прогресією

$$q_1^N+q_1^{N+1}+q_1^{N+2}+\ldots,$$

яка є збіжним рядом і за ознакою порівняння заданий ряд збігається.

Нехай $q>1$. Тоді $\sqrt[n]{a_n}>1$, або $a_n>1$ і ряд розбігається.

Приклад. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^n \frac{1}{2^n}$ на збіжність.

Обчислимо границю

$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{arctg^n \frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} arctg \frac{1}{2^n} = 0 < 1$. Ряд збігається.

Приклад. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{n^2}{n^3+1}$ на збіжність.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin^n \frac{n^2}{n^3+1}} = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{n^2}{n^3+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^3}} = \sin 0 = 0 < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

Приклад .Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{arctg^{n-4} \frac{n^2}{n+3}}$ на збіжність.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n : arctg^{n-4} \frac{n^2}{n+3}} =$$

$$= 2 : \lim_{n\to\infty} arctg^{(n-4)/n} \frac{n^2}{n+3} = 2 : \lim_{n\to\infty} arctg^{1-4/n} \frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}} =$$

$$= 2 : arctg(+\infty) = 4/\pi > 1. \quad \text{Ряд розбігається.}$$

Інтегральна ознака Коші

Теорема (інтегральна ознака Коші). Якщо члени знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $n = 1,2,...$ утворюють спадну послідовність ($a_{n+1} \leq a_n$, $n = 1,2,...$) і на проміжку $[1;+\infty]$ існує спадна неперервна невід'ємна функція $f(x)$ така, що при натуральних значеннях аргументу співпадає з членами ряду ($f(n) = a_n$, $n = 1,2,...$), тоді вказаний ряд і невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ведуть себе однаково: збігаються чи розбігаються одночасно.

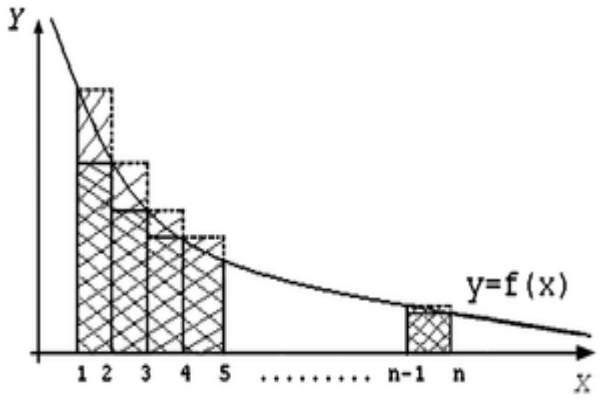


Рисунок 1 – Криволінійна трапеція

Доведення. Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену лінією $y = f(x)$ з основою від $x = 1$ до $x = n$. Її площа вимірюється інтегралом

$$I_n = \int_1^n f(x)dx.$$

Відмітимо цілі точки основи

$$x = 1, x = 2, ..., x = n - 1, x = n.$$

Побудуємо дві ступінчасті фігури: площа однієї

$$f(2) + f(3) + ... + f(n) = S_n - a_1,$$

а другої – $f(1) + f(2) + ... + f(n-1) = S_n - a_n$, де $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Порівнявши площі ступінчастих фігур та трапеції отримаємо нерівність

$$S_n - a_1 < I_n < S_n - a_n.$$

Звідси маємо дві нерівності:

$$S_n < I_n + a_1,$$
$$S_n > I_n + a_n.$$

Оскільки функція $f(x)$ додатна, то інтеграл I_n зростає з ростом n, при цьому можливі два випадки:

1) невластивий інтеграл збігається, тобто $I = \lim_{n\to\infty} I_n$ існує; тоді $I_n < I$ і з нерівності при будь-якому n знаходимо

$$S_n < a_1 + I,$$

отже, часткові суми S_n обмежені і ряд збігається.

2) невластивий інтеграл розбігається, тоді $I_n \to \infty$ при $n \to \infty$ і з нерівності $S_n > I_n + a_n$ робимо висновок, що S_n необмежено зростає і ряд розбігається.

Зауваження 1. Інтегральна ознака справджується, коли послідовність членів ряду задовольняє умовам, починаючи хоча б з деякого номера.

Зауваження 2. На практиці функцію $f(x)$ одержують, замінюючи у виразі загального члена a_n ряду дискретну змінну n на неперервну x.

За допомогою інтегральної ознаки дослідимо на збіжність узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Приймемо, що $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Ця функція задовольняє умови інтегральної ознаки. Розглянемо невластивий інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$.

При $p = 1$ маємо гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Для нього

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{n \to \infty} \ln |x| \Big|_1^n = +\infty.$$ Інтеграл і ряд розбіжні.

Нехай $p \neq 1$, тоді

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Bigg|_1^n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right).$$

Коли $p > 1$, то $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$. Інтеграл і ряд збіжні. Коли $p < 1$, то $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = +\infty$. Інтеграл і ряд розбіжні.

Остаточно отримаємо: узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \leq 1$.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x \ln^3 x}$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[4; +\infty)$, причому $f(n) = a_n$. Дослідимо невластивий інтеграл:

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{n\to+\infty} \int_2^{n} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{n+\infty} \int_2^{n} \frac{d\ln x}{\ln^3 x} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_2^{n} \ln^{-3} x d(\ln x) = \lim_{n\to+\infty} \left.\frac{\ln^{-2} x}{-2}\right|_x^n = -\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \left.\frac{1}{\ln^2 x}\right|_2^n =$$

$$= -(1/2)\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln^2 n} - \frac{1}{\ln^2 2}\right) = \frac{1}{2\ln^2 2} \neq \infty .$$

Отже, цей невластивий інтеграл збігається, а тому даний ряд теж збігається.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$.

Уведемо функцію $f(x) = x \cdot e^{-x}$, що на інтервалі $[1;+\infty)$ задовольняє умовам інтегральної ознаки. Розглянемо відповідний невластивий інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{N\to+\infty} \int_1^{N} x e^{-x} dx = \begin{vmatrix} u = x;\ dv = e^{-x}dx \\ du = dx;\ v = -e^{-x} \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left(-xe^{-x}\Big|_1^N - \int_1^N e^{-x}dx\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(-Ne^{-N} + e^{-1} - e^{-x}\Big|_1^N\right) =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left(-Ne^{-N} + e^{-1} - e^{-N} + e^{-1}\right) = -\lim_{N\to+\infty}\frac{N+1}{e^N} + 2e^{-1} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)'}{(e^x)'} + 2e^{-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} + 2e^{-1} = 0 + 2e^{-1} = 2e^{-1} \neq \infty .$$

Оскільки невластивий інтеграл збігається, то й цей ряд теж збігається.

Знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца. Абсолютна й умовна збіжність

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що містить нескінченну кількість членів обох знаків + і -, називається знакозмінним.

Теорема (достатня ознака збіжності знакозмінного ряду). Якщо для знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений з модулів його членів, то даний ряд також збігається.

Зауваження 1. Наведена ознака є лише достатньою, але не є необхідною.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається абсолютно збіжним, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений з модулів його членів, збігається, та умовно збіжним, коли сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ з модулів його членів розбігається.

Наприклад ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \pm \frac{1}{n} \mp \ldots$$

збігається, а ряд (гармонічний)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

складений із абсолютних значень заданого ряду, розбігається.

Зауваження 2. В абсолютно збіжному ряді, подібно до скінченної суми, члени можна переставляти як завгодно. При цьому він залишається абсолютно збіжним і його сума не змінюється. Навпаки, в умовно збіжному ряді перестановка членів може привести до зміни його суми і навіть до розбіжності.

Знакозмінний ряд, два довільні сусідні члени якого мають різні знаки, називається знакопочерговим або рядом Лейбніца. Його вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots, \text{ де } a_n = |u_n| \geq 0.$$

Теорема (достатня ознака Лейбніца). Якщо для знакопочергового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n \geq 0$ виконуються дві умови: 1) $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$; 2) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, тобто послідовність, складена з модулів членів ряду, є монотонно спадною і прямує до нуля, тоді цей ряд є збіжним, причому його сума S додатна і не перевищує модуля першого члена: $0 < S \leq a_1$.

Доведення. Розглянемо часткову суму з парним числом членів $n = 2m$:

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

Оскільки за умовою члени ряду монотонно спадають, то кожний з виразів в дужках додатний, тож сума $S_{2m} > 0$ і зростає з ростом m.

Запишемо ту ж суму інакше:

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}.$$

В такому запису вирази в дужках як і раніше додатні, з чого виходить, що

$$S_{2m} < a_1 .$$

Отже, часткові суми S_{2m} монотонно зростають і обмежені, тож мають границю

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S ,$$

яка є сумою ряду, причому, $0 < S < a_1$.

Розглянемо тепер часткову суму з непарним числом членів $n = 2m+1$:

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1} .$$

За умовою $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$. Тоді:

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} = S ,$$

тобто ряд збігається при будь-яких n.

Наслідок. Абсолютна похибка Δ_n від заміни суми S збіжного знакопочергового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ будь-якою його частковою сумою S_n не перевищує модуля першого з відкинутих членів. Іншими словами, модуль залишку R_n збіжного знакопочергового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ не перевищує модуля першого з відкинутих членів. Тобто $\Delta_n = | S - S_n | = | R_n | \le a_{n+1}$.

Дійсно, даний залишок $R_n = (-1)^{n+2} a_{n+1} + (-1)^{n+3} a_{n+2} + \ldots$ – це також збіжний ряд Лейбніца. Модуль суми цього ряду не перевищує абсолютної величини його першого члена, тобто $| R_n | \le a_{n+1}$.

Цей наслідок широко використовується при наближених обчисленнях.

Приклад. За допомогою ознаки Лейбніца дослідити на збіжність знакопочерговий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n^3 - 1}$.

Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

$$\lim_{n\to\infty} | u_n | = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n^3 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{4 - 1/n^3} = 0 ;$$

$$| u_n | = \frac{n}{4n^3 - 1} > \frac{n+1}{4(n+1)^3 - 1} = | u_{n+1} | , \; n = 1, 2, \ldots$$

Отже, умови виконуються. Даний ряд збігається.

Приклад. За допомогою ознаки Лейбніца дослідити на збіжність знакопочерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^n}{n^2}$.

Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбніца:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Двічі скористаємося правилом Лопіталя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5^x}{x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{(5^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\ln 5}{2x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \frac{\ln 5}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(5^x)'}{x'} = \frac{\ln 5}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\ln 5}{1} = +\infty.$$

Отже, $\lim_{n\to\infty}|u_n| = +\infty \neq 0$. Оскільки друга умова ознаки Лейбніца не виконується, то даний ряд розбігається.

ЛЕКЦІЯ 3 ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ. ОБЛАСТЬ ЗБІЖНОСТІ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РЯДУ. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. ІНТЕРВАЛ І РАДІУС ЗБІЖНОСТІ СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ. ОБЛАСТЬ ЗБІЖНОСТІ СТЕПЕНЕВОГО РЯДУ. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Функціональним називається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, членами якого є функції $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, визначені на деякій множині D зміни аргументу x.

Якщо аргументу x надати деякого значення x_0 з області визначення D ряду, то дістанемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$, що може збігатися чи розбігатися. Відповідно x_0 називається точкою збіжності чи точкою розбіжності функціонального ряду.

Множина всіх точок збіжності називається областю збіжності функціонального ряду.

В області збіжності ряду його сума S є функцією x: $S = S(x)$. Записують $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ і кажуть, що функція $S(x)$ розвивається (розкладається) в ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Наприклад ряд

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

збігається в інтервалі $-1 < x < 1$, бо при будь-якому значенні x з цього інтервалу ряд являє собою нескінченно спадну геометричну прогресію, сума якого

$$S(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Тобто, можна записати так:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

При $|x| \geq 1$ ряд розбігається.

Для залишку $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ збіжного функціонального ряду виконується умова $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається абсолютно збіжним в деякій області D_a, якщо в довільній точці x_0 цієї області абсолютно збігається відповідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Степеневі ряди

Важливим для прикладних задач окремим випадком функціональних рядів є степеневі ряди.

Степеневим рядом за степенями двочлена $x - x_0$ називається функціональний ряд вигляду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots,$$

де x – дійсна змінна (аргумент); x_0 – дійсне фіксоване число; $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – дійсні сталі (коефіцієнти).

При $x_0 = 0$ одержується більш зручний за формою степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ за степенями x.

Очевидно, що довільний степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ збіжний в точці $x = x_0$ до суми $S = a_0$. Тому область збіжності степеневого ряду завжди містить принаймні одну точку $x = x_0$ – центр розвинення. Детальніші відомості про збіжність дає наступна

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається при деякому $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збігається при всіх значеннях x, для яких $|x| < |x_0|$.

Доведення. Зауважимо, що в силу збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ його загальний член прямує до нуля: $a_n x_0^n \to 0$, тому всі члени ряду обмежені, тобто існує число $M > 0$, що для будь-якого n має місце нерівність $\left| a_n x_0^n \right| < M$.

Запишемо ряд так:

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0} \right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 + \ldots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0} \right)^n + \ldots$$

і складемо ряд з абсолютних величин цього ряду:

$$\left| a_0 \right| + \left| a_1 x_0 \right| \left| \frac{x}{x_0} \right| + \left| a_2 x_0^2 \right| \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \ldots + \left| a_n x_0^n \right| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \ldots.$$

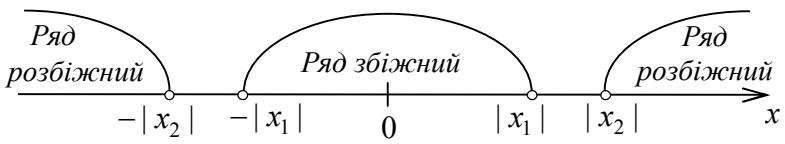
Кожний член цього ряду менше відповідного члена геометричної прогресії зі знаменником $\left| \frac{x}{x_0} \right|$:

$$M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \ldots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \ldots.$$

Якщо $|x| < |x_0|$, то $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ і прогресія збігається, тому збігається ряд абсолютних величин, а, значить, абсолютно збігається сам ряд.

Наслідок. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ розбігається при деякому $x = x_2$, то він розбігається при всіх значеннях x, для яких $|x| > |x_2|$.

Теорема Абеля дозволяє розділити множини точок збіжності та розбіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Якщо x_1 – точка збіжності ряду, то весь інтервал $(-|x_1|;|x_1|)$ заповнено точками абсолютної збіжності цього ряду (рис. 2). Якщо x_2 – точка розбіжності ряду, то півпряма $(-\infty;|x_2|)$ зліва від точки $-|x_2|$ і півпряма $(|x_1|;+\infty)$ справа від точки $|x_2|$ (рис.2) складаються з точок розбіжності цього ряду. Зближуючи $|x_1|$ і $|x_2|$ простим перебором значень x між ними, звужуватимемо зону невизначеності $(-|x_2|;-|x_1|) \cup (|x_1|;|x_2|)$ і дістанемо:



Риунок 2 – Інтервал збіжності

Означення. Радіусом збіжності степеневого ряду. Називається

таке невід'ємне число R, що при $|x| < R$ ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ – розбіжний (рис. 3). Симетричний інтервал $(-R;R)$ називається інтервалом збіжності степеневого ряду.

Риунок 3 – Радіус збіжності

Покажемо спосіб обчислення радіуса збіжності степеневого ряду.

Нехай маємо ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots .$$

Розглянемо ряд, складений з абсолютних величин його членів:

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + \ldots + |a_n||x|^n + \ldots .$$

Для обчислення застосуємо ознаку Даламбера. Припустимо, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = L|x| .$$

Тоді за ознакою Даламбера ряд збігається, якщо $L|x| < 1$. Тобто, якщо $|x| < \frac{1}{L}$. Значить, інтервал $\left(-\frac{1}{L}, \frac{1}{L}\right)$ є інтервал збіжності, але тоді за означенням

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| .$$

Аналогічно визначається радіус збіжності у випадку застосування радикальної ознаки Коші:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} .$$

Зауваження 1. На кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x = \pm R$, питання про збіжність розв'язується окремо для кожного конкретного ряду. Таким чином, область збіжності степеневого ряду може відрізнятись від інтервалу $(-R; R)$ не більше ніж двома точками $x = \pm R$.

Приклад. Знайти інтервал збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Обчислимо $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} n}{(n+1) x^n} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} |x| \left| \frac{n}{n+1} \right| = |x|$.

За ознакою Даламбера ряд збігається, якщо $|x| < 1$ і розбігається, якщо $|x| > 1$. Отже, $R = 1$. Розглянемо збіжність ряду на кінцях інтервалу. При $x = 1$ одержимо ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots ,$$

Який є розбіжним.

При $x=-1$ одержимо ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\pm\frac{1}{n}\mp\ldots,$$

Який збігається умовно. Отже, інтервал збіжності ряду $-1\le x<1$.

Зауваження 2. У деяких рядів інтервал збіжності вироджується в точку ($R=0$), у інших – інтервалом збіжності є вся числова пряма $(-\infty;+\infty)$ ($R=+\infty$).

Приклад. Знайти інтервал збіжності ряду

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\ldots$$

Маємо

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{|x|^{n+1}n!}{(n+1)!|x|^n}=\frac{|x|}{n+1}\to 0$$

При будь-якому значенні $|x|$. Отже, ряд збігається при всіх x, тобто $R=\infty$.

Зауваження 3. Інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ за степенями двочлена $x-x_0$ знаходять з нерівності $|x-x_0|<R$, тобто він має вигляд $(x_0-R;x_0+R)$ і є симетричним відносно центру розвинення x_0.

Приклад. Знайти інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}$.

Для даного ряду скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n=\frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n};\quad u_{n+1}=\frac{(x-1)^{3(n+1)}}{(4(n+1)+5)8^{n+1}}=\frac{(x-1)^{3n+3}}{(4n+9)8^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{3n+3}}{(4n+9)8^{n+1}}:\frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}\right|=\frac{|x-1|^3}{8}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{4n+9}=\frac{|x-1|^3}{8}\lim_{n\to\infty}\frac{4+5/n}{4+9/n}=\frac{|x-1|^3}{8};\quad \frac{|x-1|^3}{8}<1;$$

$$|x-1|^3<8;\quad |x-1|<2;\quad -2<x-1<2;\quad -1<x<3.$$

Таким чином, $(-1;3)$ – інтервал збіжності даного ряду і $R=(3-(-1))/2=2$ – його радіус збіжності.

Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях одержаного інтервалу. При $x=-1$ маємо знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1-1)^{3n}}{(4n+5)8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{4n+5},$$

який є умовно збіжним за ознакою Лейбніца.

При $x = 3$ дістаємо знакододатний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-1)^{3n}}{(4n+5)8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n+5},$$

який розбігається за граничною ознакою порівняння з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$.

Отже, областю збіжності даного ряду є півінтервал $[-1;3)$.

Зауваження 4. Інтервал збіжності степеневого ряду можна знайти безпосередньо за ознакою Даламбера або за радикальною ознакою Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів даного ряду.

Основні властивості степеневих рядів.

1) Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізку $[a;b]$, який цілком міститься в інтервалі збіжності $(-R;R)$.

2) Сума степеневого ряду $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ неперервна на інтервалі збіжності $(-R;R)$.

3) Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку $[a;b]$, який належить інтервалу збіжності $(-R;R)$. Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності.

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

$$[a;b] \subset (-R;R).$$

4) Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно диференціювати в інтервалі збіжності $(-R;R)$. Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R;R).$$

Зауваження. При диференціюванні чи інтегруванні степеневого ряду інтервал збіжності не змінюється, але може змінитися збіжність ряду на кінцях цього інтервалу.

ЛЕКЦІЯ 4 РЯДИ ТЕЙЛОРА І МАКЛОРЕНА. РОЗКЛАДАННЯ ФУНКЦІЙ В СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ДО НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

В області збіжності сумою степеневого ряду є деяка функція. Вважатимемо тепер, що функція задана, і з'ясуємо, за яких умов цю функцію можна подати у вигляді степеневого ряду і як знайти його коефіцієнти.

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі деякої точки x_0 і в цій точці нескінченне число разів диференційовна. Припустимо, що в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ функцію $f(x)$ можна подати у вигляді степеневого ряду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots,$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ -невизначені коефіцієнти. Обчислимо ці коефіцієнти. Надамо змінній значення $x = x_0$, одержимо

$$f(x_0) = a_0.$$

Продиференціюємо степеневий ряд:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots$$

знову покладемо $x = x_0$, дістанемо

$$f'(x_0) = a_1.$$

Продиференціюємо степеневий ряд далі:

$$f''(x) = 2a_2 + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots,$$

звідки поклавши $x = x_0$ знайдемо, що

$$f''(x_0) = 2a_2, \text{ тобто } a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}.$$

Після n-кратного диференціювання одержимо

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \ldots.$$

Відповідно при $x = x_0$ маємо

$$f^{(n)}(x_0) = n!a_n, \text{ тобто } a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Після підстановки знайдених значень в ряд, одержимо ряд

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots,$$

який називається рядом Тейлора.

У цьому разі кажуть, що функція $f(x)$ розвинена (розкладена) в степеневий ряд в околі точки x_0 (за степенями двочлена $x - x_0$).

Можливий запис ряду Тейлора у вигляді:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

де $R_n(x)$ - залишковий член ряду:

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{де } \xi \text{ міститься в інтервалі } x_0 < \xi < x \ .$$

Якщо в ряді Тейлора покласти $x_0 = 0$, то отримаємо ряд Маклорена для даної функції $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Розкладання в ряди елементарних функцій.

1. Показникова функція

$$f(x) = e^x.$$

Знайдемо похідні функції:

$$f'(x) = e^x$$
$$f''(x) = e^x$$
$$f'''(x) = e^x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Обчислимо значення в точці $x = 0$:

$$f'(0)=1$$
$$f''(0)=1$$
$$f'''(0)=1$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

і підставимо в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots .$$

Радіус збіжності ряду

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \infty ,$$

тобто ряд збігається на всі числовій осі $-\infty < x < \infty$.

Якщо замінити x на $-x$, одержимо ряд

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots .$$

За допомогою цих рядів одержимо розкладання в ряди гіперболічних функцій:

$$sh\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \qquad -\infty < x < \infty$$

$$ch\,x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \qquad -\infty < x < \infty .$$

2. Тригонометричні функції $\sin x$ та $\cos x$.

Розглянемо функцію

$$f(x) = \sin x .$$

Знайдемо похідні функції:

$$f'(x) = \cos x$$
$$f''(x) = -\sin x$$
$$f'''(x) = -\cos x$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Обчислимо значення в точці $x = 0$:

$$f(0) = \sin 0 = 0$$
$$f'(0) = \cos 0 = 1$$
$$f''(0) = -\sin 0 = 0$$
$$f'''(0) = -\cos 0 = -1$$
$$f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

і підставимо в ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots .$$

Ряд збігається на всі числовій осі $-\infty < x < \infty$.

Аналогічно одержимо ряд для $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad -\infty < x < \infty .$$

3.Біноміальний ряд.

Розкладемо в ряд Маклорена функцію

$$f(x) = (1+x)^m ,$$

де m - будь-яке дійсне число.

$$\begin{aligned} & f'(x) = m(1+x)^{m-1} \\ & f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} ,$$

звідки :

$$\begin{aligned} & f(0) = 1 \\ & f'(0) = m \\ & f''(0) = m(m-1) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & f^{(n)}(0) = m(m-1)\ldots(m-n+1) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} .$$

Отже, ряд запишеться так:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots .$$

Знайдемо інтервал збіжності ряду. Обчислимо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1} : \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n\right| == |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{m-n}{n+1}\right| = |x| .$$

За ознакою Даламбера ряд збігається, якщо $|x| < 1$ і розбігається, якщо $|x| > 1$. Отже, інтервал збіжності ряду $-1 < x < 1$.

Розглянемо окремі випадки біноміального ряду. Покладемо $m = -1$, тоді

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots .$$

Нехай $m = \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}x^n + \ldots .$$

Інтервал збіжності $-1 \le x \le 1$.

4. Функція $\ln(1+x)$. Для розкладання в ряд Маклорена функції $f(x) = \ln(1+x)$ скористаємось формулою для суми геометричної прогресії

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots .$$

Проінтегруємо цей ряд на відрізку від 0 до x. Оскільки

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^x = \ln(1+x),$$

То, інтегруючи почленно праву частину ряду, одержимо

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad -1 < x < 1 .$$

5. Функція $arctgx$. Аналогічно попередньому випадку візьмемо ту ж саму суму та замінимо x на x^2:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots .$$

Після інтегрування від 0 до x одержимо:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad -1 \le x \le 1 .$$

На кінцях інтервалу ряд збігається. Підставимо $x = 1$ і одержимо вираз для числа π у вигляді числового ряду:

$$arctg1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots .$$

6. Функція $\arcsin x$. Оскільки

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^x = \arcsin x ,$$

То, інтегруючи ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots ,$$

одержимо:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^7 + \ldots \qquad -1 \le x \le 1 .$$

У наступній таблиці подані ряди Маклорена і області їх збіжності для деяких елементарних функцій. Вони використовуються як стандартні розвинення при знаходженні степеневих рядів для інших функцій.

Таблиця 1 – Ряди для елементарних функцій

№ п/п	Функція та її розвинення в ряд Маклорена
1	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in R$
2	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \; x \in R$
3	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \; x \in R$
4	$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots =$ $= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\, x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}, \; x \in [-1;1]$, де $\begin{cases} (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \\ (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) \end{cases}$
5	$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \; x \in [-1;1]$
6	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \; x \in (-1;1]$
7	$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \; x \in (-1;1)$
8	$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots =$ $= 1 + \alpha x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \; x \in (-1;1)$
8а	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \; x \in (-1;1)$
9	$sh\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \; x \in R$
10	$ch\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \; x \in R$

Приклад 1. Розкласти функцію $f(x) = \cos^2 x$ в ряд Маклорена та знайти області збіжності отриманого ряду.

Спосіб 1 – безпосередня побудова. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n = 0,1,2,\ldots$ та їх значення $f^{(n)}(0)$, $n = 0,1,2,\ldots$, що входять у ряд Маклорена $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f(x) = \cos^2 x; \qquad f(0) = 1;$$

$$f'(x) = -2\sin x \cos x = -\sin 2x = \sin(2x + (\pi/2) \cdot 2); \; f'(0) = 0;$$

$$f''(x) = -2\cos 2x = 2\sin(2x + (\pi/2) \cdot 3); \qquad f''(0) = -2;$$

$$f'''(x) = 2^2 \sin 2x = 2^2 \sin(2x + (\pi/2) \cdot 4); \qquad f'''(0) = 0;$$

$$f^{(4)}(x) = 2^3 \cos 2x = 2^3 \sin(2x + (\pi/2)\cdot 5); \qquad f^{(4)}(0) = 2^3;$$

… …

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \sin(2x + \frac{\pi}{2}(n+1)); \; f^{(n)}(0) = 2^{n-1} \sin(\frac{\pi}{2}(n+1));$$

… ….

Підставимо отримані значення похідних у формулу ряду Маклорена і дістанемо

$$\cos^2 x = \underbrace{1}_{u_0} + \underbrace{0}_{u_1} - \underbrace{(2/2!)x^2}_{u_2} + \underbrace{0}_{u_3} + \underbrace{(2^3/4!)x^4}_{u_4} + \ldots +$$

$$+ \underbrace{\frac{2^{n-1}\sin((\pi/2)\cdot(n+1))}{n!}x^n}_{u_n} + \ldots = \left| \begin{array}{l} u_n = \dfrac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m)!}x^{2m}, \; n = 2m; \\ u_n = 0, \; n = 2m+1, \; m = 0,1,2,\ldots \end{array} \right| =$$

$$= 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 + \ldots + \frac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m)!}x^{2m} + \ldots =$$

$$= \left| n = m \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n 2^{2n-1} / (2n)! \right) x^{2n}.$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду, використовуючи ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \right| = 4x^2 \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty} \left(1/((2n+1)(2n+2)) \right) = 0 < 1, \quad x \in R.$$

Отже, інтервал і область збіжності ряду $(-\infty; +\infty)$.

Спосіб 2 – формальні перетворення. Скористаємося відомими тотожностями для перетворення даної функції, основними властивостями збіжних степеневих рядів і стандартними розвиненнями.

Подамо функцію $f(x) = \cos^2 x$ у вигляді:

$$f(x) = \cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2 = 1/2 + (1/2)\cos 2x$$

і використаємо відомий розклад

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty),$$

замінюючи x на $2x$. Дістанемо:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots \right) = 1 -$$

$$- \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 + \ldots + \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}.$$

Як бачимо, обидва способи дають однакове розвинення. Його область збіжності $(-\infty;+\infty)$.

Приклад 2. Розкласти функцію $f(x)=1/(4x-5)$ в ряд Тейлора за степенями двочлена $x-3$ та знайти області збіжності отриманого ряду.

Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,...$ та їх значення $f^{(n)}(3)$, $n=0,1,2,...$, що входять у ряд Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n=f(3)+\frac{f'(3)}{1!}(x-3)+$$
$$+\frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2+...+\frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n+....$$

безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f(x)=1/(4x-5); \qquad f(3)=1/7;$$
$$f'(x)=-1\cdot 4/(4x-5)^2; \quad f'(3)=-1\cdot 4/7^2;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\,4^n/(4x-5)^{n+1}; \quad f^{(n)}(3)=(-1)^n n!\,4^n/7^{n+1};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Підставимо знайдені значення похідних в ряд Тейлора і дістанемо:

$$\frac{1}{4x-5}=\frac{1}{7}-\frac{1\cdot 4/7^2}{1!}(x-3)+\frac{1\cdot 2\cdot 4^2/7^3}{2!}(x-3)^2+...+$$
$$+\frac{(-1)^n n!\cdot 4^n/7^{n+1}}{n!}(x-3)^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n(x-3)^n}{7^{n+1}}.$$

Звернемося до ознаки Даламбера для дослідження отриманого ряду на збіжність:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}4^{n+1}(x-3)^{n+1}}{7^{n+2}}:\frac{(-1)^n 4^n(x-3)^n}{7^{n+1}}\right|=$$
$$=(4/7)\,|x-3|<1; \quad -7/4<x-3<7/4; \quad 5/4<x<19/4.$$

На кінцях інтервалу збіжності $(5/4;19/4)$ маємо ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(5/4)=(1/7)\sum_{n=0}^{\infty}1 \text{ і } \sum_{n=0}^{\infty}u_n(19/4)=(1/7)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n,$$

що розбігаються, оскільки для них не виконується необхідна ознака збіжності.

Отже, $(5/4;19/4)$ – область збіжності одержаного ряду.

Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

У наближених обчисленнях степеневі ряди застосовують, зокрема, для: обчислення значень функцій; обчислення інтегралів; розв'язування диференціальних рівнянь.

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx .$$

Розкладемо підінтегральну функцію в ряд.

З рівності

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

одержимо:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots .$$

Ряд, який збігається при всіх значеннях x. Інтегруємо ряд почленно і одержуємо:

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = a - \frac{a^3}{3!\cdot 3} + \frac{a^5}{5!\cdot 5} - \frac{a^7}{7!\cdot 7} + \ldots .$$

Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів

Метод полягає в представленні розв'язку диференціального рівняння у вигляді ряда. Сума скінченого числа членів цього ряду буде наближено дорівнювати шуканому частковому розв'язку.

Нехай, наприклад, треба знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'' = -yx^2 ,$$

який задовольняє початковим умовам:

$$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0 .$$

Розв'язування. Маємо

$$f(0) = y(0) = 1, \qquad f'(0) = y'(0) = 0 .$$

Із заданого рівняння обчислюємо

$$\left(y''\right)_{x=0} = f''(0) = 0 .$$

Диференціюємо задане рівняння:

$$y''' = -y'x^2 + 2xy ,$$

звідки знаходимо

$$\left(y'''\right)_{x=0} = f'''(0) = 0 .$$

Продовжуємо далі:

$$y^{(4)} = -x^2 y'' - 4xy' - 2y ,$$

відповідно

$$\left(y^{(4)}\right)_{x=0} - 2 .$$

Таким чином можна продовжувати для досягнення заданої точності обчислення, після чого підставляємо одержані значення в ряд

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

і одержуємо розв'язок:

$$y = 1 - \frac{x^4}{4!}1\cdot 2 + \frac{x^8}{8!}(1\cdot 2)(5\cdot 6) - \ldots .$$

Приклад. Обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int_0^{1/2} x^4(e^{x^2} - 1)\,dx$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}0001$.

Формула Ньютона – Лейбниця тут не застосовна, тому що первісна від $f(x) = x^4(e^{x^2} - 1)$ не виражається в елементарних функціях. Розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, використовуючи стандартний розклад для експоненти e^x, де замість x підставимо x^2, потім віднімемо 1 і почленно помножимо на x^4:

$$x^4(e^{x^2} - 1) = x^4\left((1 + x^2/1! + x^4/2! + \ldots + x^{2n}/n! + \ldots) - 1\right) =$$
$$= x^6/1! + x^8/2! + \ldots + x^{2n+4}/n! + \ldots, \quad x \in (-\infty; +\infty) .$$

Оскільки $[0; 1/2] \subseteq (-\infty; +\infty)$, то цей степеневий ряд можна проінтегрувати почленно на інтервалі $[0; 1/2]$. Дістанемо:

$$I=\int_0^{1/2}\left(x^6/1!+x^8/2!+x^{10}/3!+\ldots+x^{2n+4}/n!+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^7}{1!\cdot 7}+\frac{x^9}{2!\cdot 9}+\frac{x^{11}}{3!\cdot 11}+\ldots+\frac{x^{2n+5}}{n!\cdot(2n+5)}+\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2}=\frac{1}{1!\cdot 7\cdot 2^7}+$$

$$+1/(2!\cdot 9\cdot 2^9)+1/(3!\cdot 11\cdot 2^{11})+\ldots+1/\left(n!\cdot(2n+5)\cdot 2^{2n+5}\right)+\ldots.$$

Шуканий інтеграл дорівнює сумі збіжного знакододатного ряду. З'ясуємо, скільки перших членів отриманого ряду треба взяти, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon=0{,}0001$.

Для заданої точності $\varepsilon=0{,}0001$ наближення маємо

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon/2=0{,}0001/2=0{,}00005.$$

Спочатку оцінимо n-й залишок:

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!\cdot(2n+7)\cdot 2^{2n+7}}+\frac{1}{(n+2)!\cdot(2n+9)\cdot 2^{2n+9}}+$$

$$+\frac{1}{(n+3)!\cdot(2n+11)\cdot 2^{2n+11}}+\ldots=\frac{1}{(n+1)!\cdot 2^{2n+7}}\left(\frac{1}{2n+7}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(n+2)(2n+9)}+\frac{1}{2^2(n+2)(n+3)(2n+11)}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{1}{2^{2n+7}(n+1)!\cdot(2n+7)}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)$$

Тут добутки $(n+2)(2n+9)$, $(n+2)(n+3)(2n+11)$, …, що стоять у знаменниках другого, третього, … дробів, замінено на менший вираз $2n+7$, від чого кожний дріб збільшився. У дужках записана нескінченно спадна геометрична прогресія зі знаменником $q=1/2$. Її сума $S=1/(1-1/2)=2$. Тоді

$$R_n<1/\left(2^{2n+7}(n+1)!\cdot(2n+7)\right)\cdot 2<1/\left(2^{2n+6}(n+1)!\cdot(2n+7)\right).$$

Підберемо n так, щоб виконувалася умова

$$R_n<1/\left(2^{2n+6}(n+1)!\cdot(2n+7)\right)\le\varepsilon_1=0{,}00005:$$

$$n=1:\quad R_1<1/\left(2^8\,2!\cdot 9\right)=0{,}000217>\varepsilon_1=0{,}00005;$$

$$n=2:\quad R_2<1/\left(2^{10}\,3!\cdot 11\right)=0{,}000015<\varepsilon_1=0{,}00005.$$

Отже, досить взяти два перших члени ряду.

ЛЕКЦІЯ 5 РОЗКЛАДАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ В ТРИГОНОМЕТРИЧНИЙ РЯД ФУР'Є. РОЗКЛАДАННЯ В РЯД ФУР'Є ПАРНИХ ТА НЕПАРНИХ ФУНКЦІЙ РОЗКЛАДАННЯ В РЯД ФУР'Є ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ НА ПІВІНТЕРВАЛІ. РОЗКЛАДАННЯ ФУНКЦІЙ В РЯД ФУР'Є У РАЗІ ЗМІЩЕННЯ ПРОМІЖКУ. РОЗКЛАДАННЯ В РЯД ФУР'Є ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ З ДОВІЛЬНИМ ПЕРІОДОМ

Функціональний ряд виду

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots,$$

або в згорнутому вигляді

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

зветься тригонометричним рядом. Числа a_0, a_n, b_n $(n = 1,2,\ldots)$ називаються коефіцієнтами тригонометричного ряду.

Якщо ряд збігається, то його сума є періодичною функцією з періодом 2π

$$f(x) = f(x + 2\pi).$$

Нехай $f(x)$ така, що може бути представлена тригонометричним рядом, який збігається до даної функції в інтервалі $(-\pi, \pi)$, тобто є сумою цього ряду:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Оскільки ряд є збіжним, проінтегруємо цю рівність на проміжку $(-\pi, \pi)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx \right).$$

Обчислимо інтеграли в правій частині:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \pi a_0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx = \left. \frac{a_n \sin nx}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx = \left. \frac{b_n(-\cos nx)}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Таким чином

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0 ,$$

або

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx .$$

Для обчислення решти коефіцієнтів нам знадобляться деякі визначені інтеграли, які розглянемо попередньо.

Якщо $n \neq k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = 0 ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx = 0 ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx = 0 .$$

Якщо $n = k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx dx = 0 ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi .$$

Обчислимо для прикладу перший із інтегралів. Згадаємо формулу:

$$\cos nx \cos kx = \frac{1}{2}\left[\cos(n+k)x + \cos(n-k)x\right].$$

Тоді

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x dx = 0 .$$

Таким же чином одержимо решту інтегралів.

Тепер можна обчислити коефіцієнти a_n та b_n.

Для обчислення a_n при будь-якому визначеному k . помножимо обидві частини рівності на $\cos kx$:

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos kx + b_n \sin nx \cos kx .$$

Одержану рівність проінтегруємо на інтервалі $-\pi \le x \le \pi$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\upsilon}^{\pi}\sin nx \cos kx dx .$$

Всі інтеграли в правій частині дорівнюють нулю окрім інтеграла з коефіцієнтом a_k

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx dx = a_k \pi$$

Звідки

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\rho}^{\pi} f(x)\cos kx dx .$$

Аналогічно обчислимо коефіцієнти b_n помноживши обидві частини рівності на $\sin kx$ і проінтегрувавши на інтервалі $-\pi \le x \le \pi$:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\rho}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

Одержані формули звуться коефіцієнтами Фур'є, а тригонометричний ряд – рядом Фур'є для функції $f(x)$ на інтервалі $-\pi \le x \le \pi$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx ,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx .$$

Повернемось до питання – якими властивостями повинна володіти функція, щоб побудований для неї ряд Фур'є збігався і щоб сума побудованого ряду Фур'є дорівнювала значенням заданої функції у відповідних точках.

Відповідь на це питання дає

Теорема. Якщо періодична функція $f(x)$ з періодом 2π кусково-монотонна і обмежена на інтервалі $[-\pi,\pi]$, то ряд Фур'є, побудований для цієї функції, збігається в усіх точках. Сума одержанного ряду $S(x)$ дорівнює значенню функції $f(x)$ в точках неперервності функції. В точках розриву функції $f(x)$ сума ряду дорівнює середньому арифметичному границь функції $f(x)$ справа і зліва:

$$S(x)=\frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}.$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x$ на інтервалі $[-\pi\le x\le\pi]$:

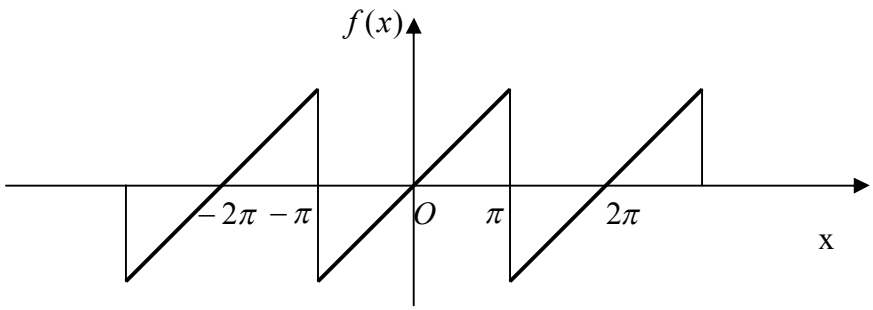


Рисунок 4 – Графік функції $f(x)=x$

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right]=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,sin\,nxdx=\frac{1}{\pi}\left[-x\frac{cos\,nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}cos\,nxdx\right]=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=cos\,nxdx & v=\frac{1}{n}sin\,nx\end{matrix}\right|=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}cos\,\pi n-\frac{\pi}{n}cos\,\pi n-\frac{1}{n^2}sin\,nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]=$$

$$=-\frac{2}{n}cos\,\pi n=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Підставимо одержані значення коефіцієнтів в формулу

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

одержимо ряд:

$$f(x)=2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right].$$

Ряд Фур'є для парних та непарних функцій

Розглянемо визначений інтеграл на симетричному проміжку:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx=\int_{0}^{\pi} f(-x)dx+\int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

Якщо функція парна то $f(-x)=f(x)$ і тоді

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=2\int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

Якщо ж функція непарна то $f(-x)=-f(x)$ і тоді

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0.$$

Якщо в ряд Фур'є

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

розкладається непарна функція, тоді добуток $f(x)\cos nx$ буде також непарною функцією, а добуток $f(x)\sin nx$ буде парною функцією і тоді

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=0, \qquad .$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

Отже, якщо $f(x)$ непарна, її ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx,$$

де

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx .$$

Якщо в ряд Фур'є розкладається парна функція, тоді добуток $f(x)\cos nx$ буде також парною функцією, а добуток $f(x)\sin nx$ буде непарною функцією і тоді

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0.$$

Отже, якщо $f(x)$ парна, її ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx ,$$

де

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = |x|, -\pi \le x \le \pi$.

Оскільки функція $f(x)$ парна , то, користуючись відповідними формулами дістанемо:

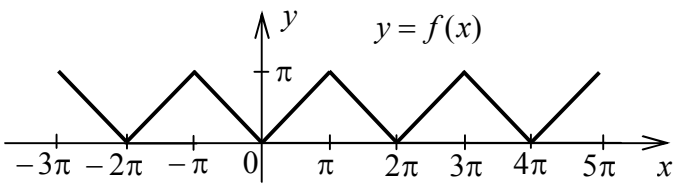


Рисунок 5 – Графік функції $f(x) = |x|$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \pi ; \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin x}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & n=2m,\ m=1,2,...;\\ -\dfrac{4}{\pi(2m-1)^2}, & n=2m-1,\ m=1,2,...;\end{cases};$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}.$$

Розкладання в ряд Фур'є функції $f(x)$, періодичної з періодом $T=2\pi$ і заданої на проміжку $0\le x\le\pi$

Оскільки $f(x)$ є періодичною з періодом $T=2\pi$, то для застосування ряду Фур'є на інтервалі $-\pi\le x\le\pi$ треба продовжити задану функцію на відрізок $-\pi\le x\le 0$.

Взагалі кажучи, продовження функції може бути довільним. При цьому одержаний ряд відображає задану функцію на відрізку $0\le x\le\pi$.

Якщо продовжити функцію парним способом, одержимо ряд по косинусам; якщо ж продовжити функцію непарним способом, одержимо ряд по сінусам.

Таким чином, можна формулювати задачу про розкладання функції, заданої на інтервалі $0\le x\le\pi$ в ряд по косинусам чи по сінусам.

Приклад. Розкласти в ряд по сінусам функцію $f(x)=-1$ на інтервалі $0\le x\le\pi$ (рис. 6) :

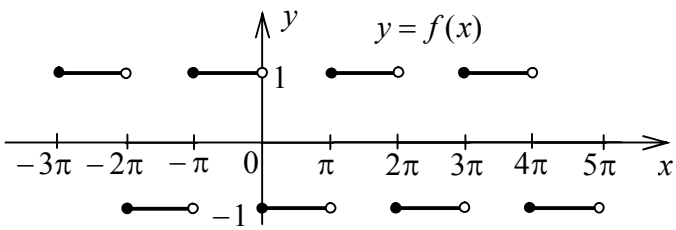


Рисунок 6 – Графік функції $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x<0;\\ -1, & 0\le x<\pi\end{cases}$

Якщо продовжити функцію непарним способом, одержимо функцію $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x<0;\\ -1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$ на інтервалі $-\pi\le x\le\pi$.

Функція $f(x)$ непарна. Її ряд Фур'є

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx .$$

Обчислюємо

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-1)\cdot\sin nxdx=\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi n}((-1)^n-1)=\begin{cases} 0, & n=2m,\ m=1,2,...; \\ -\dfrac{4}{\pi(2m-1)}, & n=2m-1,\ m=1,2,...; \end{cases};$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n}\sin nx=-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}.$$

Ряд Фур'є для функції $f(x)$ на інтервалі $0\le x\le 2\pi$

Теорема. Для функції $f(x)$, неперервної і періодичної з періодом $T=2\pi$. Інтеграл

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)dx .$$

не залежить від a

Доведення.

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)dx=\int_a^{0} f(x)dx+\int_0^{2\pi} f(x)dx+\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)dx .$$

В останньому інтегралі зробимо заміну змінної:

$$\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)dx=\begin{vmatrix} x=z+2\pi \\ z=x-2\pi \end{vmatrix}=\int_0^{a} f(z+2\pi)dz=\int_0^{a} f(z)dz=-\int_a^{0} f(x)dx .$$

Повернемось до попереднього виразу

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)dx=\int_a^{0} f(x)dx+\int_0^{2\pi} f(x)dx-\int_a^{0} f(x)dx=\int_0^{2\pi} f(x(dx ,$$

зокрема, якщо покласти $a=-\pi$, одержимо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{2\pi} f(x)dx .$$

Висновок: Ряд Фур'є для функції $f(x)$ на інтервалі $0 \le x \le 2\pi$

має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx ,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)dx ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nxdx ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nxdx .$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = x$ на інтервалі $0 \le x \le 2\pi$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4\pi^2}{2} = 2\pi ;$$

$$a_n = \int_{0}^{2\pi} x\cos xdx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos nxdx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}x\sin nx\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{2\pi}\sin nxdx\right] = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi n^2}\left(\cos 2\pi n - 1\right) = 0 .$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x\sin nxdx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin nxdx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}x\cos nx\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_{0}^{2\pi}\cos nxdx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_0^{2\pi}\right] = -\frac{2}{n} .$$

Підставимо в формулу

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx ,$$

одержимо

$$x = \pi - 2\sin x - \sin 2x - \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{2}{4}\sin 4x - \frac{2}{5}\sin 5x - \dots .$$

Ряд Фур'є для функції $f(x)$ з періодом $T = 2l$ на інтервалі $-l \le x \le l$

Нехай $f(x)$ є періодичною функцією з періодом $2l$, взагалі кажучи відмінним від 2π. Розкладемо її в ряд Фур'є.

Зробимо заміну змінної за формулою

$$x = \frac{l}{\pi} t .$$

Тоді функція $f\left(\frac{l}{\pi} t\right)$ буде періодичною функцією від t з періодом 2π і її можна розкласти в ряд Фур'є на відрізку $-\pi \le x \le \pi$:

$$f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt ,$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) dt ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \cos nt dt ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \sin nt dt .$$

Повернемось тепер до старої змінної x:

$$x = \frac{l}{\pi} t, \qquad t = x\frac{\pi}{l}, \qquad dt = \frac{\pi}{l} dx .$$

Тоді одержимо ряд у вигляді:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx ,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx ,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx .$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=|x|$ на інтервалі $[-l;l]$.

Оскільки задана функція є парною, до неї можна застосувати ряд Фур'є для парних функцій, тобто розкласти задану функцію по косинусам.

$$a_0=\frac{2}{1}\int_0^1 xdx=2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=1;$$

$$a_n=2\int_0^1 x\cos n\pi x dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos n\pi x dx & v=\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x \end{vmatrix}=$$

$$=2\left[\frac{1}{n\pi}x\sin n\pi x\Big|_o^1+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1\right]=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos\pi n-1)=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases} 0 & n \quad -парне \\ -\frac{4}{n^2\pi^2} & n \quad -непарне \end{cases}.$$

Отже, одержимо ряд

$$|x|=\frac{1}{2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{(2m-1)^2\pi^2}\cos(2m-1)\pi x \qquad (n=2m-1).$$

ЛЕКЦІЯ 6 ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ЦИЛІНДРИЧНІ ПОВЕРХНІ. КОНІЧНІ ПОВЕРХНІ. ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ. ГІПЕРБОЛІЧНИЙ ПАРАБОЛОЇД

Поверхні розглядаються в декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$.

Форма і властивості поверхні встановлюються за допомогою методу паралельних перерізів: побудови і дослідження просторових ліній перетину поверхні координатними площинами (головні перерізи) і площинами, що їм паралельні.

Сфера як поверхня другого порядку

Сферичною поверхнею (сферою) називається множина всіх точок $M(x, y, z)$ простору, кожна з яких віддалена від заданої точки $C(x_0, y_0, z_0)$ (центра сфери) на задану відстань R (радіус сфери) (рис. 14).

Для довільної точки $M(x, y, z)$ сфери виконується рівність $CM = R$. Але $CM = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$. Тому

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R.$$

Підносячи до квадрата, отримуємо

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 .$$

– рівняння сфери зі зміщеним центром. Це рівняння другого степеня. Отже, сфера – одна з поверхонь другого порядку.

Якщо центр сфери співпадає з початком координат $O(0,0,0)$, то маємо канонічне рівняння сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

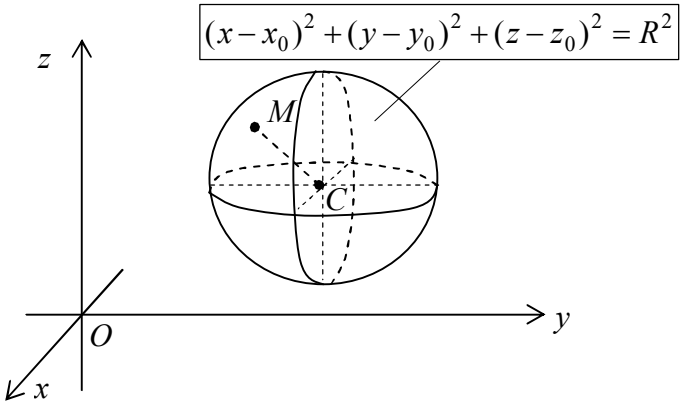


Рисунок 7 – Сфера

Загальне рівняння поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина всіх точок простору, координати яких задовольняють її загальне рівняння

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \ ,$$

де $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ – сталі коефіцієнти, причому хоча б один з коефіцієнтів A, B, C, D, E, F відмінний від нуля, тобто

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \neq 0 \ .$$

Існує дев'ять типів дійсних невироджених поверхонь другого порядку: три циліндра – еліптичний, гіперболічний і параболічний; конус другого порядку; еліпсоїд (зокрема, сфера); однопорожниний гіперболоїд; двопорожнинний гіперболоїд; еліптичний параболоїд; гіперболічний параболоїд.

Тип поверхні визначається зведенням її рівняння до відповідного стандартного вигляду. Завжди можна вибрати таку систему координат, в якій указане стандартне подання набуває канонічної (найпростішої) форми.

Приклад. Показати, що задане рівняння є рівнянням сфери, та знайти її центр і радіус:

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 16x + 24y + 12z + 25 = 0 .$$

Згрупуємо окремо члени з x, y і z, а потім виділимо повні квадрати двочленів відповідного вигляду $x \pm a$, $y \pm b$ і $z \pm c$:

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 16x + 24y + 12z + 25 = 0 ;$$

$$4(x^2 - 4x) + 4(y^2 + 6y) + 4(z^2 + 3z) + 25 = 0 ;$$

$$(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 - 2^2) + (y^2 + 2 \cdot 3y + 3^2 - 3^2) +$$

$$+ \left(z^2 + 2 \cdot (3/2)z + (3/2)^2 - (3/2)^2\right) + 25/4 = 0 ;$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 + (z + 3/2)^2 - 9/4 + 25/4 = 0 ;$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z + 3/2)^2 = 9 .$$

Одержане рівняння описує сферу з центром у точці $C(2, -3, -3/2)$ і радіусом $R = 3$.

Довільна циліндрична поверхня

Циліндричною поверхнею (циліндром) називається поверхня, утворена рухом прямої (твірної) l, яка перетинає задану лінію (напрямну) l_0,

залишаючись паралельною заданій прямій a_0, причому вказані лінії l_0 і a_0 не лежать в одній площині.

Поверхні, твірні яких є прямими лініями, називаються лінійчатими. Оскільки лінійчаті поверхні конструюються з прямолінійних рейок, то такі поверхні широко використовують у будівництві (опори, башти, перекриття, покрівлі і т.п.).

Теорема. У просторі $Oxyz$ кожне рівняння з двома змінними $F(x,y)=0$, що не містить координати z, визначає циліндричну поверхню S, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямною служить лінія

$$l_0: \begin{cases} F(x,y)=0; \\ z=0, \end{cases}$$

що лежить у площині Oxy (рис. 8).

Для довільної точки $M(x,y,z)$ вертикальної циліндричної поверхні S з напрямною

$$l_0: \begin{cases} F(x,y)=0; \\ z=0 \end{cases}$$

її проекція $N(x,y,0)$ на площину Oxy лежить на цій лінії l_0, а значить, задовольняє її рівняння: $F(x,y)=0$; $0=0$.

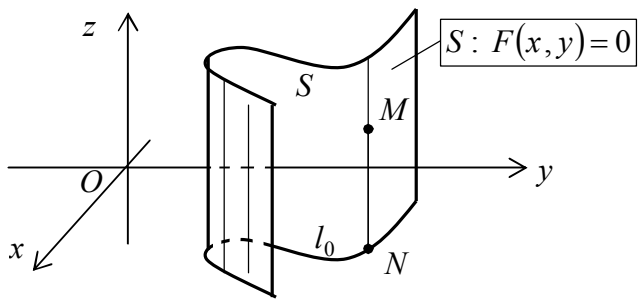


Рисунок 8 – Циліндрична поверхня

Отже, координати точки $M(x,y,z)$ задовольняють рівняння $F(x,y)=0$, оскільки воно не містить змінної z.

Очевидно, що координати точок, які не лежать на поверхні S, це рівняння не задовольняють, оскільки вони проектуються на площину Oxy поза лінією l_0.

Циліндричні поверхні другого порядку

Розглянемо циліндричні поверхні другого порядку:

1) Еліптичний циліндр (рис. 8) має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Зокрема, якщо $a=b=R$, то рівняння

$$x^2+y^2=R^2$$

визначає круговий циліндр.

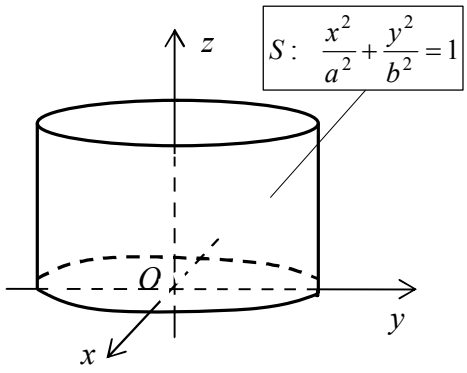


Рисунок 9 – Еліптичний циліндр

Координатні площини служать площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії еліптичного циліндра. Вісь Oz називається прямою центрів еліптичного циліндра, оскільки кожна точка цієї осі є його центром симетрії.

2) Гіперболічний циліндр (рис. 10) має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ .$$

Координатні площини служать площинами симетрії, а координатні осі –

осями симетрії гіперболічного циліндра. Вісь Oz називається прямою центрів гіперболічного циліндра, оскільки кожна точка цієї осі є його центром симетрії.

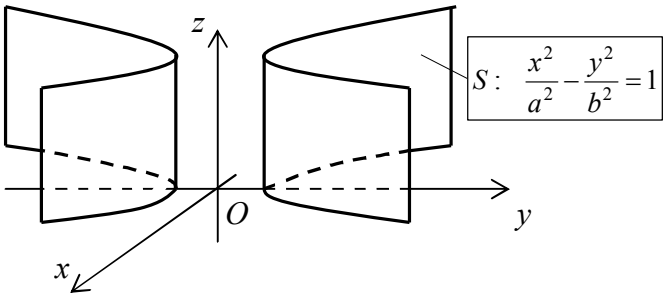


Рисунок 10 – Гіперболічний циліндр

3) Параболічний циліндр (рис. 11) має канонічне рівняння

$$y^2 = 2px \ .$$

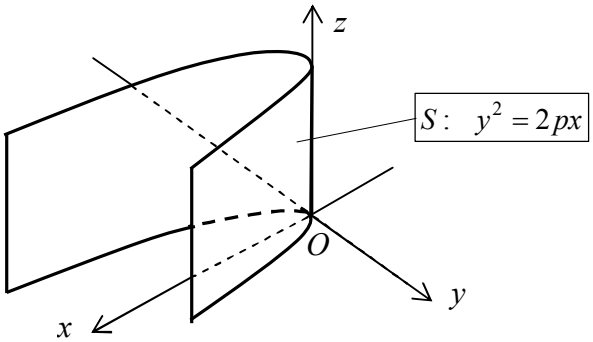


Рисунок 11 – Параболічний циліндр

Дві координатні площини Oxy і Oxz служать площинами симетрії, а координатна вісь Ox – віссю симетрії параболічного циліндра.

Довільна конічна поверхня. Конус другого порядку.

Конічною поверхнею (конусом) називається поверхня, утворена рухом прямої (твірної) l, яка проходить через задану точку $C(x_0, y_0, z_0)$ (вершину) і перетинає задану лінію (напрямну) l_0, причому задана точка C не лежить на заданій лінії l_0.

Нехай напрямна l_0 задана як перетин двох поверхонь

$$l_0: \begin{cases} F_1(x,y,z)=0; \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Конус є лінійчатою поверхнею. Нехай $M(x,y,z)$ – довільна точка конічної поверхні. Тоді рівняння твірної, на якій лежить ця точка, можна подати у вигляді рівняння прямої, що проходить через дві точки – вершину $C(x_0,y_0,z_0)$ і точку $N(X,Y,Z)$ перетину твірної та напрямної:

$$\frac{x-x_0}{X-x_0}=\frac{y-y_0}{Y-y_0}=\frac{z-z_0}{Z-z_0}.$$

Якщо вилучити з наведених рівнянь для довільної точки твірної $M(x,y,z)$ (ця точка одночасно належить конічній поверхні) координати точки перетину $N(X,Y,Z)$, використовуючи співвідношення

$$\begin{cases} F_1(X,Y,Z)=0; \\ F_2(X,Y,Z)=0. \end{cases}$$

то отримаємо рівняння конічної поверхні

$$F(x,y,z)=0.$$

Складемо рівняння конуса з вершиною в початку координат $O(0,0,0)$, напрямною якого служить еліпс

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=c \end{cases}$$

з півосями a і b, що лежить у площині $z=c$, яка перпендикулярна до осі Oz.

Канонічні рівняння твірної, що проходить через точку $N(X,Y,Z)$ напрямної, мають вигляд

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z}, \quad \text{де} \quad \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1,\ Z=c.$$

Враховуючи $Z=c$, з рівнянь твірної маємо:

$$X=xZ/z=xc/z;\quad Y=yZ/z=yc/z.$$

Підставимо ці вирази у перше співвідношення для координат точки N і

дістанемо:

$$(xc/z)^2/a^2 + (yc/z)^2/b^2 = 1;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

канонічне рівняння конуса другого порядку (еліптичного конуса) (рис. 12).

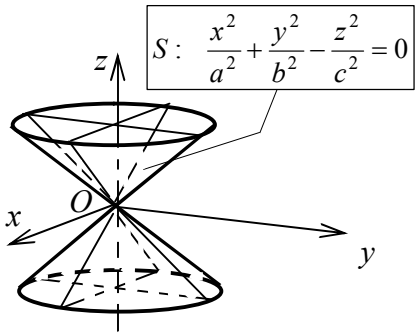


Рисунок 12 – Еліптичний конус

Вершина $O(0,0,0)$ є центром симетрії, вісь Oz – віссю симетрії, а координатні площини – площинами симетрії даного конуса.

Зокрема, якщо $a = b$, то рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

визначає круговий конус.

Зауваження. Коло, еліпс, гіперболу і параболу можна одержати як лінії перетину кругового конуса площиною.

Поверхні обертання

Поверхня, утворена обертанням плоскої лінії (твірної, меридіана) l навколо заданої прямої a_0 (осі обертання), що лежить у площині лінії l, називається поверхнею обертання.

Коло, яке описує довільна точка твірної l при обертанні, називається паралеллю. Площина паралелі перпендикулярна до осі обертання a_0.

Теорема. Нехай лінія l лежить у площині Oyz і задається рівняннями

$$\begin{cases} F(y,z)=0; \\ x=0. \end{cases}$$

Якщо ця лінія обертається навколо осі Oz, то утворюється поверхня обертання, рівняння якої

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\, z\right) = 0$$

Нехай $M(x,y,z)$ – довільна точка поверхні обертання (рис. 13). Проведемо через цю точку паралель, яка перетинає твірну l у точці $N(0,Y,z)$. Таким чином, точці $M(x,y,z)$ при обертанні відповідає єдина точка $N(0,Y,z)$ твірної.

Нехай $K(0,0,z)$. – центр кола паралелі. Оскільки MK і NK – радіуси одного і того ж кола, то $NK = MK$. Але $NK = |Y|$; $MK = \sqrt{x^2+y^2}$. Тоді $|Y| = \sqrt{x^2+y^2}$; $Y = \pm\sqrt{x^2+y^2}$.

Оскільки точка $N\left(0,\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)$ належить твірній, то її координати задовольняють рівняння цієї лінії:

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0.$$

Одержане рівняння є рівнянням поверхні обертання, оскільки його задовольняють координати x,y,z довільної точки цієї поверхні, а координати інших точок простору це рівняння не задовольняють (їм при обертанні відповідають точки, що лежать поза твірною.

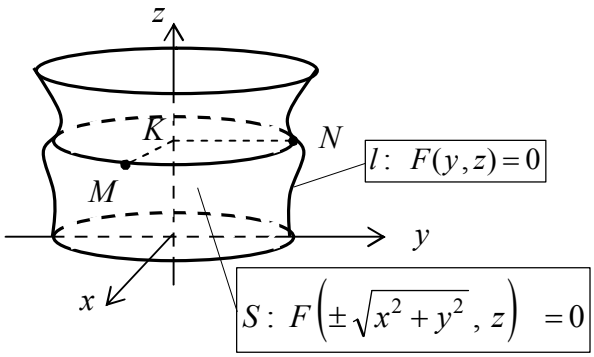


Рисунок 13 – Поверхня обертання

Правило: Щоб одержати рівняння поверхні, утвореної обертанням заданої кривої, що лежить у координатній площині, навколо однієї з координатних осей цієї площини, треба у рівнянні лінії зробити заміну змінних: змінну, що відповідає осі обертання, залишити тією самою, а іншу змінну замінити на “плюс / мінус” квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат.

Приклад. Знайти рівняння поверхні, отриманої обертанням прямої $y = z$, що лежить у площині Oyz, навколо осі Oz.

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\begin{matrix} y = z \\ \hookleftarrow Oz \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \pm\sqrt{x^2 + y^2} = z.$$

Підносячи до квадрата ліву та праву частини останнього рівняння, отримаємо $x^2 + y^2 = z^2$.

Звідси маємо

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

– канонічне рівняння кругового конуса.

Еліпсоїд обертання

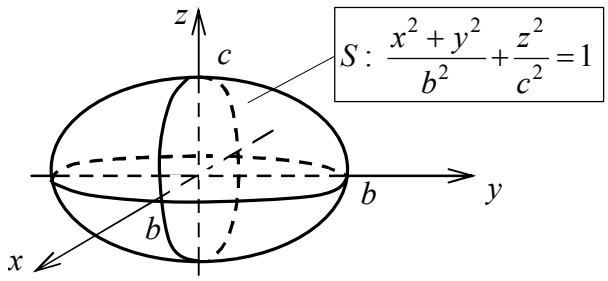


Рисунок 14 – Еліпсоїд обертання

Якщо еліпс $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо осі Oz, то дістанемо еліпсоїд обертання навколо осі Oz (сфероїд) (рис. 14).

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 \underset{\lrcorner Oz}{} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 / b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

Звідси одержуємо

$$(x^2+y^2)/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

– канонічне рівняння еліпсоїда обертання.

Зокрема, якщо $b = c = R$, то маємо канонічне рівняння сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Еліпсоїд загального вигляду

Піддаючи еліпсоїд обертання $\frac{x^2+y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k = \frac{b}{a}$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну $x \to kx$; $y \to y$; $z \to z$.

У результаті дістанемо

$$\frac{((b/a)x)^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

канонічне рівняння еліпсоїда загального вигляду (рис. 15).

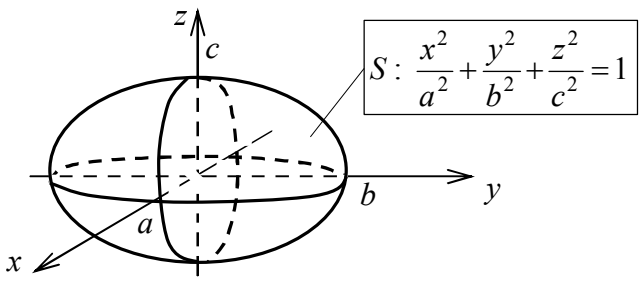


Рисунок 15 – Еліпсоїд

Еліпсоїд має форму обмеженої замкненої овальної поверхні. Координатні площини служать площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії. Початок координат є центром симетрії і називається центром еліпсоїда.

Величини a, b і c називаються півосями еліпсоїда. Якщо будь-які дві півосі рівні між собою, то маємо еліпсоїд обертання, а якщо всі три півосі рівні між собою, то – сферу.

Однопорожнинний гіперболоїд обертання

Якщо гіперболу $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо осі Oz, то отримаємо однопорожнинний гіперболоїд обертання навколо осі Oz.

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\underset{\hookleftarrow Oz}{y^2/b^2-z^2/c^2=1} \Rightarrow \begin{pmatrix} z\to z \\ y\to\pm\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2/b^2-z^2/c^2=1.$$

Звідси маємо

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

–канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда обертання.

Однопорожнинний гіперболоїд загального вигляду

Піддаючи однопорожнинний гіперболоїд обертання $\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k=\frac{b}{a}$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну $x\to kx$; $y\to y$; $z\to z$. У результаті одержимо

$$\frac{((b/a)x)^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

– канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда загального вигляду (однопорожнинного гіперболоїда) (рис. 16).

Величини a, b і c називаються півосями однопорожнинного гіперболоїда.

Однопорожнинний гіперболоїд має форму нескінченної трубки, що розширюється в обидва боки від площини симетрії $z = 0$ вздовж осі симетрії Oz. Поперечним перерізом є еліпс. Найвужчий з перерізів – при $z = 0$. Він називається горловим. Координатні площини служать площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії. Початок координат є центром симетрії і називається центром однопорожнинного гіперболоїда.

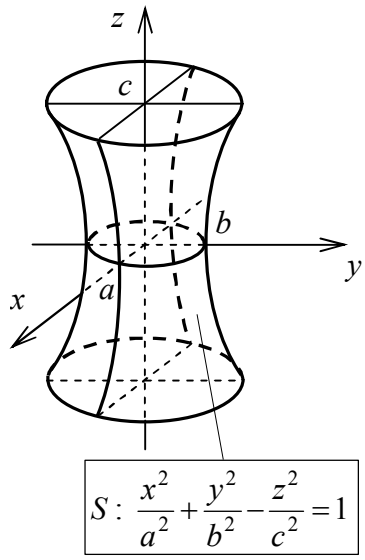


Рисунок 16 – Однопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинний гіперболоїд обертання

Якщо гіперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо дійсної осі Oz, то дістанемо двопорожнинний гіперболоїд обертання навколо осі Oz.

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\underset{\hookleftarrow Oz}{y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 / b^2 - z^2/c^2 = -1.$$

Звідси отримуємо

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

– канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда обертання.

Двопорожнинний гіперболоїд загального вигляду

Піддаючи двопорожнинний гіперболоїд обертання

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Ox з коефіцієнтом деформації $k=b/a$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну $x\to kx$; $y\to y$; $z\to z$.

У результаті одержимо

$$\frac{((b/a)x)^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1;\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

– канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда загального вигляду (двопорожнинного гіперболоїда) (рис. 17).

Величини a, b і c називаються півосями двопорожнинного гіперболоїда.

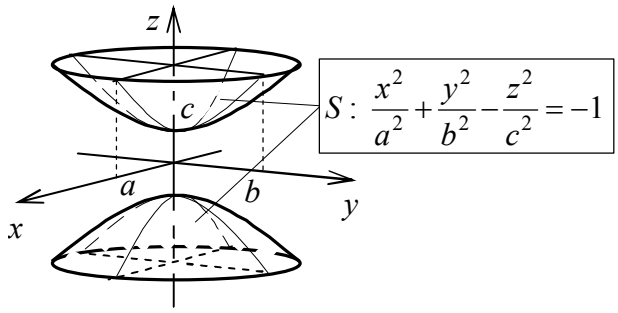


Рисунок 17 – Двопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинний гіперболоїд складається з двох симетричних порожнин, кожна з яких має форму нескінченної опуклої чаші. Координатні площини

служать площинами симетрії, а координатні осі – осями симетрії. Початок координат є центром симетрії і називається центром двопорожнинного гіперболоїда.

Параболоїд обертання

Якщо параболу $y^2 = 2pz$, $p > 0$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо її осі Oz, то дістанемо параболоїд обертання навколо осі Oz.

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\begin{matrix} y^2 = 2pz \\ \lrcorner Oz \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 2pz \ .$$

Звідси маємо

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} = z$$

– канонічне рівняння параболоїда обертання.

Параболоїд загального вигляду

Піддаючи параболоїд обертання $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} = z$ рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж осі Oy з коефіцієнтом деформації $k = \sqrt{p/q}$, треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну

$$x \to x \ ; \ y \to ky \ ; \ z \to z \ .$$

У результаті одержимо

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{\left(\sqrt{p/q}\,y\right)^2}{2p}=z\,;$$

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$$

– канонічне рівняння параболоїда загального вигляду (еліптичного параболоїда) (рис. 18).

Величини p і q називаються параметрами еліптичного параболоїда, $p>0$, $q>0$.

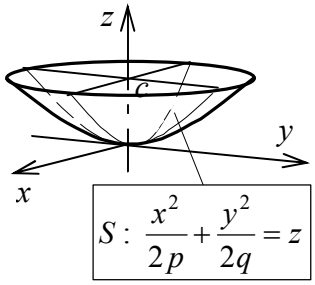


Рисунок 18 – Еліптичний параболоїд

Еліптичний параболоїд має форму нескінченної опуклої чаші. Дві координатні площини Oxz і Oyz служать площинами симетрії, а координатна вісь Oz – віссю симетрії. Початок координат називається вершиною еліптичного параболоїда.

Зауваження. Еліптичний параболоїд можна утворити рухом однієї параболи $y^2=2qz$, $q>0$ вздовж іншої параболи $x^2=2pz$, $p>0$ так, що площина першої параболи залишається паралельною координатній площині Oyz, а її вершина ковзає по другій параболі. Площини цих парабол перпендикулярні між собою. При цьому рухома і нерухома параболи повернуті опуклостями в один бік – вершиною вниз.

Гіперболічний параболоїд

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня (рис. 19), що задається канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z$$

Величини p і q називаються параметрами гіперболічного параболоїда, $p > 0$, $q > 0$.

Ця поверхня утворюється рухом однієї параболи $y^2 = -2qz$, $q > 0$ вздовж іншої параболи $x^2 = 2pz$, $p > 0$ так, що площина першої параболи залишається паралельною координатній площині Oyz, а її вершина ковзає по другій параболі. Площини цих парабол перпендикулярні між собою. При цьому рухома і нерухома параболи повернуті опуклостями у протилежні боки: перша напрямлена вершиною вверх, а друга – вершиною вниз.

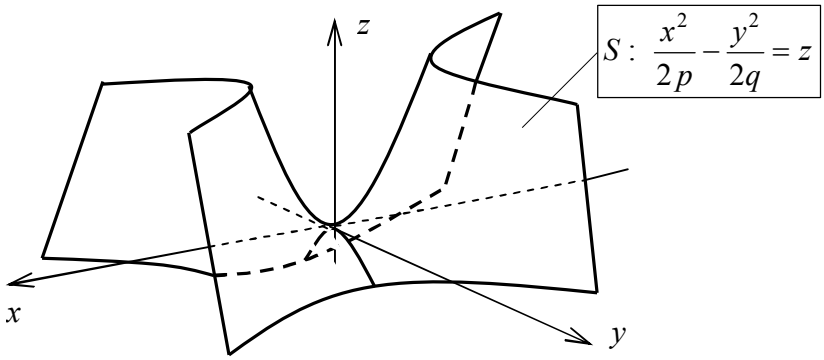


Рисунок 19 – Гіперболічний параболоїд

Гіперболічний параболоїд має форму сідла. Початок координат $O(0,0,0)$ (вершина гіперболічного параболоїда) є сідловою точкою (точкою перевалу) цієї поверхні. Дві координатні площини Oxz і Oyz служать площинами симетрії, а координатна вісь Oz – віссю симетрії.

ЛЕКЦІЯ 7 ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ ЧАСТИННІ ПОХІДНІ. ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Нехай задано деяку двовимірну непорожню множину D. Якщо за вказаним правилом f кожній точці M цієї множини відповідає одне цілком певне значення дійсної змінної u, то кажуть, що задано функцію двох змінних $u = f(M) = f(x_1, x_2)$. При цьому множину D називають областю визначення функції $u = f(M)$. Незалежні змінні x_1, x_2 називають аргументами, а залежну змінну u – функцією.

Якщо D – область на координатній площині Oxy (плоска, двовимірна), то функція $z = f(M) = f(x, y)$ є функцією двох змінних x, y.

Приклад .Знайти область визначення D функції $z = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$.

Область визначення D даної функції $z = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$ – множина всіх тих точок (x, y), для яких $9 - x^2 - 9y^2 > 0$, бо логарифм визначений тільки для додатних значень аргументу, а жодних інших обмежень на змінні x, y немає.

Щоб зобразити область D геометрично, знайдемо її межу:

$$9 - x^2 - 9y^2 = 0; \quad x^2 + 9y^2 = 9;$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$$

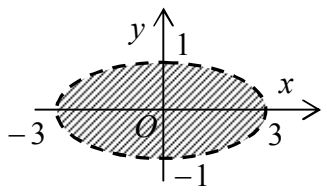


Рисунок 20 – Область визначення функції

Це рівняння еліпса з півосями a=3, b=1.

Внутрішніми точками області визначення D даної функції є точки, обмежені еліпсом. Сам еліпс не належить області D, тому що для його точок $9-x^2-9y^2=0$. Область D – відкрита, її межа позначена пунктиром.

Геометричне зображення функції двох змінних

Множина всіх точок $P(x,y,z)$ простору, координати яких задовольняють рівняння $z=f(x,y)$, називається графіком функції двох змінних $z=f(x,y)$.

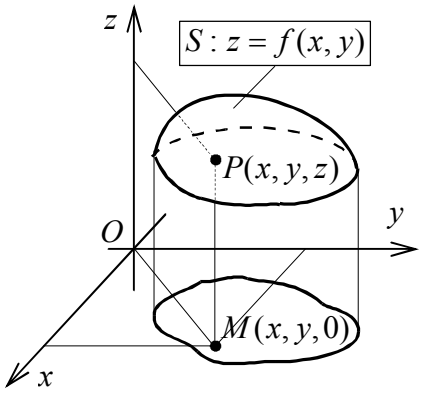


Рисунок 21 – Графік поверхні

Звичайно графіком є деяка поверхня S, що проектується на площину Oxy на область визначення D (рис. 21). (Поверхня $z=f(x,y)$ – це "дах", що "нависає" над плоскою областю D).

Приклад. Побудувати поверхню, яка є графіком функції $z=x^2+\frac{y^2}{4}$ (еліптичний параболоїд).

Використовуємо метод паралельних перерізів.

Знаходимо головні перерізи (перерізи координатними площинами).

Oyz: $x=0$; $z=y^2/4$; $y^2=4z$ – парабола з вершиною у початку координат $O(0,0)$ і віссю Oz.

Oxz: $y=0$; $z=x^2$; $x^2=z$ – парабола з вершиною у початку координат $O(0,0)$ і віссю Oz.

Oxy: $z=0$; $x^2+y^2/4=0$; $O(0,0)$ – початок координат (вершина параболоїда).

Додатково знаходимо переріз поверхні площиною, що паралельна координатній площині Oxy: $z = 0$.

$z = 9$; $x^2 + \frac{y^2}{4} = 9$; $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$ – еліпс з великою піввіссю $a = 6$, що паралельна осі Oy, і з малою піввіссю $b = 3$, що паралельна осі Ox.

Еліптичний параболоїд $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$ зображений на рис. 22.

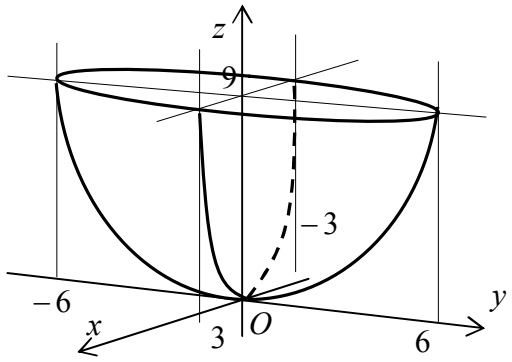


Рисунок 22 – Еліптичний параболоїд

Лінії та поверхні рівня

Для графічного зображення функцій двох і трьох змінних використовуються також відповідно лінії та поверхні рівня.

Лінією рівня функції двох змінних $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок координатної площини Oxy, в яких ця функція набуває одного й того ж значення $z = C$, $C = const$. Рівняння лінії рівня

$$f(x, y) = C.$$

Через кожну точку $M_0(x_0, y_0)$ області D проходить єдина лінія рівня $f(x, y) = f(M_0)$.

При різних C дістанемо різні лінії рівня для даної функції $z = f(x, y)$, кожна з яких служить проекцією лінії перетину поверхні $z = f(x, y)$ площиною $z = C$

Приклади ліній рівня: ізотерми, ізобари на географічних картах; еквіпотенціальні лінії плоского електростатичного поля в електротехніці.

Приклад. Побудувати сім'ю ліній рівня функції $z = x^2 + y^2 + 2$ при $C_1 = 2, C_2 = 3, C_3 = 4, C_4 = 5$. $x^2 + y^2 + 2 = C$; $x^2 + y^2 = C - 2$.

$C_1 = 2$: $x^2 + y^2 = 0$ – точка $O(0;0)$ (вироджене коло).

$C_2 = 3$: $x^2 + y^2 = 1$ – коло радіуса $R = 1$ з центром $O(0;0)$.

$C_3 = 4$: $x^2 + y^2 = 2$ – коло радіуса $R = \sqrt{2}$ з центром $O(0;0)$.

$C_4 = 5$: $x^2 + y^2 = 3$ – коло радіуса $R = \sqrt{3}$ з центром $O(0;0)$.

Сім'я ліній рівня $x^2 + y^2 = C - 2$ – це сім'я концентричних кіл з центром у початку координат $O(0;0)$ (рис. 23).

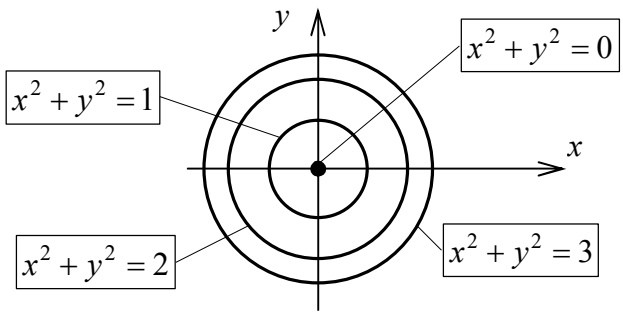


Рисунок 23 – Лінії рівня

Поверхнею рівня функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ називається множина всіх точок простору $Oxyz$, в яких ця функція набуває одного й того ж значення $u = C$, $C = const$. Рівняння поверхні рівня

$$f(x, y, z) = C.$$

Прикладом поверхонь рівня служать еквіпотенціальні поверхні просторового електростатичного поля.

Приклад. Побудувати сім'ю поверхонь рівня функції $u = x^2 + y^2 + z^2$ при $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 4$.

Поверхні рівня $x^2 + y^2 + z^2 = C$ – це сім'я концентричних сфер з центром у початку координат $O(0;0;0)$.

Частинні прирости. Повний приріст. Границя. Неперервність

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі фіксованої точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y фіксованою (рис. 24).

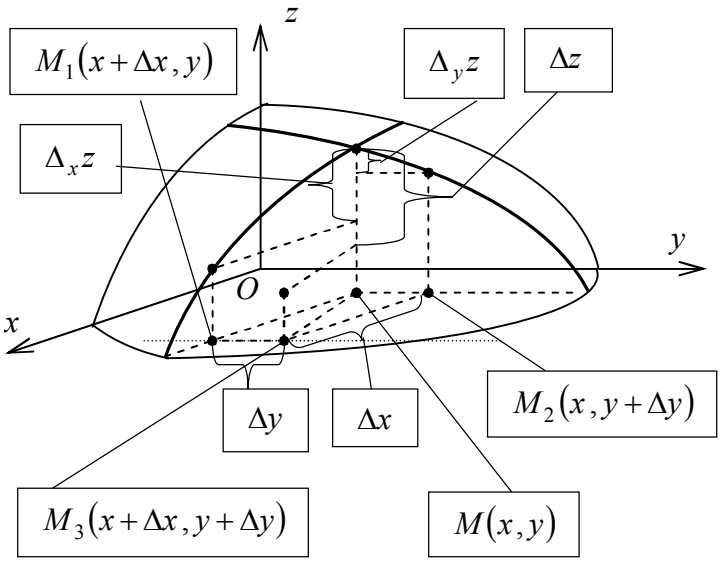


Рисунок 24 – Прирости функції двох змінних

Різниця $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$ називається частинним приростом по x функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x; y)$, що відповідає приросту Δx незалежної змінної x.

Аналогічно $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$ – частинний приріст по y.

Якщо одночасно надати змінній x приросту Δx, а змінній y приросту Δy, то різниця $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ називається повним приростом функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x; y)$.

Зауваження. Із рис.24 зрозуміло, що повний приріст Δz у загальному випадку не дорівнює сумі частинних приростів:

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z .$$

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, крім, можливо, самої точки M_0. Число A називається границею функції $z = f(x, y)$ в

точці M_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-якої точки M із δ-околу точки M_0, крім, можливо, самої точки M_0, виконується нерівність $|f(x,y) - A| < \varepsilon$. Позначається

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \quad \text{або} \quad \lim_{x \to x_0, y \to y_0} f(x,y) = A.$$

Іншими словами, число A називається границею функції $z = f(x,y)$ в точці M_0, якщо їх різниця $\alpha = f(x,y) - A$ є нескінченно малою величиною при $M \to M_0$:

$$\alpha = f(x,y) - A \to 0 \quad \text{при } M \to M_0.$$

Функція $z = f(x,y)$ називається неперервною в точці M_0, якщо виконуються умови:

1) функція $z = f(x,y)$ визначена в самій точці M_0 і в деякому її околі;

2) існує скінченна границя $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

3) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Оскільки для неперервної функції $z = f(x,y)$ її приріст прямує до нуля при $M \to M_0$: $\Delta z = f(M) - f(M_0) \to 0$ і при цьому прирости всіх аргументів прямують до нуля:

$$\Delta x = x - x_0 \to 0; \ \Delta y = y - y_0 \to 0,$$

то означення неперервної в точці функції можна подати так:

Функція $z = f(x,y)$ називається неперервною в точці M_0, якщо в цій точці нескінченно малим приростам Δx і Δy її аргументів відповідає нескінченно малий приріст функції Δz:

$$\lim_{\Delta x \to 0, \ \Delta y \to 0} \Delta z = 0.$$

Функція $z = f(x,y)$ називається неперервною в області D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Властивості функції багатьох змінних, що неперервна в обмеженій замкненій області, аналогічні відповідним властивостям функції однієї змінної,

що неперервна на відрізку.

Властивість 1. Функція $z = f(x, y)$, що неперервна в обмеженій замкненій області D, є обмеженою і досягає в ній свого найменшого m і найбільшого M значення.

Властивість 2. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, а m і M – відповідно її найменше і найбільше значення у цій області, то для будь-якого числа μ, що задовольняє нерівність $m \le \mu \le M$, у області D знайдеться хоча б одна точка $N \in D$, в якій значення функції дорівнює числу μ.

Якщо в точці M_0 порушується хоча б одна з умов неперервності, то ця точка називається точкою розриву функції $z = f(x, y)$, а сама функція $z = f(x, y)$ називається розривною в точці M_0.

Зауваження. Точка M_0 є точкою розриву функції $z = f(x, y)$, зокрема, в таких випадках:

1) функція визначена в деякому околі точки M_0, крім самої точки M_0;

2) функція визначена в усіх точках деякого околу точки M_0, але не існує скінченної границі $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

3) функція визначена в усіх точках деякого околу точки $M_0(x_0, y_0)$ та існує скінченна границя $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$, але $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) \ne f(M_0)$.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0,\ y \to 0} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$.

$$\lim_{x \to 0,\ y \to 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} = \left| \begin{matrix} x \to 0, \\ y \to 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0 \Big| = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + 4} - 2} = \left| \frac{0}{0} \right| =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2 \left(\sqrt{\rho^2 + 4} + 2 \right)}{\rho^2 + 4 - 4} = \lim_{\rho \to 0} \left(\sqrt{\rho^2 + 4} + 2 \right) = 4 .$$

Частинні похідні та їх обчислення

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі фіксованої точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y фіксованою (рис. 23).

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x називається границя відношення частинного приросту по x цієї функції $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ до відповідного приросту аргументу Δx, коли останній прямує до нуля:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} .$$

Застосовуються також позначення:

$$z'_x;\ f'_x;\ f'_x(x, y);\ f'_x(M);\ \frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial f}{\partial x};\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x};\ \frac{\partial f(M)}{\partial x};\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M .$$

Аналогічно

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} .$$

Таким чином,

$$\partial z / \partial x = [dz / dx]_{y = const};\quad \partial z / \partial y = [dz / dy]_{x = const} .$$

Приклад. Знайти всі частинні похідні функції: $z = x^2 / y - \sin y + \pi$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 / y - \sin y + \pi\right)'_x = \left(x^2 / y\right)'_x - \left(\sin y\right)'_x + \pi'_x =$$

$$= (1/y)\,(x^2)'_x - 0 + 0 = (1/y) \cdot 2x = 2x/y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 / y - \sin y + \pi\right)'_y = \left(x^2 / y\right)'_y - \left(\sin y\right)'_y + \pi'_y = x^2 (1/y)'_x -$$

$$- \cos y + 0 = x^2 \cdot \left(-1/y^2\right) - \cos y = -x^2 / y^2 - \cos y .$$

Геометричний зміст частинних похідних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$

(рис. 25). Графіком функції $z = f(x, y)$ є деяка поверхня. Рівняння $y = y_0$ визначає січну площину, яка перпендикулярна до осі Oy. Ця площина перетинає поверхню $z = f(x, y)$ по деякій плоскій лінії l. Оскільки $\frac{\partial z}{\partial x} = \left[\frac{dz}{dx}\right]_{y=y_0}$,

то виходячи з геометричного змісту звичайної похідної, маємо $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = tg\,\alpha$.

Частинна похідна $\partial z/\partial x|_{M_0}$ чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу α дотичної до лінії перерізу l поверхні $z = f(x, y)$ площиною $y = y_0$ у відповідній точці $P_0(x_0, y_0, z_0)$, де $z_0 = f(x_0, y_0)$. (Геометричний зміст частинної похідної).

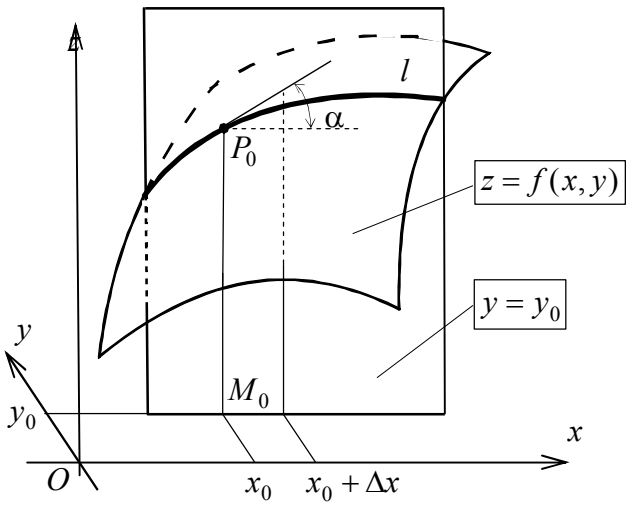


Рисунок 25 – Геометричний зміст частинної похідної

Загальні рівняння дотичної прямої до лінії перерізу l поверхні $z = f(x, y)$ площиною $y = y_0$: $\begin{cases} z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0); \\ y = y_0. \end{cases}$

Аналогічно $\begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0); \\ x = x_0 \end{cases}$

загальні рівняння дотичної прямої до лінії перерізу l поверхні $z = f(x, y)$ площиною $x = x_0$.

Повний приріст та повний диференціал

За означенням повного приросту функції $f(x,y)$ маємо:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

Припустимо, що $f(x,y)$ в точці (x,y) має неперервні частинні похідні.

Виразимо Δz через частинні похідні. Для цього в правій частині рівності додамо і віднімемо $f(x, y+\Delta y)$:

$$\Delta z = \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\right] + \left[f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\right]$$

Застосуємо до виразу у других квадратних дужках теорему Лагранжа:

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = f'_y(x,\bar{y})\Delta y,$$

де $y < \bar{y} < y + \Delta y$.

Аналогічно до виразу у перших квадратних дужках застосуємо теорему Лагранжа:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = f'_x(\bar{x}, y+\Delta y)\Delta x,$$

де $x < \bar{x} < x + \Delta x$.

Підставимо одержані вирази у Δz:

$$\Delta z = f'_x(\bar{x}, y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x,\bar{y})\Delta y.$$

За означенням частинних похідних

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(\bar{x}, y+\Delta y) = f'_x(x,y),$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_y(x,\bar{y}) = f'_y(x,y)$$

Ці рівності за означенням границь можна переписати так:

$$f'_x(\bar{x}, y+\Delta y) = f'_x(x,y) + \gamma_1$$

$$f'_y(x,\bar{y}) = f'_y(x,y) + \gamma_2$$

де величини γ_1 та γ_2 прямують до нуля, коли Δx та Δy прямують до нуля, тобто, коли $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$.

Таким чином Δz набуває вигляду:

$$\Delta z = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta y.$$

Сума двох останніх доданків є величина нескінченно мала більш високого порядку відносно $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Сума двох перших доданків є вираз лінійний відносно Δx та Δy і являє собою головну частину приросту функції, відрізняючись від Δz на нескінченно малу вищого порядку відносно $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Означення. Функція $z = f(x, y)$, повний приріст якої може бути представлений у вигляді двох доданків: виразу. Лінійного відносно Δx та Δy, та величини нескінченно малої вищого порядку відносно $\Delta\rho$, зветься диференційованою в заданій точці, а лінійна частина приросту зветься повним диференціалом і позначається dz або df :

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y .$$

Повний приріст можна переписати у вигляді

$$\Delta z = dz + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$$

І з точністю до нескінченно малих вищого порядку відносно $\Delta\rho$ можна записати наступну наближену рівність:

$$\Delta z \approx dz .$$

Прирости незалежних змінних Δx та Δy будемо називати диференціалами незалежних змінних і позначати відповідно через dx та dy .Тоді вираз повного диференціалу набуде вигляду:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy .$$

Приклад. Знайти повний диференціал та повний приріст функції $z = xy$ в точці $(2;3)$ при $\Delta x = 0{,}1, \quad \Delta y = 0{,}2$.

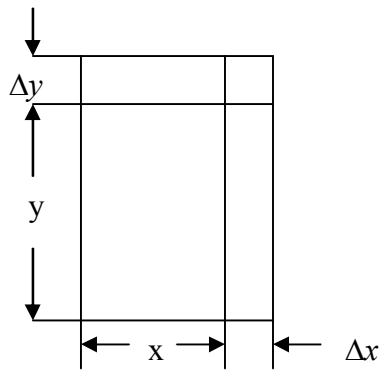


Рисунок 26 – Зображення функції $z = xy$

Розв'язок.

$$\Delta z = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = ydx + xdy = y\Delta x + x\Delta y$$

Таким чином

$$\Delta z = 3\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 + 0{,}1\cdot 0{,}2 = 0{,}72$$

$$dz = 3\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 = 0{,}7$$

Поняття повного диференціалу розповсюджується на функції будь-якого числа незалежних змінних:

$$w = f(x, y, z, u, ...t),$$

Причому всі частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, ..., \frac{\partial f}{\partial t}$ неперервні в точці, то вираз

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + ... + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

є повним диференціалом функції $w = f(x, y, z, u, ...t)$.

Приклад . Знайти повний диференціал функції $u = \ln\left(x + \sqrt{y+z^2}\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x+\sqrt{y+z^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x+\sqrt{y+z^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y+z^2}}\cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y+z^2}\left(x+\sqrt{y+z^2}\right)}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x+\sqrt{y+z^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y+z^2}}\cdot 2z =$$

$$= \frac{z}{\sqrt{y+z^2}\left(x+\sqrt{y+z^2}\right)}; \quad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz =$$

$$= \frac{2\sqrt{y+z^2}\,dx + dy + 2z\,dz}{2\sqrt{y+z^2}\left(x+\sqrt{y+z^2}\right)};$$

Похідні складених функцій

Розглянемо функцію

$$z = F(u, v)$$

Причому u та v в свою чергу є функціями незалежних змінних x та

y:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

В цьому випадку z є складена функція від аргументів x та y.

Дамо аргументу x приріст Δx, зберігаючи значення y незмінним. Тоді u та v одержать прирости $\Delta_x u$ та $\Delta_x v$. Відповідно функція $z = F(u,v)$ також одержить приріст Δz за формулою:

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v.$$

Поділимо всі члени рівності на Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2 \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta_x \to 0$ і $\Delta_x v \to 0$. Але тоді і γ_1 та γ_2 теж прямують до нуля. Перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$ і одержимо:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\gamma_1 = 0, \quad \lim_{\Delta x \to 0}\gamma_2 = 0$$

І, отже. Маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Приклад.

$$z = \ln\left(u^2 + v\right). \quad u = e^{x+y^2}, \quad v = x^2 + y.$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

Підставимо одержані вирази у відповідні формули і отримаємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v}e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v}2x = \frac{2}{u^2+v}\left(ue^{x+y^2} + x\right)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+v}2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v} = \frac{2}{u^2+v}\left(4uye^{x+y^2} + 1\right).$$

Розглянемо випадок, коли $z = F(x,y)$, а $y = f(x)$. Тоді z буде функцією однієї незалежної змінної x і можна ставити питання про обчислення похідної

$\frac{dz}{dx}$:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Така похідна має назву повної похідної $\frac{dz}{dx}$.

Приклад. Обчислити повну похідну:

$$z = x^2 + \sqrt{y}, \quad y = \sin x$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Підставимо у формулу:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cos x = 2x + \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x.$$

Інваріантність форми повного диференціала

Розглянемо повний диференціал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Підставимо значення $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$dz = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

Зробимо наступні перетворення правої частини:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right).$$

Але

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = dv$$

Враховуючи ці рівності, можна записати:

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv.$$

Порівнюючи з початковою рівністю, робимо висновок, що форма повного

диференціала не залежить від того, чи будуть u та v незалежними змінними, чи функціями незалежних змінних.

Похідна від функції, заданої неявно

Розглянемо функцію $y = y(x)$, яка задана неявно рівнянням

$$F(x, y) = 0 .$$

Теорема Нехай функція $y = y(x)$ задається неявно рівнянням $F(x, y) = 0$, де функція $F(x, y)$ та її частинні похідні $F'_y(x, y)$ і $F'_x(x, y)$ неперервні в околі деякої точки $M(x, y)$, координати якої задовольняють це рівняння, причому $F'_y(x, y) \neq 0$. Тоді в цій точці

$$y_x^{\prime} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} .$$

Доведення. Нехай деякому значенню x відповідає значення y, тобто у рівнянні

$$F(x, y) = 0$$

$y = y(x)$. Тоді за правилом диференціювання складеної функції $z = F(x, y(x))$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = F_x^{\prime} + F_y^{\prime} \cdot y_x^{\prime}$$

Оскільки $F(x, y) = 0$ то $dz/dx = 0$ і далі маємо

$$F_x^{\prime} + F_y^{\prime} \cdot y_x^{\prime} = 0 ;$$

звідки

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

Приклад. Написати рівняння дотичної до кривої

$$l: \quad x^3 y^4 - 3y^2 = 4 \quad \text{у точці} \quad M_0(1;2) .$$

Перевіримо, чи задовольняє точка $M_0(1;2)$ рівняння лінії

$$l: \quad F(x, y) = x^3 y^4 - 3y^2 - 4 = 0 ;$$

$$M_0(1;2): \quad F(x_0, y_0) = 1^3 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^2 - 4 = 0 ; \quad 0 = 0 ; \quad M_0 \in l .$$

Рівняння дотичної прямої $y - y_0 = y_0^{\prime} \cdot (x - x_0)$.

Знайдемо шукану похідну $y_0' = y_x'\big|_{M_0}$:

$$y_x' = -F_x' \big/ F_y' ; \quad F_x' = 3x^2y^4 ; \quad F_y' = 4x^3y^3 - 6y ;$$

$$y_x' = -\frac{3x^2y^4}{4x^3y^3 - 6y} = -\frac{3x^2y^3}{4x^3y^2 - 6} ;$$

$$y_0' = y_x'\big|_{M_0} = -3 \cdot 1^2 \cdot 2^3 \big/ (4 \cdot 1^2 \cdot 2^2 - 6) = -12/5 .$$

Рівняння шуканої дотичної

$$y - 2 = -\frac{12}{5}(x-1) ; \quad y = -\frac{12}{5}x + \frac{22}{5} .$$

Зауваження. Нехай рівняння $F(x,y,z) = 0$ задає неявно функцію двох змінних $z = z(x,y)$. Тоді, фіксуючи y, дістаємо $\partial z/\partial x = -F_x'(x,y) \big/ F_z'(x,y)$. Фіксуючи x, аналогічно маємо $\partial z/\partial y = -F_y'(x,y) \big/ F_z'(x,y)$.

Частинні похідні вищих порядків

Частинні похідні $\partial z/\partial x$ і $\partial z/\partial y$ функції двох змінних $z = f(x,y)$ також є функціями двох змінних x і y, а тому самі можуть мати частинні похідні.

Частинна похідна по x від частинної похідної по x називається другою чистою частинною похідною по x, x і позначається

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \text{ або } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \text{ або } z''_{xx}. \text{ Таким чином, } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) .$$

Аналогічно частинна похідна по y від частинної похідної по y називається другою чистою частинною похідною по y, y і позначається $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, або $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, або z''_{yy}. Отже, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Якщо від частинної похідної по x взяти частинну похідну по y, то отримаємо другу мішану частинну похідну по x і y, яка позначається $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, або $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, або z''_{xy}. Отже, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$.

Якщо від частинної похідної по y взяти частинну похідну по x, то одержимо другу мішану частинну похідну по y і x (з іншим порядком диференціювання), яка позначається

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},\ \text{або}\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x},\ \text{або}\ z''_{yx}.\quad \text{Отже,}\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Приклад. Обчислити частинні похідні другого порядку від функції

$$f(x,y)=x^2y+y^3.$$

Послідовно знаходимо:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(2xy)}{\partial y}=2x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial\left(x^2+3y^2\right)}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y.$$

У загальному випадку $\partial^2 z/\partial y\partial x\neq\partial^2 z/\partial x\partial y$.

Зауваження. Аналогічно частинним похідним другого порядку вводяться частинні похідні третього, четвертого і т.д., порядку. Наприклад,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right);\qquad \frac{\partial^4 z}{\partial x^3\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right).$$

Теорема. Якщо функція $z=f(x,y)$ та її частинні похідні $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ визначені та неперервні в точці $M(x,y)$ та в деякому її околі, то в цій точці

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

Доведення.

Розглянемо вираз

$$A=\left[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)\right]-\left[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\right].$$

Фіксуючи y, введемо допоміжну функцію однієї змінної x:

$$\varphi(x)=f(x,y+\Delta y)-f(x,y).\quad \text{Тоді}\quad A=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x).$$

Застосуємо формулу скінченних приростів Лагранжа й одержимо

$$A=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\varphi'(\bar{x})\Delta x;\quad \bar{x}\in(x,\ x+\Delta x).$$

Але

$$\varphi'(\bar{x})=f'_x(\bar{x},y+\Delta y)-f'_x(\bar{x},y).$$

Застосуємо формулу Лагранжа до функції $f'_x(\bar{x}, y)$ однієї змінної y і дістанемо

$$f'_x(\bar{x}, y+\Delta y) - f'_x(\bar{x}, y) = f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta y\,; \quad \bar{y} \in (y, y+\Delta y)\,.$$

Тоді $\quad A = f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\,\Delta x\,\Delta y\,.$

З іншого боку, переставляючи середні доданки, вираз A можна подати у вигляді

$$A = \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\right] - \left[f(x+\Delta x, y) - f(x, y)\right].$$

Фіксуючи x, введемо допоміжну функцію однієї змінної y

$$\psi(y) = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)\,.$$

Тоді $\quad A = \psi(y+\Delta y) - \psi(y) = \psi'(\tilde{y})\Delta y =$

$$= \left[f'_y(x+\Delta x, \tilde{y}) - f'_y(x, \tilde{y})\right]\Delta y = f''_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y})\,\Delta x\,\Delta y\,,$$

де $\quad \tilde{x} \in (x, x+\Delta x)\,, \quad \tilde{y} \in (y, y+\Delta y)\,.$

Порівнюючи одержані зображення виразу A, маємо

$$f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta y\Delta x = f''_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y})\Delta x\Delta y \;\; ; \quad f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f''_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y}) \;\; .$$

Переходячи до границі при $\Delta x \to 0,\, \Delta y \to 0$, маємо $\bar{x} \to x, \bar{y} \to y,\, \tilde{x} \to x,\, \tilde{y} \to y$. Отже, $\quad f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)\,.$

Приклад. Для заданої функції $z = \sin(xy)$ перевірити рівність мішаних частинних похідних:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,;$$

Поступово обчислюємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\sin(xy))'_x = y\cos(xy)\,; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (y\cos(xy))'_y = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\sin(xy))'_y = x\cos(xy)\,; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (x\cos(xy))'_x = \cos(xy) - xy\sin(xy)\,.$$

Приклад. Перевірити, що задана функція $z = arctg\,\dfrac{x}{y}$ задовольняє умові:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0\,;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}\,; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}\,;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - 4\cdot\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\frac{-x}{x^2+y^2} = 0$$

$$\frac{-2xy-2xy+4xy}{(x^2+y^2)^2} = 0;\quad 0=0.$$

Таким чином, задана функція задовольняє вказаній умові.

Диференціалом другого порядку (другим диференціалом) функції двох змінних $z = f(x,y)$ називається диференціал від її повного диференціала, тобто $d^2 z = d(dz)$.

ЛЕКЦІЯ 8 ПОХІДНА ЗА НАПРЯМКОМ І ГРАДІЄНТ. ДОТИЧНА ПЛОЩИНА І НОРМАЛЬНА ПРЯМА ДО ПОВЕРХНІ. НЕОБХІДНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ. СТАЦІОНАРНІ ТОЧКИ. ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ. НАЙМЕНШЕ ТА НАЙБІЛЬШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ У ЗАМКНЕНІЙ ОБЛАСТІ

Нехай у деякій області D простору задано скалярну функцію трьох змінних $u = f(M) = f(x,y,z)$. Тоді кажуть, що в області D задане просторове скалярне поле $u = f(M)$.

Функція двох змінних $z = f(x,y)$, яка визначена у плоскій області D, задає плоске скалярне поле $z = f(x,y)$.

Приклади скалярних фізичних полів: поля температури, атмосферного тиску, електричного потенціалу.

Нехай у деякому околі фіксованої точки $M(x,y,z)$ задано просторове скалярне поле $u = u(M) = u(x,y,z)$. Проведемо з цієї точки M довільний ненульовий вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha$, $\cos\beta$ і $\cos\gamma$. У напрямі цього вектора на деякій відстані Δl від початку M візьмемо іншу точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$
(рис. 27). Тоді

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\ ;$$

$$\Delta x = \Delta l\ \cos\alpha\ ;\quad \Delta y = \Delta l\ \cos\beta\ ;\quad \Delta z = \Delta l\ \cos\gamma\ .$$

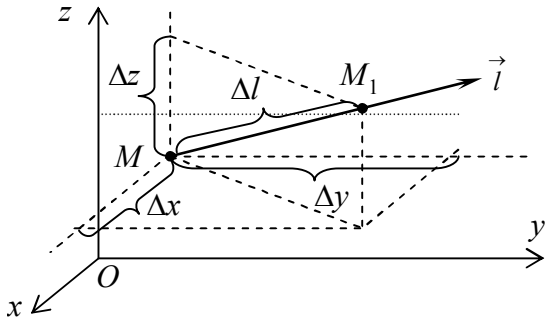


Рисунок 27 Приріст функції у напрямі вектора

Різниця $\Delta_l u = u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - u(x,y,z)$ значень функції в точках M_1 і M називається приростом функції $u = u(x,y,z)$ у напрямі вектора $\vec{l}$.

Якщо функція $u = u(x,y,z)$ неперервна і має неперервні частинні похідні, то

$$\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z\ ,$$

де $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, $\varepsilon_3 \to 0$ при $\Delta l \to 0$.

Тоді $\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta l\ \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta l\ \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta l\ \cos\gamma +$

$$+\varepsilon_1 \Delta l\ \cos\alpha + \varepsilon_2 \Delta l\ \cos\beta + \varepsilon_3 \Delta l\ \cos\gamma\ .$$

Похідною функції $u = u(x,y,z)$ у точці $M(x,y,z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ називається границя $\frac{\partial u}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}$.

Похідна за напрямом обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

і визначає швидкість змінювання функції (скалярного поля) за напрямом вектора $\vec{l}$ у точці $M(x,y,z)$.

Якщо похідна $\partial u/\partial l$ додатна, то поле у цьому напрямі зростає. Якщо ж $\partial u/\partial l < 0$, то поле – спадає.

Приклад. Для заданої функції $u = (x^2 + y^2)\,tg\,z$ знайти похідну за напрямом

вектора $\vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ в точці $M\left(1;-2;\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\ tgz;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y\ tgz;\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x^2+y^2}{\cos^2 z};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 2\cdot 1\cdot tg\frac{\pi}{4} = 2;\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 2\cdot(-2)\cdot tg\frac{\pi}{4} = -4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x^2+y^2}{\cos^2 z};\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = \frac{1^2+(-2)^2}{\cos^2(\pi/4)} = 10;\ |\vec{l}| = \sqrt{l_x^2+l_y^2+l_y^2};$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2} = 3;$$

$$\cos\alpha = l_x\big/|\vec{l}|;\ \cos\beta = l_y\big/|\vec{l}|;\ \cos\gamma = l_z\big/|\vec{l}|;\ \cos\alpha = -1/3;$$

$$\cos\beta = \frac{2}{3};\ \cos\gamma = \frac{-2}{3};\ \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma;$$

$$\partial u/\partial l\big|_M = 2\cdot(-1/3) + (-4)\cdot(2/3) + 10\cdot(-2/3) = -10.$$

Градієнтом функції (скалярного поля) $u = u(x,y,z)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції: $grad\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$.

Теорема (Зв'язок між градієнтом і похідною за напрямом). Похідна $\partial u/\partial l$ за напрямом вектора $\vec{l}$ дорівнює проекції градієнта $grad\,u$ на цей вектор (рис. 28):

$$\partial u/\partial l = np_{\vec{l}}\,grad\,u$$

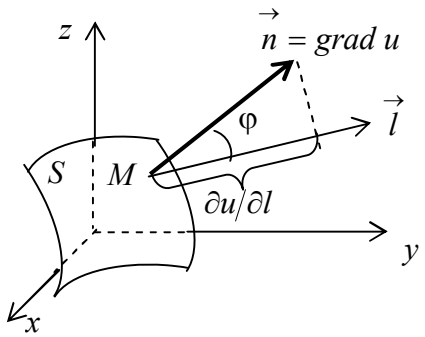


Рисунок 28 Зв'язок між градієнтом і похідною за напрямом

Доведення.

Розглянемо одиничний вектор $\bar{l}^0$,який відповідає вектору $\bar{l}$:

$$\bar{l}^0 = \cos\alpha \cdot \bar{i} + \cos\beta \cdot \bar{j} + \cos\gamma \cdot \bar{k} .$$

Обчислимо скалярний добуток векторів $grad\, u$ та $\bar{l}^0$:

$$grad\, u \cdot \bar{l}^0 = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma .$$

Вираз в правій частині є похідна від функції $u(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$. Отже, можна записати:

$$grad\, u \cdot \bar{l}^0 = \frac{\partial u}{\partial l} .$$

Якщо позначити кут між векторами $grad\, u$ та $\bar{l}^0$ через φ, то можна записати:

$$|grad\, u| \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial l} ,$$

або

$$\text{пр}_{\vec{l}^0}\, \text{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial l} .$$

Основні властивості градієнта:

1) Похідна $\partial u/\partial l$ скалярного поля $u = u(x, y, z)$ у даній точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ має найбільше значення, коли напрям цього вектора співпадає з напрямом градієнта $grad\, u$. Це найбільше значення похідної $\partial u/\partial l$ дорівнює модулю градієнта:

$$(\partial u/\partial l)_{max} = |\, grad\, u\,| \quad \text{при} \quad \vec{l}_{\max} = grad\, u .$$

(Фізичний зміст градієнта).

Іншими словами, градієнт указує напрям найшвидшого зростання скалярного поля в даній точці, а його модуль дорівнює цій найбільшій швидкості:

$$grad\, u = \vec{l}_{\max} ; \quad |\, grad\, u\,| = (\partial u/\partial l)_{max} .$$

Зауваження. Згідно з цією властивістю градієнт скалярного поля визначається самим полем і не залежить від вибору системи координат.

2) Похідна $\partial u/\partial l$ скалярного поля $u = u(x, y, z)$ у довільній точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора, який перпендикулярний до градієнта $grad\, u$, дорівнює нулю: $\vec{l} \perp gradu \;\Rightarrow\; \partial u/\partial l = 0$.

3) градієнт $grad\,u$ скалярного поля $u = u(x, y, z)$ у кожній точці $M(x, y, z)$ перпендикулярний до поверхні рівня $S:\ u(x, y, z) = C$, яка проходить через цю точку (рис. 47). (Геометричний зміст градієнта). Іншими словами, градієнт $grad\,u$ можна прийняти за вектор нормалі $\vec{n}$ до поверхні рівня $S:\ u(x, y, z) = C$ у відповідній точці $M(x, y, z)$

$$S:\ u(x, y, z) = C; \quad grad\,u \perp S \ \Rightarrow \ \vec{n} = grad\,u \ .$$

Приклад Для функції $z = x^2 y - 5\sin(3x - 2y)$ знайти градієнт і модуль градієнта в точці $M_0(2, 3)$.

$$grad\,z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}; \ \ \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 15\cos(3x - 2y);$$

$$\partial z/\partial y = x^2 + 10\cos(3x - 2y); \ \ \partial z/\partial x\big|_{M_0} = 2 \cdot 2 \cdot 3 -$$

$$-15\cos(3 \cdot 2 - 2 \cdot 3) = -3; \ \partial z/\partial y\big|_{M_0} = 2^2 + 10\cos(3 \cdot 2 - 2 \cdot 3) = 14;$$

$$grad\,z\big|_{M_0} = -3\vec{i} + 14\vec{j}; \ \ |grad\,z| = \sqrt{(\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2};$$

$$|grad\,z|_{M_0} = \sqrt{(-3)^2 + 14^2} = \sqrt{205};$$

Екстремум функції двох змінних

Необхідні умови екстремуму

Нехай функція двох змінних $z = f(M) = f(x, y)$ визначена в деякій області D і $M_0(x_0, y_0)$ – внутрішня точка цієї області. Точка M_0 називається точкою максимуму функції $z = f(M)$, якщо значення функції в цій точці M_0 більше, ніж значення функції у всіх близьких сусідніх точках:

$$\forall M \in U(M_0, \varepsilon),\ M \neq M_0,\ f(M_0) > f(M) \ \Leftrightarrow \ M_0 - \max,$$

де $U(M_0, \varepsilon)$ – деякий ε-окіл точки M_0, $\varepsilon > 0$.

Аналогічно вводиться поняття точки мінімуму:

$$\forall M \in U(M_0, \varepsilon),\ M \neq M_0,\ f(M_0) < f(M) \ \Leftrightarrow \ M_0 - \min \ .$$

Точки максимуму та мінімуму називаються точками екстремуму.

Значення функції $z = f(M_0) = f(x_0, y_0)$ у точці екстремуму M_0 називається її екстремальним значенням (екстремумом).

Теорема (необхідні умови екстремуму). Якщо диференційовна функція $z = f(x, y)$ має екстремум у точці $M_0(x_0, y_0)$, то всі частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} \partial z/\partial x\big|_{M_0} = 0; \\ \partial u/\partial y\big|_{M_0} = 0. \end{cases}$$

Точки, в яких виконуються необхідні умови екстремуму, тобто всі частинні похідні або дорівнюють нулю або не існують, називаються критичними точками функції $z = z(M)$.

Критичні точки, в яких всі перші частинні похідні дорівнюють нулю, називаються стаціонарними точками функції $z = z(M)$.

Зауваження Стаціонарна точка – це точка, що “підозріла” на екстремум. Тобто у цій точці екстремум може бути, а може і не бути. Наприклад, для функції $z = \dfrac{x^2 - y^2}{2}$ (гіперболічний параболоїд на рис. 29) початок координат $O(0,0)$ є стаціонарною точкою, оскільки

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_O = x\big|_O = 0;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_O = -y\big|_O = 0,$$

але екстремум у ній відсутній ($O(0,0)$ – сідлова точка функції $z = \dfrac{x^2 - y^2}{2}$).

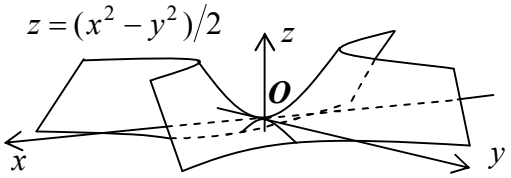


Рисунок 29 – Сідлова точка

Приклад. Знайти стаціонарні точки функції:

$$u = x^3 + xy + 2yz - x + 5y + 4z - 3 .$$

Для знаходження стаціонарних точок складаємо і розв'язуємо систему необхідних умов екстремуму:

$$\begin{cases} \partial u/\partial x = 0 \\ \partial u/\partial y = 0 \\ \partial u/\partial z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial u/\partial x = 3x^2 + y - 1 \\ \partial u/\partial y = x + 2z + 5 \\ \partial u/\partial z = 2y + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 + y - 1 = 0 \\ x + 2z + 5 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2 \\ 3x^2 - 2 - 1 = 0 \\ x + 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 1 ; \quad x_2 = -1 ; \quad z = -(5 + x)/2 ;$$

$$z_1 = -(5+1)/2 = -3 ; \quad z_2 = -(5-1)/2 = -2 ;$$

$$M_1(1, -2, -3), \quad M_2(-1, -2, -2) \; -$$

стаціонарні точки

Достатні умови екстремуму функції двох змінних

Аналогічно функції однієї змінної, наявність і характер екстремуму функції двох змінних у стаціонарній точці визначається знаком другого диференціала

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 .$$

Нехай у деякому околі стаціонарної точки $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Знайдемо значення других частинних похідних у цій точці:

$$A = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_0} ; \quad C = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_0} ;$$

$$B = \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{M_0}$$

і обчислимо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

Теорема (достатні умови гладкого екстремуму).

1) Якщо визначник Δ додатний, то M_0 – точка екстремуму, причому

а) M_0 – точка мінімуму, якщо $A > 0$;

б) M_0 – точка максимуму, якщо $A<0$.

2) Якщо визначник Δ від'ємний, то у точці M_0 екстремум відсутній (M_0 – сідлова точка функції $z=f(x,y)$).

3) Якщо визначник Δ дорівнює нулю, то у точці M_0 екстремум може бути, а може і не бути. (Сумнівний випадок. Потрібні додаткові дослідження.)

Приклад. Дослідити функцію на екстремум:

$$z=x^3+y^3-6xy-2.$$

Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\partial z/\partial x=3x^2-6y; \quad \partial z/\partial y=3y^2-6x.$$

Використовуючи необхідні умови екстремуму, знаходимо стаціонарні точки функції:

$$\begin{cases}\partial z/\partial x=0\\ \partial z/\partial y=0\end{cases}\begin{cases}3x^2-6y=0\\ 3y^2-6x=0\end{cases}\begin{cases}x^2-2y=0\\ y^2-2x=0\end{cases}\quad \begin{matrix} y=x^2/2;\\ \left(x^2/2\right)^2-2x=0;\end{matrix}$$

$$\frac{x^4}{4}-2x=0;\quad x^4-8x=0;\quad \left[\begin{matrix}x=0\\ x^3-8=0\end{matrix}\right.\quad \left[\begin{matrix}x_1=0 & y_1=0;\\ x_2=2 & y_2=2^2/2=2.\end{matrix}\right..$$

Отже, стаціонарні точки $M_1(0,0)$; $M_2(2,2)$.

Для перевірки достатніх умов екстремуму знаходимо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6.$$

Дослідимо на екстремум точку $M_1(0,0)$. Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці $M_1(0,0)$ і значення визначника Δ:

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1}=6\cdot 0=0;\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1}=6\cdot 0=0;$$

$$B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{M_1}=-6;\quad \Delta=AC-B^2=0\cdot 0-(-6)^2=-36<0.$$

Оскільки $\Delta<0$, то у точці M_1 екстремуму немає.

Дослідимо на екстремум точку $M_2(2,2)$. Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці $M_2(2,2)$ і значення визначника Δ:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 6 \cdot 2 = 12; \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_2} = 6 \cdot 2 = 12;$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_2} = -6; \quad \Delta = AC - B^2 = 12 \cdot 12 - (-6)^2 = 108 > 0.$$

З нерівності $\Delta > 0$ випливає, що M_2 – точка екстремуму.

Оскільки $A = 12 > 0$, то M_2 – точка мінімуму. Знайдемо мінімальне значення функції у цій точці:

$$z_{\min} = z(M_2) = 2^3 + 2^3 - 6 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = -10.$$

Знаходження найменшого та найбільшого значень функції в замкненій області

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна і диференційовна в замкненій області D. Тоді вона досягає найменшого (найбільшого) значення на множині D або в одній із стаціонарних точок, що належать цій області D, або в одній із точок межі області D.

Правило знаходження найменшого та найбільшого значень функції $z = f(x, y)$ у замкненій області D:

1) Побудувати область D в прямокутній системі координат Oxy. Знайти всі кутові точки – точки, що сполучають сусідні ділянки межі області D;

2) Знайти стаціонарні точки функції $z = f(x, y)$. Виділити з них ті, що лежать в області D. Обчислити значення функції у виділених точках;

3) Знайти значення функції в усіх кутових точках межі області D;

4) На кожній ділянці межі області D перейти до функції однієї змінної, що одержується з початкової функції $z = f(x, y)$ врахуванням рівняння цієї ділянки. Знайти стаціонарні точки одержаної функції однієї змінної. Виділити з них ті, що лежать на даній ділянці. Обчислити значення функції у виділених точках і на кінцях відрізка зміни аргументу;

5) Порівняти всі одержані значення функції між собою і вибрати серед

них найменше – глобальний мінімум $\min\limits_{(x,y)\in D} z$ – і найбільше – глобальний максимум $\max\limits_{(x,y)\in D} z$.

Приклад. Знайти найменше та найбільше значення заданої функції в замкненій області D, що обмежена вказаними лініями:

$z = 3x^2 + y^2 - 4xy - x$; D: $x = 2$; $y = 1$; $x + y + 1 = 0$.

У декартовій системі координат Oxy побудуємо вказані лінії межі області D: $x = 2$; $y = 1$; $x + y + 1 = 0$ і позначимо штриховкою саму область D (рис.30).

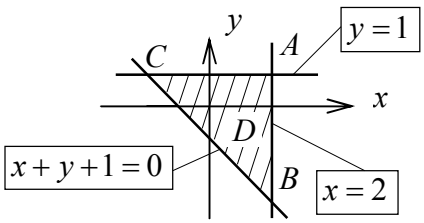


Рисунок 30 – Замкнена область D

Кутові точки визначаються як точки попарного перетину цих ліній:

$$\begin{cases} x = 2; \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2; \\ x + y + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1; \\ x + y + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці системи, дістаємо $A(2;1)$, $B(2;-3)$, $C(-2;1)$.

Для визначення стаціонарних точок складаємо і розв'язуємо систему необхідних умов екстремуму:

$$\begin{cases} \partial z/\partial x = 6x - 4y - 1 = 0 \\ \partial z/\partial y = 2y - 4x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x & x = -1/2; \\ 6x - 4\cdot 2x - 1 = 0 & y = -1. \end{cases}$$

Оскільки стаціонарна точка $M(-1/2;-1) \in D$, то обчислимо відповідне значення функції:

$$z\big|_M = 3(-1/2)^2 + (-1)^2 - 4(-1/2)(-1) - (-1/2) = 1/4.$$

Досліджуємо функцію на межі області D, яка складається з ділянок AB, BC, AC, що сполучаються в кутових точках $A(2;1)$, $B(2;-3)$, $C(-2;1)$.

Обчислюємо значення функції в кутових точках:

$$z\big|_A = 3\cdot 2^2 + 1^2 - 4\cdot 2\cdot 1 - 2 = 3\,;\quad z\big|_B = 3\cdot 2^2 + (-3)^2 -$$

$$-4\cdot 2\cdot(-3) - 2 = 43\,;\quad z\big|_C = 3\cdot(-2)^2 + 1^2 - 4\cdot(-2)\cdot 1 - (-2) = 23\,.$$

На кожній ділянці межі, використовуючи її рівняння, перейдемо до функції однієї змінної і знайдемо значення одержаної функції в її стаціонарних точках, що належать відповідній ділянці. (Кінці відрізків зміни аргументу співпадають з кутовими точками, де значення функції вже обчислені).

На відрізку AB: $x = 2,\ y \in [-3, 1]$ маємо:

$$z_1 = f_1(y) = 3\cdot 2^2 + y^2 - 4\cdot 2\cdot y - 2 = y^2 - 8y + 10\,;$$
$$z_1' = 2y - 8\,;\quad z_1' = 0\,;\quad 2y - 8 = 0\,;\quad y = 4 \notin [-3, 1]\,.$$

На відрізку BC: $y = -x - 1,\ x \in [-2, 2]$ маємо:

$$z_2 = f_2(x) = 3x^2 + (-x-1)^2 - 4x(-x-1) - x = 8x^2 + 5x + 1\,;$$

$$z_2' = 16x + 5\,;\quad z_2' = 0\,;\quad 16x + 5 = 0\,;\quad x = -5/16 \in \left[-2, 2\right];$$

$$y = -(-5/16) - 1 = -11/16\,;\quad N\left(-5/16, -11/16\right);$$

$$z\big|_N = f_2(-5/16) = 8\cdot(-5/16)^2 + 5\cdot(-5/16) + 1 = -7/32\,.$$

На відрізку AC: $y = 1,\ x \in [-2, 2]$ маємо:

$$z_3 = f_3(x) = 3x^2 + 1^2 - 4x\cdot 1 - x = 3x^2 - 5x + 1\,;$$

$$z_3' = 6x - 5\,;\quad z_3' = 0\,;\quad 6x - 5 = 0\,;\quad x = 5/6 \in [-2, 2]\,;\quad y = 1\,;$$

$$P(5/6, 1)\,;\quad z\big|_P = f_3(5/6) = 3\cdot(5/6)^2 - 5\cdot(5/6) + 1 = -13/12\,.$$

Порівняємо між собою всі знайдені значення функції:

$$z\big|_M = \frac{1}{4}\,;\ z\big|_A = 3\,;\ z\big|_B = 43\,;\ z\big|_C = 23\,;\ z\big|_N = -7/32\,;\ z\big|_P = -1\frac{1}{12}\,.$$

Отже, найменше та найбільше значення функції відповідно

$$\min_{(x,y)\in D} z = z\big|_{P(5/6,\,1)} = -1\frac{1}{12}\,;\quad \max_{(x,y)\in D} z = z\big|_{B(2,\,-3)} = 43\,.$$

ЛЕКЦІЯ 9 ЗАДАЧА ПРО ОБ'ЄМ ЦИЛІНДРИЧНОГО ТІЛА. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА. ЗМІНА ПОРЯДКУ ІНТЕГРУВАННЯ В ПОДВІЙНОМУ ІНТЕГРАЛІ. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ У ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Задача про об'єм циліндричного тіла

Подвійний інтеграл і його властивості

Нехай V – деяка замкнена обмежена просторова область (просторове тіло), а плоска область D_{xy} - її проекція паралельно осі Oz на координатну площину Oxy (рис. 30). Область V називається правильною (стандартною) в напрямі осі Oz, якщо виконуються наступні умови: 1) межа L проекції D_{xy} складається зі скінченного числа неперервних кривих; 2) довільна пробна пряма, що проходить хоча б через одну внутрішню точку області V паралельно осі Oz і в тому ж напрямі, перетинає її межу тільки у двох точках – по одній на ближній поверхні входу σ_1 і дальній поверхні виходу σ_2; 3) рівняння кожної з поверхонь σ_1 і σ_2 задається в явному вигляді, розв'язаному відносно z, причому тільки однією формулою відповідно $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$, де функції $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ неперервні в D_{xy} і $z_1(x, y) \le z_2(x, y)$.

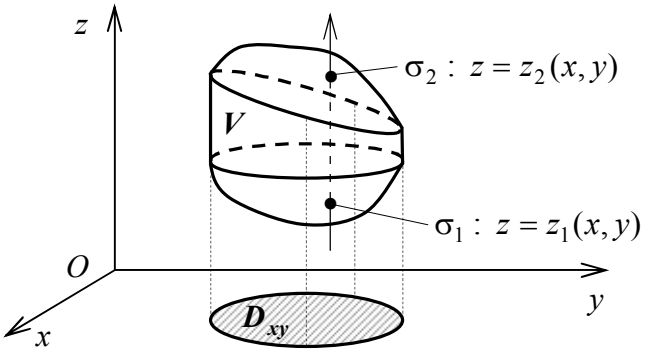


Рисунок 31 – Просторове тіло

Така просторова область V має вигляд вертикального циліндричного тіла, що обмежене знизу поверхнею входу $\sigma_1 : z = z_1(x, y)$, зверху – поверхнею виходу $\sigma_2 : z = z_2(x, y)$, а з боків – вертикальною циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямною служить межа L області D_{xy}, в яку проектується це тіло на координатну площину Oxy.

Розглянемо окремий випадок правильної в напрямі осі Oz області V, яка обмежена знизу координатною площиною Oxy (тобто, спирається на свою проекцію D), а зверху – поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$ (рис. 31). Знайдемо об'єм V такого циліндричного тіла.

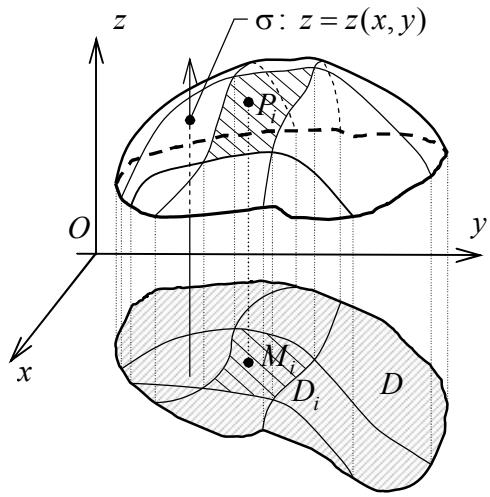


Рисунок 32 – Об'єм циліндричного тіла

Для цього розіб'ємо область D довільними кусково-гладкими лініями на елементарні частини D_i $(i = \overline{1, n})$, що не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо площу майданчика D_i через ΔS_i, а його діаметр (довжину найбільшої хорди, яка з'єднує дві точки межі області D_i) – через d_i, $i = \overline{1, n}$. Через межу кожної елементарної області D_i проведемо циліндричну поверхню з паралельними осі Oz твірними. Тоді тіло V розіб'ється на n циліндричних стовпчиків з основами D_i $(i = \overline{1, n})$, що обмежені зверху частинами поверхні $z = f(x, y)$.

Візьмемо на кожному майданчику D_i довільну точку $M_i(x_i, y_i)$ і замінимо кожний стовпчик прямим циліндром з тією ж основою D_i і висотою $P_iM_i = z_i = f(x_i, y_i)$. Тоді для об'єму ΔV_i циліндричного стовпчика маємо $\Delta V_i \approx f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$. Об'єм тіла V можна наближено подати так: $V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i$.

Вираз $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i$ називається інтегральною сумою функції $f(x, y)$ по області D.

Одержана рівність тим точніша, чим менші розміри елементарних областей D_i і, відповідно, більша їх кількість n. Природно границю інтегральної суми при умові, що кожний майданчик D_i стягується в точку $(\max d_i \to 0)$ і, відповідно, їх число n необмежено збільшується $(n \to \infty)$, прийняти за об'єм V циліндричного тіла: $V = \lim\limits_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i$.

Скінченна границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття області D, якщо вона існує і не залежить від способу поділу на елементарні майданчики D_i та від вибору точок $M_i(x_i, y_i)$ на них, називається подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D і позначається $\iint_D f(x, y)\, dS$ або $\iint_D f(M)\, dS$.

Отже, за означенням

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dS = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i ,$$

де x і y – змінні інтегрування; $f(x, y)$ – підінтегральна функція; dS – елемент (диференціал) площі; $f(x, y)\, dS$ – підінтегральний вираз; D – область інтегрування.

Геометричний зміст: якщо функція $z = f(x, y)$ невід'ємна, то подвійний інтеграл від неї чисельно дорівнює об'єму V циліндричного тіла, нижньою основою якого є область D, верхньою – частина поверхні $z = f(x, y) \geq 0$, що проектується в D, а бічна поверхня – циліндрична з твірними, паралельними осі Oz, і напрямною L – межею області D: $V = \iint_D f(x, y)\, dS$.

Фізичний зміст: якщо матеріальна пластина лежить у координатній площині Oxy і має форму замкненої області D, в кожній точці якої задана поверхнева густина $\mu = \mu(x, y)$, то маса m пластини обчислюється за формулою $m = \iint_D \mu(x, y)\, dS$.

Властивості подвійного інтеграла

1) Сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла:

$$\iint_D C\, f(x, y)\, dS = C \iint_D f(x, y)\, dS, \text{ де } C = const.$$

2) Подвійний інтеграл від скінченної алгебраїчної суми функцій дорівнює такій же сумі подвійних інтегралів від кожного доданка окремо:

$$\iint_D \big(f(x, y) + g(x, y) - h(x, y)\big) dS =$$

$$= \iint_D f(x, y)\, dS + \iint_D g(x, y)\, dS - \iint_D h(x, y)\, dS.$$

3) Якщо функція $f(x, y) \geq 0$ в області D, то $\iint_D f(x, y)\, dS \geq 0$.

4) Якщо дві функції в області D задовольняють нерівності $f(x, y) \geq g(x, y)$, то $\iint_D f(x, y)\, dS \geq \iint_D g(x, y)\, dS$.

5) (Адитивність). Якщо область інтегрування D функції $f(x, y)$ розбити на дві частини D_1 і D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то $\iint_D f(x, y)\, dS = \iint_{D_1} f(x, y)\, dS + \iint_{D_2} f(x, y)\, dS$.

6) (Оцінка подвійного інтеграла). Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D площею S, то

$$m S \leq \iint_D f(x, y)\, dS \leq M S,$$

де m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x, y)$ в області D.

7) Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D з площею S. Величина $\mu = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y)\, dS$ називається середнім значенням функції

$f(x,y)$ в області D. Теорема (про середнє значення функції). В області D існує хоча б одна точка $P(\bar{x},\bar{y})$, в якій середнє значення функції досягається:

$$f(\bar{x},\bar{y}) = \mu = \frac{1}{S}\iint_D f(x,y)\,dS.$$

Зауваження. Надалі будемо розглядати лише функції, які неперервні в області інтегрування, що гарантує існування подвійного інтеграла. (Хоча подвійний інтеграл може існувати не тільки для неперервних функцій).

Обчислення подвійного інтеграла у прямокутній системі координат

Оскільки подвійний інтеграл не залежить від способу розбиття, то в декартовій прямокутній системі координат Oxy зручно розбивати область D координатною сіткою, утвореною прямими, які паралельні осям Ox і Oy (рис. 32). Тоді внутрішній елементарний майданчик D_i є прямокутником зі сторонами Δx_i, Δy_i і його площа $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. Відповідно диференціал площі набуває вигляду $dS = dxdy$ і подвійний інтеграл можна подати у формі

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

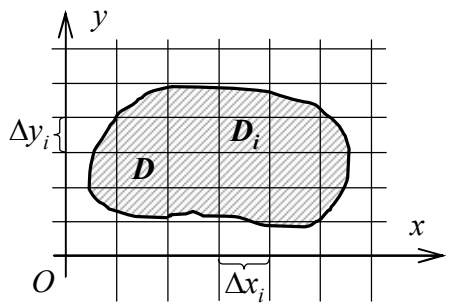


Рисунок 33 – Координатна сітка

Нехай функція $f(x,y)$ невід'ємна в обмеженій замкненій області D. Тоді подвійний інтеграл $V = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ виражає об'єм V вертикального циліндричного тіла (рис. 33) з нижньою основою D, що обмежене зверху поверхнею $z = f(x,y) \geq 0$.

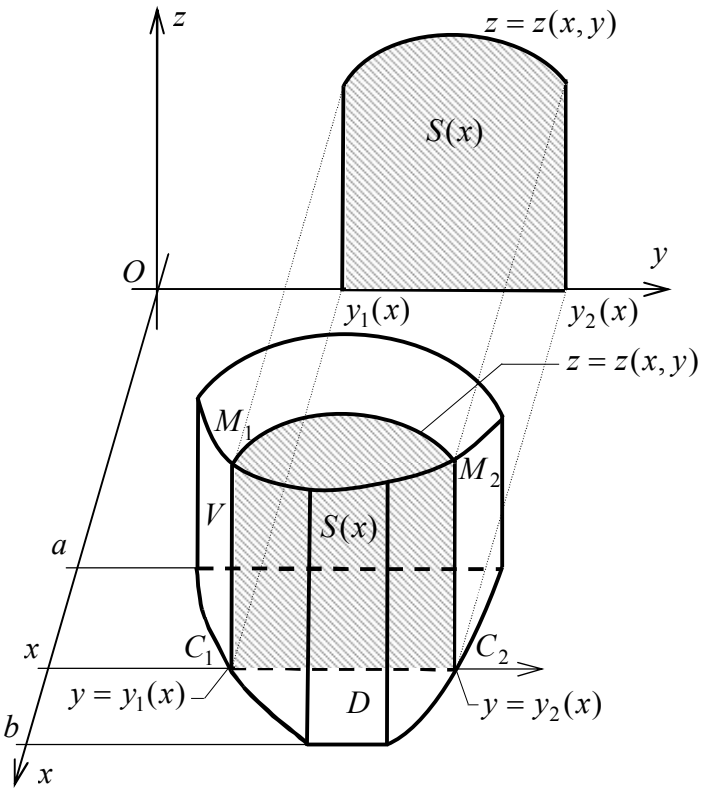


Рисунок 34 – Паралельний переріз

Обчислимо об'єм V по-іншому – методом паралельних перерізів. Припустимо, що область D – правильна в напрямі осі Oy і може бути подана у вигляді

$$D:\left\{(x,y)\middle|\ y_1(x)\le y\le y_2(x),\ x\in[a;b],\ D\xrightarrow{Oy}[a;b]\right\}.$$

Тоді проекцією тіла на вісь Ox є відрізок $[a;b]$. Об'єм V можна знайти так: $V=\int_a^b S(x)\,dx$, де $S(x)$ – площа перерізу тіла площиною $x=C=const$, перпендикулярною до осі Ox, а $x=a$ і $x=b$ – рівняння крайніх площин, між якими лежить дане тіло.

При перетині циліндричного тіла площиною $x=C$, де $C=const$ утворюється криволінійна трапеція $C_1M_1M_2C_2$ (рис. 34). Апліката $z=f(x,y)$ точки лінії M_1M_2 при фіксованому x є функцією лише однієї змінної y, причому аргумент y змінюється в межах від $y_{вх}=y_1(x)$ до $y_{вих}=y_2(x)$. Площа $S(x)$ фігури $C_1M_1M_2C_2$ дорівнює визначеному інтегралу

$$S(x)=\int_{y_{вх}}^{y_{вих}} z\,dy=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.\quad \text{Тоді}\quad V=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Порівнюючи два вирази для об'єму V, одержуємо формулу

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

яка зводить подвійний інтеграл до двократного повторного інтеграла – послідовного обчислення двох звичайних одновимірних інтегралів. Це співвідношення звичайно записують у спрощеній формі

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Спочатку обчислюється внутрішній інтеграл $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ за внутрішньою змінною y в припущенні, що зовнішня змінна x фіксована. У результаті обчислення внутрішнього інтеграла в межах від $y_1(x)$ до $y_2(x)$ одержуємо певну функцію $S(x)$ однієї змінної x.

Зовнішні межі інтегрування a і b – завжди сталі. Обчислюючи зовнішній інтеграл $\int_a^b S(x)\,dx$, дістаємо деяке число I – значення подвійного інтеграла.

Правило знаходження меж інтегрування для правильної в напрямі осі Oy області D:

1) Область D спроектувати паралельно осі Oy на вісь Ox і одержати відрізок $[a;b]$, $a\le x\le b$. Числа a і b – відповідно нижня і верхня межі у зовнішньому інтегралі за x. Вони визначаються крайніми зліва та справа точками області D, які лежать на вертикальних прямих $x=a$ та $x=b$, що обмежують цю область.

2) Провести через будь-яку внутрішню точку x відрізка $[a;b]$ пряму, паралельну осі Oy і в тому ж напрямі. Ця пряма перетинає межу області D у двох точках – входу C_1 і виходу C_2. Щоб визначити внутрішні межі інтегрування за y – ординати вказаних точок, необхідно розв'язати рівняння лінії входу і лінії виходу відносно y: $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$. Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$, що на відрізку $[a;b]$ обмежені і зберігають аналітичний вираз, – відповідно

нижня і верхня межі у внутрішньому інтегралі за y.

Приклад. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (1+x+y)dydx,$$

де область D: $x+y=2$; $y=x^2$; $x\ge 0$; $y\ge 0$.

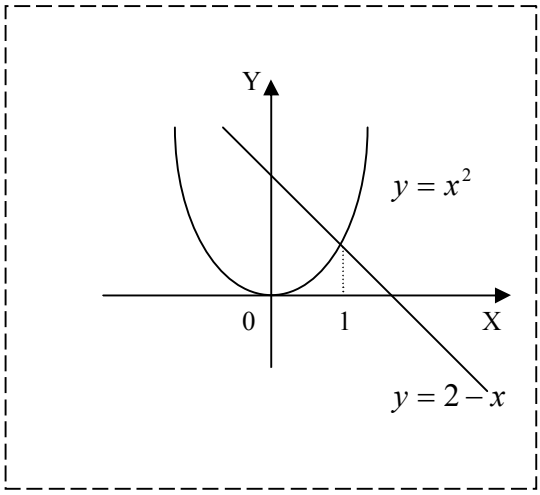


Рисунок 35 – Область інтегрування

Запишемо повторний інтеграл

$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x}(1+x+y)dy=\int_0^1\left[\int_{x^2}^{2-x}(1+x+y)dy\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[\left((1+x)y+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{2-x}\right]dx=$$

$$=\int\left[(1+x)(2-x)+\frac{(2-x^2)}{2}-(1+x)x^2-\frac{(x^2)^2}{2}\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left(4-x-\frac{3}{2}x^2-x^3-\frac{1}{2}x^4\right)dx=$$

$$=\left(4x-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{53}{20}.$$

Заміна порядку інтегрування

Розглянемо на прикладі. Нехай задано інтеграл

$$\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx,$$

в якому зовнішня змінна інтегрування x, а внутрішня y. Поставимо задачу: змінити порядок інтегрування, тобто зовнішньою змінною зробити y,

а внутрішньою x.

За заданими границями інтегрування відновимо область інтегрування:

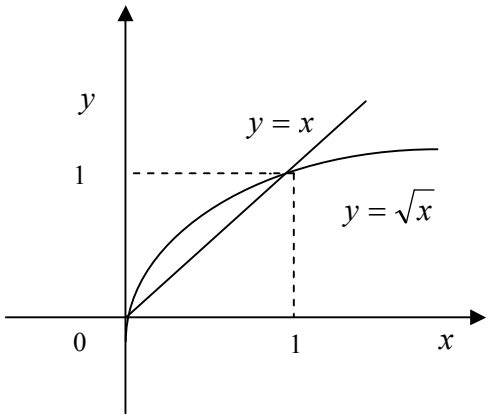


Рисунок 36 – Область інтегрування

Розставимо границі інтегрування у новому порядку:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)dxdy .$$

Приклад. Змінивши порядок інтегрування обчислити інтеграл

$$\int_0^1 dy \int_0^y (x+y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} (x+y)dx .$$

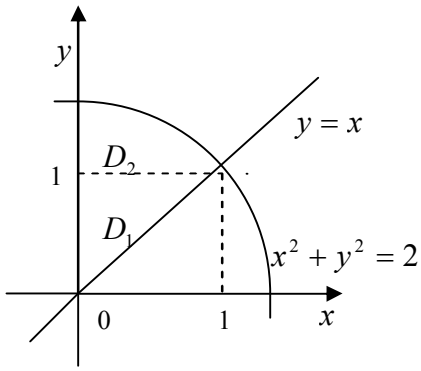


Рисунок 37 – Область інтегрування

За заданими границями інтегрування відновимо області інтегрування:

це область D_1 для першого інтегралу та область D_2 для другого. Потім об'єднаємо ці області в одну: $D = D_1 \cup D_2$ і розставимо границі інтегрування в новому порядку по цій області:

$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} (x+y)dy .$$

Нарешті обчислимо одержаний інтеграл

$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} (x+y)dy = \int_0^1 \left[\left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_x^{\sqrt{2-x^2}} dx \right] = \int_0^1 \left[x\sqrt{2-x^2} + \frac{1}{2}\left(2-x^2\right) \right] dx =$$

$$\int_0^1 x\sqrt{2-x^2}\,dx + \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 + \left(x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - 2\sqrt{2}$$

Подвійний інтеграл у полярній системі координат

Нехай у полярній системі координат ρ, φ задана область D, обмежена лініями $\rho = \phi_1(\varphi)$, $\rho = \phi_2(\varphi)$ та променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.

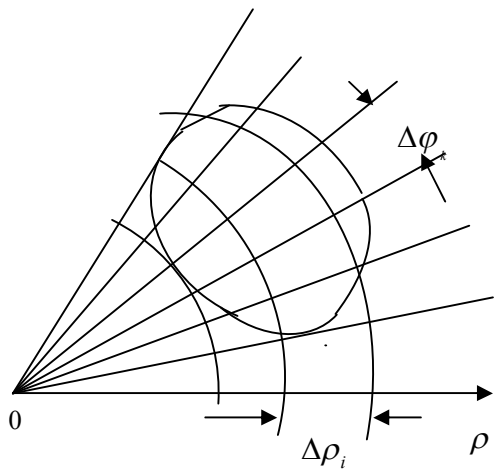


Рисунок 38 – Область інтегрування в полярних координатах

Нехай в області D задана неперервна функція $z = f(\rho, \varphi)$. Розіб'ємо

область D будь-яким чином на площинки Δs_i. В середині площинки візьмемо точку $P_i(\rho_i, \varphi_i)$ і складемо інтегральну суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i .$$

Перейдемо до границі і одержимо інтеграл

$$I = \iint_D f(\rho, \varphi) ds .$$

Займемося обчисленням цього інтегралу. Оскільки інтегральна сума не залежить від вибору способу поділу на площинки Δs_i, то розіб'ємо область D за допомогою променів $\varphi_0 = \alpha,\ \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n = \beta$, та концентричних кіл радіусами $\rho_0, \rho_1, \rho_2, ...\rho_n$. Позначимо Δs_{ik} площинку зі сторонами $\Delta\rho = \rho_i - \rho_{i-1}$ та кутом $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$. Тоді площа

$$\Delta s_{ik} = \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \Delta\varphi_k - \frac{1}{2}\rho_i^2 \Delta\varphi_k = \left(\rho_i + \frac{\Delta\rho_i}{2}\right)\Delta\rho_i \Delta\varphi_k .$$

В середині площинки Δs_{ik} візьмемо точку $P(\overline{\rho}_i, \overline{\varphi}_k)$ і складемо інтегральну суму

$$I_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(\overline{\rho}_i, \overline{\varphi}_k)\Delta s_{ik} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(\overline{\rho}_i, \overline{\varphi}_k)\left(\overline{\rho}_i + \frac{\Delta\overline{\rho}_i}{2}\right)\Delta\rho_i \Delta\varphi_k .$$

Перейдемо до границі при $n \to \infty$ та $m \to \infty$ і одержимо інтеграл

$$I = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho, \varphi)\rho d\rho d\varphi$$

Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай формули $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками $M(x,y)$ області D координатної площини Oxy і точками $M^*(u;v)$ деякої області D^* іншої координатної площини Ouv.

Теорема. Нехай перетворення $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, яке переводить замкнену обмежену область D в замкнену обмежену область D^*, є взаємно однозначним, при цьому функції $x(u,v)$, $y(u,v)$ мають в області D^* неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\partial x/\partial u & \partial x/\partial v\\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v\end{vmatrix}\neq 0,$$

а функція $f(x,y)$ неперервна в області D. Тоді справджується формула заміни змінних у подвійному інтегралі

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|du\,dv.$$

Функціональний визначник $J(u,v)$ називається визначником Якобі (якобіаном). Модуль якобіана визначає коефіцієнт зміни нескінченно малої площі при відповідному перетворенні координат.

Правило. Виконуючи заміну змінних у подвійному інтегралі, треба елемент площі $dS=dxdy$ в старих координатах x, y замінити елементом площі $dS^*=\left|J(u,v)\right|dudv$ у нових координатах u, v і стару область інтегрування D замінити відповідною їй областю D^*.

Перехід від декартових до полярних координат

Прямокутні x, y і полярні ρ, φ координати зв'язані співвідношеннями: $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$ $\left(0\le\rho<+\infty,\ 0\le\varphi<2\pi\right)$.

У цьому випадку якобіан $J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho$ і тому елемент площі $dS^*=\rho\,d\rho\,d\varphi$. Формула переходу до полярних координат у подвійному інтегралі набуває вигляду

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D^*} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

де область D задана у декартовій системі координат Oxy, а D^* – відповідна їй область у полярній системі координат $O\rho\varphi$.

Тоді справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_{\alpha}^{\alpha} d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho,$$

яка зводить подвійний інтеграл до двократного повторного інтеграла

Зауваження. На практиці перехід до полярних координат здійснюється заміною $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $dxdy = \rho\, d\rho\, d\varphi$ у підінтегральному виразі та відповідним перетворенням рівнянь ліній, що обмежують область інтегрування

Приклад. Перейти до полярних координат і обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, де область D обмежена лінією $x^2 + y^2 = 2x$.

Перейдемо в підінтегральній функції та в рівнянні лінії до полярних координат:

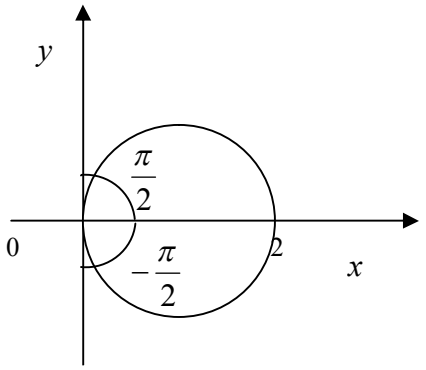


Рисунок 39 – Перехід до полярних координат

$$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \left| \begin{array}{c} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ dxdy = \rho d\rho d\varphi \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \end{array} \right| = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \frac{1}{\sqrt{\rho^2}}\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int\limits_0^{2\cos\varphi} d\rho \right] d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi d\varphi = 2\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2(1-(-1)) = 4$$

Приклад. Перейти до полярних координат і обчислити подвійний інтеграл $I = \iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$, де область D обмежена лініями $y = \sqrt{4-x^2} + 2$; $y = 2$.

Перейдемо в підінтегральній функції та в рівняннях указаних ліній до полярних координат:

$$f(x,y) = 1/(x^2+y^2)^2 = 1/(\rho^2)^2 = 1/\rho^4; \qquad y = \sqrt{4-x^2} + 2;$$

$$\rho\sin\varphi = \sqrt{4-\rho^2\cos^2\varphi}+2;\ \rho^2\sin^2\varphi - 4\rho\sin\varphi + 4 = 4-\rho^2\cos^2\varphi;$$

$\rho = 4\sin\varphi$ – коло з центром $(0;2)$ і радіусом $r = 2$;

$y = 2$; $\rho\sin\varphi = 2$; $\rho = 2/\sin\varphi$ – горизонтальна пряма.

Знайдемо точки перетину цих ліній:

$$\begin{cases} \rho = 4\sin\varphi; & 4\sin\varphi = 2/\sin\varphi; \quad \varphi_1 = \pi/4;\ \varphi_1 = 3\pi/4; \\ \rho = 2/\sin\varphi; & \sin\varphi = \pm\sqrt{2}/2; \quad \rho_1 = 2\sqrt{2};\ \rho_2 = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

На рис. 40 область D подана як правильна в напрямі координатних променів $\varphi = const$. Тоді

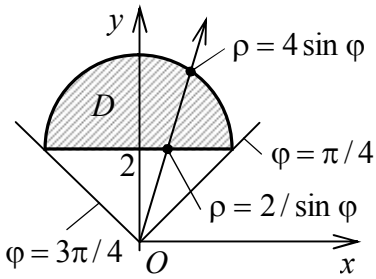


Рисунок 40 – Область інтегрування в полярних координатах

$$I = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_{2/\sin\varphi}^{4\sin\varphi} \frac{\rho d\rho}{\rho^4} =$$

$$= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(-(\rho^{-2}/2)\Big|_{2/\sin\varphi}^{4\sin\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{32}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{1}{8}\times$$

$$\times \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{32}\cdot ctg\,\varphi\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} +$$

$$+\frac{1}{16}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\cdot\varphi\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} - \frac{1}{32}\cdot\sin 2\varphi\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} =$$

$$= -1/16 + \pi/32 + 1/16 = \pi/32.$$

$$u_1 = \sin(\pi/2) = 1;\ u_1 = \sin(3\pi/2) = -1\Big| = -(9/4)\int_1^{-1} u^2 du =$$

$$= -(3/4)\cdot u^3\Big|_1^{-1} = 3/2.$$

ЛЕКЦІЯ 10 ЗАДАЧА ПРО МАСУ ЦИЛІНДРИЧНОГО ТІЛА. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ В ДЕКАРТОВИХ, ЦИЛІНДРИЧНИХ І СФЕРИЧНИХ КООРДИНАТАХ

Задача про масу просторового тіла

Потрійний інтеграл і його властивості

Нехай у тривимірному просторі задана замкнена обмежена область V, яка суцільно заповнена речовиною з об'ємною густиною $\mu = f(x, y, z)$. Знайдемо масу m цього тіла V.

Для цього розіб'ємо область V сіткою довільних кусково-гладких поверхонь на елементарні частини V_i $(i = \overline{1,n})$, що не мають спільних внутрішніх точок. Позначимо об'єм комірки V_i через ΔV_i, а її діаметр (довжину найбільшої хорди, що з'єднує дві точки межі області V_i) – через d_i, $i = \overline{1,n}$. У кожній комірці V_i візьмемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Можна наближено вважати, що густина в межах елементарної області V_i однакова і дорівнює значенню $\mu_i = f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$ у виділеній точці. Тоді для маси Δm_i комірки V_i справджується наближена рівність $\Delta m_i \approx \mu_i \Delta V_i = \ = f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i$. Відповідно маса m всього тіла V наближено визначається за формулою $m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$.

Вираз $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ називається інтегральною сумою функції $f(x, y, z)$ по області V.

Природно границю інтегральної суми при умові, що кожна комірка V_i стягується в точку $(\max d_i \to 0)$ і, відповідно, їх число n необмежено збільшується $(n \to \infty)$, прийняти за масу m тіла V:

$$m = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i \ .$$

Скінченна границя інтегральної суми при необмеженому здрібненні розбиття тривимірної області V, якщо вона існує і не залежить від способу поділу на елементарні комірки V_i та від вибору точок $M_i(x_i, y_i, z_i)$ у них, називається потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ по області V:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i \ ,$$

де x, y і z – змінні інтегрування; $f(x, y, z)$ – підінтегральна функція; dV – елемент (диференціал) об'єму; $f(x, y, z)\,dV$ – підінтегральний вираз; V – область інтегрування.

Таким чином $m = \iiint_V \mu(x, y, z)\,dV$ (фізичний зміст потрійного інтеграла).

Якщо в потрійному інтегралі підінтегральну функцію прийняти тотожно рівною одиниці $f(x, y, z) \equiv 1$, то його значення чисельно дорівнюватиме об'єму області інтегрування V: $V = \iiint_V dV$ (геометричний зміст потрійного інтеграла).

Обчислення потрійного інтеграла у прямокутній системі координат

Нехай у тривимірному просторі визначена декартова прямокутна система координат $Oxyz$. Оскільки потрійний інтеграл не залежить від способу розбиття, то в цій системі координат зручно розбивати область V координатною сіткою, утвореною площинами, які паралельні координатним площинам. Тоді внутрішня елементарна комірка V_i є прямокутним паралелепіпедом зі сторонами Δx_i, Δy_i і Δz_i. Його об'єм $\Delta V_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$. Відповідно диференціал об'єму набуває вигляду $dV = dx\,dy\,dz$ і потрійний інтеграл можна подати у формі $\iiint_V f(x, y, z)\,dxdydz$.

Нехай тривимірна область V – правильна в напрямі осі Oz.

Тоді справедлива формула

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

за якою спочатку обчислюється внутрішній одновимірний інтеграл по z, а потім зовнішній подвійний інтеграл по x, y.

Якщо при цьому плоска область D_{xy}, що служить проекцією тіла V на площину Oxy, є правильною в напрямі осі Oy, то приходимо до формули

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

яка зводить потрійний інтеграл до трикратного повторного інтеграла.

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz,$$

Якщо область $V: x+y+z=1;\ x=0;\ y=0;\ z=0$.

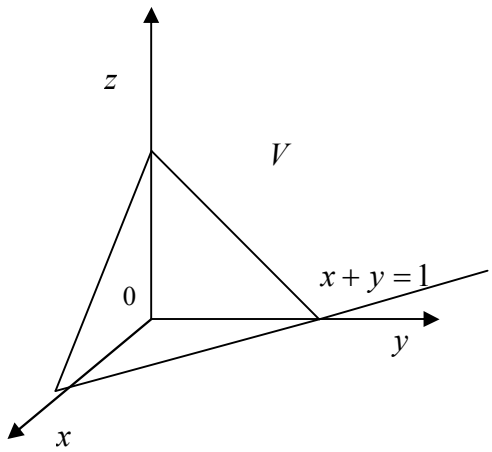


Рисунок 41 – Просторова область інтегрування

Запишемо потрійний інтеграл як трикратний та розставимо границі

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} xyzdz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left[\int\limits_0^{1-x-y} xyzdz \right] dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left[xy \frac{z^2}{2} \Bigg|_0^{1-x-y} \right] dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{1}{2} xy(1-x-y)^2\,dy =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\int_0^{1-x} xy\left((1-x)^2-2(1-x)y+y^2\right)dy\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[x(1-x)^2\frac{y^2}{2}-2x(1-x)\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}\right]\Bigg|_0^{1-x}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{2}x(1-x)^4-\frac{2}{3}x(1-x)^4+\frac{1}{4}x(1-x)^4\right)dx=$$

$$=\frac{1}{24}\int_0^1 x(1-x)^4dx=\left|\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=(1-x)^4dx & v=-\frac{1}{5}(1-x)^5\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{24}\left(-\frac{1}{5}x(1-x)^5-\frac{1}{30}(1-x)^6\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{24}\frac{1}{30}=\frac{1}{720}.$$

Заміна змінних у потрійному інтегралі

Потрійний інтеграл у циліндричній та сферичній системах координат

Перехід до циліндричних координат

Визначимо положення довільної точки $M(x,y,z)$ у просторі її декартовою координатою – аплікатою z і полярними координатами ρ і φ її проекції M_1 на площину Oxy (рис. 41). Величини ρ, φ і z називаються циліндричними координатами точки M.

Прямокутні і циліндричні координати точки M зв'язані співвідношеннями:

$$x=\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi;\ \ z=z\ \ \left(0\le\rho<+\infty,\ 0\le\varphi<2\pi\right),$$

які відображають область $0\le\rho<+\infty$, $0\le\varphi<2\pi$, $-\infty<z<+\infty$ криволінійного простору (ρ,φ,z) на весь простір (x,y,z).

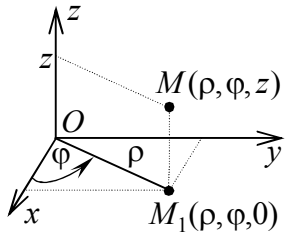


Рисунок 42 – Прямокутні і циліндричні координати точки

Координатну сітку циліндричної системи координат утворюють кругові циліндри $\rho = const$ з віссю Oz, півплощини $\varphi = const$, що виходять з осі Oz, і площини $z = const$, паралельні площині Oxy.

Якобіан у циліндричних координатах має вигляд

$$J(\rho,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho .$$

Тоді елемент об'єму $dV = \rho\, d\rho d\varphi dz$. Формула переходу до потрійного інтеграла у циліндричних координатах

$$\iiint_V f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_{V^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, \rho\, d\rho d\varphi dz .$$

Перехід до сферичних координат. Визначимо положення довільної точки $M(x,y,z)$ у просторі за допомогою трьох величин (рис. 43): відстані $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ від початку координат O до точки M (радіус-вектор), кута φ між додатним напрямом осі Ox та проекцією OM_1 відрізка OM на площину Oxy (довгота), кута θ між додатним напрямом осі Oz та відрізком OM (широта). Величини r, φ і θ називаються сферичними координатами точки M. Прямокутні і сферичні координати точки M зв'язані співвідношеннями:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta;\ y = r\sin\varphi\sin\theta;\ z = r\cos\theta;\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\left(0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi\right)$$

які відображають область $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$ криволінійного простору (r,φ,θ) на весь простір (x,y,z).

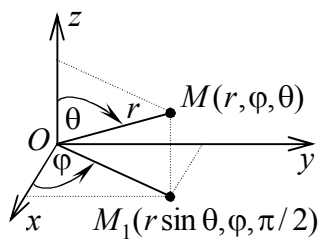


Рисунок 43 – Прямокутні і сферичні координати точки

Координатну сітку сферичної системи координат утворюють сфери $r = const$ з центром у початку координат O, півплощини $\varphi = const$, що виходять з осі Oz, і кругові півконуси $\theta = const$ з віссю Oz.

Якобіан у сферичних координатах має вигляд

$$J(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Тоді елемент об'єму $dV = r^2\sin\theta\, dr d\varphi d\theta$. Формула переходу до потрійного інтеграла у сферичних координатах

$$\iiint_V f(x,y,z)\, dxdydz =$$

$$= \iiint_{V^*} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, dr d\varphi d\theta.$$

Приклад. Знайти потрійний інтеграл $I = \iiint\limits_V \frac{xyz\, dxdydz}{x^2+y^2}$, де область V – розміщена в першому октанті ($x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$) частина просторового тіла, обмеженого параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$ і круговим півконусом $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$.

Знайдемо лінію перетину параболоїда і півконуса:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2; \\ z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}; \end{cases} \quad \begin{matrix} z = 2 - \sqrt{z}; \\ z = 1; \end{matrix} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ z = 1 \end{cases}$$

– коло у площині $z = 1$, що має радіус $r = 1$ і центр $(0;0;1)$.

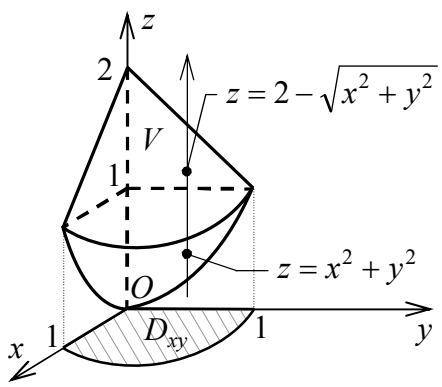


Рисунок 44 – Просторова область інтегрування

На рис. 44 тіло V подане як правильне в напрямі осі Oz. Його проекцією на площину Oxy служить область D_{xy} – частина круга з центром $(0;0)$ і радіусом $r = 1$, що відповідає першій чверті ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

Крім того, підінтегральна функція містить суму квадратів двох координат. Тому раціонально перейти до циліндричних координат:

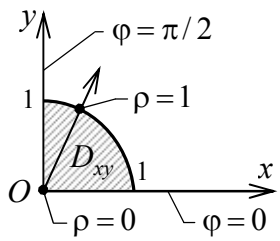


Рисунок 45 – Область інтегрування

$$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \;\Rightarrow\; z = 2 - \rho;$$

$$z = x^2 + y^2 \;\Rightarrow\; z = \rho^2;$$

$$f(x, y, z) = xyz \big/ (x^2 + y^2) =$$

$$= \rho\cos\varphi \cdot \rho\sin\varphi \cdot z \big/ \rho^2 = z\cos\varphi\sin\varphi.$$

На рис. 45 область D_{xy} зображена як правильна в напрямі координатних променів $\varphi = const$.

Обчислимо інтеграл, застосовуючи циліндричні координати:

$$I = \iiint\limits_V \frac{xyz\,dxdydz}{x^2 + y^2} = \iiint\limits_{V^*} z\cos\varphi\sin\varphi\,\rho\,d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\,\sin\varphi \times$$

$$\times\, d\varphi \int\limits_0^1 \rho\, d\rho \int\limits_{\rho^2}^{2-\rho} z\,dz = \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^1 \rho\,(z^2/2)\Big|_{\rho^2}^{2-\rho} d\rho = \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi \times$$

$$\times \sin\varphi\, d\varphi \int_0^1 \rho\,(z^2/2)\Big|_{\rho^2}^{2-\rho} d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi \int_0^1 (4\rho - 4\rho^2 + \rho^3 -$$

$$-\rho^5)\, d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi\,(2\rho^2 - 4\rho^3/3 + \rho^4/4 - \rho^6/6)\Big|_0^1 d\varphi =$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\, d(\sin\varphi) = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{16}.$$

Приклад. Знайти потрійний інтеграл $I = \iiint\limits_V \frac{z^2\,dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, де область V обмежена півсферою $z = 1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ і круговим півконусом $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Лінією перетину вказаних поверхонь є коло з центром $(0;0;1)$ і радіусом $r = 1$, що лежить у площині $z = 1$.

Тіло V зображене на рис. 46. Його проекцією на площину Oxy служить круг D_{xy} з центром $(0;0)$ і радіусом $r = 1$.

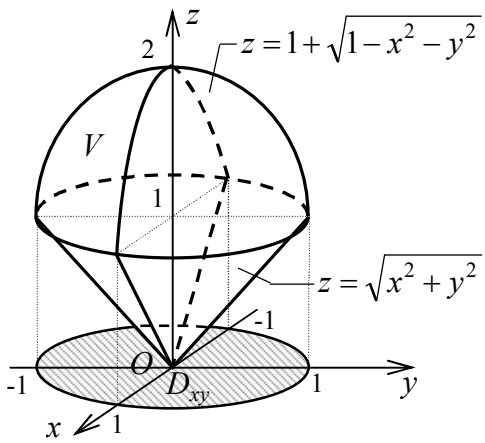


Рисунок 46 – Просторова область інтегрування

Перейдемо до сферичних координат:

$$z = 1+\sqrt{1-x^2-y^2} \;\Rightarrow\; \left((r\cos\theta)^2 - 1\right)^2 = 1 - (r\cos\varphi\sin\theta)^2 -$$

$$-(r\sin\varphi\sin\theta)^2;\; r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 1 = 1 - r^2\sin^2\theta;\; r = 2\cos\theta;$$

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; r\cos\theta = \sqrt{(r\cos\varphi\sin\theta)^2 + (r\sin\varphi\sin\theta)^2};$$

$$\cos\theta = \sin\theta;\quad tg\,\theta = 1;\quad \theta = \pi/4;$$

$$f(x,y,z) = z^2/(x^2+y^2+z^2) = r^2\cos^2\theta/r^2 = \cos^2\theta.$$

Оскільки проекцією тіла V є круг, то кут φ змінюється в межах від 0 до

2π. При фіксованому значенні φ кут θ пробігає значення від 0 до $\pi/4$. При фіксованих значеннях обох кутів φ і θ лінійна координата r змінюється в межах від 0 до $2\cos\theta$. Тоді

$$I=\iiint\limits_{V}\frac{z^2\,dxdydz}{x^2+y^2+z^2}=\iiint\limits_{V^*}\cos^2\theta\cdot r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/4}\cos^2\theta\times$$

$$\times\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{2\cos\theta}r^2dr=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/4}\cos^2\theta\sin\theta\cdot(r^3/3)\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta=\frac{8}{3}\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/4}\cos^5\theta\sin\theta\,d\theta=-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{6}\int\limits_0^{2\pi}\cos^6\theta\Big|_0^{\pi/4}d\varphi=-\frac{4}{9}\int\limits_0^{2\pi}\left(\left(\sqrt{2}/2\right)^6-\right.$$

$$\left.-1^6\right)d\varphi=\frac{7}{18}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{7\pi}{9}.$$

ЛЕКЦІЯ 11 ЗАСТОСУВАННЯ КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ПОВЕРХНІ ТА ОБ'ЄМУ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА. ОБЧИСЛЕННЯ КООРДИНАТ ЦЕНТРА МАС ПЛОСКОЇ ФІГУРИ. ОБЧИСЛЕННЯ МОМЕНТІВ ІНЕРЦІЇ ПЛОСКИХ ФІГУР. ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМУ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОТРІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

Геометричні застосування подвійного інтеграла

Площа плоскої фігури. Якщо в подвійному інтегралі $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ підінтегральну функцію прийняти тотожно рівною одиниці $f(x,y)\equiv 1$, то його значення чисельно дорівнюватиме площі області інтегрування D:

$$S=\iint_D dx\,dy.$$

Приклад. За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу плоскої області D, що обмежена півколом $y=\sqrt{2ax-x^2}$, дугою параболи $y=\sqrt{2ax}$ і прямою $x=2a$ $(a>0)$.

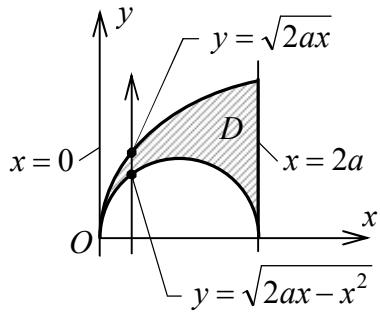


Рисунок 47 – Площа плоскої фігури

На рис. 47 область D подана як правильна в напрямі осі Oy. Тоді

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^{2a}dx\int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}dy=\int\limits_0^{2a}\left(\sqrt{2ax}-\sqrt{2ax-x^2}\right)dx=\int\limits_0^{2a}\sqrt{2ax}dx-$$

$$-\int\limits_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx=\sqrt{2a}\cdot(2/3)x^{3/2}\Big|_0^{2a}-\int\limits_0^{2a}\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx=$$

$$=\Big|\,x-a=a\sin t;\ dx=a\cos t\,dt;\ t=\arcsin(x/a-1);$$

$$t_1=-\pi/2;\ t_2=\pi/2;\ \sqrt{a^2-(x-a)^2}=a\cos t\Big|=\sqrt{2a}\cdot(2/3)\sqrt{8a^3}-$$

$$-a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=(8/3)a^2-(1/2)a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{8}{3}a^2-\frac{1}{2}a^2\cdot\left(t+(1/2)\sin 2t\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{(16-3\pi)}{6}a^2\ \text{(кв. од.)}.$$

Приклад. Перейти до полярних координат і обчислити площу плоскої області D, що обмежена двома півколами $y=\sqrt{2ax-x^2}$, $y=\sqrt{4ax-x^2}$ і прямою $y=x/\sqrt{3}$ $(a>0)$.

Перейдемо в рівняннях указаних ліній до полярних координат:

$$y=\sqrt{2ax-x^2}\ ;\quad \rho\sin\varphi=\sqrt{2a\rho\cos\varphi-\rho^2\cos^2\varphi}\ ;$$

$$\rho^2\sin^2\varphi=2a\cos\varphi-\rho^2\cos^2\varphi\ ;\quad \rho^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=2a\cos\varphi\ ;$$

$\rho=2a\cos\varphi$ – коло з центром $(a;0)$ і радіусом $r=a$;

$$y=\sqrt{4ax-x^2}\ ;\quad \rho\sin\varphi=\sqrt{4a\rho\cos\varphi-\rho^2\cos^2\varphi}\ ;$$

$\rho=4a\cos\varphi$ – коло з центром $(2a;0)$ і радіусом $r=2a$;

$y=x/\sqrt{3}$; $\rho\sin\varphi=\rho\cos\varphi/\sqrt{3}$; $tg\ \varphi=\sqrt{3}/3$; $\varphi=\pi/6$ – промінь, що виходить з полюса.

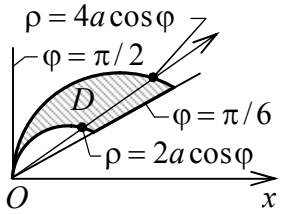


Рисунок 48 – Область інтегрування

На рис. 48 область D подана як правильна в напрямі координатних променів $\varphi = const$. Тоді

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D^*} \rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{2a\cos\varphi}^{4a\cos\varphi} \rho d\rho =$$

$$= \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \left((\rho^2/2)\Big|_{2a\cos\varphi}^{4a\cos\varphi} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} (16a^2 \times$$

$$\times \cos^2\varphi - 4a^2\cos^2\varphi) d\varphi = 3a^2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= 3a^2 (\varphi + (1/2)\sin 2\varphi)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{a^2}{4}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right) \text{ (кв. од.).}$$

Об'єм тіла. Нехай правильне у напрямі осі Oz просторове тіло V, яке обмежене знизу і зверху поверхнями входу $z = z_1(x, y)$ і виходу $z = z_2(x, y)$, проектується на площину Oxy в область D_{xy}. Тоді його об’єм обчислюється за формулою

$$V = \iint_{D_{xy}} \left(z_2(x, y) - z_1(x, y) \right) dxdy .$$

Зауваження. Якщо тіло V – правильне в напрямі осі Ox чи Oy, то його об’єм обчислюється за аналогічною формулою відповідно

$$V = \iint\limits_{D_{yz}} \left(x_2(x, y) - x_1(x, y) \right) dydz \text{ і } V = \iint\limits_{D_{xz}} \left(y_2(x, y) - y_1(x, y) \right) dxdz .$$

Приклад. За допомогою подвійного інтеграла обчислити об’єм тіла V, що обмежене параболічним циліндром $z = 2 - y^2$, площиною $x + 2y = 2$ та координатними площинами $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$.

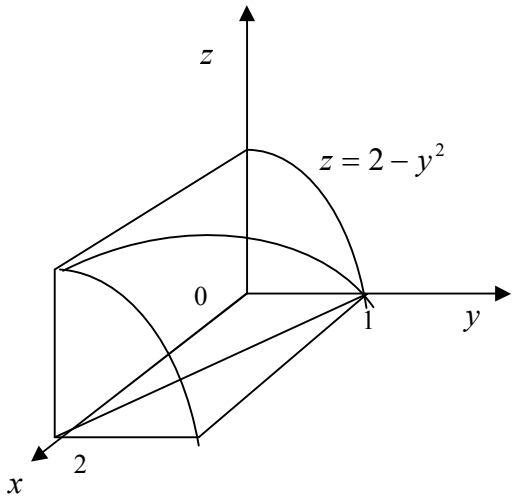


Рисунок 49 – Об’єм тіла

За формулою

$$V = \iint\limits_D \left(2 - y^2\right) dxdy ,$$

де область D на площині $x0y$ обмежена прямою $x + 2y = 2$ та координатними осями $x = 0,\ \ y = 0$. Розставимо границі інтегрування по області D та обчислимо інтеграл

$$V = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{2-x}{2}} \left(2 - y^2\right) dy = \int \left[\left(2y - \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^{\frac{2-x}{2}} \right] dx =$$

$$= \int \left(2 - x - \frac{1}{3} \frac{(2-x)^3}{8} \right) dx = \left(2x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24} \frac{(2-x)^4}{4} \right) \Bigg|_0^2 = 4 - 2 + \frac{1}{24} \frac{2^4}{4} = \frac{13}{6} \text{ (куб.од.).}$$

Приклад. Перейти до полярних координат і обчислити об’єм тіла V, що обмежене півсферою $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ і параболоїдом обертання $z = 1 + (x^2 + y^2)/8$.

Знайдемо лінію перетину зазначених поверхонь:

$$\begin{cases} z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}; \\ z = 1 + (x^2 + y^2)/8; \end{cases} \quad \begin{matrix} \sqrt{25 - x^2 - y^2} = 1 + (x^2 + y^2)/8; \\ (x^2 + y^2)^2 + 80(x^2 + y^2) - 1536 = 0; \end{matrix}$$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16; \\ z = 3 \end{cases}$ – коло з центром $(0;0;3)$ і радіусом $r = 4$.

Проекцією тіла V на площину Oxy служить область D_{xy} – круг з центром $(0;0)$ і радіусом $r = 4$. На рис. 49 це тіло подане як правильне в напрямі осі Oz.

Тоді

$$V = \iint_{D_{xy}} \left(\sqrt{25 - x^2 - y^2} - 1 - (x^2 + y^2)/8\right) dxdy .$$

Область D_{xy} – правильна в напрямі координатних променів $\varphi = const$ і може бути задана як $D_{xy} : 0 \le \rho \le 4;\ \varphi \in [0; 2\pi]$.

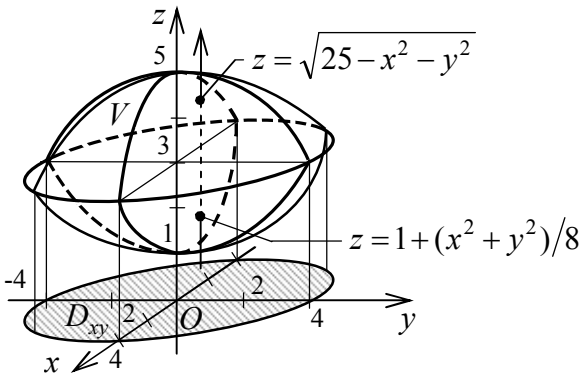


Рисунок 50 – Об'єм тіла

Перейдемо в подвійному інтегралі до полярних координат і дістанемо:

$$V = \iint_{D^*_{xy}} \left(\sqrt{25 - \rho^2} - 1 - \rho^2/8\right) \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^4 (25 - \rho^2)^{1/2} \rho\, d\rho - \right.$$

$$\left. - \int_0^4 \rho\, d\rho - (1/8) \int_0^4 \rho^3\, d\rho \right) d\varphi = \Big| 25 - \rho^2 = u^2;\ \rho\, d\rho = -u du;$$

$$u = (25 - \rho^2)^{1/2};\ u_1 = 5;\ u_2 = 3 \Big| = \int_0^{2\pi} \left(- \int_5^3 u^2\, du - (1/2) \cdot \rho^2 \Big|_0^4 - \right.$$

$$\left. - (1/32) \cdot \rho^4 \Big|_0^4 \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(- (1/3) \cdot u^3 \Big|_5^3 - 8 - 8 \right) d\varphi = \frac{50}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= (50/3) \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = 100\pi/3 \quad \text{(куб. од.)}.$$

Площа поверхні

Нехай правильна у напрямі осі Oz поверхня σ проектується на координатну площину Oxy в замкнену обмежену область D_{xy} і задається рівнянням $z = z(x, y)$ (рис. 51).

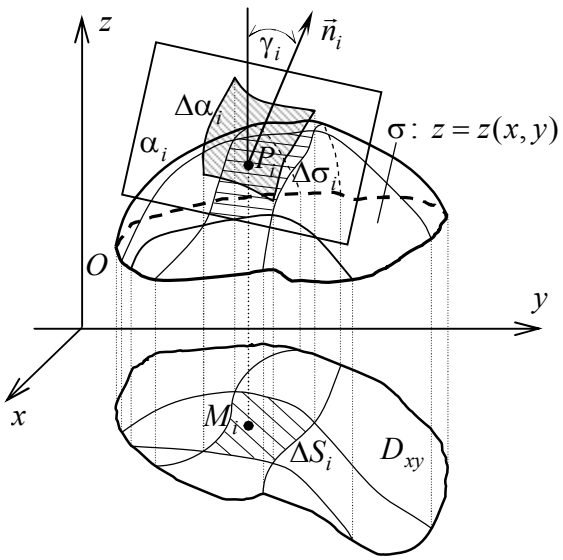


Рисунок 51 – Площа поверхні

Припустимо, що функція $z(x, y)$ неперервна разом зі своїми частинними похідними z'_x і z'_y в області D_{xy}. Тоді у кожній точці поверхні σ існує дотична площина, що неперервно змінює своє положення при переході від однієї точки до іншої, тобто поверхня σ є гладкою. Знайдемо площу S_σ цієї поверхні.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$, що не мають спільних внутрішніх точок. На кожному майданчику $\Delta\sigma_i$, який проектується на координатну площину Oxy в частинну область ΔS_i з діаметром d_i, візьмемо довільну точку $P_i(x_i, y_i, z(x_i, y_i))$, проведемо в ній дотичну площину α_i і одиничний вектор нормалі $\vec{n}_i = (-z'_x(x_i, y_i), -z'_y(x_i, y_i), 1)$, який утворює гострий кут γ_i з віссю Oz. При цьому

$$\cos\gamma_i = 1 \Big/ \sqrt{z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i) + 1} > 0 .$$

На площині α_i виділимо частину $\Delta\alpha_i$, проекцією якої служить елементарна область ΔS_i. Їх площі зв'язані співвідношенням

$$\Delta\alpha_i = \Delta S_i / |\cos\gamma_i| = \sqrt{z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i) + 1}\,\Delta S_i .$$

За площу S_σ поверхні σ приймають скінченну границю

$$S_\sigma = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i) + 1}\,\Delta S_i ,$$

яка не залежить від способу розбиття поверхні σ та від вибору точок P_i. Вираз

$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{z'^2_x(x_i,y_i)+z'^2_y(x_i,y_i)+1}\,\Delta S_i$ є інтегральною сумою неперервної функції $f(x,y)=\sqrt{z'^2_x(x,y)+z'^2_y(x,y)+1}$ по області D_{xy}. Тому зазначена границя визначає подвійний інтеграл

$$S_\sigma=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dx\,dy,$$

за яким обчислюється площа S_σ поверхні σ, що правильна у напрямі осі Oz. Відповідно елемент (диференціал) площі $d\sigma$ такої поверхні визначається рівністю $d\sigma=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dx\,dy$.

Приклад. За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу частини верхньої півсфери σ: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, яка вирізається вертикальним циліндром $x=\sqrt{2y-y^2}$ і площиною $x=0$.

На рис. 51 зазначена частина півсфери подана як правильна в напрямі осі Oz. Її проекцією на площину Oxy служить область D_{xy} – півкруг з центром $(0;1)$ і радіусом $r=1$.

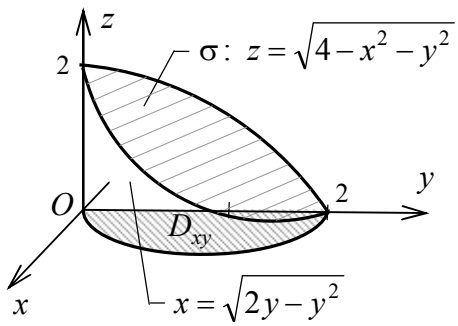


Рисунок 52 – Поверхня півсфери

З рівняння півсфери дістаємо:

$$z'_x=-x\Big/\sqrt{4-x^2-y^2};$$
$$z'_y=-y\Big/\sqrt{4-x^2-y^2}.$$

Тоді

$$S_\sigma=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy=2\iint_{D_{xy}}\frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Оскільки область інтегрування D_{xy} – півкруг, то зручно перейти до полярних координат:

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi;$$
$$x^2 + y^2 = \rho^2; \quad dxdy = \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

На рис. 53 область D_{xy} подана як правильна в напрямі координатних променів.

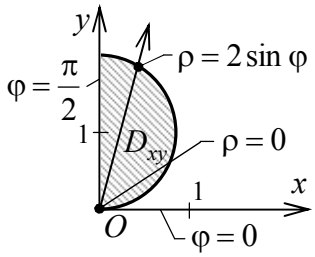


Рисунок 53 – Область інтегрування

Тоді

$$S_\sigma = 2\iint\limits_{D^*_{xy}} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} = 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} = -2\times$$
$$\times \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{4-\rho^2}\Big|_0^{2\sin\varphi} d\varphi = -4\int\limits_0^{\pi/2} (\cos\varphi - 1)\, d\varphi = -4(\sin\varphi - \varphi)\Big|_0^{\pi/2} =$$
$$= -4(1-\pi/2) = 2\pi - 4 \text{ (кв. од.)}.$$

Маса пластини

Нехай на координатній площині Oxy лежить матеріальна пластина, що має форму обмеженої замкненої області D, у кожній точці якої поверхнева густина визначається неперервною функцією $\mu = \mu(x, y)$. Тоді маса пластини обчислюються за формулою

$$m = \iint\limits_D \mu(x, y)\, dxdy.$$

Статичні моменти, центр маси пластини

Розіб'ємо область D довільними кусково-гладкими лініями на елементарні

частини D_i $(i=\overline{1,n})$, що не мають спільних внутрішніх точок. Виберемо на кожному майданчику D_i з площею ΔS_i і діаметром d_i довільну точку $M_i(x_i, y_i)$ і наближено вважатимемо, що його маса Δm_i дорівнює $\mu(x_i, y_i)\Delta S_i$ і зосереджена у вибраній точці $M_i(x_i, y_i)$. Тоді пластину можна розглядати як систему всіх цих матеріальних точок. Її статичні моменти M_x і M_y відносно осей Ox і Oy наближено визначаються за формулами

$$M_x \approx \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(x_i, y_i)\Delta S_i ;$$

$$M_y \approx \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(x_i, y_i)\Delta S_i .$$

Щоб знайти точні значення вказаних величин, перейдемо в цих рівностях до границі при необмеженому здрібненні розбиття області D: $\max d_i \to 0$. Дістанемо

$$M_x = \iint_D y\mu(x,y)\,dxdy ; \qquad M_y = \iint_D x\mu(x,y)\,dxdy .$$

Відповідно координати x_c та y_c центра маси пластини обчислюються за формулами $x_c = M_y/m$; $y_c = M_x/m$.

Зауваження. Якщо пластина однорідна, то $\mu = \mu_0 = const$.

Моменти інерції пластини

Замінивши пластину системою матеріальних точок $M_i(x_i, y_i)$, $i=\overline{1,n}$ з масами $\Delta m_i \approx \mu(x_i, y_i)\Delta S_i$, дістанемо наступні наближені рівності для її моментів інерції I_x, I_y і I_0 відносно осей Ox, Oy і початку координат O:

$$I_x \approx \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \mu(x_i, y_i)\Delta S_i ;$$

$$I_y \approx \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \mu(x_i, y_i)\Delta S_i ;$$

$$I_0 \approx \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)\Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2)\mu(x_i, y_i)\Delta S_i .$$

Перейшовши до границі при $\max d_i \to 0$, з цих співвідношень одержимо точні формули для обчислення моментів інерції

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x,y)\,dxdy ; \qquad I_y = \iint_D x^2 \mu(x,y)\,dxdy ;$$

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\mu(x, y)\,dxdy = I_x + I_y .$$

Приклад Знайти масу пластини D, обмеженої лініями $y = e^x$, $y = e^{-x}$ і $x = 1$, якщо поверхнева густина задається функцією $\mu(x, y) = x + 4y$.

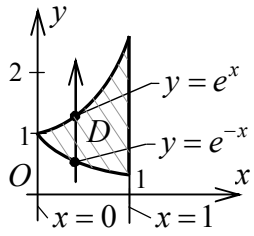


Рисунок 54 – Маса пластини

На рис. 54 пластина D зображена як правильна в напрямі осі Oy. Обчислимо її масу:

$$m = \iint_D \mu(x, y)\,dxdy = \iint_D (x + 4y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} (x + 4y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 (xy + 2y^2)\Big|_{e^{-x}}^{e^x} dx = \int_0^1 (xe^x - xe^{-x} + 2e^{2x} - 2e^{-2x})\,dx = \int_0^1 xe^x dx -$$

$$- \int_0^1 xe^{-x} dx + 2\int_0^1 e^{2x} dx - 2\int_0^1 e^{-2x} dx = \Big| u_1 = x;\ du_1 = dx;\ dv_1 = e^x dx;$$

$$v_1 = e^x dx;\ u_2 = x;\ du_2 = dx;\ dv_2 = e^{-x} dx;\ v_2 = -e^{-x} \Big| = (xe^x)\Big|_0^1 -$$

$$- \int_0^1 e^x dx + (xe^{-x})\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-x} dx + e^{2x}\Big|_0^1 + e^{-2x}\Big|_0^1 = e - e^x\Big|_0^1 + e^{-1} +$$

$$+ e^{-x}\Big|_0^1 + e^2 - 1 + e^{-2} - 1 = e - e + 1 + e^{-1} + e^{-1} - 1 + e^2 + e^{-2} - 2 =$$

$$= 2e^{-1} + e^2 + e^{-2} - 2 .$$

Приклад. Знайти статичні моменти M_x та M_y відносно осей координат та центр маси $C(x_c, y_c)$ пластини D, обмеженої дугою кривої $y = \sqrt{\sin x}$, $0 \le x \le \pi/2$, віссю Ox і прямою $x = \pi/2$, якщо поверхнева густина $\mu(x, y) = 60y\cos x$.

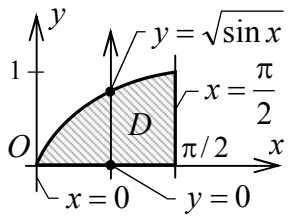


Рисунок 55 – Статичні моменти пластини

На рис. 55 пластина D подана як правильна в напрямі осі Oy. Обчислимо її масу:

$$m=\iint_D \mu(x,y)\,dxdy=\iint_D 60y\cos x\,dxdy=60\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx\int_0^{\sqrt{\sin x}}y\,dy=$$

$$=60\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot(y^2/2)\Big|_0^{\sqrt{\sin x}}dx=30\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot\sin x\,dx=15\int_0^{\pi/2}\sin 2x\,dx=$$

$$=-(15/2)\cdot\cos 2x\Big|_0^{\pi/2}=-(15/2)(\cos\pi-\cos 0)=15\,.$$

Знайдемо статичні моменти пластини:

$$M_x=\iint_D y\mu(x,y)\,dxdy=\iint_D y\cdot 60y\cos x\,dxdy=$$

$$=60\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx\int_0^{\sqrt{\sin x}}y^2\,dy=60\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot(y^3/3)\Big|_0^{\sqrt{\sin x}}dx=$$

$$=20\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot\sin^{3/2}x\,dx=\left|u=\sin x;\ du=\cos x\,dx;\ u_1=0;\ u_2=1\right|=$$

$$=20\int_0^1 u^{3/2}du=20\cdot(2/5)\cdot u^{5/2}\Big|_0^1=8\,;$$

$$M_y=\iint_D x\mu(x,y)\,dxdy=\iint_D x\cdot 60y\cos x\,dxdy=$$

$$=60\int_0^{\pi/2}x\cos x\,dx\int_0^{\sqrt{\sin x}}y\,dy=60\int_0^{\pi/2}x\cos x\cdot(y^2/2)\Big|_0^{\sqrt{\sin x}}dx=$$

$$=30\int_0^{\pi/2}x\cos x\cdot\sin x\,dx=15\int_0^{\pi/2}x\sin 2x\,dx=\left|u=x;\ du=dx;\right.$$

$$\left.dv=\sin 2x\,dx;\ v=-(1/2)\cos 2x\right|=-(15/2)\cdot x\cos 2x\Big|_0^{\pi/2}+$$

$$+\frac{15}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2x\,dx=-\frac{15}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cos\pi+\frac{15}{4}\cdot\sin 2x\Big|_0^{\pi/2}=\frac{15\pi}{4}\,.$$

Тепер обчислимо координати центра маси пластини:

$$x_c=M_y/m=(15\pi/4)/15=\pi/4\,;\quad y_c=M_x/m=8/15\,.$$

Приклад. Знайти момент інерції I_y відносно осі Oy пластини D, обмеженої дугою кардіоїди $(x^2+y^2-2x)=4(x^2+y^2)$, $y\ge 0$, півколом $x^2+y^2=1$, $x\ge 0$ і віссю Oy, якщо поверхнева густина $\mu(x,y)=y/(x^2+y^2)^2$.

Рівняння кардіоїди і кола спрощуються при переході до полярних координат ($x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$; $x^2+y^2=\rho^2$) і набувають відповідно вигляду

$$\rho=2(1+\cos\varphi)\quad\text{і}\quad\rho=1\,.$$

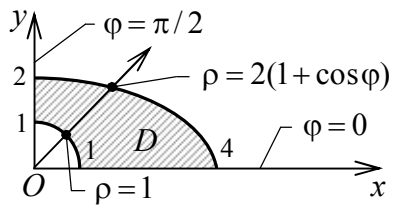


Рисунок 56 – Момент інерції пластини

Знайдемо момент інерції I_y пластини D, переходячи в подвійному інтегралі до полярних координат:

$$I_y = \iint\limits_D x^2 \mu(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D x^2 \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy = \Big| x = \rho\cos\varphi;$$

$$y = \rho\sin\varphi;\ x^2+y^2=\rho^2;\ dxdy = \rho\,d\rho\,d\varphi \Big| = \iint\limits_{D^*} \rho^2\cos^2\varphi \frac{\rho\sin\varphi}{\rho^4}\times$$

$$\times\rho\,d\rho\,d\varphi = \iint\limits_D \cos^2\varphi\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi \int\limits_1^{2(1+\cos\varphi)} d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin\varphi\cdot\rho\Big|_1^{2(1+\cos\varphi)} d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin\varphi(1+2\cos\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \Big| u = \cos\varphi;\ du = -\sin\varphi\,d\varphi;\ u_1 = 1;\ u_2 = 0 \Big| = -\int_1^0 u^2(1+2u)\,du =$$

$$= -\int\limits_1^0 u^2du - 2\int\limits_1^0 u^3du = -\frac{1}{3}u^3\Big|_1^0 - \frac{1}{2}u^4\Big|_1^0 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Застосування потрійного інтеграла

Обчислення об’єму. Згідно геометричного змісту потрійного інтеграла об’єм просторової області V обчислюється за формулою

$$V = \iiint_V dV = \iiint_V dxdydz.$$

Фізичні застосування. Якщо матеріальне тіло V має густину $\mu = \mu(x,y,z)$, то за фізичним змістом потрійного інтеграла маса m тіла обчислюється за формулою

$$m = \iiint_V \mu(x,y,z)\,dxdydz\ .$$

Статичні моменти M_{yz}, M_{xz} і M_{xy} відносно координатних площин і координати центра маси $C(x_c, y_c, z_c)$ тіла V знаходяться відповідно за співвідношеннями:

$$M_{yz} = \iiint_V x\mu(x,y,z)\,dxdydz;$$

$$M_{xz} = \iiint_V y\mu(x,y,z)\,dxdydz;$$

$$M_{xy} = \iiint_V z\mu(x,y,z)\,dxdydz;$$

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m};\quad y_c = \frac{M_{xz}}{m};\quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Моменти інерції I_x, I_y, I_z і I_0 тіла V відносно осей і початку координат визначаються відповідно за формулами:

$$I_x = \iiint_V (y^2+z^2)\mu\,dxdydz;$$

$$I_y = \iiint_V (x^2+z^2)\mu\,dxdydz;$$

$$I_z = \iiint_V (x^2+y^2)\mu\,dxdydz;$$

$$I_0 = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\mu\,dxdydz.$$

Приклад. Знайти момент інерції I_z відносно осі Oz півкулі $V: x^2+y^2+z^2 \le 1$, $z \ge 0$, якщо густина задається функцією $\mu(x,y,z) = z^3/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$.

Оскільки область V є частиною кулі і вираз для густини, що входить у підінтегральну функцію відповідного інтеграла, містить суму квадратів всіх трьох декартових координат, то доцільно перейти до сферичних координат. Дістанемо:

$$\mu = \cos^3\theta;\quad V^*: \{(r,\varphi,\theta)|\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le r \le 1\}.$$

Далі обчислимо момент інерції I_z, застосовуючи сферичні координати:

$$I_z = \iiint_V \frac{(x^2+y^2)z^3\,dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \iiint_{V^*} r^2\sin^2\theta\cdot\cos^3\theta\cdot r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta =$$

$$= \iiint_{V^*} r^4(\sin\theta\cos\theta)^3\ drd\varphi d\theta = \frac{1}{8}\iiint_{V^*} r^4\sin^3 2\theta\ drd\varphi d\theta =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2}\sin^3 2\theta\,d\theta \int_0^1 r^4 dr = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2}\sin^3 2\theta\cdot (r^5/5)\Big|_0^1 d\theta = \frac{1}{40}\times$$

$$\times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\sin 2\theta\,d\theta = \left|\begin{array}{l} u = \cos 2\theta;\ du = -2\sin 2\theta\,d\theta;\ u_1 = 1; \\ u_2 = -1;\ \sin^2 2\theta = 1-\cos^2 2\theta = 1-u^2 \end{array}\right| =$$

$$= -(1/80)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{-1}(1-u^2)\,du = -(1/80)\int_0^{2\pi}(u-u^3/3)\Big|_1^{-1} d\varphi =$$

$$= (1/60)\int_0^{2\pi} d\varphi = (1/60)\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = \pi/30.$$

ЛЕКЦІЯ 12 СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ПО ДОВЖИНІ (ПЕРШОГО РОДУ). ВЕКТОРНЕ ПОЛЕ. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ПО КООРДИНАТАХ (ДРУГОГО РОДУ)

Задача про масу дуги. Криволінійний інтеграл по довжині (першого роду)

Нехай у деякій області D координатної площини Oxy задано неперервне плоске скалярне поле $\mu = f(x, y)$. Припустимо, що в цій області D лежить кусково-гладка матеріальна крива L. Нехай неперервна функція $\mu = f(x, y)$ визначає лінійну густину розподілу маси вздовж кривої L. Потрібно обчислити масу дуги L_{AB} (рис. 57).

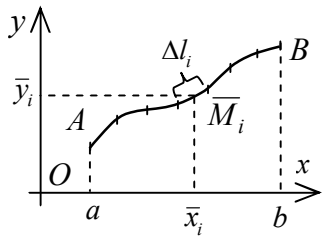


Рисунок 57 – Маса дуги

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних частин Δl_i, $i = \overline{1,n}$ точками $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_n = B$ з абсцисами $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Розглянемо одну з елементарних дуг Δl_i. Нехай довжина Δl_i цієї дуги настільки мала, що її густину можна вважати сталою величиною, яка дорівнює значенню $f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ в довільно вибраній точці $\overline{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in \Delta l_i$. Тоді $\Delta m_i \approx f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i$ – маса елементарної дуги Δl_i. А маса всієї дуги L_{AB}:

$$m = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i .$$

Одержана сума називається інтегральною для функції $f(x, y)$ по довжині дуги L_{AB}.

Очевидно, що $m = \lim\limits_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i$.

Скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i$ при необмеженому здрібненні розбиття дуги на елементарні частини називається криволінійним інтегралом по довжині (криволінійним інтегралом першого роду) і позначається:

$$\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i ,$$

де dl – диференціал (елемент) довжини дуги.

Таким чином, $m = \int_{L_{AB}} \mu\, dl = \int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ (фізичний зміст криволінійного інтеграла по довжині).

Якщо покласти $f(x,y) \equiv 1$, то криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ чисельно дорівнює довжині l дуги L_{AB}: $l = \int_{L_{AB}} dl$ (геометричний зміст криволінійного інтеграла по довжині).

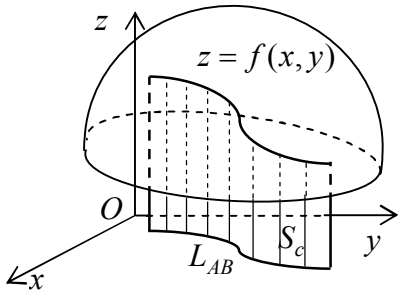


Рисунок 58 – Вертикальна циліндрична поверхня

Зауваження. При $f(x,y) \geq 0$ криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ чисельно дорівнює площі S_c частини вертикальної циліндричної поверхні (рис. 58) з напрямною L_{AB} і паралельними осі Oz твірними, що розміщена між координатною площиною $z = 0$ і поверхнею $z = f(x,y)$:

$$S_c = \int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl .$$

Поняття криволінійного інтеграла по довжині поширюється на випадок дуги L_{AB} просторової лінії L, розміщеної в просторовому скалярному полі $u = f(x,y,z)$:

$$\int_{L_{AB}} f(x,y,z)\,dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta l_i .$$

Обчислення криволінійного інтеграла по довжині

Обчислення криволінійного інтеграла по довжині здійснюється зведенням його до одновимірного інтеграла методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

Нехай плоска дуга L_{AB} задана в параметричній формі: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$, причому коли параметр t змінюється на відрізку $[\alpha;\beta]$, точка $(x(t);y(t))$ на кривій L рухається від точки A до точки B. Диференціал дуги такої кривої записується у вигляді $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної і отримуємо:

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt .$$

Приклад. Обчислити $\int_L e^y\, tg\, x\, dl$, якщо

$$L:\ x = arctg\ t;\quad y = \ln(1+t^2);\quad 0 \le t \le \sqrt{2}.$$

Обчислимо:

$$x' = \frac{1}{1+t^2};\ y' = \frac{2t}{1+t^2};\ dl = \sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}\,dt = \frac{\sqrt{1+4t^2}}{1+t^2}\,dt .$$

Підставимо в інтеграл:

$$\int\limits_L e^y\, tg\, x\, dl = \int\limits_0^{\sqrt{2}} e^{\ln(1+t^2)}\, tg\,(arctg\, t)\frac{\sqrt{1+4t^2}}{1+t^2}\,dt = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4t^2}\, t\, dt =$$

$$= \left| u = 1+4t^2;\ du = 8t\,dt;\ u_1 = 1;\ u_2 = 9 \right| = (1/8)\int_1^9 u^{1/2} du =$$

$$= (1/12)u^{3/2}\Big|_1^9 = 13/6 .$$

Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах в явному вигляді: $y = y(x),\ a \le x \le b$. Тоді $dl = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$. Відповідно

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx .$$

Приклад. Обчислити $I = \int\limits_{AB} \frac{xy\,dl}{24-5x^2-8y^2}$, якщо AB є чвертю еліпса $x^2/4 + y^2 = 1\quad (x \ge 0,\ \ y \ge 0)$.

$$AB: y=(1/2)\sqrt{4-x^2},\quad 0\le x\le 2;\quad y'=-(1/2)x\Big/\sqrt{4-x^2};$$

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=(1/2)\left(\sqrt{16-3x^2}\Big/\sqrt{4-x^2}\right)dx;$$

$$I=\int_0^2\frac{x(1/2)\sqrt{4-x^2}}{24-5x^2-8\cdot(1/4)(4-x^2)}\cdot\frac{\sqrt{16-3x^2}}{2\sqrt{4-x^2}}dx=\frac{1}{4}\int_0^2 x\,dx=$$

$$=(1/8)\,x^2\Big|_0^2=1/2.$$

Нехай дуга L_{AB} задана в полярних координатах рівнянням $\rho=\rho(\varphi),\ \ \alpha\le\varphi\le\beta$. Тоді $dl=\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$. Відповідно

$$\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl=\int_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi,\,\rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\int_L\frac{y\,dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$ за довжиною дуги равлика Паскаля $L:\ \rho=2+\cos\varphi,\ \ 0\le\varphi\le\pi/2$.

$$\rho'=-\sin\varphi;\ dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi=\sqrt{(2+\cos\varphi)^2+(-\sin\varphi)^2}\,d\varphi=$$

$$=\sqrt{5+4\cos\varphi}\,d\varphi;\quad f(x,y)=y\Big/\sqrt{x^2+y^2}=\rho\sin\varphi/\rho=\sin\varphi;$$

$$I=\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\sqrt{5+4\cos\varphi}\,d\varphi=\Big|\,u=5+4\cos\varphi;\ du=-4\sin\varphi\,d\varphi;$$

$$u_1=9;\ u_2=5\Big|=-(1/4)\int_9^5 u^{1/2}\,du=-(1/6)\cdot u^{3/2}\Big|_9^5=$$

$$=(1/6)\left(27-5\sqrt{5}\right).$$

Якщо просторова дуга L_{AB} задана параметричними рівняннями $x=x(t)$; $y=y(t)$; $z=z(t)$, $\alpha\le t\le\beta$, то відповідний криволінійний інтеграл по довжині обчислюється за формулою

$$\int_{L_{AB}} f(x,y,z)\,dl=\int_\alpha^\beta f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\int_L(x^2-y^2)z^{-3}\,dl$ по довжині дуги гвинтової лінії $L:\ x=2e^t\cos t;\ y=2e^t\sin t;\ z=e^t,\ 0\le t\le\pi/4$.

$$x'=2(e^t\cos t-e^t\sin t);\ y'=2(e^t\sin t+e^t\cos t);\ z'=e^t;$$

$$dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=3e^t dt;$$

$$f(x,y,z)=\left((2e^t\cos t)^2-(2e^t\sin t)^2\right)(e^t)^{-3}=4e^{-t}\cos 2t;$$

$$I=4\int_0^{\pi/4}4e^{-t}\cos 2t\cdot 3e^t\,dt=6\cdot\sin 2t\Big|_0^{\pi/4}=6.$$

Застосування криволінійного інтеграла по довжині

За допомогою криволінійного інтеграла по довжині можна обчислити довжину дуги і площу циліндричної поверхні.

Приклад. Обчислити площу S_c частини параболічного циліндра $y=\sqrt{4-2x}$, $0\le x\le 2$, що розміщена між площиною $z=0$ і циліндром $z=y^3/2$ (рис. 59).

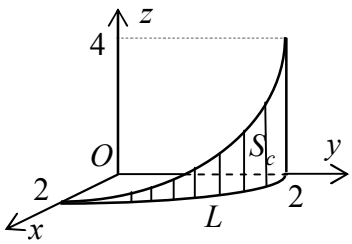


Рисунок 59 – Площа параболічного циліндра

$$L:\ y=\sqrt{4-2x},\quad 0\le x\le 2;$$

$$y'=-1\big/\sqrt{4-2x};$$

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\frac{\sqrt{5-2x}}{\sqrt{4-2x}}dx;\quad S_c=\int_L\frac{y^3}{2}\,dl=\frac{1}{2}\int_0^2\left(\sqrt{4-2x}\right)^3\times$$

$$\times\frac{\sqrt{5-2x}}{\sqrt{4-2x}}dx=\int_0^2(2-x)\sqrt{5-2x}\ dx=\Big|5-2x=u^2;\ x=(5-u^2)\big/2;$$

$$dx=-u\,du;\ u=\sqrt{5-2x};\ u_1=\sqrt{5};\ u_2=1\Big|=\int_{\sqrt{5}}^1\left(2-(5-u^2)/2\right)u\times$$

$$\times(-u\,du)=(1/2)\int_{\sqrt{5}}^1(u^2-u^4)\,du=(1/2)\int_{\sqrt{5}}^1u^2du-(1/2)\times$$

$$\times\int_{\sqrt{5}}^1u^4du=(1/6)\cdot u^3\Big|_{\sqrt{5}}^1-(1/10)\cdot u^5\Big|_{\sqrt{5}}^1=\left(25\sqrt{5}+1\right)\big/15.$$

Маса плоскої матеріальної дуги L з лінійною густиною $\mu=\mu(x,y)$ визначається за формулою $m=\int_L\mu(x,y)\,dl$. Якщо густина стала $\mu_0=const$, то $m=\mu_0\int_L dl$.

Криволінійний інтеграл по довжині можна застосувати для обчислення статичних моментів дуги L плоскої матеріальної кривої відносно осей Ox і Oy відповідно

$$M_x=\int_L y\mu(x,y)\,dl;\qquad M_y=\int_L x\mu(x,y)\,dl,$$

а також моментів інерції відносно осей Ox і Oy відповідно

$$I_x = \int_L y^2 \mu(x,y)\,dl; \qquad I_y = \int_L x^2 \mu(x,y)\,dl,$$

чи відносно початку координат $I_0 = \int_L (x^2 + y^2)\mu(x,y)\,dl$.

Координати центра маси дуги L плоскої кривої

$$x_c = M_y / m; \quad y_c = M_x / m.$$

Приклад. Обчислити масу m, статичні моменти M_x і M_y відносно осей Ox і Oy, координати центра маси $C(x_c, y_c)$ і момент інерції I_x відносно осі Ox плоскої матеріальної дуги L з лінійною густиною $\mu = \mu(x,y)$:

$$L:\ y = 2x^{3/2},\ \ 0 \le x \le 1; \qquad \mu(x,y) = y/\sqrt{1+9x};$$

$$L:\ y = 2x^{3/2};\ \ y' = 3x^{1/2};\ \ dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+9x}\,dx;$$

$$m = \int_L \mu(x,y)\,dl = \int_L \left(y/\sqrt{1+9x}\right)dl = \int_0^1 \left(2\,x^{3/2}/\sqrt{1+9x}\right)\times$$

$$\times\sqrt{1+9x}\,dx = 2\int_0^1 x^{3/2}\,dx = (4/5)\cdot x^{5/2}\Big|_0^1 = 4/5;$$

$$M_x = \int_L y\mu(x,y)\,dl = \int_L y\left(y/\sqrt{1+9x}\right)dl =$$

$$= \int_0^1 \left((2\,x^{3/2})^2/\sqrt{1+9x}\right)\sqrt{1+9x}\,dx = 4\int_0^1 x^3\,dx = x^4\Big|_0^1 = 4;$$

$$M_y = \int_L x\mu(x,y)\,dl = \int_L x\left(y/\sqrt{1+9x}\right)dl = \int_0^1 x\left(2x^{3/2}/\sqrt{1+9x}\right)\times$$

$$\times\sqrt{1+9x}\,dx = 2\int_0^1 x^{5/2}\,dx = (4/7)\cdot x^{7/2}\Big|_0^1 = 4/7;$$

$$x_c = M_y/m = 4/(4/5) = 5; \qquad y_c = M_x/m = (4/7)/(4/5) = 5/7;$$

$$I_x = \int_L y^2\mu(x,y)\,dl = \int_L y^2\left(y/\sqrt{1+9x}\right)dl = \int_0^1 \left((2\,x^{3/2})^3:\right.$$

$$\left.:\sqrt{1+9x}\right)\sqrt{1+9x}\,dx = 8\int_0^1 x^{9/2}\,dx = (16/11)\cdot x^{11/2}\Big|_0^1 = 16/11.$$

Векторне поле. Векторні (силові) лінії

Якщо кожній точці $M(x,y,z)$ деякої області D простору поставлений у відповідність вектор $\vec{F}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, де $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$ -скалярні функції, то говорять, що задано просторове векторне поле.

У випадку плоскої області D і двовимірного вектора $\vec{F}(M)$, що лежить у площині цієї області, говорять про плоске векторне поле.

Геометричними характеристиками векторного поля є векторні (силові) лінії.

Векторною (силовою) лінією поля $\vec{F}=\vec{F}(M)$ називається крива $\vec{r}=\vec{r}(t)$, дотична до якої в кожній її точці співпадає з вектором $\vec{F}=\vec{F}(M)$, що визначає поле в цій точці.

З умови $d\vec{r}\parallel\vec{F}(M)$ (рис. 60) маємо диференціальні рівняння векторних ліній:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}.$$

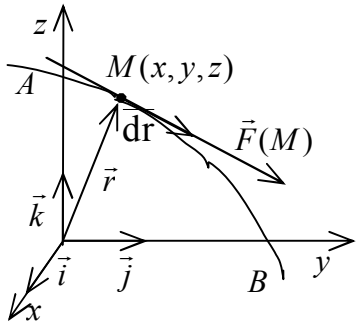


Рисунок 60 – Векторна лінія

Прикладами векторних ліній в електротехніці є лінії вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}$ чи лінії вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$.

Криволінійний інтеграл по координатах(другого роду)

Циркуляція векторного поля

Задача про роботу векторного поля. Розглянемо плоске векторне поле сили $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$. Нехай під дією змінної сили $\vec{F}=\vec{F}(x,y)$ матеріальна точка M рухається деякою плоскою кусково-гладкою напрямленою лінією L. Необхідно обчислити роботу $\widetilde{A}$, яка виконується при переміщенні цієї точки M по дузі L_{AB} від початкової точки A до кінцевої точки B (рис. 61).

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних дуг Δl_i, $i=\overline{1,n}$ точками $A=M_0,M_1,M_2,...,M_n=B$ з абсцисами $a=x_0<x_1<x_2<...<x_i<...<x_n=b$. Розглянемо елементарну дугу Δl_i, якій відповідає вектор переміщення $\Delta\vec{l}_i=\Delta x_i\vec{i}+\Delta y_i\vec{j}$. Нехай довжина Δl_i цієї дуги настільки мала, що на ній вектор сили $\vec{F}=\vec{F}(x,y)$ можна вважати сталою величиною, яка дорівнює значенню $\vec{F}=\vec{F}(\bar{x}_i,\bar{y}_i)$ в довільно вибраній точці $\overline{M}_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\in\Delta l_i$.

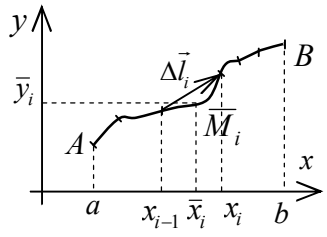


Рисунок 61 – Робота векторного поля

Елементарна робота $\Delta\widetilde{A}_i$ на ділянці Δl_i визначається скалярним добутком

$$\Delta\widetilde{A}_i \approx \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot\Delta\vec{l}_i = P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot\Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot\Delta y_i .$$

Якщо обчислити елементарну роботу на всіх ділянках Δl_i, $i=\overline{1,n}$ і скласти суму, то $\widetilde{A} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\widetilde{A}_i \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot\Delta\vec{l}_i =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot\Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot\Delta y_i\right).$$

Одержана сума називається інтегральною для вектор-функції $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ по напрямленій дузі L_{AB}.

Очевидно, що $\widetilde{A} = \lim\limits_{\max\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\widetilde{A}_i$.

Скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} \left(P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot\Delta x_i + \ + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot\Delta y_i\right)$ при необмеженому здрібненні розбиття дуги на елементарні частини називається криволінійним інтегралом по координатах (криволінійним інтегралом другого роду) і позначається

$$\int_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = , \lim_{\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot\Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot\Delta y_i\right)$$

Криволінійний інтеграл по координатах також називається циркуляцією вектора $\vec{F}$ по дузі L_{AB} і позначається

$$\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \lim_{\max\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\cdot\Delta\vec{l}_i ,$$

де $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$ – вектор диференціала (елемента) довжини плоскої дуги.

Таким чином, $\widetilde{A} = \int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l}$

(фізичний зміст криволінійного інтеграла по координатах).

Якщо лінія L замкнена, то інтеграл по ній записується так

$$\oint_L \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy ,$$

причому початкова точка вибирається довільно і вказується напрям обходу. Якщо напрям обходу замкненого контуру L явно не зазначено, то приймається додатний напрям (при цьому область, обмежена контуром, залишається зліва – рух проти годинникової стрілки).

Для просторового векторного поля інтеграл має вигляд

$$\oint_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \oint_{L_{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz\,,$$

де $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ – вектор диференціала (елемента) довжини просторової дуги.

Властивості криволінійного інтеграла по координатах.

1.При зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл по координатах тільки змінює знак

$$\int_{L_{BA}} \vec{F}\,d\vec{l} = -\int_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l}\,.$$

Це випливає з означення, оскільки при цьому вектор $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$, а відповідно і його проекції dx, dy і dz, змінюють знак.

2.Векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ можна розглядати як суму трьох векторних полів $P\vec{i}$, $Q\vec{j}$ і $R\vec{k}$. Відповідно, повний криволінійний інтеграл по координатах можна розглядати як суму трьох інтегралів

$$\int_L \vec{F}\,d\vec{l} = \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_L P\,dx + \int_L Q\,dy + \int_L R\,dz\,,$$

де кожен з трьох інтегралів справа також називається відповідно криволінійним інтегралом по координаті x, y чи z.

3.Розглянемо циркуляцію $\oint_L \vec{F}\,d\vec{l}$ по замкненому контуру L. З'єднаємо дві довільні точки A і B цього контура дугою L_{AB} (рис. 61).

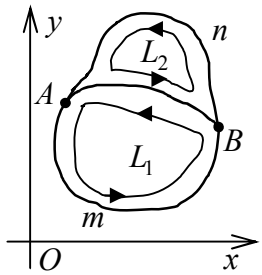


Рисунок 62 – Циркуляція по замкненому контуру

Таким чином, одержимо два замкнені контури $L_1 = AmB$ і $L_2 = BnA$. Тоді

$$\oint_L \vec{F}\,d\vec{l} = \oint_{L_1} \vec{F}\,d\vec{l} + \oint_{L_2} \vec{F}\,d\vec{l}\ ,$$

оскільки $\int_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l} + \int_{L_{BA}} \vec{F}\,d\vec{l} = 0$.

Тобто, при розбитті замкненого контура на замкнені підконтури значення сумарного криволінійного інтеграла не змінюється. Ця властивість виражає закон збереження обертального руху.

Обчислення криволінійного інтеграла по координатах

Обчислення криволінійного інтеграла по координатах здійснюється зведенням його до одновимірного інтеграла методом заміни змінної. Розглянемо найбільш важливі випадки задання кривої L і відповідний перехід до визначеного інтеграла.

Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах у параметричній формі $x = x(t)$; $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, причому коли параметр t змінюється на відрізку $[\alpha;\beta]$, точка $(x(t);y(t))$ на кривій L рухається від точки A до точки B. Тоді $dx = x'(t)\,dt;\ dy = y'(t)\,dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної й отримуємо:

$$\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\right]dt$$

Приклад. Обчислити циркуляцію плоского векторного поля $\vec{F} = (x/y)\vec{i} + 2\vec{j}$ по дузі циклоїди L: $x = t - \sin t$; $y = 1 - \cos t$, $\pi/3 \le t \le \pi/2$.

$$dx = (1-\cos t)\,dt\ ;\quad dy = \sin t\,dt\ ;\quad \int_L \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \int_L (x/y)\,dx +$$

$$+\,2\,dy = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\big((t-\sin t)/(1-\cos t)\big)(1-\cos t) + 2\sin t\right]dt =$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi/2} (t - \sin t + 2\sin t)\,dt = \int_{\pi/3}^{\pi/2} t\,dt + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin t\,dt =$$

$$= (1/2)t^2\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} - \cos t\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = 5\pi^2/72 + 1/2\,.$$

Розглянемо плоске векторне поле $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$. Нехай плоска дуга L_{AB} задана в прямокутних координатах в явному вигляді: $y = y(x)$, $a \le x \le b$, причому коли x змінюється на відрізку $[a;b]$, точка $(x;y)$ на кривій L рухається

від точки A до точки B. Можна використати попередній спосіб, записавши рівняння дуги у параметричній формі

$\begin{cases} y = y(x) \\ x = x \end{cases}$ $a \le x \le b$. Тоді $\begin{cases} dy = y'(x)\,dx \\ dx = dx \end{cases}$ і маємо

$$\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int_a^b \left[P\big(x, y(x)\big) + Q\left(x, y(x)\right) y'(x)\right] dx \ .$$

Приклад. Обчислити циркуляцію плоского векторного поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + (x^5/y)\vec{j}$ по дузі кубічної параболи $L: y = x^3$, $1 \le x \le 2$.

$L: y = x^3$, $1 \le x \le 2$; $y' = 3x^2$; $dy = 3x^2 dx$;

$$\int_L \vec{F}\,d\vec{l} = \int_L 2xy\,dx + (x^5/y)\,dy = \int_1^2 \Big[2x\,x^3 + (x^5/x^3)\times$$

$$\times 3x^2\Big]\,dx = 5\int_1^2 x^4\,dx = x^5\Big|_1^2 = 31\,.$$

Розглянемо просторове векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$. Нехай просторова дуга L_{AB} задана в параметричній формі $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, причому коли параметр t змінюється на відрізку $[\alpha;\beta]$, точка $\big(x(t); y(t); z(t)\big)$ на кривій L рухається від точки A до точки B. Тоді $dx = x'(t)\,dt$; $dy = y'(t)\,dt$; $dz = z'(t)\,dt$. У криволінійному інтегралі робимо заміну змінної й отримуємо:

$$\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta \Big[P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)\Big]dt$$

Приклад. Обчислити циркуляцію просторового векторного поля $\vec{F} = xz\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + (x + y - 2)\,\vec{k}$ по відрізку L_{AB} прямої, який з'єднує точки $A(1,0,-3)$ та $B(2,-2,0)$.

Знайдемо канонічні рівняння прямої AB:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{-2-0} = \frac{z+3}{0+3}; \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{3}\,.$$

Перейдемо до параметричного запису прямої і обчислимо диференціали:

$$x = t + 1;\ y = -2t;\ z = 3t - 3;\ dx = dt;\ dy = -2dt;\ dz = 3dt\,.$$

Врахуємо, що при заміні змінної змінюються межі інтегрування, а саме, якщо на відрізку L_{AB} $1 \le x \le 2$, то $0 \le t \le 1$.

Отже, $\int_{L_{AB}} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} xz\,dx + 2y\,dy + (x+y-2)\,dz =$

$$= \int_0^1 \left[(t+1)(3t-3) + 2(-2t)\cdot(-2) + (t+1-2t-2)\cdot 3\right]dt =$$

$$= \int_0^1 (3t^2 - 3 + 8t - 3t - 3)\,dt = 3\int_0^1 t^2 dt + 5\int_0^1 t\,dt - 6\int_0^1 dt =$$

$$= t^3\Big|_0^1 + (5/2)\cdot t^2\Big|_0^1 - 6t\Big|_0^1 = -2/5.$$

ЛЕКЦІЯ 13 УМОВИ НЕЗАЛЕЖНОСТІ КРИВОЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ВІД ФОРМИ ШЛЯХУ ІНТЕГРУВАННЯ. ОБЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ЗА ЇЇ ПОВНИМ ДИФЕРЕНЦІАЛОМ. РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ

Формула Гріна

Встановимо зв'язок між подвійним інтегралом по деякій плоскій області D та криволінійним інтегралом по межі L цієї області.

Теорема.(Зв'язок між криволінійним і подвійним інтегралом). Нехай задано плоске векторне поле $\vec{F}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j}$ де $P = P(x,y)$ та $Q = Q(x,y)$ - функції двох змінних, неперервні разом з частинними похідними $\partial P/\partial y$ і $\partial Q/\partial x$. Якщо L - замкнена лінія, що обмежує однозв'язну область D, то

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy$$

(формула Гріна).

Обмежимось розглядом області D (рис. 63).

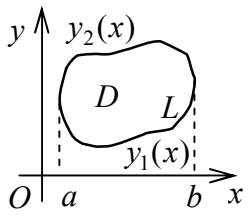


Рисунок 63 – L - замкнена лінія, що обмежує область D

Обчислимо

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy =$$

$$= \int_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int_a^b \big(P(x,y_2(x)) -$$

$$- P(x,y_1(x))\big)\,dx = -\int_b^a P(x,y_2(x))\,dx -$$

$$- \int_a^b P(x,y_1(x))\,dx = -\oint_L P(x,y)\,dx\,.$$

Аналогічно $\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dxdy = \oint_L Q(x,y)\,dx$.

Склавши відповідні вирази, маємо

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy\,.$$

Приклад. Використовуючи формулу Гріна, обчислити циркуляцію $I = \oint_L \ln(x^2+y^2)\,dx + 2\,arctg\,(y/x)\,dy$, якщо L-замкнений контур $ABCE$, утворений колами $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ та прямими $y=x$, $y=x\sqrt{3}$, де $x>0$, $y>0$ (рис. 64).

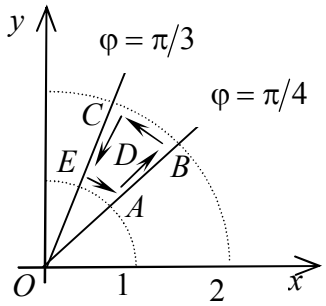


Рисунок 64 – Область інтегрування

У прийнятих позначеннях

$$P(x,y) = \ln(x^2+y^2)\,;$$

$$Q(x,y) = 2\,arctg\,(y/x)\,.$$

Знайдемо

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}\,; \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -\frac{2y}{x^2+y^2}\,.$$

Тоді за формулою Гріна

$$I=\oint_L \ln(x^2+y^2)\,dx+2\,arctg\,(y/x)\,dy=-4\iint_D \frac{y\,dxdy}{x^2+y^2},$$

де область D обмежена контуром L.

Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, де $1\le\rho\le 2$, $\pi/4\le\varphi\le\pi/3$. Отже,

$$I=-4\iint_D \frac{y\,dxdy}{x^2+y^2}=-4\iint_D \frac{\rho\sin\varphi}{\rho^2}\rho\,d\rho\,d\varphi=-4\int_{\pi/4}^{\pi/3}\sin\varphi\,d\varphi\int_1^2 d\rho=$$

$$=-4\int_{\pi/4}^{\pi/3}\rho\Big|_1^2\sin\varphi\;d\varphi=4\cos\varphi\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}=2-2\sqrt{2}.$$

Приклад. За допомогою криволінійного інтеграла за координатами обчислити площу плоскої області D, що обмежена осями координат $x=0$, $y=0$ і дугою астроїди $x=4\cos^3 t$, $y=4\sin^3 t$, розміщеною в першому квадранті ($x\ge 0$, $y\ge 0$) (рис. 65).

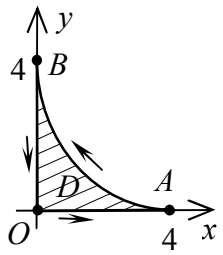


Рисунок 65 – Площа плоскої області D

Контур L_{OABO}, що обмежує область D, складається з трьох ділянок OA, AB і BO. Відповідно розіб'ємо криволінійний інтеграл:

$$S_D=(1/2)\oint_{L_{OABO}}-y\,dx+x\,dy=(1/2)\left(\int_{OA}+\int_{AB}+\int_{BO}\right).$$

Тоді OA: $y=0,\ x_1=0,\ x_2=4;\ dy=0$; $\int_{OA}-y\,dx+x\,dy=$

$=\int_0^4(-0+x\cdot 0)\,dx=0$;

AB: $x=4\cos^3 t,\ y=4\sin^3 t,\ t_1=0,\ t_2=\pi/2$;

$$dx=-12\cos^2 t\sin t\,dt;\quad dy=12\sin^2 t\cos t\,dt;\quad \int_{AB}-y\,dx+x\,dy=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(-4\sin^3 t\cdot(-12)\cos^2 t\sin t+4\cos^3 t\cdot 12\sin^2 t\cos t\right)dt=$$

$$=48\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt=12\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=$$

$$= 6\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)\,dt = 6t\Big|_0^{\pi/2} - (3/4)\sin 4t\Big|_0^{\pi/2} = 3\pi\,;$$

$BO: x=0,\ y_1=4,\ y_2=0;\ dx=0;\quad \int_{BO} -y\,dx + x\,dy = \int_4^0 (-y\cdot 0 +$

$+0)\,dx = 0$. Отже, $S_D = (1/2)(0+3\pi+0) = 3\pi/2$.

Умови незалежності криволінійного інтеграла по координатах від шляху інтегрування

Обчислити інтеграл $\int_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} 2xydx + x^2\,dy$ по двом різним шляхам, що з'єднують точки $A(0,0)$ та $B(1,1)$ (рис. 66):

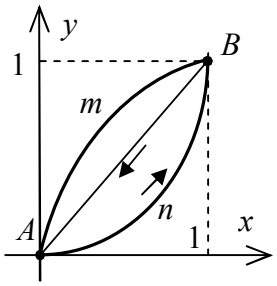


Рисунок 66 – Шлях інтегрування

Обчислимо інтеграл $\int_{L_{AB}} \vec{F}\,d\vec{l} = \int_{L_{AB}} 2xydx + x^2\,dy$ по двом різним шляхам, що з'єднують точки $A(0,0)$ та $B(1,1)$ (рис. 100):

а) дуга параболи L_{AmB}: $y=\sqrt{x}$, $x_1=0$, $x_2=1$;

$$L_{AmB}:\quad y=\sqrt{x};\quad y'=(1/2)\big/\sqrt{x};$$

$$\int_{L_{AmB}} \vec{F}\,d\vec{l} = \int_{L_{AmB}} 2xydx + x^2dy =$$

$$= \int_0^1 \left(2x\sqrt{x} + x^2\,(1/2)\big/\sqrt{x}\right)dx = (5/2)\int_0^1 x^{3/2}\,dx = x^{5/2}\Big|_0^1 = 1;$$

б) дуга кубічної параболи $L_{AnB}: y=x^3$, $x_1=0$, $x_2=1$;

$$L_{AnB}:\ y=x^3;\quad y'=3x^2;\quad \int_{L_{AnB}} \vec{F}\,d\vec{l} = \int_{L_{AnB}} 2xydx + x^2dy =$$

$$= \int_0^1 \left(2xx^3 + x^2 3x^2\right)dx = 5\int_0^1 x^4\,dx = x^5\Big|_0^1 = 1.$$

Аналіз прикладу показує, що значення інтеграла по двом різним за формою шляхам інтегрування співпадають:

$$\int_{L_{AnB}} \vec{F}\, d\vec{l} = \int_{L_{AmB}} \vec{F}\, d\vec{l}\ .$$

Звідси інтеграл по замкненій лінії $L = AnBmA$, очевидно, дорівнює нулю: $\oint_L \vec{F}\, d\vec{l} = 0$.

Виникає питання: за яких умов щодо функцій $P = P(x, y)$ і $Q = Q(x, y)$ виконується рівність

$$\oint_L \vec{F}\, d\vec{l} = \oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0\,?$$

Теорема. Нехай у всіх точках деякої однозв'язної області D функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\partial P/\partial y$ та $\partial Q/\partial x$. Тоді для того, щоб криволінійний інтеграл другого роду по довільному замкненому контуру L, який цілком лежить в області D, дорівнював нулю, необхідно і достатньо виконання умови $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ у всіх точках області D:

$$\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x \ \Leftrightarrow\ \oint_L Pdx + Qdy = 0\,.$$

Нехай контур L обмежує область $D_1 \subseteq D$. Запишемо формулу Гріна

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy\,.$$

Якщо умова теореми виконана, то подвійний інтеграл у правій частині дорівнює нулю і цим доведено достатність.

Доведемо необхідність методом від супротивного. Припустимо, що $\oint_L Pdx + Qdy = 0$, а умова $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ не виконується хоча б в одній точці $M_0(x_0, y_0)$ області D, скажімо, в цій точці $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y > 0$.

Оскільки в лівій частині нерівності функція неперервна, то вона буде додатна у всіх точках деякої досить малої області $D_1 \subseteq D$, яка містить в собі точку $M_0(x_0, y_0)$. Візьмемо подвійний інтеграл по цій області, який матиме додатне значення $\iint_D (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)dxdy > 0$.

Але за формулою Гріна ліва частина одержаної нерівності дорівнює криволінійному інтегралу по контуру L, який обмежує область D_1, і за припущенням дорівнює нулю. Отже, це припущення невірне. Приходимо до висновку, що $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ в усіх точках області D.

Коли згадати, що рівність $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ є необхідною і достатньою умовою того, щоб вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ був повним диференціалом, то доведену теорему можна сформулювати так: для того, щоб криволінійний інтеграл $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не залежав від лінії інтегрування, необхідно і достатньо, щоб його підінтегральний вираз був повним диференціалом.

Підсумовуючи висновки нашого дослідження, можна стверджувати, що коли область D однозв'язна і функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними $\partial P/\partial y$ та $\partial Q/\partial x$ у цій області, то всі чотири наступні твердження рівносильні, тобто якщо виконується одне з них, то виконуються і всі інші:

1) криволінійний інтеграл $\oint_L Pdx + Qdy$, взятий по довільному замкненому контуру L, цілком розміщеному в області D, дорівнює нулю;

2) криволінійний інтеграл $\int_{L_{AB}} P\,dx + Q\,dy$ не залежить від форми лінії інтегрування L_{AB}, що цілком лежить в області D і з'єднує початкову A і кінцеву B точки;

3) вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повний диференціал деякої функції $u(x,y)$, тобто в області D існує така функція $u(x,y)$, що $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, де $P(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ і $Q(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$;

4) у всіх точках області D має місце рівність $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Зауваження. На практиці зручно користуватись останньою умовою $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.

Приклад. Використовуючи умову $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, перевірити, що $\oint_L (x^3 + y\,tg\,x)\,dx + (4y + \ln\cos x)\,dy = 0$.

Розв'язання.

$$\partial P/\partial y = tg\,x = \partial Q/\partial x.$$

Обчислення функції за її повним диференціалом
Розв'язання диференціальних рівнянь у повних диференціалах

Розглянемо функцію $u(x,y)$, задану в деякій області D, де вона неперервна разом зі своїми частинними похідними. Обчислимо її повний диференціал

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy .$$

Позначимо $P(x,y) = \partial u/\partial x, \quad Q(x,y) = \partial u/\partial y$. Тоді для повного диференціалу

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} .$$

Але за цієї умови криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{M_0M_1}} Pdx + Qdy$ не залежить від форми шляху інтегрування, а визначається положенням початкової $M_0(x_0,y_0)$ та кінцевої $M_1(x_1,y_1)$ точок. Такий інтеграл записується так $\int\limits_{M_0(x_0,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, де шлях інтегрування обирається довільно.

Зауваження. Найзручніше інтегрувати по ламаній лінії M_0NM_1, ланки M_0N і NM_1 якої паралельні осям координат. При цьому можливі два способи побудови ламаної, що відображені на рис. 67 і рис. 68.

Для першого способу (рис. 67):

на відрізку M_0N: $y = y_0 = const$; $dy = 0$, а на відрізку NM_1: $x = x_1 = const$; $dx = 0$. Отже, інтеграл набуде вигляду

$$\int_{M_0(x_0,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$
$$= \int_{M_0(x_0,y_0)}^{N(x_1,y_0)} + \int_{N(x_1,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} =$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1,y)dy .$$

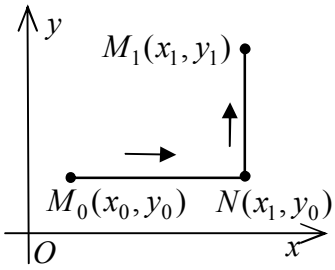


Рисунок 67 – Шлях інтегрування перший

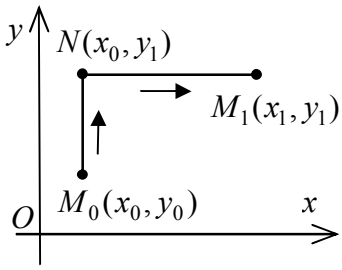


Рисунок 68 – Шлях інтегрування другий

Для другого способу (рис. 68):

на відрізку M_0N: $x = x_0 = const$; $dx = 0$, а на відрізку NM_1: $y = y_1 = const$; $dy = 0$. Отже, інтеграл набуде вигляду

$$\int_{M_0(x_0,y_0)}^{M_1(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{M_0(x_0,y_0)}^{N(x_0,y_1)} + \int_{N(x_0,y_1)}^{M_1(x_1,y_1)} =$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} Q(x_0,y)dy + \int_{x_0}^{x_1} P(x,y_1)dx .$$

Приклад. Знайти інтеграл

$$\int_{A(0,1)}^{B(2,2)} \left(x - 2x/y\right) dx + \left(3 + x^2/y^2\right) dy .$$

За шлях інтегрування оберемо ламану ANB (рис. 69). На відрізку $AN: y = 1 = const,\ dy = 0$, а на відрізку $NB: x = 2 = const,\ dx = 0$.

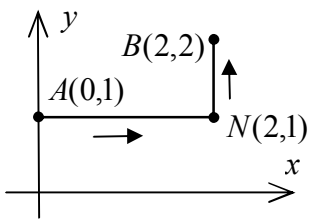


Рисунок 69 – Шлях інтегрування

Тоді

$$\int_{A(0,1)}^{B(2,2)} \left(x - 2x/y\right) dx + \left(3 + x^2/y^2\right) dy =$$

$$= \int\limits_{A(0,1)}^{N(2,1)} + \int\limits_{N(2,1)}^{B(2,2)} = \int\limits_0^2 \left(x - \frac{2x}{1} \right) dx + \int\limits_1^2 \left(3 + 2^2 / y^2 \right) dy =$$

$$= -(1/2)\, x^2 \Big|_0^2 + (3y - 4/y)\Big|_1^2 = 3 .$$

Зауваження. Якщо в криволінійному інтегралі, що не залежить від форми шляху інтегрування, початкову точку $M_0(x_0, y_0)$ зафіксувати, а кінцеву точку $M(x, y)$ розглядати як змінну, то цей інтеграл буде деякою функцією координат x і y точки $M(x, y)$:

$$u(x, y) = \int_{M_0(x_0, y_0)}^{M(x,y)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy .$$

Функцію $u(x, y)$ називають первісною. Задача відшукання функції (первісної) $u(x, y)$ за її повним диференціалом розв'язується з точністю до довільної сталої:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy + C , \quad C = const ,$$

де $M_0(x_0, y_0)$ – довільно вибрана фіксована точка, в якій функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ та їх частинні похідні неперервні.

Використовуючи поняття первісної, дістаємо формулу Ньютона – Лейбниця для криволінійних інтегралів

$$\int_{M_0(x_0, y_0)}^{M_1(x_1, y_1)} P\, dx + Q\, dy = u(x, y)\Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) .$$

Приклад. Перевірити, що вираз $(ydx + xdy)\sin xy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$ та знайти цю функцію (первісну). За допомогою отриманої первісної обчислити відповідний криволінійний інтеграл $I = \int_{A(1,0)}^{B(1,\pi)} y \sin xy\, dx + x \sin xy\, dy$.

Запишемо даний вираз у вигляді $y \sin xy\, dx + x \sin xy\, dy$. Тобто $P(x, y) = y \sin xy$; $Q(x, y) = x \sin xy$. Обчислимо

$$\partial P / \partial y = \sin xy + xy \cos xy ; \quad \partial Q / \partial x = \sin xy + xy \cos xy .$$

Як бачимо, $\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x$. Значить, даний вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$. Знайдемо цю функцію.

Нехай $M_0(0,0)$ – початкова точка. За шлях інтегрування оберемо ламану M_0NM, де на відрізку M_0N: $y=0=const,\ dy=0$, а на відрізку $NM: x=x=const,\ dx=0$. Тоді

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} y\sin xy\,dx+x\sin xy\,dy+C=\int_{M_0(0,0)}^{N(x,0)}+\int_{N(x,0)}^{M(x,y)}+$$

$$+C=\int_0^x 0\cdot\sin(x\cdot 0)\,dx+\int_0^y x\sin xy\,dy+C=0+$$

$$+x\cdot\left(-(1/x)\cos xy\right)\Big|_0^y+C=-\cos xy+1+C.$$

Включивши одиницю в довільну сталу, маємо

$$u(x,y)=\widetilde{C}-\cos xy,\ \text{де } \widetilde{C} \text{ – довільна стала.}$$

Даний інтеграл знайдемо за формулою Ньютона – Лейбниця:

$$I=\int_{A(1,0)}^{B(1,\pi)} y\sin xy\,dx+x\sin xy\,dy=-\cos xy\Big|_{A(1,0)}^{B(1,\pi)}=2.$$

Зауваження. Якщо для диференціального рівняння першого порядку $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ виконується умова $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$, то воно називається рівнянням у повних диференціалах. Оскільки ліва частина цього рівняння є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, то відновлюючи функцію за її повним диференціалом, загальний розв'язок (загальний інтеграл) $u(x,y)=C$ вказаного рівняння можна подати в одній із форм

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy=C;\ \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx=C.$$

Приклад. Пересвідчитися, що диференціальне рівняння

$$(y\sin x+\sin y-1/x^2)\,dx+(x\cos y-\cos x+2y)\,dy=0$$

є рівнянням у повних диференціалах. Знайти його загальний розв'язок.

Маємо $P=y\sin x+\sin y-1/x^2$; $Q=x\cos y-\cos x+2y$.

Ці функції неперервні разом з частинними похідними $\partial P/\partial y=\sin x+\cos y$ і $\partial Q/\partial x=\cos y+\sin x$ на всій координатній площині Oxy за винятком точок осі $Oy: x=0$. Оскільки виконується умова $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$, то маємо рівняння у повних диференціалах. Знайдемо його загальний розв'язок за формулою

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy=C,$$

використовуючи початкову точку $M_0(x_0,y_0)=M_0(\pi,0)$. Тоді

$$\int_{\pi}^{x}(0\cdot\sin x+\sin 0-1/x^2)\,dx+\int_0^y(x\cos y-\cos x+2y)\,dy=C:$$

$$(1/x)\Big|_{\pi}^{x}+x\cdot\sin y\Big|_0^y-\cos x\cdot y\Big|_0^y+y^2\Big|_0^y=C;\quad 1/x-1/\pi+x(\sin y-$$

$$-\sin 0)-\cos x\cdot(y-0)+y^2-0=C;\quad 1/x+x\sin y-$$

$$-y\cos x+y^2=\widetilde{C},$$ де $\widetilde{C}=C+1/\pi$ – довільна стала.

ЛЕКЦІЯ 14 ОПЕРАТОР ГАМІЛЬТОНА У СКАЛЯРНОМУ ПОЛІ. ОПЕРАТОР ГАМІЛЬТОНА У ВЕКТОРНОМУ ПОЛІ. ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕКТОРНИХ ПОЛІВ: РОТОР І ДИВЕРГЕНЦІЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. СПЕЦІАЛЬНІ ВЕКТОРНІ ПОЛЯ: ПОТЕНЦІЙНЕ (БЕЗВИХРОВЕ) ВЕКТОРНЕ ПОЛЕ; СОЛЕНОЇДНЕ ВЕКТОРНЕ ПОЛЕ; ГАРМОНІЧНЕ ВЕКТОРНЕ ПОЛЕ

Потенціальне векторне поле

Розглянемо плоске векторне поле

$$\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}.$$

Нехай у деякій однозв'язній області D поля виконується умова $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Тоді вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$du=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy,\quad \text{де}\quad \frac{\partial u}{\partial x}=P \text{ і } \frac{\partial u}{\partial y}=Q.$$

При цьому дане векторне поле можна записати так

$$\vec{F}(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\vec{j}=grad\,u(x,y).$$

Векторне поле $\vec{F}$, що є градієнтом деякого скалярного поля u: $\vec{F}=grad\,u$, називається потенціальним. Скалярна функція u називається потенціалом цього векторного поля $\vec{F}$.

Зауваження. У прикладних дисциплінах іноді перед градієнтом ставиться знак "-", що не має принципового значення, а лише відповідає конкретному фізичному змісту. Наприклад, для електростатичного поля $\vec{E}=-\,grad\,u$ означає,

що в напрямку вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$ електричний потенціал u спадає.

Умова $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ потенціальності плоского векторного поля рівнозначна існуванню повного диференціала. Відповідно, задача обчислення потенціалу векторного поля рівнозначна задачі відшукання повного диференціала.

Оскільки $grad\,(u + C) = grad\,u$, то потенціал векторного поля обчислюється з точністю до довільної сталої C. Потенціал векторного поля визначається циркуляцією цього поля по довільній лінії M_0M, що з'єднує фіксовану початкову $M_0(x_0, y_0)$ і змінну кінцеву $M(x, y)$ точки:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \vec{F}\, d\vec{l} + C = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy + C\,.$$

Зауваження. Для вибору конкретного значення довільної сталої C використовуються додаткові умови. Наприклад, для електростатичного поля точкового заряду приймається, що потенціал на нескінченності дорівнює нулю.

Циркуляція градієнта скалярного поля дорівнює різниці потенціалів цього поля градієнтів:

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} grad\,u\; d\vec{l} + C = u(x, y)\Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} = u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0)\,.$$

Розглянемо просторове векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}\,.$$

Якщо це поле потенціальне, а $u = u(x, y, z)$ - його потенціал, то $P = \partial u/\partial x$; $Q = \partial u/\partial y$; $R = \partial u/\partial z$.

У потенціальному векторному полі $\vec{F} = grad\,u$ циркуляція не залежить від шляху інтегрування, а лише від початкової $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та кінцевої $M(x, y, z)$ точок:

$$\int_{M_0}^{M} \vec{F}\, d\vec{l} = \int_{M_0}^{M} P\,dx + Qdy + R\,dz = \int_{M_0}^{M} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \int_{M_0}^{M} du =$$

$$= u\Big|_{M_0}^{M} = u\left(M_0\right) - u\left(M\right).$$

Обчислимо ротор потенціального поля:

$$rot\,\vec{F} = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R^2 \end{matrix} \right\|_M = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\vec{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right)\vec{j} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)\vec{k} = \vec{0}\,.$$

Отже, $rot\,\vec{F} = \vec{0}$, якщо поле - потенціальне. Тобто, потенціальне поле є безвихровим.

Зворотне твердження також вірне. Тобто, безвихрове. поле є потенціальним.

Зокрема, рівність $rot\,grad\,u = \vec{0}$ свідчить про те, що поле градієнтів завжди потенціальне.

Висновок: щоб визначити, чи задане векторне поле потенціальне, достатньо пересвідчитись, що його ротор дорівнює нулю.

Для потенціального поля справедлива теорема, яка відповідає розглянутим раніше властивостям криволінійного інтеграла по координатах.

Теорема. Наступні чотири властивості векторного поля $\vec{F}$, заданого в однозв'язній області D, еквівалентні:

1) циркуляція поля $\vec{F}$ по будь-якому замкненому контуру, розміщеному в області D, дорівнює нулю;

2) циркуляція поля $\vec{F}$ вздовж довільної кривої L_{AB}, яка лежить в області D, з початком в точці A та кінцем в точці B залежить тільки від положення точок A та B і не залежить від форми кривої;

3) існує функція (потенціал) $u = u(x, y, z)$ така, що $\vec{F} = grad\,u$ (поле $\vec{F}$ є потенціальним);

4) $rot\,\vec{F} = \vec{0}$ (поле $\vec{F}$ є безвихровим).

Якщо просторове векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ потенціальне, то його потенціал $u = u(x, y, z)$ знаходиться за формулою

$$u(x,y,z)=\int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz+C,$$

де $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – довільно вибрана фіксована точка, в якій функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ $R(x,y,z)$ та їх частинні похідні неперервні; $C=const$.

Зауваження. Найзручніше інтегрувати по ламаній лінії, ланки якої паралельні осям координат. При цьому можливі різні способи побудови такої ламаної.

Приклад. Пересвідчитись, що просторове векторне поле

$$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)=\frac{2x}{yz}\vec{i}-\frac{x^2}{y^2z}\vec{j}-\frac{x^2}{yz^2}\vec{k}$$

потенціальне. Знайти його потенціал $u=u(x,y,z)$.

Обчислимо ротор даного поля:

$$rot\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 2x/(yz) & -x^2/(y^2z) & -x^2/(yz^2)\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-x^2/(yz^2)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial z}\left(-x^2/(y^2z)\right)\right)\vec{i}-\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2/(yz^2)\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(2x/(yz)\right)\right)\vec{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2/(y^2z)\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(2x/(yz)\right)\right)\vec{k}=\left(\frac{x^2}{y^2z^2}-\frac{x^2}{y^2z^2}\right)\vec{i}-$$

$$-\left(-\frac{2x}{yz^2}+\frac{2x}{yz^2}\right)\vec{j}+\left(-\frac{2x}{y^2z}+\frac{2x}{y^2z}\right)\vec{k}=\vec{0}.$$

Оскільки $rot\,\vec{F}=\vec{0}$, то поле - безвихрове, а значить, і потенціальне.

Знайдемо його потенціал. Нехай $M_0(0,1,1)$– початкова точка. За шлях інтегрування оберемо ламану $M_0N_1N_2M$ (рис. 70), де

$$M_0N_1: y=1=const,\ dy=0;\quad z=1=const,\ dz=0$$

$$N_1N_2: x=x=const,\ dx=0;\quad z=1=const,\ dz=0;$$

$$N_2M: x=x=const,\ dx=0;\quad y=y=const,\ dy=0.$$

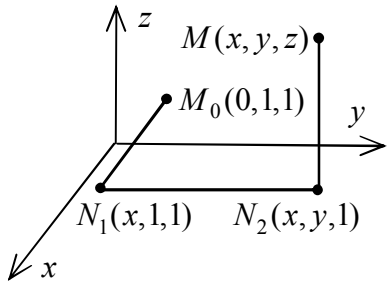


Рисунок 70 – Шлях інтегрування

Тоді

$$u(x,y,z)=\int\limits_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{M(x,y,z)} P\,dx+Q\,dy+$$

$$+R\,dz+C=\int\limits_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{N_1(x,y_0,z_0)}+$$

$$+\int\limits_{N_1(x,y_0,z_0)}^{N_2(x,y,z_0)}+\int\limits_{N_2(x,y,z_0)}^{M(x,y,z)}+C=$$

$$=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int\limits_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz+C\,.$$

Таким чином,

$$u(x,y,z)=\int\limits_0^x\frac{2x}{1\cdot 1}dx-\int\limits_1^y\frac{x^2}{y^2\cdot 1}dy-\int\limits_1^z\frac{x^2}{yz^2}dz+C=x^2\Big|_0^x+$$

$$=x^2\cdot(1/y)\Big|_1^y+(x^2/y)\cdot(1/z)\Big|_1^z+C=$$

$$=x^2+x^2/y-x^2+x^2/(yz)-x^2/y+C=x^2/(yz)+C\,.$$

Приклад. Дано просторове електростатичне поле напруженості $\vec{E}=q\vec{r}\big/|\vec{r}|^3$ точкового електричного заряду q ($q=const$), де $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Пересвідчитись, що це векторне поле $\vec{E}$ потенціальне, і обчислити його потенціал $u=u(x,y,z)$.

$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\vec{E}=q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}x\vec{i}+$

$q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}y\,\vec{j}+q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}z\,\vec{k}$.

Позначимо $P=q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}x$,

$$Q=q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}y\,,\qquad R=q(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}z\,.$$

Тоді, наприклад, $\partial R/\partial y=-(3/2)qz(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}2y$,

$\partial Q/\partial z=-(3/2)qy(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}2z$, тому $\partial Q/\partial z=\partial R/\partial y$.

Аналогічно можна показати, що $\partial R/\partial x = \partial P/\partial z$; $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Звідси дістаємо $rot\,\vec{E} = \vec{0}$. Значить, поле $\vec{E}$ - потенціальне.

Обчислимо його потенціал. Нехай $M_0(0,0,1)$ – початкова точка. За шлях інтегрування оберемо ламану $M_0N_1N_2M$, де

$$M_0N_1 : y = 0 = const,\ dy = 0;\quad z = 1 = const,\ dz = 0$$
$$N_1N_2 : x = x = const,\ dx = 0;\quad z = 1 = const,\ dz = 0;$$
$$N_2M : x = x = const,\ dx = 0;\quad y = y = const,\ dy = 0.$$

Тоді $u(x,y,z) = \int\limits_0^x q\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\,x\,dx +$

$$+\int\limits_0^y q\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\,y\,dy + \int\limits_1^z q\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\,z\,dz + C = -q\times$$
$$\times(x^2+1)^{-1/2}\Big|_0^x - q\cdot(x^2+y^2+1)^{-1/2}\Big|_0^y - q\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\Big|_1^z +$$
$$+C = -q\Big/\sqrt{x^2+y^2+z^2} + q + C = -q/|\vec{r}| + \widetilde{C},\ \widetilde{C} = C + q.$$

Оператор Гамільтона та його застосування

Операції обчислення характеристик скалярних і векторних полів можуть бути спрощені, якщо скористатися диференціально-векторним оператором $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, який був введений Гамільтоном і називається оператором Гамільтона (“набла”-оператором).

Оператор Гамільтона у скалярному полі

Нехай задано скалярне поле $u = u(x,y,z)$.

Застосуємо до функції $u = u(x,y,z)$ оператор "набла" за правилами множення вектора на число:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = grad\,u.$$

Отже, $grad\,u = \nabla u$.

Приклад. Нехай $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Знайти $grad\,|\vec{r}|$;

$|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\quad grad\,|\vec{r}| = \nabla|\vec{r}| =$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i}+$$

$$+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Застосування "набла"-оператора до суми скалярних полів здійснюється за правилами чисельного добутку $\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v$.

Наприклад,

$$grad\left(|\vec{r}|+1/|\vec{r}|\right)=\nabla\left(|\vec{r}|+1/|\vec{r}|\right)=\nabla|\vec{r}|+\nabla\left(1/|\vec{r}|\right)=\vec{r}/|\vec{r}|-\vec{r}\big/|\vec{r}|^3.$$

Оператор Гамільтона у векторному полі

Нехай задано векторне поле

$$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}.$$

Застосуємо оператор Гамільтона до цього векторного поля за правилами множення векторів. Оскільки добуток двох векторів може бути або скалярним, або векторним, то розглянемо спочатку скалярний добуток:

$$\nabla\cdot\vec{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}\right)=$$

$$=\partial P/\partial x+\partial Q/\partial y+\partial R/\partial z=div\,\vec{F}.\quad \text{Отже,}\quad div\,\vec{F}=\nabla\vec{F}.$$

Розглянемо тепер векторний добуток:

$$\nabla\times\vec{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\times\left(P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ P & Q & R\end{vmatrix}=rot\,\vec{F}.\quad \text{Отже,}\quad rot\,\vec{F}=\nabla\times\vec{F}.$$

Застосування оператора Гамільтона до суми векторних полів здійснюється за правилами відповідно скалярного чи векторного добутку:

$$\nabla\cdot\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)=\nabla\cdot\vec{F}_1+\nabla\cdot\vec{F}_2;\quad \nabla\times\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)=\nabla\times\vec{F}_1+\nabla\times\vec{F}_2.$$

Диференціальні операції другого порядку

Ми розглянули диференціальні операції першого порядку: $grad\,u=\nabla u$, $div\,\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}$, $rot\,\vec{F}=\nabla\times\vec{F}$. Після їх застосування до поля виникає нове поле, до якого знову можна вжити ці операції. У результаті маємо диференціальні

операції другого порядку. Таких операцій існує лише п'ять, їх можна записати через "набла"-оператор.

Для скалярного поля $u = u(x, y, z)$ маємо:

$$div\, grad\, u = \nabla \cdot \nabla u\,; \quad rot\, grad\, u = \nabla \times \nabla u = \vec{0}\,.$$

Для векторного поля $\vec{F}$ маємо: $grad\, div\, \vec{F} = \nabla \cdot \left(\nabla \cdot \vec{F}\right)$;

$$div\, rot\, \vec{F} = \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{F}\right) = 0\,; \quad rot\, rot\, \vec{F} = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{F}\right).$$

Розглянемо ці операції докладніше. Обчислимо

$$div\, grad\, u = \nabla \cdot \nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{k}\right) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,.$$

Оператор $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ позначається через Δ ("дельта") і називається оператором Лапласа (лапласіаном):

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla\,; \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \text{ або } div\, grad\, u = \Delta u\,.$$

Як відомо, векторний добуток $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, тому

$rot\, grad\, u = \nabla \times \nabla u = \vec{0}$. Поле градієнта є безвихровим.

Зокрема, в електротехніці для поля потенціалу $rot\, grad\, u = \vec{0}$.

Якщо в мішаному добутку векторів є два однакових вектори, то він дорівнює нулю. Тому

$div\, rot\, \vec{F} = \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{F}\right) = 0$. Поле вихору – соленоїдне.

Приклад. Для скалярного поля $u = y^2 z - xyz + x^2 - 3$ знайти його градієнт $\vec{a} = grad\, u$ і лапласіан Δu. Перевірити, що векторне поле градієнтів $\vec{a} = grad\, u$ є потенціальним ($rot\, \vec{a} = \vec{0}$). Для потенціального векторного поля $\vec{a}$ знайти його потенціал $v = v(x, y, z)$ за допомогою криволінійного інтеграла по координатах

$$v(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz\,,$$

де за фіксовану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ взяти початок координат $O(0,0,0)$ і покласти $v(0,0,0) = 0$.

$$\vec{a} = grad\, u = \nabla u = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 z - xyz + x^2 - 3)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 z - xyz +$$

$$+x^2-3)\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}(y^2z-xyz+x^2-3)\vec{k}=(2x-yz)\vec{i}+(2yz-xz)\vec{j}+$$

$$+(y^2-xy)\vec{k}\ ;\quad \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\nabla\vec{a}=\frac{\partial}{\partial x}(2x-yz)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(2yz-xz)+\frac{\partial}{\partial z}(y^2-xy)=2+2z+0=2+2z\ ;$$

$$rot\,\vec{a}=\nabla\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ 2x-yz & 2yz-xz & y^2-xy\end{vmatrix}=$$

$$=\big((2y-x)-(2y-x)\big)\vec{i}-(-y+y)\vec{j}+(-z+z)\vec{k}=\vec{0}\ ;$$

$$v(x,y,z)=\int_0^x P(x,0,0)\,dx+\int_0^y Q(x,y,0)\,dy+\int_0^z R(x,y,z)\,dz+C=$$

$$=\int_0^x(2x-0\cdot 0)\,dx+\int_0^y(2y\cdot 0-x\cdot 0)\,dy+\int_0^z(y^2-xy)\,dz+C=$$

$$=x^2\Big|_0^x+0+(y^2-xy)\cdot z\Big|_0^z+C=x^2+(y^2-xy)z+C\ ;$$

$$v(0,0,0)=0:\quad C=0\ ;\qquad v(x,y,z)=x^2+(y^2-xy)z\ .$$

Характеристики векторних полів: ротор і дивергенція

Спеціальні векторні поля: потенціальне (безвихрове) векторне поле; соленоїдне векторне поле; гармонічне векторне поле

Дивергенція векторного поля

Соленоїдне векторне поле

Розглянемо просторове векторне поле

$$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}\ .$$

Дивергенцією (розбіжністю) векторного поля $\vec{F}$ у точці $M(x,y,z)$ називається число

$$div\vec{F}(M)=\frac{\partial P(M)}{\partial x}+\frac{\partial Q(M)}{\partial y}+\frac{\partial R(M)}{\partial z}\ .$$

Дивергенція є скалярною характеристикою векторного поля.

Якщо $div\vec{F}(M)>0$, то точка M називається джерелом (витоком), а якщо $div\vec{F}(M)<0$, то точка M називається стоком.

Незамкнені векторні лінії починаються в джерелах і закінчуються в стоках.

Дивергенція характеризує потужність джерел і стоків. Кожному векторному полю $\vec{F}$ відповідає скалярне поле $div\vec{F}$ розподілу джерел та стоків поля $\vec{F}$.

Векторне поле $\vec{F}$ називається соленоїдним (трубчатим), якщо в кожній точці його дивергенція дорівнює нулю: $div\vec{F}=0$.

Соленоїдне поле не має ані джерел, ані стоків. Його векторні лінії не можуть ні починатися, ні закінчуватися всередині поля. Вони або замкнуті, або мають кінці на межі поля, або мають нескінченні гілки (у випадку необмеженого поля).

Приклад . Знайти дивергенцію даного векторного поля в указаних точках:

$$\vec{F}=x^2z^3\vec{i}+2yz^2\vec{j}+xy^4\vec{k}\,;\quad M_1(1,0,-2)\,;\quad M_2(-2,1,-1)\,.$$

$$P=x^2z^3\,;\ Q=2yz^2\,;\ R=x\,y^4\,;\ \frac{\partial P}{\partial x}=2x\,z^3\,;\ \frac{\partial Q}{\partial y}=2z^2\,;\ \frac{\partial R}{\partial z}=0\,;$$

$$div\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2x\,z^3+2\,z^2\,;\quad div\vec{F}\left(M_1\right)=-8<0\,,$$

M_1 - точка стоку; $div\vec{F}\left(M_2\right)=6>0$, M_2 - точка витоку.

Приклад. Перевірити, що дане векторне поле є соленоїдальним: $\vec{F}=\left(y\sin(x^2-y^2)-x^2\right)\vec{i}+x\sin(x^2-y^2)\ \vec{j}+2xz\,\vec{k}$.

$$P=y\sin(x^2-y^2)-x^2\,;\quad Q=x\sin(x^2-y^2)\,;\quad R=2xz\,;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=2xy\cos(x^2-y^2)-2x\,;\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=-2xy\cos(x^2-y^2)\,;\quad \frac{\partial R}{\partial z}=2x\,;$$

$$div\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2xy\cos(x^2-y^2)-2x-$$

$-2xy\cos(x^2-y^2)+2x=0$. Отже, поле соленоїдне.

Ротор векторного поля

Потенціальне (безвихрове)векторне поле

Гармонічне векторне поле

Розглянемо просторове векторне поле

$$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}\,.$$

Ротором (вихором) векторного поля $\vec{F}$ у точці $M(x,y,z)$ називається вектор

$$rot\,\vec{F}(\mathrm{M}) = \left.\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}\right|_M = \left(\frac{\partial R(M)}{\partial y} - \frac{\partial Q(M)}{\partial z}\right)\vec{i} -$$

$$-\left(\frac{\partial R(M)}{\partial x} - \frac{\partial P(M)}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q(M)}{\partial x} - \frac{\partial P(M)}{\partial y}\right)\vec{k}\,.$$

Ротор є векторною характеристикою поля $\vec{F}$.

Кожному векторному полю $\vec{F}$ відповідає векторне поле його роторів $rot\,\vec{F}$, що характеризує обертання поля $\vec{F}$ в кожній точці.

Векторне поле $\vec{F}$ називається безвихровим, якщо в кожній точці його ротор дорівнює нулю: $rot\,\vec{F} = \vec{0}$.

Векторне поле $\vec{F}$, що є градієнтом деякого скалярного поля u: $\vec{F} = grad\,u$, називається потенціальним. Скалярна функція u називається потенціалом цього векторного поля $\vec{F}$.

Якщо поле – потенціальне, то $rot\,\vec{F} = \vec{0}$. Тобто, потенціальне поле є безвихровим.

Зворотне твердження також вірне. Тобто, безвихрове. поле є потенціальним.

Висновок: щоб визначити, чи задане векторне поле потенціальне, достатньо пересвідчитись, що його ротор дорівнює нулю.

Поле градієнтів завжди потенціальне, тобто $rot\,grad\,u = \vec{0}$.

Зауваження 1. Для плоского векторного поля $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ ротор $rot\,\vec{F} = (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\vec{k}$ перпендикулярний до площини Oxy.

Приклад. Знайти ротор даного векторного поля в указаній точці: $\vec{F} = y^2\,\vec{i} - 2xz\,\vec{j} - yx^2\,\vec{k}$; $M(1,-1,0)$.

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 & -2xz & -yx^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial(-yx^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-2xz)}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial(-yx^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2)}{\partial z}\right)\vec{j} +$$

$$-\left(\frac{\partial(-2xz)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2)}{\partial y}\right)\vec{k} = (2x - x^2)\,\vec{i} + 2xy\,\vec{j} - 2(z+y)\vec{k}\,;$$

$$rot\,\vec{F}(M) = (2\cdot 1 - 1^2)\cdot\vec{i} + 2\cdot 1\cdot(-1)\cdot\vec{j} - 2(0-1)\vec{k} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\,.$$

Приклад. Перевірити, що дане векторне поле є безвихровим:

$$\vec{F} = (6xz + y^3)\,\vec{i} + 3xy^2\,\vec{j} + (3x^2 - 4z^3)\,\vec{k}\,.$$

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 6xz + y^3 & 3xy^2 & 3x^2 - 4z^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (0-0)\vec{i} - (6x - 6x)\,\vec{j} + (3y^2 - 3y^2)\vec{k} = \vec{0}\,.$$

Отже, векторне поле безвихрове.

Щільністю циркуляції векторного поля $\vec{F}$ у точці $M(x,y,z)$ у напрямі вектора $\vec{n}$ називається число

$$C_{\vec{n}}(M) = np_{\vec{n}}\,rot\,\vec{F}(M)\,.$$

Щільність циркуляції $C_{\vec{n}}(M)$ в даній точці M досягає максимуму в напрямі ротора $rot\,\vec{F}(M)$ і дорівнює його модулю:

$$C_{\max}(M) = \left|rot\,\vec{F}(M)\right|,\;\; \vec{n}_{\max} = rot\,\vec{F}(M)\,.$$

Приклад. Знайти максимальну щільність циркуляції даного векторного поля в указаній точці:

$$\vec{F} = \left(xz/y\right)\vec{i} - 2y^2z\,\vec{j} + x^2y^3\,\vec{k}\,;\quad M(-1,1,2)\,.$$

$$\square\;\; rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz/y & -2y^2z & x^2y^3 \end{vmatrix} = \left(3x^2y^2 + 2y^2\right)\vec{i} -$$

$$-\left(2xy^3 - x/y\right)\vec{j} + \left(xz/y^2\right)\vec{k}\,;\;\; rot\,\vec{F}(M) = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\,;$$

$$C_{\max}(M) = \left|rot\,\vec{F}(M)\right| = \sqrt{5^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{30}\,;$$

$$\vec{n}_{\max} = rot\,\vec{F}(M) = 5\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}\,.$$

Векторне поле $\vec{F}$ називається гармонічним, якщо воно одночасно соленоїдне і безвихрове.

Векторне поле $\vec{F}$ гармонічне, якщо в кожній його точці дивергенція і ротор дорівнюють нулю: $div\vec{F} = 0$, $rot\,\vec{F} = \vec{0}$.

Приклад. Перевірити, що дане векторне поле є гармонічним:

$$\vec{F} = (yz + 5x)\vec{i} + (xz - 3y)\,\vec{j} + (xy - 2z)\vec{k}\,.$$

$$div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(yz + 5x) + \frac{\partial}{\partial y}(xz - 3y) + \frac{\partial}{\partial z}(xy -$$

$$-2z)=5-3-2=0; \qquad rot\,\vec{F}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz+5x & xz-3y & xy-2z \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial(xy-2z)}{\partial y}-\frac{\partial(xz-3y)}{\partial z}\right)\vec{i}-$$

$$-\left(\frac{\partial(xy-2z)}{\partial x}-\frac{\partial(yz+5x)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial(xz-3y)}{\partial x}-\frac{\partial(yz+5x)}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=(x-x)\vec{i}-(y-y)\vec{j}+(z-z)\vec{k}=\vec{0}.$$

Отже, векторне поле гармонічне.

ЛЕКЦІЯ 15 ПОВЕРХНЕВИЙ ІНТЕГРАЛ ПО ПЛОЩІ (ПЕРШОГО РОДУ). ПОВЕРХНЕВИЙ ІНТЕГРАЛ ПО КООРДИНАТАХ (ДРУГОГО РОДУ). ПОТІК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ. ФОРМУЛА СТОКСА. ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО–ГАУССА

Поверхневий інтеграл по площі (першого роду)

Поверхня σ називається двосторонньою, якщо обхід по довільному замкненому контуру, що лежить на поверхні σ і не має спільних точок з її межею, не змінює напряму нормалі до поверхні. Якщо ж дана умова не виконується, тобто існує замкнений контур, при обході вздовж якого напрям нормалі змінюється на протилежний, то поверхня називається односторонньою.

Двосторонню поверхню називають орієнтовною, а вибір певної сторони поверхні, якій відповідає певний напрямок нормалі, називається орієнтацією поверхні.

Наприклад, круговий конус, еліптичний циліндр, довільна замкнена поверхня без самоперетину (сфера, еліпсоїд, ...) – двосторонні поверхні, а лист Мебіуса (рис. 71) – одностороння поверхня.

Для двосторонньої поверхні σ сторона σ^+, якій відповідає додатний напрям нормалі, називається додатною (зовнішньою), а σ^- - від'ємною

(внутрішньою). Для замкненої поверхні за додатну (зовнішню) приймається та сторона, що відповідає вектору нормалі, напрямленому назовні.

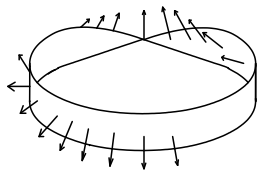


Рисунок 71 – Лист Мебіуса

Зауваження . Надалі розглядатимемо лише кусково-гладкі двосторонні поверхні.

Нехай у просторі задано деяку область V і в цій області – поверхню σ, обмежену просторовою лінією L. Нехай на поверхні σ визначено деяку неперервну скалярну функцію $u = u(x, y, z)$. Інакше кажучи, розглянемо скалярне поле $u = u(x, y, z)$ на поверхні σ.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. Усередині кожного частинного майданчика $\Delta\sigma_i$ візьмемо довільну точку $\overline{M}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) \in \Delta\sigma_i$, обчислимо значення заданої функції в цій точці $u\left(\overline{M}_i\right) = u(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ і помножимо це значення на площу елементарної частини $\Delta\sigma_i$ та складемо суму $\sum_{i=1}^{n} u\left(\overline{M}_i\right)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} u(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta\sigma_i$.

Одержаний вираз називається інтегральною сумою для функції $u = u(x, y, z)$ по поверхні σ.

Скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n} u(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta\sigma_i$, яка не залежить від способу розбиття поверхні σ та від вибору точок $\overline{M}_i$, за умови прямування до нуля діаметрів елементарних частин називається поверхневим інтегралом за площею (поверхневим інтегралом першого роду) від функції $u = u(x, y, z)$ по поверхні σ:

$$\iint\limits_{\sigma} u(x, y, z)\, d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} u\left(\overline{M}_i\right)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} u(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta\sigma_i ,$$

де $\lambda = \max d_i$, $i = \overline{1, n}$; d_i – діаметр i-го майданчика $\Delta\sigma_i$ (найбільша з відстаней між двома довільними точками його межі).

Якщо $\mu = \mu(x, y, z) \geq 0$ і функцію $\mu(x, y, z)$ розглядати як поверхневу густину маси, розподіленої по поверхні σ, то інтеграл виражає масу всієї поверхні: $m = \iint_{\sigma} \mu(x, y, z)\, d\sigma$ (фізичний зміст поверхневого інтеграла по площі).

Коли $u(x, y, z) \equiv 1$, то маємо площу поверхні σ: $S = \iint_{\sigma} d\sigma$.

Зауваження. Поверхневий інтеграла по площі не залежить від вибору орієнтації поверхні σ:

$$\iint_{\sigma^-} u(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{\sigma^+} u(x, y, z)\, d\sigma .$$

Інші властивості поверхневого інтеграла першого роду аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

Обчислення поверхневого інтеграла по площі

Розглянемо інтеграл $\iint_{\sigma} u(x, y, z)\, d\sigma$. Припустимо, що поверхня σ правильна в напрямі осі Oz і задана явно рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ неперервна зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проекції σ на площину Oxy (рис. 72). Покажемо, що в такому випадку обчислення інтеграла першого роду по поверхні σ зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy}.

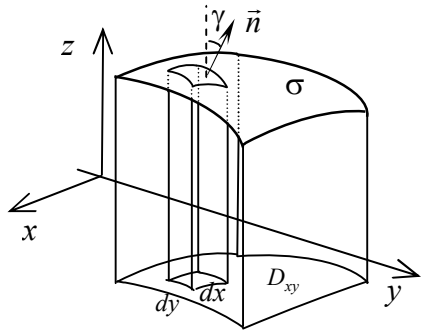


Рисунок 72 – Поверхня інтегрування

Розглянемо елементарний майданчик $d\sigma$ на поверхні σ, який проектується на елемент $dS = dx\, dy$ області D_{xy}.

Проведемо нормаль $\vec{n}$ так, щоб вона утворила гострий кут γ з віссю Oz, тоді $\cos\gamma > 0$. Будемо вважати, що майданчик $d\sigma$ настільки малий, що в його

межах нормаль не змінюється. Тоді площі елементарної частини $d\sigma$ та її проекції $dS = dx\,dy$ зв'язані співвідношенням

$$dxdy = |\cos\gamma|\, d\sigma = \cos\gamma\, d\sigma. \text{ Звідси } \quad d\sigma = dxdy/\cos\gamma.$$

З іншого боку, вибрана нормаль $\vec{n}$ до поверхні $z = z(x, y)$ має проекції $-z'_x, -z'_y, 1$. Тому $\cos\gamma = 1\Big/\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}$ і тоді $d\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$. Значить, інтеграл

$$\iint\limits_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} u\big(x;y;z(x;y)\big)\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy.$$

Зауваження 1 Поклавши $u(x,y,z) \equiv 1$, для площі поверхні σ дістаємо формулу $S = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy$.

Зауваження 2 Може статися, що поверхня σ неправильна в напрямі осі Oz, але правильна в напрямі осі Oy чи Ox, тобто може бути подана явно у вигляді $y = y(x,z)$ чи $x = x(y,z)$. Тоді хід міркувань залишається тим же з тією лише різницею, що поверхню σ будемо проектувати на площину Oxz чи Oyz. При цьому змінні x, y і z міняються ролями. (Відповідні формули переходу до подвійного інтеграла запишіть самостійно). У загальному випадку поверхню σ треба розбити на правильні у вибраному напрямі частини.

Приклад. Обчислити поверхневий інтеграл по площі $\iint_{\sigma}(4x+5z)\,d\sigma$, де σ – частина площини $p:\ 2x+2y+5z=10$, що відсікається координатними площинами $x=0$, $y=0$ і $z=0$.

Поверхню σ будемо розглядати як правильну в напрямі осі Oz, а її проекцію D_{xy} – як правильну в напрямі осі Oy плоску область (рис. 73). Тоді σ: $z = (10-2x-2y)/5$; $\quad z'_x = -2/5$;

$$z'_y = -2/5; \quad D_{xy}: 0 \le x \le 5;\ 0 \le y \le 5-x.$$

За формулою

$$\iint_{\sigma} u(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} u(x;y;z(x;y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy$$

дістаємо $\quad \iint_{\sigma}(4x+5z)\,d\sigma = \iint_{D_{xy}}\big(4x+5\cdot(10-2x-2y)/5\big)\times$

$$\times\sqrt{1+(-2/5)^2+(-2/5)^2}\;dxdy=(1/5)\sqrt{33}\iint_{D_{xy}}(2x-2y+$$

$$+10)\,dxdy=(1/5)\sqrt{33}\int_0^5 dx\int_0^{5-x}(2x-2y+10)dy=(1/5)\sqrt{33}\times$$

$$\times\int_0^5(2xy-y^2+10y)\Big|_0^{5-x}dx=(1/5)\sqrt{33}\int_0^5(2x(5-x)-(5-x)^2+$$

$$+10(5-x))dx=(1/5)\sqrt{33}\int_0^5(-3x^2+10x+25)\,dx=(1/5)\sqrt{33}\times$$

$$\times(-x^3+5x^2+25x)\Big|_0^5=25\sqrt{33}\,.$$

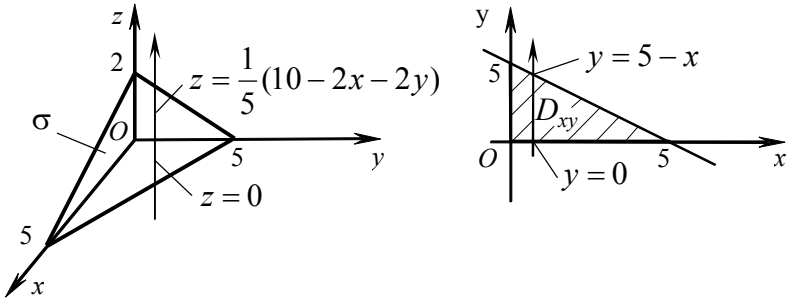


Рисунок 73 – Поверхня та плоска область інтегрування

Приклад. Обчислити масу m частини σ поверхні параболоїда обертання $2z=x^2+y^2$, яка міститься всередині циліндра $x^2+y^2=4$, якщо поверхнева густина $\mu(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

σ: $z=x^2/2+y^2/2$, звідки $z'_x=x$, $z'_y=y$.

Зводячи поверхневий інтеграл до подвійного, для шуканої маси поверхні дістанемо співвідношення

$$m=\iint_{D_{xy}}\mu(x,y,z(x,y))\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy\,,$$

де область D_{xy} - проекція вказаної частини σ поверхні параболоїда на площину Oxy. Область D_{xy} - круг радіуса $R=2$ з центром у початку координат. Перейдемо до полярних координат:

$$x=\rho\cos\varphi;\quad y=\rho\sin\varphi;\quad x^2+y^2=\rho^2;\quad dxdy=\rho d\rho d\varphi;$$

$$f(x,y)=\mu(x,y,z(x,y))\sqrt{1+x^2+y^2}=\left((x^2+y^2)\Big/\sqrt{1+x^2+y^2}\right)\times$$

$$\times\sqrt{1+x^2+y^2}=x^2+y^2=\rho^2.$$

Тоді

$$m=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho^2\rho\,d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho^3d\rho=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\rho^4\Big|_0^2d\varphi=4\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=8\pi.$$

Поверхневий інтеграл по координатах

Поняття поверхневого інтеграла по координатах (другого роду)

Потік векторного поля

Розглянемо деяку просторову область V, в якій задано поверхню σ, обмежену просторовою лінією L. Нехай вибрана сторона $\sigma^{\pm}$ (зафіксовано один певний знак “+” чи “-”) поверхні характеризується одиничним вектором нормалі

$$\vec{n}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k},$$

де $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{n}$, $|\vec{n}|=1$.

Нехай на поверхні σ визначено деяку неперервну векторну функцію $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. Інакше кажучи, розглянемо векторне поле $\vec{F}$ на поверхні σ.

Розіб'ємо поверхню σ довільними кусково-гладкими лініями на n елементарних частин $\Delta\sigma_i$. Усередині кожного частинного майданчика $\Delta\sigma_i$ візьмемо довільну точку $\overline{M}_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i,\bar{z}_i)\in\Delta\sigma_i$, обчислимо в цій точці значення заданої функції $\vec{F}(\overline{M}_i)$ і нормалі $\vec{n}(\overline{M}_i)$, потім знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{F}(\overline{M}_i)$ і $\vec{n}(\overline{M}_i)$, помножимо цей добуток на площу елементарної частини $\Delta\sigma_i$ та складемо суму $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}(\overline{M}_i)\cdot\vec{n}(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i$.

Одержаний вираз називається інтегральною сумою для вектор-функції $\vec{F}=\vec{F}(M)=\vec{F}(x,y,z)$ по вибраній стороні $\sigma^{\pm}$ поверхні σ.

Скінченна границя інтегральної суми $\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{F}(\overline{M}_i)\cdot\vec{n}(\overline{M}_i)\Delta\sigma_i$, яка не залежить від способу розбиття поверхні σ та від вибору точок $\overline{M}_i$, за умови прямування до нуля діаметрів елементарних частин називається поверхневим інтегралом по

координатах (поверхневим інтегралом другого роду) від вектор-функції $\vec{F} = \vec{F}(M) = \vec{F}(x, y, z)$ по вибраній стороні $\sigma^{\pm}$ поверхні σ:

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}\left(\overline{M}_i\right) \cdot \vec{n}\left(\overline{M}_i\right) \Delta\sigma_i ,$$

де $\lambda = \max d_i$, $i = \overline{1, n}$; d_i – діаметр частинної поверхні $\Delta\sigma_i$.

Розглянемо докладніше i-й доданок. За означенням скалярного добутку: $\vec{F}\left(\overline{M}_i\right) \cdot \vec{n}\left(\overline{M}_i\right) \Delta\sigma_i = \left|\vec{F}\left(\overline{M}_i\right)\right| \cdot \left|\vec{n}\left(\overline{M}_i\right)\right| \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\sigma_i =$

$$= \left|\vec{F}\left(\overline{M}_i\right)\right| \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\sigma_i , \quad \varphi = \widehat{\vec{F}\left(\overline{M}_i\right), \vec{n}\left(\overline{M}_i\right)}.$$

Останній вираз допускає таке тлумачення: цей добуток визначає об'єм циліндра з основою $\Delta\sigma_i$ і висотою $|\vec{F}(\overline{M}_i)| \cdot \cos\varphi$ (рис. 74). Коли вважати, що векторне поле $\vec{F}$ є швидкість рідини, що протікає через поверхню σ, то цей добуток дорівнює кількості рідини, яка переміщується через частинний майданчик $\Delta\sigma_i$ за одиницю часу в напрямі вектора $\vec{F}\left(\overline{M}_i\right)$. Інтеграл $\iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$ визначає загальну кількість рідини, що протікає за одиницю часу через вибрану сторону $\sigma^{\pm}$ поверхні σ.

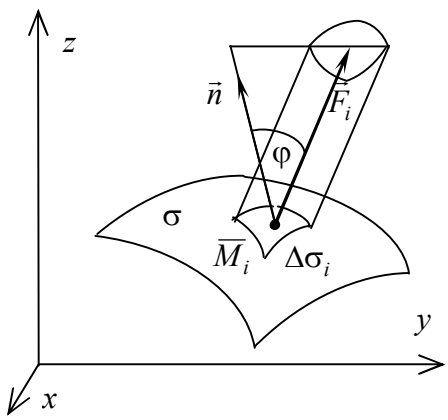


Рисунок74 – Потік векторного поля

Тому поверхневий інтеграл $\iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$ також називають потоком векторного поля $\vec{F}$ через вибрану сторону $\sigma^{\pm}$ поверхні σ:

$$\Pi^{\pm} = \iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

(фізичний зміст поверхневого інтеграла по координатах).

Якщо поверхня σ замкнена, то інтеграл по ній записується так $\oiint_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$.

Зауваження. Якщо всюди на поверхні σ векторне поле $\vec{F}$ дотичне до неї ($\vec{F} \perp \vec{n}$) (тобто, σ є векторною поверхнею, що утворюється з векторних ліній), то потік через неї дорівнює нулю:

$$\iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} 0\, d\sigma = 0 .$$

Зауваження. При зміні орієнтації поверхні σ поверхневий інтеграл за координатами тільки змінює знак:

$$\iint_{\sigma^{-}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = -\iint_{\sigma^{+}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma ,$$

оскільки при цьому одиничний вектор нормалі $\vec{n}$ змінює знак. Інші властивості поверхневого інтеграла першого роду аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

Якщо виразити скалярний добуток у координатній формі, то одержимо співвідношення

$$\iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma ,$$

що відображає зв'язок між поверхневими інтегралами першого та другого роду.

Векторне поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ можна подати як суму трьох векторних полів $P\vec{i}$, $Q\vec{j}$ і $R\vec{k}$. Відповідно поверхневий інтеграл можна розбити на три інтеграли-доданки:

$$\Pi^{\pm} = \iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} P\vec{i} \cdot \vec{n}\, d\sigma + \iint_{\sigma^{\pm}} Q\vec{j} \cdot \vec{n}\, d\sigma + \iint_{\sigma^{\pm}} R\vec{k} \cdot \vec{n}\, d\sigma .$$

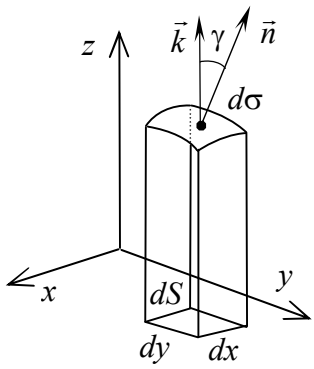


Рисунок 75 – Елементарний майданчик поверхні

Розглянемо останній з інтегралів $\iint_{\sigma^{\pm}} R\vec{k} \cdot \vec{n}\, d\sigma$. Обчислимо скалярний добуток $\vec{k} \cdot \vec{n} = |\vec{k}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\gamma = \cos\gamma$ (рис. 109). Далі $\cos\gamma\, d\sigma$ є проекція $dS = dx\, dy$

елементарного майданчика $d\sigma$ на площину Oxy: $\cos\gamma\, d\sigma = dxdy$, тому $\iint_{\sigma^{\pm}} R\vec{k}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} R\, dxdy$.

Аналогічно $\cos\alpha\, d\sigma = dydz$, $\cos\beta\, d\sigma = dxdz$. Тоді

$$\iint_{\sigma^{\pm}} P\vec{i}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} P\, dydz; \quad \iint_{\sigma^{\pm}} Q\vec{j}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} Q\, dxdz.$$

Отримані три інтеграли

$$I_x = \iint_{\sigma^{\pm}} P\, dydz, \quad I_y = \iint_{\sigma^{\pm}} Q\, dxdz, \quad I_z = \iint_{\sigma^{\pm}} R\, dxdy$$

називаються поверхневими інтегралами по відповідній парі координат (y,z) або (x,z), або (x,y). Повний поверхневий інтеграл по координатах $\Pi^{\pm} = I_x + I_y + I_z$ записується так

$$\iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} P\, dydz + Q\, dxdz + R\, dxdy,$$

де для скорочення запису в підінтегральному виразі опущені зовнішні дужки.

Зауваження. Виділимо два важливі випадки, коли поверхневий інтеграл $I_z = \iint_{\sigma^{\pm}} R\, dxdy$ по парі координат (x,y) дорівнює нулю:

а) якщо $R = 0$ всюди на поверхні σ, тобто векторне поле $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + 0\vec{k}$ є плоскопаралельним (вектор $\vec{F}$ паралельний одній площині Oxy), при цьому $\vec{F} \perp \vec{k}$;

б) якщо $\vec{k} \perp \vec{n}$ всюди на поверхні σ, тобто σ є циліндричною поверхнею з твірними, що паралельні осі Oz, при цьому її проекцією D_{xy} на площину Oxy служить деяка лінія – фігура нульової площі.

Аналогічні твердження справедливі для поверхневих інтегралів $I_x = \iint_{\sigma^{\pm}} P\, dydz$ і $I_y = \iint_{\sigma^{\pm}} Q\, dxdz$.

Обчислення поверхневого інтеграла по координатах

Обчислення поверхневого інтеграла другого роду зводиться до обчислення подвійних інтегралів по плоских областях.

Можна спочатку перейти до поверхневого інтеграла першого роду , а потім спроектувати поверхню σ на одну з координатних площин і перейти до подвійного інтеграла.

Але, як правило, зручніше спроектувати поверхню σ на всі три координатні площини і безпосередньо перейти до відповідних подвійних інтегралів. Для цього треба розбити повний інтеграл на складові частини і кожну з них розглянути окремо.

Метод проектування на одну з координатних площин.

Нехай поверхня σ правильна в напрямі осі Oz і задана явно рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ неперервна зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проекції σ на площину Oxy (рис. 76). Тоді для напрямних косинусів одиничного вектора нормалі $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ справедливі співвідношення:

$$\cos\alpha = -z'_x \Big/ \left(\pm\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\right);$$
$$\cos\beta = -z'_y \Big/ \left(\pm\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\right);$$
$$\cos\gamma = 1 \Big/ \left(\pm\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\right),$$

де перед квадратним коренем береться один певний знак “+” чи “-” у залежності від орієнтації поверхні.

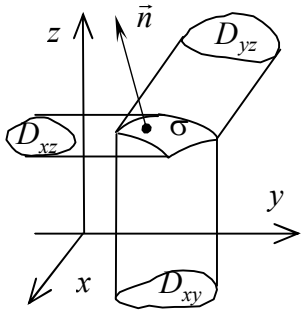


Рисунок 76 – Проекції поверхні на координатні площини

Площі елементарного майданчика $d\sigma$ та його проекції $dS = dx\,dy$ зв’язані рівністю:

$$d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dxdy\,.$$

Відповідно для поверхневого інтеграла маємо:

у векторній формі $\iint\limits_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \left[(\vec{F},\vec{n})\big/|\cos\gamma|\right]\Big|_{z=z(x,y)} dxdy$

або в координатній формі

$$\iint\limits_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iint\limits_{\sigma^{\pm}} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left(\frac{-z'_x\ P}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} + \frac{-z'_y\ Q}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{R}{\pm\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}} \right) \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\ dxdy =$$

$$= \pm \iint\limits_{D_{xy}} \left(-z'_x(x,y)P(x,y,z(x,y)) - z'_y(x,y)Q(x,y,z(x,y)) + R(x,y,z(x,y))\right) dx\,dy\,.$$

Таким чином, обчислення поверхневого інтеграла зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy}. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо $\cos\gamma \geq 0$ (кут γ між нормаллю $\vec{n}$ і вибраною віссю Oz – гострий), чи знак мінус, якщо $\cos\gamma \leq 0$ (кут γ – тупий).

Приклад. Обчислити поверхневий інтеграл по координатах

$$I = \iint_{\sigma^-} (xy/z-3)\,dydz - \left(z/(yx)\right) dxdz + (2z/x)\,dxdy$$

методом проектування на одну координатну площину. Тут σ^- – внутрішня сторона частини поверхні гіперболічного параболоїда $z = xy$, що відсікається площинами $z = 0$ і $2x + y - 2 = 0$, відповідний вектор нормалі $\vec{n}$ утворює з віссю Oz тупий кут γ.

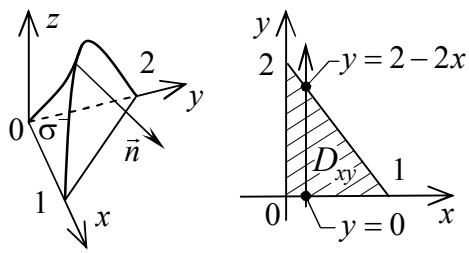


Рисунок 77 – Поверхня інтегрування

Задана поверхня зображена на рис. 77. Поверхня σ – правильна в напрямі осі Oz і задається явно рівнянням $z = xy$. Прямокутний трикутник D_{xy} - її проекція на площину Oxy. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак мінус, оскільки кут γ – тупий. Тоді σ^- : $z = xy$; $z'_x = y$;

$$z'_y = x;\quad D_{xy}:\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2-2x;$$

$$I = \iint_{\sigma^-} (xy/z-3)\,dydz - \left(z/(yx)\right) dxdz + (2z/x)\,dxdy =$$

$$= -\iint_{D_{xy}} \left(-y(xy/(xy)-3) - x\left(-xy/(yx)\right) + (2xy/x)\right) dxdy =$$

$$= -\iint_{D_{xy}} (4y+x)\, dxdy = -\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (4y+x)\, dy = -\int_0^1 (2y^2 +$$

$$+ xy)\Big|_0^{2-2x} dx = -\int_0^1 (6x^2 - 14x + 8)\, dx = -(2x^3 - 7x^2 + 8x)\Big|_0^1 = -3 .$$

Метод проектування на всі три координатні площини

Нехай поверхня σ правильна в усіх трьох напрямах Ox, Oy, Oz. Зокрема, її можна задати явно рівнянням $z = z(x, y)$, де функцію $z(x, y)$ будемо вважати неперервною зі своїми частинними похідними першого порядку в області D_{xy} - проекції σ на площину Oxy (рис. 110).

Якщо $dS = dx\,dy$ - площа проекції елементарного майданчика $d\sigma$ на площину Oxy, то площа самого майданчика

$$d\sigma = dxdy/|\cos\gamma| = \pm dxdy/\cos\gamma ,$$

де береться один певний знак “+” чи “-” у залежності від орієнтації поверхні. Тоді для поверхневого інтеграла $I_z = \iint_{\sigma^\pm} R\, dxdy$ маємо:

$$I_z = \iint_{\sigma^\pm} R\, dxdy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\, dxdy ,$$

тобто обчислення поверхневого інтеграла за парою координат (x, y) зводиться до обчислення подвійного інтеграла по області D_{xy}. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо $\cos\gamma \ge 0$ (кут γ – гострий), чи знак мінус, якщо $\cos\gamma \le 0$ (кут γ – тупий).

Аналогічно обчислюються поверхневі інтеграли $I_x = \iint_{\sigma^\pm} P\, dydz$ і $I_y = \iint_{\sigma^\pm} Q\, dxdz$ за відповідною парою координат (y, z) чи (x, z):

$$I_x = \iint_{\sigma^\pm} P\, dydz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z)\, dydz ;$$

$$I_y = \iint_{\sigma^\pm} Q\, dxdz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z)\, dxdz ,$$

де D_{yz} і D_{xz} – проекції поверхні σ на координатні площини відповідно Oyz і Oxz. При цьому перед подвійним інтегралом береться знак плюс, якщо кут між нормаллю $\vec{n}$ і координатною віссю відповідно Ox чи Oy – гострий, чи знак мінус, якщо цей кут – тупий.

Повний поверхневий інтеграл по координатах знаходиться як сума отриманих подвійних інтегралів

$$\iint_{\sigma^{\pm}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma^{\pm}} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = I_x + I_y + I_z\,.$$

Зауваження. У загальному випадку поверхню σ доводиться розбивати на правильні у вибраному напрямі частини.

Приклад. Методом проектування на всі три координатні площини обчислити потік векторного поля $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ через зовнішню сторону σ^{+} поверхні σ, відповідний вектор нормалі $\vec{n}$ якої утворює з віссю Oz кут γ:

$$\vec{F} = \frac{x^2}{\sqrt{y^2+z^2}}\vec{i} + \frac{\pi x}{x^2+y^2+z^2}\vec{j} + \frac{1-z^2}{x^2+y^2}\vec{k}\,;$$

σ: $x^2+y^2+z^2=1 \quad (x\ge 0,\ y\le 0,\ z\ge 0)$.

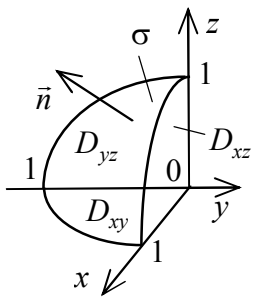


Рисунок 78 – Проекції поверхні на координатні площини

Поверхня σ є восьмою частиною сфери одиничного радіуса з центром у початку координат (рис. 78). Вона правильна в усіх трьох напрямах Ox, Oy і Oz. При цьому нормаль $\vec{n}$ до вибраної сторони σ^{+} з осями Ox і Oz утворює гострі кути α і γ, а з віссю Oy – тупий кут β. Позначимо проекції σ на координатні площини відповідно D_{yz}, D_{xz} і D_{xy}, які будуть чвертями кругів радіуса $R=1$. Поверхню σ можна задати явно відповідно одним з рівнянь

$$x=\sqrt{1-y^2-z^2}\,,\quad y=-\sqrt{1-x^2-z^2}\quad \text{чи}\quad z=\sqrt{1-x^2-y^2}\,.$$

Розіб'ємо повний поверхневий інтеграл на три складові частини за відповідною парою координат (y,z), (x,z) і (x,y):

$$\Pi = \iint_{\sigma^{+}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = I_x + I_y + I_z\,,$$

де $I_x = \iint\limits_{\sigma^{+}} \dfrac{x^2\,dydz}{\sqrt{y^2+z^2}}$; $I_y = \iint\limits_{\sigma^{+}} \dfrac{\pi x\,dxdz}{x^2+y^2+z^2}$; $I_z = \iint\limits_{\sigma^{+}} \dfrac{1-z^2}{x^2+y^2}\,dxdy$,

і обчислимо окремо кожний з інтегралів-доданків:

$$I_x = \iint\limits_{\sigma^+} \frac{x^2\,dydz}{\sqrt{y^2+z^2}} = +\iint\limits_{D_{yz}} \frac{1-y^2-z^2}{\sqrt{y^2+z^2}}\,dydz = \left| \begin{array}{l} y=\rho\cos\varphi; \\ z=\rho\sin\varphi; \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} y^2+z^2=\rho^2; \\ dydz=\rho\,d\rho\,d\varphi \end{array} \right| = \iint\limits_{D_{yz}} \frac{1-\rho^2}{\rho}\rho\,d\rho d\varphi = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (1-\rho^2)\,d\rho =$$

$$= \int\limits_{\pi/2}^{\pi} (\rho-\rho^3/3)\Big|_0^1 d\varphi = \frac{2}{3}\cdot\varphi\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{3};$$

$$I_y = \iint\limits_{\sigma^+} \frac{\pi x\,dxdz}{x^2+y^2+z^2} = -\iint\limits_{D_{xz}} \frac{\pi x\,dxdz}{x^2+(1-x^2-z^2)+z^2} = -\pi \iint\limits_{D_{xz}} x\,dxdz =$$

$$= \left| x=\rho\cos\varphi;\ z=\rho\sin\varphi;\ x^2+z^2=\rho^2;\ dxdz=\rho\,d\rho\,d\varphi \right| =$$

$$= -\pi \iint\limits_{D_{xz}} \rho\cos\varphi\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi = -\pi \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2\,d\rho =$$

$$= -\pi \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\cdot(\rho^3/3)\Big|_0^1 d\varphi = -\frac{1}{3}\pi\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{3};$$

$$I_z = \iint\limits_{\sigma^+} \frac{1-z^2}{x^2+y^2}\,dxdy = +\iint\limits_{D_{xy}} \frac{1-(1-x^2-y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy = \frac{\pi}{4}$$

(це просто площа чверті круга).

Отже, $\Pi = I_x + I_y + I_z = \pi/3 - \pi/3 + \pi/4 = \pi/4$.

Приклад. Дано просторове електростатичне поле напруженості $\vec{E} = k\,q\vec{r}/|\vec{r}|^3$ позитивного точкового електричного заряду q ($q = const$), розміщеного в початку координат, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $k = const$. Обчислити потік цього векторного поля через зовнішню сторону σ^+ поверхні сфери σ радіуса R з центром у початку координат.

На поверхні сфери $|\vec{r}| = R = const$, а одиничний вектор зовнішньої нормалі $\vec{n} = \vec{r}/|\vec{r}| = \vec{r}/R$. Тоді $\vec{r}\cdot\vec{n} = |\vec{r}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos 0 = R$;

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma^+} k\frac{q}{|\vec{r}|^3}\cdot\vec{r}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \frac{kq}{R^2}\iint\limits_{\sigma^+} d\sigma = \frac{kq}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi kq.$$

Формула Стокса

Для поверхневих інтегралів має місце формула, аналогічна формулі Гріна.

Розглянемо у просторі деяку поверхню σ, обмежену замкненою лінією L.

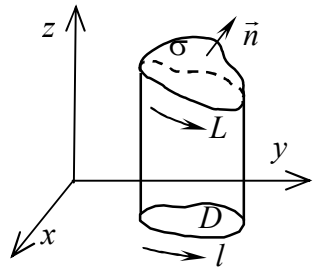


Рисунок 79 – Поверхня σ, обмежена лінією L

Проекцією цієї поверхні на площину Oxy буде область D, обмежена замкненою лінією l. Нехай у просторі задано векторне поле

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}\ .$$

Якщо покласти $z = 0$ і $R(x,y,z) \equiv 0$, то матимемо плоске векторне поле, що в області D приймає значення

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$$

Обчислимо ротор цього векторного поля

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y\right)\vec{k}\ .$$

Тоді потік цього ротора через додатну сторону D^+ області D буде

$$\iint_{D^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{D^+}\left(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y\right)\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma\ .$$

Оскільки одинична нормаль $\vec{n}$ до області D співпадає з $\vec{k}$, то $\vec{n}\cdot\vec{k} = 1$, $\cos\gamma = 1 > 0$. Перейдемо до подвійного інтеграла:

$$\iint_{D^+}\left(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y\right)\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{D^+}\left(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y\right)d\sigma =$$

$$= +\iint_{D}\left(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y\right)dx\,dy\ .$$

Згадуючи формулу Гріна, отримуємо

$$\iint_{D}\left(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y\right)dx\,dy = \oint_l \vec{F}\,d\vec{l}\ .$$

Звідси $\iint_{D^+}\left(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y\right)\vec{k}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \oint_l \vec{F}\,d\vec{l}$.

Остаточно, маємо формулу Стокса $\oint_l \vec{F}\,d\vec{l} = \iint_{D^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$, що для плоского поля є векторним записом формули Гріна.

У просторі для поверхні σ, обмеженої замкненою лінією L, формула Стокса залишається в тому ж вигляді

$$\oint_L \vec{F}\,d\vec{l} = \iint_{\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma,$$

при цьому вибирається додатний напрям обходу контуру L: якщо дивитися з кінця вектора нормалі $\vec{n}$ до відповідної сторони σ^+ поверхні σ, то цей обхід здійснюється проти ходу годинникової стрілки (при цьому поверхня, обмежена контуром, залишається зліва).

Отже, справедлива теорема Стокса (зв'язок між криволінійним і поверхневим інтегралами): Циркуляція векторного поля $\vec{F}$ вздовж замкненої лінії L, що обмежує поверхню σ, дорівнює потоку ротора цього поля через указану поверхню.

Зауваження. Розглянемо довільний одиничний вектор $\vec{n}$, що виходить з деякої точки M, і оточимо цю точку плоским майданчиком $\Delta\sigma$, перпендикулярним до вектора $\vec{n}$ і обмеженим замкненим контуром ΔL. За формулою Стокса одержимо $\oint_{\Delta L} \vec{F}\,d\vec{l} = \iint_{\Delta\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$. До правої частини застосуємо теорему про середнє значення, тоді

$$\oint_{\Delta L} \vec{F}\,d\vec{l} = rot\,\vec{F}(M_*)\cdot\vec{n}\,\Delta\sigma = np_{\vec{n}}\,rot\,\vec{F}(M_*)\cdot\Delta\sigma.$$

Розділивши рівність на $\Delta\sigma$ і стягуючи майданчик $\Delta\sigma$ до даної точки M, тобто переходячи до границі при $\Delta\sigma \to 0$ (при цьому $M_* \to M$ і $\Delta L \to 0$), дістанемо

$$np_{\vec{n}}\,rot\,\vec{F}(M) = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\left(\oint_{\Delta L} \vec{F}\,d\vec{l}\,\Big/\Delta\sigma\right).$$

Таким чином можна визначити проекцію ротора на довільну вісь (щільність циркуляції $C_{\vec{n}} = np_{\vec{n}}\,rot\,\vec{F}$), тобто ротор $rot\,\vec{F}$ не залежить від вибору системи координат (є інваріантною векторною характеристикою поля).

Зауваження. Коли векторне поле безвихрове, тобто $rot\,\vec{F} = 0$, то для довільного замкненого контуру L, який цілком лежить у цьому полі, за формулою Стокса маємо $\oint_L \vec{F}\,d\vec{l} = \iint_{\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = 0$. Це означає, що безвихрове поле є потенціальним. Навпаки, якщо поле потенціальне, тобто для довільного

замкненого контуру L $\oint_L \vec{F}\,d\vec{l}=0$, то за формулою Стокса маємо $\iint_{\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\oint_L \vec{F}\,d\vec{l}=0$, звідки $rot\,\vec{F}=0$. Це означає, що потенціальне поле є безвихровим.

Зауваження 3. Із формули Стокса випливає, що потік вихору векторного поля $\vec{F}$ не залежить від виду поверхні σ, що натягнута на замкнений контур L. Якщо через цей контур провести дві поверхні σ_1 та σ_2 (рис. 80), що обмежують деяке просторове тіло V, то

$$\iint_{\sigma_1^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\oint_L \vec{F}\,d\vec{l}=\iint_{\sigma_2^-} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma\,.$$

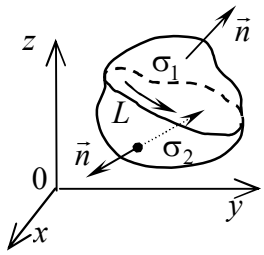


Рисунок 80 – Потік вихору векторного поля

Змінивши орієнтацію поверхні σ_2 на зовнішню σ_2^+, маємо

$$\iint_{\sigma_2^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=-\iint_{\sigma_2^-} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=-\iint_{\sigma_1^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma\,.$$

Тоді для замкненої поверхні $\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2$, що обмежує просторове тіло V, одержуємо

$$\oiint_{\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint_{\sigma_1^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma+\iint_{\sigma_2^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=0\,.$$

Отже, потік вихору векторного поля $\vec{F}$ через замкнену поверхню дорівнює нулю: $\oiint_{\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=0$.

Приклад. Обчислити потік ротора векторного поля $\vec{F}=(y+xz)\,\vec{i}+(x+yz)\,\vec{j}+xyz\,\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ поверхні σ: $x^2+y^2+z^2=1$ $(z\ge 0)$, відповідний вектор нормалі $\vec{n}$ якої утворює з віссю Oz гострий кут γ.

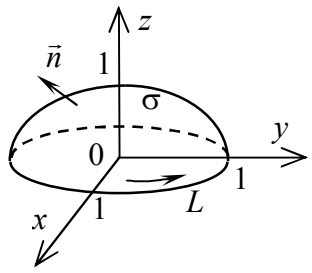


Рисунок 81 – Потік ротора векторного поля

Поверхня σ є півсферою одиничного радіуса з центром у початку координат (рис. 81), обмеженою замкненою лінією L – колом $x^2+y^2=1$ в площині Oxy. За формулою Стокса

$$\Pi=\iint_{\sigma^+} rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\oint_L \vec{F}\,d\vec{l}=$$

$$=\oint_L (y+xz)\,dx+(x+yz)\,dy+xyz\,dz=$$

Далі врахуємо, що L лежить у площині $z=0$, і перейдемо до параметричних рівнянь

$$=\left|\begin{matrix} x=1\cos t;\ y=1\sin t;\ z=0;\ dx=-\sin t\,dt; \\ dy=\cos t\,dt;\ dz=0;\ 0\le t\le 2\pi \end{matrix}\right|=\int_0^{2\pi}\big(\sin t\cdot(-\sin t)+$$

$$\times\cos t\cdot\cos t\big)\,dt=\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt=(1/2)\cdot\sin 2t\Big|_0^{2\pi}=0\,.$$

Формула Остроградського – Гаусса

Розглянемо просторове тіло V, обмежене замкненою поверхнею σ (рис. 82). Проекцію тіла на площину Oxy позначимо через D. Нехай лінія L на поверхні тіла, що проектується в межу області D, поділяє поверхню σ на дві правильні в напрямі осі Oz частини σ_1 та σ_2, які описуються явно відповідно рівняннями $z=f_1(x,y)$ і $z=f_2(x,y)$. Окрім того, виділимо зовнішню сторону σ^+ поверхні, якій відповідає одиничний вектор нормалі $\vec{n}$. Нехай у просторі задано векторне поле

$$\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}\,.$$

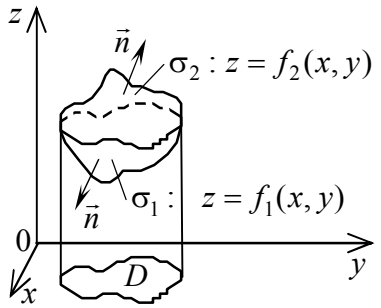


Рисунок 82 – Просторове тіло, обмежене замкненою поверхнею

Обчислимо потрійний інтеграл $I = \iiint\limits_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dV$:

$$I = \iiint\limits_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_D dx\,dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dz =$$

$$\iint\limits_D \left(R(x,y,z)\Big|_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \right) dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_D \big[R\big(x, y, f_2(x,y)\big) -$$

$$- R\big(x, y, f_1(x,y)\big) \big]\, dx\,dy =$$

Далі перетворимо одержані подвійні інтеграли в поверхневі

$$= \iint\limits_{\sigma_2^+} R(x,y,z)\,dx\,dy + \iint\limits_{\sigma_1^+} R(x,y,z)\,dx\,dy = \oiint\limits_{\sigma^+} R(x,y,z)\,dx\,dy\,.$$

Таким чином $\iiint\limits_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\sigma^+} R(x,y,z)\,dx\,dy$.

Аналогічно можна обчислити

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\sigma^+} Q\,dx\,dz\,; \quad \iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x} dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\sigma^+} P\,dy\,dz\,.$$

Склавши ці три рівності, маємо формулу Остроградського – Гаусса в координатній формі

$$\oiint\limits_{\sigma^+} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz$$

або у векторній формі $\oiint_{\sigma^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = \iiint_V div\,\vec{F}\,dV$.

Отже, справедлива теорема Остроградського – Гаусса (зв’язок між поверхневим і потрійним інтегралами):

Потік векторного поля $\vec{F}$ через зовнішню сторону σ^+ замкненої поверхні σ дорівнює потрійному інтегралу за об'ємом V, обмеженим цією поверхнею, від дивергенції $div\vec{F}$ поля.

Зауваження. Розглянемо деяку точку M, розміщену всередині замкненої поверхні $\Delta\sigma$, що обмежує об'єм ΔV. За формулою Остроградського – Гаусса $\iint_{\Delta\sigma^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iiint_{\Delta V} div\vec{F}\,dV$. До правої частини застосуємо теорему про середнє значення. Тоді

$$\iint_{\Delta\sigma^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = div\vec{F}(M_*)\Delta V .$$

Розділивши рівність на ΔV і стягуючи поверхню $\Delta\sigma$ до даної точки M, тобто переходячи до границі при $\Delta\sigma \to 0$, $M_* \to M$, $\Delta V \to 0$, дістанемо $div\vec{F}(M) = \lim\limits_{\Delta V\to 0}\left(\oiint_{\Delta\sigma^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma \big/ \Delta V\right)$.

Отже, дивергенція $div\vec{F}$ не залежить від вибору системи координат (є інваріантною скалярною характеристикою поля).

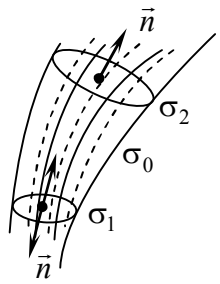


Рисунок 83 – Векторна трубка

Зауваження. Нехай векторне поле $\vec{F}$ – соленоїдне, тобто $div\vec{F} = 0$. Розглянемо векторну трубку – поверхню, утворену векторними лініями, що проходять через деякий замкнений контур, який не збігається з векторною лінією (рис. 83). Виділимо її частину об’ємом V, розміщену між перерізами σ_1 і σ_2. За умовою $div\vec{F} = 0$, тому згідно формули Остроградського – Гаусса потік векторного поля через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю. Тоді для зовнішньої сторони замкненої поверхні, що обмежує виділений об’єм V, маємо

$$\iint_{\sigma_0^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma + \iint_{\sigma_1^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma + \iint_{\sigma_2^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = \iiint_V div\vec{F}\,dV = 0,$$

де σ_0 – бічна поверхня трубки; $\vec{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі.

Оскільки на бічній поверхні трубки нормаль $\vec{n}$ перпендикулярна до векторної лінії поля, то $\iint_{\sigma_0^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = 0$. Тоді

$$\iint_{\sigma_2^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = -\iint_{\sigma_1^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma .$$

Якщо змінити напрям нормалі на поверхні σ_1, тобто взяти внутрішню нормаль $\vec{n}$ (у напрямі векторних ліній), то дістанемо

$$\iint_{\sigma_2^+} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\sigma_1^-} \vec{F}\,\vec{n}\,d\sigma .$$

У соленоїдному полі потік вектора $\vec{F}$ в напрямі векторних ліній через кожний переріз векторної трубки один і той же.

Якщо $\vec{F}$ – поле швидкостей текучої рідини, то в полі без джерел через кожний переріз векторної трубки протікає одна й та ж кількість рідини.

Відповідно до формули $div\,rot\,\vec{F} = 0$ поле ротора довільного векторного поля – трубчате. Справедливе й зворотне твердження: кожне трубчате поле є полем ротора деякого векторного поля. Тобто, якщо $div\,\vec{F} = 0$, то існує таке поле $\vec{\Phi}$, що $\vec{F} = rot\,\vec{\Phi}$. Вектор $\vec{\Phi}$ називають вектором-потенціалом даного поля.

Таким чином, справедлива

Теорема. Для векторного поля $\vec{F}$ наступні чотири властивості еквівалентні:

1) потік поля через довільну замкнену поверхню дорівнює нулю;

2) потік поля через поверхню σ, обмежену замкненим контуром L і відповідно з ним орієнтовану, залежить тільки від вибору контура L і не залежить від конкретного вибору поверхні σ;

3) існує таке поле $\vec{\Phi}$, що $\vec{F} = rot\,\vec{\Phi}$;

4) розбіжність поля $\vec{F}$ дорівнює нулю: $div\,\vec{F} = 0$, тобто поле $\vec{F}$ – соленоїдне.

Приклад . Обчислити потік просторового векторного поля $\vec{F} = (x^3 - yz)\vec{i} + (y^3 + 2x)\vec{j} + xz^2\vec{k}$ через зовнішню сторону σ^+ повної поверхні σ конуса V: $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$.

Оскільки поверхня σ (рис. 84) замкнена, то для обчислення потоку можна застосувати формулу Остроградського – Гаусса.

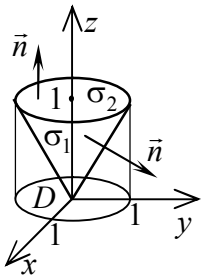


Рисунок 84 – Повна поверхня конуса

Проекцією конуса V на площину Oxy є круг D радіуса $R=1$ з центром у початку координат. Бокова поверхня конуса σ_1 задається явно рівнянням $z=\sqrt{x^2+y^2}$, а поверхня основи σ_2 задається явно рівнянням $z=1$. Знайдемо дивергенцію

$$div\,\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}(x^3-yz)+\frac{\partial}{\partial y}(y^3+2x)+\frac{\partial}{\partial z}(xz^2)=3x^2+3y^2+2xz\,.$$

Тоді

$$\Pi=\oiint\limits_{\sigma^+}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iiint\limits_V div\,\vec{F}\,dV=\iiint\limits_V\Big(3(x^2+y^2)+2xz\Big)dx\,dy\,dz=$$

Для обчислення потрійного інтеграла перейдемо до циліндричних координат

$$=\left|\begin{array}{l}x=\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi;\ z=z;\ x^2+y^2=\rho^2;\\ \sigma_1: z=\sqrt{x^2+y^2}=\rho;\ \sigma_2: z=1;\ dx\,dy\,dz=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz\end{array}\right|=$$

$$=\iiint_V(3\rho^2+2\rho\cos\varphi\cdot z)\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_\rho^1(3\rho^2+$$

$$+2\rho z\cos\varphi)\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(3\rho^2z+\rho\cos\varphi\cdot z^2)\Big|_\rho^1\rho\,d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(3\rho^3-$$

$$-3\rho^4+\rho^2\cos\varphi-\rho^4\cos\varphi)\,d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\Big((3/4)\rho^4-(3/5)\rho^5+\cos\varphi\times$$

$$\times(1/3)\rho^3-\cos\varphi\cdot(1/5)\rho^5)\Big)\Big|_0^1d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\big(3/20+(2/15)\cos\varphi\big)\,d\varphi=$$

$$=\big((3/20)\varphi+(2/15)\sin\varphi\big)\Big|_0^{2\pi}=3\pi/10\,.$$

ЛЕКЦІЯ 16 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ТА ЙОГО РОЗВ'ЯЗОК. ПОЧАТКОВІ ТА ГРАНИЧНІ УМОВИ. КРАЙОВІ ЗАДАЧІ. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Диференціальне рівняння з частинними похідними та його розв'язок Крайові задачі

У математичній фізиці вивчаються математичні моделі фізичних процесів, які мають форму диференціальних рівнянь з частинними похідними чи споріднених рівнянь або їх комбінацій, що розглядаються при певних додаткових умовах. Функції багатьох змінних описують різноманітні явища в електродинаміці, теорії пружності, гідродинаміці та інших галузях науки і техніки. Їх частинні похідні відображають найважливіші фізичні величини (швидкість, прискорення, потік, струм і т. п.). Використання фізичних принципів і законів, що зв'язують вказані величини, приводить до рівнянь з частинними похідними.

Диференціальним рівнянням з частинними похідними називається рівняння, яке зв'язує незалежні змінні, шукану функцію та її частинні похідні. Найвищий порядок похідної, що входить у диференціальне рівняння, називається його порядком.

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

– загальний вигляд диференціального рівняння другого порядку з частинними похідними для функції двох незалежних змінних. Тут x, y – незалежні змінні; $u = u(x, y)$ – шукана функція.

Розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними називається будь-яка функція, що при підстановці у диференціальне рівняння замість шуканої функції перетворює його на тотожність.

Загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння містить довільні сталі, число яких дорівнює порядку рівняння. Аналогічно, загальний

розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними містить довільні функції, число яких дорівнює порядку цього рівняння.

Для виділення цілком певного розв'язку диференціального рівняння з частинними похідними треба вказати додаткові умови. Усі фізичні явища вивчають, починаючи з деякого моменту часу і у відповідних областях, що мають певні межі. Тому для однозначного зображення реального процесу, крім диференціального рівняння, необхідно задати ще початкові умови, що відображають початковий стан процесу, а також крайові (граничні) умови, що вказують значення шуканої функції та її похідних на межі області визначення процесу.

У випадку необмеженої області D граничні умови відпадають. Задача відшукання розв'язку у необмеженій області при заданих початкових умовах називається задачею Коші (початковою задачею).

Задача відшукання розв'язку в обмеженій області при заданих початкових і граничних умовах називається крайовою (граничною) задачею.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xy - 5y^4$, де $u = u(x, y)$.

Зробимо заміну $\frac{\partial u}{\partial x} = v$. Тоді рівняння прийме вигляд: $\frac{\partial v}{\partial y} = 4xy - 5y^4$. Інтегруючи за y, маємо $v = \int (4xy - 5y^4)\, dy = 2xy^2 - y^5 + \overline{C}_1(x)$, де $\overline{C}_1(x)$ – довільна функція від x.

Звідси $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^2 - y^5 + \overline{C}_1(x)$. Інтегруючи за x, дістаємо шуканий розв'язок:

$$u = \int \left(2xy^2 - y^5 + \overline{C}_1(x)\right) dx + C_2(y) = x^2 y^2$$
$$- y^5 x + \int \overline{C}_1(x) dx + C_2(y) = x^2 y^2 - y^5 x + C_1(x) + C_2(y)$$

де $C_2(y)$ – довільна функція від y; $C_1(x) = \int \overline{C}_1(x)\, dx$.

Класифікація лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними

Найбільш загальні результати одержані для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними, які традиційно називають рівняннями математичної фізики.

Диференціальне рівняння з частинними похідними називається лінійним, якщо воно лінійне відносно шуканої функції та всіх її частинних похідних.

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Gu=F$$

загальний вигляд лінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку.

Тут $A=A(x,y)$, $B=B(x,y)$, $C=C(x,y)$, $D=D(x,y)$, $E=E(x,y)$, $G=G(x,y)$, $F=F(x,y)$ – задані функції, причому A, B, C, D, E, G називаються коефіцієнтами; F – правою частиною.

Якщо $F=0$, то рівняння називається однорідним, в противному разі – неоднорідним.

Якщо коефіцієнти A, B, C, D, E, F, G – сталі числа, то рівняння називається лінійним зі сталими коефіцієнтами.

Принцип суперпозиції: Довільна лінійна комбінація зі сталими коефіцієнтами розв'язків лінійного однорідного рівняння також є розв'язком цього рівняння.

Диференціальне рівняння з частинними похідними називається квазілінійним, якщо воно лінійне відносно всіх похідних найвищого порядку.

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

– загальний вигляд квазілінійного рівняння другого порядку.

Ясно, що будь-яке лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними є одночасно квазілінійним.

У залежності від знака дискримінанта $\Delta=B^2-AC$ квазілінійне рівняння другого порядку відноситься до одного з наступних трьох типів:

1) якщо $\Delta = B^2 - AC > 0$, то рівняння гіперболічного типу,

його канонічний вигляд $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y\right)$,

2) якщо $\Delta = B^2 - AC = 0$, то рівняння параболічного типу,

його канонічний вигляд $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y\right)$,

3) якщо $\Delta = B^2 - AC < 0$, то рівняння еліптичного типу,

його канонічний вигляд $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y\right)$.

Зауваження . Розбиття диференціального рівняння з частинними похідними на гіперболічні, параболічні та еліптичні рівняння відповідає розбиттю фізичних процесів на три основні класи: хвильові, дифузійні та стаціонарні.

Найважливіші рівняння математичної фізики вказаних типів:

1) одновимірне хвильове рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (гіперболічний тип);

2) одновимірне рівняння теплопровідності (рівняння Фур'є) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (параболічний тип);

3) двовимірне рівняння Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (еліптичний тип).

Виведення основних рівнянь математичної фізики

Рівняння коливань струни

Розглянемо натягнену струну довжини l, закріплену на кінцях. Якщо її вивести з положення рівноваги, то вона буде коливатися. Моделлю струни є пружна невагома (дією сили тяжіння можна знехтувати порівняно з силою натягу струни) і абсолютно гнучка (не чинить опору згину) нитка. Будемо розглядати малі плоскі поперечні коливання, коли рух усіх точок струни відбувається в одній площині перпендикулярно до її прямолінійного положення рівноваги – осі Ox . Лівий кінець струни співпадає з точкою $x = 0$, а правий – з точкою $x = l$. Процес коливань характеризується однією функцією $u(x,t)$ –

відхиленням точки струни з абсцисою x у момент часу t. При фіксованому значенні t графік функції $u(x,t)$ дає форму (профіль) струни у цей момент часу.

Виділимо довільний елемент струни $[x, x+\Delta x]$, який при коливанні деформується в дугу $\cup MM_1$ (рис.85).

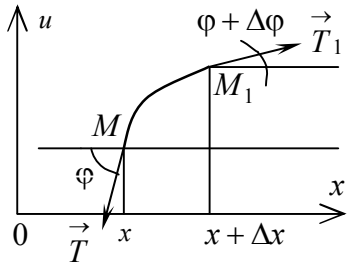


Рисунок 85 – Елемент струни

Довжина цієї дуги

$$\Delta l = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx \Delta x,$$

оскільки при малих коливаннях $\frac{\partial u}{\partial x} = o(\Delta x)$. Тобто видовження струни не відбувається. Тоді на підставі закону Гука сила натягу $\vec{T}$ в кожній точці струни направлена вздовж дотичної до її профілю і не змінюється за величиною, тобто $|\vec{T}| = T_0 = const$.

Проекція на вісь Ou F_u рівнодійної сил пружності $\vec{F}$, які прикладені до елемента MM_1, дорівнює

$$F_u = T_0 \sin(\varphi + \Delta\varphi) - T_0 \sin\varphi.$$

Оскільки кут φ малий, то $\sin\varphi \approx \varphi \approx tg\,\varphi$. За геометричним змістом похідної $tg\,\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}$. Тоді

$$F_u \approx T_0 \frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - T_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = T_0\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right).$$

За формулою Лагранжа про скінченні прирости дістанемо

$$\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x \approx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x,$$

де $0 < \theta < 1$. Тоді $F_u \approx T_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x$.

Якщо вважати струну однорідною з лінійною густиною $\rho = \rho_0 = const$, то маса елемента $\cup MM_1$ $m = \rho\Delta l \approx \rho_0 \Delta x$. Вертикальне (в напрямку осі Ou) прискорення w довільної точки цього елемента приблизно дорівнює вертикальному прискоренню точки M з координатою x, тобто $w \approx \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ згідно з геометричним змістом другої похідної по t.

Шукане рівняння коливань струни безпосередньо випливає з другого закону Ньютона $mw = F_u$ для елемента $\cup MM_1$ в напрямі осі Ou:

$$\rho_0 \Delta x \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \Delta x \ .$$

Звідси одержуємо

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (0 < x < l;\ t > 0)$$

– одновимірне однорідне хвильове рівняння, де $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho_0}$.

Це рівняння гіперболічного типу і для нього задаються дві початкові умови $u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 < x < l)$ (початкове положення струни) і $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (0 < x < l)$ (початкова швидкість струни). Якщо кінці струни $x = 0$ і $x = l$ жорстко закріплені, то граничні умови $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0 \quad (t > 0)$.

Таким чином, математична модель (задача математичної фізики) вільних малих плоских поперечних коливань однорідної струни з жорстко закріпленими кінцями, на яку не діють зовнішні сили, має вигляд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \left(0 < x < l;\quad t > 0\right),$$

початкові умови

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \partial u(x,0)/\partial t = \psi(x) \quad (0 < x < l);$$

граничні умови

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \quad (t > 0).$$

Зауваження 1. Якщо кінці струни $x = 0$ і $x = l$ вільні, то граничні умови: $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0 \quad (t > 0)$.

Зауваження 2. Поперечні коливання струни не єдиний вид плоских хвильових рухів. Зокрема, звукові чи електромагнітні хвилі на значній відстані від джерел збудження можна вважати плоскими й описувати їх одновимірними хвильовими рівняннями.

Рівняння поширення тепла у стержні

Розглянемо (рис. 86) тонкий циліндричний однорідний стержень довжини l і сталого поперечного перерізу S. Припустимо, що бічна поверхня стержня теплоізольована (теплообмін може здійснюватися тільки через торці циліндра), а температура у всіх точках поперечного перерізу однакова (оскільки стержень тонкий – його діаметр достатньо малий порівняно з довжиною). Вісь стержня приймемо за координатну вісь Ox, причому лівий кінець стержня співпадає з точкою $x = 0$, а правий – з точкою $x = l$. Будемо вважати, що всередині стержня теплові джерела відсутні.

Нехай $\rho = const$ – густина речовини стержня; $C = const$ – питома теплоємність; $k = const$ – коефіцієнт теплопровідності. Величиною, яка характеризує процес поширення тепла в стержні, служить функція $u(x,t)$ – температура стержня в перерізі з абсцисою x в момент часу t.

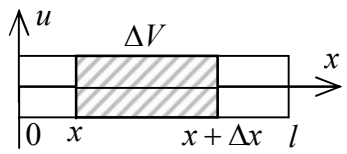


Рисунок 86 – Елемент стержня

Розглянемо довільний елемент стержня об`ємом $\Delta V = S\Delta x$, який розміщений між перерізами з абсцисами $x$ і $x + \Delta x$. Згідно з законом Фур`є кількість тепла, що проходить через поперечний переріз за одиницю часу пропорційна похідній $\partial u/\partial x$ (градієнту температури). Тоді

$$\Delta Q_1 = -k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}S\Delta t \text{ і } \Delta Q_2 = -k\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}S\Delta t$$

– кількість тепла, що протікає відповідно через перерізи $x_1 = x$ і $x_2 = x + \Delta x$. У результаті зовнішній приплив тепла в елемент ΔV за час Δt:

$$\Delta Q = \Delta Q_1 - \Delta Q_2 = k\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)S\Delta t \approx$$

$$\approx k\left(\partial^2 u(x,t)/\partial x^2\right)\Delta x S\Delta t \ .$$

Цей приплив тепла ΔQ витрачається на зміну температури елемента ΔV на величину $\Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$. Тоді $\Delta Q = c\Delta m\Delta u = c\rho\Delta V\Delta u \approx c\rho S\Delta x\,\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$.

Складемо рівняння теплового балансу (з точністю до нескінченно малих більш високого порядку порівняно з Δx, Δt):

$$c\rho S\Delta x\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\Delta t\,. \quad \text{Звідси} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

Таким чином, маємо одновимірне однорідне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0<x<l;\ t>0)\,,$$

де $a^2 = \frac{k}{c\rho}$.

Це рівняння параболічного типу. Параболічні рівняння виникають при моделюванні явищ переносу (теплопередачі, дифузії, фільтрації, випромінювання нейтронів і т.п.).

На відміну від гіперболічних рівнянь, для рівняння теплопровідності задається тільки одна початкова умова

$u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 < x < l)$ (початковий розподіл температури).

Якщо торці стержня підтримуються при певних температурах, то граничні умови $u(0,t) = g_1(t)$, $u(l,t) = g_2(t) \quad (t>0)$.

Якщо торці стержня теплоізольовані, то граничні умови

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0\,; \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0\,.$$

Таким чином, математична модель (задача математичної фізики) поширення тепла в тонкому однорідному циліндричному стержні довжини l з

теплоізольованою бічною поверхнею і заданою температурою на торцях $x = 0$, $x = l$ при відсутності внутрішніх джерел тепла має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l;\ t > 0),$$

початкова умова

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 < x < l);$$

граничні умови

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t) \quad (t > 0).$$

Методи розв'язування задач математичної фізики

Розв`язування першої крайової задачі для хвильового рівняння методом відокремлення змінних

Метод відокремлення змінних (метод стоячих хвиль або метод Фур`є) – один з найбільш ефективних аналітичних способів розв`язування крайових задач для широкого кола лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Звичайно його застосовують тоді, коли рівняння і граничні умови є лінійними та однорідними.

Суть методу відокремлення змінних полягає у відшуканні розв`язку крайової задачі у вигляді ряду Фур`є за деякою ортогональною системою функцій, пов`язаних з цією задачею.

Розглянемо задачу про вільні коливання однорідної струни довжини l з жорстко закріпленими кінцями $x = 0$, $x = l$. Припустимо, що середовище опору не чинить і зовнішні сили на струну не діють. Математично вона формулюється як перша крайова задача для одновимірного однорідного хвильового рівняння:

знайти розв`язок $u(x,t)$ диференціального рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < l;\quad t > 0),$$

який задовольняє початковим умовам

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (0 < x < l)$$

і однорідним граничним умовам першого типу

$$u(0,t)=0\,,\quad u(l,t)=0\quad (t>0)\,,$$

де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – відомі функції; a, l – відомі числа, $a>0$, $l>0$.

Згідно з методом відокремлення змінних шукаємо ненульові розв`язки у вигляді $u(x,t)=X(x)T(t)$, де $X(x)$ – функція тільки від x, а $T(t)$ – тільки від t. Підставимо цей вираз у рівняння і дістанемо $X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$.

Відокремимо змінні в одержаному рівнянні, поділивши обидві його частини на $a^2X(x)T(t)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}\,.$$

Ця тотожна рівність двох відношень, кожне з яких залежить тільки від x чи тільки від t, можлива лише у випадку, коли обидва відношення дорівнюють одній і тій же сталій величині. Позначимо її через λ:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda\,.$$

Звідси дістанемо два звичайні диференціальні рівняння

$$X''-\lambda X=0 \quad \text{і} \quad T''-a^2\lambda T=0\,,$$

де λ – довільне дійсне число (параметр розщеплення).

Розв`яжемо ці рівняння для трьох можливих випадків значень λ.

а) Якщо $\lambda=-\beta^2<0$, тоді: $X''+\beta^2X=0$; $k^2+\beta^2=0$; $k_{1,2}=\pm\beta i$; $X=A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)$; $T''+a^2\beta^2T=0$; $k^2+a^2\beta^2=0$; $x_{1,2}=\pm a\beta i$; $T=C\cos(a\beta t)+D\sin(a\beta t)$.

б) Якщо $\lambda=0$, тоді: $X''=0$; $X'=A$; $X=Ax+B$; $T''=0$; $T'=C$; $T=Ct+D$.

в) Якщо $\lambda=\beta^2>0$, тоді: $X''-\beta^2x=0$; $k^2-\beta^2=0$; $k_{1,2}=\pm\beta$; $X=Ae^{\beta x}+Be^{-\beta x}$; $T''-a^2\beta^2T=0$; $k^2-a^2\beta^2=0$; $k_{1,2}=\pm a\beta$; $T=Ce^{a\beta t}+De^{-a\beta t}$.

В силу довільності сталих A,B,C,D,λ маємо нескінченну множину розв`язків хвильового рівняння. Виділимо з неї підмножину розв`язків, які задовольняють зазначеним однорідним граничним умовам. Для цього підставимо в них вираз $u(x,t)=X(x)T(t)$ і дістанемо: $X(0)T(t)=0$; $X(l)T(t)=0$ $(t>0)$.

Оскільки для ненульових розв`язків $T(t) \neq 0 \quad (t>0)$, то $X(0)=0$; $\quad X(l)=0$. Таким чином, крайова задача для звичайного диференціального рівняння:

$$X''-\lambda X=0 \quad (0<x<l);$$

з граничними умовами

$$X(0)=0; \quad X(l)=0$$

дає можливість відібрати ненульові розв`язки хвильового рівняння.

Значення λ, для якого остання крайова задача має ненульовий розв`язок, називається власним значенням (власним числом), а відповідний розв`язок $X(x)$ – власною функцією. Зазначимо, що власні функції визначаються з точністю до сталого множника.

Розглянемо три можливих випадки значень параметра λ.

а) Якщо $\lambda=-\beta^2<0$, то загальний розв`язок рівняння визначається формулою $X=A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)$. Підставляючи його у граничні умови, дістанемо: $A=0$; $\quad A\cos(\beta l)+B\sin(\beta l)=0$. Звідси $\quad B\sin(\beta l)=0$. Якщо покласти $B=0$, то отримаємо нульовий розв`язок $\quad X(x)=0$. Тому треба вважати, що $\sin(\beta l)=0$.

Розв`язавши одержане тригонометричне рівняння, знаходимо власні значення $\beta l=\pi n, n\in Z$; $\beta_n=\pi n/l$; $\lambda_n=-\pi^2 n^2/l^2$; $n=1,2,...$ і відповідні їм власні функції $X_n(x)=B_n\sin(\pi n x/l)$, $n=1,2,...$, де B_n – довільна стала, відмінна від нуля.

Зазначимо, що нема необхідності розглядати значення $n=0,\ -1,-2,...$. При $n=0$ маємо нульовий розв`язок $\quad X_0(0)=0$, а при $\quad n=-1,-2,...$ власні функції відрізняються тільки знаком від знайдених $X_n(x)$ і тому не поповнюють набір власних функцій новими лінійно незалежними функціями.

У цьому випадку функція $T(t)$ набуває вигляду

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{\pi n a t}{l}+D_n\sin\frac{\pi n a t}{l}, \text{ де } C_n, D_n \text{ – довільні сталі.}$$

Відповідно ненульові розв`язки хвильового рівняння, що задовольняють однорідним граничним умовам, одержуються у вигляді

$$u_n(x,t)=sin\frac{\pi n x}{l}\left(a_n\,cos\frac{\pi n a t}{l}+b_n\,sin\frac{\pi n a t}{l}\right),$$

де a_n, b_n – довільні сталі, причому сталі B_n, C_n, D_n введено до складу a_n, b_n, $n = 1,2,\ldots$.

б) Якщо $\lambda = 0$, то загальний розв`язок ЗДР має вигляд $X = Ax + B$. Підставляючи його в граничні умови, одержимо $B = 0$; $Al + B = 0$. Звідси $A = 0; B = 0$, тобто маємо нульовий розв`язок $X(x) = 0$.

в) Якщо $\lambda = \beta^2 > 0$, то загальний розв`язок ЗДР має вигляд $X = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}$. Підставляючи його в граничні умови (3.49), отримаємо систему для знаходження A і B:

$$A + B = 0; \quad Ae^{\beta l} + Be^{-\beta l} = 0.$$

Оскільки $\beta \neq 0$, то звідси одержимо $A = 0; B = 0$. Тобто, при будь-якому значенні $\lambda = \beta^2 > 0$ крайова задача має тільки нульовий розв`язок $X(x) = 0$.

Таким чином, всі ненульові розв`язки хвильового рівняння, що задовольняють однорідні граничні умови, утворюють послідовність

$$u_n(x,t) = sin\frac{\pi nx}{l}\left(a_n\, cos\frac{\pi nat}{l} + b_n\, sin\frac{\pi nat}{l}\right), \quad n = 1,2,\ldots.$$

Знаходження розв`язку, який задовольняє як граничним, так і початковим умовам.

Оскільки задане хвильове рівняння і граничні умови лінійні й однорідні, то згідно з принципом суперпозиції сума його розв`язків також є розв`язком. Більше того, функція $u(x,t)$, що задається рядом

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi nat}{l} + b_n \sin\frac{\pi nat}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l},$$

також є розв`язком, який задовольняє однорідні граничні умови.

Для знаходження коефіцієнтів a_n, b_n скористаємося початковими умовами. Дістанемо співвідношення

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, sin\frac{\pi nx}{l} = \varphi(x); \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi na}{l} b_n\, sin\frac{\pi nx}{l} = \psi(x),$$

які можна розглядати як розвинення відомих функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ в ряди Фур`є за синусами на проміжку $[0; l]$. Вважаючи, що умови розвинення цих

функцій у ряд Фур`є виконані, скористаємося відомими формулами для коефіцієнтів Фур'є і дістанемо

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx\,; \quad b_n = \frac{2}{\pi na}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx \quad (n = 1, 2, ...)$$

Отже, розв`язок крайової задачі для хвильового рівняння можна подати у вигляді функціонального ряду:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi nat}{l} + b_n \sin\frac{\pi nat}{l}\right)\sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Зауваження . При розв`язуванні крайової задачі методом відокремлення змінних суттєва однорідність граничних умов, причому ці умови можуть бути не тільки першого типу

$$u(0,t) = 0\,, \quad u(l,t) = 0 \quad (t > 0)\,,$$

а й другого

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0\,; \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0 \quad (t > 0)$$

чи третього (змішаного)

$$\alpha u(0,t) + \beta\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0\,; \quad \gamma u(l,t) + \delta\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0 \quad (t > 0)\,.$$

Приклад . Знайти закон коливань струни довжиною l, що розміщена на відрізку $[0;l]$, якщо в початковий момент струні надають форми синусоїди $\varphi(x) = A\sin\frac{4\pi x}{l}$, а потім її відпускають без початкової швидкості. Кінці струни закріплені, зовнішні сили відсутні.

З математичної точки зору маємо першу крайову задачу:

знайти розв`язок однорідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l, \quad t > 0)\,,$$

який задовольняє початковим умовам

$$u(x,0) = A\sin\frac{4\pi x}{l}\,;$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0 \quad (0 < x < l)$$

і однорідним граничним умовам першого типу

$$u(0,t) = 0\,; \quad u(l,t) = 0 \quad (t > 0)\,.$$

Згідно з методом відокремлення змінних розв`язок поставленої задачі можна подати у вигляді функціонального ряду

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\,cos\frac{\pi nat}{l}+b_n\,sin\frac{\pi nat}{l}\right)sin\frac{\pi nx}{l}.$$

Знайдемо його коефіцієнти:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l A\sin\frac{4\pi}{l}x\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\begin{cases}0, & n\neq 4;\\ A, & n=4;\end{cases}$$

$$b_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{\pi na}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}dx=0.$$

Тоді шуканий розв`язок

$$u(x,t)=A\,cos\frac{4\pi at}{l}sin\frac{4\pi at}{l}.$$

Розв’язування другої крайової задачі для рівняння теплопровідності методом відокремлення змінних

Розглянемо задачу про поширення тепла в однорідному стержні довжини l, всередині якого відсутні теплові джерела, а бічна поверхня теплоізольована. Припустимо, що початковий розподіл при $t=0$ температури $u(x,t)$ в стержні $u(x,0)=\varphi(x)$ $(0<x<l)$, де $\varphi(x)$ – відома функція, а обидва його кінці $x=0$ і $x=l$ теплоізольовані, тобто теплові потоки через них відсутні:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0\quad (t>0).$$

Математично ця задача формулюється як друга крайова задача (задача Неймана) для одновимірного рівняння теплопровідності:

знайти розв’язок $u(x,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (0<x<l;\ t>0),$$

який задовольняє початковій умові

$$u(x,0)=\varphi(x)\quad (0<x<l);$$

і однорідним граничним умовам другого типу

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0\quad (t>0),$$

де $\varphi(x)$ – відома функція; a, l – відомі числа, $a>0$, $l>0$.

На першому етапі розв'язування задачі методом відокремлення змінних шукаємо ненульові розв'язки даного однорідного рівняння, які задовольняють указаним однорідним граничним умовам, у вигляді добутку функцій $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Використовуючи відокремлення змінних у рівнянні і граничних умовах, дістанемо звичайне диференціальне рівняння

$$T'(t) - \lambda a^2 T(t) = 0$$

для знаходження функції $T(t)$ і крайову задачу

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \ \ (0 < x < l);$$

з граничними умовами

$$X'(0) = 0; \ X'(l) = 0$$

для знаходження функції $X(x)$ і довільної сталої λ.

Рівняння $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ уже розв'язувалось . Якщо $\lambda = -\beta^2 < 0$, то його загальний розв'язок визначається формулою $X = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$, де A і B –довільні сталі. З граничних умов маємо:

$X'(0) = 0$: $B = 0$;

$X'(l) = 0$: $-A\beta\sin(\beta l) + B\beta\cos(\beta l) = 0$; $A\sin\beta l = 0$.

Якщо покласти $A = 0$, то одержимо нульовий розв'язок $X(x) \equiv 0$. Тому треба покласти $\sin\beta l = 0$.

Розв'язавши одержане тригонометричне рівняння, знаходимо власні значення: $\beta l = \pi n, n \in Z$; $\beta_n = \pi n / l$; $\lambda_n = -\pi^2 n^2 / l^2$, $n = 1,2,...$ і відповідні їм власні функції $X_n(x) = A_n \cos(\pi n x / l)$, $n = 1,2,...$, де A_n – довільна стала, відмінна від нуля.

Якщо $\lambda = 0$, то загальний розв'язок ЗДР визначається формулою $X = Ax + B$, де A і B - довільні сталі. Граничні умови дозволяють знайти тільки довільну сталу A:

$$X'(0) = 0: \quad A = 0; \qquad X'(l) = 0: \quad A = 0.$$

Звідси $X(x) = B.$ Тоді $.\lambda_0 = 0$ – власне значення; $X_0(x) = A_0$ – відповідна власна функція, де A_0 – довільна стала, відмінна від нуля.

Якщо $\lambda = \beta^2 > 0$, то загальним розв'язком ЗДР служить функція $X = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}$, де A і B – довільні сталі. Підставляючи його в граничні умови, дістанемо систему для знаходження A і B:

$$X'(0) = 0: \quad A\beta - B\beta = 0; \qquad X'(l) = 0: \quad A\beta e^{\beta l} - B\beta e^{\beta l} = 0.$$

Оскільки $\beta \neq 0$, то звідси одержимо $A = 0$; $B = 0$. Тобто, при будь-якому значенні $\lambda = \beta^2 > 0$ задача має тільки нульовий розв'язок $X(x) \equiv 0$.

Таким чином, об'єднуючи всі можливі випадки λ, маємо послідовність власних значень $\lambda_n = -\dfrac{\pi^2 n^2}{l^2}$, $n = 0,1,2,...$ і відповідних власних функцій $X_n(x) = A_n \cos\dfrac{\pi n x}{l}$, $n = 0,1,2,....$

При $\lambda = \lambda_n$ диференціальне рівняння для функції $T(t)$ набуває вигляду

$$T_n'(t) + \frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} T_n(t) = 0 \quad (n = 0,1,2,...).$$

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\int \frac{dT_n}{T_n} = -\int \frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} dt; \quad \ln T_n = -\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t + \ln C_n;$$

$$T_n = C_n \, e^{-\left(\pi^2 n^2 a^2 / l^2\right) t} \quad (n = 0,1,2,...).$$

Підставляючи функції $X_n(x) = A_n \cos\dfrac{\pi n x}{l}$ і $T_n = C_n \, e^{-\left(\pi^2 n^2 a^2 / l^2\right) t}$ у формулу $u(x,t) = X(x)T(t)$, знаходимо послідовність ненульових розв'язків рівняння теплопровідності, які задовольняють однорідним граничним умовам:

$$u_n(x,t) = a_n \, e^{-\left(\pi^2 n^2 a^2 / l^2\right) t} \cos(\pi n x / l) \quad (n = 0,1,2,...),$$

де a_n – довільна стала, до складу якої введено A_n і C_n.

На другому етапі методу відокремлення змінних будується розв'язок рівняння, який задовольняє як граничним, так і початковій умовам. За загальною схемою методу такий розв'язок формується у вигляді функціонального ряду:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, e^{-\left(\pi^2 n^2 a^2 / l^2\right) t} \cos\frac{\pi n x}{l}.$$

Коефіцієнти ряду a_n, $n = 0,1,2,...$ знаходять за початковою умовою: $u(x,0) = \varphi(x)$: $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}$.

Розглядаючи останнє співвідношення як розвинення заданої функції $\varphi(x)$ у ряд Фур'є за косинусами на відрізку $[0; l]$ і користуючись відомими формулами для обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є, дістанемо

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\,dx\,; \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx \quad (n = 1,2,...)\,.$$

Приклад. Розв'язати другу крайову задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 9\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < 4;\ t > 0)\,;$$

початкова умова

$$u(x,0) = \varphi(x) = \pi\cos(\pi x/8)\,,$$

граничні умови

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0\,; \quad \frac{\partial u(4,t)}{\partial x} = 0 \quad (t > 0)\,.$$

У даній задачі $a^2 = 9$, $l = 4$. Обчислимо коефіцієнти:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^4 \pi\cos\frac{\pi x}{8}\,dx = 2\sin(\pi x/8)\Big|_0^4 = 2\,;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{2}{4}\int_0^4 \pi\cos\frac{\pi x}{8}\cos\frac{\pi n x}{4}\,dx = \frac{\pi}{4}\times$$

$$\times\int_0^4\left(\cos\frac{\pi x(2n+1)}{8} + \cos\frac{\pi x(2n-1)}{8}\right)dx = \frac{2}{2n+1}\cdot\sin\frac{\pi x(2n+1)}{8}\Bigg|_0^4 +$$

$$+\frac{2}{2n-1}\cdot\sin\frac{\pi x(2n-1)}{8}\Bigg|_0^4 = \frac{2}{2n+1}\sin\frac{\pi(2n+1)}{2} + \frac{2}{2n-1}\times$$

$$\times\sin\frac{\pi(2n-1)}{2} = \frac{2\cdot(-1)^n}{2n+1} + \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\,.$$

Тоді шуканий розв'язок можна подати у вигляді ряду

$$u(x,t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{4n^2-1}e^{-\left(\pi^2 n^2 9/4^2\right)t}\cos\frac{\pi n x}{4} =$$

$$= 2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} e^{-\left(9\pi^2 n^2/16\right)t} \cos\frac{\pi n x}{4}.$$

Розв'язування першої крайової задачі для рівняння Лапласа у крузі методом відокремлення змінних

Вивчення усталених (стаціонарних) процесів приводить до диференціального рівняння з частинними похідними еліптичного типу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Для рівнянь еліптичного типу вказуються лише граничні умови, а початкові умови відсутні.

Нехай у крузі радіуса ρ_0 з центром у початку координат треба знайти розв'язок $u(\rho,\varphi)$ рівняння Лапласа (в полярних координатах)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (0 < \varphi < 2\pi;\ 0 < \rho < \rho_0),$$

який задовольняє граничній умові

$$u(\rho_0,\varphi) = g(\varphi) \quad (0 < \varphi < 2\pi),$$

а також додатковим умовам, що випливають з фізичних міркувань:

$u(\rho,\varphi)$ – неперервна функція в крузі $0 \le \rho \le \rho_0$ (а, отже, обмежена в даному крузі);

$u(\rho,\varphi)$ – періодична функція відносно φ з періодом 2π, тобто $u(\rho,\varphi + 2\pi) = u(\rho,\varphi)$.

Тут φ – полярний кут; ρ – полярний радіус; $g(\varphi)$ – відома періодична функція з періодом 2π.

Розв'язок поставленої першої крайової задачі для рівняння Лапласа у крузі шукаємо методом відокремлення змінних у вигляді $u = R(\rho)\,\Phi(\varphi)$ Підставляючи цей вираз у рівняння, маємо:

$$\Phi(\varphi)R''(\rho) + \frac{1}{\rho}\Phi(\varphi)R'(\rho) + \frac{1}{\rho^2}\Phi''(\varphi)R(\rho) = 0;$$

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} = -\lambda, \quad \text{де} \quad \lambda \ge 0.$$

Зазначимо, що при $\lambda < 0$ розв'язок неперіодичний.

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0; \qquad \rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0.$$

Якщо $\lambda=0$, то

$$\Phi''(\varphi)=0; \quad \Phi(\varphi)=A\varphi+B; \qquad \rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)=0;$$

$$R'(\rho)=v(\rho); \quad \rho v'+v=0; \quad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{d\rho}{\rho}; \quad \ln v=-\ln\rho+\ln C;$$

$$v=\frac{C}{\rho}; \quad R'(\rho)=\frac{C}{\rho}; \quad R\rho=C\int\frac{d\rho}{\rho}; \quad R\rho=C\ln\rho+D;$$

$u_0(\rho,\varphi)=(A\varphi+B)(C\ln\rho+D)$, де A, B, C, D – довільні сталі.

Оскільки функція $u_0(\rho,\varphi)$ – періодична по φ, то $A=0$. Із неперервності функції $u_0(\rho,\varphi)$ у центрі круга при $\rho=0$ маємо $C=0$. Отже, $u_0(\rho,\varphi)=a_0/2$, де a_0 – довільна стала, в яку введено B і D.

Якщо $\lambda>0$, то $\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0$; $k^2+\lambda=0$;

$$k=\pm\sqrt{\lambda}i; \quad \Phi(\varphi)=A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi;$$

$$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0; \quad R(\rho)=\rho^\alpha;$$

$$\rho^2\alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}+\rho\alpha\rho^{\alpha-1}-\lambda\rho^\alpha=0; \quad \alpha(\alpha-1)+\alpha-\lambda=0;$$

$$\alpha^2-\lambda=0; \quad \alpha=\pm\sqrt{\lambda}; \quad R(\rho)=C\rho^{-\sqrt{\lambda}}+D\rho^{\sqrt{\lambda}};$$

$$u(\rho,\varphi)=\left(A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi\right)\left(C\rho^{-\sqrt{\lambda}}+D\rho^{\sqrt{\lambda}}\right),$$

де A, B, C, D – довільні сталі.

Оскільки розв'язок $u(\rho,\varphi)$ неперервний у центрі круга при $\rho=0$, то $C=0$. Тоді $u(\rho,\varphi)=\left(a\cos\sqrt{\lambda}\varphi+b\sin\sqrt{\lambda}\varphi\right)\rho^{\sqrt{\lambda}}$, де a, b – довільні сталі.

Знайдений розв'язок має період $2\pi/\sqrt{\lambda}$. Цей період дорівнює 2π або ціле число разів міститься в 2π тоді і тільки тоді, коли $\sqrt{\lambda}$ – ціле додатне число, тобто $\sqrt{\lambda}=n$; $\lambda_n=n^2 \quad (n=1,2,...)$.

Отже, $\quad u_n(\rho,\varphi)=\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)\rho^n$.

Згідно з принципом суперпозиції довільна сума знайдених функцій $u_n(\rho,\varphi) \quad (n=0,1,2,...)$ і навіть ряд

$$u(\rho,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)\rho^n$$

також буде розв'язком рівняння Лапласа.

Довільні сталі $a_0, a_n, b_n \quad (n=1,2,...)$ знаходимо з граничної умови:

$$u(\rho_0,\varphi)=g(\varphi):\quad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)\rho_0^n=g(\varphi);$$

$$g(\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\rho_0^n\cos n\varphi+b_n\rho_0^n\sin n\varphi\right).$$

Розглядаючи останній вираз як розвинення функції $g(\varphi)$ в ряд Фур'є і використовуючи формули для коефіцієнтів ряду Фур'є, одержимо

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(\varphi)d\varphi;\qquad a_n=\frac{1}{\pi\rho_0^n}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi;\quad b_n=\frac{1}{\pi\rho_0^n}\int_0^{2\pi}g(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бермант А. Ф., Краткий курс математического анализа. / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2003. – 736 с.

2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : в 2 т / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985.

3. Бізюк В. В. Елементи теорії поля : навчально-методичний посібник з курсу вищої математики / В. В. Бізюк. – Харків : ХНАМГ, 2006. – 76 с.

4. Бізюк В. В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків : навчальний посібник / В. В. Бізюк, А. В. Якунін – Харків : ХНАМГ, 2008. – 300 с.

5. Бізюк В. В. Елементи операційного числення (конспект лекцій з вправами для самостійної роботи). / В. В. Бізюк, А. В. Якунін – Харків : ХНАМГ, 2004. – 88 с.

6. Вища математика для електротехніків: у 3-х модулях / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, В. С. Ситникова та ін.; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2009. – Модуль 1: Аналітична геометрія на площині. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Лінійна та векторна алгебра. Площина та пряма у просторі. Комплексні числа та функції / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, В. С. Ситникова. – 2009. – 308 с. – Модуль 2: Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Елементи варіаційного числення / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, А. О. Володченко. – 2010. – 350 с. – Модуль 3: Числові та функціональні ряди. Функції декількох змінних. Елементи теорії поля. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Рівняння математичної фізики / В. В. Бізюк, А. В. Якунін. – 2011. – 383 с.

7. Методичні вказівки та контрольні завдання з вищої математики (для студентів заочної форми навчання усіх спеціальностей). Частина перша / А. І. Колосов, С. О. Станішевський та ін. – Харків : ХНАМГ, 2006. – 75 с.

8. Методичні вказівки та контрольні завдання з вищої математики (для студентів заочної форми навчання усіх спеціальностей). Частина друга / А. І. Колосов, М. Й. Кадець та ін. – Харків: ХНАМГ, 2006. – 71 с.

Навчальне видання

БІЗЮК Валерій Васильович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

МОДУЛЬ 3

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів другого курсу денної та заочної форм навчання за спеціальністю 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, освітня програма «Електромеханіка та електротехнології»)

Відповідальний за випуск *А. І. Колосов*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *В. В. Бізюк*

План 2018, поз. 108 Л

Підп. до друку 05.03.2018. Формат 60 × 84/16.
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 8.
Тираж 50 пр. Зам. № .

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.