

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ**  
до практичних занять, розрахунково-графічної  
та самостійної робіт  
із дисципліни

**«СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ»**

*(для студентів 2 курсу денної форми навчання  
освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»  
126 – Інформаційні системи та технології)*

**Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2018**

Методичні рекомендації до практичних занять, розрахунково-графічної та самостійної роботи із дисципліни «Системний аналіз» (для студентів 2 курсу денної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» спеціальності 126 – Інформаційні системи та технології) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : М. В. Федоров, О. М. Хренов. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018. – 48 с.

Укладачі: канд. техн. наук, доц. М. В. Федоров,  
канд. техн. наук, доц. О. М. Хренов

#### Рецензент

І. В. Наумейко, кандидат технічних наук, доц. кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки.

*Рекомендовано кафедрою прикладної математики і інформаційних технологій, протокол № 1 від 31.08.2017.*

## ЗМІСТ

Вступ.....	4
1 Побудова ієрархій (структуризація відносин).....	5
2 Побудова ієрархій для системи з циклами.....	12
3 Метод аналізу ієрархій. Вектор пріоритетів.....	14
4 Метод аналізу ієрархій. Розрахування локальних пріоритетів. Синтез пріоритетів.....	21
5 Методи пошуку й вибору рішень. Мінімаксний критерій. Критерій Байєса – Лапласа. Критерій Севіджа.....	26
6 Методи пошуку й вибору рішень. Критерій Гурвіца. Критерій Ходжа – Лемана. Критерій Гермейєра.....	40
7 Класифікація об'єктів. Стратегія найближчого сусіда. Стратегія далекого сусіда.....	43
8 Класифікація об'єктів. Стратегія середнього зв'язку що, не зважається. Гнучка стратегія. Стратегія агломеративного об'єднання.....	46
Список рекомендованої літератури.....	48

## ВСТУП

Метою викладання навчальної дисципліни «Системний аналіз» є виробити навички системного мислення у студентів і підготувати їх до рішення практичних задач аналізу і синтезу систем.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Системний аналіз» є вивчення методології системного підходу, широко застосовуваного при вирішенні глобальних і спеціальних проблем, таких як екологічний моніторинг, керування технологічними процесами, промисловими і транспортними системами, наукові дослідження, технічне діагностування.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен:

- знати парадигму імперативного об'єктно-орієнтованого логічного програмування; основи системного аналізу, моделювання систем;
- уміти аналізувати та вибирати обчислювальні методи розв'язання задач проектування за критеріями мінімізації обчислювальних витрат, стійкості, складності тощо; вибирати стратегії для планування життєвого циклу системи; визначати організаційну, економічну, технічну та операційну здійсненність проекту;
- отримати такі компетентності: аналізу організаційного оточення, існуючі системи, синтезу вимог до системи; розробки вимог та специфікації компонентів інформаційних систем і об'єктів професійної діяльності.

## 1 ПОБУДОВА ІЄРАРХІЙ (СТРУКТУРИЗАЦІЯ ВІДНОСИН)

Ієрархія – це система, що складається з об'єктів (елементів), згрупованих у незалежні підмножини (групи). Об'єкти  $i$ -ої групи знаходяться під впливом об'єктів  $(i+1)$  групи  $i$ , у той же час, впливають на об'єкти  $(i-1)$  групи. Ці групи, розташовані певним чином (над або під іншою групою), називаються рівнями (або кластерами). Вважається (для багатьох задач), що елементи одного рівня незалежні.

Припустимо, що мається деяка множина елементів, між якими існують визначені відносини.

Опис такої системи може бути реалізовано у двох взаємозалежних формах: у виді бінарної матриці й у виді спрямованого графа.

Бінарна матриця може бути представлена матрицею досяжності, що визначається по матриці залежності.

Матриця залежності  $B$  заповнюється в такий спосіб. Якщо множина вершин  $N$  визначена, то за допомогою бінарного відношення «залежить від» можна заповнити матрицю так, що відповіді «так» фіксують «одиницею», а відповіді «ні» фіксують «нулем», тобто елемент  $b_{ij}$  матриці дорівнює:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i \text{ залежить від } j, \\ 0, \text{ якщо } i \text{ не залежить від } j. \end{cases}$$

Побудувавши в такий спосіб матрицю, переходимо до формування матриці досяжності.

Для цього формуємо бінарну матрицю  $(I + B)$ , (де  $I$  – одинична матриця) і зводимо її у деякий ступінь  $k$ , такий що виконується умова:  $(I + B)^k = (I + B)^{k+1}$ . Матриця  $(I + B)^k = (I + B)^{k+1}$  і буде матрицею досяжності.

Матриця досяжності може бути побудована і більш простим шляхом, безпосередньо по вихідному спрямованому графі. У цьому графі дуга виходить із залежного елемента. Заповнення матриці бінарними елементами здійснюється по рядку (ліворуч праворуч) за правилом:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо з } i \text{ можна потрапити в } j, \\ 0, \text{ інакше.} \end{cases}$$

Наявність матриці досяжності дозволяє розділити множину вершин на підмножини рівнів.

Для цього вершини поділяють на досяжні й попередні.

Вершину  $h_j$  називають досяжною з вершини  $h_i$ , якщо в орієнтованому графі існує шлях із  $h_i$  до  $h_j$ . Позначимо підмножину вершин, досяжних із вершини  $h_i$  через  $R(h_i)$ . Вершину  $h_j$  називають попередній вершині  $h_i$ , якщо можливо досягнення  $h_i$  із  $h_j$ . Позначимо підмножину вершин, що передують вершині  $h_i$  через  $A(h_i)$ .

Множина тих вершин  $A(h_i) = R(h_i) \cap A(h_i)$ , для яких виконується умова недосяжності з кожної з  $h_i$  що залишились вершин множини  $N$ , може бути позначена як рівень ієрархії. Тобто, для структуризації деякої множини елементів  $N$ , зв'язаних визначеними відносинами залежності, необхідно виконати такі дії:

1. Скласти спрямований граф відносин між елементами множини  $N$ .
2. Сформуувати матрицю досяжності по спрямованому графі.
3. Сформуувати таблицю з елементами  $h_i$ ,  $R(h_i)$ ,  $A(h_i)$  і  $R(h_i) \cap A(h_i)$ .

Для формування підмножини  $R(h_i)$  з  $i$ -го рядка матриці досяжності виписуються номери тих елементів, що містять одиниці. Для формування підмножини  $A(h_i)$  з  $i$ -го стовпця матриці досяжності виписуються номери тих елементів, що містять одиниці.

Підмножина  $R(h_i) \cap A(h_i)$  формується як логічне перетинання (сполучення) елементів двох підмножин .

4. Знайти елементи в таблиці, для яких виконується умова:  $A(h_i) = R(h_i) \cap A(h_i)$ .

5. Ці елементи й утворять перший рівень.

6. Викреслити отримані на першій ітерації елементи і застосувати вищеописані процедури (пп. 1–4) знову. Ітерації повторюються доти, поки залишається більш одного елемента.

Описану вище методику структуризації продемонструємо на такому прикладі. Припустимо, що необхідно ієрархічно структурувати такі компоненти (елементи):

- економічна безпека (ЕНБ);
- військова безпека (ВБ);
- екологічна безпека (ЕЛБ);
- сільськогосподарський сектор економіки (СХ);
- сектор економіки, що робить електронну й обчислювальну техніку (ВТ);
- сектор машинобудування (МШ);
- сектор енергетичний (ЕН).

Матриця залежності для цих елементів має вигляд (табл. 1.1):

Таблиця 1.1 – Матриця залежності

		1	2	3	4	5	6	7
		ЕНБ	ВБ	ЕЛБ	СХ	ВТ	МШ	ЕН
1	ЕНБ	0	0	0	1	1	1	1
2	ВБ	1	0	0	0	1	1	0
3	ЕЛБ	0	0	0	1	1	1	1
4	СХ	0	0	0	1	0	1	0
5	ВТ	0	0	0	0	1	0	0
6	МШ	0	0	0	0	1	1	0
7	ЕН	0	0	0	0	0	1	1

Спрямований граф відносин між елементами, розташованими довільним образом, показаний на рисунку 1.1. Напрямок стрілки дуги визначається спрямованістю залежності: стрілка вказує на елемент, від якого залежить елемент, із якого вона виходить.

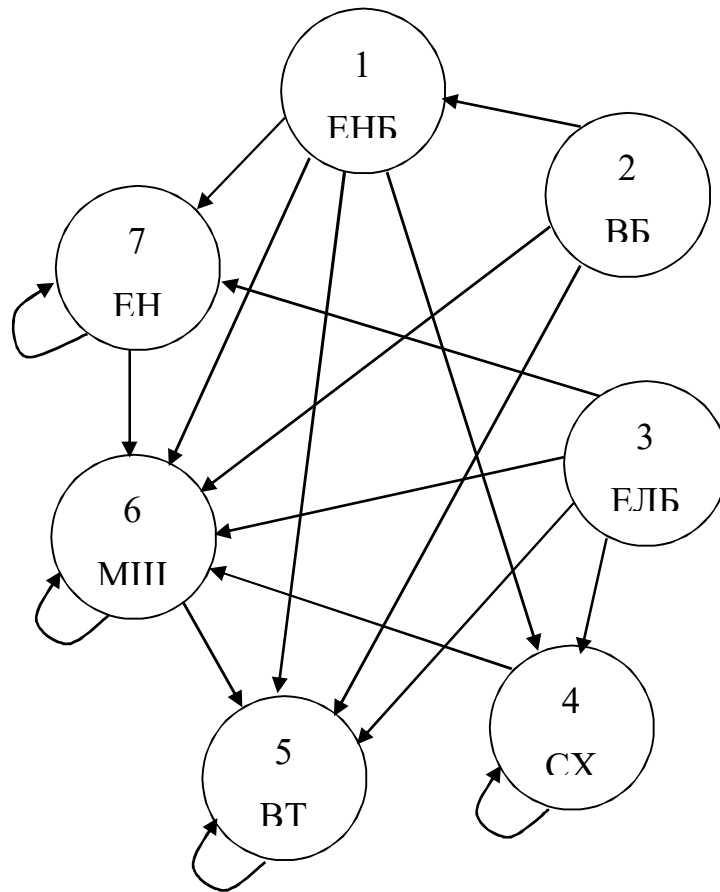


Рисунок 1.1 – Вихідний спрямований граф

Матриця досяжності має такий вигляд (табл. 1.2).

Таблиця 1.2 – Матриця досяжності

	1	2	3	4	5	6	7	
1	ЕНБ	1	0	0	1	1	1	1
2	ВБ	1	1	0	1	1	1	1
3	ЕЛБ	0	0	1	1	1	1	1
4	СХ	0	0	0	1	1	1	0
5	ВТ	0	0	0	0	1	0	0
6	МШ	0	0	0	0	1	1	0
7	ЕН	0	0	0	0	1	1	1



Використовуючи матрицю досяжності, будемо таблицю, що є першою ітерацією аналізу (табл. 1.3).

Таблиця 1.3 – Перша ітерація аналізу

$h_i$	$R(h_i)$	$A(h_i)$	$R(h_i) \cap A(h_i)$
1	1, 4, 5, 6, 7	1, 2	1
2	1, 2, 4, 5, 6, 7	2	2
3	3, 4, 5, 6, 7	3	3
4	4, 5, 6	1, 2, 3, 4	4
5	5	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	5
6	5, 6	1,2,3,4,6,7	6
7	5, 6, 7	1,2,3,7	7

З таблиці видно, що рівність  $A(h_i) = R(h_i) \cap A(h_i)$  виконується для елементів 2 і 3. Отже, вони і є елементами першого рівня.

Викреслюючи з таблиці рядки з номерами 2 і 3, а також викреслюючи з усіх послідовностей цифри 2 і 3, одержуємо другу ітерацію, у якій критеріальна рівність виконується для елемента 1. Він і є елементом другого рівня.

Повторюючи ітерації, одержуємо остаточно п'ять рівнів елементів, що представлені на рисунку 1.2.

Таке представлення початкової моделі є більш наочним із погляду аналізу залежностей одних елементів від інших. Результат ієрархічної структуризації дозволяє зробити висновок, що з погляду забезпечення безпеки держави критичним є електронна і машинобудівна галузі економіки.

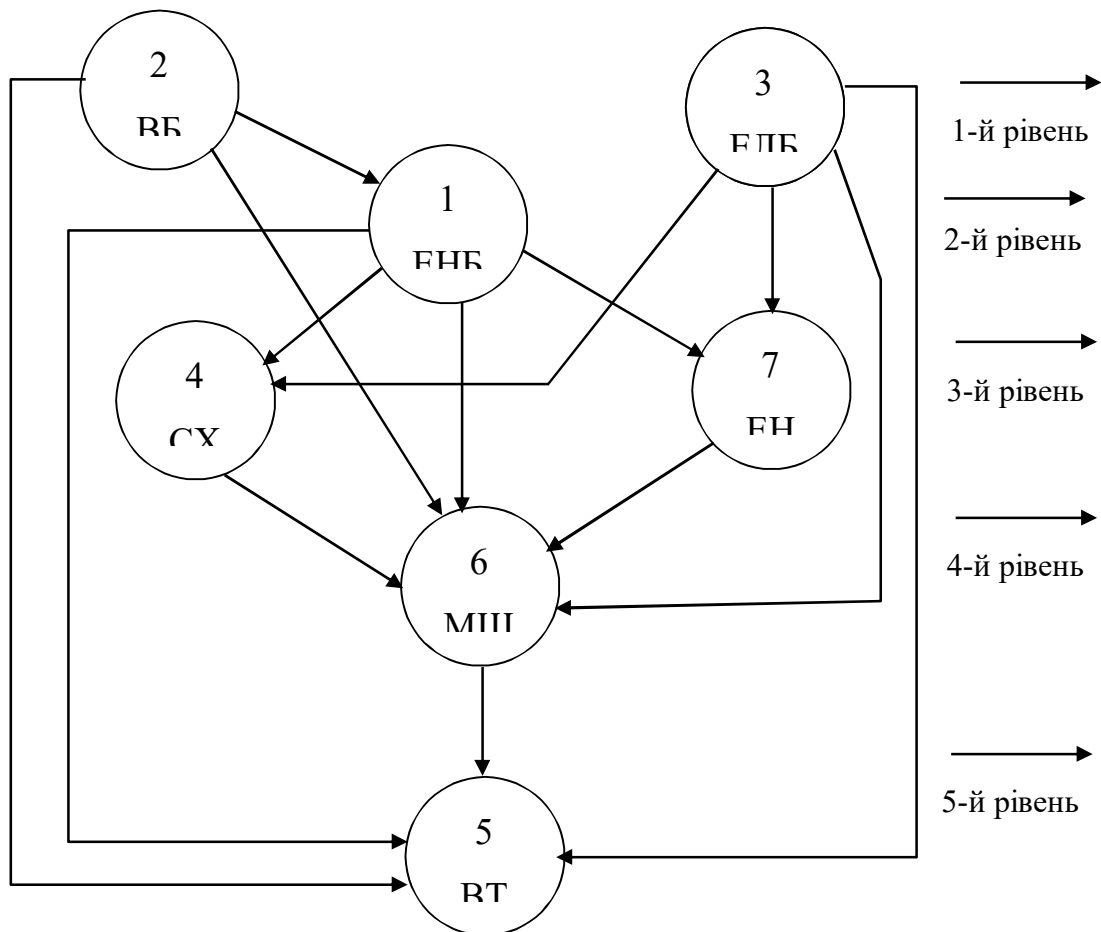


Рисунок 1.2 – Ієрархічна структура вихідного графа.

### Порядок виконання роботи

1. Для приклада, розглянутого вище, побудувати таблиці для ітерацій 2 – 4. Порівняти отримані результати з результатами відображеними на рисунку 1.2.
2. Технологічний процес можна розглядати як систему, елементами якої є окремі операції. Їхній взаємозв'язок, представлений матрицею залежностей, приведено в таблиці 1.4.
3. Побудуйте вихідний спрямований граф для отриманої матриці залежності.
4. Використовуючи граф, побудуйте матрицю досяжності.
5. За даними матриці досяжності побудуйте рівні порядку проходження операцій по черговості. Для цього для кожної ітерації аналізу необхідно побудувати таблиці аналогічні, розглянутим у прикладі.
6. Підсумковий результат представте у виді рядкового графа.

Таблиця 1.4 – Матриця залежності технологічних операцій

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
6	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
10	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
12	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Примітка 1. Значення 1 у клітці (і , j) таблиці (де і – рядок, j – стовпець) означає, що операція і залежить від операції j (тобто операція j передує операції і).

Примітка 2. Правило вибору індивідуального варіанта. Нехай n – номер студента в списку групи, m, k – цілі числа, що визначаються за формулами:

$$m = \begin{cases} n, & \text{якщо } n \leq 10 \\ n - 10, & \text{якщо } 10 < n \leq 20 \\ n - 20, & \text{якщо } 20 < n \leq 30 \\ n - 30, & \text{якщо } n > 30, \end{cases} \quad k = \begin{cases} 11, & \text{якщо } n \leq 10 \\ 12, & \text{якщо } 10 < n \leq 20 \\ 13, & \text{якщо } 20 < n \leq 30 \\ 14, & \text{якщо } n > 30. \end{cases}$$

Для одержання варіанта завдання варто викреслити m-й рядок і m-й стовпець, а також k-й рядок і k-й стовпець з вихідної матриці (рядки і стовпці, які залишились не перенумеровуються). Випишіть матрицю залежності для свого варіанта.

### Контрольні питання

1. Визначення складної системи.
2. Визначення ієрархії.

3. Види ієрархій.
4. Визначення домінантної ієрархії (повної і неповної).
5. Холархії.
6. Ієрархія виду «Китайська шкатулка».
7. Матриця залежності.
8. Матриця досяжності.
9. Побудова матриці досяжності з матриці залежності.
10. Побудова матриці досяжності по вихідному графі залежності.
11. Визначення множини досяжних вершин.
12. Визначення множини попередніх вершин.
13. Як формується множина досяжних вершин з використанням матриці досяжності.
14. Як формується множина попередніх вершин з використанням матриці досяжності.
15. Алгоритм побудови рівнів ієрархії.

## **2 ПОБУДОВА ІЄРАРХІЙ ДЛЯ СИСТЕМИ З ЦИКЛАМИ**

Задача, розглянута в цій роботі багато в чому, аналогічна задачі розглянутої в попередній роботі, але її особливість полягає в тому, що аналізована система є більш складною й представлена графом з циклами. Тому для її рішення спочатку потрібно об'єднати елементи, зв'язані циклом, у групи (у класи еквівалентності).

### **Порядок виконання роботи**

1. Побудувати матрицю залежностей для свого варіанта. Для одержання варіанта завдання варто викреслити  $m$ -й рядок і  $m$ -й стовпець, а також  $k$ -й рядок і  $k$ -й стовпець з вихідної матриці (рядки й стовпці, які залишились, не перенумеровуються).

Вихідна матриця залежностей має вигляд (табл. 2.1):

Таблиця 2.1 – Вихідна матриця залежностей

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
<b>1</b>					1						
<b>2</b>							1				
<b>3</b>		1		1							
<b>4</b>			1								
<b>5</b>						1					
<b>6</b>	1						1				
<b>7</b>										1	
<b>8</b>	1								1		
<b>9</b>											1
<b>10</b>		1									
<b>11</b>	1								1		

Значення  $m$  і  $k$  вибираються з наступної таблиці відповідно до номера студента в списку журналу групи (табл. 2.2).

Таблиця 2.2 – Значення  $m$  і  $k$ 

№ п/п	$m$	$k$		№ п/п	$m$	$k$		№ п/п	$m$	$k$
1	1	2		19	1	4		37	4	9
2	2	3		20	2	5		38	5	10
3	3	4		21	3	6		39	6	11
4	4	5		22	4	7		40	1	7
5	5	6		23	5	8		41	2	8
6	6	7		24	6	9		42	3	9
7	7	8		25	7	10		43	4	10
8	8	9		26	8	11		44	5	11
9	9	10		27	1	5		45	1	8
10	1	3		28	2	6		46	2	9
11	2	4		29	3	7		47	3	10
12	3	5		30	4	8		48	4	11
13	4	6		31	5	9		49	1	9
14	5	7		32	6	10		50	2	10
15	6	8		33	7	11		51	3	11
16	7	9		34	1	6		52	1	10
17	8	10		35	2	7		53	2	11
18	9	11		36	3	8		54	1	11

2. Об'єднайте елементи, зв'язані циклом, у групи (у класи еквівалентності).
3. Побудуйте матрицю залежності класів еквівалентності.
4. Побудуйте спрямований граф для отриманої матриці залежності класів еквівалентності.
5. Використовуючи отриманий граф, побудуйте матрицю досяжності класів еквівалентності.
6. За даними матриці досяжності побудуйте рівні ієрархії класів еквівалентності. Для цього для кожної ітерації аналізу необхідно побудувати таблиці аналогічні тим, що розглядалися в попередній роботі.
7. Підсумковий результат представте у виді порядкового графа.

### **Контрольні питання**

1. У якому випадку елементи  $x_i$  і  $x_j$  зв'язані циклом?
2. Як відбувається розбивка вихідної множини системи з циклами на класи еквівалентності?
3. Як перетворюється матриця залежності системи з циклами для побудови рівнів порядку?
4. Алгоритм побудови рівнів ієрархії для системи з циклами.

### **3 МЕТОД АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ. ВЕКТОР ПРІОРИТЕТІВ**

Будь-яка проблема являє собою складний об'єкт, що має ієрархічну структуру. При аналізі такого об'єкта дослідник, звичайно, зіштовхується зі складною системою взаємодії компонент проблеми (ресурси, мети, впливові особи й групи, політичні, економічні й інші фактори), які потрібно проаналізувати.

Метод аналізу ієрархій (МАІ) є систематичною процедурою для ієрархічного представлення компонентів проблеми. Метод становить у декомпозиції проблеми на усе більш прості складові і подальшій обробці послідовності суджень особи, що приймає рішення (ЛПР), по парних порівняннях. У результаті може бути отриманий відносний ступінь (інтенсивність) взаємодії (впливу) компонентів нижнього  $i$ -го рівня на

компоненти верхнього (i-1)-го рівня або i-го рівня на самий верхній (нульовий) рівень. Ці оцінки виражаються потім чисельно. МАІ включає процедури синтезу множинних суджень, одержання пріоритетності критеріїв і пошуку альтернативних рішень.

Метод аналізу ієрархій включає наступні основні етапи:

- декомпозиція проблеми;
- побудова ієрархічної структури моделі проблеми;
- експертне оцінювання переваг;
- побудова локальних пріоритетів;
- оцінка погодженості суджень;
- синтез локальних пріоритетів;
- висновки й пропозиції для прийняття рішень.

Приклад побудови вектора пріоритетів. Нехай існує проблема покупки будинку. Виділено наступні фактори, що впливають на рішення цієї проблеми: розміри будинку, зручність сполучення, околиці, вік будинку, двір, упорядженість, загальний стан, фінансові умови покупки. Необхідно побудувати вектор пріоритетів цих факторів. Нижче приведена матриця парних порівнянь для розглянутих восьми факторів, заповнена судженнями експерта по шкалі Сааті, на основі яких і проведені відповідні обчислення (табл. 3.1).

Слід зазначити, що відношення погодженості даної матриці трохи більше рекомендованого рівня ( $VP > 0,1$ ), однак, для задач використовуваного типу його можна прийняти.

У загальному випадку рівень погодженості повинний відповідати тому ризику, що супроводжує роботі з неузгодженими даними.

Наприклад, при порівнянні впливу лік на організм необхідно мати дуже високий рівень погодженості.

Таблиця 3.1 – Матриця парних порівнянь

Загальне задоволення будинком	Розміри будинку	Зручність сполучення	Околиці	Вік будинку	Двір	Упорядженість	Загальний стан	Фінансові умови покупки	Головний власний вектор	Вектор пріоритетів
Розміри будинку	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4	2,053	0,175
Зручність сполучення	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7	0,736	0,063
Околиці	1/3	3	1	6	3	4	6	1/5	1,746	0,149
Вік будинку	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8	0,227	0,019
двір	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6	0,418	0,036
Упорядженість	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6	0,497	0,042
Загальний стан	3	5	1/6	7	5	5	1	1/2	1,961	0,167
Фінансові умови покупки	4	7	5	8	6	6	2	1	4,105	0,350
Сума елементів стовпця	9,010	21,867	10,250	41,000	26,333	25,750	10,076	2,551	11,742	1,000

$$\lambda_{\max} = 9,863; \quad \text{ІІ} = 0,266; \quad \text{ВІ} = 1,410; \quad \text{ВІІ} = 0,189.$$

### Порядок виконання роботи

1. Для приклада, приведеного вище, обчислити головний власний вектор, вектор пріоритетів,  $\lambda_{\max}$ , ІІ, ВІ і порівняти з результатами, приведеними в таблиці.

2. Визначити з таблиці 3.2 параметри свого варіанта, що задаються парою чисел  $m$  і  $k$ . Значення  $m$  і  $k$  вибираються з цієї таблиці відповідно до номера студента в списку журналу групи.

3. Визначити з таблиці 3.3 проблему й список критеріїв для свого варіанта. Номер проблеми визначає значення  $m$ . Для визначення списку критеріїв необхідно з вихідного списку, зазначеного в таблиці для даної проблеми викреслити критерій зі значенням  $k$ .



4. Побудувати матрицю парних порівнянь для розглянутих восьми факторів, заповнивши її експертними оцінками по шкалі Сааті.

5. Обчислити головний власний вектор, вектор пріоритетів,  $\lambda_{\max}$ , ІП, ВП. Якщо значення ВП буде більше 0,3 скорегувати експертні оцінки.

Таблиця 3.2 – Значення m і k

№ п/п	m	k		№ п/п	m	k		№ п/п	m	k
1	1	5		19	1	7		37	1	9
2	2	5		20	2	7		38	2	9
3	3	5		21	3	7		39	3	9
4	4	5		22	4	7		40	4	9
5	5	5		23	5	7		41	5	9
6	6	5		24	6	7		42	6	9
7	7	5		25	7	7		43	7	9
8	8	5		26	8	7		44	8	9
9	9	5		27	9	7		45	9	9
10	1	6		28	1	8		46	1	4
11	2	6		29	2	8		47	2	4
12	3	6		30	3	8		48	3	4
13	4	6		31	4	8		49	4	4
14	5	6		32	5	8		50	5	4
15	6	6		33	6	8		51	6	4
16	7	6		34	7	8		52	7	4
17	8	6		35	8	8		53	8	4
18	9	6		36	9	8		54	9	4

Таблиця 3.3 – Проблема й список критеріїв

m	Проблема; варіанти її рішення (множина альтернатив)	Список критеріїв
1	2	3
1	<p><b>Покупка автомобіля;</b> варіанти: 1) престижна іномарка; 2) економічна малолітражка; 3) порівняно новий автомобіль підвищеної прохідності</p>	<p>1) Місткість, 2) потужність двигуна, 3) комфорт, 4) забезпеченість запчастинами, 5) ціна, 6) рік випуску, 7) надійність, 8) економічність, 9) дизайн</p>
2	<p><b>Вибір вимірювального приладу;</b> варіанти: 1) цифровий малогабаритний; 2) високоточний стрілочний; 3) багатофункціональний з виходом на ЕОМ</p>	<p>1) Вартість; 2) рівень автоматизації; 3) продуктивність (час на один вимір); 4) точність; 5) діапазон вимірів; 6) універсальність; 7) габарити; 8) надійність; 9) зручність експлуатації</p>
3	<p><b>Оцінка якості промислової продукції;</b> варіанти: 1) вітчизняна; 2) західноєвропейська; 3) японська</p>	<p>1) Функціональні (споживчі) характеристики; 2) особиста безпека; 3) економічність; 4) надійність; 5) вартість; 6) дизайн; 7) зручність експлуатації; 8) довговічність; 9) забезпеченість запчастинами</p>
4	<p><b>Вибір місця роботи;</b> варіанти: 1) приватна фірма; 2) державне підприємство; 3) навчальний інститут</p>	<p>1) Оклад; 2) самостійність; 3) професійний інтерес; 4) можливості одержання житлоплощі; 5) додаткові навантаження; 6) додаткові вигоди; 7) необхідність перенавчання; 8) далекість від будинку; 9) психологічний клімат</p>

Продовження таблиці 3.3

1	2	3
5	<p><b>Добір на посаду;</b> варіанти:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) молодий фахівець;</li> <li>2) досвідчений працівник середнього віку;</li> <li>3) колишній офіцер, що пройшов перенавчання</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Ділова кваліфікація;</li> <li>2) досвід роботи;</li> <li>3) стать;</li> <li>4) вік;</li> <li>5) почуття відповідальності;</li> <li>6) освіта;</li> <li>7) місце проживання кандидата;</li> <li>8) організаторські здібності;</li> <li>9) психологічна сумісність</li> </ol>
6	<p><b>Упровадження нового технологічного методу (устаткування);</b> варіанти:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) дуже нова закордонна розробка;</li> <li>2) остання вітчизняна розробка;</li> <li>3) апробована вітчизняна розробка</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Вартість;</li> <li>2) безпека;</li> <li>3) ступінь автоматизації;</li> <li>4) продуктивність;</li> <li>5) експлуатаційні витрати;</li> <li>6) універсальність;</li> <li>7) надійність;</li> <li>8) технологічна сумісність;</li> <li>9) забезпеченість сировиною</li> </ol>
7	<p><b>Вибір виду транспорту для поїздки;</b> варіанти:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) літак;</li> <li>2) потяг;</li> <li>3) автобус</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Вартість квитка;</li> <li>2) надійність;</li> <li>3) комфортабельність;</li> <li>4) час у дорозі;</li> <li>5) безпека;</li> <li>6) труднощі придбання квитка;</li> <li>7) зручність розкладу;</li> <li>8) індивідуальна пристосованість;</li> <li>9) припустима вага багажу без додаткової оплати</li> </ol>
8	<p><b>Вибір принтера для персонального комп'ютера;</b> варіанти:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) матричний;</li> <li>2) струминний;</li> <li>3) лазерний</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Вартість;</li> <li>2) якість печатки;</li> <li>3) швидкість печатки;</li> <li>4) додаткові можливості (графіка, колір);</li> <li>5) простота й зручність обслуговування;</li> <li>6) наявність українських букв;</li> <li>7) надійність;</li> <li>8) кількість шрифтів;</li> <li>9) забезпеченість запчастинами</li> </ol>

Закінчення таблиці 3.3

1	2	3
9	<b>Оцінка якості життя;</b> варіанти: 1) великий промисловий центр; 2) провінційне мале місто; 3) пригород столичного міста	1) Суспільна безпека; 2) стан навколишнього середовища; 3) можливості для дозвілля й розваг; 4) можливості підвищення кваліфікації й одержання роботи; 5) медичне обслуговування; 6) вартість життя; 7) житлові умови; 8) рівень доходів; 9) РИТМ ЖИТТЯ

### Контрольні питання

1. Матриця Сааті.
2. Метод парних порівнянь. Матриця парних порівнянь.
3. Повна погодженість.
4. Порядкова погодженість.
5. Кардинальна погодженість.
6. Умова погодженості зворотно симетричної матриці.
7. Індекс погодженості.
8. Випадковий індекс.
9. Відношення погодженості.
10. Діапазон гарного ступеня погодженості.
11. Діапазон прийняттого ступеня погодженості.
12. Точний спосіб обчислення головного власного вектора матриці парних порівнянь.
13. Наближений спосіб обчислення головного власного вектора матриці парних порівнянь.
14. Визначення наближених значень компонент вектора пріоритетів.
15. Визначення наближеного значення  $\lambda_{\max}$ .

## **4 МЕТОД АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ. РОЗРАХУНОК ЛОКАЛЬНИХ ПРІОРИТЕТІВ. СИНТЕЗ ПРІОРИТЕТІВ**

Розглянемо проблему: «Вибір і покупка будинку із заданим рівнем якості або покупка такого будинку, який би викликав загальне задоволення».

Як альтернативні варіанти розглядаємо три будинки (А, Б, В) із наступними характеристиками.

Будинок А – найбільший будинок (із трьох), гарні околиці, інтенсивний рух транспорту, податки на будинок не великі. Двір більше, ніж у будинків Б і В. Загальний стан не дуже гарний, потрібна ґрунтовне лагодження й проведення малярських робіт. Будинок фінансується банком із високою процентною ставкою, тому фінансові умови можна вважати незадовільними.

Будинок Б – небагато менше будинку А, розташований далеко від автобусних зупинок. Навколо інтенсивний рух транспорту. У будинку відсутні сучасні зручності, але загальний стан будинку дуже гарний. Крім того, на будинок можна одержати заставну з досить низькою процентною ставкою, тобто фінансові умови цілком задовільні.

Будинок В – маленький і без сучасних зручностей. Околиці досить привабливі, але податки високі, однак, будинок у гарному стані і досить безпечний. Двір більше, ніж у будинку Б, однак, значно менше, ніж у будинку А. Обсяг відновно-ремонтних робіт дуже малий. Фінансові умови набагато краще, ніж для будинку А, але не так гарні, як для будинку Б.

Ієрархічна модель рішення проблеми для розглянутого приклада має такий вигляд (рис. 4.1):

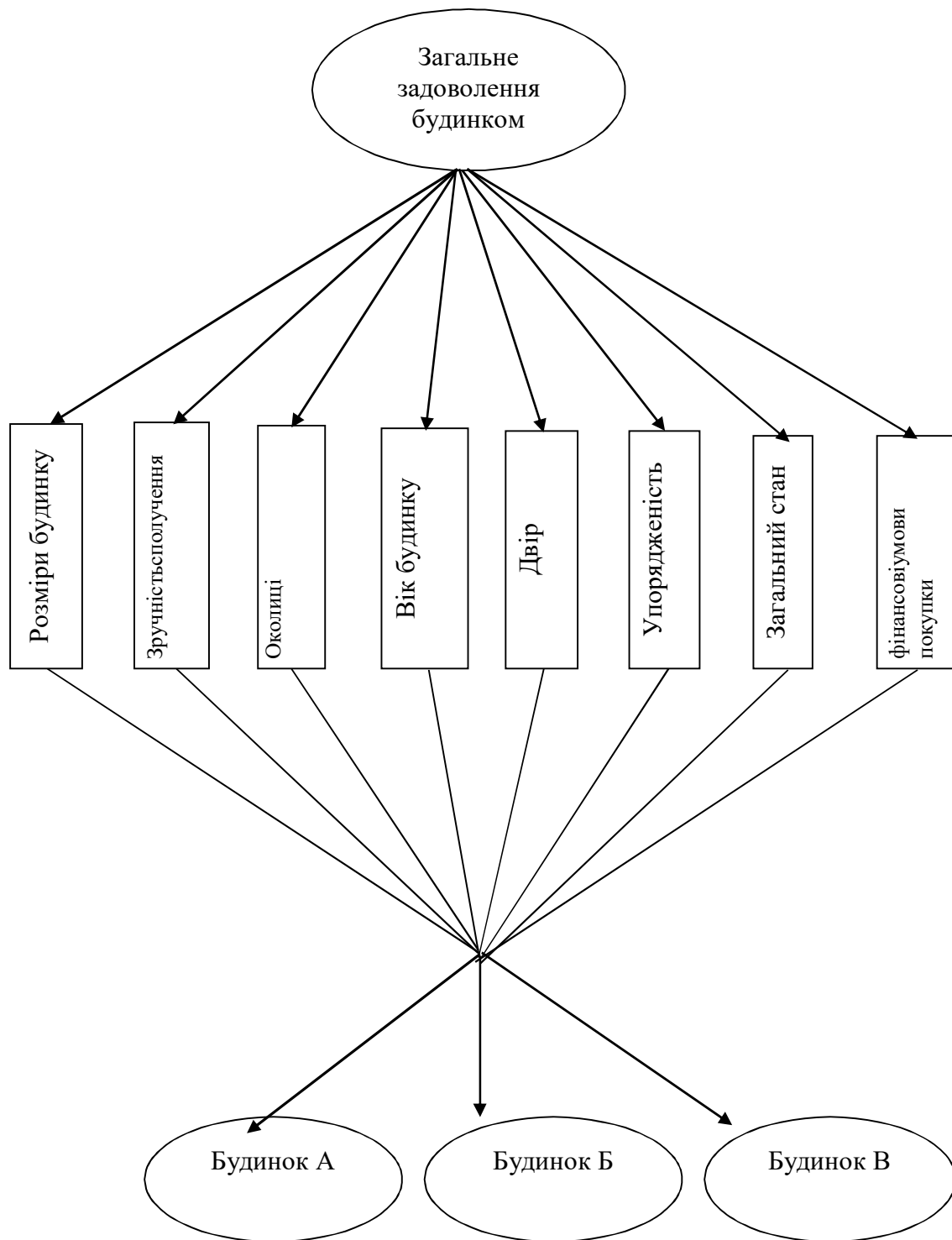


Рисунок 4.1 – Ієрархічна модель рішення проблеми: вибір і покупка будинку

Для того щоб прийняти обґрунтоване рішення на вибір будинку необхідно, виконати наступне. Після побудови ієрархічної моделі проблеми починаємо перший етап аналізу, що складається в дослідженні ступеня впливу показників властивостей якості будинку на загальне задоволення будинком. У

формальному виді цей етап складається в аналізі впливу факторів першого рівня ієрархії на мету аналізу – нульовий рівень. Цей етап був виконаний у попередній роботі. Була представлена матриця парних порівнянь для восьми факторів 1-го рівня, заповнена судженнями експерта по шкалі Сааті. На підставі цих даних були визначені вектор пріоритетів,  $\lambda_{max}$ , ПП, ВП.

На другому етапі переходимо до розгляду впливу факторів другого рівня на фактори першого рівня, тобто до аналізу «ваги» (переваги) кожного з розглянутих будинків (А, Б, В) стосовно кожного фактора першого рівня. Для цього необхідно сформувані й обробити вісім експертних матриць парного порівняння. Самі матриці й результати їхньої обробки у виді векторів пріоритетів і мір узгодженості представлені в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Вісім експертних матриць парного порівняння

Розміри будинку	А	Б	В	Вектор пріоритетів	Зручність сполучення	А	Б	В	Вектор пріоритетів
А	1	6	8	0,754	А	1	5	4	0,233
Б	1/6	1	4	0,181	Б	1/5	1	1/3	0,054
В	1/8	1/4	1	0,065	В	1/4	3	1	0,712
				$\lambda_{max}=3,136$ ПП=0,068 ВП=0,117					$\lambda_{max}=3,247$ ПП=0,123 ВП=0,213
Околиці	А	Б	В	Вектор пріоритетів	Вік будинку	А	Б	В	Вектор пріоритетів
А	1	8	6	0,754	А	1	1	1	0,333
Б	1/8	1	1/4	0,065	Б	1	1	1	0,333
В	1/6	4	1	0,181	В	1	1	1	0,333
				$\lambda_{max}=3,136$ ПП=0,068 ВП=0,117					$\lambda_{max}=3,000$ ПП=0,000 ВП=0,000
Двір	А	Б	В	Вектор пріоритетів	Упорядженість	А	Б	В	Вектор пріоритетів
А	1	5	4	0,674	А	1	8	6	0,747
Б	1/5	1	1/3	0,101	Б	1/8	1	1/5	0,060
В	1/4	3	1	0,226	В	1/6	5	1	0,193
				$\lambda_{max}=3,086$ ПП=0,043 ВП=0,074					$\lambda_{max}=3,197$ ПП=0,099 ВП=0,170

Продовження таблиці 4.1

Загальний стан	А	Б	В	Вектор пріоритетів	Фінансові умови покупки	А	Б	В	Вектор пріоритетів
А	1	1/2	1/2	0,200	А	1	1/7	1/5	0,072
Б	2	1	1	0,400	Б	7	1	3	0,649
В	2	1	1	0,400	В	5	1/3	1	0,279
				$\lambda_{max}=3,000$ ІП=0,000 ВП=0,000					$\lambda_{max}=3,065$ ІП=0,032 ВП=0,056

На третьому етапі здійснюється синтез локальних пріоритетів або оцінка узагальнених (глобальних) пріоритетів. У нашій прикладі мова йде про одержання вектора глобальних пріоритетів будинків (А, Б, В,) стосовно мети верхнього рівня – загального задоволення будинком.

Для цього матрицю локальних пріоритетів 2 рівня (табл. 4.2), складену за результатами аналізу, представленого в приведеній вище таблиці, множать на вектор локальних пріоритетів 1 рівня, отриманий у роботі 3 (табл. 4.3).

Таблиця 4.2 – Матриця локальних пріоритетів 2-го рівня

	Розміри будинку	Зручність сполучення	Околиці	Вік будинку	Двір	Упорядженість	Загальний стан	Фінансові умови покупки
А	0,754	0,233	0,754	0,333	0,674	0,747	0,200	0,072
Б	0,181	0,054	0,065	0,333	0,101	0,060	0,400	0,649
В	0,065	0,712	0,181	0,333	0,226	0,193	0,400	0,279



Таблиця 4.3 – Вектор локальних пріоритетів 1-го рівня

Розміри будинку	0,175
Зручність сполучення	0,063
Околиці	0,149
Вік будинку	0,019
Двір	0,036
Упорядженість	0,042
Загальний стан	0,167
Фінансові умови покупки	0,350

У результаті одержуємо узагальнений (глобальний) вектор пріоритетів будинків (А, Б, В) стосовно кінцевої мети – покупці будинку. Цей вектор має вигляд (табл. 4.4):

Таблиця 4.4. – Глобальний вектор пріоритетів

Будинок	Вектор пріоритетів
А	0,379
Б	0,351
В	0,270

Таким чином, з обліком усіх розглянутих факторів, перевага при покупці віддається будинку А.

### Порядок виконання роботи

1. Для приклада, розглянутого вище, обробити вісім експертних матриць парного порівняння: для кожної матриці обчислити головний власний вектор, вектор пріоритетів,  $\lambda_{max}$ , ІІ, ВП. Побудувати матрицю локальних пріоритетів 2-го рівня й узагальнений (глобальний) вектор пріоритетів будинків (А, Б, В) стосовно кінцевої мети – покупки будинку. Отримані результати порівняти з результатами, приведеними в описі роботи.

2. Для проблеми, обраної в роботі 3 виписати з таблиці, приведеної в цій роботі, варіанти її рішення.
3. Заповнити вісім експертних матриць парного порівняння.
4. Для кожної матриці обчислити головний власний вектор, вектор пріоритетів,  $\lambda_{\max}$ , ІІ, ВП.
5. Побудувати матрицю локальних пріоритетів 2-го рівня.
6. Використовуючи вектор локальних пріоритетів 1-го рівня, отриманий у роботі 3, і матрицю локальних пріоритетів 2-го рівня, отриману в даній роботі, обчислити узагальнений (глобальний) вектор пріоритетів стосовно кінцевої мети.
7. Прийняти рішення по проблемі.

### **Контрольні питання**

1. Три етапи прийняття обґрунтованого рішення проблеми.
2. Як побудувати матрицю локальних пріоритетів 2-го рівня?
3. Як побудувати вектор глобальних пріоритетів?

### **5 МЕТОДИ ПОШУКУ Й ВИБОРУ РІШЕНЬ. МІНІМАКСНИЙ КРИТЕРІЙ. КРИТЕРІЙ БАЙЄСА – ЛАПЛАСА. КРИТЕРІЙ СЕВІДЖА**

Задача прийняття рішення трактується як задача вибору одного варіанта  $E_i$  з деякої множини варіантів рішень :  $E_i \in E$ . Будемо розглядати випадок, коли мається лише кінцеве число варіантів  $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots, E_m$ . Умовимося, що кожним варіантом  $E_i$  однозначно визначається деякий результат  $e_i$ . Ці результати повинні допускати кількісну оцінку, яку також будемо позначати символом  $e_i$ . Будемо шукати варіант із максимальним результатом, тобто метою нашого вибору є  $\max_i e_i$ . Результати  $e_i$  частіше характеризуються, як виграші, корисності або надійності. Таким чином, вибір оптимального варіанта рішення виробляється за допомогою критерію

$$E_0 = \left\{ E_{i0} / E_{i0} \in E \wedge e_{i0} = \max_i e_i \right\}. \quad (5.1)$$

Правило (5.1) інтерпретується в такий спосіб: множина  $E_0$  оптимальних варіантів складається з тих варіантів  $E_{i_0}$ , що належать множині  $E$  усіх варіантів, і оцінка  $e_{i_0}$  максимальна серед всіх оцінок  $e_i$ .

Розглянутий випадок прийняття рішень, при якому кожному варіанту рішення відповідає єдиний зовнішній стан (єдиний результат), є випадком детермінованих рішень. Цей випадок є найпростішим і частковим. У більш складних структурах кожному варіанту рішення  $E_i$  внаслідок різних зовнішніх умов  $F_j$  можуть відповідати різні результати  $e_{ij}$  рішень.

Під результатом рішення  $e_{ij}$  будемо розуміти оцінку, що відповідає варіанту  $E_i$  й умовам  $F_j$  і яка характеризує економічний ефект (прибуток), корисність або надійність виробу. Сімейство рішень описується деякою матрицею:

$$\begin{matrix}
 & F_1 & \cdots & F_j & \cdots & F_n \\
 E_1 & \left( e_{11} & \cdots & e_{1j} & \cdots & e_{1n} \right) \\
 \vdots & \left( \vdots & & \vdots & & \vdots \right) \\
 E_i & \left( e_{i1} & \cdots & e_{ij} & \cdots & e_{in} \right) \\
 \vdots & \left( \vdots & & \vdots & & \vdots \right) \\
 E_m & \left( e_{m1} & \cdots & e_{mj} & \cdots & e_{mn} \right)
 \end{matrix} \quad (5.2)$$

Особа, що приймає рішення (ОПР), намагається вибрати рішення з найкращими результатами. У даному випадку, первісна задача максимізації відповідно до критерію (5.1) повинна бути замінена іншою, котра буде враховувати всі наслідки кожного з варіантів рішення  $E_i$ .

Щоб прийти до однозначного і найвигіднішого варіанта рішення, коли яким-небудь варіантам рішень можуть відповідати різні умови, можна ввести підходящі оцінні (цільові) функції. При цьому матриця (5.2) зводиться до одного стовпця  $F_r$ :

$$\begin{matrix}
 E_1 & \left( e_{1r} \right) \\
 \vdots & \left( \vdots \right) \\
 E_i & \left( e_{ir} \right) \\
 \vdots & \left( \vdots \right) \\
 E_m & \left( e_{mr} \right)
 \end{matrix} .$$

Кожному варіанту приписується, таким чином, деякий результат, що характеризує, у цілому, усі наслідки цього рішення. Такий результат ми будемо надалі позначати символом  $e_{ir}$ .

Процедура вибору оптимального рішення зводиться до проблеми вкладення змісту в результат  $e_{ir}$ . З погляду ОПР частіше бажаний результат формується між оптимістичними й песимістичними способами побудови оцінних функцій.

К класичним критеріям прийняття рішень відносяться: мінімаксний критерій, критерій Байєса – Лапласа (BL-критерій), критерій Севіджа (S-критерій).

Мінімаксний критерій (ММ) використовує оцінну функцію, що відповідає позиції крайньої обережності, тобто

$$z_{MM} = \max_i \min_j e_{ij}, \quad (5.3)$$

де  $z_{MM}$  – оцінна функція ММ-критерію і справедливо наступне співвідношення

$$E_0 = \left\{ E_{i_0} / E_{i_0} \in E \wedge e_{i_0} = \max_i \min_j e_{ij} \right\}.$$

Тому застосування ММ-критерію виправдується, якщо ситуація, у якій приймається рішення, характеризується наступними обставинами:

- про можливості появи зовнішніх станів  $F_j$  нічого не відомо;
- рішення реалізується лише один раз;
- необхідно виключити який би те ні було ризик, тобто ні при яких умовах  $F_j$  не допускається одержати результат, менший чим  $z_{MM}$ .

Критерій Байєса – Лапласа (BL-критерій). Нехай  $p_j$  – імовірність появи зовнішнього стану  $F_j$ , тоді для BL-критерію оцінна функція має вигляд

$$z_{BL} = \max_i e_{ir} = \max_i \sum_{j=1}^n e_{ij} p_j, \quad (5.4)$$

$$E_0 = \left\{ E_{i_0} / E_{i_0} \in E \wedge e_{i_0} = \max_i \sum_{j=1}^n e_{ij} p_j \wedge \sum_{j=1}^n p_j = 1 \right\}.$$

Правило вибору можна інтерпретувати в такий спосіб: матриця рішень  $\|e_{ij}\|$  доповнюється ще одним стовпцем, що містить математичне чекання значень кожного з рядків. Вибираються ті варіанти  $E_{i_0}$ , у рядках яких є найбільше значення  $e_{ir}$  цього стовпця .

Умови, при яких використовується даний критерій:

- імовірності появи станів  $F_j$  відомі і не залежать від часу;
- рішення реалізується (теоретично) нескінченно багато разів;
- для кінцевого числа реалізацій рішення допускається деякий ризик.

Критерій Севіджа (S-критерій). Сформуємо оцінну функцію. Нехай

$$a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij} \quad (5.5)$$

$$e_{ir} = \max_j a_{ij} = \max_j \left( \max_i e_{ij} - e_{ij} \right), \quad (5.6)$$

тоді оцінна функція має вигляд

$$z_S = \min_i e_{ir} = \min_i \left( \max_j \left( \max_i e_{ij} - e_{ij} \right) \right). \quad (5.7)$$

Тоді множина оптимальних варіантів рішення є

$$E_0 = \left\{ E_{i_0} \mid E_{i_0} \in E \wedge e_{i_0} = \min_i e_{ir} \right\}.$$

Величину  $a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}$  можна інтерпретувати подвійно:

– як максимальний додатковий виграш, що досягається, якщо в стані  $F_j$  замість варіанта  $E_i$  вибрати інший, оптимальний для цього зовнішнього стану варіант;

– як утрати (штрафи), що виникають у стані  $F_j$  при заміні оптимального для нього варіанта на варіант  $E_i$ .

Тоді величина  $e_{ir}$  являє собою, при інтерпретації  $a_{ij}$  як втрати, максимально можливі (по всіх зовнішніх станах  $F_j, j = 1, \dots, n$ ) втрати у випадку

вибору варіанта  $E_i$ . Далі максимально можливі втрати мінімізуються за рахунок вибору підходящого варіанта  $E_i$ .

Правило вибору оптимального варіанта за критерієм Севіджа:

– кожний елемент матриці рішень  $\|e_{ij}\|$  віднімається з найбільшого результату  $\max_i e_{ij}$  відповідного стовпця. Різниці  $a_{ij}$  утворять матрицю залишків  $\|a_{ij}\|$ . Ця матриця доповнюється стовпцем найбільших різниць  $e_{ir}$ ;

– вибираються ті варіанти  $E_{i0}$ , у рядках яких є найменше для цього стовпця значення.

Умови застосування S-критерію такі ж, як для ММ-критерію.

### **Порядок виконання роботи**

Дано матрицю рішень, розміром  $8 \times 8$  (результатами якої є або прибуток або збитки). Здійснити вибір оптимального варіанта рішення за допомогою критеріїв:

- 1) мінімаксного;
- 2) Байєса – Лапласа;
- 3) Севіджа.

Матриця рішень і розподіл ймовірностей появи зовнішніх станів вибираються за номером у списку групи.

Варіанти матриці розв'язків подані на рисунку 5.1, ймовірностей  $p_j$  (появи зовнішніх станів  $F_j, j=1, \dots, n$ ) наведені в таблиці 5.1.

Варіант 1								Варіант 2							
52	71	80	79	60	49	79	66	-8	-53	-53	-33	-91	-89	-51	-34
29	95	2	55	60	17	94	61	-97	-75	-37	-16	-63	-77	-28	-28
56	11	90	20	51	31	75	94	-94	-90	-97	-19	-93	-75	-84	-85
56	68	24	30	47	55	19	11	-35	-35	-31	-37	-78	-95	-93	-34
7	83	26	2	31	19	20	67	-3	-11	-3	-59	-38	-81	-62	-42
41	98	7	82	91	37	66	9	-4	-96	-76	-1	-37	-67	-78	-75
21	86	96	27	43	94	45	17	-16	-73	-21	-70	-82	-75	-7	-91
45	7	62	55	2	30	69	5	-27	-16	-19	-87	-55	-79	-31	-85
Варіант 3								Варіант 4							
2	20	39	66	3	18	90	24	-78	-60	-44	-74	-66	-79	-72	-91
84	32	83	30	45	16	94	48	-71	-42	-14	-12	-76	-70	-27	-53
70	40	89	37	16	73	22	20	-6	-57	-56	-69	-71	-45	-88	-17
35	66	95	34	88	21	19	33	-70	-95	-74	-3	-79	-90	-47	-63
62	37	86	56	69	98	7	86	-98	-2	-1	-26	-77	-20	-52	-90
71	89	74	20	97	78	45	45	-41	-17	-86	-90	-29	-20	-32	-83
27	87	12	43	84	24	29	78	-14	-33	-24	-32	-30	-62	-11	-5
12	75	23	11	10	12	77	93	-59	-67	-57	-19	-8	-50	-8	-58
Варіант 5								Варіант 6							
76	19	38	92	75	9	45	70	-47	-98	-44	-15	-4	-92	-80	-39
43	62	97	41	5	57	50	81	-94	-25	-3	-74	-27	-3	-84	-85
49	36	22	56	49	67	95	32	-75	-50	-2	-13	-45	-57	-42	-40
42	77	63	65	27	34	95	70	-31	-78	-88	-40	-63	-37	-22	-74
21	28	81	26	66	38	66	94	-24	-97	-64	-5	-55	-23	-22	-43
26	92	62	46	14	6	90	54	-6	-22	-5	-2	-32	-72	-67	-72
45	76	75	1	89	97	30	79	-87	-60	-92	-3	-44	-5	-61	-48
97	39	28	24	21	78	34	34	-53	-68	-53	-26	-91	-44	-57	-54

Рисунок 5.1 – Варіанти матриці розв'язків

Варіант 7								Варіант 8							
52	24	64	50	63	47	61	27	-8	-24	-4	-39	-2	-36	-72	-20
78	31	14	22	66	19	22	81	-85	-61	-15	-85	-57	-38	-9	-3
90	66	25	71	23	36	3	28	-10	-74	-11	-13	-71	-20	-26	-58
37	41	8	17	12	8	59	92	-43	-47	-53	-47	-82	-58	-89	-50
84	21	7	50	56	40	90	37	-15	-11	-67	-65	-3	-62	-72	-95
21	29	12	80	59	85	70	75	-65	-54	-72	-92	-87	-84	-23	-4
44	31	17	76	56	81	97	22	-85	-81	-95	-49	-70	-47	-7	-11
95	40	68	16	82	62	22	95	-16	-78	-76	-63	-27	-13	-17	-46
Варіант 9								Варіант 10							
11	57	95	55	19	12	56	70	-6	-84	-38	-9	-75	-68	-47	-57
83	96	94	22	5	58	47	81	-11	-13	-47	-87	-4	-13	-41	-11
70	77	4	73	5	72	14	32	-19	-82	-17	-46	-46	-3	-54	-98
22	56	79	79	32	43	6	70	-1	-40	-24	-18	-45	-73	-36	-62
58	60	95	68	9	29	56	94	-67	-45	-28	-5	-85	-55	-32	-71
36	64	61	1	86	81	33	54	-8	-69	-43	-75	-36	-43	-87	-30
60	48	76	2	66	61	7	79	-57	-52	-83	-73	-89	-1	-57	-30
61	11	56	61	7	54	32	34	-79	-85	-43	-63	-47	-96	-54	-65
Варіант 11								Варіант 12							
95	40	68	16	82	62	22	87	-52	-49	-23	-50	-79	-54	-66	-7
57	59	17	93	37	27	55	55	-83	-90	-47	-17	-1	-68	-19	-59
72	76	11	49	23	2	12	12	-36	-3	-29	-3	-71	-86	-86	-5
2	25	58	67	80	66	26	15	-56	-47	-65	-43	-29	-62	-65	-79
11	36	9	48	36	74	33	29	-73	-83	-54	-64	-39	-70	-43	-41
80	73	75	81	37	90	33	65	-57	-90	-44	-59	-31	-65	-25	-65
58	16	88	38	80	94	12	28	-75	-90	-69	-70	-18	-73	-6	-70
70	89	90	83	25	62	22	90	-9	-11	-44	-21	-63	-72	-69	-74

Продовження рисунка 5.1



Варіант 13								Варіант 14							
78	36	97	71	29	55	22	38	-36	-22	-64	-85	-45	-84	-16	-72
66	14	4	22	71	78	84	81	-11	-73	-9	-37	-39	-73	-44	-56
81	80	43	23	54	8	69	32	-6	-20	-54	-51	-49	-68	-11	-14
46	30	31	3	95	75	91	24	-92	-61	-93	-62	-17	-89	-74	-69
85	25	25	17	73	89	53	61	-48	-29	-82	-74	-79	-21	-7	-19
30	87	68	35	71	74	2	26	-8	-39	-16	-59	-23	-47	-54	-24
12	73	71	95	14	65	49	7	-60	-51	-17	-16	-11	-95	-25	-24
73	56	18	15	35	71	14	57	-64	-79	-29	-9	-96	-39	-36	-17
Варіант 15								Варіант 16							
54	34	98	12	16	31	88	93	-80	-76	-87	-33	-7	-43	-18	-7
90	35	15	20	23	96	8	17	-82	-79	-1	-67	-38	-26	-59	-29
77	35	5	80	48	6	13	6	-18	-46	-49	-89	-92	-30	-19	-44
20	42	23	6	56	98	25	64	-63	-53	-20	-90	-24	-48	-75	-13
73	56	18	15	35	71	14	57	-32	-29	-75	-14	-57	-37	-39	-54
66	78	40	61	22	63	84	53	-52	-2	-40	-89	-12	-77	-73	-26
3	85	45	46	51	33	32	4	-20	-88	-46	-23	-73	-96	-54	-55
61	59	6	24	92	52	37	87	-48	-5	-13	-71	-84	-10	-12	-2
Варіант 17								Варіант 18							
97	27	68	76	88	41	72	61	-43	-44	-54	-84	-48	-51	-59	-29
87	82	90	2	77	54	3	94	-11	-23	-94	-44	-84	-65	-86	-49
55	9	45	42	48	87	41	81	-85	-89	-60	-51	-32	-40	-79	-21
36	48	32	85	6	17	42	12	-48	-89	-21	-73	-52	-87	-67	-7
87	1	29	69	67	68	90	55	-23	-43	-32	-5	-40	-67	-49	-6
72	88	36	97	2	92	65	95	-78	-38	-12	-1	-54	-21	-32	-68
57	51	42	30	76	34	77	2	-86	-92	-40	-97	-65	-73	-31	-18
7	90	31	95	41	32	43	6	-49	-46	-76	-1	-16	-75	-39	-38

Продовження рисунка 5.1

Варіант 19								Варіант 20							
15	50	59	46	73	87	17	42	-63	-25	-53	-51	-5	-7	-67	-28
71	64	74	2	97	42	56	33	-29	-50	-88	-80	-95	-24	-81	-44
86	62	24	89	5	12	51	10	-49	-6	-50	-8	-50	-40	-8	-27
64	73	37	38	3	27	85	92	-91	-60	-46	-70	-65	-7	-69	-7
49	62	32	25	4	18	70	15	-56	-49	-3	-14	-9	-46	-36	-67
28	88	48	37	14	40	66	87	-45	-21	-69	-95	-98	-95	-15	-97
15	27	77	7	83	23	55	61	-31	-44	-64	-9	-51	-25	-34	-4
65	57	38	63	85	48	68	68	-70	-9	-50	-95	-9	-58	-26	-67
Варіант 21								Варіант 22							
43	36	9	32	36	73	79	61	-10	-91	-14	-62	-10	-68	-93	-16
30	52	73	20	56	59	82	74	-61	-70	-28	-91	-26	-1	-81	-5
33	58	15	95	35	55	38	86	-11	-58	-6	-25	-44	-39	-50	-89
29	73	16	9	52	75	5	23	-71	-4	-79	-42	-66	-34	-78	-30
34	65	46	24	63	88	93	85	-32	-78	-89	-29	-48	-1	-47	-23
9	50	70	76	12	84	4	51	-81	-22	-29	-76	-86	-3	-93	-67
42	17	23	34	72	70	91	50	-24	-13	-23	-26	-63	-10	-96	-77
68	98	32	36	97	71	74	53	-23	-97	-41	-3	-51	-81	-94	-90
Варіант 23								Варіант 24							
63	30	56	3	37	39	92	26	-7	-14	-27	-8	-12	-20	-31	-93
10	33	35	60	16	15	88	91	-82	-94	-64	-79	-80	-15	-33	-18
19	85	88	63	3	5	79	29	-41	-80	-84	-25	-86	-7	-19	-61
22	68	59	16	49	40	39	78	-47	-61	-34	-85	-55	-95	-23	-68
19	87	85	7	59	31	53	9	-13	-88	-50	-56	-7	-82	-2	-64
6	65	31	81	35	61	25	59	-80	-6	-27	-73	-4	-27	-46	-6
40	17	49	50	30	57	15	84	-78	-89	-77	-36	-82	-40	-27	-40
60	64	25	37	9	27	43	65	-62	-15	-6	-39	-15	-66	-62	-61

Продовження рисунка 5.1

Варіант 25								Варіант 26							
31	7	50	9	23	2	62	55	-68	-37	-3	-4	-98	-55	-83	-57
8	69	18	35	92	38	78	39	-5	-89	-84	-79	-1	-49	-48	-80
95	24	42	32	5	46	22	27	-93	-58	-16	-20	-16	-98	-10	-12
47	9	64	21	30	82	21	26	-66	-24	-77	-64	-38	-38	-42	-82
6	48	19	63	85	3	37	96	-75	-84	-25	-23	-58	-92	-14	-75
80	19	64	64	22	12	31	31	-70	-64	-22	-68	-74	-19	-12	-40
70	28	15	25	14	12	77	54	-58	-3	-49	-19	-19	-95	-92	-27
91	93	54	50	33	82	77	27	-96	-43	-27	-66	-71	-18	-56	-85
Варіант 27								Варіант 28							
12	56	63	27	35	70	42	11	-57	-2	-81	-43	-97	-53	-9	-8
11	44	86	8	86	20	38	31	-43	-89	-84	-45	-80	-92	-51	-82
95	23	64	4	93	41	51	9	-11	-31	-19	-80	-58	-50	-20	-37
29	63	51	94	8	9	65	3	-66	-80	-24	-21	-72	-5	-59	-91
16	23	17	43	50	37	82	78	-89	-21	-12	-89	-72	-97	-68	-25
18	8	51	37	18	14	86	85	-57	-38	-26	-43	-93	-45	-53	-33
73	98	5	72	42	45	73	66	-25	-29	-7	-48	-41	-50	-86	-86
46	9	91	61	29	23	78	27	-33	-41	-38	-4	-91	-71	-60	-46
Варіант 29								Варіант 30							
83	1	58	17	27	77	42	93	-76	-42	-9	-72	-9	-94	-94	-12
23	57	43	21	2	19	82	63	-71	-86	-57	-98	-1	-6	-41	-54
58	98	12	11	88	88	42	44	-83	-66	-52	-75	-16	-68	-24	-33
46	37	28	27	95	32	46	90	-80	-21	-31	-49	-13	-83	-8	-4
54	52	34	98	73	62	14	93	-60	-61	-98	-25	-79	-43	-36	-58
77	94	61	68	7	4	63	88	-67	-37	-56	-26	-7	-90	-57	-25
32	13	52	49	42	66	87	12	-73	-29	-8	-40	-46	-58	-37	-26
68	47	23	29	80	89	60	33	-97	-34	-41	-73	-91	-63	-63	-4

Продовження рисунка 5.1

Варіант 31								Варіант 32							
82	16	25	76	43	64	82	11	-50	-43	-58	-10	-23	-34	-68	-63
30	61	19	63	5	10	54	39	-75	-64	-67	-46	-65	-51	-49	-14
76	87	58	28	65	77	37	7	-91	-86	-39	-10	-79	-84	-7	-19
73	12	55	30	67	86	61	68	-47	-80	-3	-43	-11	-87	-97	-38
61	11	27	45	10	46	36	18	-50	-44	-42	-46	-83	-41	-27	-86
32	34	4	6	35	67	35	83	-29	-8	-78	-80	-88	-24	-64	-23
66	11	23	23	93	19	30	43	-85	-62	-65	-35	-67	-11	-58	-78
32	12	72	76	91	62	73	59	-61	-8	-27	-57	-90	-70	-27	-25
Варіант 33								Варіант 34							
29	26	37	63	14	35	31	61	-26	-29	-42	-31	-28	-30	-41	-54
24	62	89	75	51	37	49	77	-65	-94	-30	-63	-20	-68	-73	-31
38	67	36	98	5	92	61	39	-10	-92	-52	-1	-15	-38	-15	-2
51	28	95	4	70	21	14	55	-6	-24	-66	-92	-32	-6	-15	-63
85	14	33	79	30	87	65	22	-65	-33	-29	-55	-33	-3	-88	-25
83	38	47	77	69	43	59	84	-76	-18	-51	-49	-24	-85	-48	-41
97	69	7	78	25	76	57	8	-67	-36	-68	-2	-74	-72	-90	-75
18	21	26	71	62	59	22	33	-12	-21	-53	-72	-4	-91	-73	-18
Варіант 35								Варіант 36							
76	95	50	39	25	11	29	64	-62	-62	-70	-97	-35	-76	-78	-28
27	33	92	78	65	29	89	38	-53	-36	-9	-62	-1	-93	-5	-92
73	60	64	36	36	42	19	31	-36	-38	-42	-83	-52	-97	-98	-98
43	36	32	30	24	24	5	97	-59	-90	-79	-73	-91	-51	-34	-84
92	56	86	42	36	30	21	96	-24	-85	-3	-82	-21	-56	-20	-50
13	2	24	80	71	62	10	84	-14	-37	-35	-73	-96	-2	-29	-51
68	98	61	8	19	86	40	65	-68	-79	-41	-17	-28	-69	-54	-45
85	78	10	88	33	18	16	20	-7	-34	-2	-89	-12	-81	-86	-79

Продовження рисунка 5.1

Варіант 37								Варіант 38							
67	5	68	28	40	82	68	52	-15	-52	-52	-35	-77	-76	-59	-49
95	42	78	35	25	14	85	48	-58	-67	-59	-42	-38	-59	-66	-70
63	32	78	84	65	69	50	88	-97	-69	-91	-53	-13	-64	-24	-27
89	8	53	68	39	45	94	13	-15	-88	-43	-53	-43	-90	-35	-42
12	1	25	85	64	36	48	61	-5	-18	-32	-3	-52	-7	-61	-75
59	54	42	75	78	34	96	11	-45	-14	-10	-13	-27	-23	-66	-84
74	64	92	77	10	11	95	38	-8	-17	-37	-16	-55	-46	-43	-37
37	24	58	34	17	19	92	58	-19	-70	-68	-71	-42	-93	-10	-72
Варіант 39								Варіант 40							
88	72	88	68	4	83	76	7	-22	-54	-18	-1	-56	-9	-21	-25
35	7	70	61	50	94	3	94	-91	-71	-61	-55	-74	-58	-8	-7
80	3	26	40	20	75	98	87	-74	-45	-73	-20	-53	-29	-64	-5
40	13	11	59	8	84	84	5	-82	-23	-67	-76	-48	-40	-66	-85
82	86	33	27	81	74	19	87	-13	-90	-57	-22	-3	-70	-17	-16
80	77	51	98	52	90	52	47	-32	-19	-95	-40	-51	-26	-56	-36
77	75	56	87	98	74	52	3	-16	-13	-48	-57	-65	-96	-69	-89
12	56	75	72	15	21	3	97	-86	-92	-10	-13	-46	-3	-11	-40
Варіант 41								Варіант 42							
43	83	29	65	46	60	73	42	-61	-89	-74	-45	-95	-38	-30	-17
8	82	77	26	55	22	75	69	-27	-86	-93	-41	-86	-18	-70	-56
56	41	38	30	41	16	15	62	-78	-7	-62	-8	-32	-46	-44	-88
80	59	86	7	26	79	81	60	-21	-97	-24	-66	-63	-83	-83	-48
34	39	54	17	55	22	49	94	-19	-67	-14	-91	-4	-36	-11	-73
62	43	90	44	40	66	25	46	-46	-52	-15	-13	-20	-20	-41	-42
39	75	48	86	68	49	77	69	-68	-4	-82	-98	-52	-42	-87	-29
29	49	46	3	13	78	34	31	-6	-76	-25	-63	-73	-81	-14	-41

Закінчення рисунка 5.1

Таблиця 5.1 – Варіанти розподілу ймовірностей

Номер варіанта	p <sub>1</sub>	p <sub>2</sub>	p <sub>3</sub>	p <sub>4</sub>	p <sub>5</sub>	p <sub>6</sub>	p <sub>7</sub>	p <sub>8</sub>
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,19	0,06	0,10	0,08	0,27	0,01	0,26	0,03
2	0,05	0,06	0,01	0,03	0,22	0,22	0,21	0,20
3	0,09	0,14	0,14	0,08	0,15	0,11	0,18	0,10
4	0,18	0,14	0,14	0,21	0,06	0,01	0,10	0,15
5	0,32	0,13	0,22	0,05	0,13	0,03	0,08	0,04
6	0,11	0,08	0,05	0,19	0,03	0,13	0,21	0,21
7	0,23	0,12	0,02	0,09	0,24	0,16	0,13	0,02
8	0,05	0,05	0,08	0,05	0,18	0,23	0,19	0,17
9	0,22	0,11	0,08	0,17	0,13	0,16	0,08	0,06
10	0,12	0,10	0,23	0,04	0,04	0,20	0,02	0,24
11	0,18	0,04	0,05	0,07	0,03	0,08	0,21	0,34
12	0,06	0,26	0,21	0,19	0,08	0,06	0,01	0,13
13	0,10	0,10	0,19	0,13	0,19	0,05	0,19	0,05
14	0,13	0,07	0,06	0,16	0,14	0,08	0,24	0,12
15	0,19	0,16	0,18	0,03	0,01	0,29	0,05	0,09
16	0,16	0,13	0,19	0,03	0,11	0,17	0,08	0,11
17	0,08	0,16	0,11	0,11	0,15	0,10	0,12	0,18
18	0,03	0,02	0,16	0,26	0,18	0,04	0,02	0,28
19	0,22	0,09	0,04	0,13	0,02	0,15	0,22	0,12
20	0,02	0,10	0,24	0,24	0,22	0,09	0,06	0,04
21	0,15	0,16	0,01	0,00	0,19	0,16	0,06	0,26
22	0,12	0,22	0,17	0,00	0,24	0,09	0,14	0,03
23	0,11	0,08	0,02	0,14	0,16	0,17	0,15	0,17
24	0,18	0,01	0,15	0,19	0,13	0,17	0,15	0,03
25	0,18	0,15	0,03	0,13	0,13	0,22	0,16	0,01
26	0,05	0,20	0,14	0,20	0,09	0,07	0,11	0,14
27	0,06	0,17	0,08	0,16	0,16	0,09	0,12	0,16
28	0,18	0,02	0,08	0,21	0,07	0,19	0,07	0,18
29	0,07	0,13	0,08	0,18	0,20	0,05	0,20	0,09
30	0,22	0,12	0,01	0,23	0,24	0,12	0,05	0,01

Продовження таблиці 5.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
31	0,17	0,32	0,09	0,16	0,04	0,04	0,07	0,12
32	0,00	0,33	0,25	0,09	0,02	0,18	0,05	0,08
33	0,22	0,00	0,11	0,01	0,11	0,03	0,27	0,24
34	0,19	0,05	0,12	0,01	0,16	0,14	0,23	0,10
35	0,22	0,07	0,04	0,22	0,01	0,14	0,19	0,12
36	0,14	0,01	0,12	0,22	0,06	0,23	0,17	0,05
37	0,13	0,04	0,12	0,04	0,25	0,11	0,26	0,05
38	0,07	0,02	0,21	0,22	0,17	0,14	0,17	0,01
39	0,10	0,06	0,13	0,13	0,16	0,23	0,08	0,11
40	0,10	0,20	0,10	0,01	0,12	0,18	0,15	0,14
41	0,02	0,14	0,14	0,08	0,04	0,25	0,10	0,23
42	0,09	0,01	0,09	0,17	0,24	0,19	0,12	0,10

### Контрольні питання

1. Що являє собою прийняття рішення?
2. Вибір оптимального варіанта рішення для випадку, коли кожному варіанту рішення відповідає єдиний зовнішній стан.
3. Вибір оптимального варіанта рішення для випадку, коли кожному варіанту рішення, унаслідок різних зовнішніх умов, можуть відповідати різні результати рішень.
4. Мінімаксий критерій (ММ).
5. Умови, при яких використовується мінімаксий критерій.
6. Критерій Байєса-Лапласа (BL-критерій).
7. Умови, при яких використовується критерій Байєса-Лапласа.
8. Критерій Севіджа (S-критерій).
9. Умови, при яких використовується критерій Севіджа.

## 6 МЕТОДИ ПОШУКУ І ВИБОРУ РІШЕНЬ. КРИТЕРІЙ ГУРВІЦА. КРИТЕРІЙ ХОДЖА-ЛЕМАНА. КРИТЕРІЙ ГЕРМЕЙЄРА

Похідні критерії прийняття рішень: критерій Гурвіца (HW-критерій), критерій Ходжа-Лемана (HL-критерій), критерій Гермейєра (G-критерій).

Критерій Гурвіца (HW-критерій). Намагаючись зайняти найбільш урівноважену позицію, Гурвіц запропонував критерій, оцінна функція якого знаходиться десь між точками зору граничного оптимізму і крайнього песимізму.

$$z_{HW} = \max_i e_{ir} = \max_i \left( c \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij} \right), \quad (6.1)$$

де  $0 \leq c \leq 1$  – множник ваги.

Тоді

$$E_0 = \left\{ E_{i_0} \mid E_{i_0} \in E \wedge e_{i_0} = \max_i \left( c \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij} \right) \wedge 0 \leq c \leq 1 \right\}.$$

Правило вибору відповідно до HW-критерію формулюється в такий спосіб: матриця рішень  $\|e_{ij}\|$  доповнюється стовпцем, що містить середні зважені найменшого і найбільшого результатів для кожного рядка.

Вибираються ті варіанти  $E_{i_0}$ , у рядках яких є найбільші елементи  $e_{ir}$  цього стовпця.

Для  $c = 1$  критерій Гурвіца перетворюється в ММ-критерій, а для  $c = 0$  він перетворюється в критерій азартного гравця. Найчастіше множник ваги приймається в якості деякої «середньої» точки зору,  $c = 0,5$ .

При виборі HW-критерію пред'являються наступні вимоги:

- про ймовірності появи станів  $F_j$  нічого невідомо;
- реалізується лише мала кількість рішень;
- допускається деякий ризик.



Критерій Ходжа – Лемана (HL-критерій). Оцінна функція даного критерію має вигляд:

$$z_{HL} = \max_i e_{ir} = \max_i \left( v \sum_{j=1}^n e_{ij} p_j + (1-v) \min_j e_{ij} \right), 0 \leq v \leq 1. \quad (6.2)$$

Множина оптимальних рішень записується у виді:

$$E_0 = \left\{ E_{i_0} \mid E_{i_0} \in E \wedge e_{i_0} = \max_i \left[ v \sum_{j=1}^n e_{ij} p_j + (1-v) \min_j e_{ij} \right] \wedge 0 \leq v \leq 1 \right\}.$$

Параметр  $v$  виражає ступінь довіри до розподілу ймовірностей. Цей параметр практично не піддається оцінці, тобто вибір параметра  $v$  піддається впливу суб'єктивізму.

Критерій Гермейєра (G-критерій).

Даний критерій орієнтований на величини втрат, тобто на негативні значення усіх  $e_{ij}$ .

Як оцінна функція виступає вираження:

$$z_G = \max_i e_{ir} = \max_i \min_j e_{ij} p_j, \quad (6.3)$$

тоді

$$E_0 = \left\{ E_{i_0} \mid E_{i_0} \in E \wedge e_{i_0} = \max_i \min_j e_{ij} p_j \wedge e_{ij} < 0 \right\}.$$

Оскільки в господарських задачах переважно мають справу з витратами, умова  $e_{ij} < 0$  звичайна виконується.

У випадку ж, коли серед величин  $e_{ij}$  зустрічаються і позитивні значення, можна перейти до строго негативних значень за допомогою перетворення  $e_{ij} - a$ , при  $a > 0$ , де  $a = \max_{i,j} e_{ij} + 1$ . Вибір оптимального варіанта рішення істотно залежить від  $a$ .

Правило вибору відповідно до G-критерію формулюється в такий спосіб: матриця рішень  $\|e_{ij}\|$  доповнюється ще одним стовпцем, що містить у кожному рядку найменший добуток наявного у ній результату на ймовірність

відповідного стану  $F_j$ . Вибираються ті варіанти  $E_{i0}$ , у рядках яких знаходиться найбільше значення  $e_{ir}$  цього стовпця.

G-критерій узагальнює MM-критерій. У випадку рівномірного розподілу  $p_j = \frac{1}{n}, j = 1, 2, \dots, n$  критерії G і MM стають ідентичними.

Умови застосовності G-критерію:

- імовірності появи станів  $F_j$  відоме;
- рішення реалізовується один або багато разів;
- допускається деякий ризик.

Якщо функція розподілу відома не настільки явно, то при вживанні G-критерію, мають невиправдано великий ризик.

### **Порядок виконання роботи**

Дано матрицю рішень, розміром  $8 \times 8$ , результатами якої є або прибуток або збитки. Здійснити вибір оптимального варіанта рішення за допомогою критеріїв:

- 1) Гурвіца;
- 2) Ходжа – Лемана;
- 3) Гермейера.

Матриця рішень і розподіл ймовірностей появи зовнішніх станів вибираються по номері в списку групи.

Варіанти матриці рішень і розподіл ймовірностей появи зовнішніх станів зазначені відповідно на рисунку 5.1 і в таблиці 5.1.

### **Контрольні питання**

1. Критерій Гурвіца (HW-критерій).
2. Вимоги, які висуваються, при виборі критерію Гурвіца (HW-критерію).
3. Критерій Ходжа-Лемана (HL-критерій).
4. Критерій Гермейера (G-критерій).
5. Умови застосування критерію Гермейера (G-критерію).

## 7 КЛАСИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ. СТРАТЕГІЯ НАЙБЛИЖЧОГО СУСІДА. СТРАТЕГІЯ ДАЛЕКОГО СУСІДА

Основна мета кластерного аналізу – виділити у вихідних багатомірних даних такі однорідні підмножини, щоб об'єкти усередині групи були схожі один на одного, а об'єкти з різних груп - не схожі. Під «подібністю» розуміється близькість об'єктів у багатомірному просторі ознак, і тоді задача зводиться до виділення в цьому просторі природних скупчень (кластерів) об'єктів, що вважаються однорідними групами.

Прямий алгоритм класифікації  $n$  об'єктів. Нехай задана матриця  $A_{n \times m}$ , де  $n$  число об'єктів,  $m$  число ознак, що описують кожний об'єкт;  $a_{ij}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$  - елемент матриці  $A_{n \times m}$ , що визначає значення  $j$ -ї ознаки для  $i$ -го об'єкта;  $a_{ij} \geq 0$ .

Крок 1. На цьому кроці кожний об'єкт вважається окремим кластером, тобто на початку маємо  $n$  кластерів. Обчислимо усі відстані  $d_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$ . Складемо матрицю  $G$  розміром  $n \times n$  відстаней між усіма  $n$  об'єктами, тобто

$$G = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{n-1,1} & d_{n-1,2} & \dots & d_{n-1,n} \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Крок 2. У матриці  $G$  відшукаємо мінімальну відстань  $d_{ij}, i \neq j$ , (це значить, що  $i$ -й і  $j$ -й об'єкти мають максимальну міру подібності) і складаємо з них новий  $(n+1)$ -й кластер. Позначимо цей кластер через  $h = (i \cup j)$ . Якщо є декілька мінімальних  $d_{ij}$ , то вибирають який-небудь із них.

Крок 3. Обчислимо відстані між новим кластером  $h$  і іншими об'єктами, що ще не класифіковані, за формулою:

$$d_{kh} = \alpha_1 d_{ik} + \alpha_2 d_{jk} + \beta d_{ij} + \gamma |d_{ik} - d_{jk}| \quad (7.1)$$

$$k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n,$$

де  $d_{ik}$  – відстань між  $k$ -м об'єктом і  $i$ -м об'єктом, що входить у кластер  $h$ ;  
 $d_{jk}$  – відстань між  $k$ -м об'єктом і  $j$ -м об'єктом, що входить у кластер  $h$ ;  
 $d_{ij}$  – відстань, знайдена на кроці 2.

По формулі (7.1) визначається не відстань між окремими об'єктами, а між кластером і кластером або між кластером і об'єктом.

Параметри  $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma$  визначають стратегії об'єднання кластерів у нові кластери.

Крок 4. Побудуємо нову матрицю відстаней  $G_1$  з матриці  $G$  шляхом додавання  $(n+1)$ -го рядка і  $(n+1)$ -го стовпця з елементами  $d_{kh}, k=1,2,\dots, i-1, i+1,\dots, j-1, j+1,\dots, n$ , потім  $i$ -й і  $j$ -й рядки, а також  $i$ -й і  $j$ -й стовпці викреслюються. Для матриці  $G_1$  шукаємо знову мінімальну відстань  $d_{ij}, i \neq j$  і формуємо наступний  $(n+2)$ -і кластер. Далі, якщо цей кластер має номер  $(2n-1)$ , то процедура формування кластерів закінчується й переходимо до кроку 5, якщо номер кластера не дорівнює  $(2n-1)$ , те переходимо до кроку 3. На кожному кроці запам'ятовуємо мінімальну величину  $i$  до якого кластера вона відноситься.

Крок 5. Будуємо так названу дендрограму (графік покрокової класифікації об'єктів), де по осі абсцис відкладаємо номери об'єктів (кластерів), а по осі ординат рівень об'єднання або значення мінімальних  $d_{ij}$ . Кінець алгоритму.

Стратегія найближчого сусіда. Відстань між двома кластерами визначається як відстань між двома найближчими об'єктами в цих кластерах:

$$d_{kh} = \min(d_{ik}, d_{jk}) \quad (7.2)$$

Параметри стратегії:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, \beta = 0, \gamma = -0.5$ .

Стратегія є монотонною, тобто від кроку до кроку значення максимальної міри подібності не зменшується.

Дана стратегія стійка до будь-яких перетворень даних при будь-якому упорядкуванню об'єктів у матриці  $A$ . Головний недолік стратегії найближчого

сусіда в тім, що вона приводить до появи «ланцюжків» (появі великих по довжині кластерів).

Стратегія далекого сусіда. У цій стратегії відстань між двома кластерами визначається як відстань між двома самими віддаленими представниками цих кластерів:

$$d_{kh} = \max(d_{ik}, d_{jk}) \quad (7.3)$$

Параметри стратегії:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, \beta = 0, \gamma = 0.5$

Головний недолік даної стратегії полягає в тому, що на перших кроках утворюються кластери з несхожих об'єктів.

### Порядок виконання роботи

Дано матрицю ознак, розміром  $8 \times 2$ . Класифікувати об'єкти в подібні групи, використовуючи як метрику Евклідову відстань і стратегію об'єднання:

- 1) найближчого сусіда;
- 2) далекого сусіда.

Матриця ознак вибирається за номером у списку групи.

Варіанти зазначені на рисунку 5.1. З вихідної матриці як матрицю ознак вибирають перші два стовпці, при цьому знак числа не враховується.

### Контрольні питання

1. Основна мета кластерного аналізу.
2. Що розуміється під «подібністю» об'єктів?
3. Нормування показників (ознак) об'єктів.
4. Найбільш розповсюджені способи нормування ознак.
5. Яка величина може називатися відстанню (метрикою) між об'єктами в просторі ознак.
6. Лінійна відстань (манхетеньська відстань або відстань міських кварталів).
7. Евклідова відстань.
8. Узагальнена відстань Мінковського.
9. Властивість кластерів: щільність.
10. Властивість кластерів: дисперсія.

11. Властивість кластерів: розмір.
12. Властивість кластерів: форма.
13. Властивість кластерів: віддільність.
14. Визначення кластерів згідно Еверіту.
15. Прямий алгоритм класифікації n об'єктів.
16. Стратегія найближчого сусіда.
17. Стратегія далекого сусіда.

## **8 КЛАСИФІКАЦІЯ ОБ'ЄКТІВ. СТРАТЕГІЯ СЕРЕДНЬОГО ЗВ'ЯЗКУ ЩО, НЕ ЗВАЖУЄТЬСЯ. ГНУЧКА СТРАТЕГІЯ. СТРАТЕГІЯ АГЛОМЕРАТИВНОГО ОБ'ЄДНАННЯ**

Стратегія середнього зв'язку, що не зважується. Запропонована Міченером і Сокелом у 1958 році як «засіб боротьби» із крайностями стратегій найближчого й далекого сусіда. Найчастіше використовується варіант, коли обчислюють середню арифметичну подібність між об'єктами кластера й кандидатом на включення. Стратегія монотонна.

$$d_{kh} = \alpha_1 d_{ik} + \alpha_2 d_{jk} + \beta d_{ij} + \gamma |d_{ik} - d_{jk}| \quad (8.1)$$

$$k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n.$$

Параметри стратегії у формулі (1) наступні  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, \beta = \gamma = 0$ .

Тобто

$$d_{kh} = 0.5 d_{ik} + 0.5 d_{jk}.$$

Дана стратегія вибудовує кластери, що у просторі ознак утворюють гіперсфери.

Гнучка стратегія:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta = 1, \alpha_1 = \alpha_2, \beta < 1, \gamma = 0$ . Стратегія монотонна, її властивості цілком залежать від  $\beta$ . Якщо  $\beta > 0$ , то стратегія стискає простір і навпаки розтягує простір при  $\beta < 0$ . На практиці, звичайно, використовують значення  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.625, \beta = -0.25, \gamma = 0$ .

$$d_{kh} = 0.625 d_{ik} + 0.625 d_{jk} - 0.25 d_{ij}$$

Стратегія дає кластери у виді гіперсфер.

Стратегія агломеративного об'єднання:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta = \gamma = 0$ .

$$d_{kh} = d_{ik} + d_{jk}$$

Усі перераховані стратегії належать до класу монотонних стратегій з параметрами  $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma$ , для яких справедливі нерівності:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta \geq 1, \alpha_1 + \alpha_2 \geq 0, \gamma \geq -\min(\alpha_1, \alpha_2)$ .

### **Порядок виконання роботи**

Дано матрицю ознак, розміром  $8 \times 2$ . Класифікувати об'єкти в подібні групи, використовуючи як метрику **Евклідова відстань** і стратегію об'єднання:

- 1) стратегія середнього незваженого зв'язку;
- 2) гнучка стратегія;
- 3) стратегія агломеративного об'єднання.

Матриця ознак вибирається за номером у списку групи.

Варіанти зазначені на рисунку 5.1. З вихідної матриці як матрицю ознак вибирають перші два стовпці, при цьому знак числа не враховується.

### **Контрольні питання**

1. Стратегія середнього незваженого зв'язку.
2. Гнучка стратегія.
3. Стратегія агломеративного об'єднання.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Спицнадель В. Н. Основы системного анализа: учеб. пособие / В. Н. Спицнадель. – СПб. : Изд. дом «Бизнес-пресса», 2000. – 326 с.
2. Романов В. Н. Системный анализ для инженеров / В. Н. Романов. – СПб. : СПб. гос. университет, 1998 – 200 с.
3. Саати Т. Аналитическое планирование. Организация систем / Т. Саати, К. Кернс. – М.: Радио и связь, 1991. – 150 с.
4. Перегудов Ф. И. Введение в системный анализ / Ф. И. Перегудов, Ф. П. Тарасенко. – М. : Высш. школа, 1989. – 205 с.
5. Мандель М. Д. Кластерный анализ / М. Д. Мандель. – М. : Финансы и статистика, 1988. – 157 с.
6. Месарович М. Общая теория систем: Математические основы / М. Месарович, И. Такахара. – М. : Мир, 1978. – 343 с.
7. Романов В. Н. Основы системного анализа. Методические указания к практическим занятиям / В. Н. Романов. – СПб. : СЗПИ, 2000. – 78 с.
8. Примаков Д. О. Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу «Теорія прийняття рішень в задачах контролю та управління» для студентів денної форми навчання спеціальностей «Прикладна математика», «Системний аналіз та управління», «Інформатика» / Д. О. Примаков, Л. Ю. Артюх. – Харків : ХТУРЕ, 1999 – 48 с.



*Виробничо-практичне видання*

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ**

до практичних занять, розрахунково-графічної  
та самостійної робіт

із дисципліни

**«СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ»**

*(для студентів 2 курсу денної форми навчання  
освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»  
126 – Інформаційні системи та технології)*

Укладачі : **ФЕДОРОВ** Микола Вікторович,  
**ХРЕНОВ** Олександр Михайлович

Відповідальний за випуск *М. В. Булаєнко*  
*За авторською редакцію*

Комп'ютерний набір *М. В. Федоров*

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2017, поз. 437 М

---

Підп. до друку 06.02.2018      Формат 60 × 84/16  
Друк. на ризографі. Ум. друк. арк. 2,0  
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет  
міського господарства ім. О.М. Бекетова,  
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.  
Електронна адреса : [rectorat@kname.edu.ua](mailto:rectorat@kname.edu.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК № 5328 від 11.04.2017.