

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківська національна академія міського господарства

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання самостійної роботи та розрахунково-графічного завдання

**„Розрахунок статично невизначної рами
МЕТОДОМ СИЛ”**
з курсу будівельної механіки

(для студентів 3 курсу денної форми навчання
спец. 6.092100 - «Промислове і цивільне будівництво»
і 6.092100 - “Охорона праці в будівництві”)

Харків – ХНАМГ – 2008

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи та розрахунково-графічного завдання “Розрахунок статично невизначної рами методом сил” з курсу будівельної механіки (для студентів 3 курсу денної форми навчання спец. 6.092100 - «Промислове і цивільне будівництво» і 6.092100 - “Охорона праці в будівництві”). Укл. Засядько М.А., Чупринін О.О. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 31 с.

Укладачі: М.А. Засядько, О.О. Чупринін

Рецензент: завідувач кафедри будівельних конструкцій
д.т.н., проф. Г.А. Молодченко

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол № 6 від 25.03.2008.

1. ВСТУП

Ці методичні вказівки призначені для самостійної роботи студентів при підготовці до практичних занять і виконання розрахунково-графічного завдання. Вони містять теоретичні положення, вихідні дані для завдання та приклад його виконання. Призначені для студентів денної форми навчання.

Рама являє собою систему стержнів, з'єднаних між собою переважно жорстко. Розрахункову схему у вигляді плоскої рами звичайно обирають при розрахунку поперечника промислової або цивільної споруди.

Результатом розрахунку рами є епюри внутрішніх зусиль: згинаючих моментів – M , поперечних сил – Q і поздовжніх сил – N . Для розрахунку статично невизначної рами у цій роботі застосовується метод сил. Назва методу вказує на те, що за основні невідомі в ньому приймаються зусилля.

Перш ніж приступити до виконання завдання, слід ознайомитися з теоретичним матеріалом, викладеним у главах 1, 2 [1], главі 7 [2], і в п. 2 цих вказівок. Крім того, слід розібрати приклади розрахунку 2.1, 2.5, 2.6, 2.7, наведені в [3].

2. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Розглянемо загальну послідовність розрахунку статично невизначної рами методом сил.

1. *Визначення ступені статичної невизначності рами* виконують за формулою

$$n = 3K - Ш + C_0 - 3, \quad (1)$$

де K - число замкнутих контурів, утворених стержнями рами;

$Ш$ - кількість простих шарнірів, що з'єднують стержні рами (нагадаємо, що складний шарнір при підрахунку замінюється еквівалентною кількістю простих шарнірів: $Ш = C - 1$, де C - кількість стержнів, що з'єднуються цим складним шарніром);

C_0 - число опорних в'язей.

Нагадаємо, що для системи без опор

$$n = 3K - Ш, \quad (1,a)$$

2. *Вибір основної системи.*

Основна система методу сил утворюється шляхом відкидання зайвих в'язей і заміни їх зусиллями. Ці зусилля позначаються X_1, X_2, \dots, X_n і називаються *зайвими невідомими*.


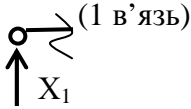
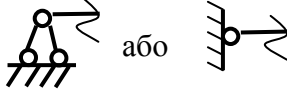
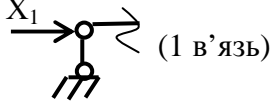
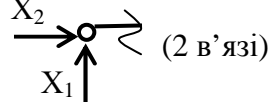


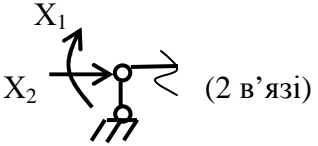
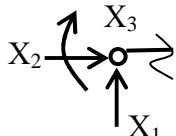
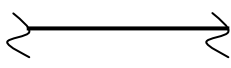
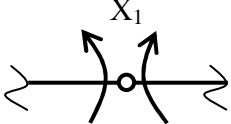
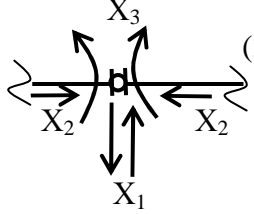
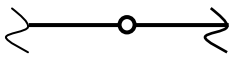
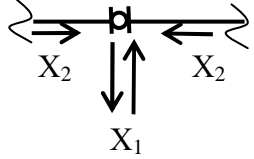
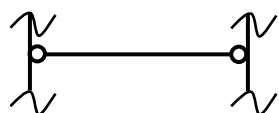
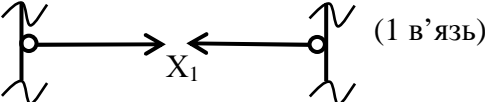
Можливі варіанти усунення зайвих в'язей наведені в табл. 1.

Нагадаємо, що основна система, одержана після відкидання зайвих в'язей, повинна бути геометрично незмінюваною.

Для симетричної рами слід обирати симетричну основну систему. При симетричному або косиметричному навантаженні необхідно застосовувати

групування невідомих і враховувати, що деякі невідомі повинні заздалегідь дорівнювати нулю.

Таблиця 1

Задана система	Основні варіанти відкидання в'язей та зайві невідомі (в дужках наведено кількість відкинутих в'язей)
<p>Шарнірно рухома опора</p> 	 (1 в'язь)
<p>Шарнірно нерухома опора</p> 	 (1 в'язь)  (2 в'язі)
<p>Защемлення</p> 	 (1 в'язь)  (2 в'язі)  (3 в'язі)
<p>Стержень загального виду</p> 	 (1 в'язь)  (3 в'язі)
<p>Стержень з проміжним шарніром</p> 	 (2 в'язі)
<p>Ідеальний стержень</p> 	 (1 в'язь)

$$\{\Delta\} = \begin{bmatrix} \Delta_{1f} \\ \Delta_{2f} \\ \dots \\ \Delta_{if} \\ \dots \\ \Delta_{nf} \end{bmatrix} - \text{вектор вільних членів (вектор вантажних переміщень);}$$

$$\{0\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} - \text{нульовий вектор.}$$

4. Побудова епюр згинаючих моментів в основній системі.

Розглядаючи стан основної системи під дією кожного окремого невідомого $X_i = 1$, будують n епюр згинаючих моментів \bar{M}_i - одиничних епюр. Окремо виконують розрахунок основної системи на дію заданого навантаження і будують епюру M_f - вантажну епюру.

5. Визначення коефіцієнтів і вільних членів канонічних рівнянь.

Коефіцієнтами канонічних рівнянь є одиничні переміщення. Зокрема, δ_{ik} - це переміщення в напрямку i -ї зайвої в'язі (в напрямку X_i) від дії зайвого невідомого $X_k = 1$.

Одиничні переміщення визначаємо методом Мора за формулою

$$\delta_{ik} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_i \bar{M}_k dx; \quad i=1, 2, \dots, n; \quad k=1, 2, \dots, n \quad (4)$$

шляхом перемноження епюр \bar{M}_i та \bar{M}_k із застосуванням правила Верещагіна або формули Сімпсона.

Вантажні переміщення визначаємо аналогічно методом Мора:

$$\Delta_{if} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_i M_f dx; \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5)$$

шляхом перемноження епюр \bar{M}_i і M_f .

Нагадаємо, що перемноження епюр виконують по ділянках прямих стержнів постійної жорсткості.

За правилом Верещагіна результат перемноження двох епюр M_1 і M_2 на ділянці дорівнює добутку площі ω , криволінійної епюри на розташовану під її центром ваги ординату y_0 лінійної епюри (див. рис. 1): $\int \bar{M}_i M_f dx = \omega \cdot y_0$. Епюра, на якій знаходиться ω повинна бути такою, що її площа і центр ваги відомі, а епюра, на якій береться ордината y_0 , обов'язково повинна бути лінійною.

Результат перемноження буде додатним, якщо площа ω і ордината y_0 розташовані по один бік стержня (одного знаку).

За формулою Сімпсона обидві епюри, що перемножуються, повинні бути або лінійними, або одна з них лінійна, а інша – квадратна парабола. Тоді за рис. 2:

$$\int M_1 M_2 dx = \frac{\ell}{6} (M_1^H M_2^H + 4 \cdot M_1^C M_2^C + M_1^K M_2^K). \quad (6)$$

Тут ординати епюр беруть з урахуванням їхніх знаків.

З формули (4) випливає, що головні переміщення (такі, що розташовані на головній діагоналі матриці коефіцієнтів $\{D\}$) завжди додатні:

$$\delta_{ik} \geq 0 \quad \text{при } i=k.$$

Інші – побічні – переміщення можуть бути як додатними, так і від'ємними, а отже й нульовими.

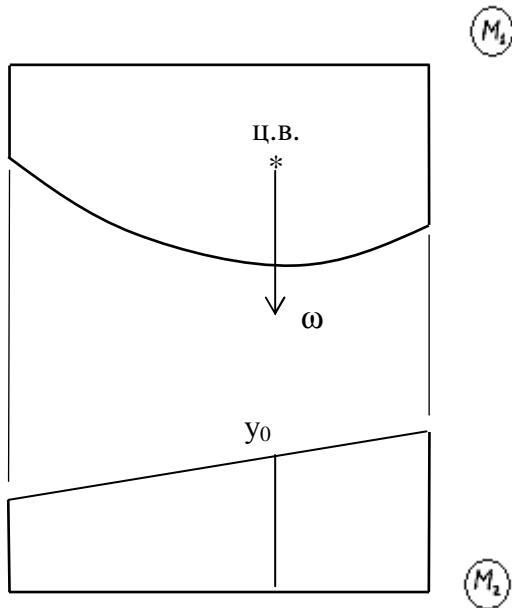


Рис. 1

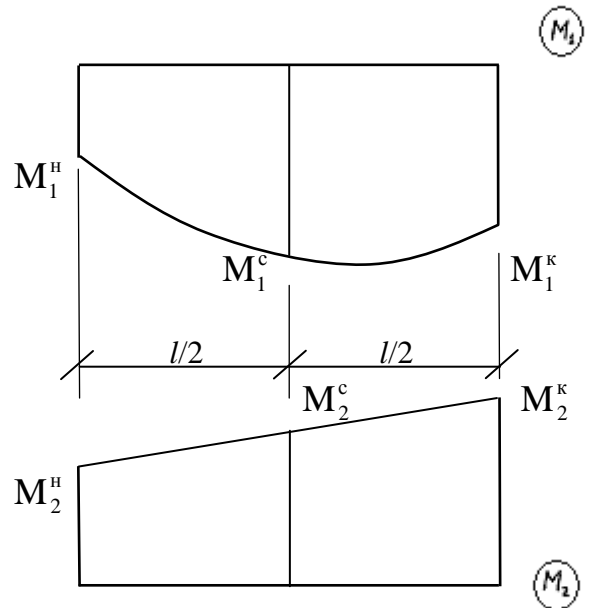


Рис. 2

Формула Сімпсона дозволяє записати визначення переміщень у матричній формі:

$$\{D\} = \{\bar{M}\}^T \{L\} \{M\}; \quad (7)$$

$$\{\Delta\} = \{\bar{M}\}^T \{L\} \{M_f\}, \quad (8)$$

де:

$$\{\bar{M}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{M}_{11}\} & \{\bar{M}_{12}\} & \dots & \{\bar{M}_{1i}\} & \dots & \{\bar{M}_{1n}\} \\ \{\bar{M}_{21}\} & \{\bar{M}_{22}\} & \dots & \{\bar{M}_{2i}\} & \dots & \{\bar{M}_{2n}\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{\bar{M}_{j1}\} & \{\bar{M}_{j2}\} & \dots & \{\bar{M}_{ji}\} & \dots & \{\bar{M}_{jn}\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{\bar{M}_{m1}\} & \{\bar{M}_{m2}\} & \dots & \{\bar{M}_{mi}\} & \dots & \{\bar{M}_{mn}\} \end{bmatrix} - \text{блочна матриця}$$

одиничних моментів, елементами якої є вектори $\{\bar{M}_{ji}\} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{ji}^H \\ \bar{M}_{ji}^C \\ \bar{M}_{ji}^K \end{bmatrix}$, що містять

значення згинаючих моментів на початку (\bar{M}_{ji}^H) , у середині (\bar{M}_{ji}^C) і в кінці (\bar{M}_{ji}^H)

ділянки j епюри згинаючих моментів \bar{M}_i ;

$$\{M_f\} = \begin{bmatrix} \{M_{1f}\} \\ \{M_{2f}\} \\ \dots \\ \{M_{jf}\} \\ \dots \\ \{M_{mf}\} \end{bmatrix} - \text{балочний вектор вантажних моментів, елементами якого}$$

є вектори $\{\bar{M}_{jf}\} = \begin{bmatrix} M_{jf}^H \\ M_{jf}^C \\ M_{jf}^K \end{bmatrix}$, що містять значення згинаючих моментів на початку

(\bar{M}_{jf}^H) , у середині (\bar{M}_{jf}^C) і в кінці (\bar{M}_{jf}^H) ділянки j епюри згинаючих моментів

M_f ;

$$\{L\} = \begin{bmatrix} \{L_1\} & \{0\} & \dots & \{0\} & \dots & \{0\} \\ \{0\} & \{L_2\} & \dots & \{0\} & \dots & \{0\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{0\} & \{0\} & \dots & \{L_j\} & \dots & \{0\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{0\} & \{0\} & \dots & \{0\} & \dots & \{L_m\} \end{bmatrix} - \text{діагональна блочна матриця}$$

піддатливості, елементами якої є діагональні блочні матриці

$$\{L_j\} = \begin{bmatrix} \frac{\ell_j}{EI_j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\ell_j}{EI_j} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\ell_j}{EI_j} \end{bmatrix} \text{ піддатливості ділянки } j \text{ рами та } \{0\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} -$$

нульові матриці;

ℓ_j - довжина ділянки j ;

EI_j - жорсткість стержня на ділянці j ;

m – кількість ділянок рами;

індекс “Т” біля матриці означає операцію транспонування матриці – заміну її стовпчиків на рядки й навпаки.

6. Перевірка одиничних та вантажних переміщень.

При ручному розрахунку така перевірка є бажаною. Побудувавши допоміжну, так звану сумарну одиничну епюру моментів

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_i + \dots + \bar{M}_n,$$

перевіряють виконання таких співвідношень:

$$\delta_{is} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_i \bar{M}_s dx = \sum_{i=1}^n \delta_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9)$$

$$\Delta_{sf} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_s M_f dx = \sum_{i=1}^n \Delta_{if}. \quad (10)$$

Співвідношення (9) означає, що результат перемноження i -ї одиничної епюри моментів \bar{M}_i з сумарною одиничною епюрою \bar{M}_s повинен дорівнювати сумі коефіцієнтів i -го канонічного рівняння. Таку перевірку необхідно виконати для кожного рівняння (для кожної одиничної епюри).

Аналогічно, за (10) результат перемноження сумарної одиничної епюри моментів \bar{M}_s з вантажною епюрою M_f повинен дорівнювати сумі всіх вільних членів канонічних рівнянь.

7. Розв’язання системи рівнянь.

Підставивши у канонічні рівняння (2) значення коефіцієнтів δ_{ik} і вільних членів Δ_{if} , розв’язуємо їх будь-яким відомим способом. Наприклад, розв’язування матричного рівняння (3) має такий вигляд:

$$\{X\} = -\{D\}^{-1}\{\Delta\}, \quad (11)$$

де позначення “-1” означає операцію обертання матриці.

При ручному розв’язанні результат бажано перевірити підстановкою знайдених значень X_i у вихідні рівняння.

8. Побудова остаточної епюри згинаючих моментів.

Звичайно значення остаточної згинаючих моментів знаходять із застосуванням принципу незалежності дії сил:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_i X_i + \dots + \bar{M}_n X_n + \dots + M_f. \quad (12)$$

При ручному розрахунку попередньо будують так звані “виправлені” епюри моментів M_i . Їх одержують помноженням одиничних епюр на відповідні значення зайвих невідомих:

$$M_i = \bar{M}_i \cdot X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Далі підсумовують виправлені епюри M_i з вантажною епюрою M_f .

9. Перевірка остаточної епюри згинаючих моментів.

Статична перевірка епюри M являє собою перевірку рівноваги її вузлів. Ця перевірка є допоміжною, оскільки статичні рівняння повинні перевірятися при побудові епюр згинаючих моментів в основній системі.

Кінематичну перевірку звичайно виконують в універсальному варіанті:

$$\Delta_s = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_s M dx = 0. \quad (14)$$

Тобто результат перемноження остаточної M і сумарної одиничної \bar{M}_s епюр згинаючих моментів повинен дорівнювати нулю.

10. Побудова епюри поперечних сил.

Найбільш зручно обчислювати значення поперечних сил на ділянках стержнів за формулою

$$Q_{\begin{matrix} \text{лів} \\ \text{прав} \end{matrix}} = \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лів}}}{\ell} \pm \frac{q\ell}{2}, \quad (15)$$

де $M_{\text{прав}}$, $M_{\text{лів}}$ - значення згинаючих моментів відповідно на лівому й правому кінцях ділянки;

ℓ - довжина ділянки.

Нагадаємо: 1) значення моментів беруть з урахуванням їхніх знаків; 2) стержень орієнтується так, як він був зорієнтований при визначенні знаків моментів (додатні моменти розташовані знизу); 3) знаки “+” і “-” перед другим додатком відповідають розташуванням індексів “лів” і “прав” поперечної сили для розподіленого навантаження, спрямованого донизу.

11. Побудова епюри поздовжніх сил.

Для визначення поздовжніх сил зручно застосовувати спосіб вирізання вузлів. При цьому слід пам’ятати, що на кінцях кожного стержня у вузлі діють як поздовжні, так і поперечні сили. Поперечні сили прикладають так, щоб додатні сили намагалися обертати вузол за годинниковою стрілкою, а від’ємні – проти.

3. ВИХІДНІ ДАНІ Й ЗАВДАННЯ ДО РОБОТИ

Вихідні дані беруть з табл. 2 і рис. 3 за вказівкою викладача.

Таблиця 2

№ п/п	l , м	h , м	Навантаження			Співвідношення жорсткостей ригелів і стояків $EI_p : EI_c$
			F , кН	M , кН·м	q , кН/м	
1	3,6	3	30	30	30	1:1
2	3,6	4	20	30	30	2:1
3	4,8	4	30	20	30	3:1
4	4,8	5	30	30	20	4:1
5	6	5	20	20	20	3:2
6	6	6	10	20	20	1:1
7	7,2	6	20	10	20	2:1
8	7,2	7	20	20	10	3:1
9	8,4	7	10	10	10	4:1
10	8,4	8	5	10	10	3:2
11	9,6	8	10	5	10	1:1
12	9,6	9	10	10	5	2:1
13	10,8	9	5	5	5	3:1
14	10,8	10	2	5	5	4:1
15	12	10	5	2	5	3:2
16	12	8	5	5	2	1:1

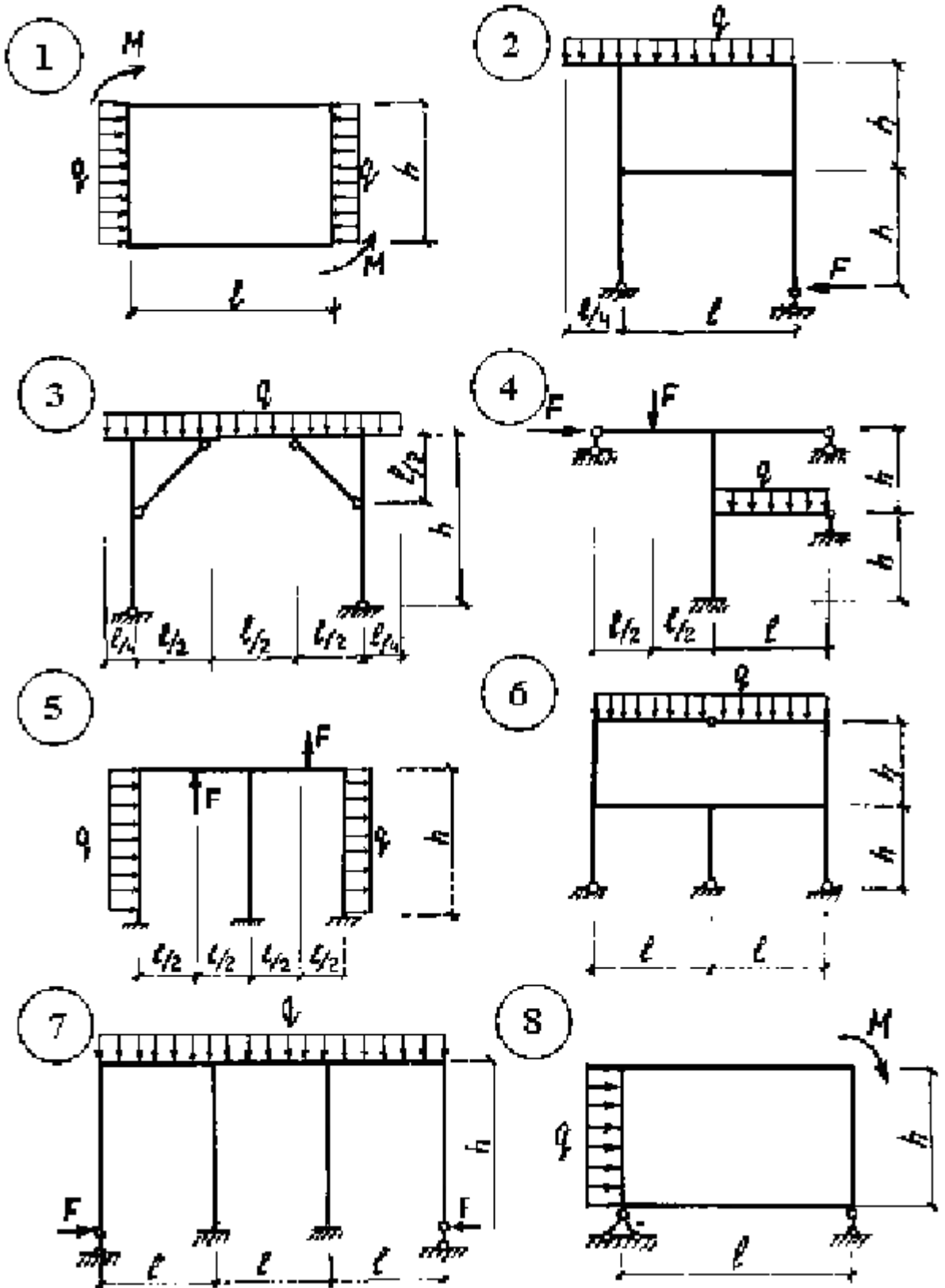


Рис. 3

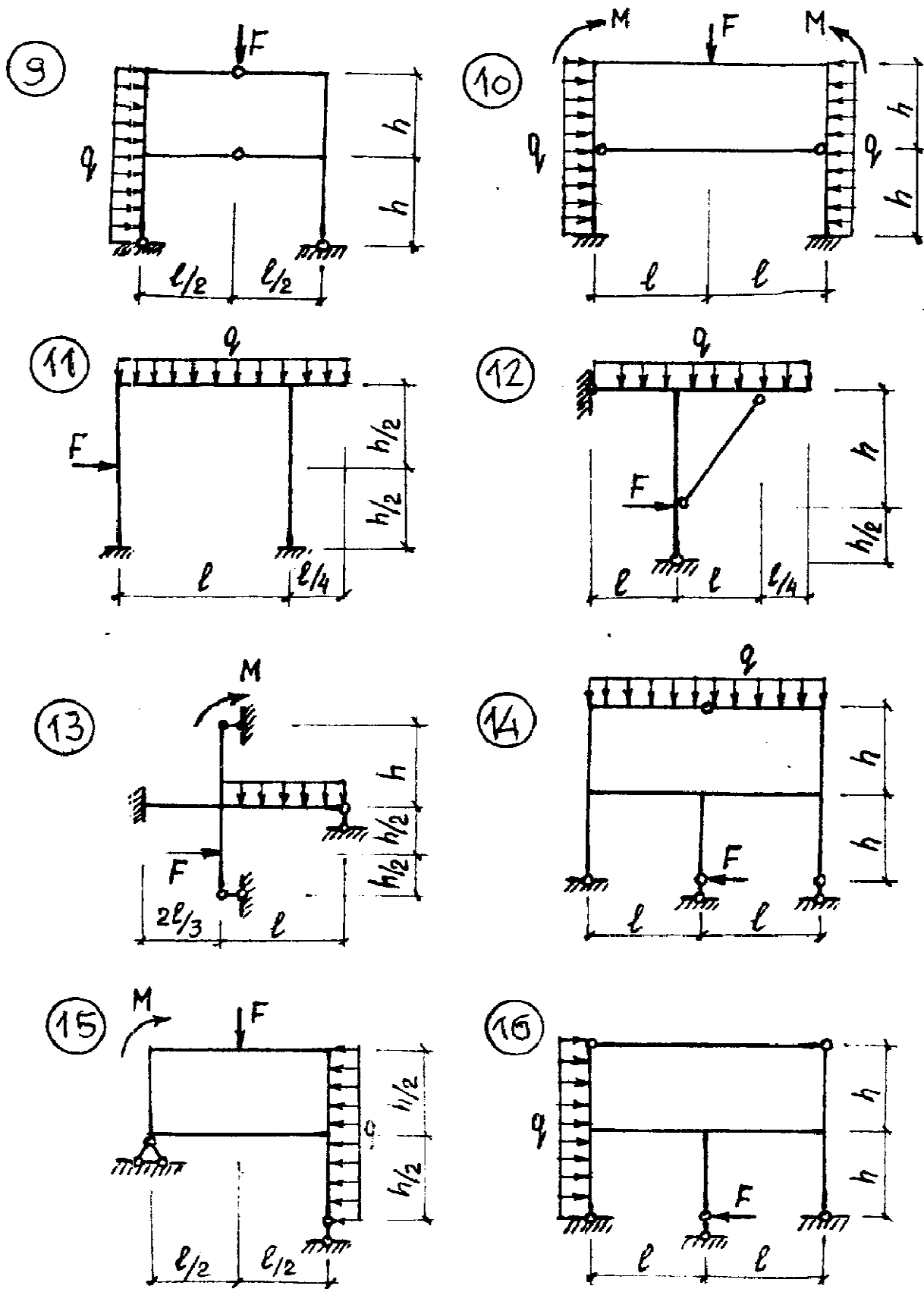


Рис. 3 (закінчення)

Для заданої рами необхідно:

- обчислити ступень статичної невизначності;
- обрати основну систему з урахуванням симетрії, якщо вона є;
- записати канонічні рівняння;
- побудувати одиничні й вантажну епюри згинаючих моментів в основній системі;
- поділити раму на ділянки відповідно до заданого навантаження та обрати послідовність обходу рами для запису вихідних матриць;
- записати матрицю $\{\overline{M}\}$ одиничних моментів і вектор $\{M_f\}$ вантажних моментів;
- виконати обчислення остаточних згинаючих моментів M на комп'ютері;
- за результатами обчислень на комп'ютері побудувати остаточну епюру M ;
- побудувати епюри поперечних сил Q ;
- побудувати епюри поздовжніх сил N .

Завдання оформляють на аркуші формату А2. Рисунки повинні бути виконані чітко, в масштабі, записи – акуратно.

4. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ РГЗ

За розрахунково-графічне завдання (РГЗ) студент отримує максимальну оцінку, якщо воно виконане у відведений строк (3 тижні з моменту видачі завдання), з використанням комп'ютерної техніки, акуратно оформлене, містить аналіз отриманих результатів.

У разі виконання РГЗ без використання комп'ютера або затримки виконання на 2 тижня (з використанням комп'ютера) студент отримує 90% від максимальної оцінки. При виконанні РГЗ із затримкою більш ніж на 2 тижні

студент отримує 80 % від максимальної оцінки, із затримкою більше місяця - 60 % від максимальної оцінки.

5. ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ

Розрахувати методом сил раму, наведену на рис. 4, а.

Розв'язання.

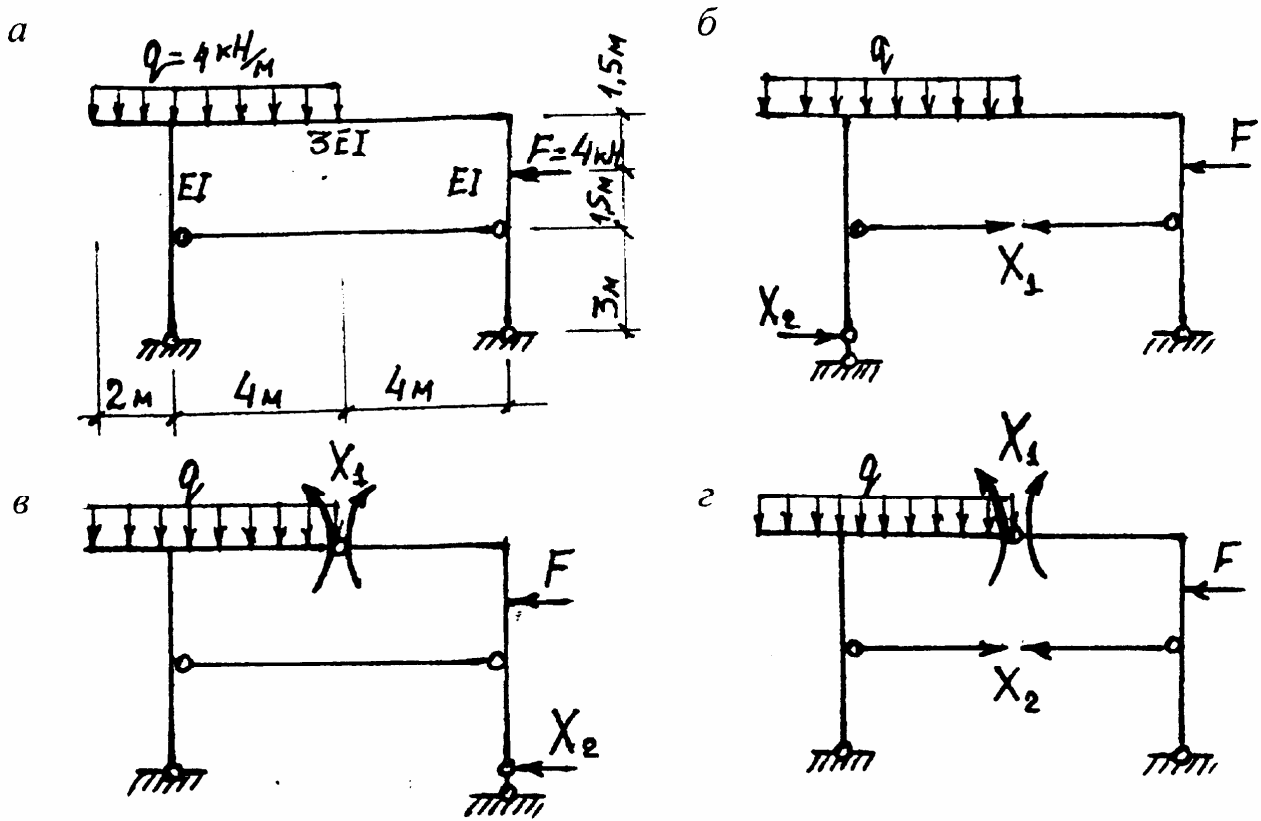


Рис. 4

Ступінь статичної невизначеності знаходимо за (1):

$$n = 3K - III + C_0 - 3 = 3 \cdot 1 - 2 + 4 - 3 = 2.$$

Рама двічі статично невизначна (має дві зайві в'язі).

Вибір основної системи в цьому прикладі виконуємою, порівнюючи три варіанти (рис. 4, б, в, г), що принципово відрізняються один від одного. При

відкиданні зайвих в'язей ($n=2$) використовуємо варіанти, наведені в табл. 1. Кожен з варіантів основної системи задовольняє умові геометричної незмінюваності.

Для розрахунку обираємо основну систему, наведену на рис. 4, б. Ця система найбільш зручна для розрахунку, зокрема не містить замкнутих тришарнірних контурів (як на рис. 4, в), і не являє собою тришарнірну раму (як на рис. 4, г).

Канонічні рівняння для $n=2$ запишемо згідно з (2) так:

$$\begin{aligned}\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1f} &= 0, \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2f} &= 0.\end{aligned}$$

Побудова епюр згинаючих моментів в основній системі.

Детально розглянемо розрахунок основної системи на дію заданого навантаження (рис. 5, а).

Визначаємо опорні реакції від навантаження:

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot 8 - (q \cdot 6) \cdot 7 - F \cdot 4,5 = 0;$$

$$R_A = \frac{q \cdot 42 + F \cdot 4,5}{8} = \frac{4 \cdot 42 + 4 \cdot 4,5}{8} = 23,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; (q \cdot 6) \cdot 1 - F \cdot 4,5 - V_B \cdot 8 = 0;$$

$$V_B = \frac{q \cdot 6 - F \cdot 4,5}{8} = \frac{4 \cdot 6 - 4 \cdot 4,5}{8} = 0,75 \text{ кН};$$

$$\sum x = 0; H_B - F = 0; H_B = F = 4 \text{ кН}.$$

Перевіряємо реакції:

$$\sum y = R_A + V_B - q \cdot 6 = 23,25 + 0,75 - 4 \cdot 6 = 0.$$

Розбиваємо стержні рами на ділянки так, щоб їхніми межами були: вузли рами (точки з'єднання стержнів), точки прикладання зосереджених сил і зосереджених моментів, точки на кінцях розподіленого навантаження (у загальному випадку – точки зміни інтенсивності розподіленого навантаження). У цьому прикладі, з урахуванням того, що затяжка працює на розтяг-стиск, маємо 8 ділянок (I...VIII на рис. 5, а).

Почнемо з ділянки I. Вона являє собою консоль, завантажену рівномірно розподіленим навантаженням. Еюра моментів тут буде стандартною зі значенням згинального моменту в перерізі біля вузла

$M = -\frac{q \cdot \ell^2}{2} = -\frac{4 \cdot 2^2}{2} = -8 \text{ кНм}$. На вільному кінці консолі еюра моментів нульова і дотична до осі стержня.

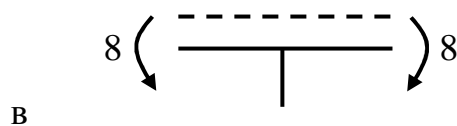
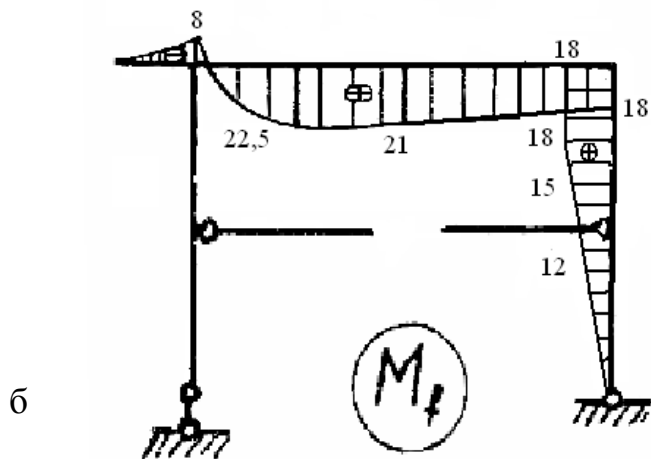
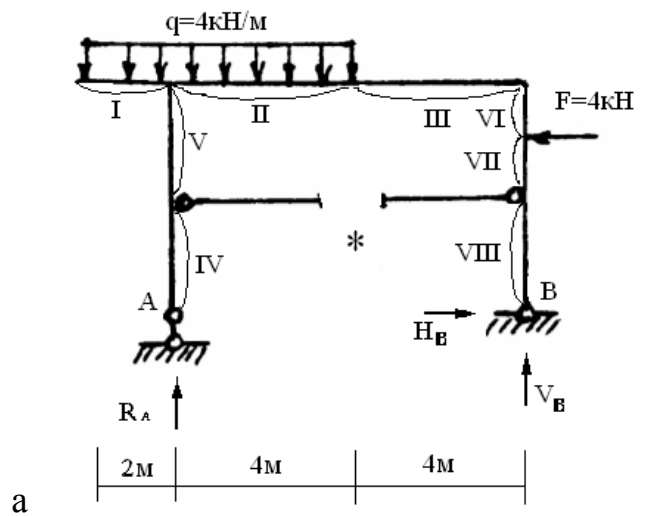


Рис. 5

Ділянка II завантажена рівномірно розподіленим навантаженням q , отже епюра моментів має вигляд квадратної параболи. Тому для побудовання епюри необхідно мати не менше трьох значень моментів. На лівому кінці (нескінченно близько до лівого кінця ділянки), розглядаючи ліві сили, маємо:

$$M_{\text{лів}} = R_A \cdot 0 - (q \cdot 2) \cdot 1 = 0 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -8 \text{ кНм},$$

на правому (нескінченно близько до правого кінця):

$$M_{\text{прав}} = R_A \cdot 4 - (q \cdot 6) \cdot 3 = 23,25 \cdot 4 - 4 \cdot 18 = 21 \text{ кНм}.$$

Додаткове, третє, значення зручно отримати в середньому перерізі ділянки за формулою

$$M_{\text{ср}} = \frac{M_{\text{прав}} + M_{\text{лів}}}{2} + \frac{q\ell^2}{8}, \quad (16)$$

де $M_{\text{прав}}$ і $M_{\text{лів}}$ - згинаючі моменти на правому й лівому кінцях ділянки довжиною ℓ , завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням q .

Відзначимо, що значення моментів необхідно брати з урахуванням їхнього знаку відповідно до пояснень до (15). Знак перед другим доданком у (16) відповідає напрямку навантаження донизу, в іншому випадку його треба змінити на зворотній.

Отже для ділянки II маємо:

$$M_{\text{ср}} = \frac{21 - (-8)}{2} + \frac{4 \cdot 4^2}{8} = 22,5 \text{ кНм}.$$

На ділянці III навантаження відсутнє, отже для побудови епюри достатньо двох значень моментів на кінцях:

$$M_{\text{лів}} = R_A \cdot 4 - (q \cdot 6) \cdot 3 = 23,25 \cdot 4 - 4 \cdot 18 = 21 \text{ кНм},$$

$$M_{\text{прав}} = R_A \cdot 8 - (q \cdot 6) \cdot 7 = 23,25 \cdot 8 - 4 \cdot 41 = 18 \text{ кНм},$$

або
$$M_{\text{прав}} = H_B \cdot 6 + V_B \cdot 0 - F \cdot 1,5 = 4 \cdot 6 + 0 - 4 \cdot 1,5 = 18 \text{ кНм}.$$

Оскільки на ділянках, що залишились, розділене навантаження відсутнє, далі на кожній ділянці будемо знаходити по два значення моментів – на кінцях.

Для визначення знаків моментів на вертикальних елементах рами (стояках) оберемо точку всередині рами (*) і дивимосся на відповідну ділянку, подумки стоячи в цій точці.

Тоді для ділянки VI маємо на верхньому (лівому відносно точці *) кінці:

$$M_{\text{лів}} = H_B \cdot 6 - F \cdot 1,5 = 4 \cdot 6 - 4 \cdot 1,5 = 18 \text{ кНм},$$

і нижньому (правому відносно точці *):

$$M_{\text{прав}} = H_B \cdot 4,5 - F \cdot 0 = 4 \cdot 4,5 - 0 = 18 \text{ кНм}.$$

Моменти на інших ділянках наведемо без пояснень.

Ділянка VII:

$$M_{\text{лів}} = H_B \cdot 4,5 = 4 \cdot 4,5 = 18 \text{ кНм},$$

$$M_{\text{прав}} = H_B \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ кНм}.$$

Ділянка VIII:

$$M_{\text{лів}} = H_B \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ кНм},$$

$$M_{\text{прав}} = 0.$$

Неважко побачити, що в усіх перерізах ділянок IV та V згинаючі моменти дорівнюють нулю (простіше при цьому розглядати сили, розташовані ліворуч від цих перерізів).

За результатами розрахунків будуємо епюру M_f (рис. 5, б). Нагадаємо, що додатні моменти відкладаються донизу.

Для перевірки епюри треба розглянути рівновагу вузлів рами. Так, вирізаючи лівий вузол рами (рис. 5, в) прикладаємо на кінцях стержнів моменти, беручи їх значення з епюри моментів. Для визначення напрямку моменту пам'ятаємо, що згинаючі моменти за нашими правилами повинні на епюрі розташовуватися з боку розтягнутих волокон. Отже, відзначивши пунктиром (рис. 5, в) той бік, де волокна розтягнуті, прикладаємо у відповідному напрямку момент. Сума моментів у вузлі повинна дорівнювати нулю:

$$8-8=0.$$

Зазначимо, що рівновагу двостержневого вузла можна перевірити формально. Для цього треба подумки повернути стержні разом з епюрами так, щоб вони розташувались на одній прямій. Якщо вузол врівноважений, то ординати повинні співпасти одна з одною. Неспівпадіння можливе лише в разі дії на вузол зовнішнього зосередженого моменту. В такому разі краще для перевірки рівноваги вирізати вузол окремо.

Нагадаємо, що в межах кожного стержня (між суміжними вузлами рами) для епюр моментів дійсними є правила, що наводяться для балок. Наприклад, “стрибок” на епюрі повинен бути тільки в точках прикладання зосереджених моментів.

Так само виконуємо розрахунок рами на дію зайвого невідомого $X_1 = 1$ (рис. 6, а) і одержуємо епюру \bar{M}_1 (рис. 6, б).

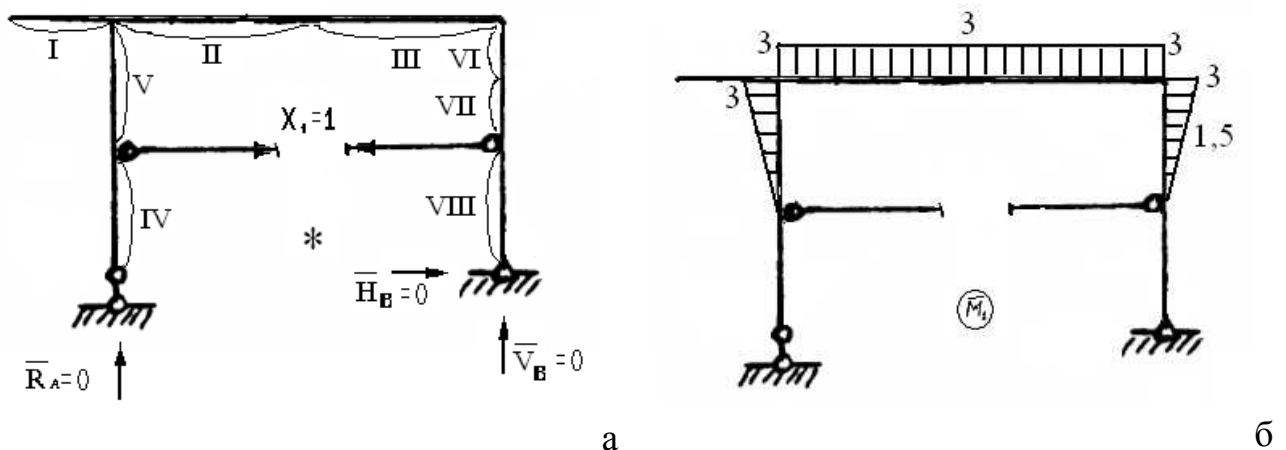


Рис. 6

Побудова епюри \bar{M}_2 від дії $X_2 = 1$ наведена на рис. 7.

При побудові всіх епюр необхідно дотримуватись масштабу, який для кожної епюри можна приймати свій, незалежно від інших. При цьому бажано аналізувати стикування епюр на сусідніх ділянках. Наприклад, на епюрі M_f $M_{\text{прав}}^{\text{VI}} = M_{\text{лів}}^{\text{VII}} = 18 \text{ кНм}$. Аналогічні співвідношення мають місце і на межах інших ділянок цієї та одиничних епюр. Крім того, епюри суміжних ділянок

можуть розташовуватися на одній прямій (наприклад на ділянках IV і V епюри \bar{M}_2).

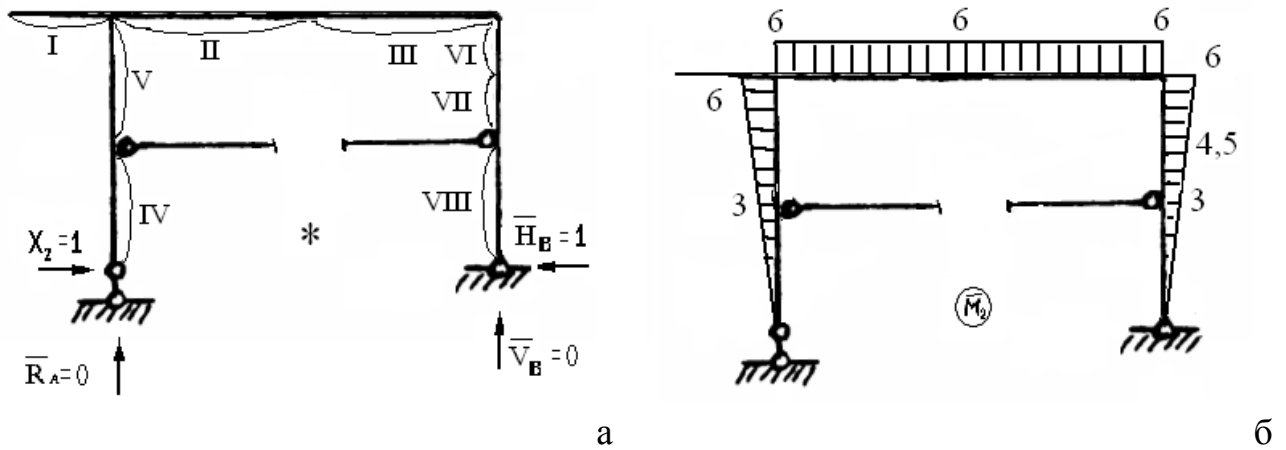


Рис. 7

Поділ рами на ділянки в прикладі вже виконано при побудові епюру згинаючих моментів. Їхня нумерація наведена на рис. 5, а.

Запис матриці одиничних вантажних моментів зручно виконати окремо для кожної ділянки у вигляді транспонованих матриць.

Так, для першої ділянки:

$$\{M_{1f}\}^T = [0 \quad -2 \quad -8];$$

$$\{\bar{M}_{11}\}^T = [0 \quad 0 \quad 0]; \quad \{\bar{M}_{12}\}^T = [0 \quad 0 \quad 0].$$

Зазначимо, що недостаючі значення моментів у серединах ділянок знаходимо за (16). При відсутності розподіленого навантаження ця формула набуває вигляду

$$M_{cp} = \frac{M_{прав} + M_{лів}}{2}.$$

Для інших ділянок транспоновані матриці моментів будуть такими:

$$\{M_{2f}\}^T = [-8 \quad 22,5 \quad 21]; \quad \{M_{3f}\}^T = [21 \quad 19,5 \quad 18];$$

$$\{M_{4f}\}^T = [0 \quad 0 \quad 0]; \quad \{M_{5f}\}^T = [0 \quad 0 \quad 0];$$

$$\{M_{6f}\}^T = [18 \quad 18 \quad 18]; \quad \{M_{7f}\}^T = [18 \quad 15 \quad 12];$$

$$\begin{aligned}
\{M_{8f}\}^T &= [12 \ 0 \ 0]; \\
\{\bar{M}_{21}\}^T &= [-3 \ -3 \ -3]; \quad \{\bar{M}_{31}\}^T = [-3 \ -3 \ -3]; \\
\{\bar{M}_{41}\}^T &= [0 \ 0 \ 0]; \quad \{\bar{M}_{51}\}^T = [0 \ -1,5 \ -3]; \\
\{\bar{M}_{61}\}^T &= [-3 \ -2,25 \ -1,5]; \quad \{\bar{M}_{71}\}^T = [-1,5 \ -0,75 \ 0]; \\
\{\bar{M}_{81}\}^T &= [0 \ 0 \ 0]; \\
\{\bar{M}_{22}\}^T &= [-6 \ -6 \ -6]; \quad \{\bar{M}_{32}\}^T = [-6 \ -6 \ -6]; \\
\{\bar{M}_{42}\}^T &= [0 \ -1,5 \ -3]; \quad \{\bar{M}_{52}\}^T = [-3 \ -4,5 \ -6]; \\
\{\bar{M}_{62}\}^T &= [-6 \ -5,25 \ -4,5]; \quad \{\bar{M}_{72}\}^T = [-4,5 \ -3,75 \ -3]; \\
\{\bar{M}_{82}\}^T &= [-3 \ -1,5 \ 0].
\end{aligned}$$

Розрахунок на комп'ютері. Наведений алгоритм розрахунку реалізовано у файлі “Метод сил.xls”. Відкривши цей файл за допомогою програми MS Excel пакету MS Office або OpenOffice.org Calc пакету OpenOffice.org, одержуємо на екрані монітора дві таблиці (рис. 8).

Зо допомогою миші й клавіатури заносимо у відповідні комірки (B3-B12) верхньої таблиці довжини ділянок – у прикладі це:

$$\begin{aligned}
l_1 &= 2; & l_2 &= 4; & l_3 &= 4; & l_4 &= 3; \\
l_5 &= 3; & l_6 &= 1.5; & l_7 &= 1.5; & l_8 &= 3,
\end{aligned}$$

а потім коефіцієнти жорсткості стержнів (комірки C3-C12), тобто коефіцієнти при EI для відповідних ділянок рами – у прикладі це:

$$3; \quad 3; \quad 1; \quad 1; \quad 1; \quad 1; \quad 1; \quad 1.$$

Далі відповідно до записів попереднього пункту заносимо значення згинаючих моментів на початку, в середині й у кінці кожної ділянки.

Зазначимо, що результати розрахунку наводяться на екрані монітора у нижній таблиці у вигляді значень остаточних моментів у відповідних перерізах рами.

Microsoft Excel - Метод сил

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Введите вопрос

А3 1-й уч.

	A	B	C	Грузовой момент			1-й единичный момент			2-й единичный момент			3-й единичный момент			
				Слева	Центр	Справа	Слева	Центр	Справа	Слева	Центр	Справа	Слева	Центр	Справа	
1																
2		Длина	Козфф.													
3	1-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	2-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	3-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	4-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	5-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	6-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	7-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	8-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	9-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	10-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13																
14																
15																
16																
17																
18																
19																
20																
21																
22																
23																
24																
25																
26																
27																
28																
29																
30																
31																
32																
33																
34																
35																
36																

Решение Эпюра моментов			
	Слева	Центр	Справа
1-й уч.	0	0	0
2-й уч.	0	0	0
3-й уч.	0	0	0
4-й уч.	0	0	0
5-й уч.	0	0	0
6-й уч.	0	0	0
7-й уч.	0	0	0
8-й уч.	0	0	0
9-й уч.	0	0	0
10-й уч.	0	0	0

Готово

Рис. 8.

Microsoft Excel - Метод сил ОК

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Введите вопрос

С6 1

	A	B	C	Грузовой момент			1-й единичный момент			2-й единичный момент			3-й единичный момент			
				Слева	Центр	Справа	Слева	Центр	Справа	Слева	Центр	Справа	Слева	Центр	Справа	
1																
2		Длина	Козфф.													
3	1-й уч.	2	3	0	-2	-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	2-й уч.	4	3	-8	22.5	21	-3	-3	-3	-6	-6	-6	0	0	0	0
5	3-й уч.	4	3	21	19.5	18	-3	-3	-3	-6	-6	-6	0	0	0	0
6	4-й уч.	3	1	0	0	0	0	0	0	0	-1.5	-3	0	0	0	0
7	5-й уч.	3	1	0	0	0	0	-1.5	-3	-3	-4.5	-6	0	0	0	0
8	6-й уч.	1.5	1	18	18	18	-3	-2.25	-1.5	-6	-5.25	-4.5	0	0	0	0
9	7-й уч.	1.5	1	18	15	12	-1.5	-0.75	0	-4.5	-3.75	-3	0	0	0	0
10	8-й уч.	3	1	12	6	0	0	0	0	-3	-1.5	0	0	0	0	0
11	9-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	10-й уч.	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13																
14																
15																
16																
17																
18																
19																
20																
21																
22																
23																
24																
25																
26																
27																
28																
29																
30																
31																
32																
33																
34																
35																
36																

Решение Эпюра моментов			
	Слева	Центр	Справа
1-й уч.	0	-2	-5
2-й уч.	-23.0173	7.482704	5.982704
3-й уч.	5.982704	4.482704	2.982704
4-й уч.	0	-2.52909	-5.05818
5-й уч.	-5.05818	-10.0377	-15.0173
6-й уч.	2.982704	5.472484	7.962264
7-й уч.	7.962264	7.452044	6.941824
8-й уч.	6.941824	3.470912	0
9-й уч.	0	0	0
10-й уч.	0	0	0

Готово

Рис. 9.

Значення у таблиці результатів одержують при введені кожного чергового числа у верхню таблицю без додаткових дій оператора. Отже після введення останнього вихідного даного у нижній таблиці одразу наводиться результат розрахунку рами. Для цього прикладу він поданий на рис. 9.

Увага! 1. Файл “Метод сил.xls” сформовано таким чином, що передбачається розрахунок рам, які містять не більше десяти ділянок при максимальній кількості зайвих невідомих – три. 2. При меншій кількості ділянок та невідомих в усі комірки верхньої таблиці треба занести нулі. Виняток становлять значення коефіцієнтів жорсткості: в усіх випадках ці значення повинні відрізнятися від нуля, оскільки алгоритм розрахунку передбачає ділення на жорсткість.

Побудова остаточної епюри згинаючих моментів.

За результатами розрахунків маємо:

$$\{M_1\}^T = [0 \quad -2 \quad -8]; \quad \{M_2\}^T = [-23,02 \quad 7,48 \quad 5,98];$$

$$\{M_3\}^T = [5,98 \quad 4,48 \quad 2,98]; \quad \{M_4\}^T = [0 \quad -2,53 \quad -5,06];$$

$$\{M_5\}^T = [-5,06 \quad -10,04 \quad -15,02]; \quad \{M_6\}^T = [2,98 \quad 5,47 \quad 7,96];$$

$$\{M_7\}^T = [7,96 \quad 7,45 \quad 6,94]; \quad \{M_8\}^T = [6,94 \quad 3,47 \quad 0].$$

При побудові остаточної епюри слід пам'ятати, що на ділянках без розподіленого навантаження вона лінійна. Отже в такому випадку значення згинаючого моменту в середині ділянки є зайвим і його треба ігнорувати. Для цього прикладу епюра згинаючих моментів наведена на рис. 10, а.

Перевірка рівноваги лівого вузла ригеля за рис. 10, б дає:

$$\sum M = 23,02 - 8 - 15,02 = 0.$$

Правий двостержневий вузол перевіряємо за формальним правилом (див. побудову епюри M_f).

Визначення поперечних сил виконуємо за формулою (15).

$$Q_{1 \frac{\text{лів}}{\text{прав}}} = \frac{-8-0}{2} \pm \frac{4 \cdot 2}{2} = -4 \pm 4 = \begin{cases} Q_{1 \text{ лів}} = -4 + 4 = 0 \text{ кН,} \\ Q_{1 \text{ прав}} = -4 - 4 = -8 \text{ кН;} \end{cases}$$

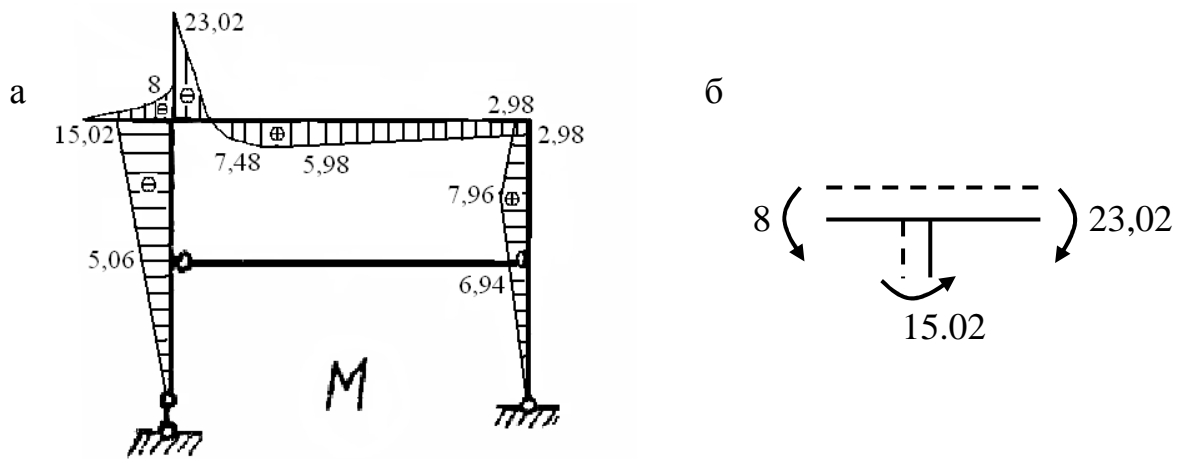


Рис. 10

$$Q_{2 \frac{\text{лів}}{\text{прав}}} = \frac{-5,98 - (-23,02)}{4} \pm \frac{4 \cdot 4}{2} = -7,25 \pm 8 = \begin{cases} Q_{1 \text{ лів}} = 7,25 + 8 = 15,25 \text{ кН,} \\ Q_{1 \text{ прав}} = 7,25 - 8 = -0,75 \text{ кН;} \end{cases}$$

$$Q_3 = \frac{2,98 - 5,98}{4} = -0,75 \text{ кН;} \quad Q_4 = \frac{5,06 - 0}{3} = -1,69 \text{ кН;}$$

$$Q_5 = \frac{-15,02 - (-5,06)}{3} = -3,32 \text{ кН;} \quad Q_6 = \frac{7,96 - 2,98}{1,5} = 3,32 \text{ кН;}$$

$$Q_7 = \frac{6,94 - 7,96}{1,5} = -0,68 \text{ кН;} \quad Q_8 = \frac{0 - 6,94}{3} = -2,31 \text{ кН.}$$

За цими даними будемо епюру поперечних сил Q (рис. 11).

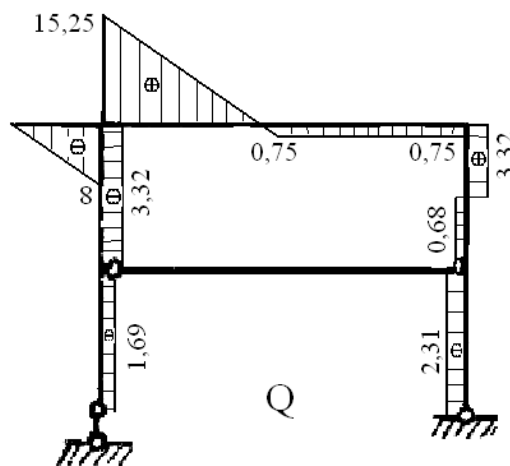


Рис. 11

Визначення поздовжніх сил виконуємо вирізанням вузлів. Попередньо, відсікаючи консольну частину (рис. 12, а), можна визначити поздовжню силу в довільному її перерізі: $N_1=0$. Далі розглядаємо лівий вузол рами (рис. 12, б):

$$\begin{aligned} \sum x; \quad N_2 + 3,32 &= 0; & N_2 &= -3,32 \text{ кН}; \\ \sum y; \quad 8 + 15,25 + N_5 &= 0; & N_5 &= -23,25 \text{ кН}. \end{aligned}$$

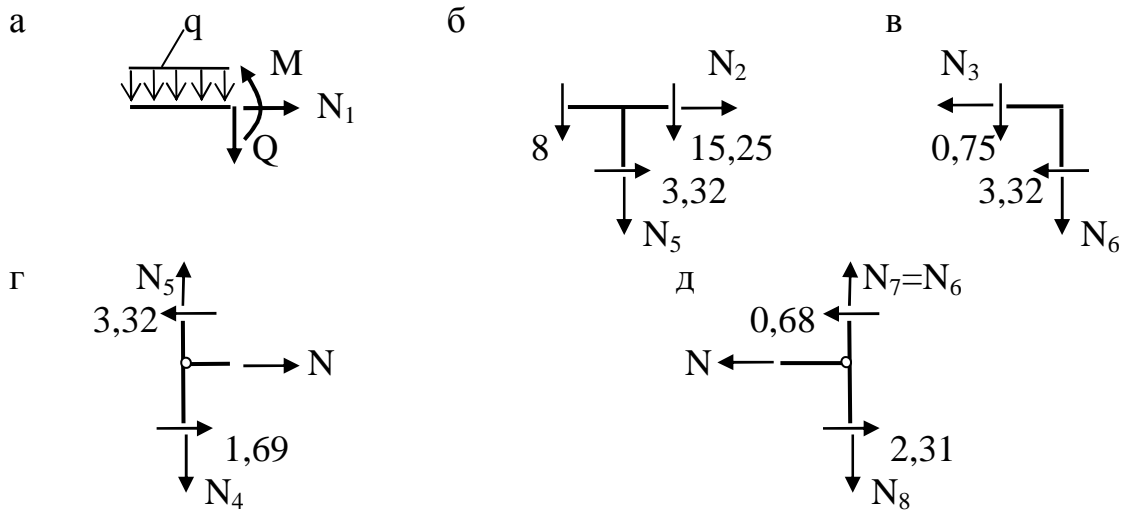


Рис. 12

Наступний вузол можна взяти на правому кінці ригеля (рис. 12, в). Слід мати на увазі, що уздовж окремого стержня поздовжня сила може змінюватися лише за наявності такого навантаження, яке не перпендикулярне до осі стержня. Отже, маємо $N_3 = N_2 = -3,23 \text{ кН} = \text{const}$. Тоді рівняння $\sum x = N_3 + 3,32 = -3,32 + 3,32 = 0$ обертається на тотожність і може служити однією з перевірок розрахунку. Друге рівняння дає: $N_6 = -0,75 \text{ кН}$.

Далі можемо в будь-якій послідовності розглядати вузли на кінцях зтяжки: рис. 12, д, з рівноваги якого маємо:

$$\begin{aligned} N &= 3,32 - 1,69 = 1,63 \text{ кН}; \\ N_4 &= N_5 = -23,25 \text{ кН}; \\ N_8 &= N_7 = N_6 = -0,75 \text{ кН} \end{aligned}$$

і ще одна перевірка: $2,31 - 0,68 - N = 2,31 - 0,68 - 1,63 = 0$.

За обчисленими даними будуємо епюру поздовжніх сил (рис. 13).

Як відомо, ригелі рам споруд зазнають переважно деформації згину, а стояки – згин зі стиском (позацентровий стиск). Отже в розглянутому прикладі найбільш навантаженим є лівий переріз ригеля ($|M|_{\max} = 23,02$ кНм) і верхній переріз лівого стояка ($|N|_{\max} = 23,25$ кН, $|M|_{\max} = 15,02$ кНм).

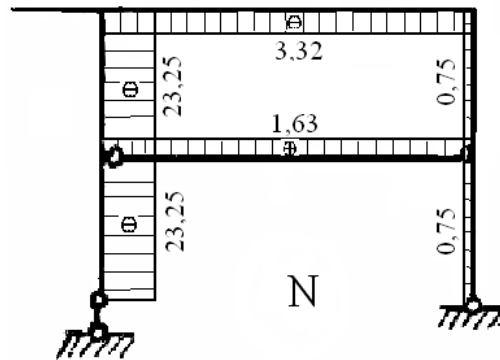


Рис. 13

Список літератури

1. Строительная механика. Краткий курс /Раздел 2. Статически определимые стержневые системы. Шутенко Л.Н., Пустовойтов В.П., Засядько Н.А. – Харьков: ХГАГХ, 2003. – 85 с.
2. Строительная механика: Учебник для вузов / Ю.И.Бутенко, Н.А.Засядько, С.Н.Кан и др.; под ред. Ю.И.Бутенко – К.: Вища школа, 1989. – 479 с.
3. Строительная механика: Руководство к практическим занятиям / Ю.И.Бутенко, Н.А.Засядько, С.Н.Кан и др.; под ред. Ю.И.Бутенко – К.: Вища школа, 1989. – 376 с.
4. Механіка споруд. Шутенко Л.М., Пустовойтов В.П., Засядько М.А., Харків, ХДАМГ, 2001. – 239 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи та розрахунково-графічного завдання “Розрахунок статично невизначної рами методом сил” з курсу будівельної механіки (для студентів 3 курсу денної форми навчання спец. 6.092100 - «Промислове і цивільне будівництво» і 6.092100 - “Охорона праці в будівництві”).

Укладачі: Микола Андрійович Засядько,

Олександр Олексійович Чупринін

Відповідальний за випуск: Л.С.Андрієвська

Редактор М.З.Аляб'єв

План 2008, поз. 167 М

Підп. до друку 6.03.2008	Формат 60*84 1/16	Папір офісний
Друк на ризографі	Умовн.-друк. арк. 1.2	Обл.-вид. арк. 1.5
Тираж 100 прим.	Замовл. №	

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12
Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХНАМГ