МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

М. А. ЛЮБЧЕНКО

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
із курсу

«ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА»

(для студентів 1 курсу денної, заочної та прискореної форм навчання спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія)

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2018

Любченко М. А. Конспект лекцій з курсу «Інженерна графіка» (для студентів 1 курсу денної, заочної та прискореної форм навчання спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія) / М. А. Любченко; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова . – Харків : ХНУМГ, 2018. – 131 с.

Автор **М. А. Любченко,** кандидат технічних наук, доцент Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рецензент **В. І. Лусь,** кандидат технічних наук, професор Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

Рекомендовано кафедрою основ архітектурного проектування і рисунку, протокол № 3 від 27.11.2015.

© М. А. Любченко, 2018
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2018

ЗМІСТ

ВСТУП……6
Список умовних позначень 7
ЛЕКЦІЯ 1 МЕТОДИ ПРОЕКЦІЮВАННЯ. КОМПЛЕКСНЕ КРЕСЛЕННЯ ТОЧКИ 8
1.1 Центральне проекціювання..... 8
1.2 Паралельне проекціювання. Основні властивості 9
1.3 Просторова система координат 13
1.4 Проекціювання на дві площини проекцій. Комплексне креслення точки. 14
1.5 Проекціювання на три взаємно перпендикулярні площини проекцій 16
1.6 Питання для самоперевірки 17
ЛЕКЦІЯ 2 ПРОЕКЦІЮВАННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ ТА ПЛОЩИНИ..... 18
а. Проекціювання прямої лінії..... 18
2.1.1 Положення відрізка прямої відносно площин проекцій 18
2.1.2 Правило прямокутного трикутника..... 21
2.1.3 Взаємне розташування прямих..... 22
2.1.4 Проекціювання прямого кута 25
2.1.5 Точка на прямій. Сліди прямої 26
2.2 Проекціювання площини..... 27
2.2.1 Задання площини на комплексному кресленні..... 27
2.2.2 Положення площини відносно площин проекцій..... 30
2.2.3 Належність точки і прямої площині 36
2.2.4 Головні лінії площини..... 38
2.3 Питання для самоперевірки 42
ЛЕКЦІЯ 3 МЕТРИЧНІ ТА ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ..... 43
3.1 Паралельність площин 43
3.2 Перетин площин 44
3.3 Паралельність прямої і площини..... 45
3.4 Перетин прямої і площини..... 46
3.5 Перпендикулярність прямої і площини 48
3.6 Перпендикулярність прямих загального положення..... 50
3.7 Перпендикулярність площин..... 51
3.8 Питання для самоперевірки 52

ЛЕКЦІЯ 4 МЕТОДИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПРОЕКЦІЙ... 53
4.1 Спосіб заміни площин проекцій ... 53
4.2 Обертання навколо проекційних осей ... 58
4.3 Спосіб плоскопаралельного переміщення ... 58
4.4 Спосіб обертання навколо прямих рівня ... 59
4.5 Питання для самоперевірки ... 60
ЛЕКЦІЯ 5 ПОВЕРХНІ ... 61
5.1 Визначення, утворення та задання поверхонь на кресленику 61
5.2 Класифікація поверхонь ... 62
5.3 Гранні поверхні ... 69
5.3.1 Переріз гранних поверхонь площиною ... 74
5.3.2 Побудування точок перетину лінії з поверхнею ... 75
5.3.3 Побудування лінії взаємного перетину гранних поверхонь ... 77
5.4 Криві поверхні ... 80
5.4.1 Точки і лінії на поверхнях ... 80
5.4.2 Переріз кривих поверхонь площиною ... 84
5.4.3 Побудова точок перетину лінії з поверхнею ... 87
5.5 Побудова лінії взаємного перетину кривих поверхонь ... 90
5.6 Побудова лінії перетину гранних та кривих поверхонь ... 93
5.7 Питання для самоперевірки ... 96
ЛЕКЦІЯ 6 ЗАГАЛЬНІ ВИМОГИ ОФОРМЛЕННЯ КРЕСЛЕНЬ. ПРОЕКЦІЙНЕ КРЕСЛЕННЯ ... 97
6.1 Загальні вимоги оформлення креслень ... 97
6.1.1 Формати ... 97
6.1.2 Основний напис ... 98
6.1.3 Масштаби ... 100
6.1.4 Типи ліній ... 100
6.1.5 Шрифти креслярські ... 101
6.2 Правила нанесення розмірів на кресленнях ... 103
6.3 Проекційне креслення ... 105
6.3.1 Основні види ... 106
6.3.2 Розріз та переріз ... 108
6.4 Аксонометричні проекції ... 113
6.4.1 Стандартна ізометрична проекція ... 114
6.4.2 Стандартна диметрична проекція ... 115
6.4.3 Приклади побудови ізометричної проекції деяких поверхонь ... 118
6.5 Питання для самоперевірки ... 120

ЛЕКЦІЯ 7 АРХІТЕКТУРНО-БУДІВЕЛЬНЕ КРЕСЛЕННЯ..... 121
7.1 Загальні відомості про будівельні креслення 121
7.2 Масштаби..... 121
7.3 Правила нанесення розмірів на архітектурно-будівельних кресленнях 122
7.4 Робочі креслення та умовні графічні зображення на будівельних кресленнях..... 123
7.5 Креслення планів будівлі 126
7.6 Креслення розрізу будинку..... 128
7.7 Рекомендації до виконання фасаду будинку 129
7.8 Питання для самоперевірки 130
ЛІТЕРАТУРА 131

ВСТУП

Конспект лекцій з навчальної дисципліни «Інженерна графіка» розроблені для студентів 1 курсу денної, заочної та прискореної форм навчання спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія.

Інженерна діяльність пов’язана з проектуванням, виготовленням та експлуатацією машин, механізмів, різних споруд та інших просторових об’єктів.

Тому для успішної практичної діяльності інженер повинен мати розвинену просторову уяву і володіти вмінням та навичками зі створення креслення, яке є основним документом при вирішенні інженерних задач і містить у собі всю необхідну для цього інформацію: зображення об’єкта, його розміри, відомості про матеріал, вимоги до чистоти обробки поверхонь та інше. Очевидно, що вся ця інформація, в тому числі й зображення об’єкта, має наноситись на креслення у відповідності з деякими загальними для цього правилами.

Характерною рисою просторових об’єктів є їх форма. Форма об’єктів може бути найрізноманітнішою: від простої до надзвичайно складної. При цьому об’єкти з складною формою можна розглядати як сукупність об’єктів з більш простою формою, тим чи іншим чином розташованих відносно один одного.

Таким чином, форми об’єктів та їх взаємне положення являють собою надзвичайний практичний інтерес і тому потребують вивчення. Наука, яка вивчає ці питання, є розділом математики і називається геометрією. У залежності від аналітичного апарату, який для цього застосовується, геометрія включає в себе ряд самостійних розділів. Наприклад, розділ, який вивчає ці питання за допомогою алгебри, називають аналітичною геометрією, розділ, який вивчає ці питання за допомогою апарата диференційного числення – диференційною геометрією, розділ, який вивчає ці питання за допомогою проекційного методу − нарисною геометрією, тощо. Таким чином, нарисна геометрія − це розділ геометрії, який вивчає форми та взаємовідношення між ними проекційним методом. Інакше кажучи, нарисна геометрія вивчає правила побудови зображень просторових об’єктів.

Список умовних позначень

A, B, C, D, ... 1, 2, 3, 4, ... – точки
a, b, c, d ... – прямі та криві лінії
h – горизонталь
f – фронталь
p – профільна пряма
θ, Λ, Σ, Г, Ф – поверхні (площини)
α, β, γ... – кути
$П_1$ – горизонтальна площина проекцій
$П_2$ – фронтальна площина проекцій
$П_3$ – профільна площина проекцій
$A \in Ф$ – точка A належить фігурі Ф
$A \notin$ – точка A не належить фігурі Ф
$Ф_к \equiv Ф_I$ – фігури $Ф_к$ та $Ф_I$ - збігаються
$Ф_к \cup Ф_I$ – об'єднання фігур $Ф_к$ та $Ф_I$
$Ф_к \cap Ф_I$ – перетин фігур $Ф_к$ та $Ф_I$
$\supset$ – проходить через ...
$\subset$ – лежить на ...
=> – логічний наслідок
|| – паралельно
$\perp$ – перпендикулярно
$\angle$ – плоский або двогранний кут

x, y, z – осі проекцій. Індекси при x, y, z означають відповідно площини проекцій. Наприклад, вісь x_{12} означає, що вісь *x* поділяє поле горизонтальних проекцій (індекс 1) і поле фронтальних проекцій (індекс 2). Позначення проекцій фігур таке саме, як і написання відповідного індексу

ЛЕКЦІЯ 1 МЕТОДИ ПРОЕКЦІЮВАННЯ. КОМПЛЕКСНЕ КРЕСЛЕННЯ ТОЧКИ

1.1 Центральне проекціювання
1.2 Паралельне проекціювання. Основні властивості
1.3 Просторова система координат
1.4 Проекціювання на дві площини проекцій. Комплексне креслення точки
1.5 Проекціювання на три взаємно перпендикулярні площини проекцій
1.6 Питання для самоперевірки

Для побудови зображення необхідно мати об'єкт (оригінал), картинну площину та алгоритм (правило) побудови зображення. Під об'єктом (оригіналом) розуміють будь-який реальний або уявний об'єкт (виріб, деталь). У процесі побудови зображення становлять інтерес тільки його геометричні властивості, тобто характер і ступінь складності поверхонь, що його обмежують, а також належні цим поверхням окремі лінії та точки. Для зручності цю сукупність геометричних особливостей оригіналу називають геометричним образом.

Геометричний образ може бути досить складним. Тому для зручності вивчення його умовно поділяють на більш прості геометричні образи: точки, лінії, поверхні.

Для побудови зображення об'єкта його геометричний образ необхідно спочатку задати, тобто описати таким чином, щоб можна було побудувати будь-яку його точку, а також зафіксувати його положення в просторі. Це двоєдине завдання вирішується за допомогою визначника геометричного образу. Під визначником розуміють мінімальну сукупність незалежних умов, що однозначно задають геометричний образ.

В основі побудування зображень, які розглядаються в нарисній геометрії та застосовуються в технічному кресленні, лежить метод проекціювання.

Апарат проекціювання включає в себе проекціювальні промені і площину проекцій.

1.1 Центральне проекціювання

Якщо всі промені, що проекцюють об'єкт, виходять із однієї точки, званої центром, таке проекціювання називається ***центральним*** (рис. 1.1).

Проекціями заданих точок A, B, C, D є точки перетину проекціювальних променів, що проходять через відповідні точки, з площиною проекцій (рис. 1.1).

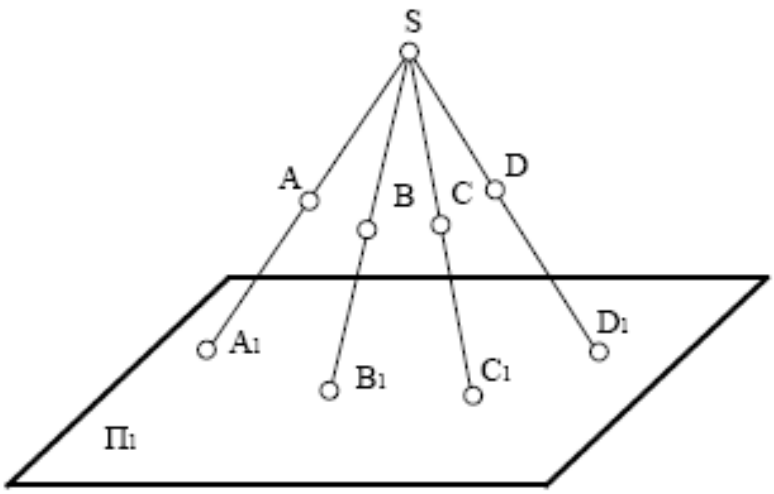


Рисунок 1.1 – Центральне проекціювання: A, B, C, D – об’єкти проекціювання; S – центр проекцій; П1 – площина проекцій; A1, B1, C1, D1 – проекції точок на площині П1

Центральне проекціювання застосовується для наочного зображення предметів, але для технічного креслення не застосовується.

1.2 Паралельне проекціювання. Основні властивості

Якщо центр проекцій помістити у нескінченність, усі проекціювальні промені стають паралельними, таке проекціювання називається ***паралельним*** (рис. 1.2).

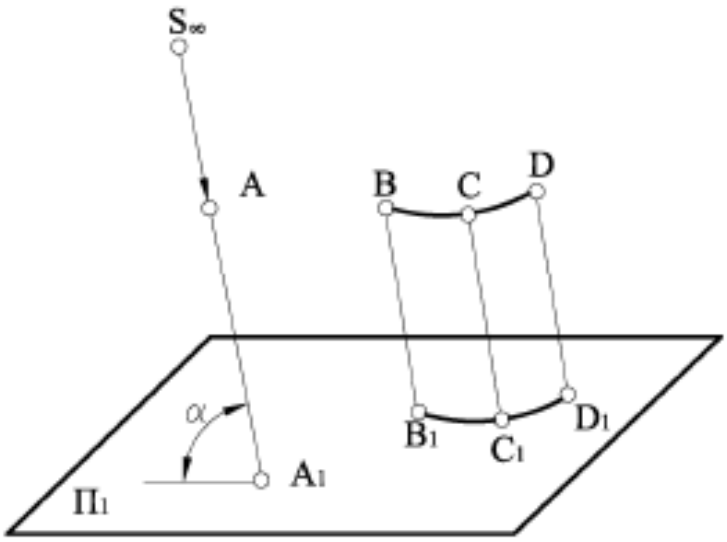


Рисунок 1.2 – Паралельне проекціювання: A, B, C, D – об’єкти проекціювання; S_∞ – заданий напрямок проекціювання; Пі – площина проекцій; A_1 B_1 C_1 D_1 – проекції точок A, B, C, D; α – кут нахилу проекціювальних променів відносно площини проекцій $П_1$

Розглянемо його основні властивості.

1. Проекцією точки є точка. Ця властивість випливає із самого методу проекціювання.

2. Проекцією прямої лінії є пряма лінія. Як відомо, через пряму *a* можна провести безліч площин. Серед них можна виділити площину Т, паралельну до заданого напряму проекціювання *S* (рис. 1.3). Але відомо, що дві площини перетинаються по прямій. Тому лінією перетину площин $П_2$ і Т буде пряма a_2. А оскільки ця пряма одночасно належить обом згаданим площинам, вона буде проекцією прямої *a*. Цю властивість називають властивістю прямолінійності.

3. Проекцією точки, яка належить деякій прямій, є точка, що належить проекції даної прямої. Дійсно, якщо взяти на прямій *a* точку В (рис. 1.3) і через цю точку провести проекціюючу пряму, – остання буде належати проекціюючий площині Т і перетинати площину проекцій $П_2$ в точці B_2, яка належить лінії перетину цих площин a_2. Цю властивість називають властивістю належності.

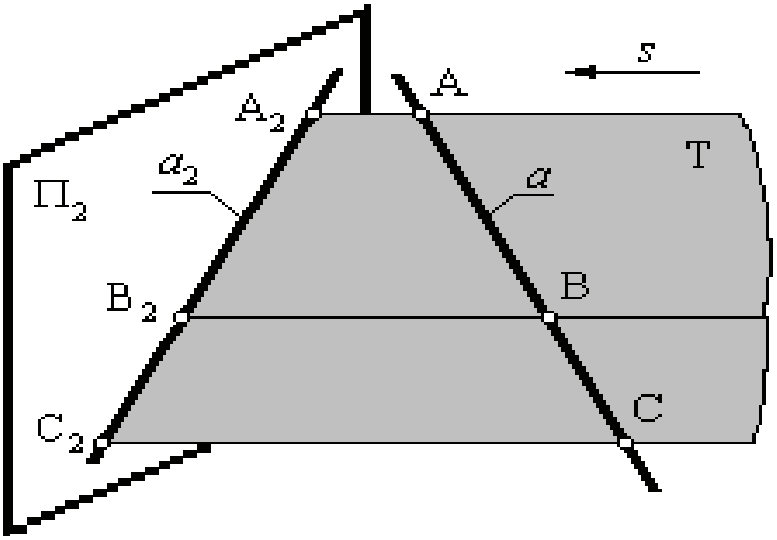


Рисунок 1.3 – Проекція прямої

4. Проекціями паралельних прямих є паралельні прямі. Дійсно, якщо прямі *a* і *b* паралельні (рис. 1.4), – будуть паралельними і проекціюючі їх площини T^1 та T^2 (тому що вони мають по парі відповідно паралельних прямих $a \parallel b$ і $AA_2 \parallel DD_2$, які перетинаються). Із цього виходить, що прямі a_2 і b_2 паралельні як прямі, отримані при перетині двох паралельних площин третьою. Ця властивість отримала назву властивості збереження паралельності.

5. Відношення проекцій відрізків, що належать паралельним прямим або одній прямій, дорівнює відношенню самих відрізків. Нехай AB і DE (рис. 1.4) – відрізки, що належать прямим *a* і *b*, а A_2B_2 і D_2E_2 – їх проекції. Проведемо в проекціюючих площинах T^1 і T^2 відрізки AF і DG відповідно паралельні до відрізків A_2B_2 і D_2E_2. Тоді $AF = A_2C_2$, а $DG = D_2E_2$.

Отже, трикутник ACF подібний до трикутника DEG. Але з цього виходить, що A_2C_2: D_2E_2 = AF: DG = AC: DE. Якщо задані відрізки належать одній прямій, наприклад AC і BC, аналогічно можна отримати, що A_2C_2: B_2C_2 = AC:BC. У відповідності з цією властивістю виходить, що спотворення для всіх паралельних відрізків є постійним і що, зокрема, середина відрізка проекціюється в середину проекції відрізка.

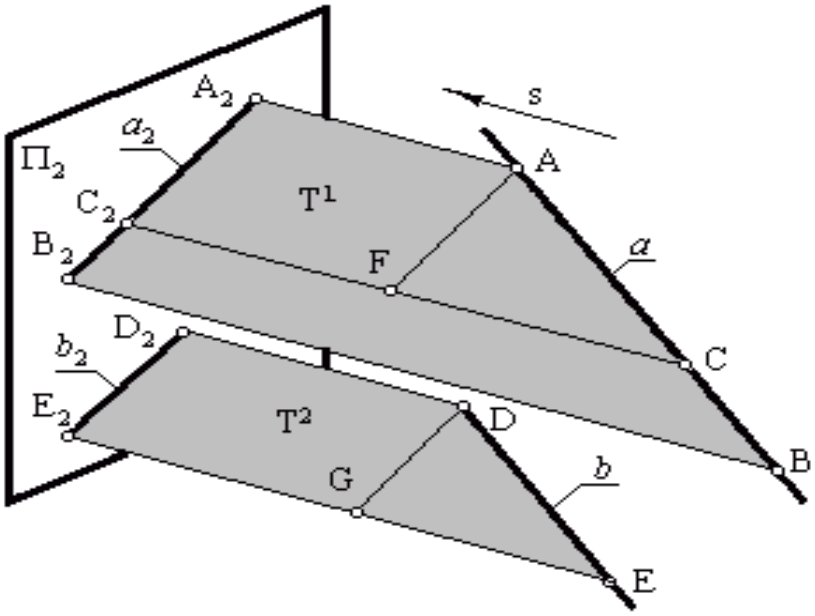


Рисунок 1.4 – Проекції паралельних прямих

6. Проекція оригіналу не змінюється при паралельному переносі площин проекцій. Спроекціюємо трикутник ABC в напрямі *s* на паралельні між собою площини проекцій $П_2^1$ та $П_2^2$ (рис. 1.5). Через те, що відрізки $A_2^1A_2^2 = B_2^1B_2^2 = C_2^1C_2^2$ рівні й паралельні один одному, чотирикутники $A_2^1B_2^1B_2^2A_2^2$, $B_2^1C_2^1C_2^2B_2^2$ і $C_2^1A_2^1A_2^2C_2^2$ є паралелограмами. Тому в трикутників $A_2^1B_2^1C_2^1$ і $A_2^2B_2^2C_2^2$ відповідні сторони рівні, і, отже, трикутники рівні між собою. Очевидно, що наведені міркування будуть справедливі й для будь-якої іншої геометричної фігури.

Якщо взяти за умову, що напрям проекціювання S перпендикулярний до площини проекцій П, отримаємо так звану паралельну ортогональну проекцію або ортогональну проекцію. При цьому всі розглянуті вище властивості зберігаються, більш того, додається ще одна властивість, специфічна тільки для ортогональної проекції.

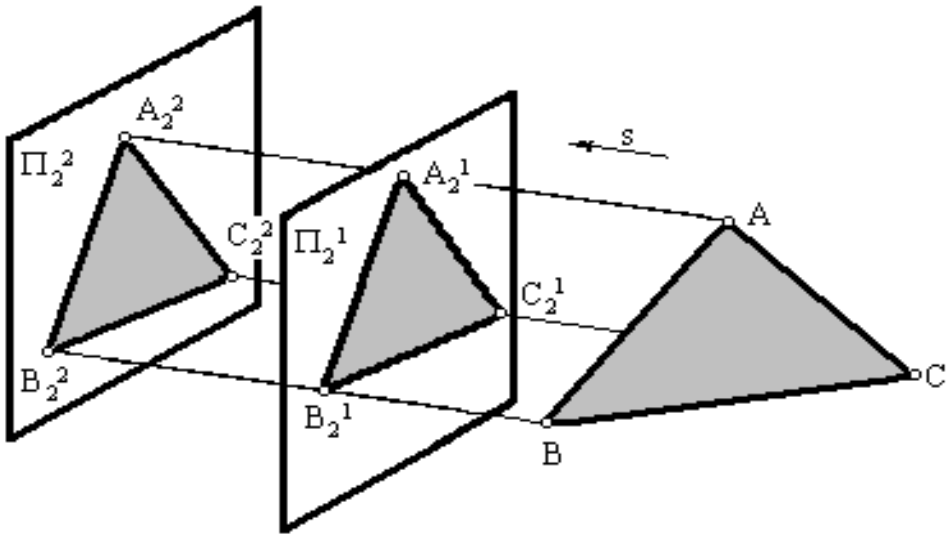


Рисунок 1.5 – Проекціювання площини трикутника

7. Якщо напрям проекціювання *s* складає з площиною проекцій $П_2$ прямий кут, – довжина проекції відрізка дорівнює довжині самого відрізка, помноженій на *cos δ*, де *δ* – кут нахилу відрізка до площини проекцій. Дійсно, якщо через точку B (рис. 1.6) провести відрізок BC, паралельний до відрізка A_2B_2, то із трикутника ABC отримаємо, що BC = AB *cos δ*. Але A_2B_2 = BC, тому A_2B_2 = AB cos *δ*.

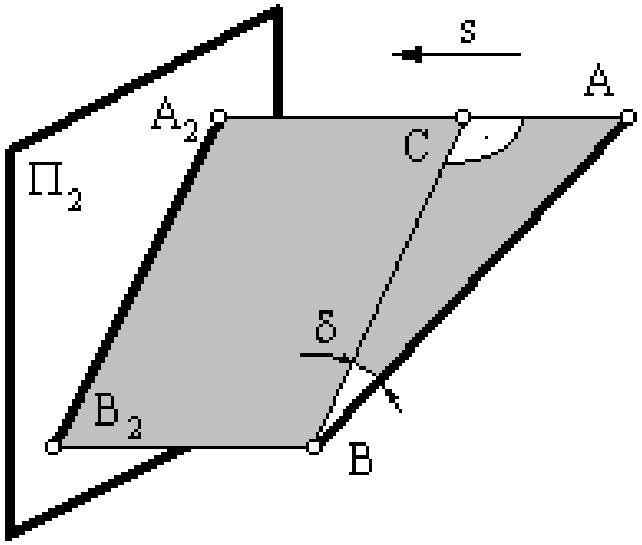


Рисунок 1.6 – Проекція відрізка

Із наведеного виходить, що коли напрям проекціювання s складає з площиною проекцій прямий кут, то відрізки прямих і відсіки площин, паралельних до площини проекцій, проекціюються на останню в дійсну величину.

1.3 Просторова система координат

Паралельна ортогональна проекція з точки зору техніки побудови зображень має значні переваги перед іншими проекціями. Основною з них є простота побудови проекції за заданим оригіналом, тобто простота розв'язання прямої задачі. Але в той же час ця проекція має і суттєвий недолік: вона не дозволяє за даною проекцією однозначно відтворити (реконструювати) оригінал, тобто не дозволяє розв'язувати зворотну задачу. Це пояснюється тим, що проекція точки не несе інформації про відстань самої точки від площини проекцій. Тому, щоби скористатись паралельною ортогональною проекцією, треба якимось чином компенсувати цей недолік методу проекціювання. Однією з таких можливостей є проекціювання об'єкта на декілька площин проекцій. Очевидно, що їх має бути якомога менше, але досить для однозначного відтворення за ними оригіналу. Цій вимозі відповідає наявність трьох проекцій оригіналу, розташованих у перпендикулярних одна до одної площинах. А це приводить до висновку, що найзручнішою буде прямокутна просторова система координат. При цьому логічно розташувати площини проекцій у просторі так, як це зручно для спостерігача. Домовились, що першою з них буде площина, на якій перебуває спостерігач. Цю площину назвали горизонтальною і дали їй позначення $П_1$. Другу площину розташували перед спостерігачем і назвали фронтальною ($П_2$), третю, профільну площину проекцій $П_3$, розташували праворуч від спостерігача.

Перераховані площини проекцій взаємно перетинаються і утворюють просторову систему координат (рис. 1.7). Її початком (центром) є точка О, в якій перетинаються всі три площини.

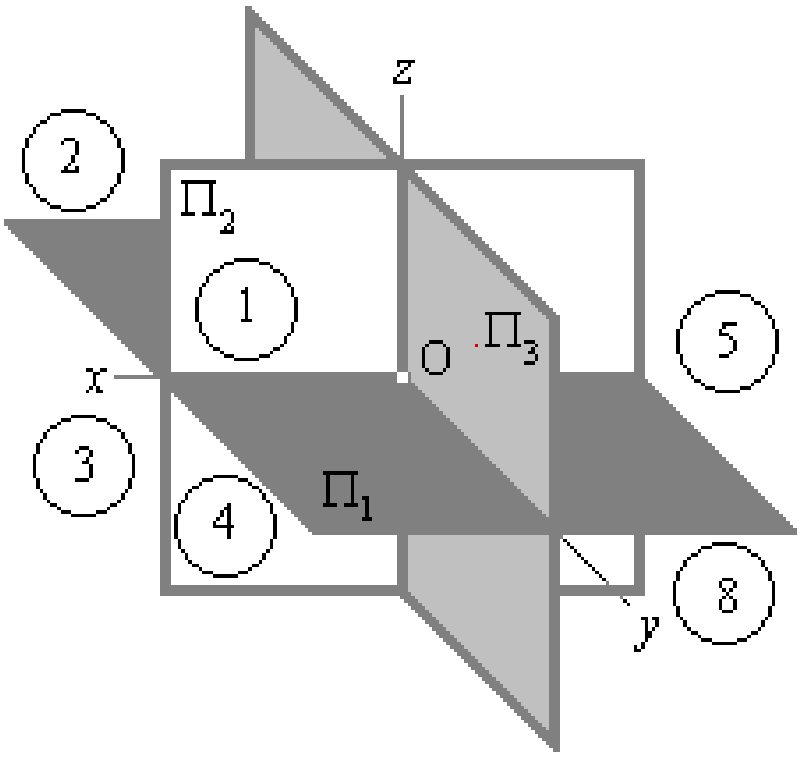


Рисунок 1.7 – Просторова система координат з трьома площинами проекцій

Перетинаючись попарно, вони утворюють координатні осі: горизонтальна площина проекцій $П_1$ і фронтальна $П_2$ – вісь абсцис *x*, горизонтальна площина проекцій $П_1$ і профільна $П_3$ – вісь ординат *y*, фронтальна площина проекцій $П_2$ і профільна $П_3$ – вісь аплікат *z*. Позитивним для осі *x* домовились вважати напрям вліво від спостерігача, для осі *y* – до спостерігача, для осі *z* – угору.

Перетинаючись між собою, площини проекцій поділяють простір на 8 частин, які отримали назву октантів. Нумерація октантів наведена на рисунку 1.7.

У ряді випадків можна обмежитись двома площинами проекцій (при цьому, як правило, вилучають профільну площину проекцій). Тоді залишається реальною тільки одна координата вісь – *x* (рис. 1.8), а простір поділяється на 4 частини, які отримали назву чвертей (їх нумерація збігається з нумерацією перших чотирьох октантів). Але оскільки положення точки в тривимірному просторі визначається трьома координатами, початок системи координат вибирається довільно.

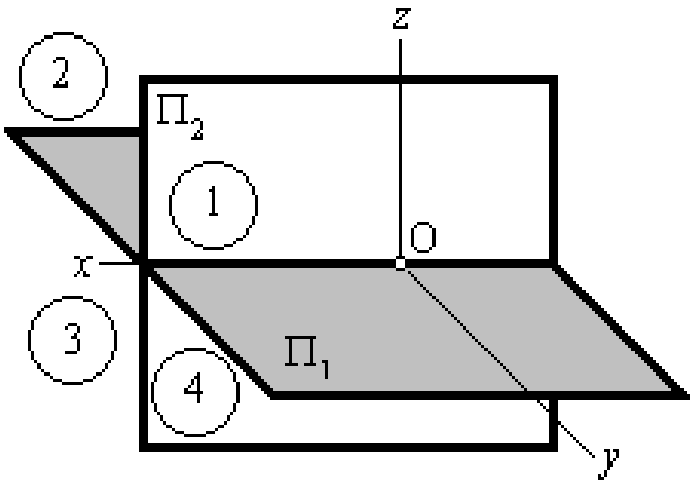


Рисунок 1.8 – Просторова система координат з двома площинами проекцій

Для побудови проекцій немає значення, у якій частині простору розташовано оригінал. Тому його розташування в просторі вибирають, виходячи з міркувань зручності побудови проекцій. Як правило, оригінал розташовують у першому октанті або першій чверті простору.

1.4 Проекціювання на дві площини проекцій. Комплексне креслення точки.

Метод побудови комплексного креслення на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій узагальнив і обґрунтував Гаспар Монж.

За цим методом площини $П_1$ і $П_2$ взаємно перпендикулярні, а центри проекціювання віддалені в нескінченність у напрямі, перпендикулярному до площин проекцій. Сукупність кількох пов’язаних між собою проекцій фігури (мінімум двох) називають *системою прямокутних (ортогональних) проекцій.*

Точку А в просторі ортогонально проекціюють на обидві площини проекцій:

$$AA_1 \perp П_1;\ AA_1 \cap П_1 = A_1;$$
$$AA_2 \perp П_2;\ AA_2 \cap П_2 = A_2.$$

Проекціювальні промені AA_1 і A_2 взаємно перпендикулярні й створюють у просторі проекціювальну площину $A_1\ A_x\ A_2$, перпендикулярну до обох площин проекцій. Ця площина перетинає площини проекцій по лініях, які проходять через проекції точки А (рис. 1.9).

Щоб отримати плоске креслення, сумістимо горизонтальну площину проекцій $П_1$ із фронтальною площиною $П_2$ обертанням навколо осі $П_2/П_1$, (рис. 1.10). Тоді обидві проекції точки виявляються на одній лінії, перпендикулярній до осі $П_2/П_1$. Пряма, що з'єднує горизонтальну A_1 і фронтальну A_2 проекції точки, називається *вертикальною лінією зв'язку.*

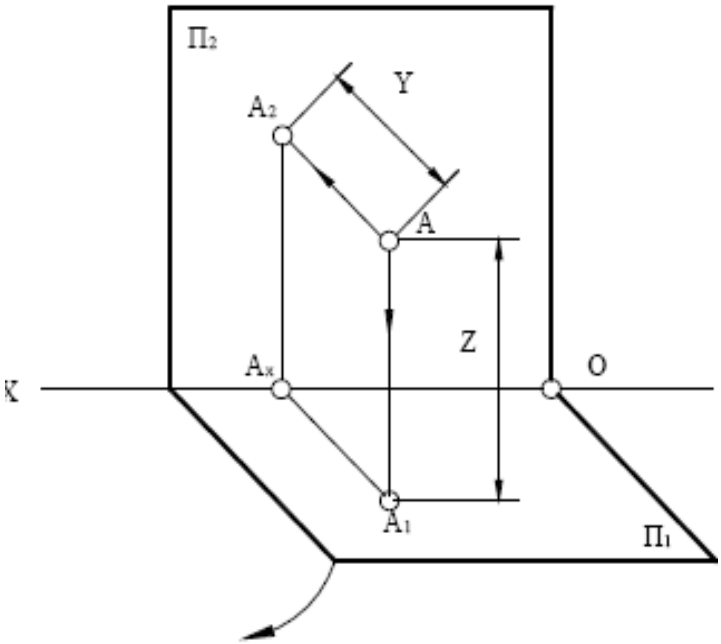


Рисунок 1.9 – Проекціювання точки А на дві площини проекцій

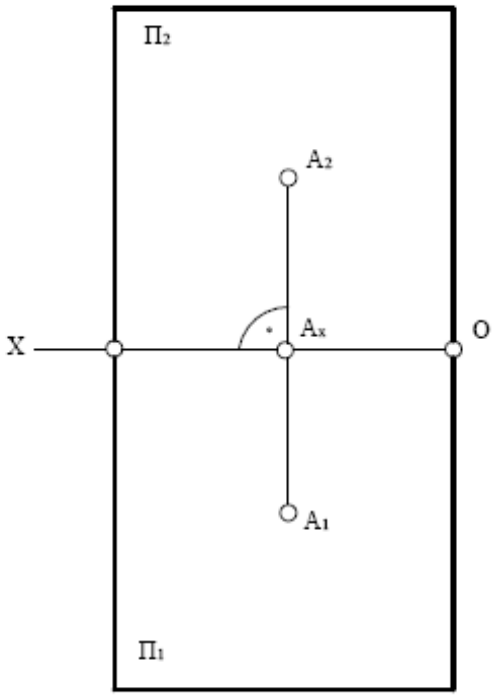


Рисунок 1.10 – Двохпроекційне комплексне креслення точки А

Дві пов'язані між собою ортогональні проекції точки однозначно визначають її положення відносно площин проекцій.

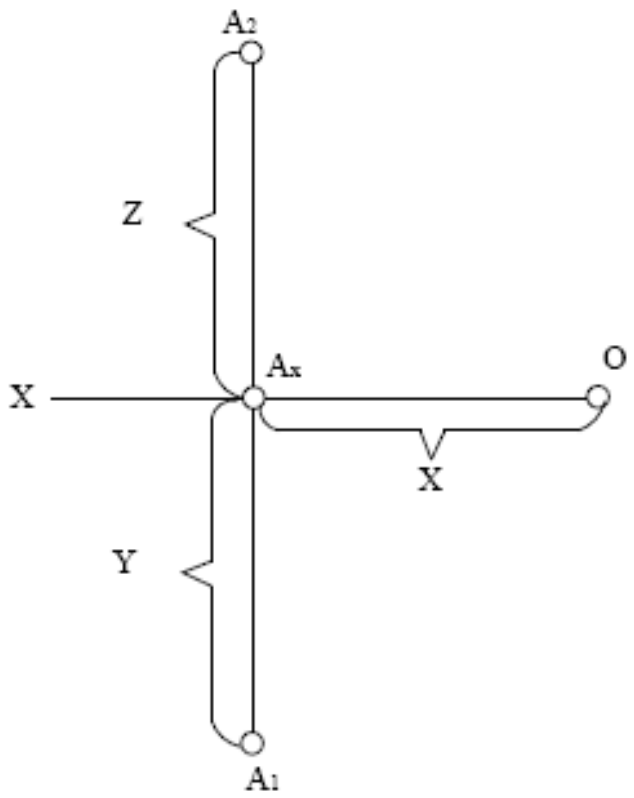


Рисунок 1.11 – Визначення положення точки на комплексному кресленні

Якщо визначити положення точки А відносно цих площин (рис. 1.9) її висотою $AA_1 = z$ і глибиною $AA_2 = y$, ці величини на комплексному кресленні існують як відрізки вертикальної лінії зв’язку (рис. 1.11). Ця обставина дозволяє легко реконструювати креслення, тобто визначити за кресленням положення точки відносно площин проекцій.

1.5 Проекціювання на три взаємно перпендикулярні площини проекцій

Залежно від складності фігури може виникнути необхідність у побудові ще одного зображення предмета на третій профільній площині проекції $П_3$. Цю площину розташовують праворуч від спостерігача перпендикулярно одночасно до горизонтальної $П_1$ і фронтальної $П_2$ площин проекцій (рис. 1.12).

Лінія перетину площин $П_2$ і $П_3$ – нова вісь $П_2/П_3$, яка розташовується на плоскому кресленні (рис. 1.10) паралельно до вертикальної лінії зв'язку A_1A_2. Третя проекція точки A_3 профільна, виявляється пов'язаною з фронтальною проекцією A_2 новою лінією зв'язку – горизонтальною. Причому $A_2A_3 \perp A_2A_1$ і $A_2A_3 \perp П_2/П_3$. Оскільки глибина точки AA_2 проекціюється без спотворень і на площину $П_1$, і на площину $П_3$ (рис. 1.12), ця обставина дозволяє побудувати профільну проекцію точки за її горизонтальною і фронтальною проекціями (рис. 1.13).

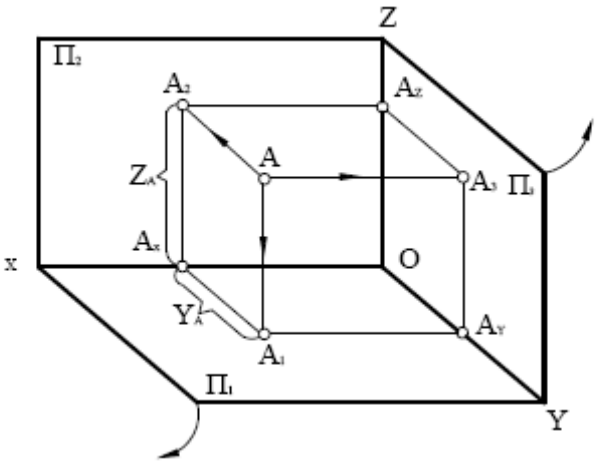


Рисунок 1.12 – Проекціювання точки А на три площини проекцій

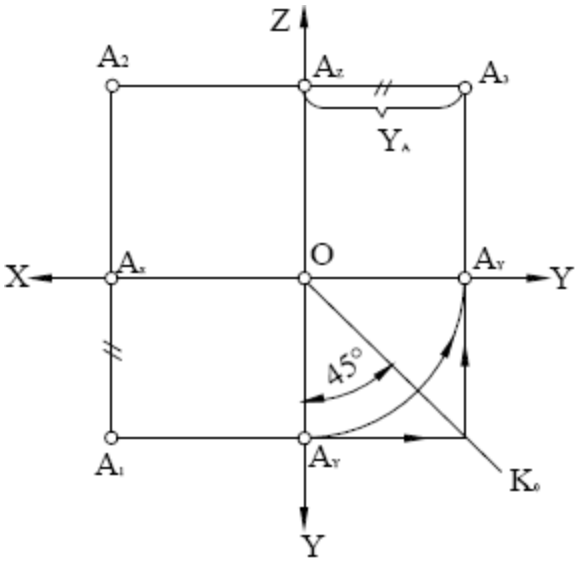


Рисунок 1.13 – Трьохпроекційне комплексне креслення точки А

Через фронтальну проекцію проводять горизонтальну лінію зв'язку перпендикулярно до осі Z і від осі відміряють координату Y_a (відрізок $A_x A_1$).

Цю побудову можна виконати за допомогою дуги кола, проведеного із центра О, або з допомогою прямої, проведеної під кутом 45^0 до осі Y (рис. 1.13).

1.6 Питання для самоперевірки

1. Що називають прямокутними координатами точки?
2. Яке положення займає точка в просторі, якщо її фронтальна проекція розташована на осі проекцій OZ?
3. Яка пряма називається прямою загального положення?
4. Які необхідні і достатні умови для побудови на комплексному кресленні точки, що належить заданій прямій?

ЛЕКЦІЯ 2 ПРОЕКЦІЮВАННЯ ПРЯМОЇ ЛІНІЇ ТА ПЛОЩИНИ

2.1 Проекціювання прямої лінії
- 2.1.1 Положення відрізка прямої відносно площин проекцій
- 2.1.2 Правило прямокутного трикутника
- 2.1.3 Взаємне розташування прямих
- 2.1.4 Проекціювання прямого кута
- 2.1.5 Точка на прямій. Сліди прямої

2.2 Проекціювання площини
- 2.2.1 Задання площини на комплексному кресленні
- 2.2.2 Положення площини відносно площин проекцій
- 2.2.3 Належність точки і прямої площин
- 2.2.4 Головні лінії площини

2.3 Питання для самоперевірки

2.1 Проекціювання прямої лінії

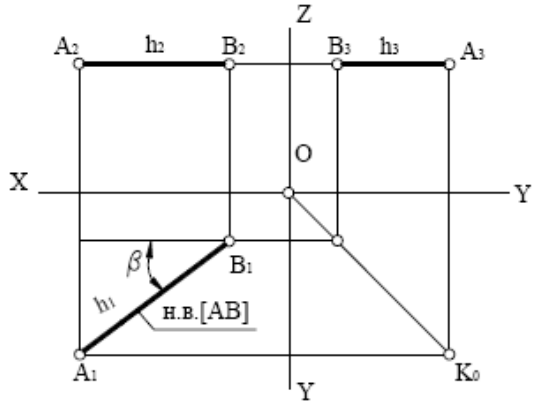
2.1.1 Положення відрізка прямої відносно площин проекцій

Відомо, що пряма лінія в просторі визначається положенням двох її точок. Таким чином, досить виконати комплексне креслення цих двох точок, а потім з'єднати однойменні проекції точок прямими лініями, й отримаємо відповідно горизонтальну, фронтальну і профільну проекції прямої.

Відносно площин проекцій пряма може займати різні положення. Прямі, паралельні до одної із площин проекцій, називають *прямими рівня*. Назва їх залежить від того, якій площині вони паралельні. Пряму, паралельну до горизонтальної площини проекцій, називають *горизонталлю* і позначають на кресленнях через h (рис. 2.1). Отже, $h_2 \parallel x$, $A_1B_1 = [AB]$, β – кут нахилу прямої AB до площини $П_2$.

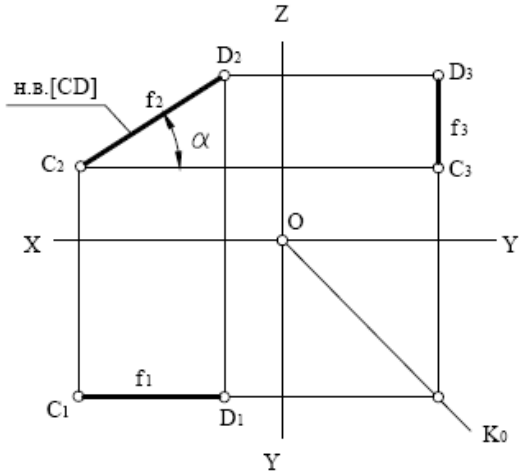
Пряму, паралельну до фронтальної площини проекцій, називають *фронталлю* і позначають через f (рис. 2.2). Де $f_1 \parallel x$, $C_2D_2 = [CD]$, α – кут нахилу прямої CD до площини $П_1$.

Пряму, паралельну профільній площині проекцій, називають *профільною прямою* і позначають через p (рис. 2.3): $p_2 \perp x$, $p_1 \perp x$, $E_3F_3 = [EF]$, α та β – кути нахилу прямої EF до площин $П_1$ та $П_2$.



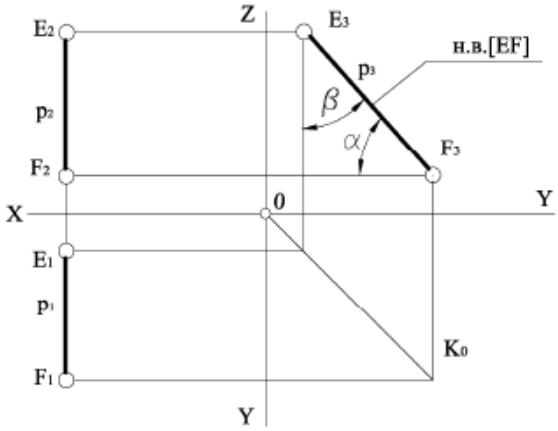
$h \parallel П_1$
$h_2 \parallel OX$
$h_3 \parallel OУ$
$A_1B_1 = [AB]$
$\beta = OX \wedge A_1B_1 = AB \wedge П_2$

Рисунок 2.1 – Кресленик горизонталі h



$f \parallel \Pi_2$
$f_1 \parallel OX$
$f_3 \parallel OZ$
$C_2D_2 = [CD]$
$\alpha = OX \wedge C_2D_2 = CD \wedge \Pi_1$

Рисунок 2.2 – Кресленик фронталі f

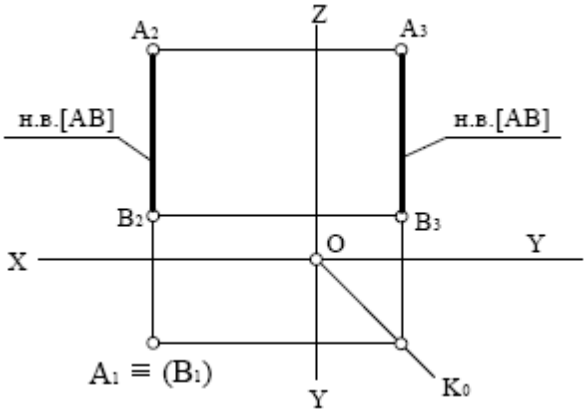


$p \parallel \Pi_3$
$p_2 \perp OX$
$p_1 \perp OX$
$E_3F_3 = [EF]$
$\alpha = OY \wedge P_3 = EF \wedge \Pi_1$
$\beta = OZ \wedge P_3 = EF \wedge \Pi_2$

Рисунок 2.3 – Кресленик профільної прямої p

Прямі, перпендикулярні до одної із площин проекцій, називаються *проекційними*, при цьому вони одночасно паралельні до двох інших площин проекцій. У проекційних прямих одна проекція вироджується в точку, а дві інші проекції паралельні до самої прямої і збігаються з напрямом лінії зв`язку.

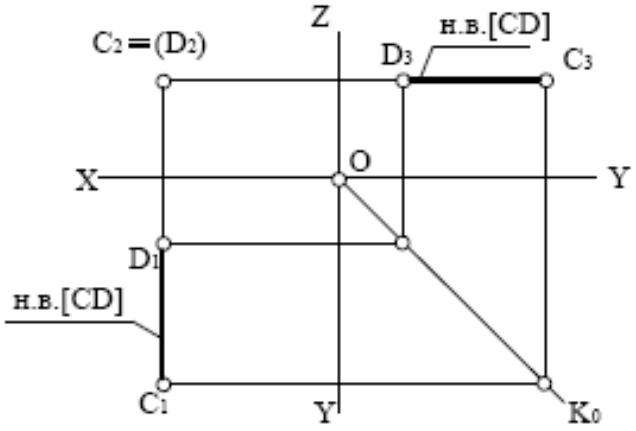
Пряму, перпендикулярну до горизонтальної площини проекції Π_1 і одночасно паралельну до фронтальної Π_2 і профільної Π_3 площинам проекцій, називають *горизонтально проекційною* (рис. 2.4).



$AB \perp \Pi_1$
$AB \parallel \Pi_2$, $AB \parallel \Pi_3$
$A_2B_2 \parallel OZ$
$A_3B_3 \parallel OZ$
$A_1 \equiv (B_1)$ – точка

Рисунок 2.4 – Кресленик горизонтально проекційної прямої

Пряму, перпендикулярну до фронтальної площини проекцій $П_2$ і одночасно паралельну до горизонтальної $П_1$ та профільної $П_3$ площин проекцій, називають *фронтально проекційною* (рис. 2.5).

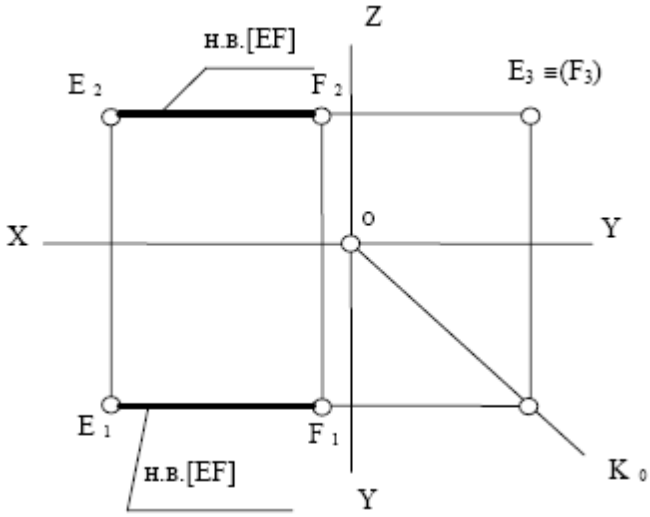


$CD \perp П_2$
$CD \parallel П_1$
$CD \parallel П_3$
$C_1D_1 \parallel OY$
$C_3D_3 \parallel OY$
$C_2 \equiv (D_2)$ – точка

Рисунок 2.5 – Кресленик фронтально проекційної прямої

Пряму, перпендикулярну до профільної площини проекцій $П_3$ і одночасно паралельну до горизонтальної $П_1$ та фронтальної $П_2$ площин проекцій, називають *профільно-проекційною* (рис. 2.6).

Пряму, яка не паралельна і не перпендикулярна до жодної з площин проекцій, називають *прямою загального положення*. Приклад такої прямої наведено на рис. 2.7. Відрізок [AB] прямої на жодну із площин проекцій не відображається в натуральну величину, тобто $[A_1B_1] < [AB]$, $[A_2B_2] < [AB]$, $[A_3B_3] < [AB]$.



$EF \perp П_3$
$EF \parallel П_1$
$EF \parallel П_2$
$E_1F_1 \parallel OX$
$E_2F_2 \parallel OX$
$E_3 \equiv (F_3)$ – точка

Рисунок 2.6 – Кресленик профільно-проекційної прямої

Пряма загального положення має різні кути нахилу до площин проекцій. Під кутом нахилу прямої до площини проекцій розуміють такий кут, який утворюється між самою прямою та її відповідною проекцією.

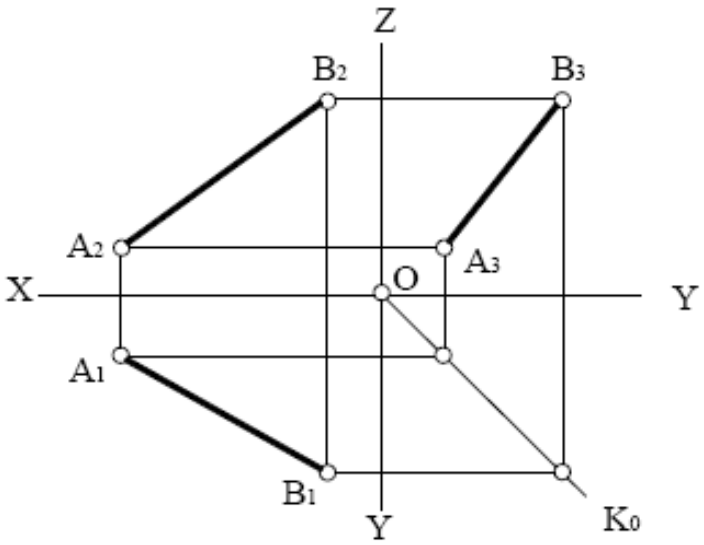


Рисунок 2.7 – Кресленик прямої загального положення

2.1.2 Правило прямокутного трикутника

Для прямої загального положення виникає потреба у визначенні натуральної величини відрізка та кутів нахилу до площин проекцій. Розглянемо рисунок 2.8, із якого випливає правило прямокутного трикутника.

Візьмемо відрізок AB і побудуємо його ортогональну проекцію на горизонтальну і фронтальну площини проекцій. Дістанемо два прямокутних трикутники ΔAB_0B і ΔAA_0B, у яких [*AB*] – гіпотенуза є натуральною величиною, $\alpha = \angle BAB_0$ – кут нахилу прямої до горизонтальної площини проекцій $П_1$, $\beta = \angle ABA$ – кут нахилу прямої до фронтальної площини проекцій $П_2$. Для трикутника ΔAB_0B катет AB_0 дорівнює величині горизонтальної проекції A_1B_1 відрізка [*AB*], другий катет BB_0 дорівнює різниці відстаней від кінців відрізка (точки A і B) до горизонтальної площини проекцій, тобто ΔZ.

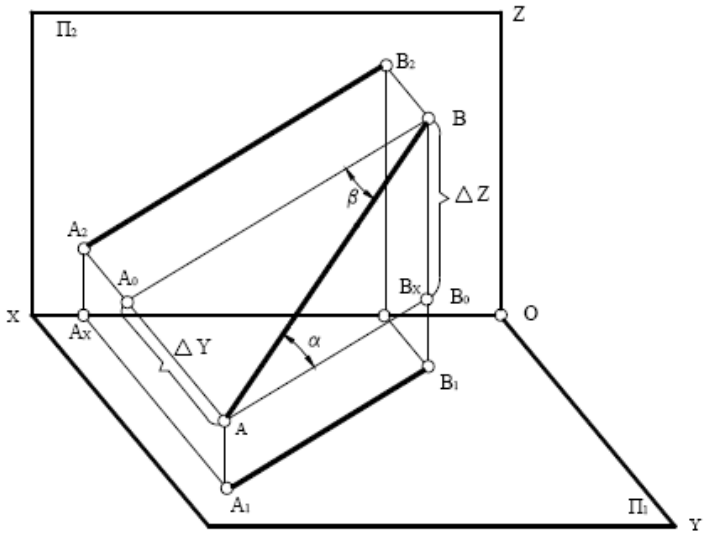


Рисунок 2.8 – Пряма загального положення у просторі

Аналогічні висновки випливають також із розгляду трикутника ΔAA_0B.

Для визначення натуральної величини відрізка прямої та кута нахилу прямої до певної площини проекції потрібно на комплексному кресленні (рис. 2.9) побудувати прямокутний трикутник на тій площині проекцій, відносно якої визначається кут нахилу прямої, тоді натуральна величина відрізка прямої дорівнює гіпотенузі прямокутного трикутника, одним катетом якого є проекція відрізка на тій площині проекцій, другим катетом є різниця відстаней від кінців відрізка до тієї самої площини проекцій, а кут між відповідною проекцією цього відрізка та його гіпотенузою дорівнює куту нахилу прямої до цієї площини проекцій.

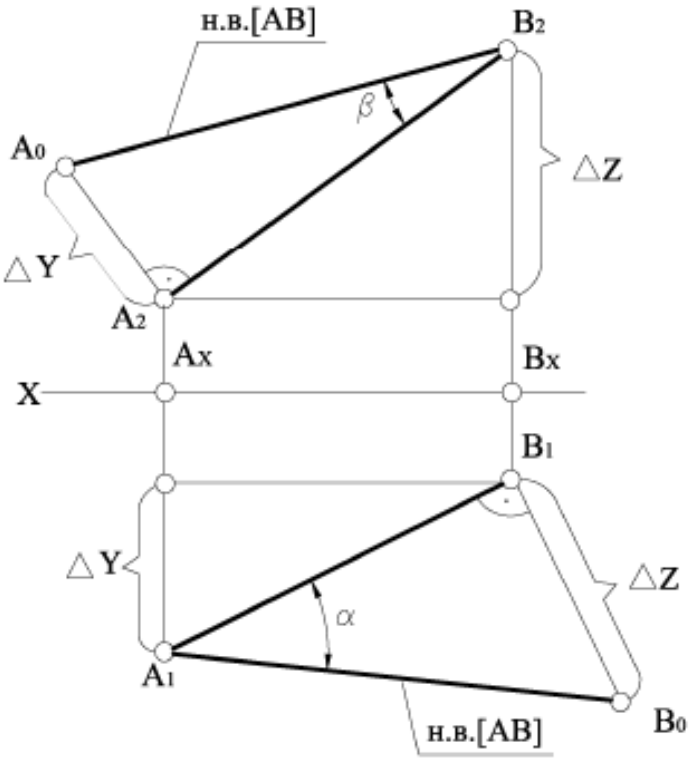


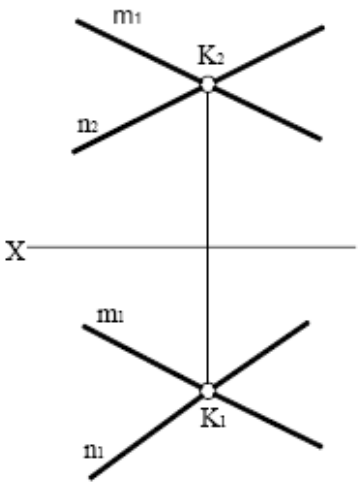
Рисунок 2.9 – Визначення натуральної величини відрізка прямої та кута нахилу прямої до площин проекції

2.1.3 Взаємне розташування прямих

Дві прямі в просторі можуть співпадати ($a \equiv b$), бути паралельними ($c \parallel d$), перетинними ($m \cap n$), мимобіжними ($k \dot{-} l$).

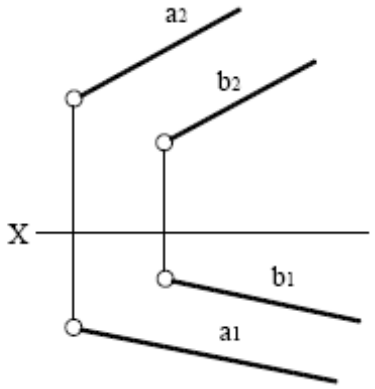
Якщо дві прямі перетинаються в деякій точці К, проекції цієї точки мають належати однойменним проекціям прямих, тобто точки перетину однойменних проекцій перетинних прямих мають лежати на одній лінії зв’язку (рис. 2.10).

Якщо дві прямі паралельні, на комплексному кресленні їхні однойменні проекції паралельні (рис. 2.11) або збігаються на одній із площин проекцій (рис. 2.12).



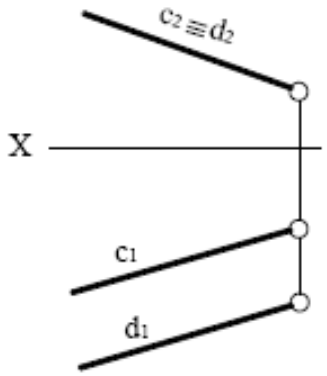
$$m \cap n = K \begin{cases} m_1 \cap n_1 \\ m_2 \cap n_2 \end{cases}$$

Рисунок 2.10 – Прямі, що перетинаються



$$a \parallel в \begin{cases} a_2 \parallel в_2 \\ a_1 \parallel в_1 \end{cases}$$

Рисунок 2.11 – Паралельні прямі



$$c \parallel d \begin{cases} c_2 \equiv d_2 \\ c_1 \parallel d_1 \end{cases}$$

Рисунок 2.12 – Паралельні прямі

Якщо прямі паралельні одній із площин проекцій, їх паралельність визначається на площині, до якої прямі паралельні. У наведених нижче прикладах (рис. 2.13, рис. 2.14) прямі AB та CD паралельні до профільної площини проекцій, таким чином, їх взаємопаралельність визначається на площині $П_3$. На рисунку 2.13 AB та CD паралельні між собою, а на рисунку 2.14 – не паралельні.

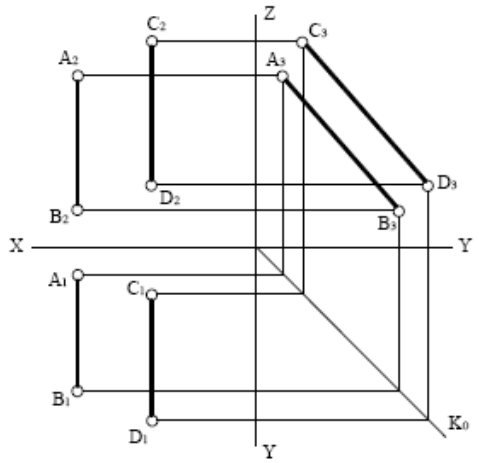


Рисунок 2.13 – Паралельні прямі

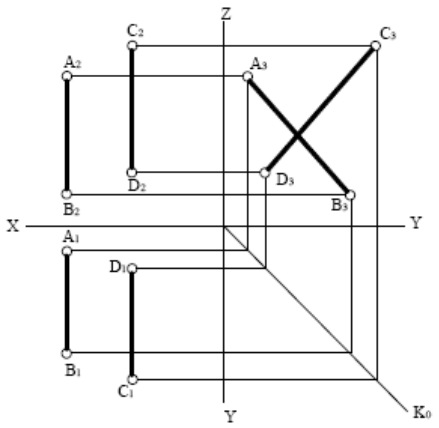


Рисунок 2.14 – Мимобіжні прямі

Якщо дві прямі спільних точок не мають і вони не паралельні, їх називають *мимобіжними*.

На рисунку 2.15 зображено дві мимобіжні прямі m і n. Фронтальні проекції їх перетинаються в точці $3_2 \equiv (4_2)$, а горизонтальні – у точці $1_1 \equiv (2_1)$. Для визначення «перекривання» відрізків на проекціях застосовують конкуруючі точки, які лежать на одному проекціювальному промені, належать різним прямим і на одній площині проекцій збігаються.

На рисунку 2.15 – дві пари конкуруючих точок:1 і 2 відносно поля $П_1$ та 3 і 4 – відносно поля $П_2$. При цьому точки 1 і 4 належать відрізку m, а точки 2 і 3 – відрізку n. Оскільки точка 1 розміщена вище від точки 2 на полі $П_1$, відрізок m «перекриває» відрізок n, невидиму проекцію точки 2_1 беруть у дужки. Точка 3 лежить ближче до спостерігача, ніж точка 4, тому на полі $П_2$ відрізок n «перекриває» відрізок m, невидиму проекцію точки 4_2 беруть у дужки.

На рисунку 2.16 зображені дві мимобіжні прямі a і b. Фронтальні проекції їх перетинаються в точці $1_2 \equiv (2_2)$, а на горизонтальній площині проекцій видно, що точка 1_1 належить a_1, а точка 2_1 належить b_1.

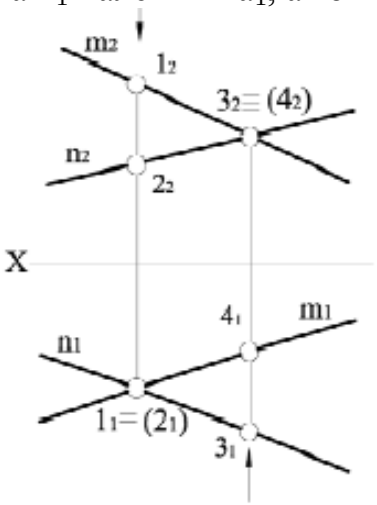


Рисунок 2.15 – Мимобіжні прямі m і n

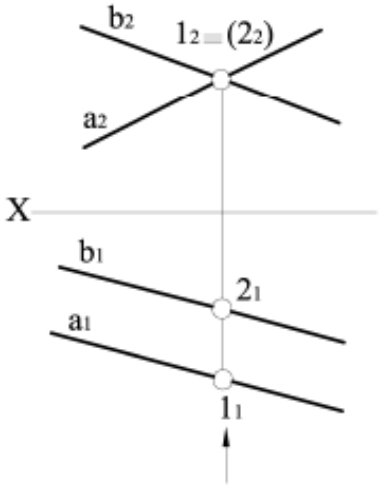


Рисунок 2.16 – Мимобіжні прямі a і b

2.1.4 Проекціювання прямого кута

Якщо одна сторона прямого кута паралельна до площини проекцій, а друга до неї не перпендикулярна, при ортогональному проекціюванні прямий кут проекціюється на цю площину проекцій без спотворень.

На рисунку 2.17 зображено прямий кут ABC, у якого сторона AB паралельна до площини $П_1$. Проекційна площина Σ (BCC_1B_1) перпендикулярна до площини $П_1$. AB ⊥ Σ , оскільки AB ⊥ BC та AB ⊥ BB, тому AB⊥ B_1C_1.

Оскільки AB || A_1B_1, – $A_1B_1 \perp B_1C_1$.

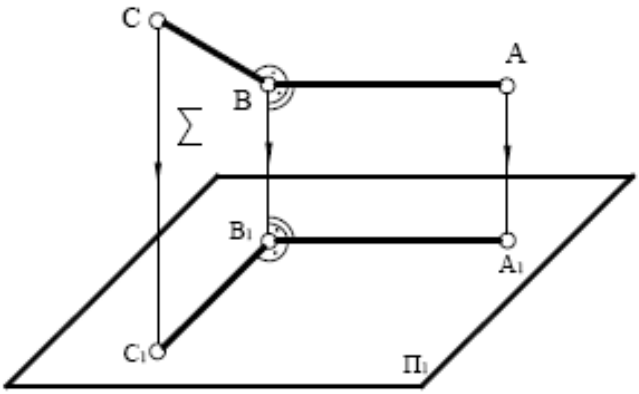
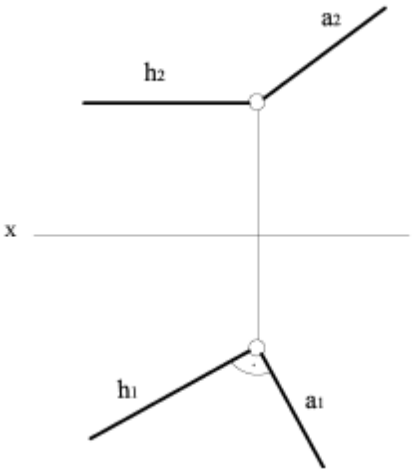


Рисунок 2.17 – Проекціювання прямого кута

На рисунку 2.18 наведено приклад проекціювання прямого кута, однією стороною якого є горизонтальна пряма рівня h.



h_2 ll ox
h_1 = н.в.
h ll $П_1$
h ⊥ a

Рисунок 2.18 – Проекціювання прямого кута,
однією стороною якого є горизонталь h

Правило проекціювання прямого кута використовується при розв’язанні задач по знаходженню відстані від точки до прямої особливого положення. На рисунку 2.19 наведено приклад по знаходженню відстані від точки C до горизонтальної прямої рівня h.

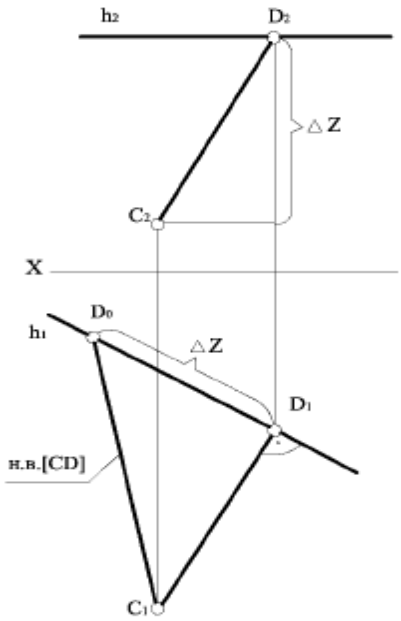


Рисунок 2.19 – Знаходження відстані від точки С
до горизонтальної прямої рівня h

Із точки С необхідно опустити перпендикуляр на пряму h. Оскільки h || $П_1$, прямий кут спроекціюється на $П_1$ без спотворень. Натуральну величину |CD| знаходимо методом прямокутного трикутника.

2.1.5 Точка на прямій. Сліди прямої

Якщо в просторі точка належить прямій, проекції цієї точки лежать на однойменних проекціях цієї прямої та на спільній лінії проекційного зв'язку.

На рисунку 2.20 зображена точка А, що належить прямій l, бо її проекції A_1 і A_2 розташовані відповідно на горизонтальній l_1 і фронтальній l_2 проекціях прямої.

Точка не належить прямій лінії, якщо жодна з проекцій точки не належить відповідній проекції прямої (наприклад точка С), або тільки одна з проекцій точки належить однойменній проекції прямої лінії (наприклад точка В).

Точка перетину прямої з площиною проекцій називається *слідом прямої*.

Точка М (M_1, M_2, M_3) перетину прямої l із горизонтальною площиною проекцій $П_1$ має назву *горизонтального сліду*; точка N (N_1, N_2, N_3) перетину прямої l з фронтальною площиною проекцій $П_2$ має назву *фронтального сліду*; точка Р (P_1, P_2, P_3) перетину прямої l з профільною площиною проекцій $П_3$ має назву *профільного сліду*.

На рисунку 2.21 наведено приклад побудови горизонтального і фронтального сліду для прямої l. Для знаходження горизонтального сліду прямої необхідно продовжити фронтальну проекцію l_2 до перетину з віссю ОХ. Далі з точки перетину M_2 – фронтальної проекції горизонтального сліду – провести перпендикуляр до перетину з горизонтальною проекцією прямої.

Точка перетину M_1 – горизонтальна проекція горизонтального сліду, яка збігається з самим горизонтальним слідом M.

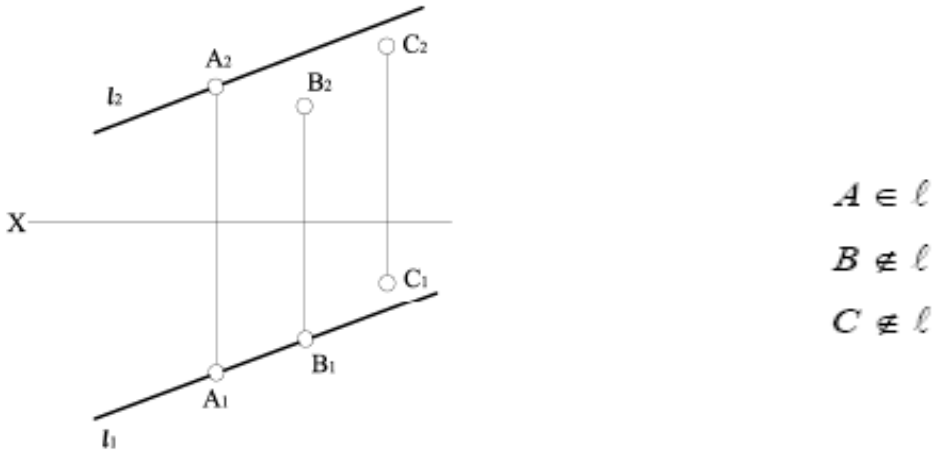


Рисунок 2.20 – Креслення точок A, B, C та прямої l

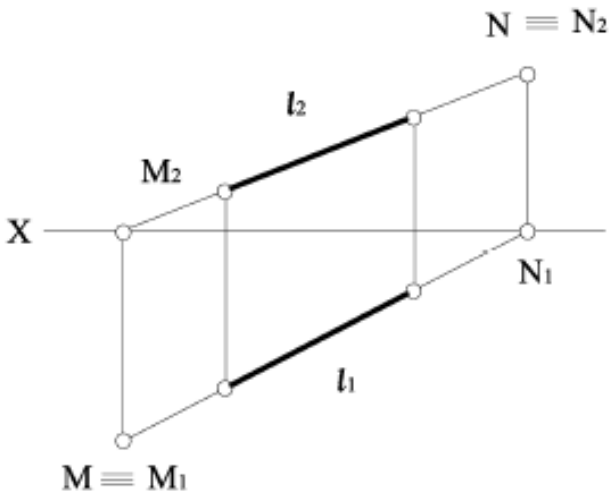


Рисунок 2.21 – Проекції горизонтального (M) та фронтального (N) слідів прямої l

Для знаходження фронтального сліду прямої l необхідно продовжити горизонтальну проекцію прямої l_1 до перетину з віссю OX. Далі з точки перетину N_1 – горизонтальної проекції фронтального сліду – провести перпендикуляр до перетину з фронтальною проекцією прямої. Точка перетину N_2 – фронтальна проекція фронтального сліду, яка збігається з самим фронтальним слідом N.

2.2 Проекціювання площини

2.2.1 Задання площини на комплексному кресленні

Площина є найпростішою поверхнею. *Площиною* називається поверхня, яка має таку властивість: якщо будь-яка пряма має з нею спільні точки, вона цілком їй належить. Із геометричної точки зору площину Σ (рис. 2.22) можна подати у вигляді нескінченної множини прямої лінії *a*, яка плоскопаралельно переміщується по напрямній прямій l.

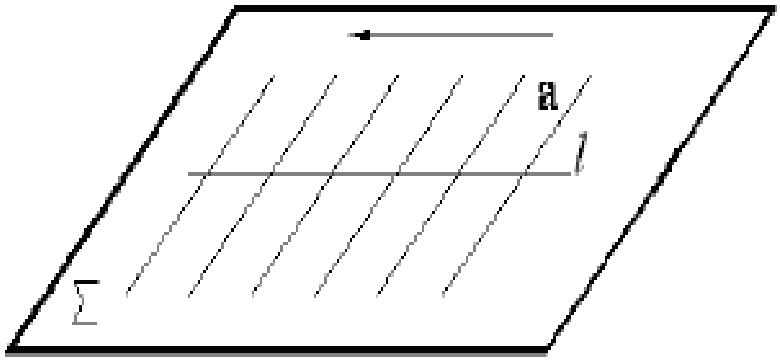
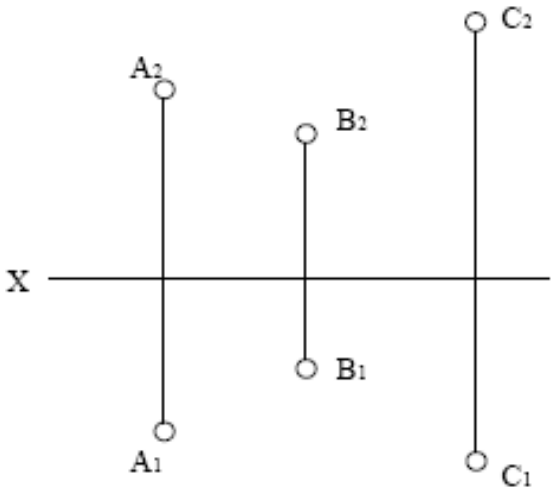


Рисунок 2.22 – Площина ∑

Площину можна задавати 6 способами.

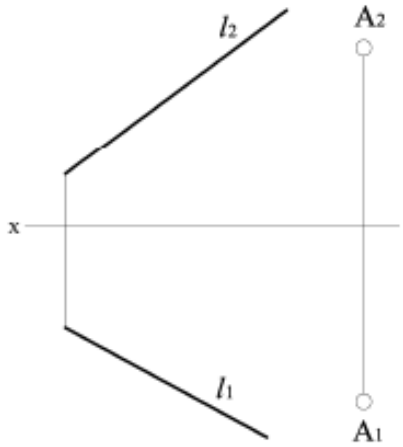
1. Трьома точками А, В і С, які не належать одній прямій (рис. 2.23).



$\theta(A,B,C)$

Рисунок 2.23 – Задання площини трьома точками А, В і С

2. Прямою і точкою, яка не належить цій прямій (рис. 2.24).

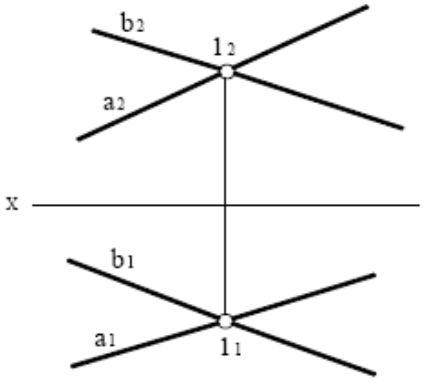


$\theta(\ell, A)$

$A \notin \ell$

Рисунок 2.24 – Задання площини прямою і точкою

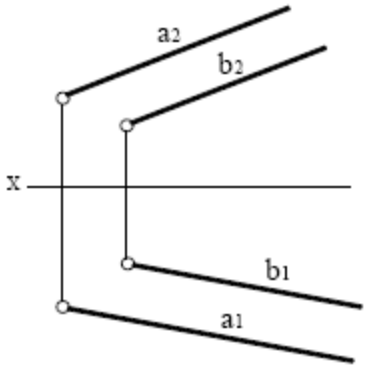
3. Двома прямими, які перетинаються (рис. 2.25).



$\theta(a \cap b)$

Рисунок 2.25 – Задання площини двома прямими, які перетинаються

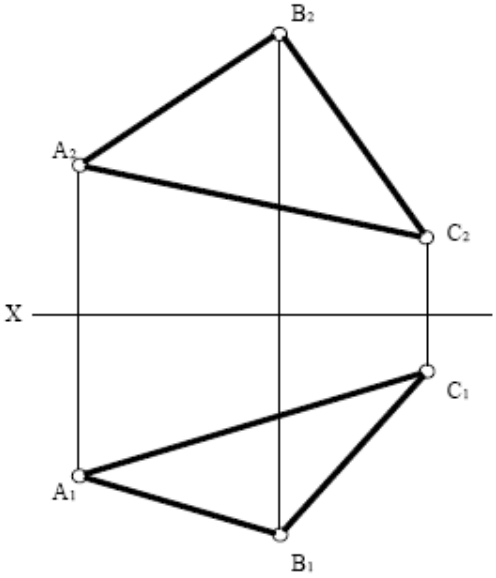
4. Двома паралельними прямими (рис. 2.26).



$\theta(a \parallel b)$

Рисунок 2.26 – Задання площини двома паралельними прямими

5. Будь-якою плоскою фігурою, наприклад трикутником (рис. 2.27).



$\theta(ABC)$

Рисунок 2.27 – Задання площини трикутником

6. Слідами площини, що являють собою прямі лінії, по яких вона перетинає відповідні площини проекцій (рис. 2.28).

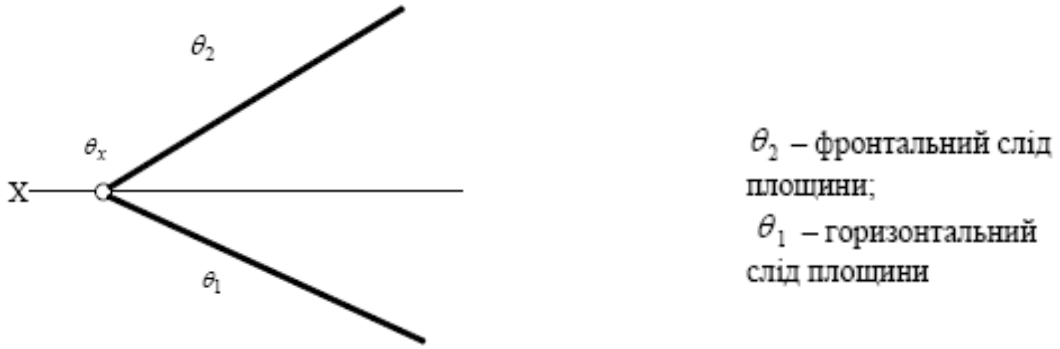


Рисунок 2.28 – Задання площини слідами

На комплексному кресленні проекції площини не обмежуються проекціями елементів, це означає, що площина вважається нескінченною.

2.2.2 Положення площини відносно площин проекцій

Площина, яка не паралельна і не перпендикулярна до жодної з площин проекцій, називається *площиною загального положення*. Приклади таких площин наведені на рисунках 2.23 – 2.28.

На рисунку 2.29 наведено приклад площини θ загального положення, яка перетинає всі три площини проекцій.

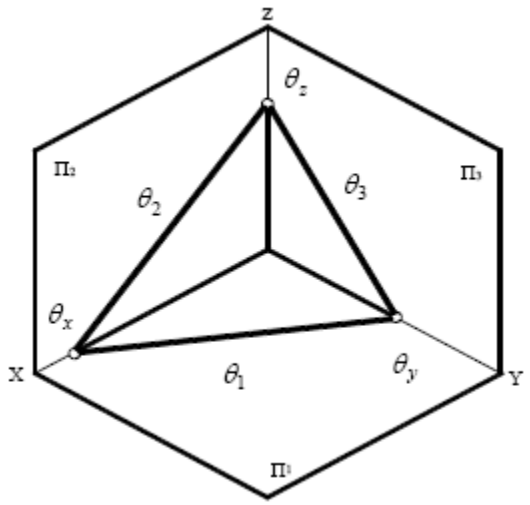


Рисунок 2.29 – Площина загального положення, що задана слідами

Відповідні сліди площини θ позначають:

$\theta_1 = \theta \cap \Pi_1$ – горизонтальний слід площини θ;

$\theta_2 = \theta \cap \Pi_2$ – фронтальний слід площини θ;

$\theta_3 = \theta \cap \Pi_3$ – профільний слід площини θ.

Точки $\theta x = \theta_2 \cap \theta_1$, $\theta y = \theta_1 \cap \theta_3$, $\theta z = \theta_2 \cap \theta_3$, в яких перетинаються два сліди площини, отримали назву точок збігу слідів (рис. 2.30).

Комплексне креслення площини загального положення θ наведено на рисунку 2.30.

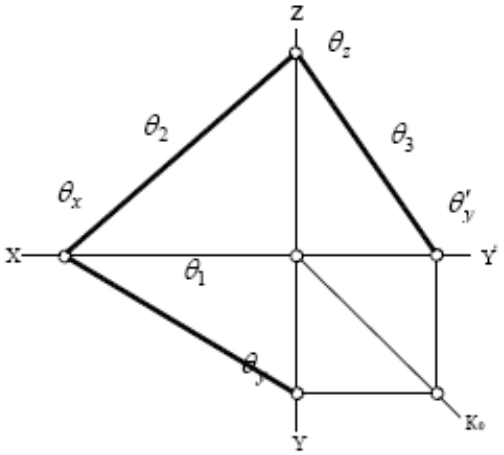
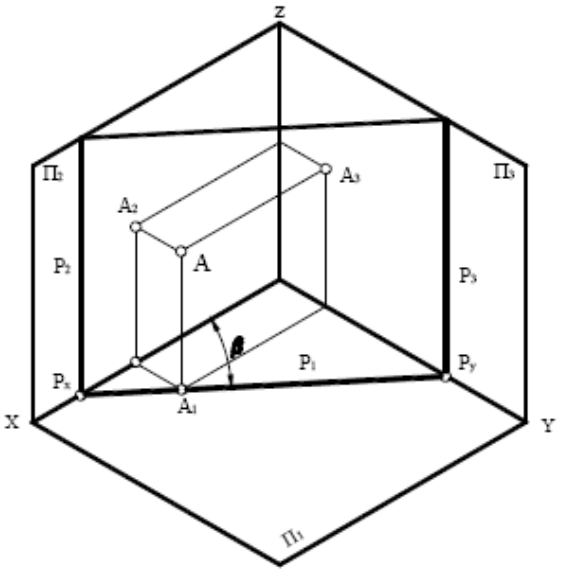


Рисунок 2.30 – Комплексне креслення площини загального положення θ

Площини, які перпендикулярні тільки до одної з площин проекцій, називають проекційними. В залежності від того, якій площині проекцій перпендикулярна дана площина, вона має відповідну назву: горизонтально проекційна, фронтально проекційна та профільно-проекційна площини.

Площина, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій називається *горизонтально проекційною площиною* (рис. 2.31).



$P \perp \Pi_1$

$P_2 \perp OX$

$P_3 \perp OY$

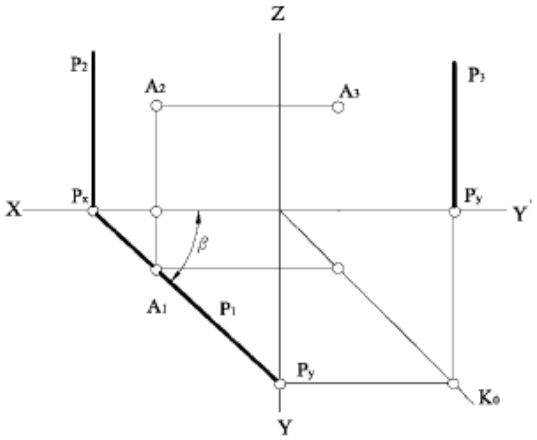
$\beta = OX \wedge P_1 = \Pi_2 \wedge P$

$A \in P \rightarrow A_1 \in P_1$

Рисунок 2.31 – Горизонтально проекційна площина Р

Горизонтальні проекції точок, прямих, плоских фігур, які належать горизонтально проекційній площині, збігаються з горизонтальним слідом цієї площини.

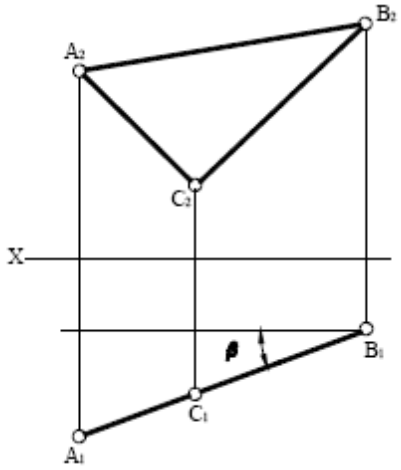
На рисунках 2.32 та 2.33 наведено приклад комплексного креслення горизонтально проекційної площини, яка задана слідами та трикутником θ (*ABC*) відповідно.



$P \perp \Pi_1$

$A \in P \rightarrow A_1 \in P_1$

Рисунок 2.32 – Комплексне креслення горизонтально проекційної площини Р

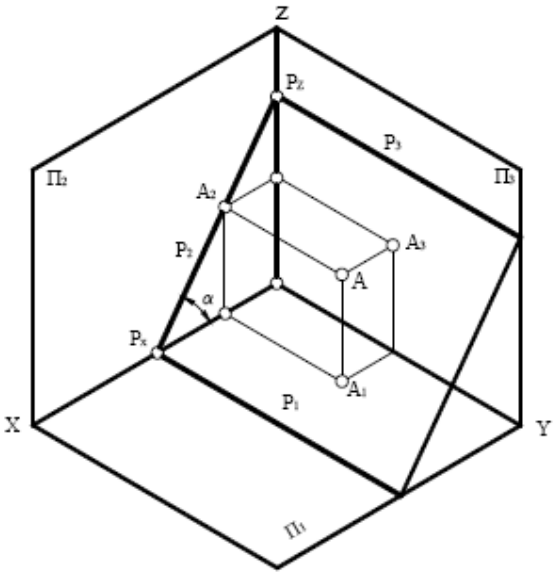


$\theta(ABC) \perp \Pi_1$

$\beta = OX \wedge (A_1C_1B_1) = \theta \wedge \Pi_2$

Рисунок 2.33 – Горизонтально проекційна площина, що задана трикутником

Площина, яка перпендикулярна до фронтальної площини проекцій називається *фронтально проекційною площиною* (рис. 2.34).



$P \perp \Pi_2$

$A \in P \rightarrow A_2 \in P_2$

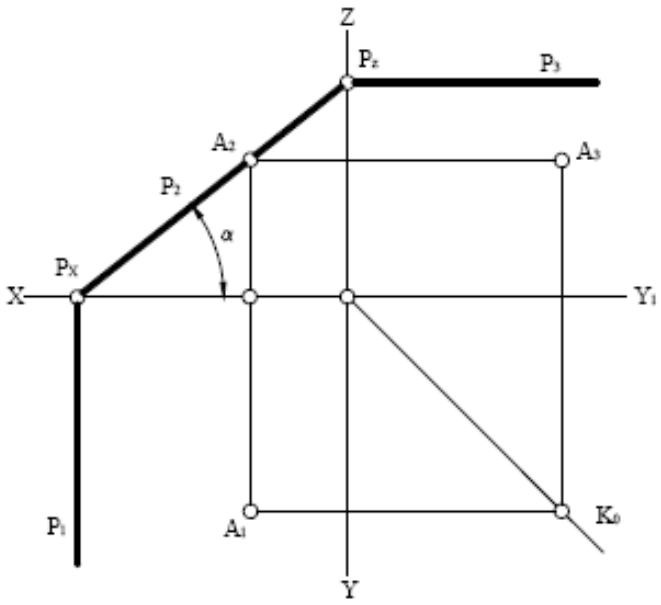
$P_1 \perp OX$

$P_3 \perp OZ$

$\alpha = OX \wedge P_2 = P \wedge \Pi_1$

Рисунок 2.34 – Фронтально проекційна площина

На рисунку 2.35 наведено приклад комплексного креслення фронтально проекційної площини $P \perp \Pi_2$.



$P \perp \Pi_2$

$P_1 \perp OX$

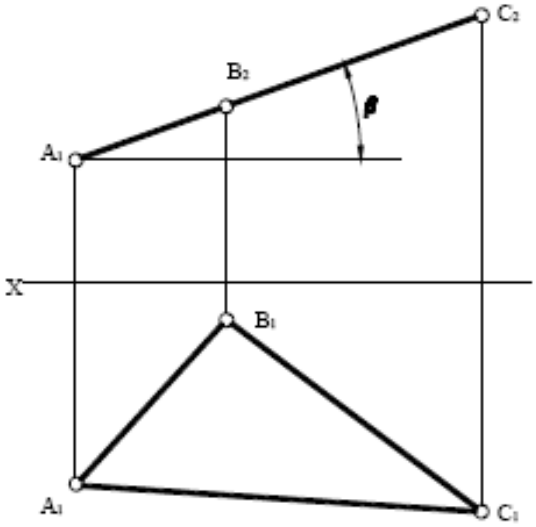
$P_3 \perp OZ$

$A \in P \rightarrow A_2 \in P_2$

Рисунок 2.35 – Комплексне креслення фронтально проекційної площини P

Фронтальні проекції точок, прямих, плоских фігур, які належать до фронтально проекційної площини, збігаються з фронтальним слідом цієї площини.

На рисунку 2.36 наведено приклад комплексного креслення фронтально проекційної площини, яка задана відсіком площини θ (*ABC*).

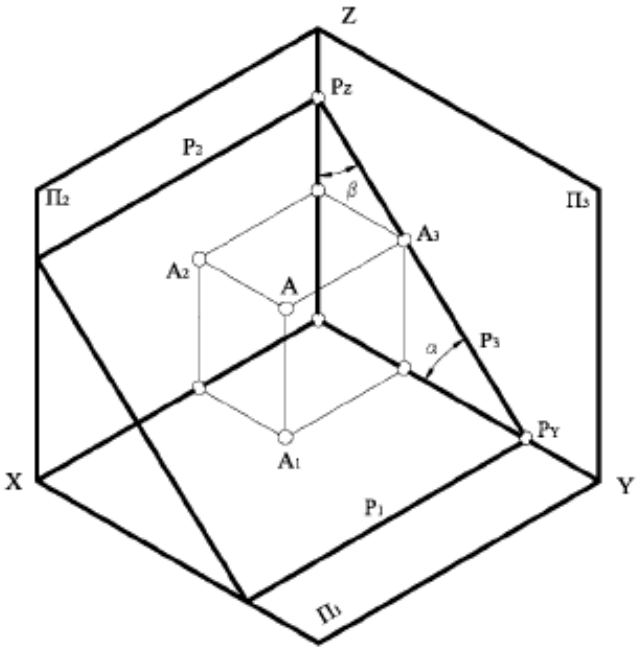


$\theta(ABC) \perp \Pi_2$

$\beta = OX \wedge A_2B_2C_2 = \theta \wedge \Pi_1$

Рисунок 2.36 – Комплексне креслення фронтально проекційної площини, що задана відсіком площини θ (*ABC*)

Площина, яка перпендикулярна до профільної площини проекцій, називається *профільно проекційною площиною* (рис. 2.37).



$P \perp \Pi_3$

$P_1 \perp OY$

$P_2 \perp OZ$

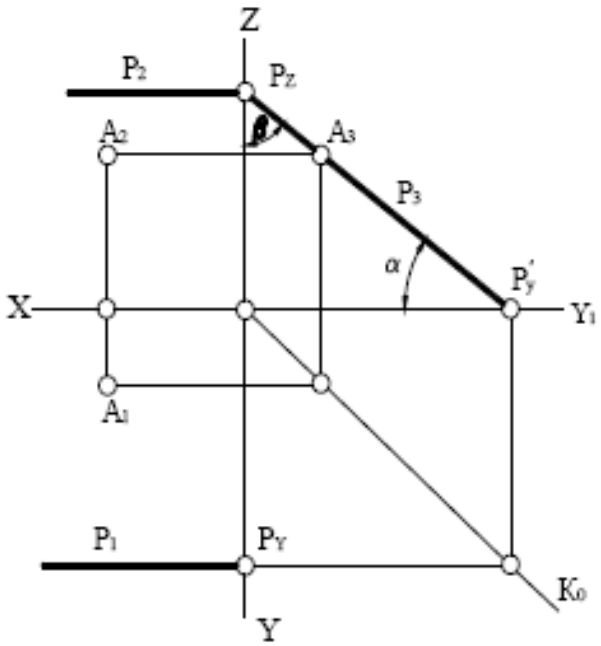
$\alpha = OY \wedge P_3 = P \wedge \Pi_1$

$\beta = OZ \wedge P_3 = P \wedge \Pi_2$

$A \in P \rightarrow A_3 \in P_3$

Рисунок 2.37 – Профільно проекційна площина

На рисунку 2.38 наведено приклад комплексного креслення профільно проекційної площини $P \perp \Pi_3$.

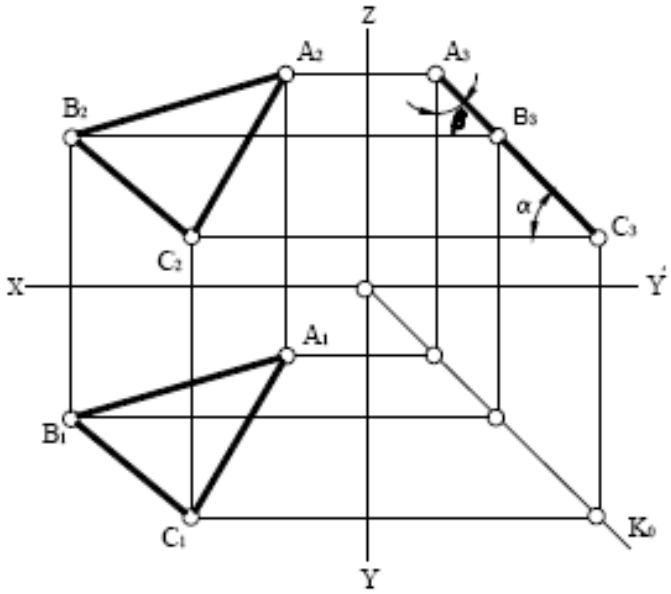


$A \in P \rightarrow A_3 \in P_3$

Рисунок 2.38 – Комплексне креслення профільно проекційної площини P

Профільні проекції точок, прямих, плоских фігур, які належать до профільно проекційної площини, збігаються з профільним слідом цієї площини.

На рисунку 2.39 наведено приклад комплексного креслення профільно проекційної площини, яка задана трикутником θ (ABC).



$\theta(ABC) \perp \Pi_3$

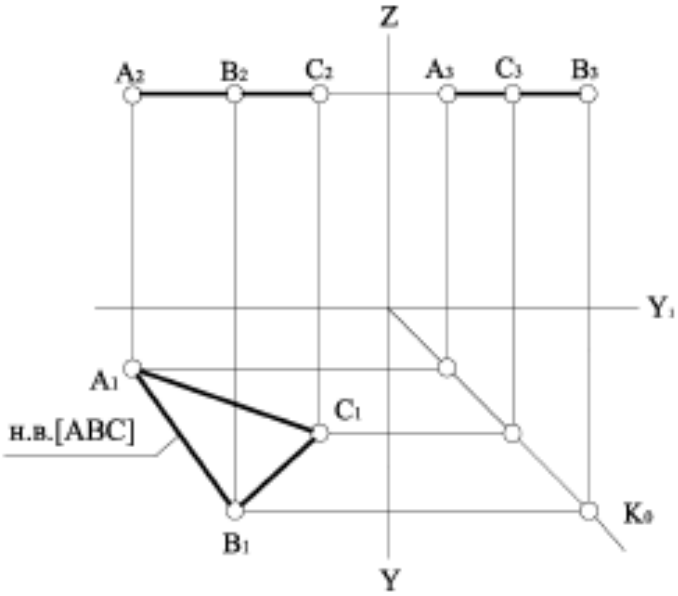
$\alpha = OY \wedge (A_3B_3C_3) = \theta \wedge \Pi_1$

$\beta = OZ \wedge (A_3B_3C_3) = \theta \wedge \Pi_2$

Рисунок 2.39 – Профільно проекційна площина θ (ABC)

Площини, які одночасно перпендикулярні до двох площин проекцій, називаються площинами рівня (або подвійно проекційними), як наслідок, вони паралельні до третьої площини проекцій.

Площина, яка паралельна до горизонтальної площини проекцій, називається *горизонтальною площиною рівня* (рис. 2.40).



$A_2B_2C_2 \perp OZ$

$A_3B_3C_3 \perp OZ$

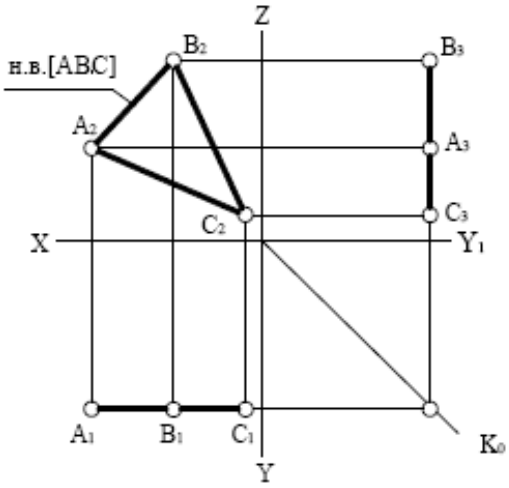
$(A_1B_1C_1) - н.в.[ABC]$

$\theta(ABC) \perp \Pi_2$

$\theta(ABC) \perp \Pi_3$

Рис. 2.40 – Комплексне креслення горизонтальної площини рівня, що задана θ (*ABC*)

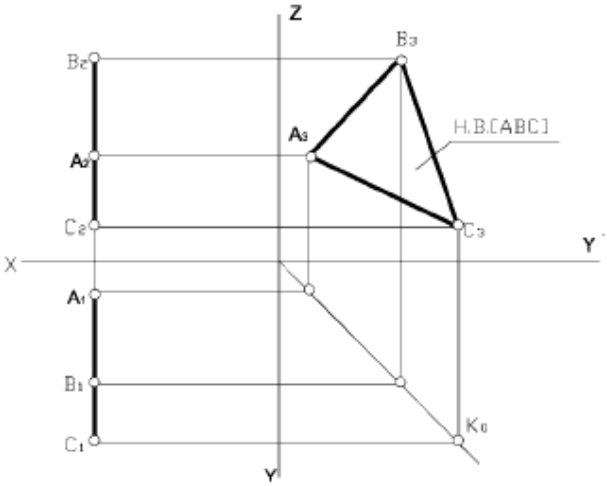
Площина, яка паралельна фронтальній площині проекцій, називається *фронтальною площиною рівня* (рис. 2.41).



$\Phi\ (ABC) \perp \Pi_1$
$\Phi\ (ABC) \perp \Pi_3$
$\Phi\ (ABC) \parallel \Pi_2$
$A_1B_1C_1 \parallel ox$
$B_3A_3C_3 \parallel oz$
$(A_2B_2C_2) =$ н.в.[ABC]

Рисунок 2.41 – Комплексне креслення фронтальної площини рівня, що задана Ф (*ABC*)

Площина, яка паралельна профільній площині проекцій, називається *профільною площиною рівня*. На рисунку 2.42 наведено приклад комплексного креслення цієї площини, яка задана відсіком площини Σ (ABC).

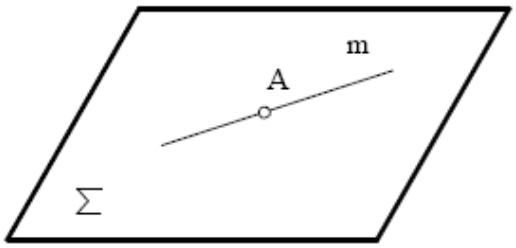


$\Sigma(ABC) \parallel \Pi_3$
$\Sigma(ABC) \perp \Pi_1$
$\Sigma(ABC) \perp \Pi_2$
$A_1B_1C_1 \perp ox$
$B_2A_2C_2 \perp ox$
$(A_3B_3C_3) =$ н.в.$[ABC]$

Рисунок 2.42 – Комплексне креслення профільної площини рівня, що задана Σ (*ABC*)

2.2.3 Належність точки і прямої площині

Точка належить площині, якщо вона належить якійсь прямій лінії, яка належить цій площині (рис. 2.43).

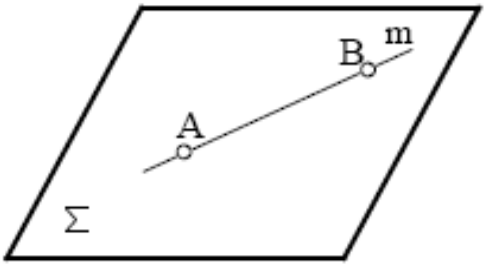


$m \in \Sigma$

$A \in m \Rightarrow A \in \Sigma$

Рисунок 2.43 – Точка в площині

Пряма лінія належить площині, якщо вона проходить через дві точки цієї площини (рис. 2.44).

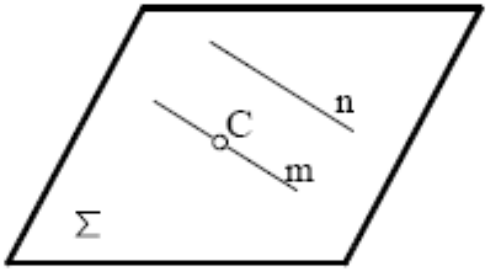


$A \in \Sigma, B \in \Sigma$

$m \supset A, B \Rightarrow m \in \Sigma$

Рисунок 2.44 – Пряма в площині

Пряма лінія належить площині, якщо вона проходить через одну точку цієї площини і паралельна до будь-якої прямої, розташованої у цій площині (рис. 2.45).



$C \in \Sigma, n \in \Sigma$

$m \supset C, \mathrm{m} \parallel \mathrm{n} \Rightarrow n \in \Sigma$

Рисунок 2.45 – Пряма в площині

Якщо пряма лінія належить площині, її відповідні сліди належать відповідним слідам площини (рис. 2.46).

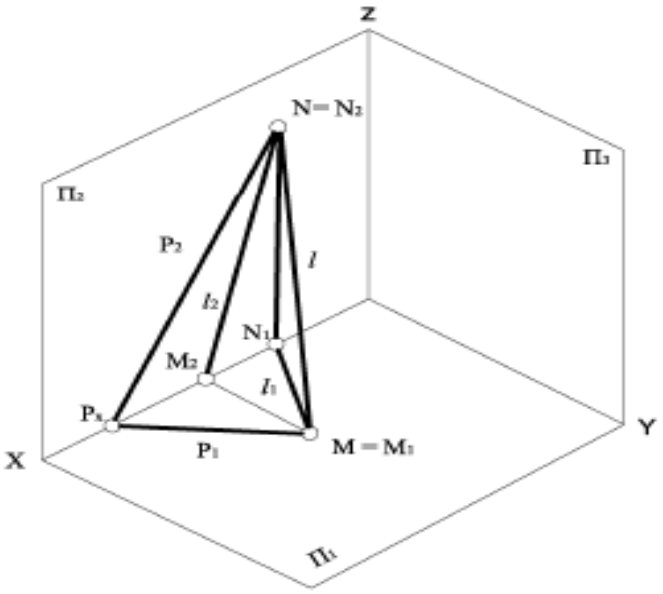


Рисунок 2.46 – Пряма в площині

На рисунку 2.47 наведено приклад комплексного креслення площини загального положення P, яка задана слідами P_1 та P_2, та прямої *l*, що належить цій площині.

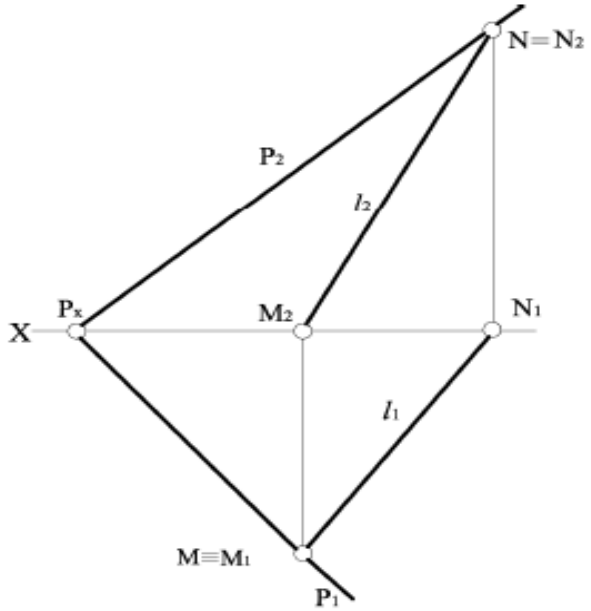


Рисунок 2.47 – Комплексне креслення площини, що задана слідами та пряма l

2.2.4 Головні лінії площини

Лініями рівня площини називають лінії, що належать даній площині та паралельні до одної з площин проекцій, – це горизонтальні h, фронтальні f і профільні прямі p (рис. 2.48).

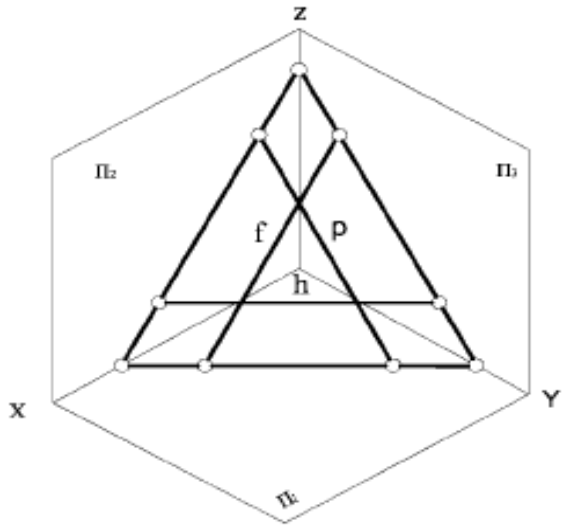
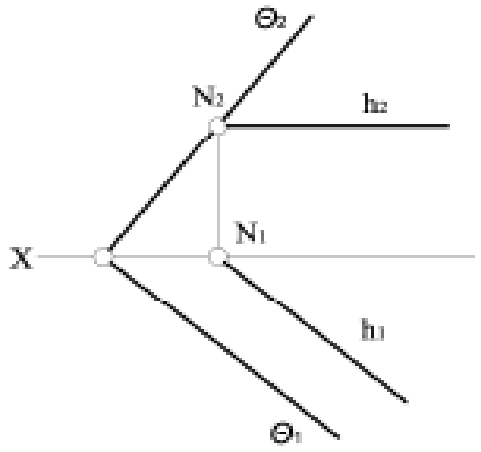


Рисунок 2.48 – Лінії рівня площини: h, f та p

Лінії перетину площини з площинами проекцій – сліди площини – також є горизонтальною h, фронтальною f та профільною p прямими. Їх у цьому випадку називають *нульовими*: h^0, f^0, p^0.

На рисунку 2.49 наведено приклад комплексного креслення горизонтальної прямої площини θ, яка задана слідами.

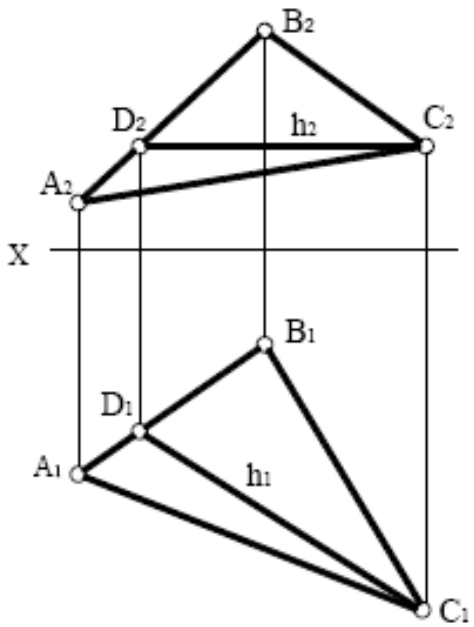
Горизонталь – це лінія, що належить площині й паралельна горизонтальній площині проекцій $П_1$.



$(h \in \theta) \wedge (h \parallel П_1)$
$h_2 \parallel ox$
$h_1 \parallel \theta_1$

Рисунок 2.49 – Комплексне креслення горизонтальної прямої площини θ

На рисунку 2.50 наведено приклад комплексного креслення горизонтальної прямої площини Σ (ABC), яка задана відсіком площини.

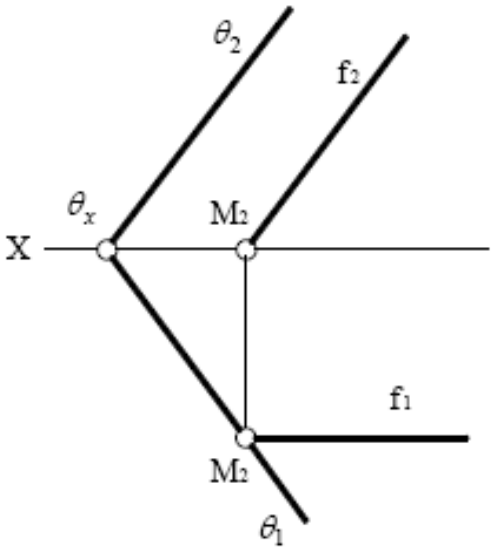


$\Sigma(ABC)$
$(h \in \Sigma) \wedge (h \parallel П_1)$
$h_2 \parallel ox$
$h_2 = D_2C_2$
$h_1 = D_1C_1$

Рисунок 2.50 – Комплексне креслення горизонтальної прямої площини Σ (ABC)

Фронталь – це лінія, що належить площині та паралельна фронтальній площині проекцій $П_2$.

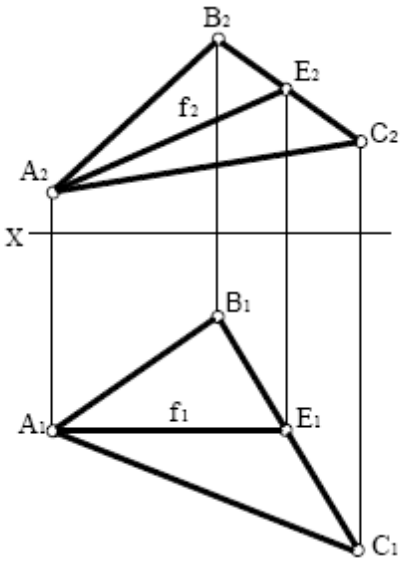
На рисунку 2.51 наведено приклад комплексного креслення фронтальної прямої площини θ, яка задана слідами.



$(f \in \theta) \wedge (f \parallel \Pi_2)$
$f_1 \parallel ox$
$f_2 \parallel \theta_2$

Рисунок 2.51 – Комплексне креслення фронтальної прямої площини θ

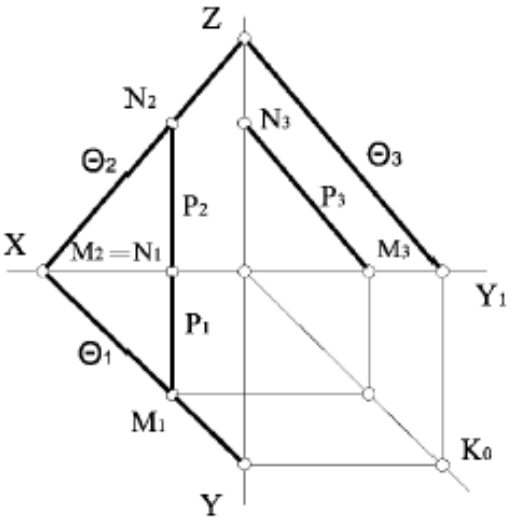
На рисунку 2.52 наведено приклад комплексного креслення фронтальної прямої площини Σ (ABC), яка задана відсіком площини.



$\Sigma(ABC)$
$(f \in \Sigma) \wedge (f \parallel \Pi_2)$
$f_1 \parallel OX$
$f_1 = A_1E_1$
$f_2 = A_2E_2$

Рисунок 2.52 – Комплексне креслення фронтальної прямої площини Σ (ABC)

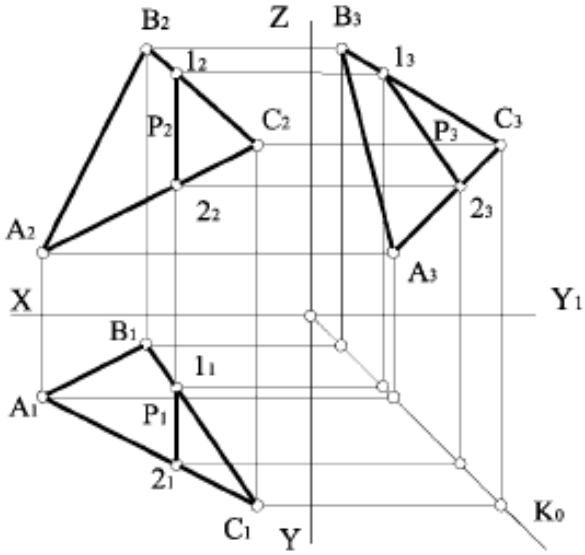
Профільна пряма – це лінія, що належить площині та параллельна до профільної площини проекцій Π_3. На рисунку 2.53 наведено приклад комплексного креслення профільної прямої площини θ, яка задана слідами.



$(P \in \theta) \wedge (P \parallel \Pi_3)$
$(P_1 \wedge P_2) \perp OX$
$P_3 \parallel \theta_3$

Рисунок 2.53 – Комплексне креслення профільної прямої площини θ

На рисунку 2.54 наведено приклад комплексного креслення профільної прямої площини Σ (ABC), яка задана відсіком площини.



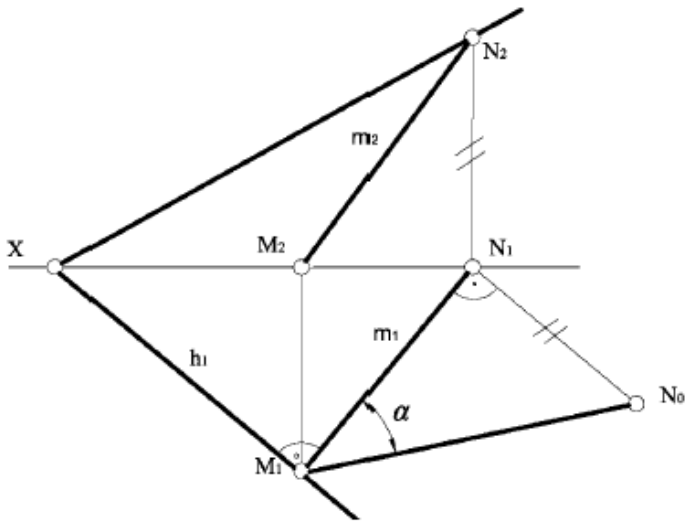
$\Sigma(ABC)$
$(P \in \Sigma) \wedge (P \parallel \Pi_3)$
$(P_1 \wedge P_2) \perp OX$
$P_1 = 1_1 2_1$
$P_2 = 1_2 2_2$
$P_3 = 1_3 2_3$

Рисунок 2.54 – Комплексне креслення профільної прямої площини Σ (ABC)

До особливих ліній площини належать лінії найбільшого нахилу площини до відповідної площини проекцій – це лінії, які належать площині й перпендикулярні або до горизонтальної, або до фронтальної, або до профільної прямої площини. Ця умова використовується в тих випадках, коли площина задана не слідами. Якщо площина задана слідами, замість горизонтальної, фронтальної або профільної прямої використовують відповідні сліди.

Лінія найбільшого нахилу використовується для визначення натуральної величини кута нахилу площини до заданої площини проекцій.

На комплексному кресленні (рис. 2.55) наведено приклад побудови лінії найбільшого нахилу m площини θ, заданої слідами площини, до горизонтальної площини проекцій, а також знаходження кута α нахилу площини θ до $П_1$. У лінії найбільшого нахилу m на комплексному кресленні горизонтальна проекція m_1 завжди перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі або горизонтального сліду $θ_1$.



$m \in \theta$

$m_1 \perp \theta_1$

$\alpha = M_1N_1 \hat{} M_1N_0 = \theta \hat{} \Pi_1$

Рисунок 2.55 – Комплексне креслення лінії найбільшого нахилу m площини θ

Фронтальна проекція m_2 визначається за умовою її належності до площини θ, тобто горизонтальний слід M (M_1, M_2) і фронтальний слід N (N_1, N_2) цієї прямої мають належати однойменним слідам площини.

Кут, що утворюється між лінією m і її горизонтальною проекцією m_1, є кутом нахилу площини θ до горизонтальної площини проекцій, тобто кутом α. Натуральну величину цього кута на комплексному кресленні (рис. 2.55) знаходимо методом прямокутного трикутника.

2.3 Питання для самоперевірки

1. Які площини називаються проектуючими? Вкажіть властивості цих площин.
2. Як зображується на комплексному кресленні фронтально проектуюча площина, проведена через пряму загального положення?
3. Сформулюйте алгоритм розв’язання задачі на перетин прямої з площиною загального положення.
4. Які назви мають площини, що паралельні до відповідних площин проекцій?
5. Які назви мають площини, що перпендикулярні до відповідних площин проекцій?

ЛЕКЦІЯ 3 МЕТРИЧНІ ТА ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ

3.1 Паралельність площин
3.2 Перетин площин
3.3 Паралельність прямої і площини
3.4 Перетин прямої і площини
3.5 Перпендикулярність прямої і площини
3.6 Перпендикулярність прямих загального положення
3.7 Перпендикулярність площин
3.8 Питання для самоперевірки

3.1 Паралельність площин

Якщо дві прямі перетину однієї площини відповідно паралельні до двох прямих перетину другої площини, – площини паралельні.

Якщо площини задані слідами і відповідні сліди площин паралельні, то і площини паралельні:

$$(\theta_1 \parallel \Sigma_1) \wedge (\theta_2 \parallel \Sigma_2) \wedge (\theta_3 \parallel \Sigma_3) \Leftrightarrow \theta \parallel \Sigma.$$

Із рівняння випливає, що як хоча б одна пара відповідних слідів перетинається, то і площини перетинаються.

На рисунку 3.1 наведено приклад побудови через точку А площини $\Sigma(l \cap m)$, що паралельна заданій θ $(a \cap b)$.

На рисунку 3.2 наведено приклад побудови через точку А площини $\Sigma(l \cap m)$, що паралельна заданій θ (a || b). Для цього в площині θ, яка задана паралельними прямими, будуємо додаткову пряму *n*, яка належить цій площині, тому що проходить через дві точки цієї площини.

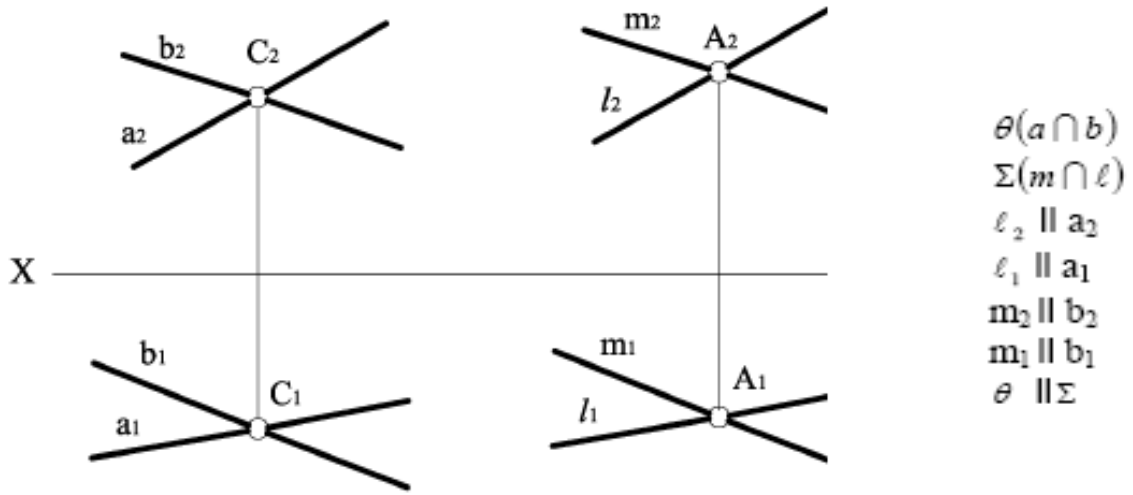


Рисунок 3.1 – Паралельна площина $\Sigma(l \cap m)$, в точці А

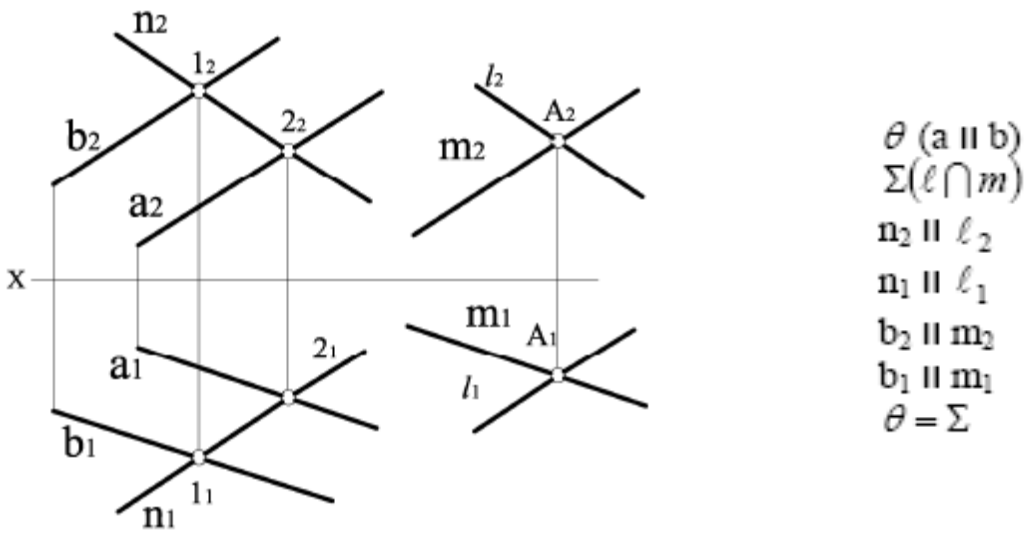


Рисунок 3.2 – Паралельна площина Σ(l ∩ *m*), в точці А

3.2 Перетин площин

Дві площини перетинаються по прямій лінії, тому необхідно визначити будь-які дві точки, спільні для цих площин, або одну точку і напрям лінії перетину.

Якщо площини задані слідами і сліди перетинаються в межах креслення, то необхідно визначити точки перетину відповідних слідів площин. Ці точки спільні для двох площин. Вони є слідами лінії перетину цих площин.

На рисунку 3.3 наведено приклад побудови на комплексному кресленні лінії перетину двох площин загального положення, які задані відсіками площин.

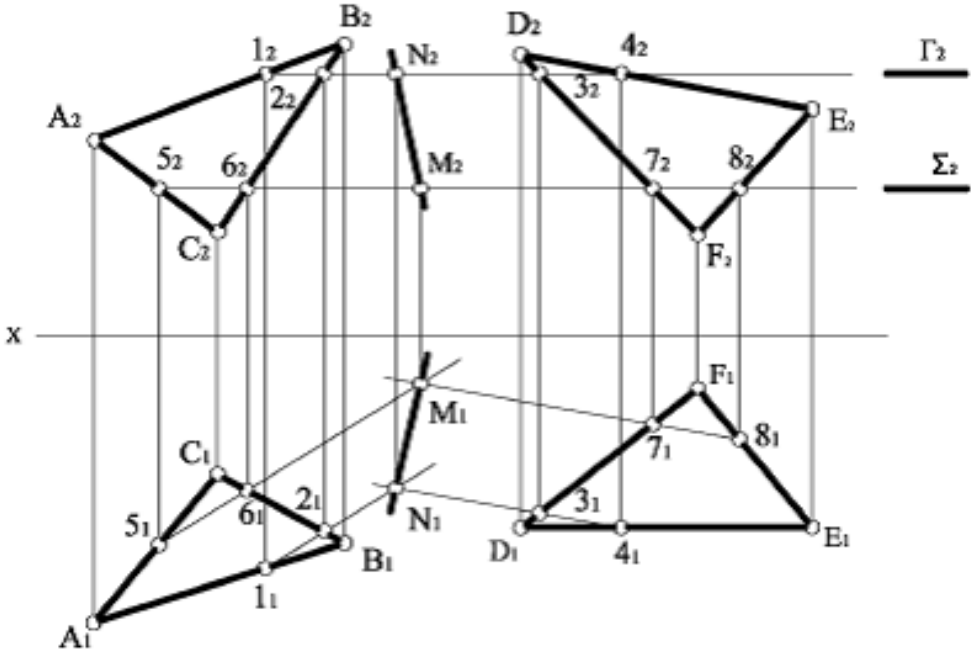


Рисунок 3.3 – Побудова лінії перетину двох площин

Визначення лінії перетину площини θ(ABC) з площиною Λ(DEF) проводимо в такій послідовності:

1. Проводимо допоміжну січну горизонтальну площину рівня Г, яка перетинає обидві площини, $Г_2 \parallel ox$.

2. Визначаємо фронтальні проекції ліній перетину обох площин завдяки збиральним властивостям площини рівня:

$$\theta_2 (A_2 B_2 C_2) \cap Г_2 = 1_2 – 2_2, \quad \Lambda_2(D_2 E_2 F_2) \cap Г_2 = 3_2 - 4_2.$$

3. Використовуючи проекційний зв`язок і закон належності, визначаємо горизонтальні проекції ліній перетину обох площин, а також спільну точку, яка належить одночасно трьом площинам:

$$(1_1 - 2_1) \cap (3_1 - 4_1) = N_1.$$

4. Використовуючи проекційний зв`язок і закон належності, визначаємо фронтальну проекцію спільної точки N_2, яка належить сліду $Г_2$.

Для визначення лінії перетину площин θ і Λ необхідна ще одна спільна точка M, яку знаходимо, використовуючи ще одну допоміжну площину Σ у такій самій послідовності:

$$\theta (ABC) \cap \Lambda(DEF) = MN.$$

3.3 Паралельність прямої і площини

Пряма лінія паралельна до площини, якщо в цій площині є пряма лінія, яка паралельна до заданої прямої.

Через точку, що не належить до площини, можна провести нескінченну кількість прямих, які паралельні до заданої площини. Для отримання одного варіанта побудови необхідні додаткові умови, наприклад побудувати пряму, що паралельна одночасно до двох площин.

На рисунку 3.4 наведено приклад побудови на комплексному кресленні через точку D прямої *l*, яка паралельна до заданої площини θ(ABC) і горизонтальної площини проекцій $П_1$.

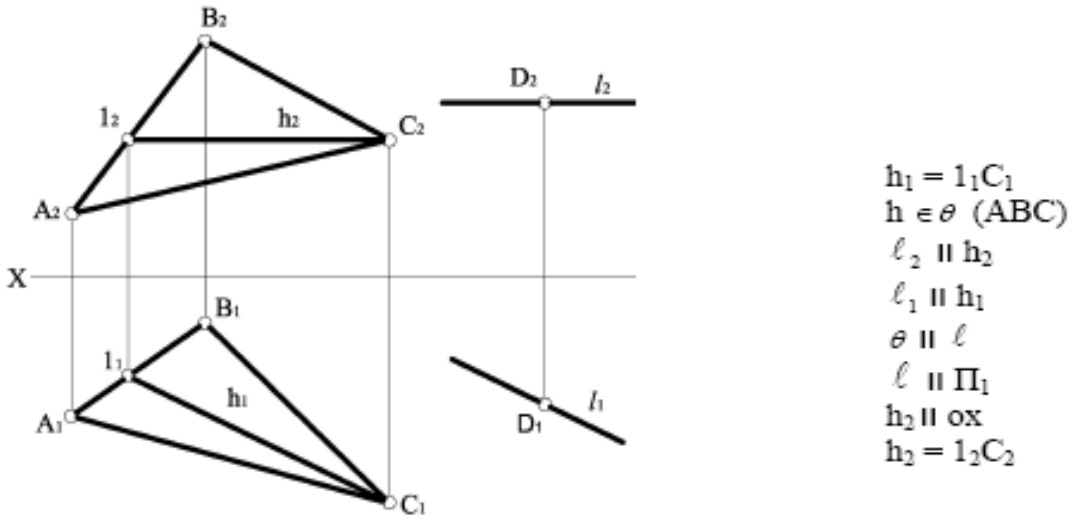


Рисунок 3.4 – Побудова прямої *l*, що паралельна площині θ(ABC)

3.4 Перетин прямої і площини

Задача на знаходження точки перетину прямої з площиною належить до позиційних задач, які визначають взаємне положення геометричних фігур, взаємну належність геометричних фігур, а також перетин геометричних фігур.

При перетині прямої з площиною для покращення наочності креслення для видимих ліній застосовують суцільні основні лінії, а для невидимих ліній – штрихові. При визначенні видимості ліній на комплексному кресленні вважають, що:

а) площини й поверхні непрозорі;

б) спостерігач завжди перебуває в першій чверті або першому октанті.

в) промінь зору від спостерігача є перпендикуляром до тієї площини проекцій, відносно до якої визначається видимість.

На рисунку 3.5 наведено наочне зображення конкуруючих точок відносно $П_1$ та $П_2$.

Точки, що належать різним геометричним фігурам і лежать на одному проекціювальному промені, називаються конкуруючими у видимості відносно тієї площини проекцій, до якої проекціювальний промінь є перпендикуляром.

Точки A і B є конкуруючими відносно горизонтальної площини проекцій $П_1$, а точки C і D – відносно фронтальної площини проекцій $П_2$.

На рисунку 3.6 наведено приклад зображення конкуруючих точок на комплексному кресленні.

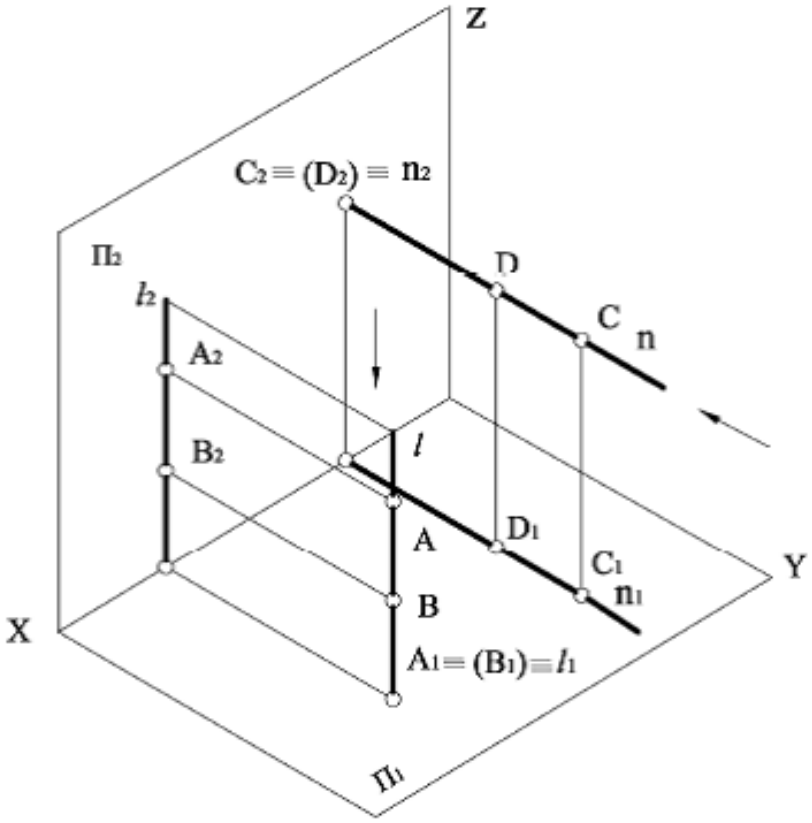


Рисунок 3.5 – Конкуруючі точки

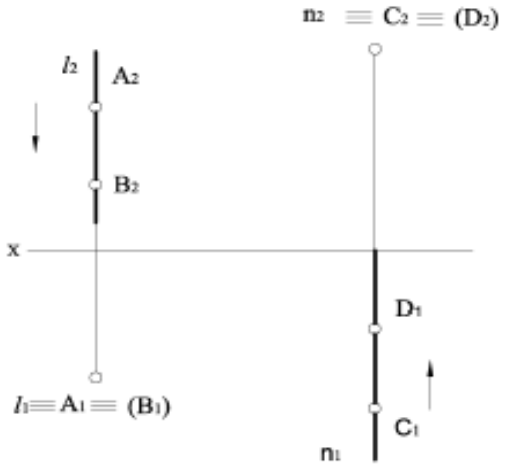


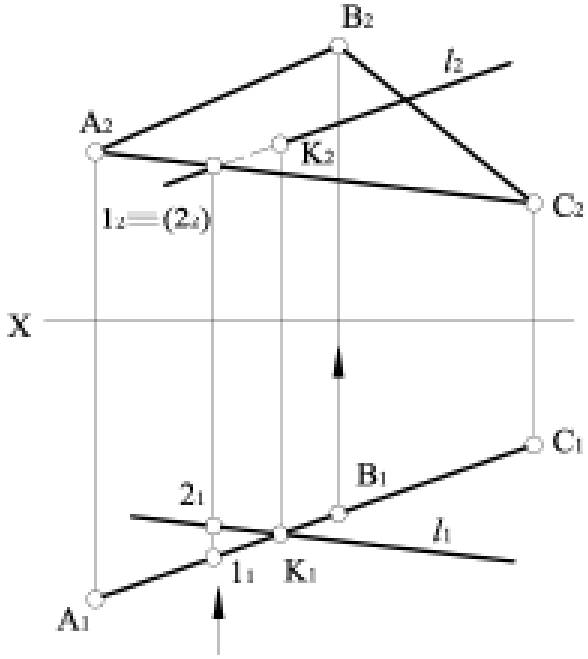
Рисунок 3.6 – Комплексне креслення конкуруючих точок A, B та C, D

Точки A і B лежать на одному проекціювальному промені $l \perp П_1$, ці точки називають конкуруючими у видимості відносно площини $П_1$. Точка A видима, вона закриває точку B, яка невидима і яку беруть у дужки.

Точки C і D також лежать на одному проекціювальному промені $n \perp П_2$, ці точки називають конкуруючими у видимості відносно площини $П_2$. Точка C – видима, D – невидима. На комплексному кресленні з двох конкуруючих точок видимою буде та проекція, котра розташована на більшій відстані від площини проекцій, відносно якої вони конкурують.

Задача на перетин прямої з площиною є однією з основних позиційних задач.

На рисунку 3.7 наведено приклад побудови на комплексному кресленні точки перетину прямої загального положення *l* із горизонтально проекційною площиною θ(ABC).



$\theta(ABC) \perp П_1$

$(A_1B_1C_1) \cap \ell_1 = K_1$

Рисунок 3.7 – Перетин прямої *l* з горизонтально проекційною площиною θ(ABC)

Завдяки збиральним властивостям проекційних площин θ(ABC) ⊥ $П_1$ на $П_1$ маємо готову проекцію точки перетину $К_1$, використовуючи проекційний зв'язок і належність точки К прямій *l*, будуємо фронтальну проекцію точки перетину $К_2$.

На рисунку 3.8 наведено приклад побудови на комплексному кресленні точки перетину прямої загального положення *l* із площиною загального положення θ(ABC).

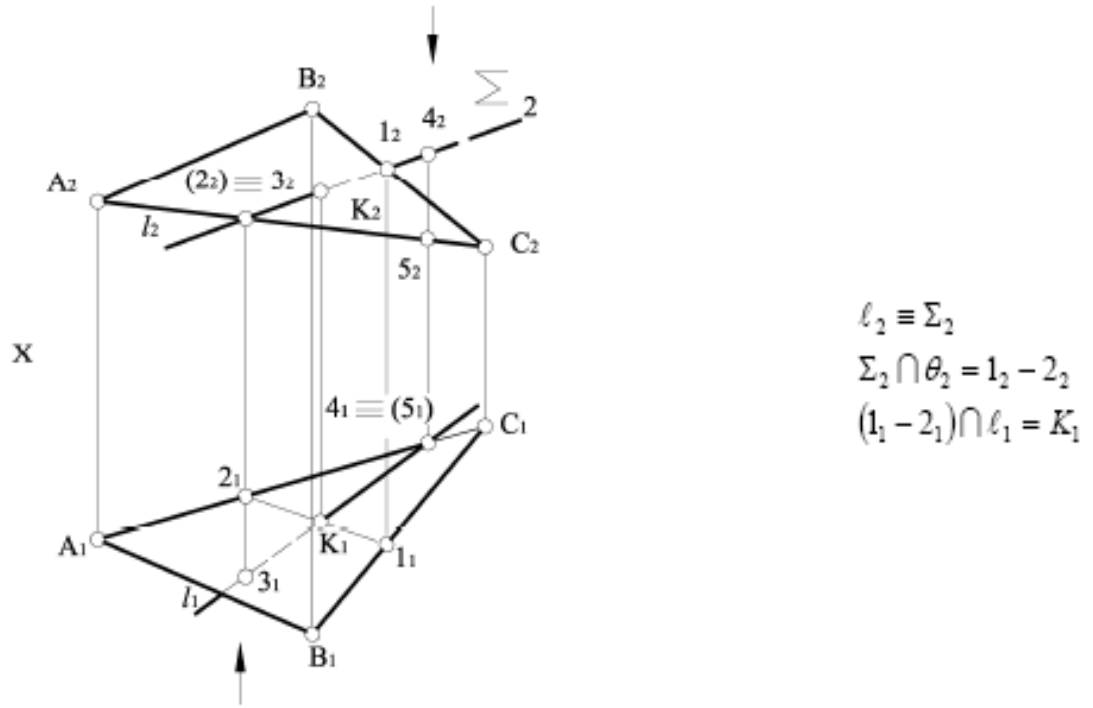


Рисунок 3.8 – Перетин прямої *l* з площиною загального положення θ(ABC)

Алгоритм розв'язання задачі складається з чотирьох операцій:

1. Пряму поміщають у допоміжну площину: через пряму проводять фронтально проекційну площину Σ(l ≡ Σ).

2. Знаходять лінію перетину заданої площини θ (ABC) з допоміжною Σ : $Σ_2 ∩ θ_2 = 1_2–2_2$. За фронтальною проекцією визначають горизонтальну проекцію $1_1–2_1$.

3. Визначають точку перетину двох прямих: $(1_1–2_1) ∩ l_1 = K_1$, її фронтальну проекцію визначають за вертикальною відповідністю.

4. Видимість відрізків прямої l визначають за допомогою конкуруючих точок 2 і 3 для фронтальної площини проекцій, та точок 4 і 5 – для горизонтальної площини проекції.

3.5 Перпендикулярність прямої і площини

Пряма перпендикулярна площині, якщо вона перпендикулярна до кожної з двох прямих перетину, котрі належать цій площині.

Якщо в площині брати не довільні прямі перетину, а її горизонталь та фронталь, виникає можливість використати теорему про проекціювання прямого кута.

Якщо одна з двох взаємно перпендикулярних прямих є прямою окремого положення, – прямий кут між ними проекціюється без спотворень на ту площину проекцій, до якої пряма окремого положення є паралельною. Якщо пряма l перпендикулярна до площини Σ, – її горизонтальна проекція l_1 перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі h_1 цієї площини, а фронтальна проекція l_2 перпендикулярна до фронтальної проекції фронталі f_2 цієї площини.

На рисунку 3.9 наведено приклад визначення відстані від точки D до площини загального положення ABC, яка задана відсіком площини. Для цього необхідно з точки D опустити перпендикуляр на площину ABC, визначити його основу та знайти натуральну величину відрізка цього перпендикуляра.

Алгоритм розв'язання задачі складається з таких операцій:

1. Будуємо головні лінії площини ABC: h – горизонталь, f – фронталь.

2. З точки D будуємо проекції перпендикуляра n: $n_2 \perp f_2$, $n_1 \perp h_1$.

3. Основу перпендикуляра n визначаємо за допомогою допоміжної горизонтально проекційної площини Σ, що перетинає відсік по прямій 3–4. Основою перпендикуляра є точка К, фронтальну проекцію якої знаходимо на $П_2$: $n_2 \cap (3_2 - 4_2) = K_2$, а K_1 визначаємо за вертикальною відповідністю.

4. Проекції відстані від точки до площини – D_1K_1 і D_2K_2. Способом прямокутного трикутника визначаємо натуральну величину відрізка [DK], що вимірює відстань від точки D до площини ABC.

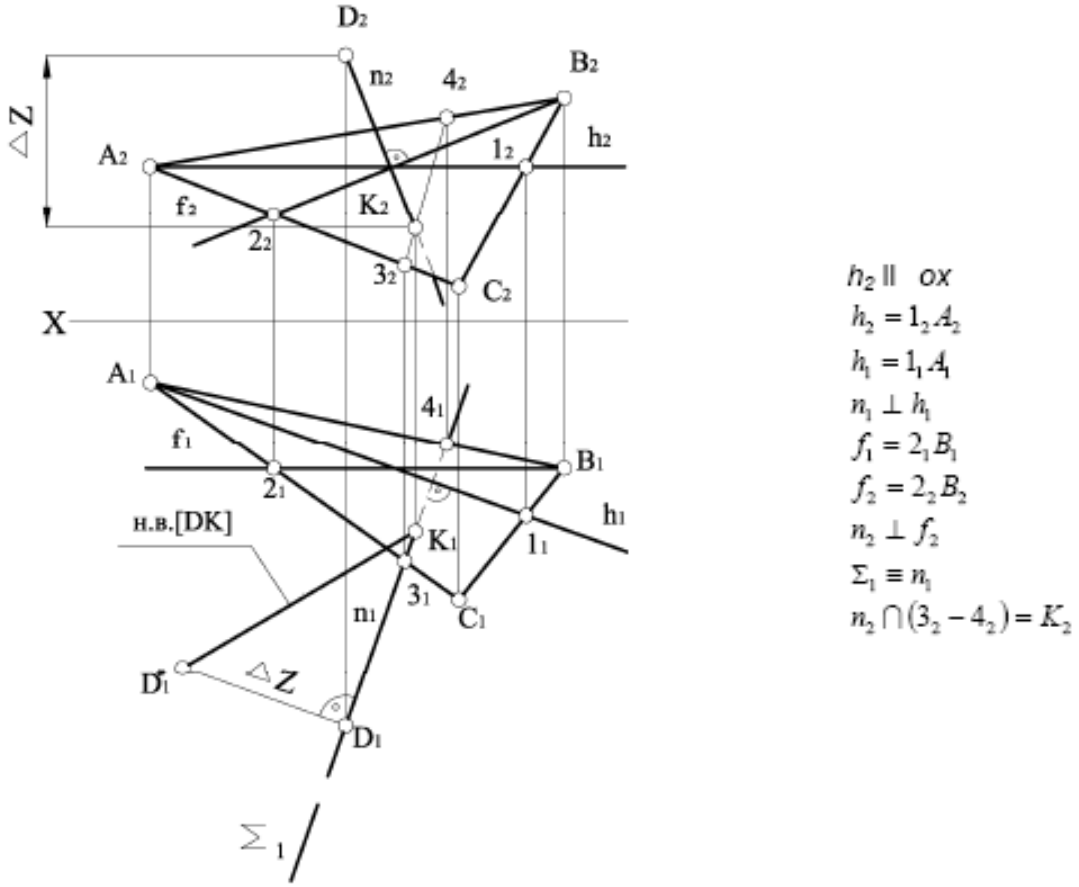


Рисунок 3.9 – Визначення відстані від точки D до площини загального положення ABC

Якщо пряма l перпендикулярна до площини, заданої слідами, – її горизонтальна проекція l_1 перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонтального сліду h_1^0 цієї площини, а фронтальна проекція l_2 перпендикулярна до фронтальної проекції фронтального сліду f_2^0 цієї площини.

3.6 Перпендикулярність прямих загального положення

Прямий кут між перпендикулярними прямими загального положення на площини проекцій проекціюється із спотвореннями. Задачу побудови перпендикуляра до прямої загального положення розв'язують за допомогою умови перпендикулярності прямої та площини.

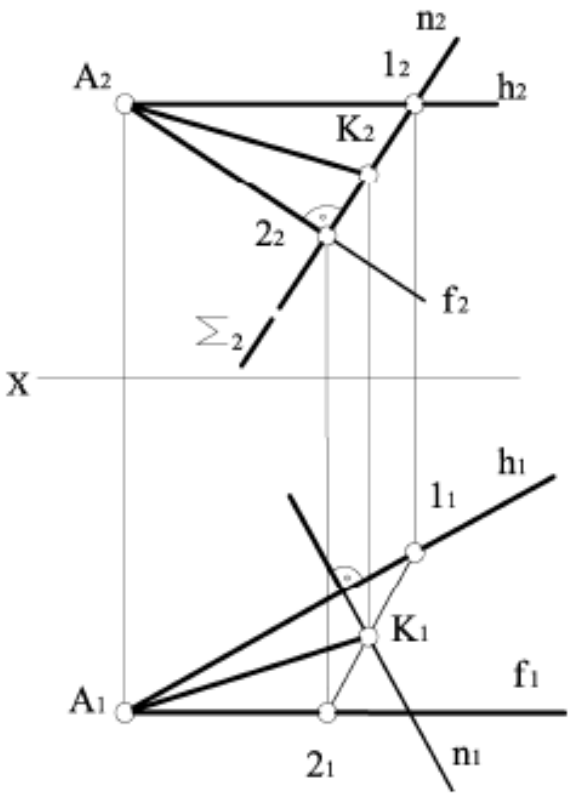
Розглянемо випадок побудови перпендикуляра з точки А до прямої загального положення n (рис. 3.10).

Алгоритм розв'язання задачі складається з таких графічних операцій:

1. Через точку А проводимо площину θ, яка перпендикулярна прямій n: $\theta(f \cap h) \perp n$.

2. Визначаємо точку перетину прямої n із площиною θ. Для цього використовуємо допоміжну фронтально проекційну площину Σ ($\Sigma_2 \equiv n_2$) : $\Sigma_2 \cap \theta_2$ ($h_2 \cap f_2$) = $1_2 - 2_2$; $(1_1 - 2_1) \cap n_1 = K_1$, а K_2 визначаємо за вертикальною відповідністю.

3. З'єднуємо точку А з точкою К. $AK \perp n$, тому що він належить площині, яка перпендикулярна до прямої n. Таким чином, дві прямі перпендикулярні, якщо одна з них належить площині, котра перпендикулярна до другої прямої.



$h_2 // ox$
$f_2 \perp n_2$
$h_1 \perp n_1$
$f_1 // ox$
$\theta(h \cap f) \perp n$
$\Sigma_2 \cap (h_2 \cap f_2) = 1_2 - 2_2$
$(1_1 - 2_1) \cap n_1 = K_1$
$AK \perp n$

Рисунок 3.10 – Побудова перпендикуляра з точки А до прямої загального положення n

3.7 Перпендикулярність площин

Дві площини взаємно перпендикулярні, якщо одній із них належить пряма, яка перпендикулярна до іншої площини.

Побудову площини P, яка перпендикулярна до площини θ, можна виконати двома шляхами:

1. Площину P будуємо через пряму m, яка перпендикулярна до площини θ: $(m \perp \theta)$, $(m \in P) \Rightarrow P \perp \theta$.

2. Площину P будуємо перпендикулярно до прямої n, яка лежить у площині Q або паралельна до цієї площини: $(n \parallel \theta)$, $(n \perp P) \Rightarrow P \perp \theta$, оскільки через пряму m можливо провести безліч площин (перший шлях), а також у площині або паралельно до неї можливо провести безліч прямих n (другий шлях), задача має безліч розв'язків. Для отримання одного розв'язку необхідно накласти додаткові умови.

На рисунку 3.11 наведено приклад побудови на комплексному кресленні для заданої площини P(ΔABC) із точки D перпендикулярної площини θ.

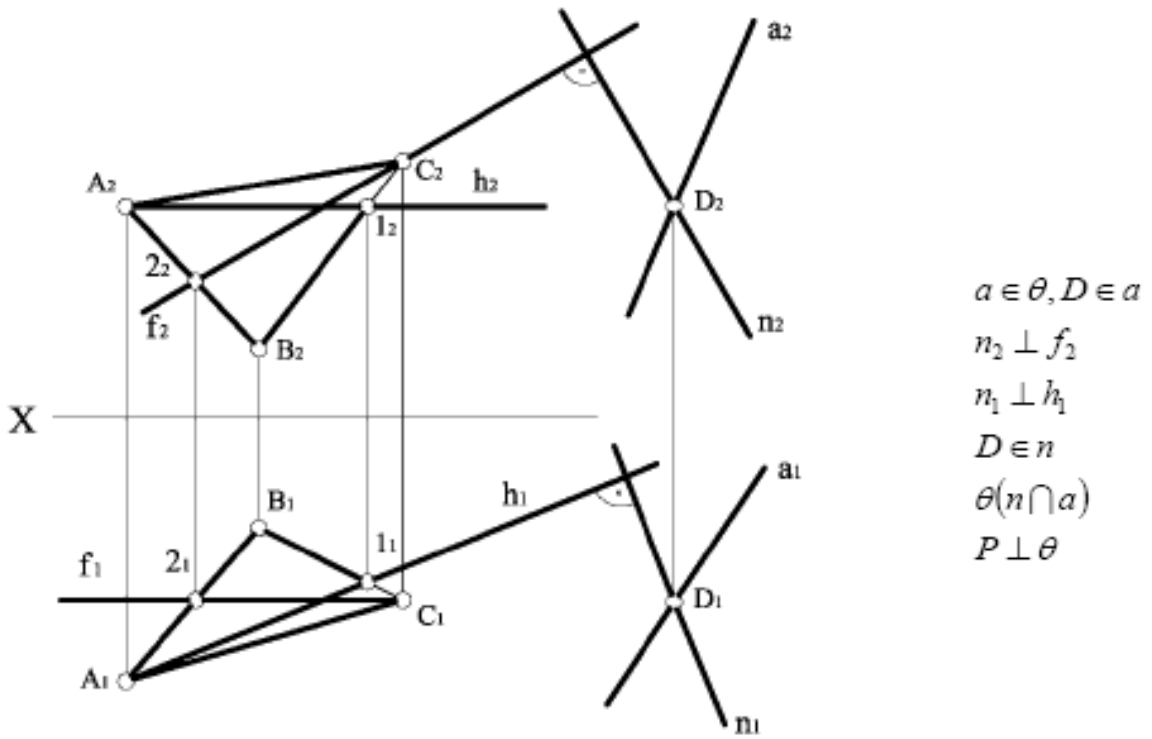


Рисунок 3.11 – Комплексне креслення площини P(ΔABC) та перпендикулярної площини θ, побудованої з точки D

Алгоритм розв'язання задачі складається з таких операцій:

1. Будуємо головні лінії площини ABC: h – горизонталь, f – фронталь.

2. З точки D будуємо пряму n, яка перпендикулярна до площини ABC: $n_2 \perp f_2$, $n_1 \perp h_1$.

3. Через точку D будуємо пряму a загального положення: $P(ABC) \perp \theta(n \cap a)$.

3.8 Питання для самоперевірки

1. Як формулюється теорема про пряму, перпендикулярну до площини?
2. Сформулюйте алгоритм розв’язання задачі на визначення відстані від точки до площини загального положення.
3. В чому полягає метод конкуруючих точок?
4. Як побудувати комплексному кресленні лінію перетину двох площин загального положення?
5. Як побудувати пряму на комплексному кресленні паралельну або перпендикулярну іншій?
6. Як побудувати на комплексному кресленні точку перетину прямої загального положення із площиною загального положення?
7. Сформулюйте алгоритм розв’язання задачі на побудову перпендикуляра до прямої загального положення.

ЛЕКЦІЯ 4 МЕТОДИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПРОЕКЦІЙ

4.1 Спосіб заміни площин проекцій
4.2 Обертання навколо проекціювальних осей
4.3 Спосіб плоскопаралельного переміщення
4.4 Спосіб обертання навколо прямих рівня
4.5 Питання для самоперевірки

Рішення багатьох задач нарисної геометрії спрощується, якщо геометричні об'єкти займають відносно площин проекцій деяке особливе положення. Наприклад, якщо геометричний об'єкт (пряма, плоска фігура) розташований в площині, паралельній площині проекцій, то на цю площину він проекціюється в дійсну величину, що дозволяє дуже просто вирішувати метричні задачі, пов'язані з визначенням натуральних розмірів геометричних об'єктів. А ось при визначенні відстані від точки до площини зручно, щоб площина була проекційною.

У зв'язку з цим виникає наступна ідея рішення метричних і позиційних задач нарисної геометрії: за допомогою зміни взаємного положення геометричних об'єктів і площин проекцій домогтися зручного для даного конкретного випадку відповідного положення.

Цього можна досягти двома способами:

1) положення оригіналу в просторі залишається незмінним, а заміняють одну або обидві площини проекцій (спосіб заміни площин проекцій);

2) незмінною залишається система площин проекцій, а змінюють положення оригіналу в просторі (способи плоскопараллельного переміщення і обертання).

Цей спосіб полягає в тому, що одна з основних площин проекцій $П_1$ або $П_2$ замінюється новою площиною проекцій $П_4$, відповідним чином розташованої щодо оригіналу, але перпендикулярної до незамінюваної площини проекцій.

4.1 Спосіб заміни площин проекцій

У багатьох випадках розв'язання задачі значно спрощується, якщо прямі лінії, площини, елементи геометричних фігур займають окреме положення.

Переміщення геометричної фігури із загального положення в окреме можна виконати двома шляхами:

1. Переміщенням площин проекцій у положення, відносно яких плоскі фігури займали б окремі положення.

2. Переміщенням плоскої фігури в просторі в окреме положення відносно нерухомих площин проекцій.

Перший шлях лежить в основі способу заміни площин проекцій, а другий – в основі інших способів.

Суть способу полягає в тому, що самі геометричні фігури не змінюють свого положення, а в системі площин проекцій $П_2$ та $П_1$ послідовно замінюють одну, дві або більше площин проекцій. При цьому нова площина проекцій має бути перпендикулярною до тієї площини проекцій, яка залишається незмінною, а до плоских геометричних фігур вона має бути паралельною або перпендикулярною.

На рисунку 4.1 зображено умовно перспективна модель проекціювання точки А на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій $П_1$ та $П_2$, а також на додаткову площину $П_4$, яка перпендикулярна до $П_1$. У результаті утворилась нова система площин проекцій $П_1/П_4$ зі своєю віссю проекцій x_{14} як наслідок перетину площин проекцій $П_1$ та $П_4$. Положення горизонтальної проекції A_1 точки А залишається без зміни, оскільки точка А та площина $П_1$ не змінювали свого положення в просторі. Для знаходження нової фронтальної проекції точки А-A_4 достатньо виконати ортогональне проекціювання точки А на площину $П_4$. Відстань нової фронтальної проекції A_4 точки А від нової осі x_{14} дорівнює відстані від старої фронтальної проекції A_2 точки А до старої осі x_{12}: $|A_4x_{14}| = |A_2x_{12}| = |AA_1|$.

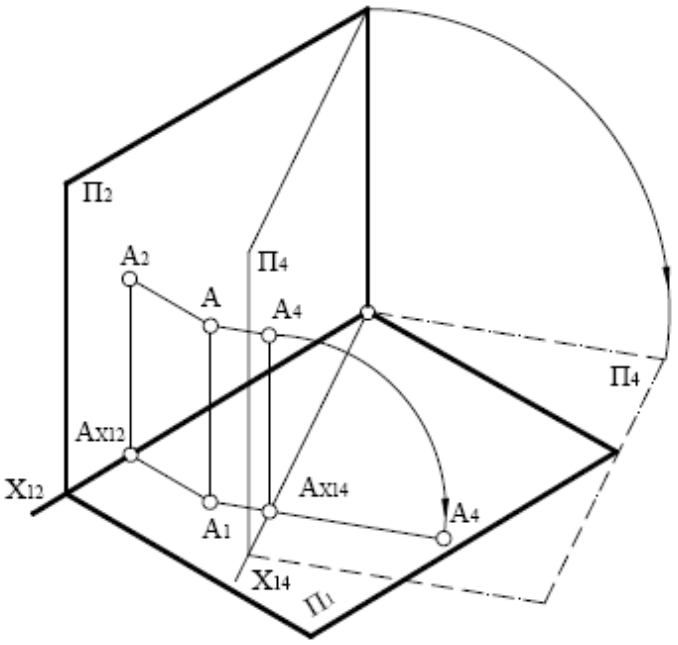
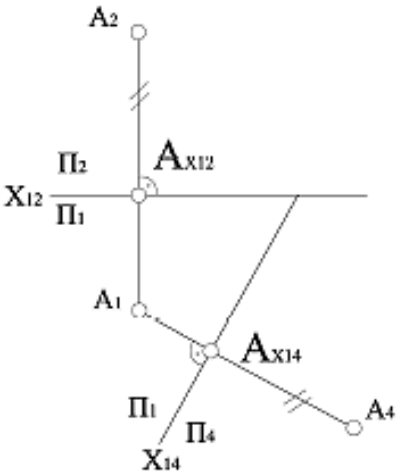


Рисунок 4.1 – Проекціювання точки А на додаткову площину $П_4$

Для побудування комплексного креслення нова площина проекцій $П_4$ обертається навколо осі x_{14} до суміщення з горизонтальною площиною проекцій $П_1$ (рис. 4.2). Напрям обертання не впливає на результат розв’язання задачі. Обертання виконують таким чином, щоби не було накладання нових проекцій на старі.

Заміна горизонтальної площини проекцій $П_1$ на нову площину $П_4$ та побудування нових проекцій точки А в системі $П_2/П_4$ відбувається аналогічно розглянутому випадку.



$$|A_4A_{X14}| = |A_2A_{X12}|$$

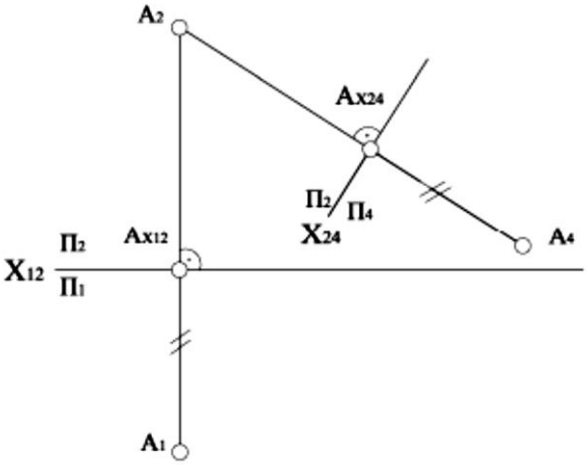
Рисунок 4.2 – Побудова проекції точки А на новій площині проекцій $П_4$, що замінює площину $П_2$

Тепер без змін залишається фронтальна проекція точки, а для побудування нової горизонтальної проекції A_4 точки А необхідно зі старої фронтальної проекції точки опустити перпендикуляр (провести лінію зв'язку) на нову вісь x_{24} та відкласти на ньому від точки перетину з віссю x_{24} відрізок, що дорівнює відстані від горизонтальної проекції точки до осі x_{12} (рис. 4.3).

Розв'язання всіх задач методом заміни площин проекцій зводиться до розв'язання чотирьох основних задач:

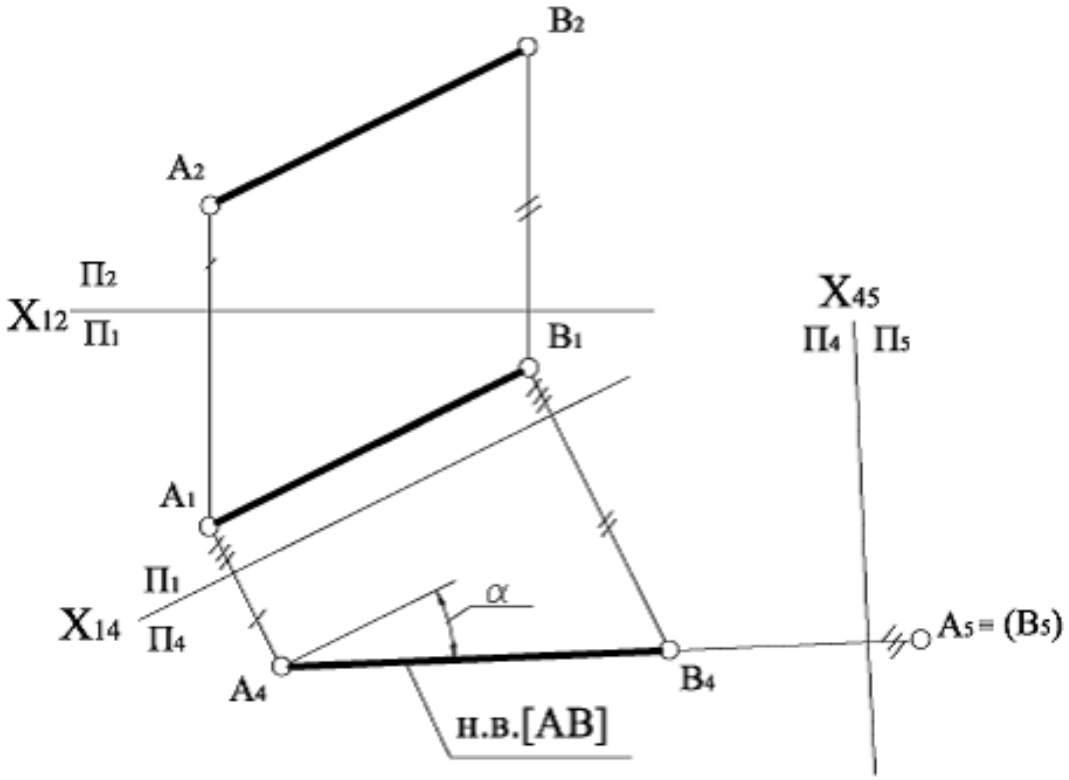
1. Перетворення прямої загального положення на пряму рівня.
2. Перетворення прямої загального положення на проекційну.
3. Перетворення площини загального положення на проекційну.
4. Перетворення площини загального положення на площину рівня.

На рисунку 4.4 зображено розв'язання перших двох задач перетворення прямої загального положення на пряму рівня та перетворення її на проекційну. У системі $П_2/П_1$ відрізок прямої АВ займає загальне положення. Для перетворення відрізка прямої на пряму рівня будуємо на довільній відстані від відрізка площину $П_4$, яка паралельна до відрізка АВ, а також $П_4 \perp П_1$.



$$|A_4A_{x24}| = |A_1A_{X12}|$$

Рисунок 4.3 – Побудова проекції точки А на новій площині проекцій $П_4$, що замінює площину $П_1$



$$\alpha = x_{14} \hat{} A_4B_4 = AB \hat{} \Pi_1$$

Рисунок 4.4 – Перетворення прямої загального положення на пряму рівня (A_4B_4) та проекційну (A_5=B_5)

Щоб отримати дійсну довжину відрізка, від осі x_{14} відкладаємо відстані, які дорівнюють відстаням від точок A_2 і B_2 до осі x_{12}. У системі $П_1/П_4$ відрізок прямої АВ стає прямою рівня і на площині проекцій $П_4$ проекціюється в натуральному вигляді.

Для перетворення відрізка прямої рівня на проекційне положення необхідно перпендикулярно до прямої рівня провести нову площину $П_5$, слідом якої буде x_{45}. Проекція прямої у вигляді точки $A_5 \equiv (B_5)$ розміститься від осі x_{45} на відстані, що дорівнює відстані від проекцій A_1 та B_1 до осі x_{14}.

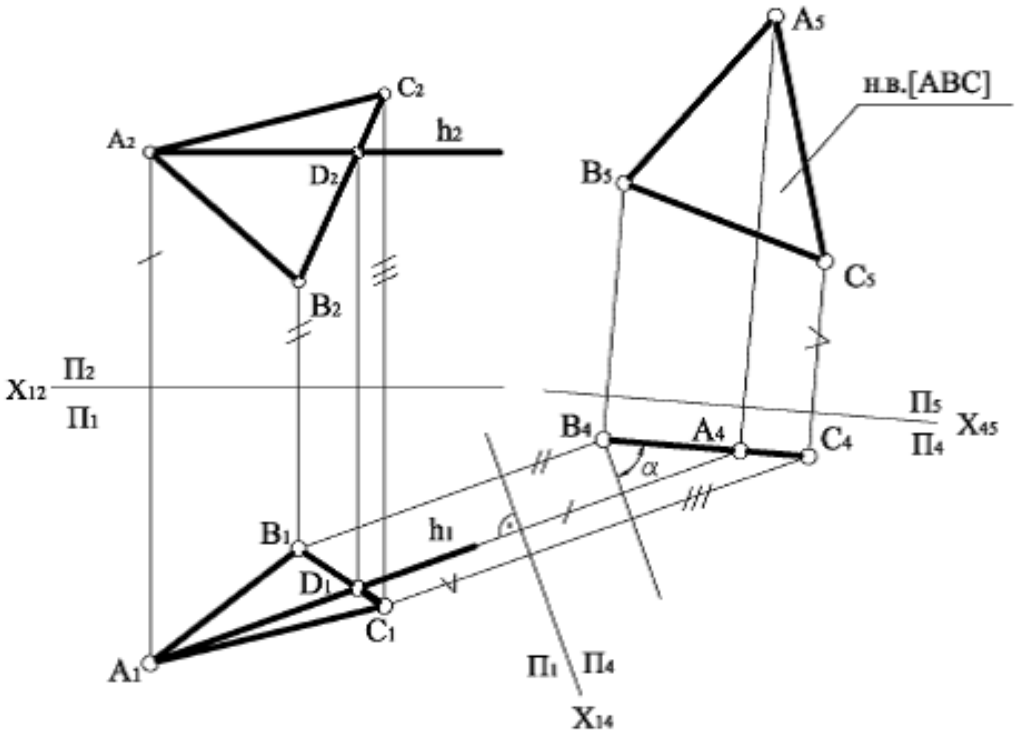
Спільне розв’язання першої та другої задач дозволяє знаходити:

а) відстань від точки до прямої;

б) відстань між двома паралельними прямими;

в) відстань між мимобіжними прямими.

На рисунку 4.5 зображено розв’язання третьої та четвертої задач перетворення площини загального положення на проекційну та перетворення її на площину рівня. При цьому здійснено дві заміни площин проекцій.



$$\alpha = x_{14}\hat{}\,(B_4A_4C_4) = (ABC)\hat{}\,\Pi_1$$

Рисунок 4.5 – Перетворення площини загального положення на проекційну та перетворення її на площину рівня

При першій заміні відсік площини (ABC) переведено в проекційне положення, а при другій заміні знайдено натуральну величину відсіку. Щоби перевести відсік у проекційне положення, необхідно в межах відсіку побудувати лінію рівня, бо для її перетворення на точку досить однієї заміни. На рисунку у відсіку проведено горизонталь AD, а нову вертикальну площину $П_4$ побудовано перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі (A_1D_1). У системі площин проекцій $П_1/П_4$ площина ABC перетворилась на проекційну площину і на площині проекцій $П_4$ спроекціювалась у відрізок прямої $A_4B_4C_4$. При другій заміні вісь x_{45} проводять паралельно відрізку $A_4B_4C_4$, із точок B_4, C_4, A_4 проводять лінії проекційного зв'язку, перпендикулярні осі x_{45}, а від осі x_{45} відкладають відрізки, що дорівнюють відстані від точок горизонтальної проекції до осі x_{14}.

У системі площин проекцій $П_4/П_5$ площина ABC перетворилась на площину рівня і на площині проекцій $П_5$ спроекціювалась у натуральному вигляді $A_5B_5C_5$.

Спільне розв'язання третьої та четвертої задач дозволяє знаходити:

а) натуральні величини плоских фігур;

б) відстань від точки до площини;

в) кути нахилу площини до площини проекцій;

г) відстань між паралельними площинами.

4.2 Обертання навколо проекційних осей

Площини проекцій залишаються незмінними, а геометричну фігуру обертають навколо прямої лінії (осі), яка перпендикулярна до якоїсь із площин проекцій, у нове окреме положення. У новому положенні будують ортогональні проекції геометричної фігури. Для кожної точки геометричної фігури має бути своя площина обертання і свій радіус обертання.

На рисунку 4.6 показано визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення способом обертання навколо осі, перпендикулярної до площини проекції.

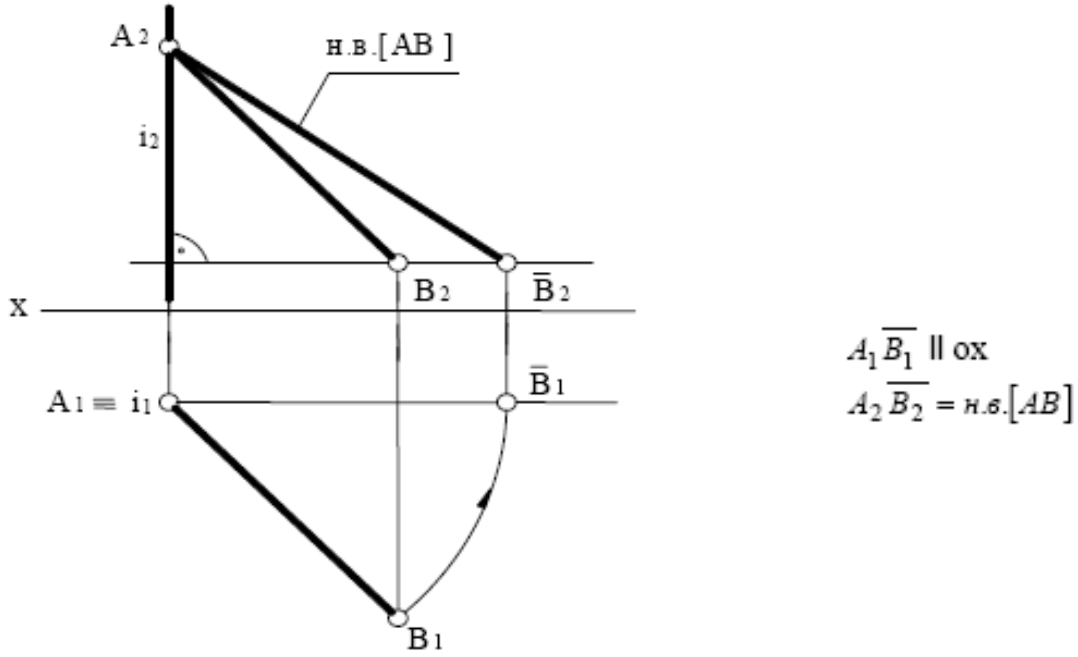


Рисунок 4.6 – Визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення способом обертання навколо осі

Через точку А проведено вертикальну вісь і, яка є горизонтально проекційною прямою. Навколо цієї осі повернуто відрізок загального положення АВ до положення паралельного фронтальній площині проекцій $П_2$. Точка А, яка належить осі обертання, залишається на місці, а точка В повертається навколо вертикальної осі в площині, перпендикулярній до неї, тобто в горизонтальній. Відрізок $A_2\bar{B}_2$ – його натуральна величина.

4.3 Спосіб плоскопаралельного переміщення

Плоскопаралельне переміщення розглядають як обертання навколо невизначених осей. Площини проекцій залишаються незмінними, а геометрична фігура переводиться в окреме положення шляхом її зміщення в просторі, причому всі точки фігури мають рухатися в площинах, паралельних до певної площини проекцій.

На рисунку 4.7 наведено приклад визначення натуральної величини трикутного відсіка методом плоскопаралельного переміщення. Для цього спочатку необхідно побудувати головну лінію площини ABC – фронталь DC. Потім поворотом навколо горизонтальної осі відсік площини встановлено у горизонтально проекційне положення. Після цього поворотом навколо горизонтально проекційної осі відсік площини встановлено у фронтальну площину рівня, при цьому відсік площини на полі $П_2$ відобразиться в натуральну величину.

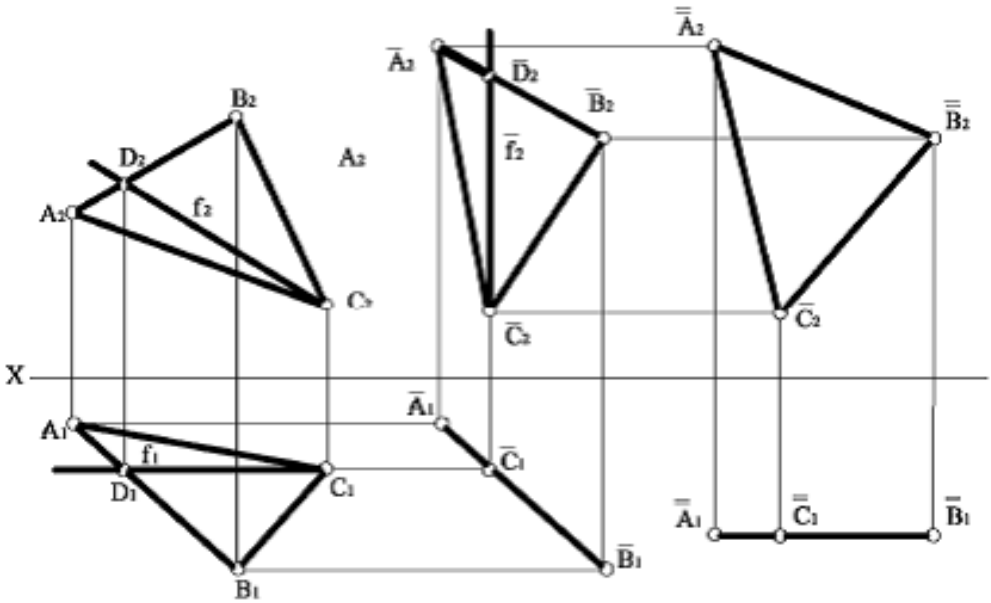


Рисунок 4.7 – Метод плоскопаралельного переміщення

Для вирішення задачі необхідно побудувати головну лінію площини ABC – фронталь DC. Потім поворотом навколо горизонтальної осі відсік площини встановлено у горизонтально проекційне положення. Після цього, поворотом навколо горизонтально проекційної осі, відсік площини встановлено у фронтальну площину рівня, при цьому відсік площини на полі $П_2$ відобразиться в натуральну величину.

4.4 Спосіб обертання навколо прямих рівня

Площини проекцій залишаються незмінними, а геометричну фігуру, яка належить площині, обертають навколо лінії рівня цієї площини до паралельного положення до тієї площини проекцій, до якої лінія рівня паралельна.

При цьому плоска фігура буде без спотворень проекціюватися на цю площину проекцій. При обертанні навколо горизонталі плоска фігура переводиться в положення, паралельне горизонтальній площині проекцій, при обертанні навколо фронталі – у положення, паралельне фронтальній площині проекцій.

На рисунку 4.8 наведено приклад визначення натуральної величини трикутного відсіку ABC методом обертання навколо фронталі AD.

При цьому точки A і D, які лежать на фронталі, залишаються на місці, а точки B і C обертаються у фронтально проекційних площинах, які

перпендикулярні до фронтальної проекції фронталі. Проекції відрізка прямої B_2O_2 та B_1O_1 є проекціями радіуса обертання в даний момент точки B навколо фронталі AD. Це відрізок прямої загального положення. Для визначення натуральної величини радіуса обертання [BO] застосовують спосіб прямокутного трикутника. При цьому на горизонтальній площині проекцій визначають різницю координат точок B та O, а на фронтальній площині будують прямокутний трикутник $B_2{*}B_2O_2$, гіпотенуза якого $B_2{*}O_2$ є натуральною величиною радіуса обертання точки B. Потім гіпотенузою роблять засічку на лінії траєкторії руху точки B і отримують $\overline{B}_2$.

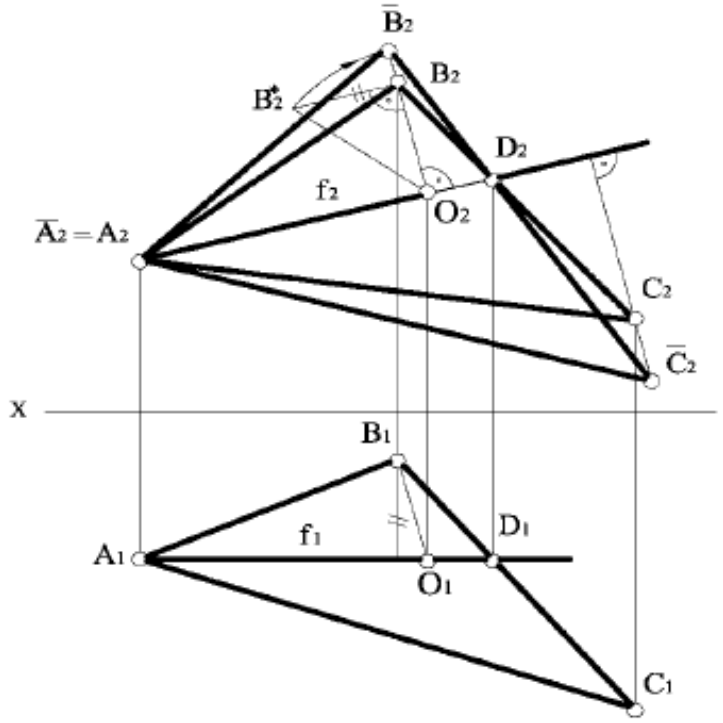


Рисунок 4.8 – Метод обертання навколо фронталі

Для визначення положення точки C користуються точкою Д, яка після обертання залишається на місці. Точку $\overline{C}_2$ визначають як перетин прямої $\overline{B}_2D_2$ із траєкторією руху точки C. Фронтальна проекція трикутного відсіку після обертання $A_2\overline{B}_2\overline{C}_2$ є натуральною величиною трикутного відсіку.

4.5 Питання для самоперевірки

1. Які основні задачі розв’язуються заміною однієї площини проекцій?
2. Які основні задачі розв’язуються заміною двох площин проекцій?
3. Які параметри комплексного креслення залишаються незмінними при заміні фронтальної площини проекцій?
4. Які параметри комплексного креслення залишаються незмінними при заміні горизонтальної площини проекцій?
5. Скільки і в якій послідовності потрібно ввести допоміжних площин в систему П1/П2, щоб отримати справжню величину фігури загального положення?

ЛЕКЦІЯ 5 ПОВЕРХНІ

5.1 Визначення, утворення та задання поверхонь на кресленику
5.2 Класифікація поверхонь
5.3 Гранні поверхні
5.3.1 Переріз гранних поверхонь площиною
5.3.2 Побудування точок перетину лінії з поверхнею
5.3.3 Побудування лінії взаємного перетину гранних поверхонь
5.4 Криві поверхні
5.4.1 Точки і лінії на поверхнях
5.4.2 Переріз кривих поверхонь площиною
5.4.3 Побудова точок перетину лінії з поверхнею
5.4.4 Побудова лінії взаємного перетину кривих поверхонь
5.5 Побудова лінії взаємного перетину кривих поверхонь
5.6 Побудова лінії перетину граних та кривих поверхонь
5.7 Питання для самоперевірки

5.1 Визначення, утворення та задання поверхонь на кресленику

Під поверхнею розуміють геометричне місце точок, що відповідають функції координат простору типу $\Phi(x, y, z) = 0$.

Поверхня може бути утворена переміщенням деякої лінії а (твірної), форма якої в процесі переміщення може залишатися постійною або безперервно змінюватися. Для наочності зображення на комплексному кресленні закон переміщення твірної звичайно задають графічно у вигляді сімейства ліній l, m, n,…, які називають напрямними. При цьому мають на увазі, що в процесі формотворення твірна ковзає по напрямних (рис. 5.1).

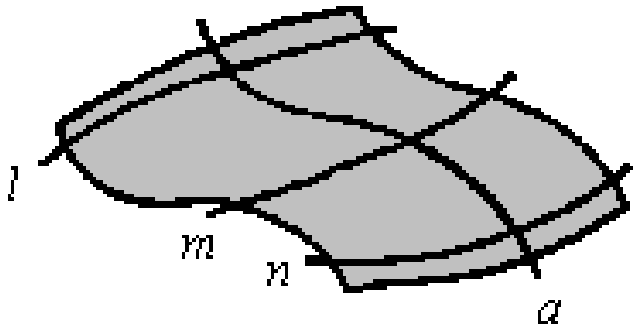


Рисунок 5.1 – Поверхня задана твірною та напрямною лініями

У загальному випадку поверхня може бути задана визначником типу $Def_{\Theta} = (Г)\ [A]$. При цьому конкретне значення геометричної та алгоритмічної частин визначника залежить від умов формотворення.

При зображенні поверхні на комплексному кресленні, крім проекцій геометричних елементів визначника, будують допоміжні лінії, що підвищують його наочність. При цьому, як правило, показують нариси поверхні. Під нарисом поверхні розуміють слід проекційної циліндричної поверхні Σ, що

обгортає задану поверхню Ф. Обгортуюча поверхня стикається з заданою поверхнею по деякій лінії l, котру називають контурною. Тому нарисом поверхні можна вважати проекцію контурної лінії. Таким чином, горизонтальним нарисом поверхні Ф (рис.5.2) буде лінія $l_1 \equiv \Sigma_1$.

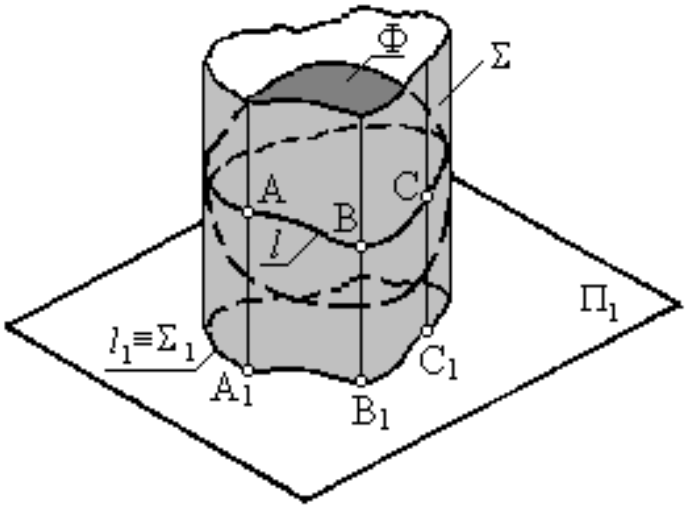


Рисунок 5.2 – Циліндрична поверхня Σ, що обгортає поверхню Ф

Однією з найбільш загальних характеристик поверхні є її порядок. Під порядком поверхні розуміють порядок кривої, по якій цю поверхню перетинає площина загального положення або найбільша кількість точок перетину поверхні прямою.

5.2 Класифікація поверхонь

Уже сам спосіб формотворення припускає існування безлічі поверхонь. Їх доцільно систематизувати за ознаками, що відображують процес формотворення, тобто за формою твірної та законами зміни її форми й переміщення по напрямній. Відповідно до цього підходу всі поверхні можна поділити на поверхні з криволінійною твірною (нелінійчаті) й поверхні з прямолінійною твірною (лінійчаті). У свою чергу поверхні з криволінійною твірною можна поділити на поверхні з криволінійною твірною змінного виду і поверхні з криволінійною твірною постійного виду (рис. 5.3).

Використання як твірної довільної кривої приводить до утворення поверхні загального виду, котра являє тільки теоретичний інтерес.

Якщо як твірну прийняти пряму, в результаті формотворення утвориться поверхня з прямолінійною твірною або лінійчата поверхня. Лінійчата поверхня в загальному випадку може бути однозначно утворена за умови, коли прямолінійна твірна ковзає по трьох напрямних. У зв’язку з цим у загальному випадку визначник лінійчатих поверхонь має наступний вигляд: Def_{Θ} = (a, m, n, l). Однак, звичайно, заздалегідь обумовлюється, що мова йде про лінійчату поверхню, тому, як правило, прямолінійну твірну у визначнику не вказують: Def_{Θ} = (m, n, l). Характер переміщення твірної в процесі формотворення лінійчатих поверхонь може бути заданий трьома

напрямними, двома або однією напрямною та додатковими умовами. Тому їх поділяють на лінійчаті поверхні з трьома, двома й однієї напрямною.

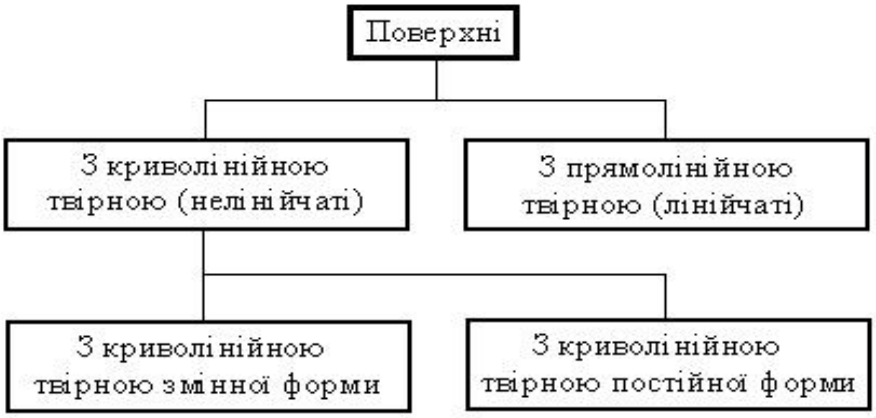


Рисунок 5.3 – Класифікація поверхонь

Лінійчаті поверхні з двома напрямними і напрямною площиною називають косими. Вони включають в себе косі циліндроїди, косі коноїди і косі площини (однопорожнинні гіперболоїди).

Якщо за напрямну площину прийняти площину паралелізму, то ми одержимо особливий випадок косих лінійчатих поверхонь із двома напрямними – так звані прямі лінійчаті поверхні з двома напрямними, або поверхні Каталана. Прямий циліндроїд (рис. 5.4) утворюється тоді, коли обидві напрямні є гладкими кривими, при цьому одна з них належить площині, перпендикулярно до площини паралелізму. Якщо одна з напрямних пряма, утворюється прямий коноїд (рис. 5.5), якщо напрямні – мимобіжні прямі, утворюється гіперболічний параболоїд (рис. 5.6). Поверхня прямого циліндроїда використовується при виготовленні повітряпроводів великого діаметра, поверхня прямого коноїда – у гідротехнічному будівництві для формування поверхонь підвалин мостових опор, а поверхня гіперболічного параболоїда – для формування покрить різних споруд, насипів залізниць і автомобільних шляхів, набережних і різних гідротехнічних споруджень.

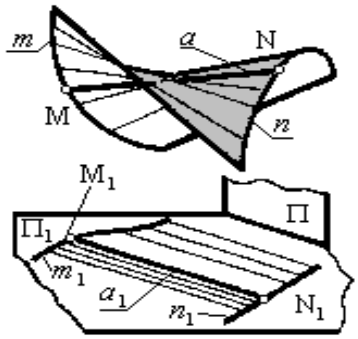


Рисунок 5.4 – Циліндроїд

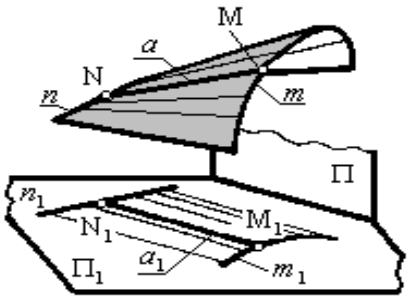


Рисунок 5.5 – Коноїд

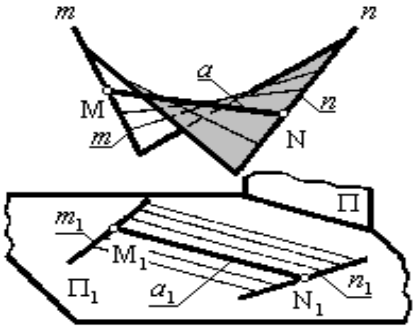


Рисунок 5.6 – Гіперболічний параболоїд

У загальному випадку визначник лінійчатих поверхонь з одною напрямною може бути записаний у наступному вигляді: $Def_{\Theta} = (m)\ [A_m]$. Однак при цьому варто зазначити, що лінійчаті поверхні з однією напрямною можуть бути утворені тільки за наявності додаткових умов про характер переміщення твірної. Ці додаткові умови не можуть бути загальними для всіх поверхонь, тому в кожному конкретному випадку в алгоритмічну частину визначника потрібно вкладати конкретний зміст.

Якщо поставити вимогу, щоби прямолінійна твірна в процесі формотворення була дотичною до напрямної (яку в даному випадку називають ребром повернення) у всіх її точках, – утвориться поверхня торса (рис. 5.7). Якщо додатково потрібно, щоби твірна при цьому складала постійний кут із деякою напрямною площиною, – утвориться поверхня постійного схилу, котра використовується при спорудженні укосів залізничного насипу на схилах і кривих (рис. 5.8).

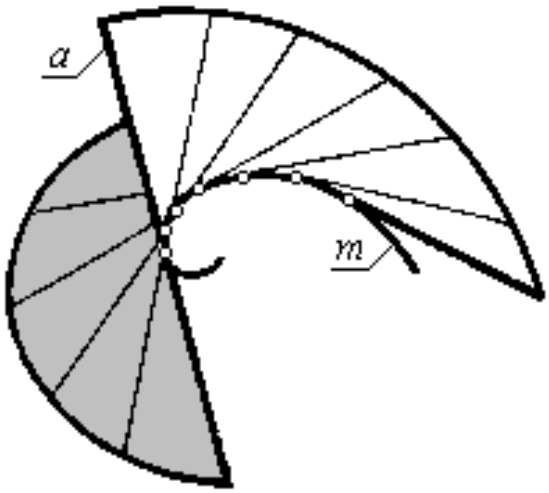


Рисунок 5.7 – Поверхня торсу

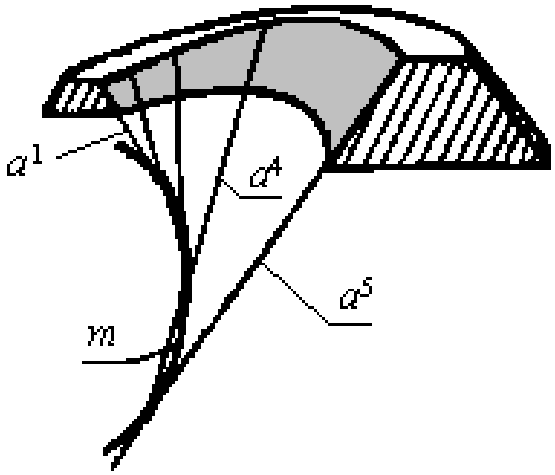


Рисунок 5.8 – Поверхня постійного схилу

При поступальному переміщенні твірної, коли одна з її точок ковзає по криволінійної напрямній, утворюється циліндрична поверхня (рис. 5.9). Тіло, обмежене циліндричною поверхнею з замкненою напрямною і двома паралельними площинами, називають циліндром (рис. 5.10). Частини площин, що обмежують циліндр, називають основами, а відстань між ними – висотою циліндра. Якщо твірні перпендикулярні до основ, циліндр називають прямим, якщо ця умова не виконується – похилим. Циліндр називають круговим або еліптичним, якщо його нормальний (перпендикулярний до твірної) перетин дає відповідно коло або еліпс. Якщо циліндр одночасно і прямий і круговий, його називають круглим.

Якщо при поступальному переміщенні твірної криволінійну напрямну замінити ламаною, утвориться призматична поверхня (рис. 5.11). Тіло, обмежене замкненою призматичною поверхнею і двома паралельними площинами, називають призмою (рис. 5.12).

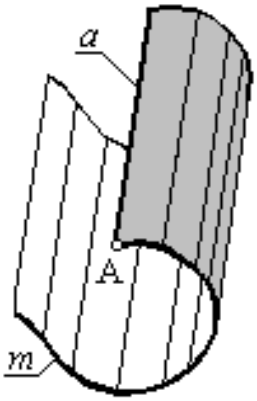


Рисунок 5.9 – Циліндрична поверхня

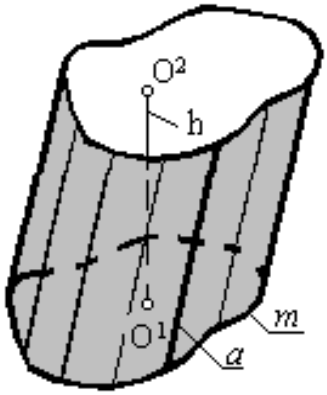


Рисунок 5.10 – Циліндроїд

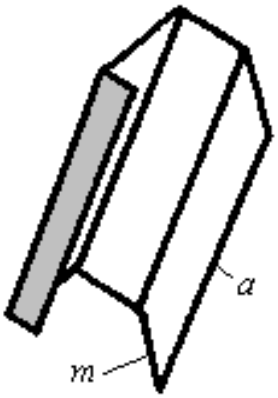


Рисунок 5.11 – Призматична поверхня

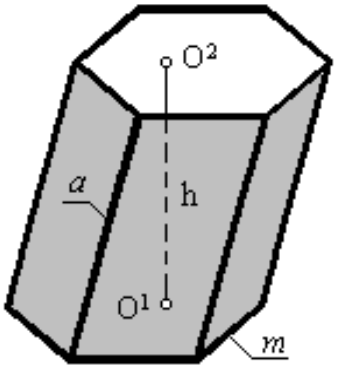


Рисунок 5.12 – Призма

При полярному переміщенні твірної (коли деяка точка S твірної не змінює свого положення в просторі) по криволінійній напрямній утворюється конічна поверхня (рис. 5.13). При цьому точку S називають вершиною конічної поверхні. Конічна поверхня має дві порожнини, але звичайно під конічною поверхнею мають на увазі тільки одну з них. Якщо за напрямну прийняти замкнуту плоску криву, тіло, обмежене однією порожниною конічної поверхні та площиною, якій належить напрямна, називають конусом (рис. 5.14). Частина цієї площини, обмежена напрямною, називається основою конуса, а перпендикуляр, опущений із вершини конуса на його основу, – висотою. Пряма, що з'єднує вершину конуса з центром основи, називається віссю конуса. Якщо вісь конуса перпендикулярна основі, конус називають прямим, якщо ця умова не виконується – похилим. Якщо основою прямого конуса є коло, конус називають круглим. Конус називають круговим або еліптичним, якщо його нормальний (перпендикулярний до осі) перетин дає відповідно коло або еліпс. Тіло, обмежене конічною поверхнею і двома паралельними площинами, називають зрізаним конусом. Висотою зрізаного конуса є відстань між його основами.

Якщо за напрямну прийняти ламану, утвориться пірамідальна поверхня (рис. 5.15). Якщо при цьому напрямна замкнена, утвориться замкнена

пірамідальна поверхня. Якщо замкнену пірамідальну поверхню перетнути площиною, утвориться тіло, яке називають пірамідою (рис. 5.16). Точку S називають вершиною: твірні, котрі проходять через вершини ламаної напрямної, – ребрами; частину площини, обмежену напрямною, – основою; відсіки площин, що розміщені між сусідніми ребрами і сторонами основи – гранями. Кількість граней входить у назву піраміди, наприклад, тригранна, чотиригранна, тощо. Якщо в основі піраміди – правильний багатокутник, піраміду називають правильною. Відстань від вершини піраміди до її основи називають висотою. Якщо основа висоти збігається з центром основи піраміди, останню називають прямою, якщо ця умова не виконується – похилою. Тіло, обмежене пірамідальною поверхнею і двома паралельними площинами, називають зрізаною пірамідою. Частини площин, що обмежують піраміду, називають основами, а відстань між ними – висотою.

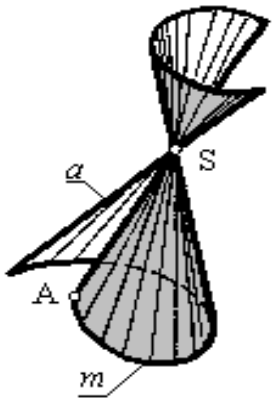


Рисунок 5.13 – Конічна поверхня

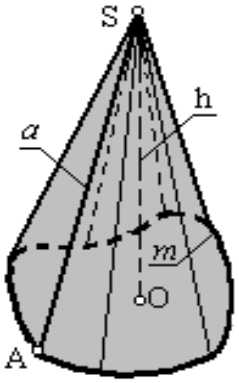


Рисунок 5.14 – Конус

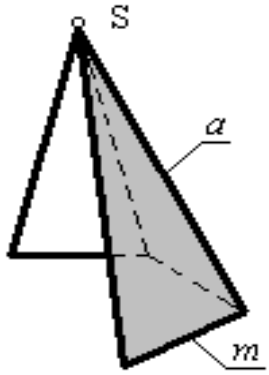


Рисунок 5.15 – Пірамідальна поверхня

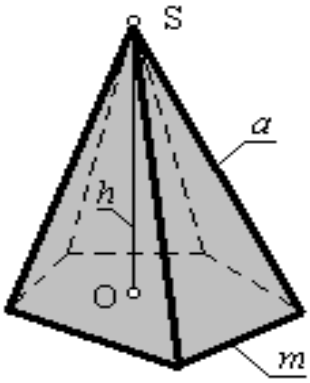


Рисунок 5.16 – Піраміда

При гвинтовому переміщенні твірної утворюється гвинтова поверхня, або гелікоїд. Якщо при цьому твірна перетинає вісь циліндричної гвинтової лінії, то гелікоїд називають закритим, якщо ця умова не виконується – відкритим; якщо твірна складає прямий кут із віссю циліндричної гвинтової лінії, гелікоїд

називають прямим, якщо цей кут відрізняється від прямого – косим. Так, на рисунку 5.17 наведено зображення прямого закритого гелікоїда. Гвинтові поверхні мають властивість зсуву (у процесі формотворення поверхня ковзає уздовж самої себе). Ця властивість забезпечила гвинтовим поверхням широке технічне застосування. Гвинти, шнеки, свердла, пружини, поверхні лопаток турбін і вентиляторів, робочих органів корабельних і повітряних гвинтів, конструкції похилих гвинтових паралелей і сходин та багато інших технічних пристроїв виконуються з використанням гвинтових поверхонь.

При обертанні твірної навколо осі в залежності від їхнього взаємного положення можна одержати циліндр, конус або однопорожнинний гіперболоїд. Якщо відрізок твірної паралельний осі обертання, утвориться циліндр (рис. 5.18), якщо твірна перетинає вісь обертання – конус (рис. 5.19), а якщо твірна і вісь обертання мимобіжні – однопорожнинний гіперболоїд (рис. 5.20). Лінійчаті поверхні обертання завдяки їх технологічності набули винятково широкого застосування в інженерній і будівельній практиці. Зокрема, однопорожнинний гіперболоїд обертання використовується при конструюванні пристроїв для передачі обертання за допомогою зубчастих чи фрикційних гіпербоїдних коліс із мимобіжними осями, а також у будівництві.

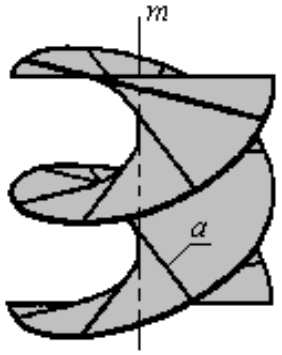


Рисунок 5.17 – Гелікоїд

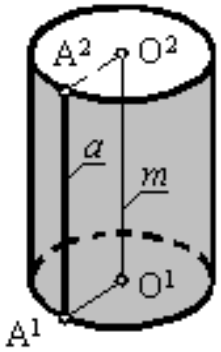


Рисунок 5.18 – Циліндр

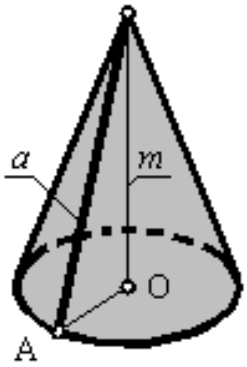


Рисунок 5.19 – Конус

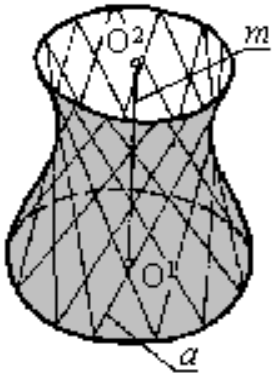


Рисунок 5.20 – Гіперболоїд

У процесі формотворення кожна точка твірної описує коло з центром на осі обертання, яке називають паралеллю. Найбільша і найменша з них одержали

спеціальні назви – відповідно екватора і шийки (горла). Площини, які проходять через вісь обертання, називають меридіональними, а лінії, по яких вони перетинають поверхню, – меридіанами. Звичайно вісь обертання розташовують перпендикулярно до горизонтальної площини проекцій. Тоді меридіани, паралельні фронтальній і профільній площинам проекцій, називають відповідно фронтальним, або головним, і профільним. У залежності від виду твірної можна одержати безліч різноманітних поверхонь обертання. Завдяки простоті виготовлення поверхні обертання виключно широко застосовуються в практичній діяльності людини.

Якщо коло обертати навколо осі, розташованої в її площині, у залежності від їхнього взаємного положення можна одержати різні поверхні. Так, якщо центр кола належить осі обертання, одержимо сферу (рис. 5.21).

Якщо центр кола не належить осі обертання, одержимо тор. Якщо при цьому радіус r кола менший за відстань R його центра від осі обертання, одержимо відкритий тор, або кільце (рис. 5.22), якщо більше – закритий тор (рис. 5.23).

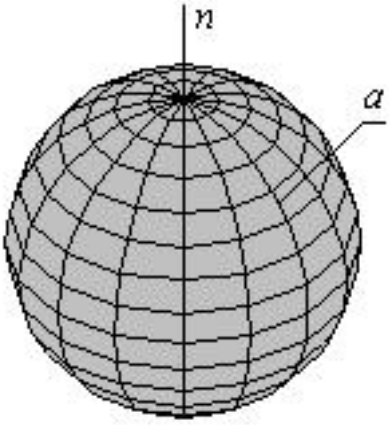


Рисунок 5.21 – Сфера

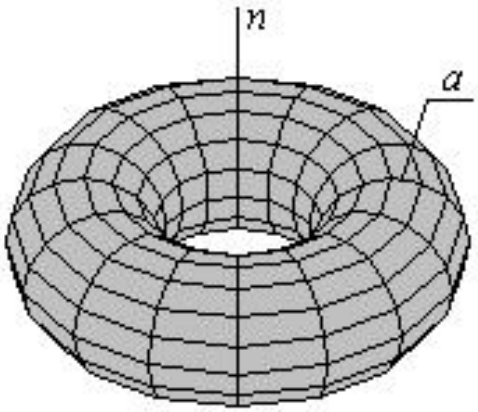


Рисунок 5.22 – Відкритий тор

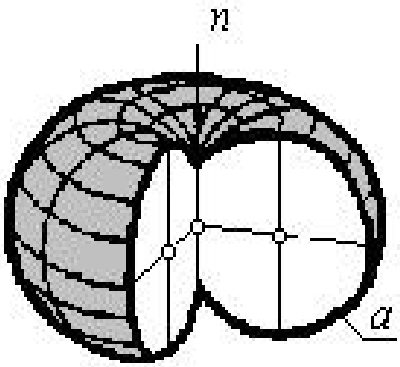


Рисунок 5.23 – Закритий тор

Коли як твірну прийняти еліпс і обертати його навколо малої осі, одержимо стиснений еліпсоїд обертання (рис. 5.24).

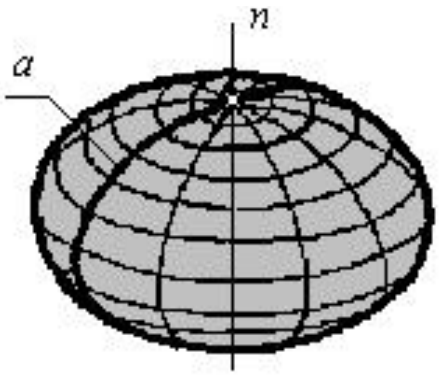


Рисунок 5.24 – Стиснений еліпсоїд обертання

Стиснений еліпсоїд обертання використовується в картографії; якщо еліпс обертати навколо великої осі, одержимо витягнутий еліпсоїд обертання.

5.3 Гранні поверхні

Гранні поверхні утворюються за допомогою площин. *Багатогранником* називають просторову фігуру, обмежену замкнутою поверхнею, яка складається з відсіків площин, що мають форму плоских багатокутників. Багатокутники, які утворюють поверхню багатогранника, називаються *гранями*, сторони багатокутників – *ребрами*, а вершини – *вершинами* багатогранника.

В інженерній практиці найчастіше використовують такі багатогранники: піраміди, призми, призматоїди та правильні багатогранники.

Пірамідальна поверхня утворюється при переміщенні прямої твірної l, що проходить через сталу точку простору S та ковзає по замкнутій ламаній лінії m, яку називають напрямною (рис. 5.25). При перерізі цієї пірамідальної поверхні площиною Σ утворюється піраміда.

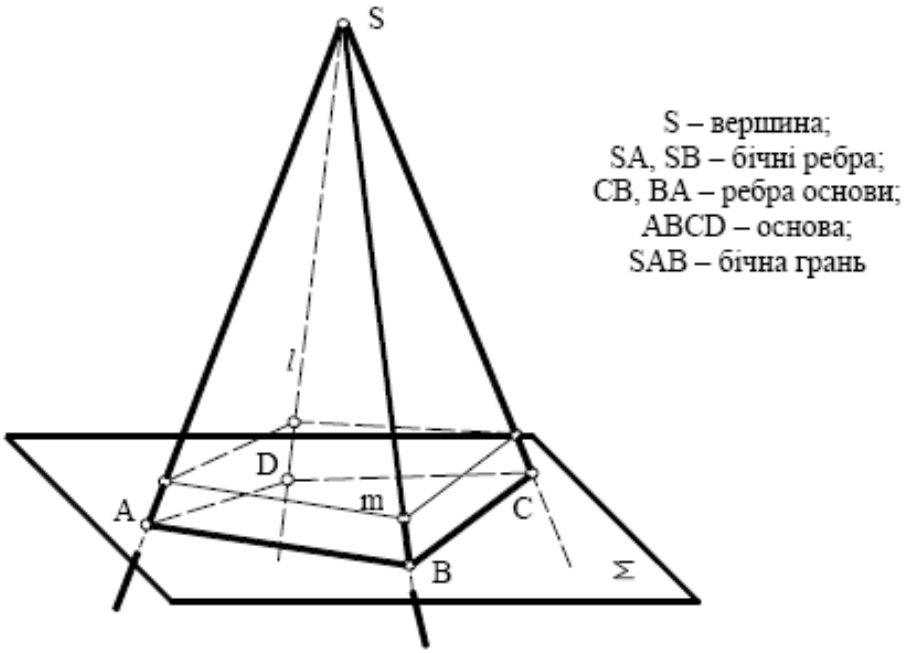


Рисунок 5.25 – Пірамідальна поверхня

Піраміда – це багатогранник, основою якого є багатокутник, а бічні грані – трикутники, що мають спільну точку S – вершину піраміди.

Сукупність усіх ребер багатогранника називають його сіткою. Згідно з теоремою Ейлера, для випуклого багатогранника існує залежність між числом граней Г, вершин В та ребер Р, яка має наступний вигляд: Г + В – Р = 2.

Піраміда називається правильною, якщо в її основі лежить правильний багатогранник, а висота проходить через центр основи. Висота – це найкоротша відстань від вершини піраміди до площини основи. Бічні грані правильної піраміди – рівнобедрені трикутники.

На рисунку 5.26 наведено приклад побудови на комплексному кресленні правильної піраміди, в основі якої лежить чотирикутник.

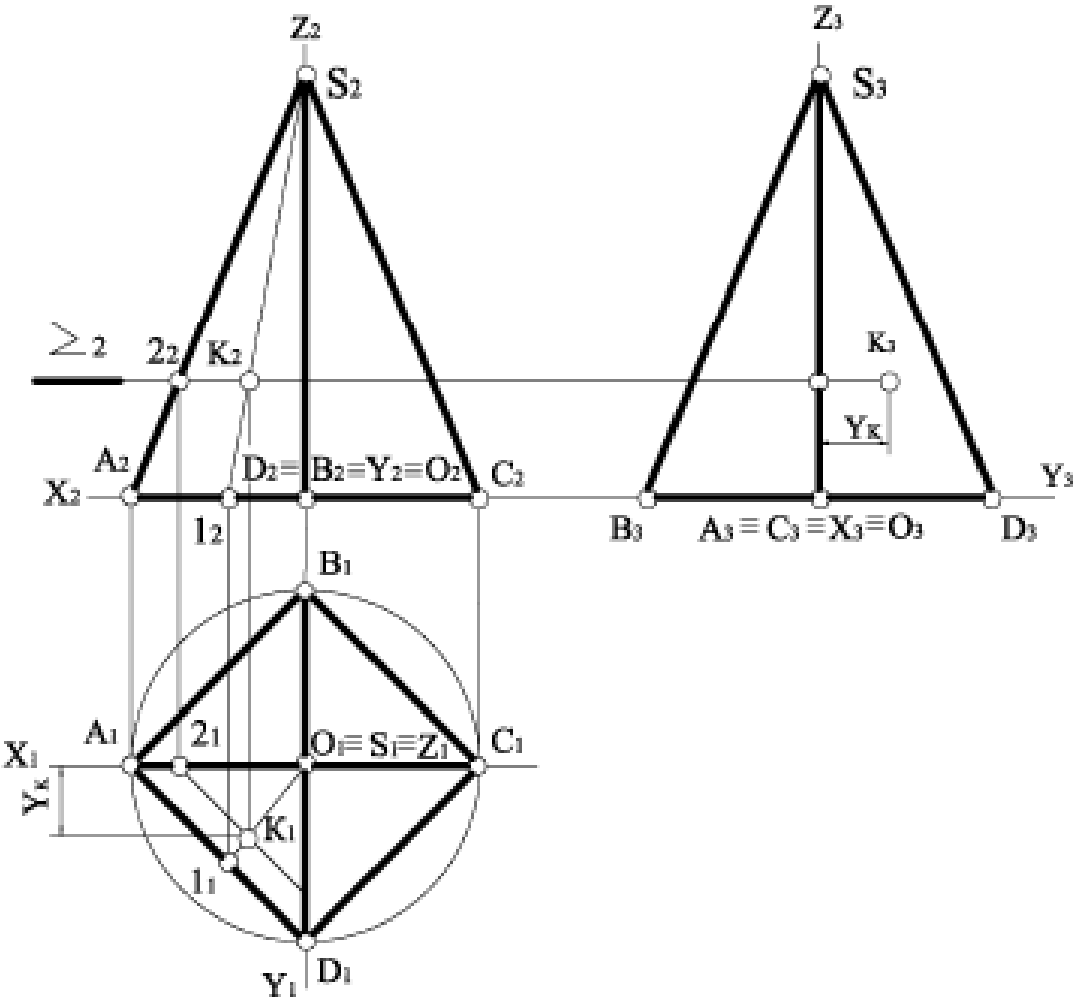


Рисунок 5.26 – Комплексне креслення правильної піраміди

Будемо вважати, що задана фронтальна проекція K_2 точки К, котра належить бічній грані SAD, яка є площиною загального положення. Точка належить площині, якщо належить якійсь прямій цієї площини. Виходячи з цього, проводимо через точки S_2 і K_2 пряму до перетину з фронтальною проекцією A_2D_2 у точці 1_2. Далі будуємо 1_1S_1 і за вертикальною відповідністю K_1. Профільну проекцію K_3 будуємо, використовуючи проекційний зв’язок.

Будувати точки на поверхні можна за допомогою січних площин посередників. У даному випадку вибираємо горизонтальну площину рівня Σ, яку проводимо через точку К.

Фронтальна проекція лінії перетину площини Σ і грані SAD проходить через точки $2_2К_2$. Точка 2 належить ребру SA, тому знаходимо точку 2_1, через яку паралельно A_1D_1 будуємо горизонтальну проекцію лінії перетину, і по вертикальній відповідності знаходимо $К_1$ – горизонтальну проекцію точки К. Профільну проекцію $К_3$ точки К будуємо як і раніше.

Призматична поверхня утворюється при переміщенні прямої твірної l по довільній напрямній m замкненій ламаній лінії так, що вона залишається паралельною до заданого напрямку S (рис. 5.27).

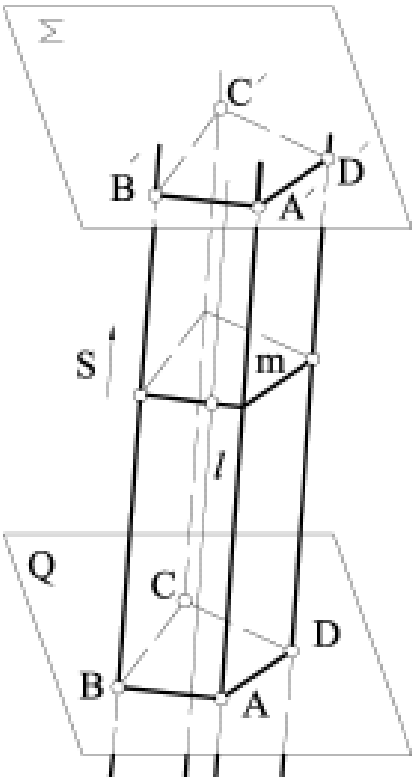


Рисунок 5.27 – Призматична поверхня

Призмою називається багатогранник, який утворюється в перерізі призматичної поверхні двома паралельними площинами Σ і Q. Якщо бічні ребра перпендикулярні до основи, призма називається прямою і її бічні грані – прямокутники. Якщо бічні ребра не перпендикулярні до основи, призма називається похилою і її бічні грані – паралелограми.

Призма називається ***правильною***, якщо в основі її лежить правильний багатокутник.

На рисунку 5.28 наведено приклад побудови на комплексному кресленні прямої правильної трикутної призми, яка стоїть на горизонтальній площині проекцій $П_1$.

Нижня і верхня основи є горизонтальними площинами рівня, тому їх горизонтальні проекції відображені в натуральну величину. Бічні ребра AA′, BB′, CC′ перпендикулярні до $П_1$, тому бічні грані на горизонтальну площину проекцій спроекціювались у відрізки прямих, що співпадають із відповідними сторонами трикутника основи.

Площина BB′CC′ є профільною площиною рівня, тому вона перпендикулярна до $П_2$ і її фронтальна проекція вироджується в одну пряму.

Будемо вважати, що задана фронтальна проекція K_2 точки K, яка належить бічній грані AA′CC′. Ця грань є горизонтально проекційною площиною, тому A_1C_1 має збиральні властивості й горизонтальна проекція K_1 належить A_1C_1. Для побудови профільної проекції K_3 точки K вимірюємо на $П_1$ координату y_K і відкладаємо її на лінії проекційного зв'язку праворуч від Z_3.

Призматоїд – це опуклий багатогранник, усі бічні грані якого є трикутниками або трапеціями, верхня і нижня основи розташовані в паралельних площинах і є багатокутниками.

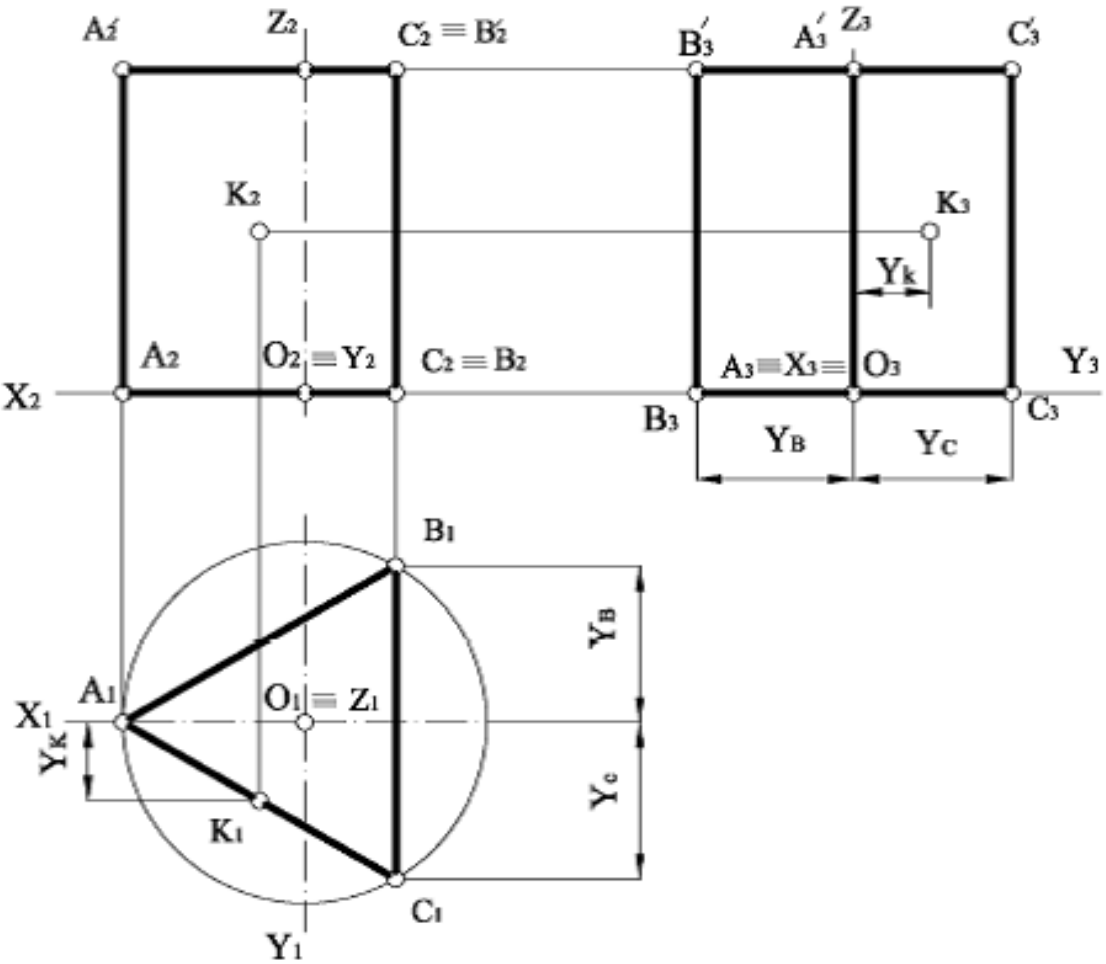


Рисунок 5.28 – Пряма правильна трикутна призма

На рисунку 5.29 зображено призматоїд, основами якого є квадрати ABCD та EFGH.

Багатогранники називаються правильними, якщо усі ребра, грані, кути (плоскі, двогранні та просторові) рівні між собою, їх називають тілами Платона.

Існує п’ять таких правильних багатогранників:

– правильний чотиригранник (тетраедр), гранями якого є чотири рівносторонні трикутники (рис. 5.30);

– правильний шестигранник (гексаедр), або куб, складається з шести рівних квадратів (рис. 5.31);

– правильний восьмигранник (октаедр), гранями якого є вісім рівносторонніх трикутників (рис. 5.32);

– правильний дванадцятигранник (додекаедр) складається з дванадцяти правильних п’ятикутників;

– правильний двадцятигранник (ікосаедр), утворений із двадцяти рівносторонніх трикутників.

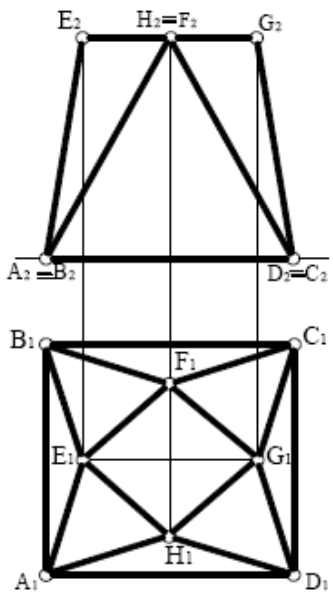


Рисунок 5.29 – Призматоїд

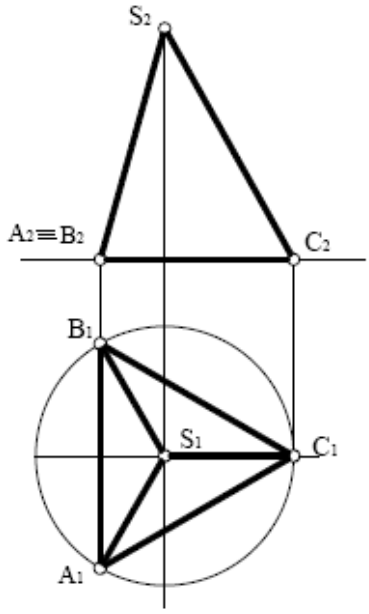


Рисунок 5.30 – Тетраедр

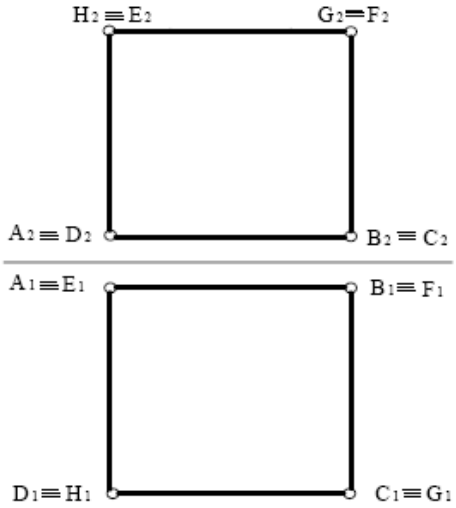


Рисунок 5.31 – Гексаедр

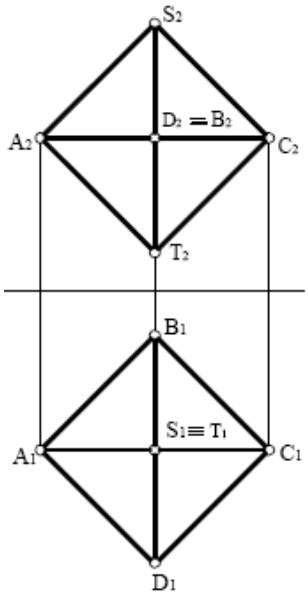


Рисунок 5.32 – Октаедр

5.3.1 Переріз гранних поверхонь площиною

Перерізом називають плоску фігуру, яку отримують при перетині багатогранника площиною. Для побудови перерізів багатогранників використовують два способи: спосіб ребер, спосіб граней. Спосіб ребер передбачає розв'язання задачі на перетин прямої з площиною, причому виконується пошук точки перетину кожного бічного ребра з січною площиною.

Побудова перерізу значно спрощується, коли січна площина Σ є проекційною (рис. 5.33).

У цьому випадку фронтальна проекція перерізу 12345 вже відома, оскільки вона збігається з фронтальним слідом січної фронтально проекційної площини Σ.

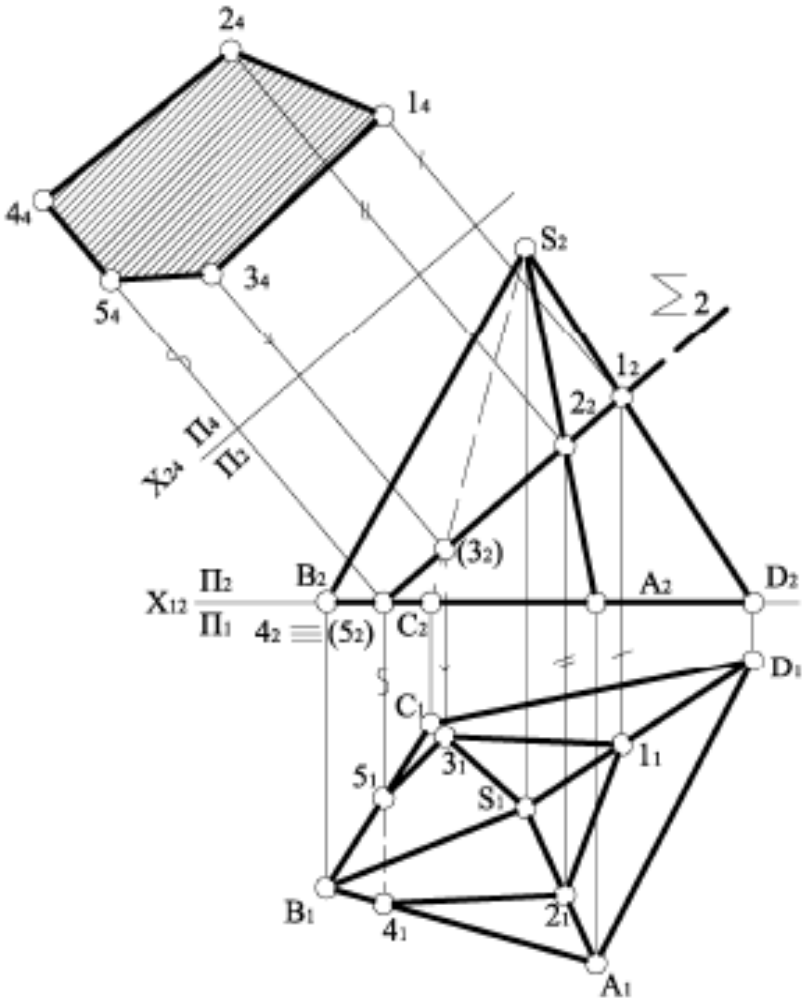


Рисунок 5.33 – Переріз проекційною площиною Σ

Горизонтальну проекцію перерізу будуємо за законом належності точки ребру і по вертикальній відповідності. Далі методом заміни площин проекцій перетворюємо площину перерізу, яка є проекційною в системі $П_2/П_1$, у площину рівня. Для цього будуємо вісь нової системи площин $x_{24} \parallel Σ_2$. Координати точок перерізу заміряємо на $П_1$ від осі x_{12} і переносимо відповідно на $П_4$. Проекція площини перерізу $1_4 2_4 4_4 5_4 3_4$ є натуральною величиною.

На рисунку 5.34 наведено приклад побудови перерізу похилої трикутної призми, яка перетинається фронтально проекційною площиною Σ.

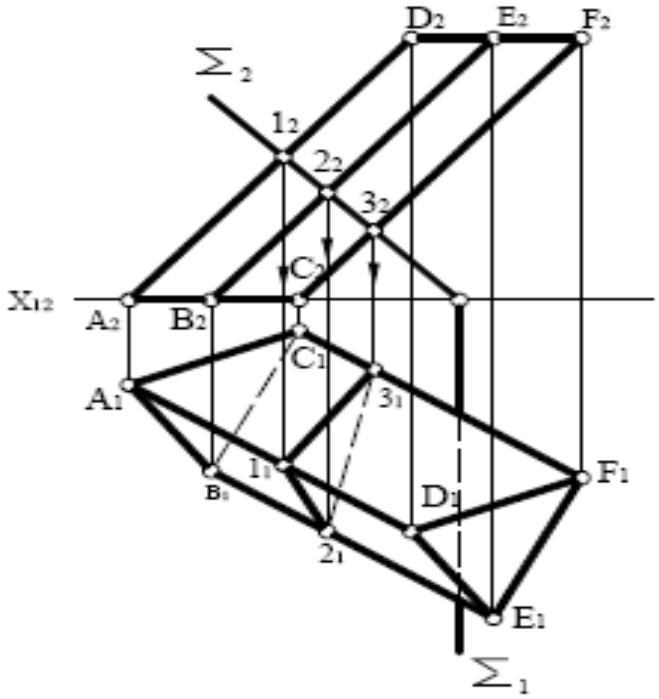


Рисунок 5.34 – Переріз фронтально проекційною площиною Σ

Фронтальна проекція площини перерізу $1_2 2_2 3_2$ збігається з фронтальним слідом площини Σ. Горизонтальну проекцію перерізу визначаємо за допомогою вертикальної відповідності.

5.3.2 Побудування точок перетину лінії з поверхнею

Багатогранну опуклу поверхню пряма лінія перетинає у двох точках. Точки перетину прямої з поверхнею багатогранника називаються точками зустрічі.

При перетині багатогранників прямою лінією можливі такі випадки:

1. Грані багатогранника займають проекційне положення.
2. Грані багатогранника займають загальне положення.

У першому випадку точки перетину прямої з гранями одразу визначають на одній із проекцій, до якої грані займають проекційне положення. У другому випадку крізь пряму проводять допоміжну площину, частіше проекційну, будують лінію перетину цієї площини з багатогранною поверхнею, а потім визначають точки перетину отриманої лінії (багатокутника) і прямої.

На рисунку 5.35 наведено приклад побудови точок перетину прямої загального положення l із прямою трикутною призмою ABC.

Бічні грані призми ABC займають горизонтально проекційне положення, тому горизонтальна проекція прямої трикутної призми виглядає як трикутник $A_1B_1C_1$. Завдяки збиральним властивостям проекційних площин точки перетину K і L прямої l із гранями визначаємо безпосередньо на горизонтальній площині проекцій $П_1$. Фронтальні проекції точок K і L визначають за вертикальною відповідністю. Відрізок між точками входу та виходу невидимий на обох проекціях.

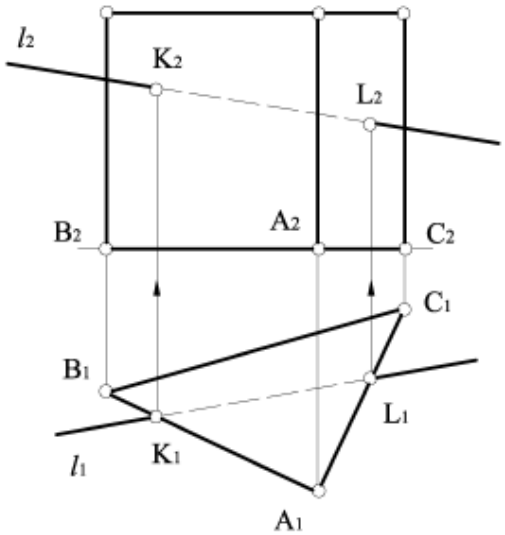


Рисунок 5.35 – Побудова точок перетину прямої l з трикутною призмою ABC

На рисунку 5.36 наведено приклад побудови точок входу і виходу прямої загального положення l з поверхнею піраміди SABCD.

Через пряму l проводимо фронтально проекційну площину Σ. На $П_2$ визначаємо точки перетину ребер піраміди зі слідом площини $Σ_2$.

Потім будуємо горизонтальну проекцію перерізу $1_1 2_1 3_1 4_1$ за законом належності та за допомогою ліній проекційного зв'язку. Перетин горизонтальної проекції l_1 прямої l із побудованою горизонтальною проекцією перерізу $1_1 2_1 3_1 4_1$ дає точки K_1 і L_1 – горизонтальні проекції точок входу і виходу. Фронтальні проекції K_2 і L_2 визначаємо за законом належності та за вертикальною відповідністю.

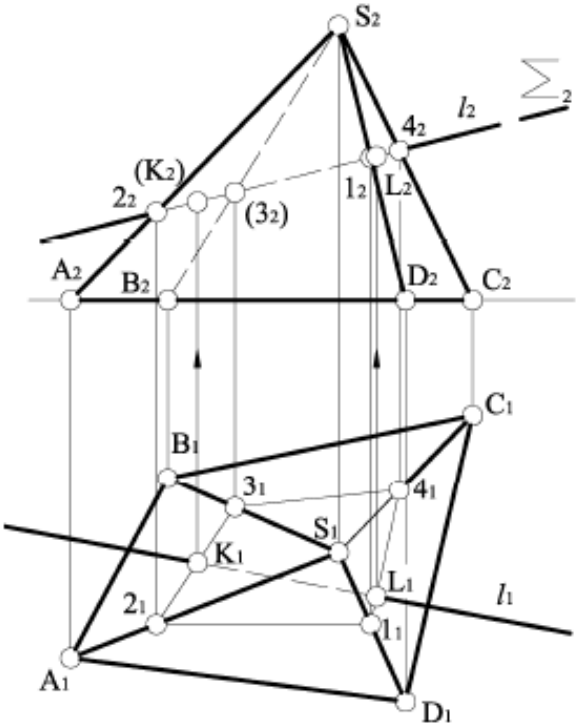


Рисунок 5.36 – Побудова точок входу і виходу прямої l з поверхнею піраміди SABCD

Іноді зручніше одержувати розв’язання задачі за допомогою площини загального положення (рис. 5.37).

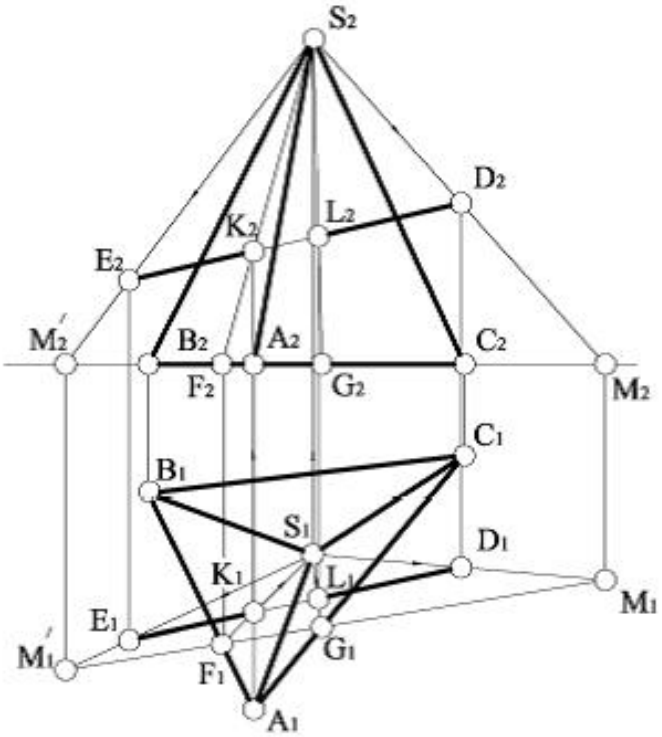


Рисунок 5.37 – Побудова точок входу і виходу прямої l за допомогою площини загального положення EDS

Допоміжну площину задаємо прямою ED і вершиною піраміди S. З’єднуємо вершину піраміди S з точками E і D. Далі знаходимо сліди для цих прямих M і M′, через які проходить горизонтальний слід M_1' M_1 допоміжної площини. Цей слід перетинає основу піраміди в точках F і G, через які проходять прямі SF і SG, що є лініями перетину допоміжної площини з поверхнею піраміди. Пряма ED належить допоміжній площині, а також перетинає прямі SF і SG в точках K і L, які є точками входу і виходу.

5.3.3 Побудування лінії взаємного перетину гранних поверхонь

Лінія перетину – це спільна лінія для двох поверхонь, які перетинаються. Для побудови лінії перетину двох багатогранників використовують два способи:

1. Спосіб ребер.
2. Спосіб граней.

Спосіб ребер дозволяє визначити лінію перетину багатогранників за точками перетину ребер одного багатогранника з гранями другого. Розв’язання задачі зводиться до побудування точки перетину прямої з площиною.

Спосіб граней дозволяє визначити лінію перетину багатогранників як просторову ламану, котра складається з відрізків прямих ліній, по яких перетинаються певні грані багатогранників. Розв’язання задачі зводиться до побудування лінії перетину двох площин.

Лініями перетину двох багатогранників є просторові замкнені багатокутники. Якщо один багатогранник частково перетинає поверхню другого, то матимемо тільки одну замкнену ламану лінію їх взаємного перетину, це називається неповним проникненням, або врізанням.

Якщо один багатогранник повністю перетинає другий, отримаємо дві лінії перетину: лінію входу і лінію виходу, це називається повним проникненням.

Просторова лінія перетину багатогранників складається з відрізків прямих ліній, по яких перетинаються їх грані, при цьому вершини ламаної є точками перетину ребер одного багатогранника з гранями другого.

На рисунку 5.38 наведено приклад побудови ліній перетину піраміди SABC і чотиригранної призми DEFG.

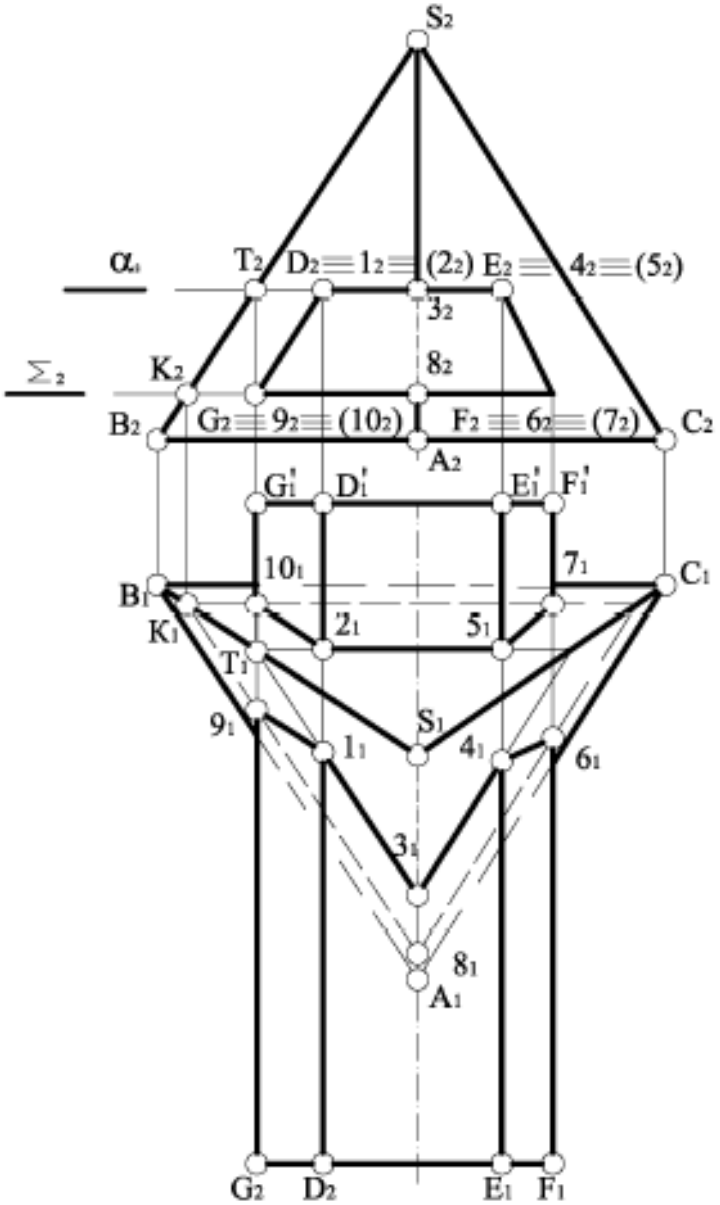


Рисунок 5.38 – Побудова ліній перетину піраміди SABC і чотиригранної призми DEFG

Тригранна піраміда своєю основою розташована на горизонтальній площині проекцій. Дві бічні грані призми DEE′D′ і GFF′G′ – горизонтальні площини рівня, а дві інші DGG′D′ і EFF′E′ – фронтально проекційні площини, тому їх фронтальні проекції перетворюються на прямі лінії, які мають збиральні властивості, а бічні ребра призми проекціюються в точки. Отже, фронтальна проекція лінії перетину цих фігур відома. Оскільки призма повністю перетинає піраміду, отримуємо дві лінії перетину: лінію входу і лінію виходу. Для побудування горизонтальної проекції лінії перетину проводимо через грані DEE′D′ і GFF′G′ горизонтальні площини рівня $\alpha(\alpha_2)$ і $\Sigma(\Sigma_2)$, які паралельні до основи піраміди, і, таким чином, лінії перетину з бічною поверхнею піраміди дадуть фігури, подібні до основи. Фронтальна проекція горизонтальної площини рівня α_2 перетинає ребро піраміди S_2B_2 у точці T_2. Далі за законом належності та за допомогою лінії проекційного зв'язку будуємо її горизонтальну проекцію T_1. Потім проводимо через T_1 пряму, паралельну до B_1A_1, і отримуємо точки 1_1 і 3_1. Через точку 3_1 проводимо пряму, паралельну до A_1C_1, і отримуємо точку 4_1. Потім через T_1 проводимо пряму, паралельну до B_1C_1, і отримуємо точки 2_1 і 5_1.

Задача на побудування лінії перетину гранних поверхонь значно спрощується, коли одна з фігур займає проекційне положення. На рисунку 5.39 наведено приклад побудови лінії перетину прямої тригранної призми з тригранною пірамідою.

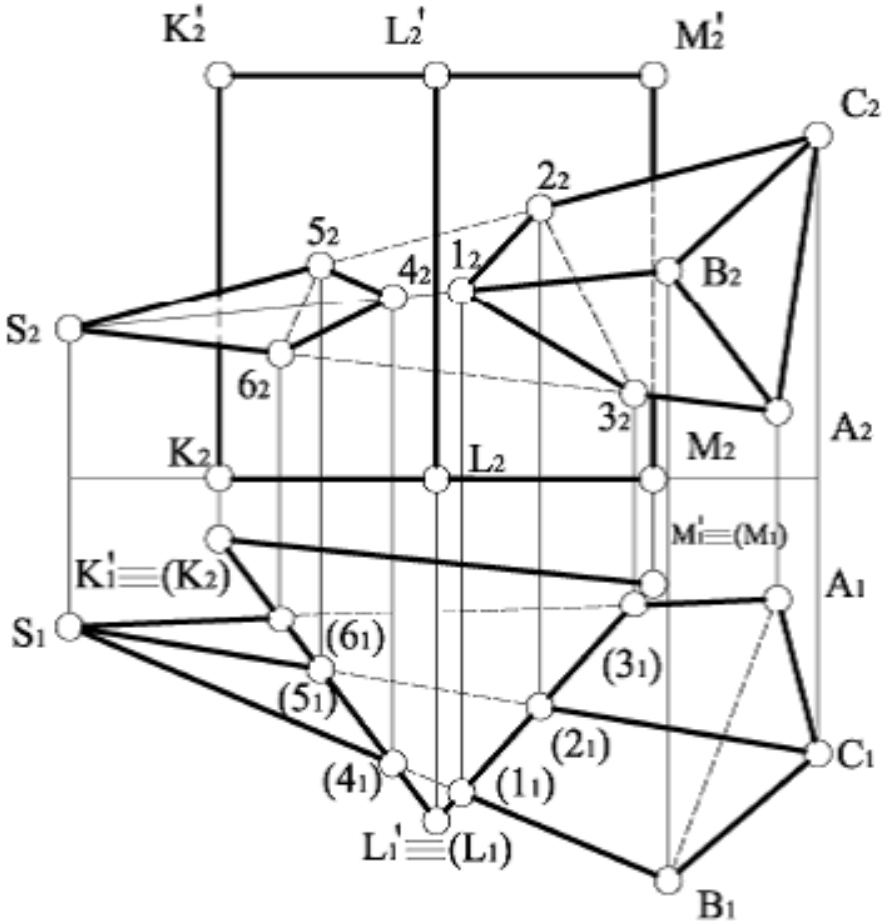


Рисунок 5.39 – Побудова ліній перетину прямої тригранної призми з тригранною пірамідою

Грані призми займають горизонтально проекційне положення і на горизонтальній площині проекцій проекціюються в прямі лінії. Горизонтальні проекції 1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1, 6_1 точок перетину ребер піраміди з гранями призми знаходимо на перетині горизонтальних проекцій відповідних граней призми і ребер піраміди, а фронтальні проекції 1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2, 6_2 знаходимо по вертикальній відповідності з використанням властивості належності.

Видимість лінії перетину визначаємо відповідно до видимості граней, на яких лежить ця лінія. На фронтальній площині проекцій призма має дві видимі грані KK′L′L, LL′M′M і одну невидиму KK′M′M, з граней піраміди видимими є грані SBC, SBA, а невидимою – грань SAC. Тому видимими на фронтальній площині проекцій є відрізки 1_22_2, 1_23_2, а також 4_25_2, 4_26_2, які належать одразу двом видимим граням.

5.4 Криві поверхні

5.4.1 Точки і лінії на поверхнях

Лінію можна розглядати як сукупність розташованих по поверхні точок. Виникає запитання: скільки і які точки необхідно побудувати? Побудування великої кількості точок приводить до великих затрат часу.

Спочатку будують опорні точки, до яких належать точки початку і кінця лінії, точки на межі видимості, а також найвищі та найнижчі точки. Потім будують точки, які називають додатковими, і вони впливають тільки на точність побудування.

Зазвичай на комплексному кресленні точку задають на одній із проекцій, і при цьому виникає задача знаходження інших проекцій цієї точки. Для розв’язання цієї задачі використовують умову належності точки поверхні: якщо точка належить поверхні, вона належить деякій лінії цієї поверхні. Тому для знаходження необхідної проекції через задану точку проводять яку-небудь лінію поверхні. Звичайно як таку лінію використовують твірну або паралель. Потім знаходять другу проекцію цієї лінії, а потім, використовуючи властивість належності точки лінії, знаходять другу проекцію цієї точки.

На рисунку 5.40 наведено приклад побудови відсутніх проекцій лінії l по заданій фронтальній проекції лінії l, яка належить поверхні прямого кругового конуса.

Як опорні точки приймаємо точки A і B – начало і кінець лінії, а також точку C, точку перетину лінії l з профільним меридіаном, а для точності побудування вибираємо ще дві допоміжні точки E і D.

Прямий круговий конус можна розглядати як поверхню обертання і як лінійчату поверхню. Тому для побудування горизонтальних проекцій точок, які належать поверхні конуса, існує два способи.

Якщо конус розглядати як поверхню обертання, то через задану точку, наприклад A, проводимо паралель h^A. Її фронтальна проекція h^A_2 є прямою, яка проходить через A_2 і перпендикулярна до осі конуса, а горизонтальна проекція h^A_1 – коло радіуса $h^A_2/2$.

Фронтальною межею видимості для конуса є лінії його головних меридіанів, а профільною межею видимості є лінії профільних меридіанів.

Використовуючи властивість належності точки лінії, а також враховуючи видимість фронтальної проекції A_2 точки А, знаходимо горизонтальну проекцію A_1 точки А.

Для побудови профільної проекції A_3 точки А через A_2 проводимо горизонтальну лінію зв`язку і відкладаємо на ній від осі вправо $У_A$.

Якщо конус розглядати як лінійчату поверхню, то через точку А проводимо твірну m^A. Фронтальна проекція m^A_2 проходить через фронтальну проекцію A_2 точки А і в точці 1_2 перетинає фронтальну проекцію основи конуса. Потім будуємо горизонтальну проекцію 1_1 точки 1. Оскільки точка A_2 за умовою видима, видимою буде і твірна m^A_2, яка проходить через неї. Тому горизонтальна проекція 1_1 точки 1 буде належати нижній половині горизонтальної проекції кола основи конуса.

З'єднуємо прямою точки l_1 і S_1 і отримуємо горизонтальну проекцію m^A_1 твірної m^A. Використовуючи властивість належності точки лінії, отримуємо горизонтальну проекцію A_1 точки А.

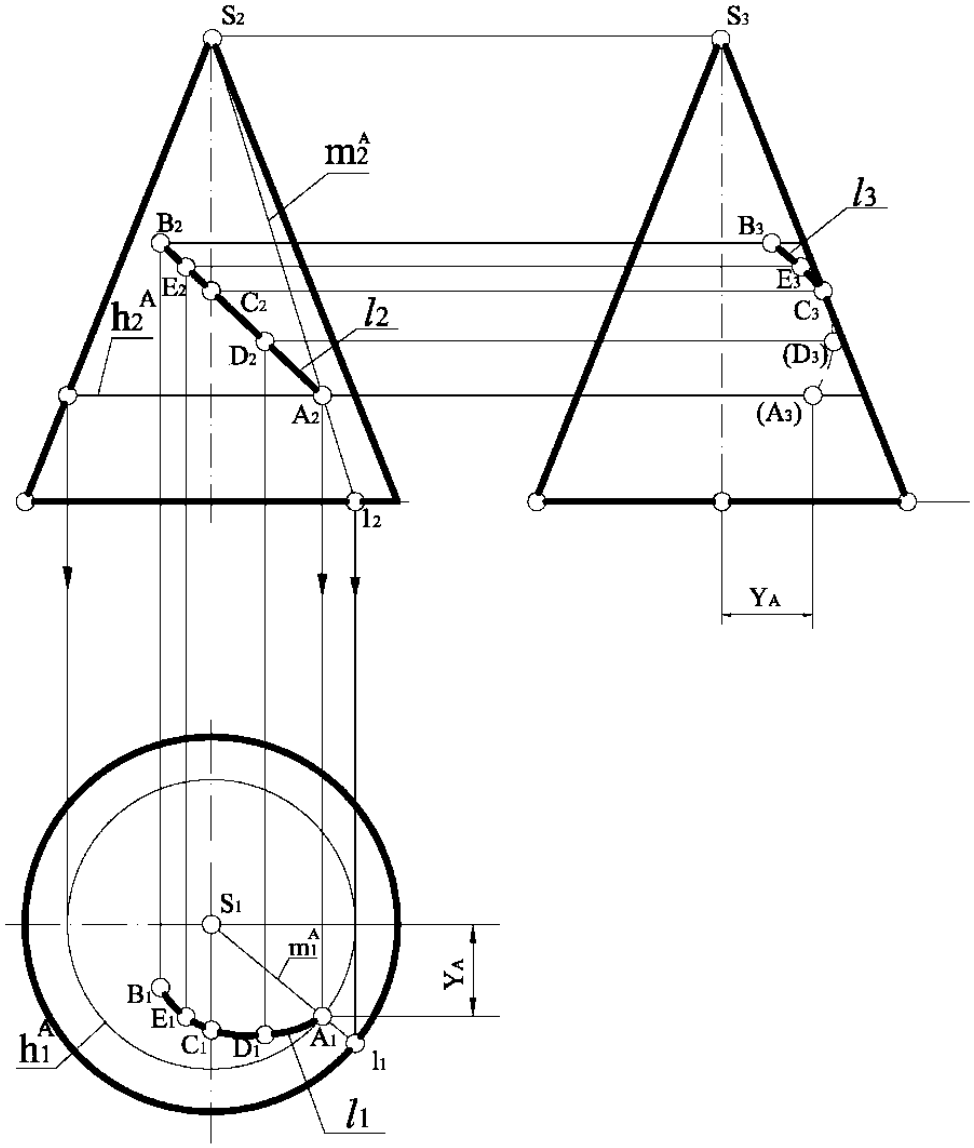


Рисунок 5.40 – Побудови проекцій лінії l на поверхні конуса

Аналогічно знаходять горизонтальні проекції всіх вибраних точок і, з'єднавши їх плавною кривою, отримаємо горизонтальну проекцію l_1 лінії l.

Далі будуємо профільні проекції точок, використовуючи лінії зв`язку і відстані до відповідних точок, які беремо з горизонтальної площини проекцій. Профільна проекція C_3 точки C належить профільному меридіану. Частина профільної проекції $B_3E_3C_3$ буде видимою, а частина $C_3D_3A_3$ – невидимою.

На рисунку 5.41 наведено приклад побудови відсутніх проекцій лінії l по заданій фронтальній проекції лінії l_2, яка належить поверхні прямого колового циліндра.

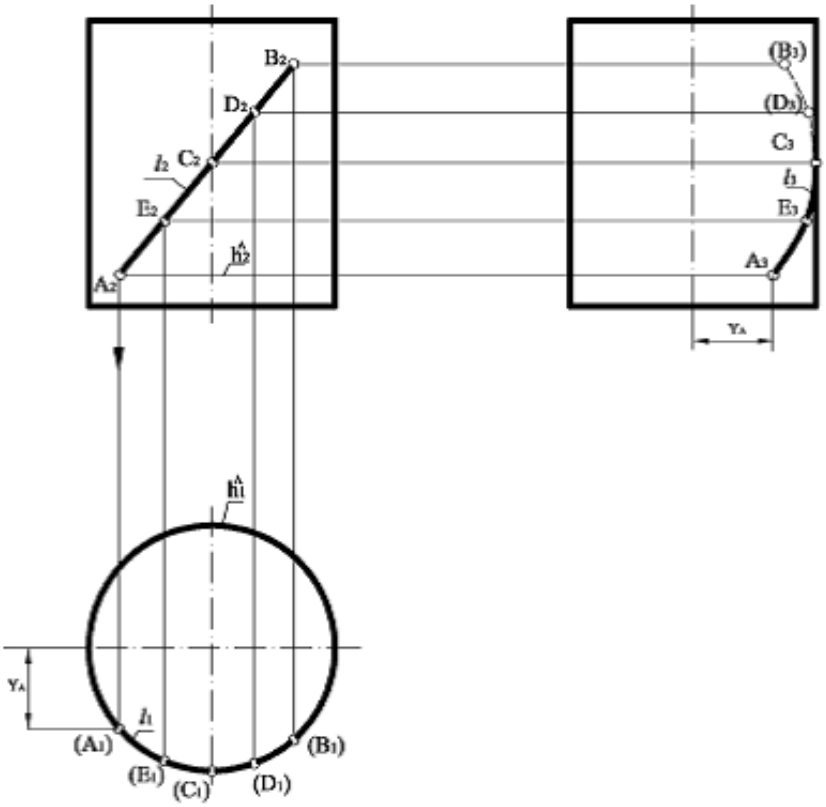


Рисунок 5.41 – Побудови проекцій лінії l на поверхні циліндра

Як опорні точи приймаємо точки A і B – начало і кінець лінії l, а також точку C, точку перетину лінії l з профільним меридіаном, а для точності побудування вибираємо ще дві допоміжні точки E і D.

Бічна поверхня циліндра займає проекційне положення відносно горизонтальної площини проекцій, при цьому всі паралелі однакові і їх горизонтальні проекції збігаються з горизонтальним обрисом циліндра, яким є коло.

Тому горизонтальні проекції точок знаходять по вертикальній відповідності на горизонтальному обрисі циліндра. Горизонтальною межею видимості є лінія верхньої основи, тому вся горизонтальна проекція l_1 лінії l буде невидимою.

Для побудування профільної проекції A_3 точки A через точку A_2 проводимо горизонтальну лінію зв`язку і відкладаємо $У_A$ на ній від осі вправо.

Частина профільної проекції $A_3E_3C_3$ буде видимою, а частина $C_3D_3B_3$ – невидимою.

На рисунку 5.42 наведено приклад побудови проекцій, яких не вистачає, лінії l, котра належить сфері, по заданій фронтальній проекції l_2.

Як опорні точи приймаємо точки A і B – початок і кінець лінії l, а також D і C – точки перетину лінії l з екватором і профільним меридіаном сфери. Оскільки l є кривою лінією, вибираємо ще додаткові точки E, F, G.

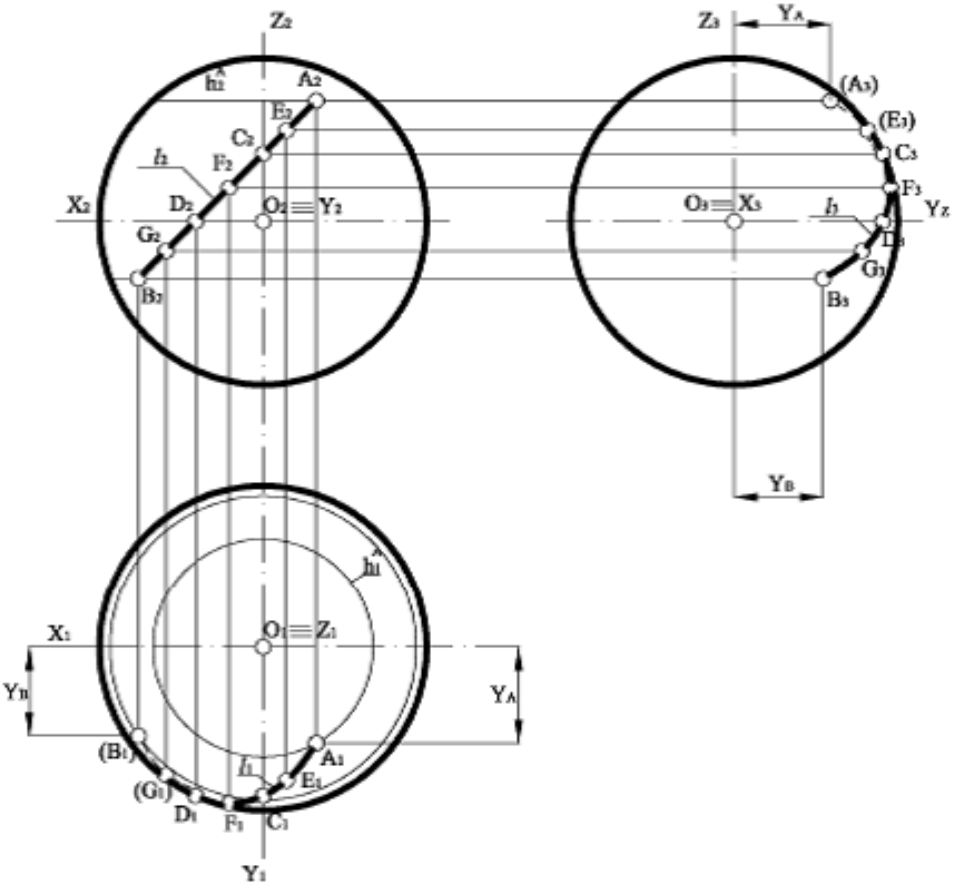


Рисунок 5.42 – Побудови проекцій лінії l на поверхні сфери

Фронтальна проекція точки D належить фронтальній проекції екватора, тому її горизонтальна проекція належить горизонтальній проекції екватора. Існують дві точки, які задовольняють цій умові: одна на верхній половині обрисового кола, друга – на нижній.

Для правильного знаходження положення точки використовуємо дані про її видимість на фронтальній площині проекцій, де вона є видимою. Фронтальною межею видимості для сфери є горизонтальна проекція головного меридіана, тому горизонтальна проекція D_1 належить нижній половині обрисового кола сфери.

Порядок знаходження горизонтальних проекцій інших точок однаковий. Розглянемо знаходження горизонтальної проекції A_1 точки A. Через точку A проводимо паралель. Її фронтальна проекція h^A_2 є прямою, яка перпендикулярна до фронтальної проекції осі сфери, а горизонтальна

проекція h^A_1 – коло радіуса $h^A_2/2$ з центром, який збігається з горизонтальною проекцією осі сфери.

5.4.2 Переріз кривих поверхонь площиною

При перетині кривих поверхонь площиною утворюється плоска фігура, яку називають *перерізом*.

У загальному випадку для побудування лінії перерізу кривої поверхні площиною необхідно виконати такі дії:

1. Визначити, яке положення займає січна площина відносно площин проекцій. Якщо січна площина є проекційною, одна проекція перерізу є готовою, вона збігається зі слідом заданої площини. Друга проекція будується за умови належності точок перерізу поверхні. Якщо січна площина займає загальне положення, задачу можна розв'язати методом заміни площин проекцій, або допоміжних січних посередників.

2. Для спрощення побудування лінії перерізу всі точки, через які проходить лінія перерізу, розділяють на опорні точки перетину і допоміжні точки.

3. Іноді січна площина не повністю перетинає задану поверхню, тоді для зручності побудування лінії перетину площину продовжують до повного перетину поверхні площиною, але потім умовну частину перерізу треба відкинути.

4. Видимість перерізу визначають за допомогою точок перетину, які належать обрисній твірній, головному меридіану або екватору.

5. Через отримані точки проводять плавну криву лінію перерізу, враховуючи при цьому її видимість.

При перерізі прямого колового циліндра площиною можливі такі випадки:

1. Якщо січна площина не перпендикулярна і не паралельна до осі циліндра, вона перетинає циліндр по еліпсу.

2. Якщо січна площина перпендикулярна до осі циліндра, отримаємо коло.

3. Якщо січна площина паралельна до осі циліндра, отримаємо прямокутник.

4. Якщо січна площина є дотичною до поверхні циліндра, то отримаємо пряму лінію.

На рисунку 5.43 наведено приклад побудови перерізу поверхні циліндра фронтально проекційною площиною Т.

Завдяки збиральним властивостям проекційних площин на $П_2$ маємо готову проекцію лінії перерізу, яка збігається зі слідом площини Т (T_2). Січна площина Т не перпендикулярна і не паралельна до осі циліндра, вона перетинає циліндр по еліпсу. Велика вісь еліпса належить площині головного меридіана циліндра θ і дорівнює відстані між точками 1_2 і 2_2, а мала вісь еліпса належить площині профільного меридіана і дорівнює відстані між точками 3_1 і 4_1. Для точності побудови еліпса вибираємо ще допоміжні проекції точок 5_2 і 6_2, а також 7_2 і 8_2. Далі для побудування натуральної величини перерізу циліндра

нахиленою площиною Т використовуємо спосіб заміни площини проекцій. Вісь нової системи проекцій X_{24} будуємо паралельно до T_2. Координати точок еліпса заміряємо з горизонтальної площини проекцій і переносимо на $П_4$. Завдяки тому, що еліпс є симетричною фігурою, координати точок краще заміряти від осі 1_1–2_1.

При перетині конуса січною площиною утворюються криві другого порядку.

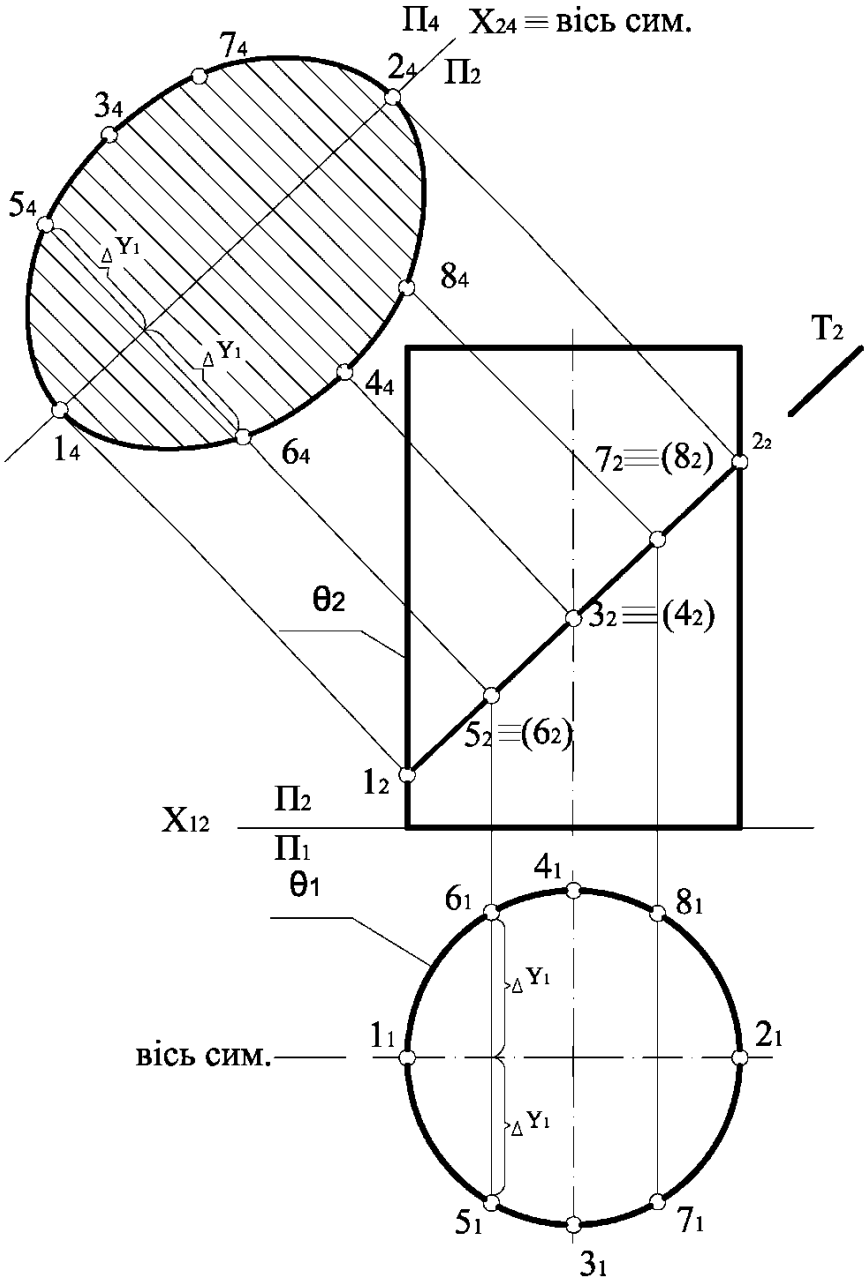


Рисунок 5.43 – Побудова перерізу поверхні циліндра площиною Т

На рисунку 5.44 наведені всі можливі випадки розташування січної площини відносно визначника конічної поверхні.

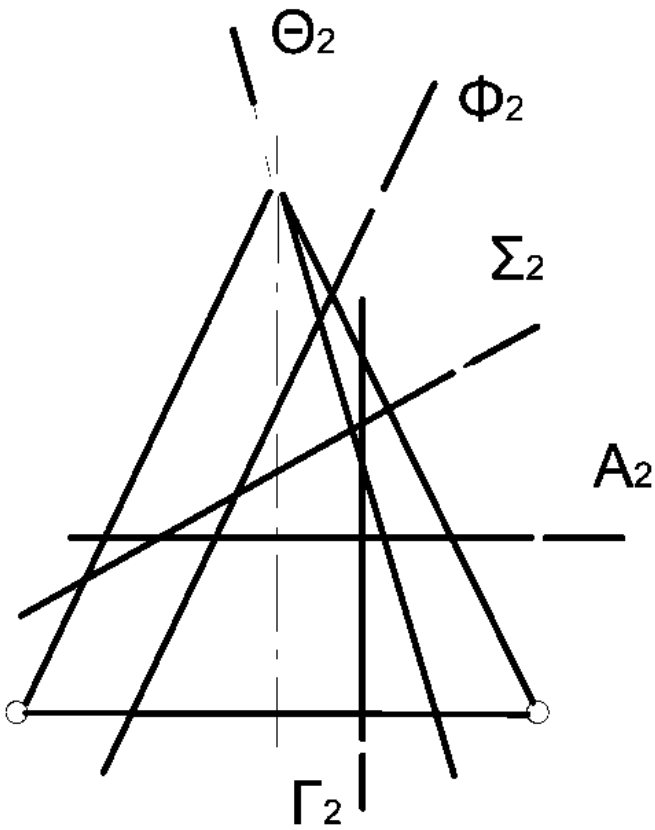


Рисунок 5.44 – Розташування січної площини відносно конічної поверхні

Якщо січна площина $\Sigma \equiv \Sigma_2$ перетинає всі твірні конуса, отримаємо еліпс. При перетині конуса площиною $A \equiv A_2$ перпендикулярно до осі конуса – отримаємо коло. При перетині конуса площиною $\Phi \equiv \Phi_2$ параллельно одній із твірних – отримаємо параболу. Якщо січна площина $\Gamma \equiv \Gamma_2$ перетинає поверхню конуса паралельно до осі обертання або яких-небудь двох твірних, то отримаємо гіперболу. При перетині конуса площиною $\Theta \equiv \Theta_2$, яка проведена через вершину конуса і перетинає його основу, отримаємо трикутник.

На рисунку 5.45 наведено приклад побудови перерізу конуса фронтально проекційною площиною $\Sigma \equiv \Sigma_2$.

Площина Σ має на Π_2 збиральні властивості, тому фронтальна проекція еліпса є відрізком прямої $1_2\ 2_2$.

Горизонтальна проекція еліпса визначається за принципом належності його точок поверхні конуса. Побудування горизонтальної проекції еліпса виконуємо з використанням допоміжних січних посередників – це горизонтальні площини рівня.

Велика вісь еліпса дорівнює відстані між точками 1_2 і 2_2, у яких січна площина перетинає обрисові твірні конуса. Якщо мала вісь лежить у площині перерізу і перпендикулярна великій осі еліпса, вона є фронтально проекційною прямою.

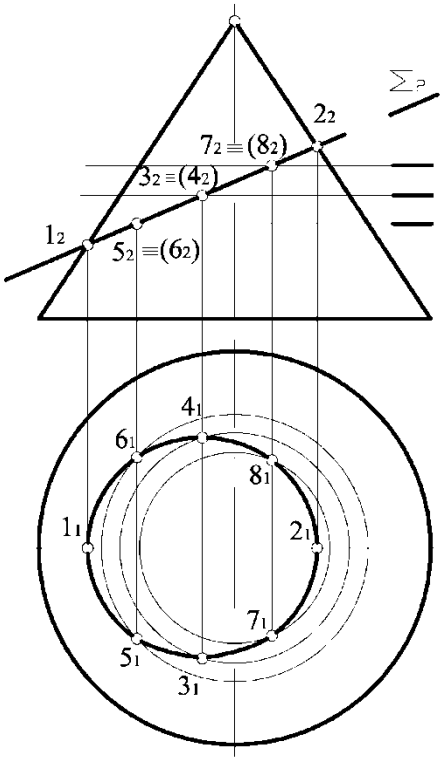


Рисунок 5.45 – Побудова перерізу конуса площиною Σ ≡ Σ2

Для знаходження фронтальної проекції осі поділяємо велику вісь $1_2 2_2$ на дві рівні частини і отримуємо точку $3_2 \equiv (4_2)$, яка є фронтальною проекцією малої осі еліпса. Довільно вибираємо допоміжні точки $5_2 \equiv (6_2)$, а також $7_2 \equiv (8_2)$. Через задані точки проводимо допоміжні січні площини – це горизонтальні площини рівня, котрі перетинають конус по колах, – будуємо ці кола на $П_1$ і, використовуючи вертикальну відповідальність, знаходимо горизонтальні проекції точок, через які будуємо плавну криву лінію – це горизонтальна проекція еліпса. Мала вісь еліпса дорівнює відстані між точками 3_1 і 4_1.

5.4.3 Побудова точок перетину лінії з поверхнею

Алгоритм побудови точок перетину прямої лінії з кривою поверхнею має такий вигляд:

1. Через задану пряму лінію необхідно провести допоміжну січну площину.

2. Знайти лінію перетину кривої поверхні з допоміжною січною площиною.

3. Знайти точки перетину прямої лінії з лінією перетину кривої поверхні з допоміжною площиною.

За допоміжну січну площину частіше обирають проекційну площину, але мають місце випадки, коли найбільш доцільно як допоміжну використати площину загального положення.

На рисунку 5.46 наведено приклад побудови точок перетину прямої l з прямим конусом обертання.

Якщо через пряму загального положення l провести фронтально проекційну площину, при її перетині з конусом матимемо еліпс. Якщо через пряму l провести горизонтально проекційну площину, при її перетині з конусом матимемо гіперболу. Якщо через пряму l провести площину загального положення, котра проходить через вершину конуса, при перетині її з конусом матимемо трикутник. Цей варіант підвищує точність побудування і скорочує потрібний на нього час.

Таким чином, допоміжна площина Σ задана прямою l і вершиною конуса S. Для побудови трикутника перетину, необхідно знайти для площини Σ її горизонтальний слід. Для цього на горизонтальній площині проекцій необхідно побудувати дві спільні точки для площини Σ і $П_1$. Першою є точка M (M_1, M_2) – це горизонтальний слід прямої l.

Для знаходження другої спільної точки $M^{/}$ ($M_1^{/}$, $M_2^{/}$) будуємо довільну пряму S1 (S_11_1, S_22_2). Пряма $M_1M_1^{/}$ є горизонтальним слідом площини Σ, який перетинає основу конуса в точках A і B. При перетині конуса площиною Σ матимемо трикутник SAB. Тому горизонтальні проекції точок перетину прямої l з поверхнею конуса визначаються як результат перетину A_1S_1 і B_1S_1 з l_1. Фронтальні проекції точок L_2 і K_2 отримані за законом належності та за допомогою ліній проекційного зв'язку.

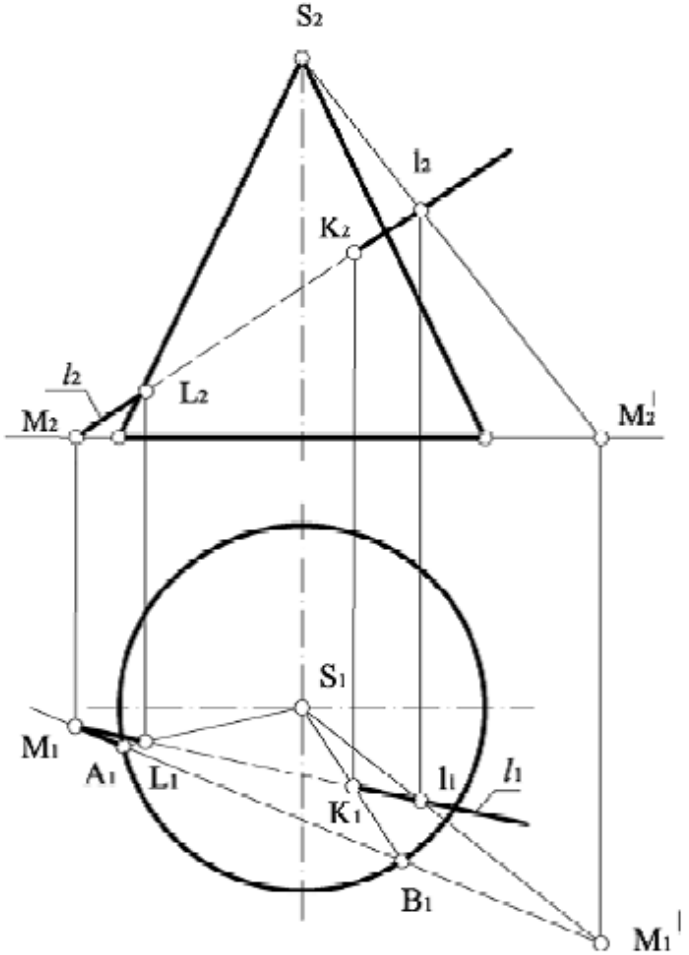


Рисунок 5.46 – Побудова точок перетину прямої l з конусом обертання

На рисунку 5.47 наведено приклад побудови точок перетину прямої l з поверхнею похилого циліндра.

Якщо через пряму l провести фронтально проекційну площину, при її перетині з циліндром матимемо еліпс; той самий результат буде, якщо використати горизонтально проекційну площину.

На прямій l вибираємо довільні точки 1 (1_1, 1_2) і 2 (2_1, 2_2), через які будуємо дві паралельні прямі a і b, що одночасно паралельні твірній циліндра. Таким чином, через пряму l провели площину загального положення Σ (a || b), яка перетинає циліндричну поверхню вздовж твірних.

Далі знаходимо горизонтальний слід $\Sigma_1 \equiv h^0_1$ площини (a || b), для цього знаходимо горизонтальні проекції M_1 і M_1' горизонтальних слідів прямих a і b, з`єднуємо їх прямою і знаходимо точки A_1 і B_1, через які проходять горизонтальні проекції твірних циліндра.

Горизонтальні проекції точок перетину L_1 і K_1 знаходимо на перетині горизонтальної проекції прямої l_1 із твірними, проведеними з точок A_1 і B_1. Фронтальні проекції точок L_2 і K_2 отримані за законом належності та за допомогою ліній проекційного зв`язку. Видимість проекцій точок K і L визначається за видимістю проекцій твірних, до яких вони належать.

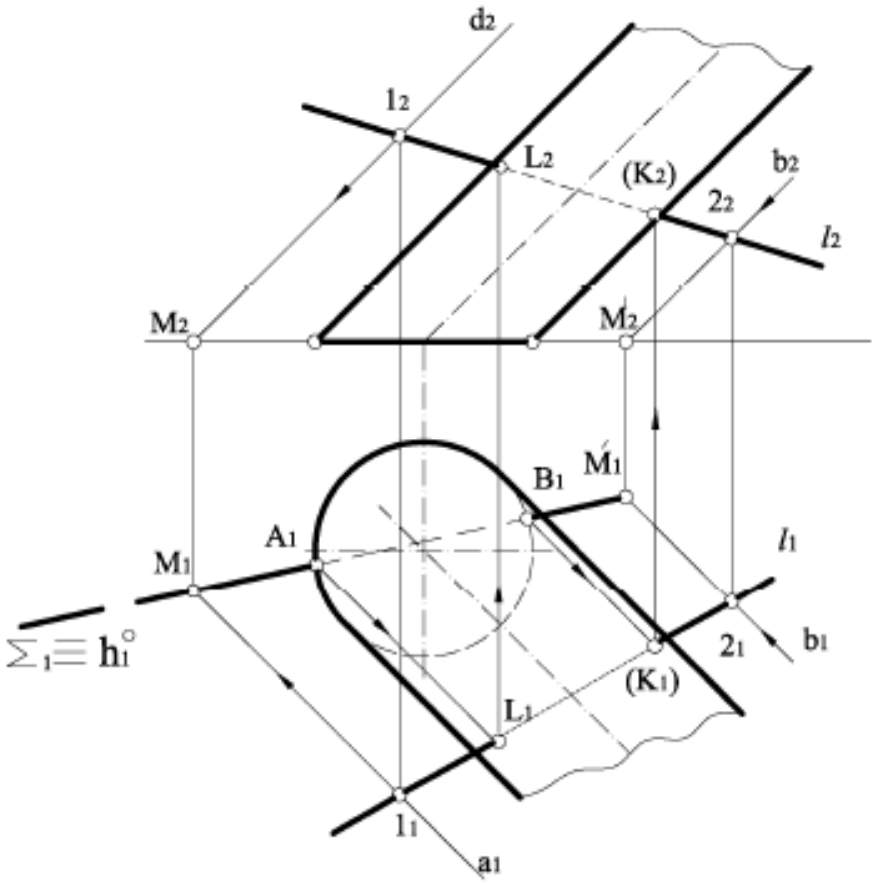


Рисунок 5.47 – Побудова точок перетину прямої l з поверхнею похилого циліндра

На рисунку 5.48 наведено приклад побудови точок перетину прямої m із поверхнею сфери.

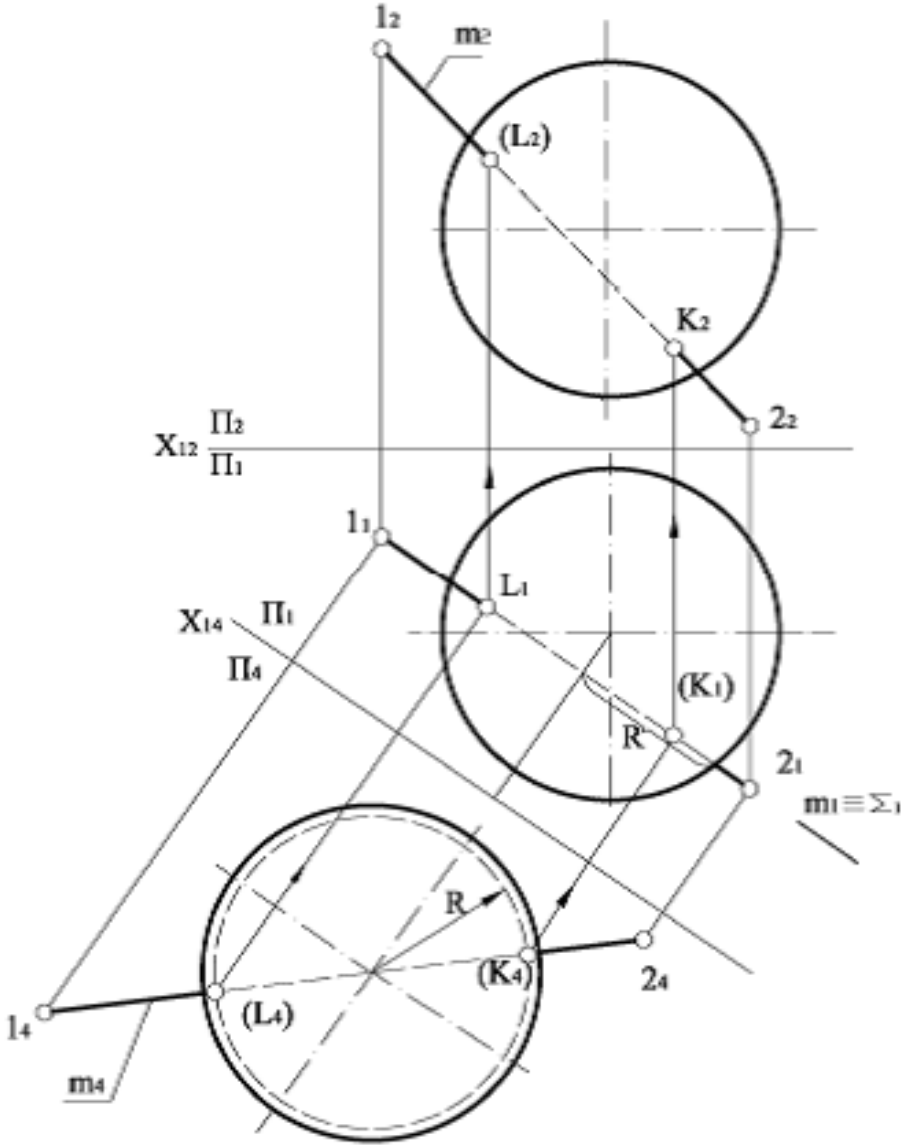


Рисунок 5.47 – Побудова точок перетину прямої l з поверхнею сфери

Якщо використовувати як допоміжну січну – проекційну площину, проекцією перерізу буде еліпс, для побудування якого необхідно знайти ряд точок. Розв’язання задачі спрощується, якщо використати метод заміни площин проекцій. Нова вісь X_{14} проходить паралельно горизонтальній проекції відрізка прямої $1_1 2_1$. Через пряму m проводимо горизонтально проекційну площину Σ, яка перетинає сферу по колу радіуса R. Це коло на допоміжній площині проекцій $П_4$ зображується без спотворень, а перетин його з проекцією відрізка прямої дає проекції точок перетину L_4 K_4, які проекціюються у зворотному напрямку на проекції прямої.

5.5 Побудова лінії взаємного перетину кривих поверхонь

При перетині поверхонь утворюється лінія, яку прийнято називати лінією перетину поверхонь. Ця лінія одночасно належить обом поверхням і в загальному випадку є просторовою кривою, ступінь складності якої залежить

від ступеня складності поверхонь, що перетинаються, та їх взаємного положення. У ряді випадків лінія перетину поверхонь може розпадатися на декілька частин, котрі, зокрема, можуть бути плоскими кривими, а в окремих випадках – навіть відрізками прямої.

Лінія перетину поверхонь, як і лінія перетину поверхні площиною, будується за окремими точками.

Загальний метод побудови належних лінії перетину поверхонь точок полягає у використанні поверхонь-посередників. Його суть полягає в наступному (рис. 5.48).

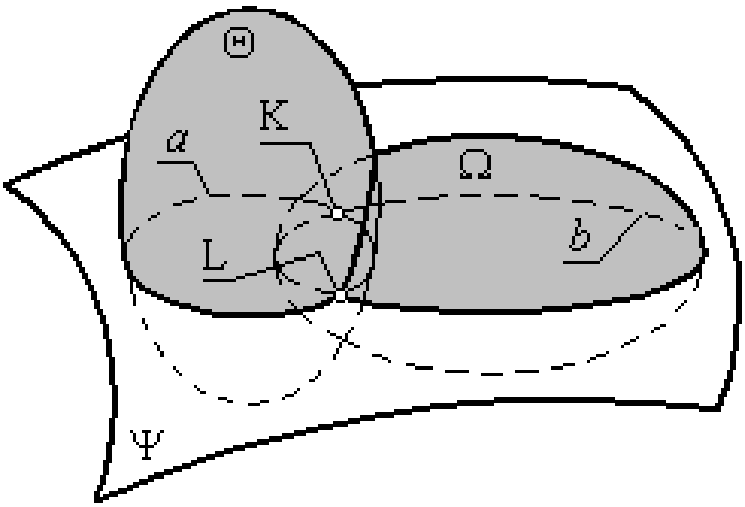


Рисунок 5.48 – Метод поверхонь-посередників

Обидві задані поверхні Q і W одночасно перетинаються третьою поверхнею-посередником Ψ і дають відповідно лінії a і b. Оскільки ці лінії належать одній і тій самій поверхні Ψ, вони можуть перетинатися в одній або декількох точках (у даному випадку таких точок дві: L^1 і L^2). Ці точки й належать лінії перетину заданих поверхонь. Багаторазово повторюючи описану процедуру зі зміною положення поверхні-посередника Ψ, можна одержати n таких точок. З'єднавши їх плавною кривою, одержимо шукану лінію перетину l.

Як поверхні-посередники можуть бути використані різні поверхні або площини, але доцільно вибирати ті з них, які дозволяють одержати з графічної точки зору найпростіші лінії перетину із заданими поверхнями. Виходячи з цього побажання, найчастіше як поверхні-посередники використовують проектуючі площини або сфери. У зв'язку з цим існує декілька способів побудування лінії перетину поверхонь.

Спосіб площин-посередників. Застосовується, коли обидві задані поверхні можна одночасно перетнути сімейством площин по графічно простих лініях.

Побудуємо дві проекції лінії перетину півсфери і прямого кругового конуса (рис. 5.49).

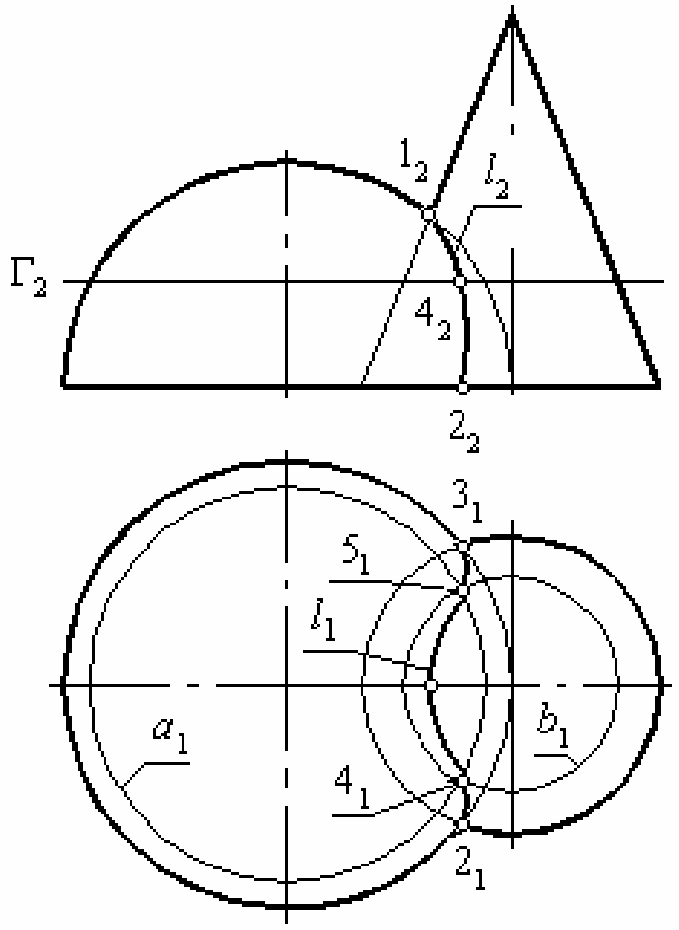


Рисунок 5.49 – Спосіб площин-посередників

У даному випадку слід використати сімейство площин-посередників горизонтального рівня: вони одночасно перетинатимуть обидві поверхні по колах, на перетині яких і будуть розташовані точки, що належать шуканій лінії взаємного перетину (рис. 5.50).

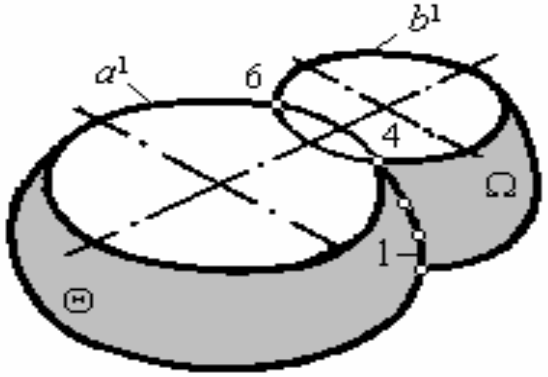


Рисунок 5.50 – Площини-посередникі горизонтального рівня

Вибираємо опорні точки. Оскільки обидві задані поверхні мають спільну площину симетрії, паралельну фронтальній площині проекцій, їх фронтальні меридіани будуть перетинатись у точці 1_2. Точка 1 є найвищою з тих, що належать лінії перетину заданих поверхонь, тому приймемо її за опорну. Основи обох заданих поверхонь належать одній і тій самій площині горизонтального рівня, тому вони будуть перетинатись у точках 2_1 і 3_1.

Точки 2 і 3 є відповідно початковою і кінцевою точками лінії перетину, тому і вони мають належати до опорних. Визначимо їх горизонтальні проекції.

Кількість та положення додаткових точок визначається заданою точністю побудування лінії перетину. Будемо вважати, що для досягнення заданої точності побудування лінії взаємного перетину між опорними точками по висоті досить визначити по одній додатковій точці.

Задамо площину горизонтального рівня Г ($Г_2$), яка проходить по висоті приблизно посередині між опорними точками. Вона перетне задані поверхні по паралелях a і b. На перетині їх горизонтальних проекцій a_1 та b_1 отримаємо горизонтальні проекції 4_1 та 5_1 додаткових точок 4 і 5. Визначимо фронтальні проекції цих точок $4_2 \equiv (5_2)$. Аналогічно можна ввести будь-яку кількість додаткових точок.

З'єднуємо однойменні проекції всіх опорних та додаткових точок плавними кривими і отримуємо відповідні проекції лінії перетину заданих поверхонь.

Горизонтальною межею видимості для лінії перетину є основа півсфери і конуса. А оскільки вся лінія перетину l лежить над площиною цієї межі, вся горизонтальна проекція 1_1 лінії перетину буде видимою. Фронтальною межею видимості є головний меридіан заданих поверхонь. Таким чином, видимою буде тільки половина фронтальної проекції лінії перетину від точки 2_2 до точки 1_2, яка розташована перед площиною головного меридіана.

5.6 Побудова лінії перетину гранних та кривих поверхонь

Узагальнений алгоритм розв'язування задач методом допоміжних січних площин такий:

а) проведення допоміжних січних площин так, щоб вони перетинали обидва тіла по найпростіших для побудови лініях;

б) визначення ліній взаємного перетину допоміжних січних площин з заданими поверхнями;

в) знаходження спільних точок для ліній перетину двох поверхонь.

У загальному випадку при перетині гранної поверхні з поверхнею обертання утворюється просторова ламана лінія, яка складається зі з'єднаних між собою окремих ланок плоских кривих ліній; в інших випадках, коли гранне тіло проходить наскрізь поверхню обертання, утворюються дві просторові замкнуті ламані лінії другого порядку, не з'єднані між собою.

Розглянемо приклад, якщо одне з гранних тіл, яке перетинається з тілом обертання, займає проектуюче положення, то саме на цій проекції точки лінії перетину лежать на проектуючих гранях. На рисунку 5.51 представлено приклад побудови лінії перетину тригранної фронтально-проектуючої призми з прямим круговим конусом. Так як призма займає проектуюче положення, то на фронтальній проекції знаходимо проекції точок перетину без додаткових побудов (по границях перетину двох тіл).

Для розуміння побудови на перший раз позначимо передню грань призми ABC і вершину конуса S. Спочатку, як завжди, знаходимо проекції характерних точок: 1_2 та 1_1 – перетину верхньої (горизонтальної) грані з лівою

твірною; 2_2 та 2_1 – перетину фронтально-проектуючої грані з цією ж твірною; 3_2,4_2, 3_1 та 4_1 – перетину нижнього ребра з основою конуса (при цьому 3_2≡4_2, а 3_1 – передня точка на колі основи, а 4_1 – задня).

Вибираємо раціонально допоміжні січні площини, перетин яких одночасно двох тіл дає прості за побудовою лінії. Саме такими є ряд горизонтальних площин зі слідами $Г_2$, P_2, T_2 та Q_2. Площина зі слідом $Г_2$ – горизонтальна і збігається з верхньою гранню. Тому, у результаті перетину з конусом дає частину кола, яке проходить на горизонтальній проекції через точки 5_1,1_1 та 6_1, радіус якого дорівнює відстані від осі конуса до твірної на сліді $Г_2$.

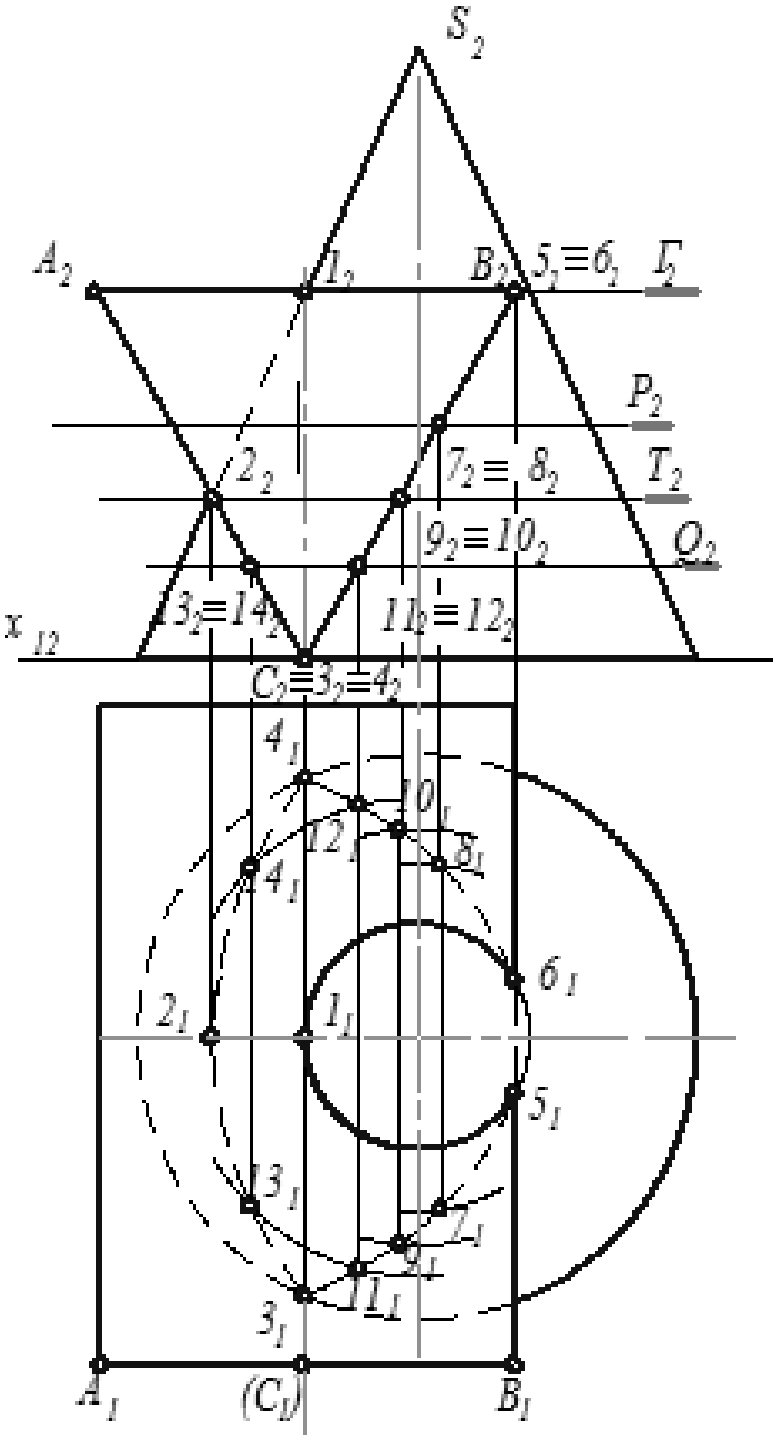


Рисунок 5.51 – Побудова лінії перетину поверхонь конусу та призми

На лівій та правій гранях призми у межах перетину тіл взяті на січних площинах точки $7_2 8_2$, $9_2 10_2$, 11_2 12_2 та $13_2 14_2$. Побудова горизонтальних проекцій цих точок аналогічна до побудови проекцій точок 4_1 та 5_1. Так як на фронтальній проекції конус перетинає права частина верхньої грані, повна права грань та права частина лівої грані, то в результаті перетину цих поверхонь утвориться просторова замкнута ламана лінія, складена з ділянок плоских кривих ліній другого порядку. На фронтальній проекції лінія перетину збігається з гранями призми, а на горизонтальній – складається з частини кола і двох частин еліпсів. Частина лівої твірної між точками 1_2, 2_2 показана невидимою (тонкою лінією), а горизонтальна проекція лінії взаємного перетину та двох поверхонь наведена з урахуванням їх взаємної видимості.

На рисунку 5.52 зображено побудову лінії взаємного перетину горизонтально-проектуючої трикутної призми з півсферою. При такому розміщенні призми лініями перетину у просторі будуть з'єднані між собою частини кіл. На фронтальну площину лінії перетину, розташовані на бічних гранях, спроектуються у частини еліпсів, а розташовані на задній грані – в частину кола.

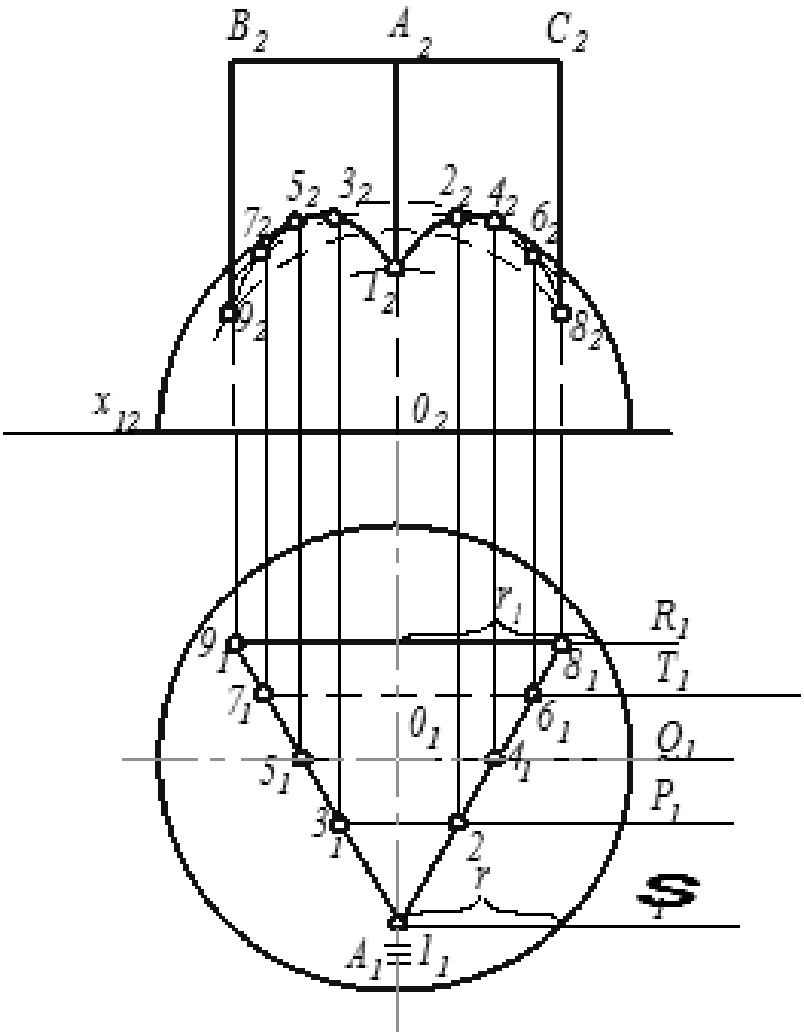


Рисунок 5.52 – Побудова лінії перетину поверхонь півсфери та призми

Особливістю такої задачі є неможливість знайти готовими характерні точки 1,8 та 9 – перетину ребер призми з поверхнею півсфери. Для розуміння побудови верхня основа призми позначена точками А, В, С. Раціональними є ряд фронтальних площин, які у перетині з призмою дають прямокутники, ширина яких дорівнює відстані між гранями по горизонтальному сліду січної площини.

В перетині сфери – кола, радіуси яких рівні відстані від вертикальної осі кола основи до окреслюючого кола півсфери на горизонтальній проекції по горизонтальному сліду січної площини. Наприклад, щоб визначити першу точку кривої, через переднє ребро призми проведена фронтальна площина зі слідом Σ_1, яка відтинає на півсфері частину кола радіуса r. Провівши з центра O_2 коло цим радіусом, отримаємо на ребрі A_2 проекцію точки 1_2. Подальша побудова пояснена детально в попередній задачі. Варто лише зазначити, що в результаті перетину задньої (фронтальної) грані з поверхнею півсфери утворюється частина невидимого кола між точками 8_2 та 9_2 радіуса r_1.

5.7 Питання для самоперевірки

1. Як зображаються криві лінії на комплексному кресленику?
2. Які проекційні властивості кривих ліній?
3. Криві лінії другого порядку. Їх побудова.
4. Утворення і задання поверхонь на комплексному кресленику.
5. Що таке визначник поверхні?
6. Класифікація поверхонь.
7. Як утворюються поверхні обертання?
8. Поняття про обрис поверхні, екватори, меридіани, паралелі, горло.
9. Як виконується побудова точок і ліній, що лежать на поверхні?
10. Як зображаються гранні поверхні та багатогранники на комплексному кресленику?
11. Пірамідальні та призматичні поверхні.
12. Як побудувати проекції точок, що знаходяться на поверхні?
13. Як побудувати лінії перетину призми з прямим круговим конусом?

ЛЕКЦІЯ 6 ЗАГАЛЬНІ ВИМОГИ ОФОРМЛЕННЯ КРЕСЛЕНЬ. ПРОЕКЦІЙНЕ КРЕСЛЕННЯ

6.1 Загальні вимоги оформлення креслень
6.1.1 Формати
6.1.2 Основний напис
6.1.3 Масштаби
6.1.4 Типи ліній
6.1.5 Шрифти креслярські
6.2 Правила нанесення розмірів на кресленнях
6.3 Проекційне креслення
6.3.1 Основні види
6.3.2 Розрізи та перерізи
6.4 Аксонометричні проекції
6.4.1 Стандартна ізометрична проекція
6.4.2 Стандартна диметрична проекція
6.4.3 Приклади побудови ізометричної проекції деяких поверхонь
6.5 Питання для самоперевірки

6.1 Загальні вимоги оформлення креслень

6.1.1 Формати

Для зручності в зберіганні та користуванні креслення виготовляють певного розміру. Розмір аркуша називають форматом (рис. 6.1).

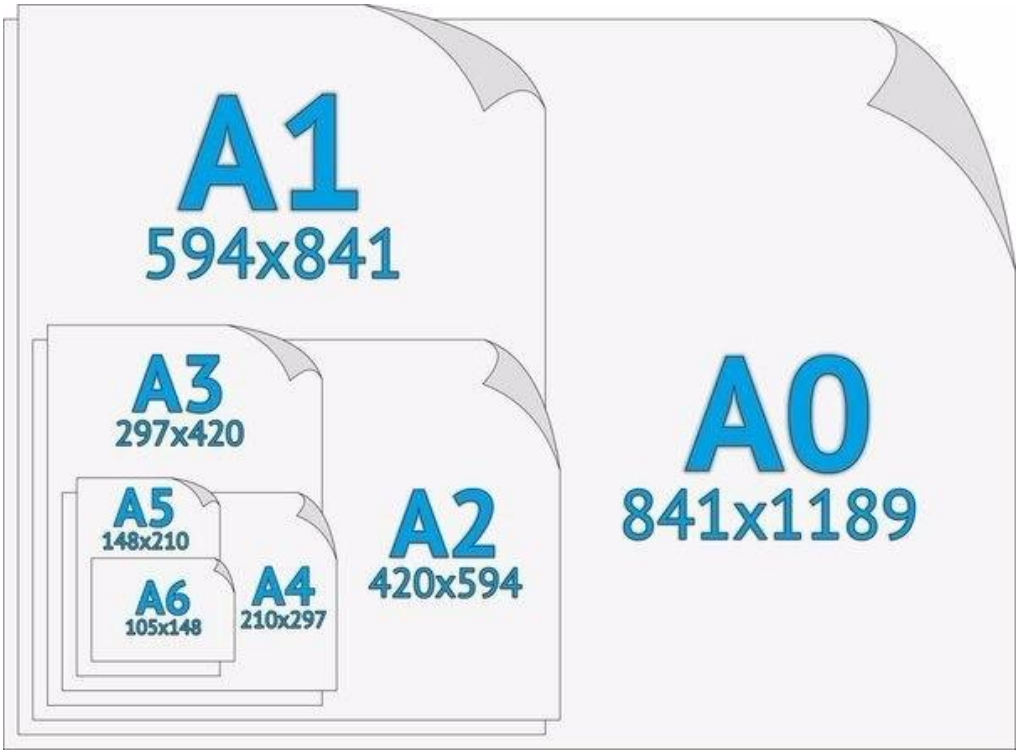


Рисунок 6.1 – Формати аркушів креслярського паперу

На всіх форматах (А0, А1, А2, А3, А4) рамку виконують основною суцільною товстою лінією, відступаючи від краю по 5 мм зверху, знизу та с правої сторони. Зліва відступають 20 мм. Також одразу креслять рамку основного напису, якій після виконання креслення заповнюють. Вільне місце, що залишається на форматі, називають полем креслення. Саме в полі креслення компонують потрібні побудови.

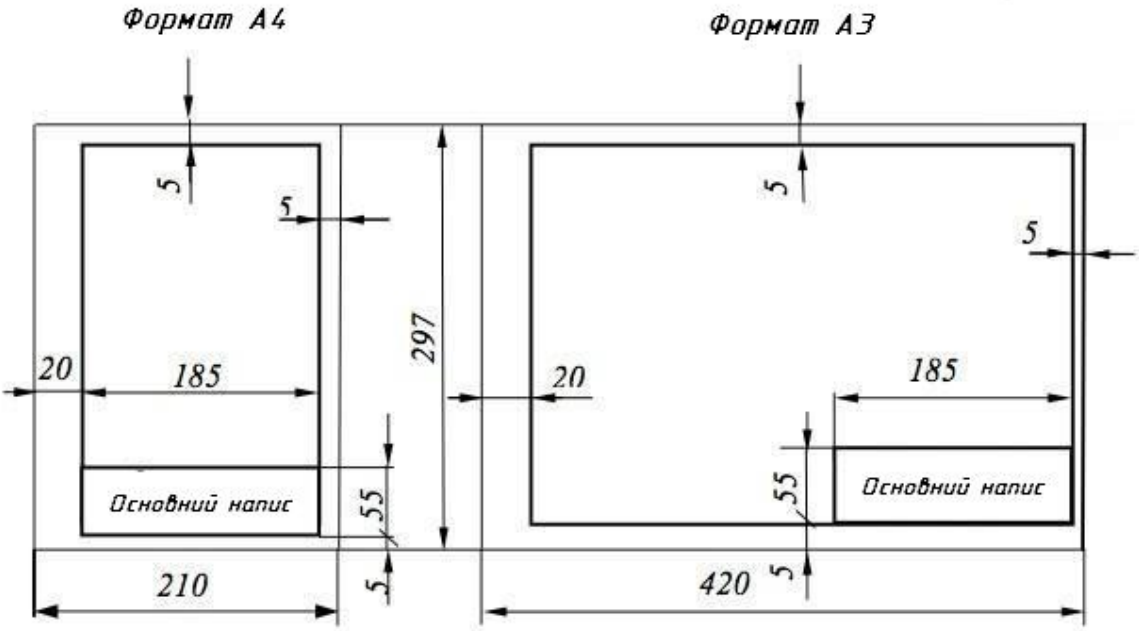


Рисунок 6.2 – Розміщення рамки та основного напису на аркушах паперу форматів А4 та А3

6.1.2 Основний напис

Креслення мають відповідне оформлення у вигляді рамки та основного напису. В основний напис записують відомості про виріб та виконавця роботи (рис. 6.3).

Розміри і зміст основного напису встановлює ДСТУ ГОСТ 2.104: 2006 Єдина система конструкторської документації. Основні написи (ГОСТ 2.104–2006, IDT) (рис. 6.4, 6.5).

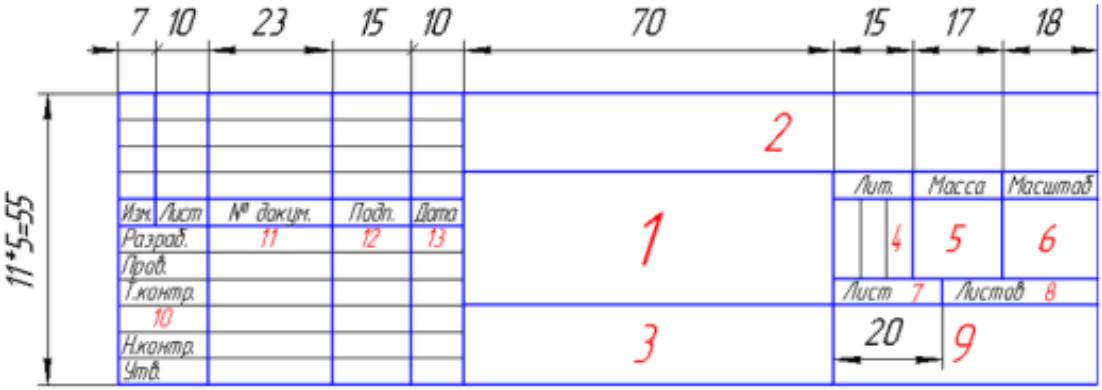


Рисунок 6.3 – Основний напис (форма 1)

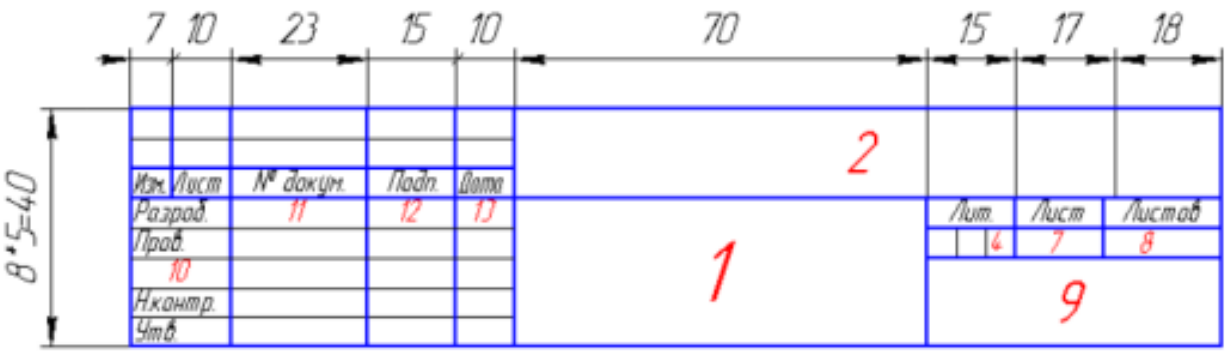


Рисунок 6.4 – Основний напис (форма 2)

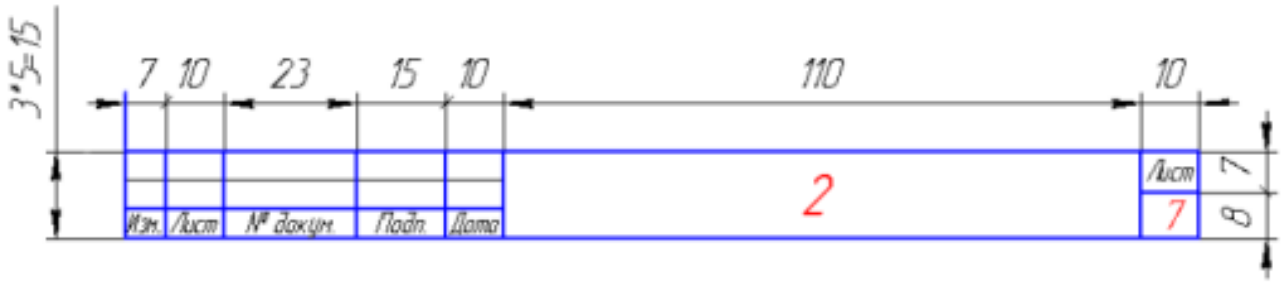


Рисунок 6.5 – Основний напис (форма 2а)

Основний напис за формою 1 використовується в кресленнях.

Основний напис за формою 2 використовується в специфікаціях та інших текстових документах, за формою 2а – наступні листи.

У графах основного напису вказують:

в графі 1 – найменування виробу/ креслення;

в графі 2 – позначення документа;

в графі 3 – позначення матеріалу;

в графі 4 – літеру, присвоєну даному документу (У);

в графі 5 – масу виробу;

в графі 6 – масштаб;

в графі 7 – порядковий номер аркуша (на документах, що складаються з одного листа, цю графу не заповнюють);

в графі 8 – загальна кількість аркушів документа;

в графі 9 – найменування підприємства, що випускає документ;

в графі 10 – вказуються: «Розробив», «Перевірив»;

в графі 11 – прізвища осіб, які підписали документ;

в графі 12 – підписи осіб, зазначених у графі 11;

в графі 13 – дата.

6.1.3 Масштаби

Масштаби застосовують для зображення великих предметів на кресленні зменшеними в декілька разів, а дрібних – збільшеними, а також в натуральну величину. Масштаби бувають числові, лінійні та кутові. Розглянемо тільки числові масштаби.

Масштабом називається відношення розмірів об'єкту, виконаного без спотворення, до його номінальних значень.

Масштаби зображень на кресленику (табл. 6.1) вибирають за ДСТУ ISO 5455:2005. Кресленики технічні. Масштаби (ISO 5455:1979, IDT).

Таблиця 6.1 – Масштаби зображень на кресленниках

Масштаби зменшення	1:2	1:2,5	1:4	1:5	1:10	1:15	1:20	1:25	1:40	1:50
Натуральна величина	1:1									
Масштаби збільшення	2:1	2,5:1	4:1	5:1	10:1	-	20:1	-	40:1	50:1

Перевагу слід віддавати зображенню предмета в натуральну величину.

При позначенні масштабу в спеціальній графі основного напису букву М не ставлять, а пишуть тільки відношення, наприклад: 1:1, 1:2 тощо. Якщо окреме зображення на кресленику виконано в масштабі, що не відповідає зазначеному в основному написі, то масштаб позначається безпосередньо біля напису, що стосується цього зображення наприклад, А (1:4), В–В (1:10).

Незалежно від масштабу розміри на кресленику завжди проставляються дійсні.

6.1.4 Типи ліній

Всі креслення виконуються певними типами ліній. Їх назви, креслення та товщина наведено в таблиці 6.2.

Товщина суцільної лінії S має бути в межах від 0,5 до 1,4 мм залежно від величини і складності зображення, а також від формату креслення. Товщина ліній одного і того ж типа має бути однакова для всіх зображень на даному кресленні, що викреслюються в однаковому масштабі. Довжину штрихів в штрихових і штрих-пунктирних лініях слід вибирати залежно від величини зображення. Штрихи в лінії мають бути приблизно однакової довжини.

Проміжки між штрихами в лінії мають бути приблизно однакової довжини. Штрих-пунктирні лінії повинні перетинатися і закінчуватися штрихами. Штрих-пунктирні лінії, вживані як центрові, слід замінювати суцільними тонкими лініями, якщо діаметри кола або розміри інших геометричних фігур в зображенні менше 12 мм.

Таблиця 6.2 – Основні типи ліній

Найменування	Зображення	Товщина	Призначення
Суцільна основна		S (від 0,5 до 1,4 мм)	Лінії видимого контуру, лінії переходу видимі, лінії контуру перетину
Суцільна тонка		Від S/3 до S/2	Лінії контуру накладеного перетину, лінії розмірні і виносні, лінії штрихування, лінії-виноски, полки ліній-виносок
Суцільна хвиляста		Від S/3 до S/2	Лінії обриву, Лінії розмежування виду і розрізу
Штрихова	1...2 2...8	Від S/3 до S/2	Лінії невидимого контуру, лінії переходу видимі
Штрих-пунктирна	3...5 5...30	Від S/3 до S/2	Лінії осьові і центрові, лінії перетинів, є осями симетрії для накладених або винесених перетинів
Штрих-пунктирна потовщена	3...4 3...8	Від S/2 до 2/3*S	Лінії, що позначають поверхні, що підлягають термообробці або покриттю
Штрих-пунктирна з двома точками	4...6 5...30	От S/3 до S/2	Лінії згину на розгортках та зображення розгортки поєднаною з видом. Лінії для зображення частин виробу в крайніх або проміжних положеннях.
Розімкнена	8...20	Від S до 1,5S	Лінії перерізів
Суцільна тонка зі зламом		Від S/3 до S/2	Довгі лінії обриву

6.1.5 Шрифти креслярські

Написи на кресленнях і інших конструкторських документах, виконаних від руки повинні відповідати ГОСТ 2.304-81 ЄСКД. Шрифти креслярські.

Розмір шрифту h – величина визначена висотою прописних букв в міліметрах. Висота прописних букв h вимірюється перпендикулярно до підстави рядка.

Наприклад, у шрифті десятого розміру висота великих букв і цифр дорівнює 10 мм, а маленькі букві відповідають попередньому розміру – 7.

Встановлюються наступні розміри шрифтів:1,8; 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14; 20; 28; 40 . ГОСТ 2.304-81 встановлює чотири типів шрифту: тип А (d=h/14) і тип Б (d=h/10) без нахилу і з нахилом під кутом 75°.

Тип визначається параметрами шрифту: відстанями між буквами, мінімальним кроком рядків, мінімальною відстанню між словами і товщиною ліній шрифту (рис. 6.6).

Ширина великих букв дорівнює (5/7)h. Виняток становлять великі букви Д, Ж, Ф, Щ, Ш і Ю, ширина яких дорівнює їх висоті. Ширина великої букви М дорівнює (6/7)h. Товщина ліній великих букв дорівнює (1\7) h.

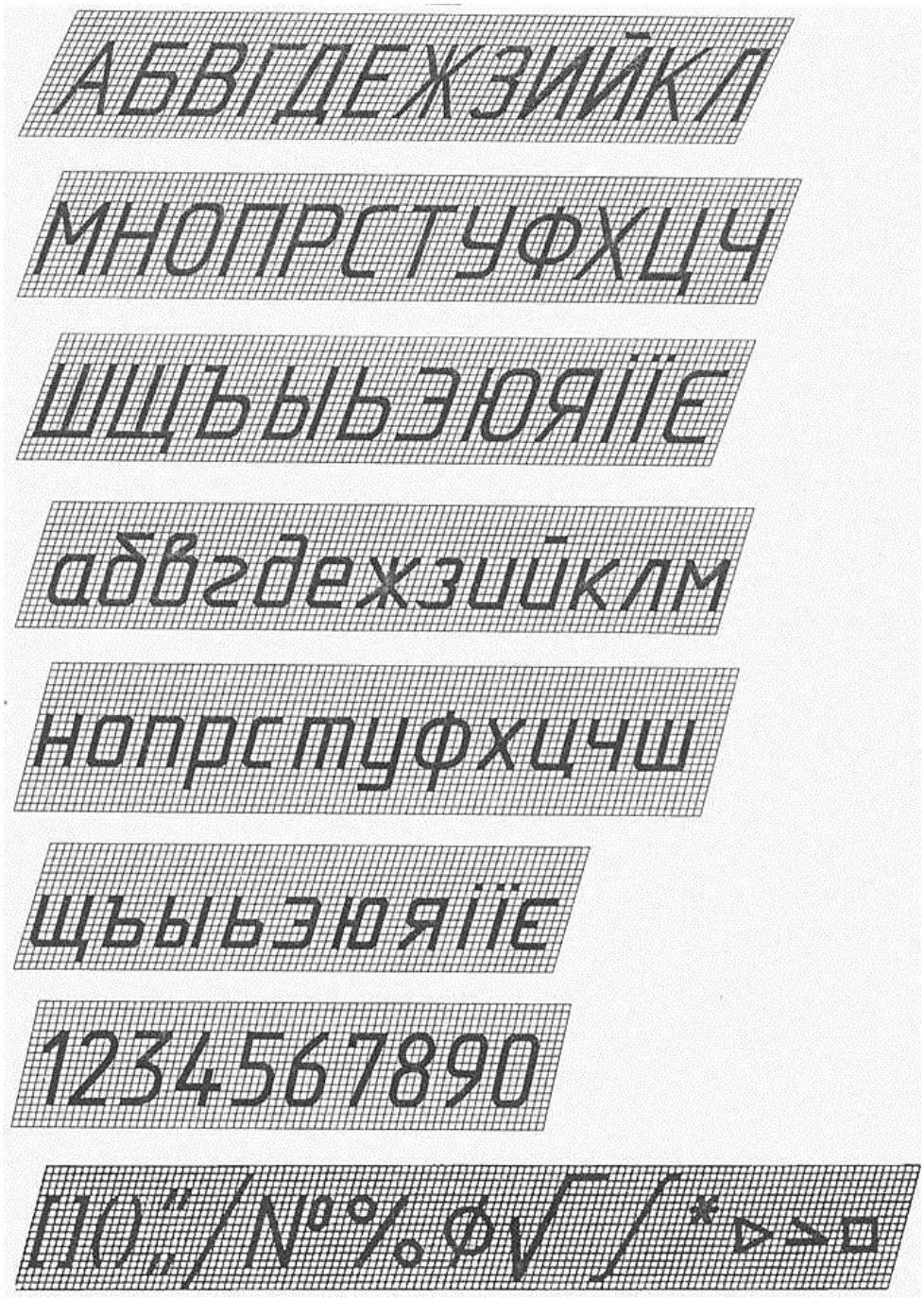


Рисунок 6.6 – Літери українського алфавіту

6.2 Правила нанесення розмірів на кресленнях

Лінійні розміри на кресленнях, які визначають величини прямолінійних елементів предмета (довжину, ширину, товщину, тощо), подають у міліметрах, але позначення одиниці вимірювання не наносять. Межі вимірювання розміру вказують виносними лініями, які проводять перпендикулярно до відрізка контуру зображення, розмір якого зазначають (рис. 6.7).

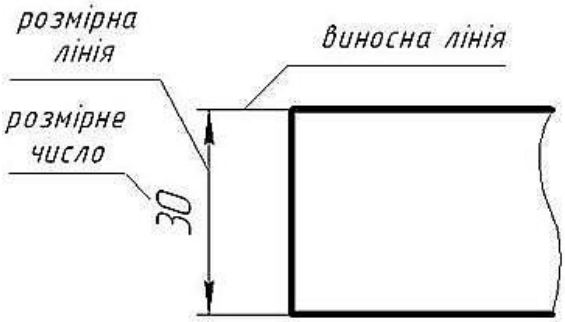


Рисунок 6.7 – Проведення розмірних ліній на кресленні

При оформленні креслень необхідно дотримуватись загальних правил нанесення розмірів. Розміри зображеного виробу і його елементів визначають по розмірним числам, нанесеним на кресленні. Так як розмірні числа відповідають натуральним розмірам виробу, то вони не залежать від масштабу зображення. Загальна кількість розмірів на кресленні має бути мінімальним, але достатнім для виготовлення і контролю виробу. Кожний розмір на кресленику вказується тільки один раз.

Виносні лінії повинні виходити за кінці стрілок розмірної лінії на 1...5 мм (рис. 6.8).

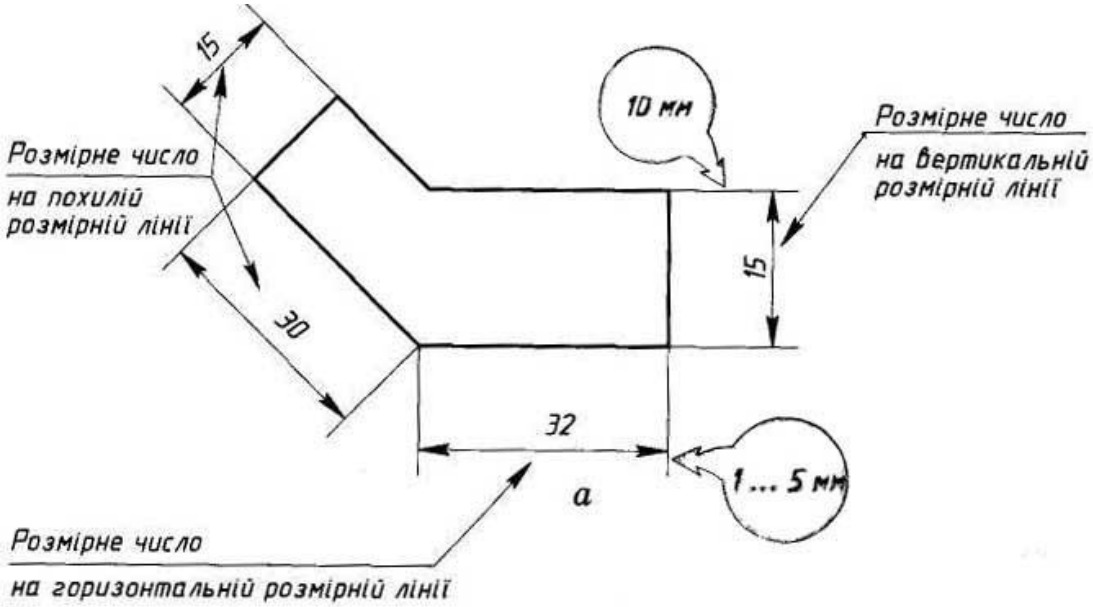


Рисунок 6.8 – Нанесення розмірних чисел

При зазначенні розмірів прямолінійних відрізків розмірні лінії проводять паралельно цим відрізкам на відстані не менше 10 мм від лінії контуру і 7 мм один від одного, а виносні лінії проводять перпендикулярно розмірним (рис. 6.9).

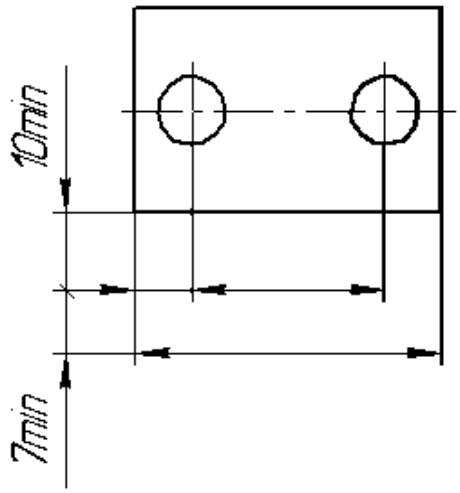


Рисунок 6.9 – Відстані між розмірними лініями

Лінійні розміри вказують в міліметрах без позначення одиниць виміру, а кутові розміри – в градусах, хвилинах і секундах з позначенням одиниць вимірів, наприклад: 12°30'30".

При нанесенні розміру кута розмірну лінію проводять у вигляді дуги з центром в його вершині, а виносні лінії – радіально. Розмірні лінії наносять поза контуром зображення та з обох кінців обмежують стрілками (рис. 6.10).

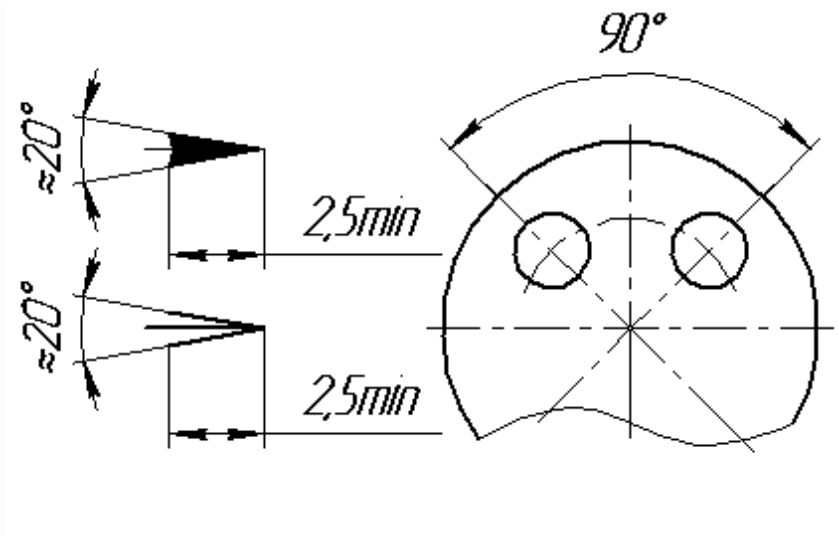
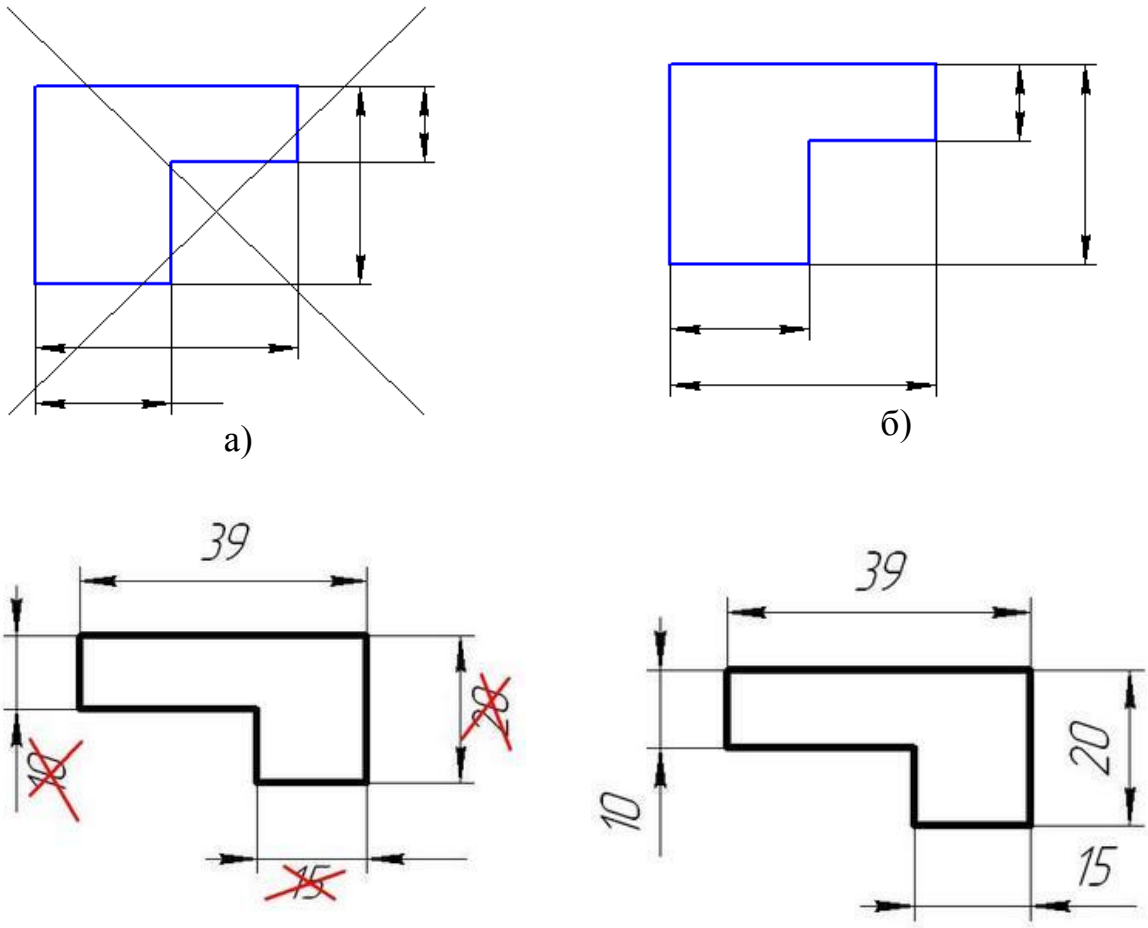


Рисунок 6.10 – Позначення розміру кута та вигляд стрілок

Розмірні лінії переважно наносять поза контуром зображення (рис. 6.11). Не допускається використання лінії контуру, осьових, центрових і виносних ліній в якості розмірних.



а) б)

в) г)

Рисунок 6.11 – Нанесення розмірних і виносних ліній та чисел

На кресленнях неприпустимо зображення перетину розмірних і виносних ліній, показане на закресленому рисунку та розміщення розмірних чисел під розмірною лінією (рис. 6.11а, в). Менші розміри слід розміщувати ближче до контуру деталі (рис. 6.11б, г).

6.3 Проекційне креслення

Проекційним кресленням називають розділ інженерної графіки, у якому здійснюється перехід від проектування геометричних форм до створення технічних креслень в ортогональних і аксонометричних проекціях

Проекційне креслення дає змогу практично відобразити на кресленні різного виду деталі, які в свою чергу складаються з вивчених нами раніше просторових тіл. Для правильного відтворення і розуміння всіх зображень, вони повинні бути виконані згідно відповідних стандартів.

Залежно від змісту, зображення об’єктів поділяють на види, розрізи та перерізи. Кількість їх на кресленні має бути мінімальною, але достатньою для повного уявлення про зображуваний предмет.

6.3.1 Основні види

Для побудови зображень на кресленнях користуються методом прямокутного проекціювання, яке полягає в тому що предмети розміщують між спостерігачем і відповідною площиною проекцій. Проекціювальні промені проходять перпендикулярно до площини проекцій. За основні площини проекцій приймають шість граней куба (рис. 6.12).

Видом називають зображення повернутої до спостерігача видимої частини поверхні предмета. Види на основних площинах проекцій є основними.

Вони мають такі назви (рис. 6.12, 6.13): 1 – вид спереду (головний вид); 2 – вид зверху; 3 – вид зліва; 4 – вид справа; 5 – вид знизу; 6 – вид ззаду.

Якщо всі види розміщені на одному аркуші в безпосередньому проекційному зв'язку, то їх не надписують.

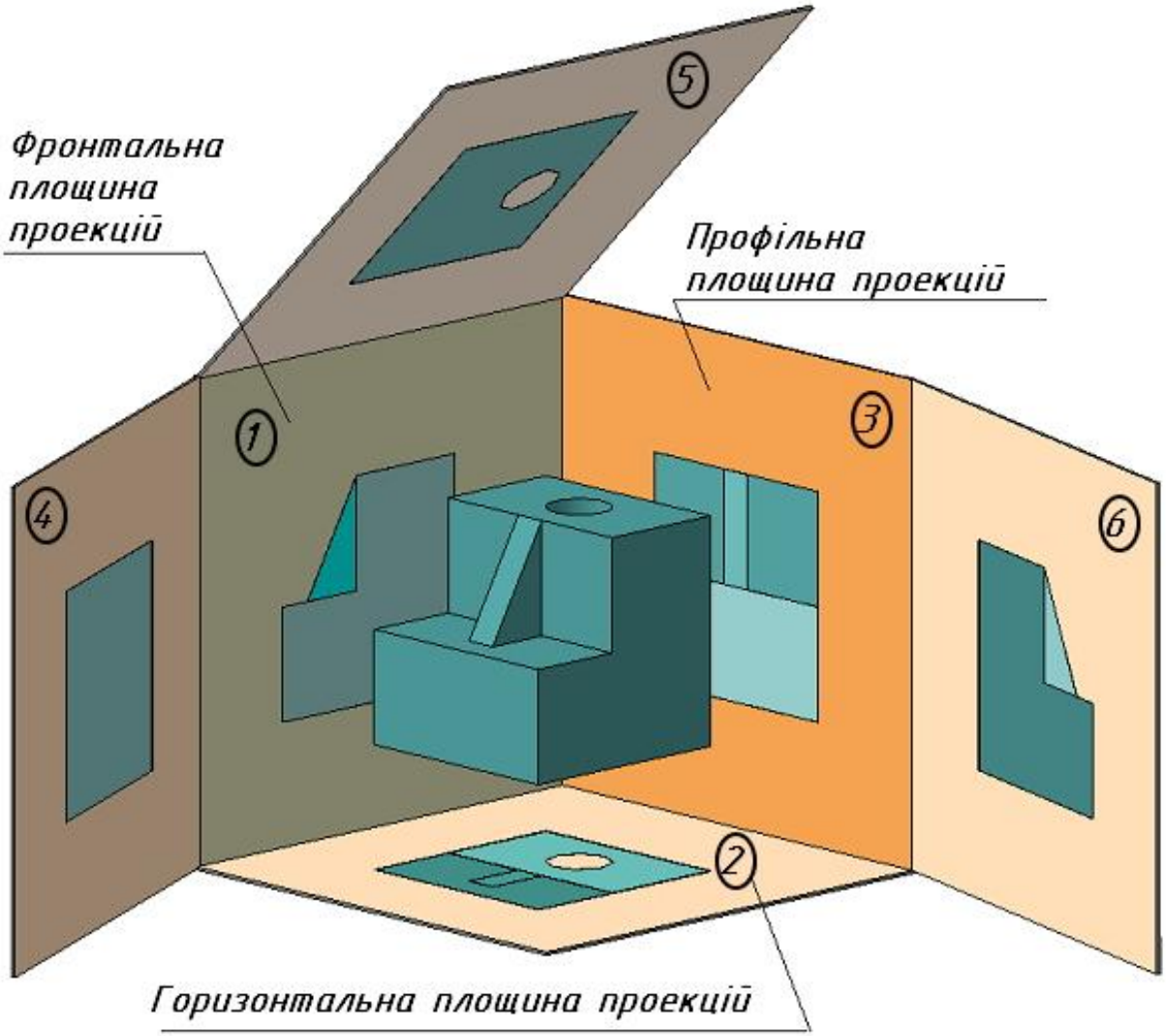


Рисунок 6.12 – Розгортка граней куба, які є площинами проекцій

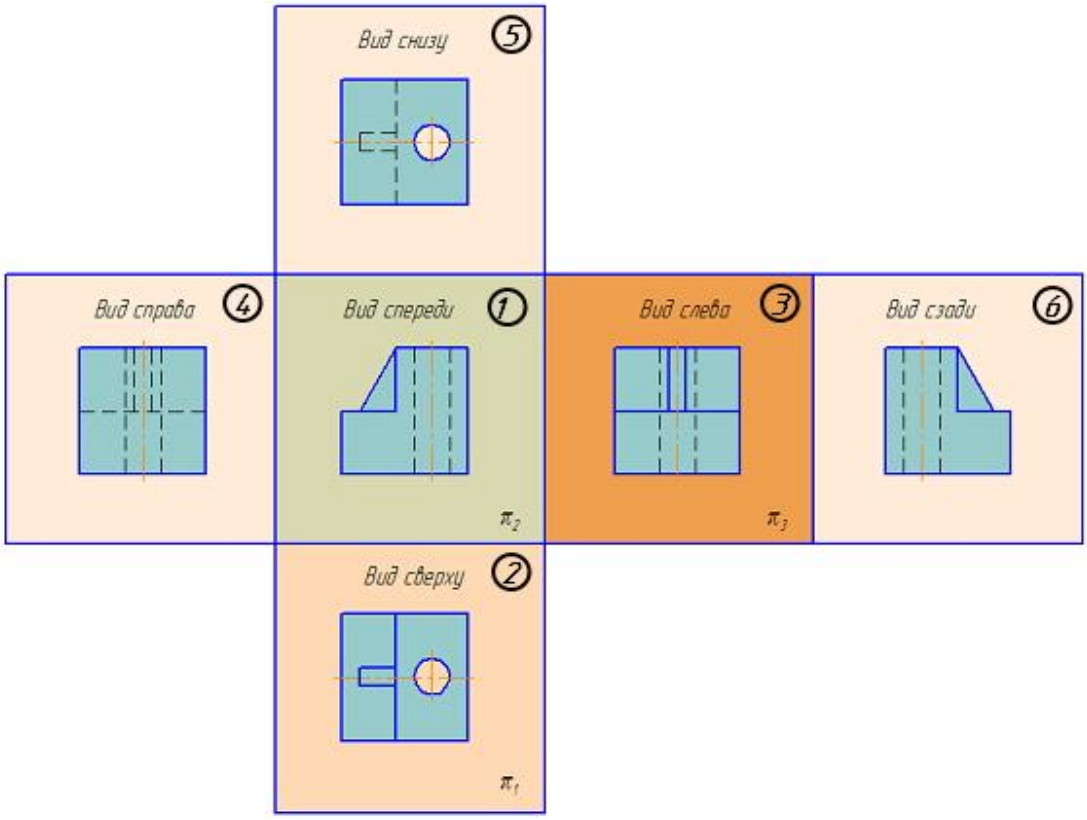


Рисунок 6.13 – Основні види та їх розташування на кресленні

Крім основних, розрізняють додаткові (рис. 6.9) та місцеві (рис. 6.10) види. Якщо деяку частину предмета не можна показати без спотворення форми та розмірів на жодному з основних видів, то застосовують додаткові види. Додатковий вид позначають стрілкою та літерою. Якщо додатковий вид розміщено в безпосередньому зв'язку з відповідним зображенням, то стрілку й надпис над видом не наносять (рис. 6.14).

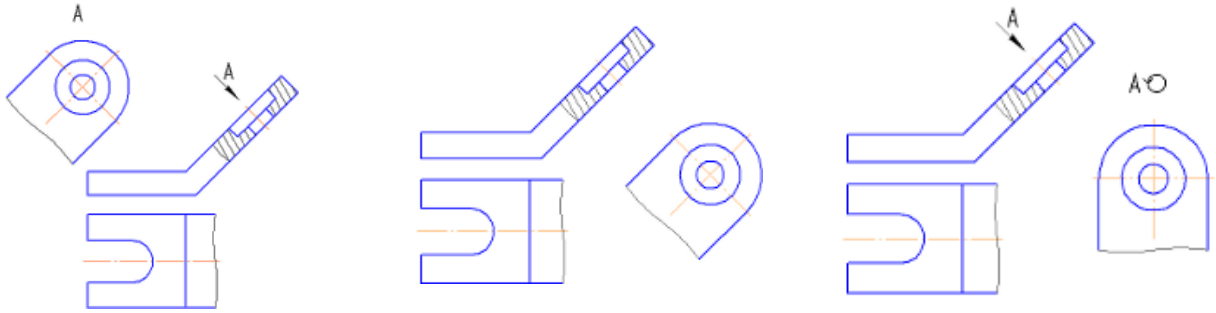


Рисунок 6.14 – Додаткові види

Зображення окремої обмеженої частини поверхні предмета називають місцевим видом. Він може обмежуватися хвилястою лінією обриву (рис. 6.15).

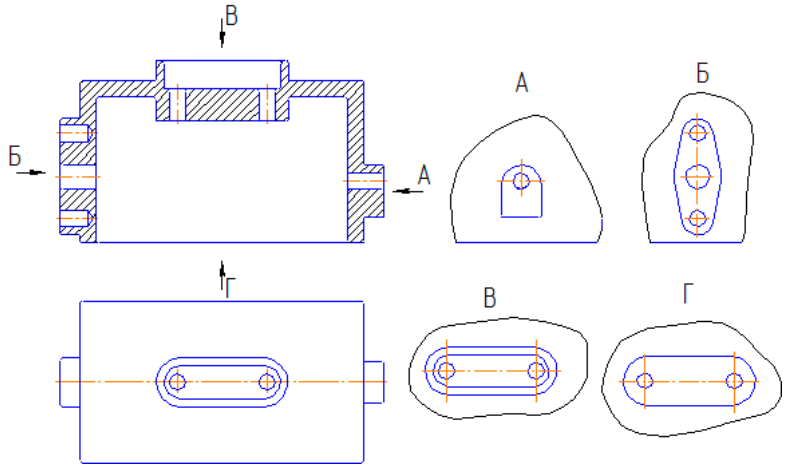


Рисунок 6.15 – Місцеві види

Місцевий вид позначають на рисунку так само, як і додаткові види.

6.3.2 Розріз та переріз

Розріз – це зображення предмета, який умовно перетнуто однією площиною або кількома. При цьому на розрізі зображують те, що розміщено в січних площинах та за ними (рис. 6.16).

Переріз – це зображення плоскої фігури, що утворюється при умовному перетині предмета однією площиною або кількома. При цьому зображується тільки те, що розміщено в січних площинах (рис. 6.16).

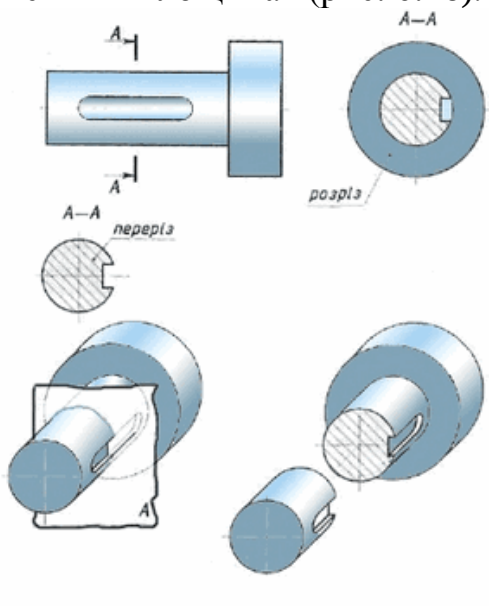


Рисунок 6.16 – Розріз та переріз

Залежно від положення січної площини відносно горизонтальної площини проекцій розрізи поділяють на:

а) горизонтальні – січна площина горизонтальна (рис. 6.17);

б) вертикальні – січна площина вертикальна (фронтальні та профільні) (рис. 6.18, 6.19);

в) похилі – січна площина утворює з горизонтальною кут, що відрізняється від прямого.

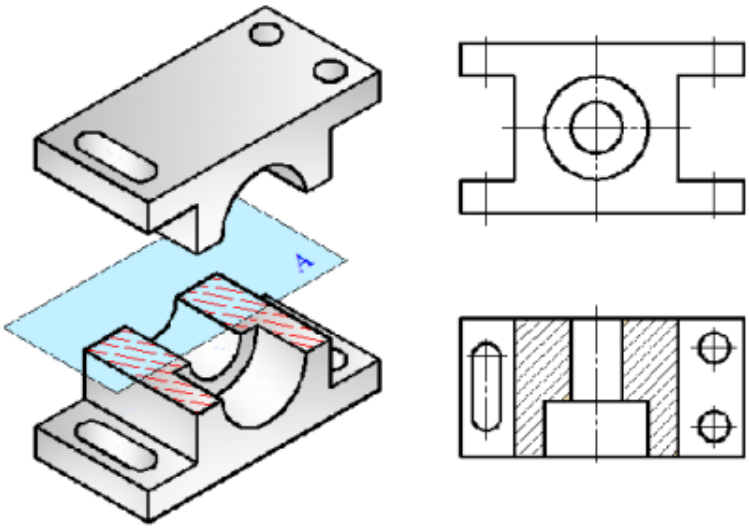


Рисунок 6.17 – Горизонтальний розріз

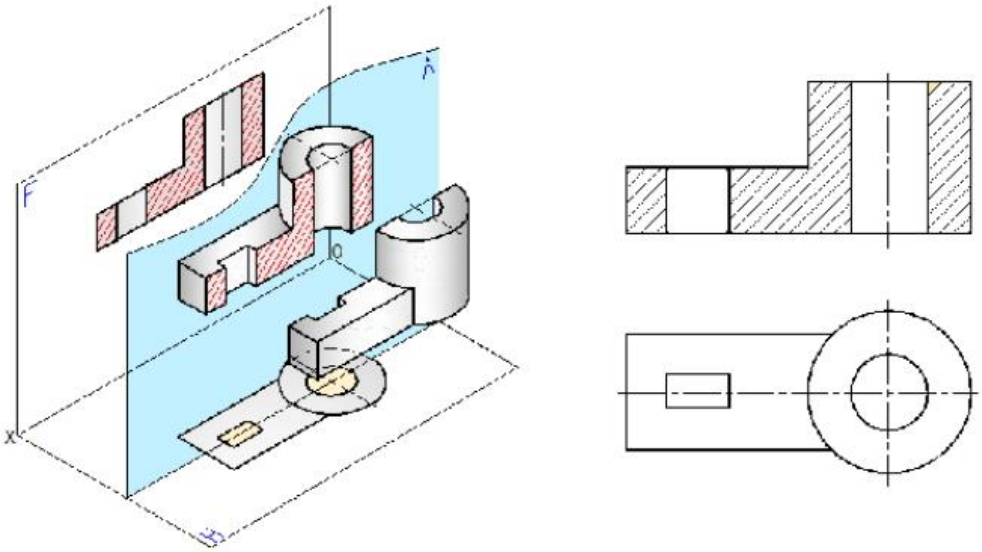


Рисунок 6.18 – Фронтальний розріз

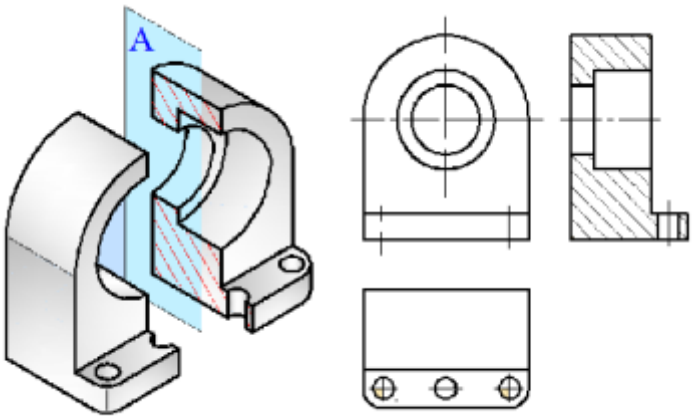


Рисунок 6.19 – Профільний розріз

Залежно від положення січної площини відносно предмета розрізи поділяються на:

а) повздовжні – січна площина розміщена вздовж предмета;

б) поперечні – січна площина розміщена упоперек предмета.

Залежно від кількості січних площин розрізи бувають:

а) прості – при одній січній площині;

б) складні – при двох і більше січних площинах.

Складні розрізи бувають: східчасті (рис. 6.20) та ламані (рис. 6.21).

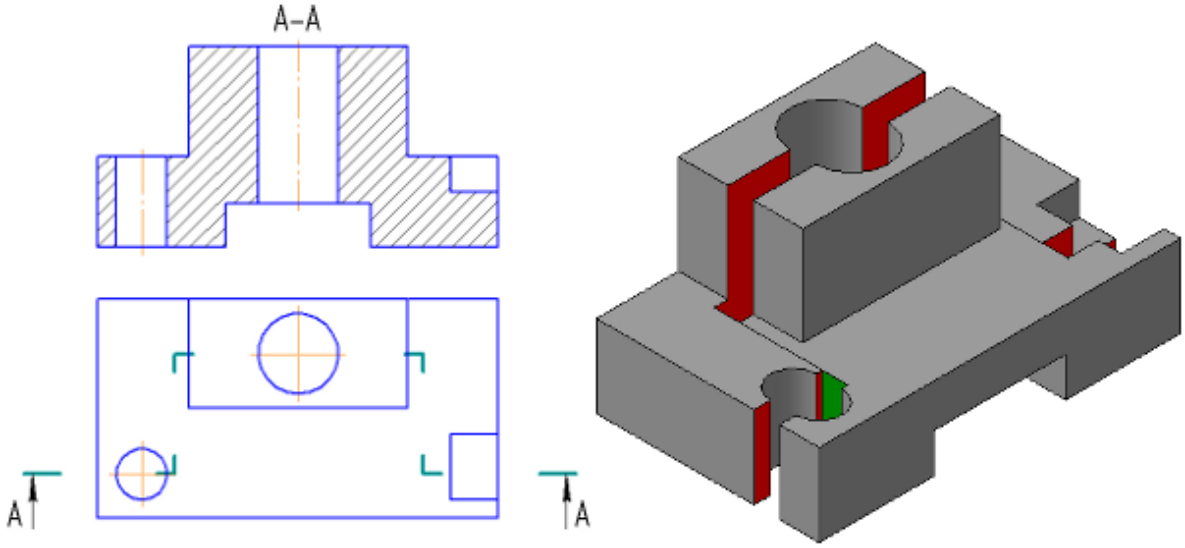


Рисунок 6.20 – Складний східчастий розріз

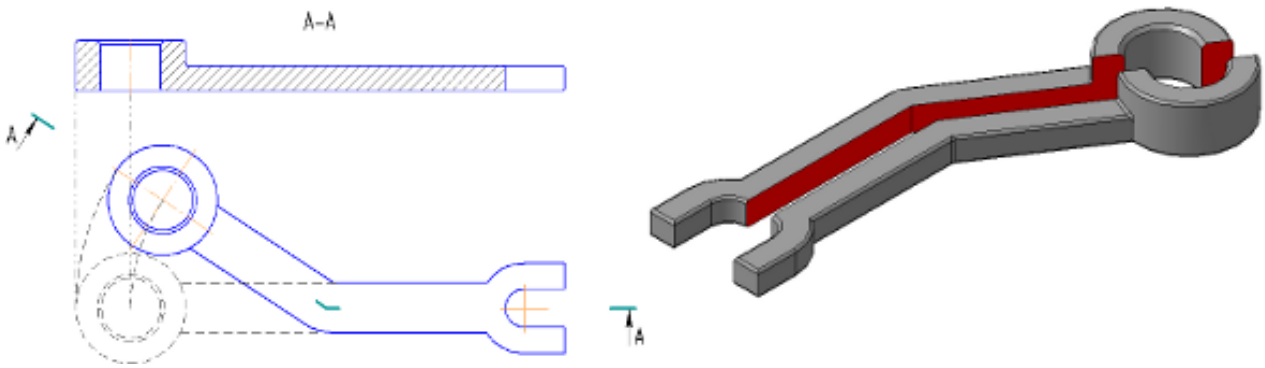


Рисунок 6.21 – Складний ламаний розріз

Позначення розрізу містить три елементи:

1. Позначення положення січної площини розімкненою лінією (лінія перетину), початковий і кінцевий штрихи якої не повинні перетинати контур відповідного зображення. При складних розрізах штрихи проводять також у місцях перетину січних площин.

2. Позначення стрілкою напряму зору на початковому та кінцевому штрихах на відстані 2–3 мм від кінця штриха. На початку та в кінці лінії перетину, а якщо треба, то й у місцях перетину січних площин, ставлять

вертикально одну й ту саму літеру українського алфавіту з боку зовнішнього кута.

3. Надпис розрізу безпосередньо над його зображенням за типом А–А без підкреслення. Якщо січна площина збігається з площиною симетрії предмета в цілому, а відповідні зображення розміщені на місці основного вигляду на одному й тому самому аркуші в безпосередньому проекційному зв'язку та не відокремлені іншими зображеннями, то для горизонтальних, фронтальних та профільних розрізів не показують положення січної площини, а сам розріз написом не супроводжують.

Частину виду та частину розрізу можна сполучати, розділяючи їх хвилястою лінією. Якщо при цьому сполучаються половина вигляду та половина розрізу, кожен з яких має одну й ту саму вісь симетрії, то лінією, що їх розділяє, є вісь симетрії (рис. 6.22), крім випадку, коли вісь збігається з лінією видимого контуру.

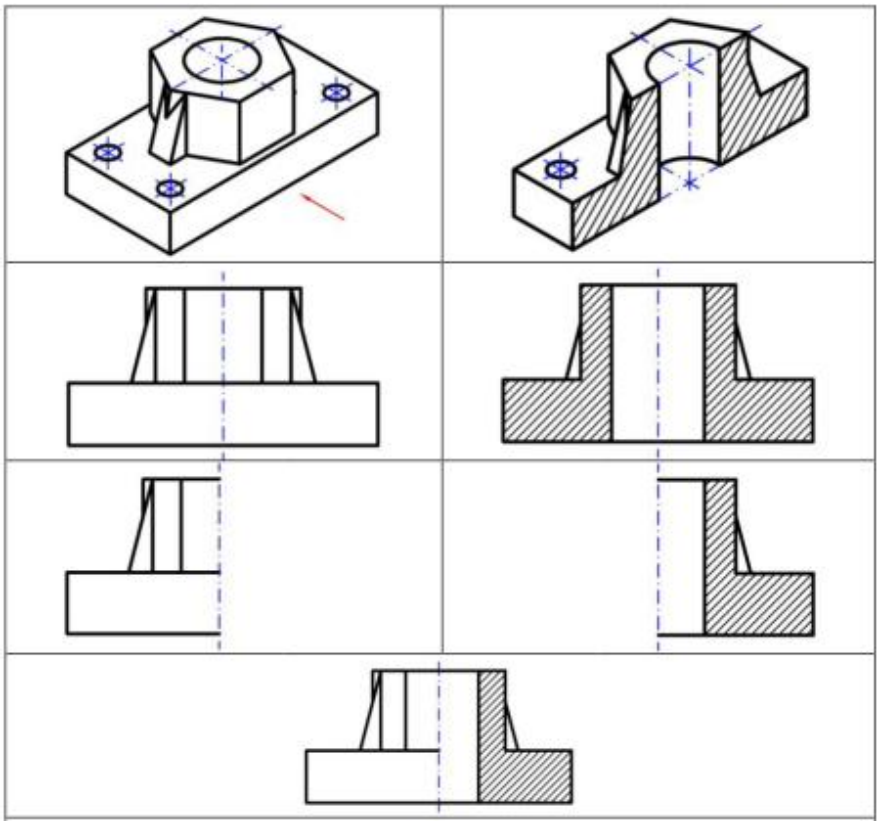


Рисунок 6.22 – З'єднання половини виду з половиною розрізу

При виконанні зображень симетричних деталей, що містять з'єднання половини виду з половиною розрізу, необхідно дотримуватися таких правил:

1. Розріз на кресленні розташовують праворуч від осі симетрії (рис. 6.23).

2. На половині виду внутрішня форма предмета не відображається (рис. 6.23).

3. Розмірні лінії, які стосуються елементам деталей, які представлені на кресленні половиною виду або половиною розрізу, проводять за осі і обмежують стрілкою з одного боку. Розмір вказують повний.

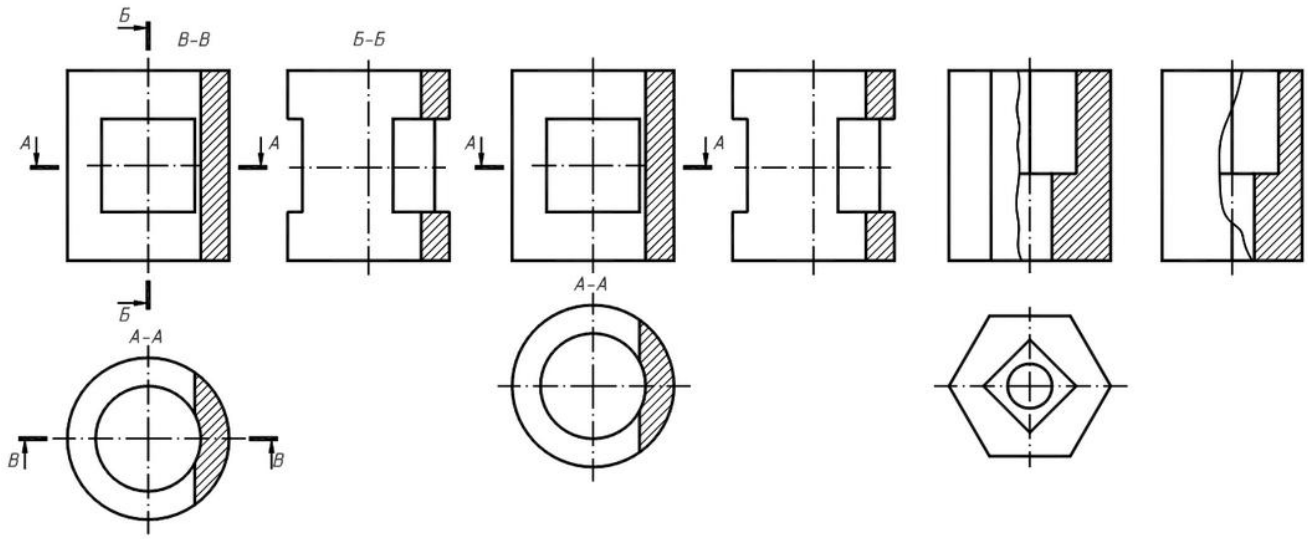


Рисунок 6.23 – Приклади з’єднання половини виду з половиною розрізу

Перерізи, що не входять до складу розрізів, поділяють на:

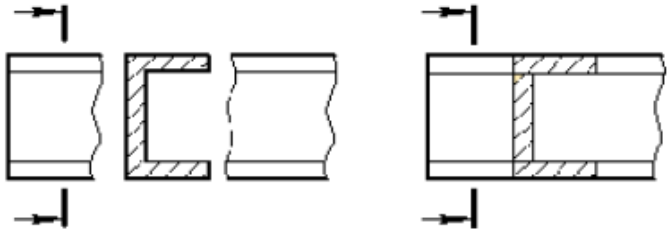
а) винесені, тобто такі, що виконані окремо від основного зображення (рис. 6.24 а);

б) накладені, тобто такі, що розміщені на самому зображенні предмета (рис. 6.24 б, 6.25 б). Такі перерізи обводять тонкою суцільною лінією.

Винесені перерізи є переважними, їх можна розміщувати в розриві між частинами одного й того самого виду (рис. 6.25 а).

а) б)

Рисунок 6.24 – Винесений (а) та накладений (б) перерізи



а) б)

Рисунок 6.25 – Переріз, розташований в розриві виду (а) та накладений (б)

Для симетричного винесеного або накладеного перерізу літерні позначення та лінії перетину не наносять, обмежуючись проведенням осі симетрії.

У решті випадків для позначення лінії перетину проводять розімкнену лінію та показують стрілками напрям зору, позначаючи їх однаковими великими літерами українського алфавіту. На місці зображення перерізу його надписують за типом А–А, не підкреслюючи.

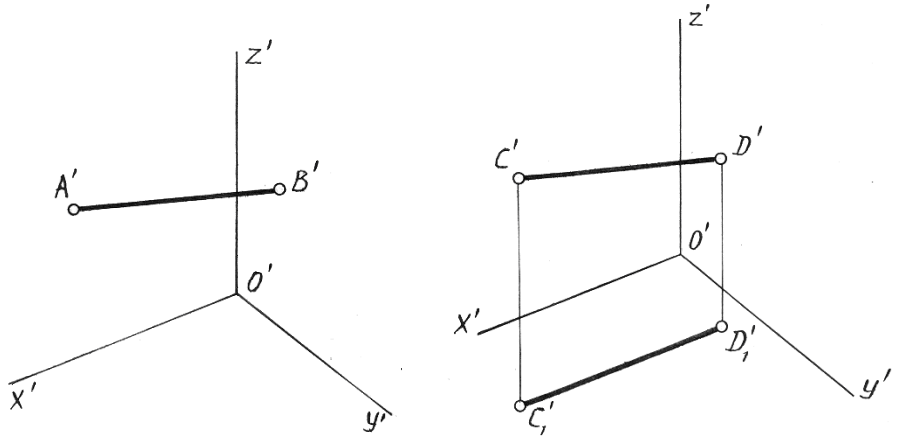
6.4 Аксонометричні проекції

Аксонометрична проекція (чи аксонометрія) являє собою один з методів побудови наочних зображень на одній площині.

Стандарт ДСТУ ГОСТ 2.317:2014 встановлює правила побудови (відображення) на площині наступних аксонометричних проекцій:

- прямокутної ізометричної проекції;
- прямокутної диметричної проекції;
- косокутної фронтальної ізометричної проекції;
- косокутної горизонтальної ізометричної проекції;
- косокутної фронтальної диметричної проекції.

Одна аксонометрична проекція не цілком визначає положення геометричного елемента в просторі (тобто не має властивість оборотності). Щоб аксонометричне креслення стало оборотним, необхідно крім аксонометричної проекції геометричного елемента задати хоча б одну його вторинну проекцію. Наприклад, на рисунку 6.21а положення прямої АВ у просторі невизначене, а пряма CD (рис. 6.26б) розташована паралельно до фронтальної площини проекцій $C'_1D'_1$.



а) б)

Рисунок 6.26 – Аксонометричні проекції прямих АВ та CD

В основі побудови аксонометричних проекцій лежить координатний метод. На рисунку 6.27 показана побудова аксонометричної проекції точки А по її вторинним горизонтальній (рис. 6.27 а) та фронтальній (рис. 6.27 б) проекціям.

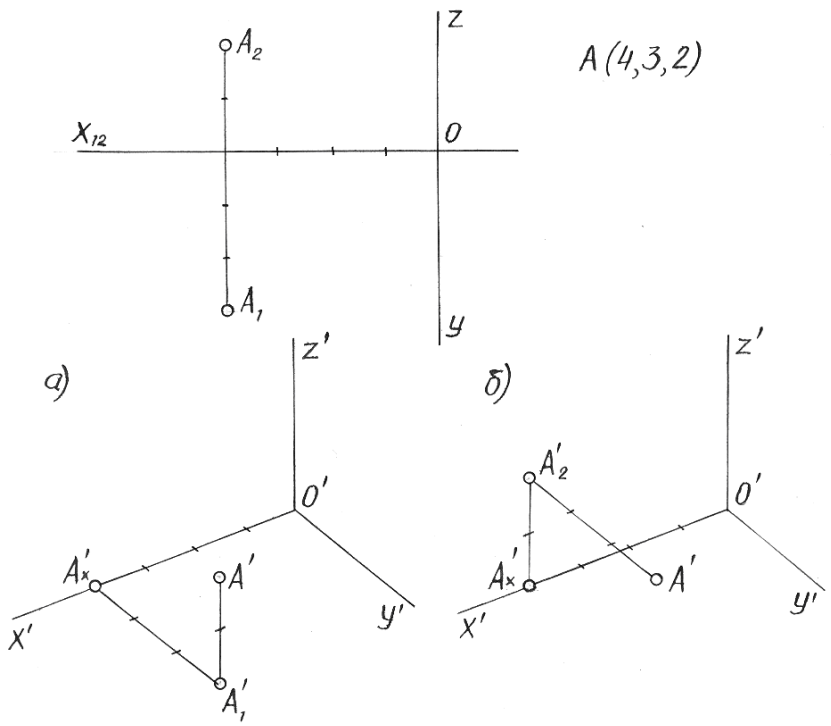


Рисунок 6.27 – Побудова аксонометричної проекції точки А

6.4.1 Стандартна ізометрична проекція

Положення аксонометричних осей ізометричної проекції наведено на рисунку 6.28 б, а їхня побудова за допомогою циркуля показана на рисунку 6.28 а. Практично ізометричну проекцію будують без спотворення по осях проекцій, тобто користуються приведеними коефіцієнтами спотворення, що по всіх осях дорівнюють одиниці. Тоді зображення в ізометрії виходить збільшеним у 1,22 рази ($\frac{1}{0{,}82} = 1{,}22$), тобто аксонометричний масштаб для прямокутної ізометрії буде M^A = 1,22 : 1.

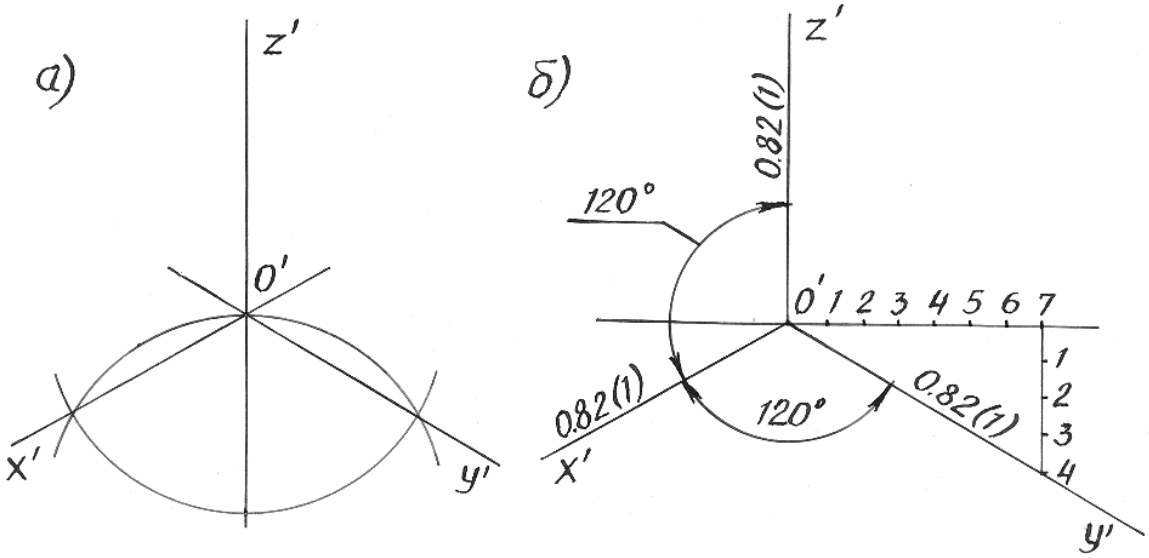


Рисунок 6.28 – Положення аксонометричних осей ізометрії

Кола, що лежать у площинах, паралельних до площин проекцій, проекціюються на аксонометричні площини проекцій в еліпси. Розміри осей еліпсів при використанні приведених коефіцієнтів спотворення дорівнюють: велика вісь 2a = 1,22d, мала вісь 2b = 0,71d, де d – діаметр зображуваного кола (рис. 6.29).

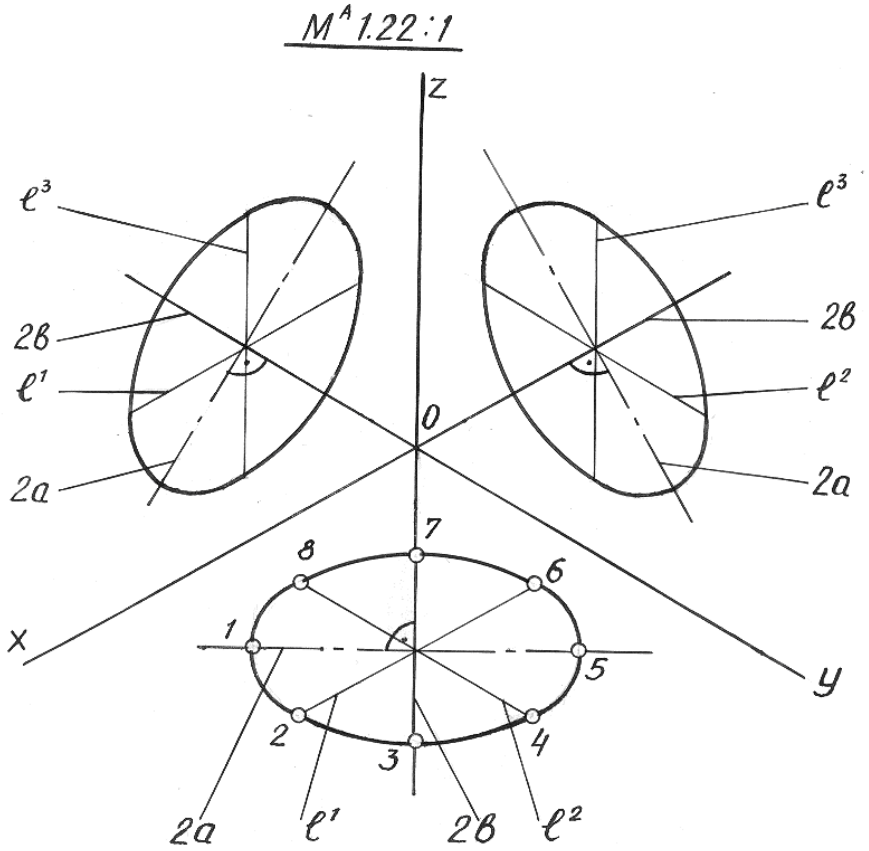


Рисунок 6.29 – Побудова кіл в ізометрії

Діаметри кіл, паралельні до координатних осей, проектуються відрізками, паралельними до ізометричних осей, і зображуються рівними діаметру кола: $\ell\ell^1\ell^2 = \ell^3 = d$, при цьому $\ell^1 \| OX$; $\ell^2 \| OY$; $\ell^3 \| OZ$.

Еліпс, як ізометрію кола, можна побудувати по восьми точках, що обмежують його велику і малу осі і проекції діаметрів, паралельних до координатних осей (рис. 6.29).

6.4.2 Стандартна диметрична проекція

Положення аксонометричних осей диметричної проекції наведено на рисунку 6.25 а, їх побудова без транспортира показано на рисунку 6.30 б. Показник спотворення по осі Y дорівнює 0,47, а по осях X и Z – 0,94. Диметричну проекцію, як правило, виконують без спотворення по осях X и Z та з коефіцієнтом спотворення 0,5 по осі Y, тобто користуються приведеним коефіцієнтом спотворення.

Тоді зображення виходить збільшеним у 1,06 рази ($\frac{1}{0{,}94} = \frac{0{,}5}{0{,}47} = 1{,}06$), тобто аксонометричний масштаб для прямокутної диметрії буде M^A = 1,06:1.

Кола, що лежать у площинах, паралельних до площин проекцій, проектуються на аксонометричні площини проекцій в еліпси (рис. 6.31). Кола діаметра d, лежачі в площинах XOY і YOZ, проектуються в рівні еліпси, велика вісь яких 2а = 1,06d, а мала – 2в = 0,35d, якщо користуватися приведеними коефіцієнтами спотворення. Коло, розташоване в площині XOZ, проектується в еліпс з осями: велика вісь 2а = 1,06d, мала вісь 2b = 0,95d. Діаметри кіл, що паралельні до координатних осей, спроектуються у відрізки, паралельні до аксонометричних осей диметрії: $\ell^1 = \ell^3 = d$; $\ell^2 = 0{,}5d$, при цьому $\ell^1 \| OX; \ell^2 \| OY; \ell^3 \| OZ$.

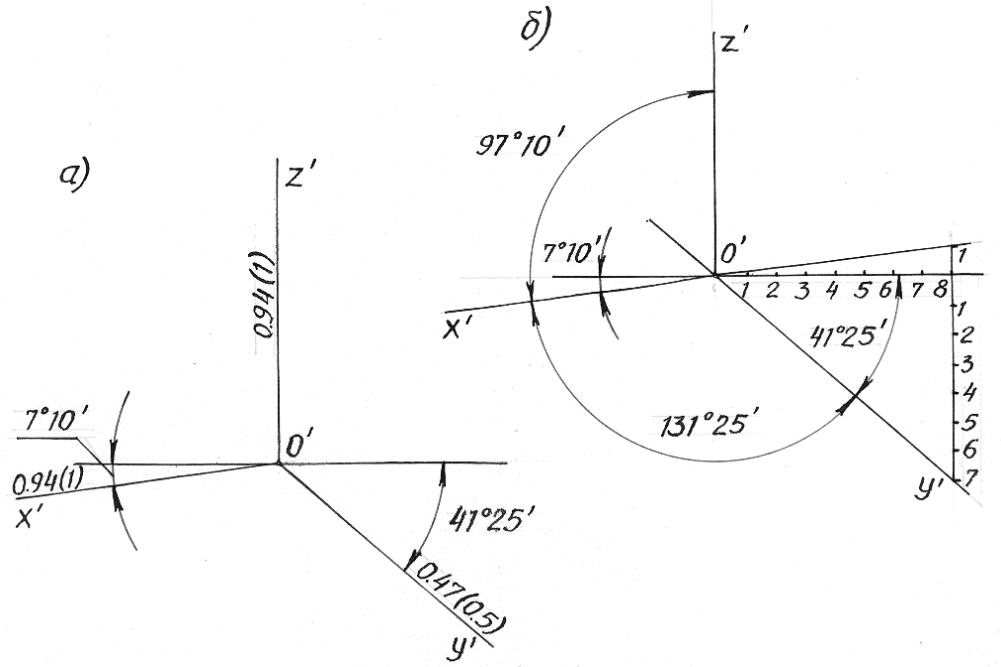


Рисунок 6.30 – Положення аксонометричних осей диметрії

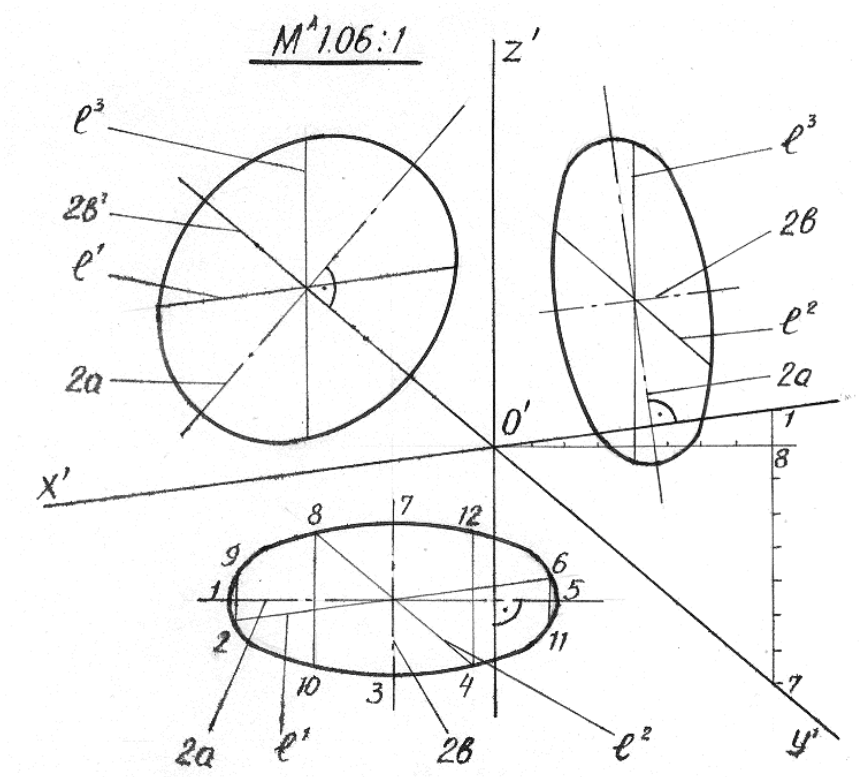


Рисунок 6.31 – Побудова кіл в диметрії

Можна побудувати крім зазначених точок ще чотири точки, симетричні точкам, що обмежують проекції діаметрів, паралельних до координатних осей. Тоді еліпс, як диметрію кола, можна побудувати по його дванадцятьох точках.

На рисунку 6.32 зображено побудову в приведених коефіцієнтах спотворення диметрії піраміди по вторинній фронтальній проекції. Для визначення будь-якої точки на поверхні піраміди проводимо через неї допоміжну пряму (подальші побудови зрозумілі з креслення).

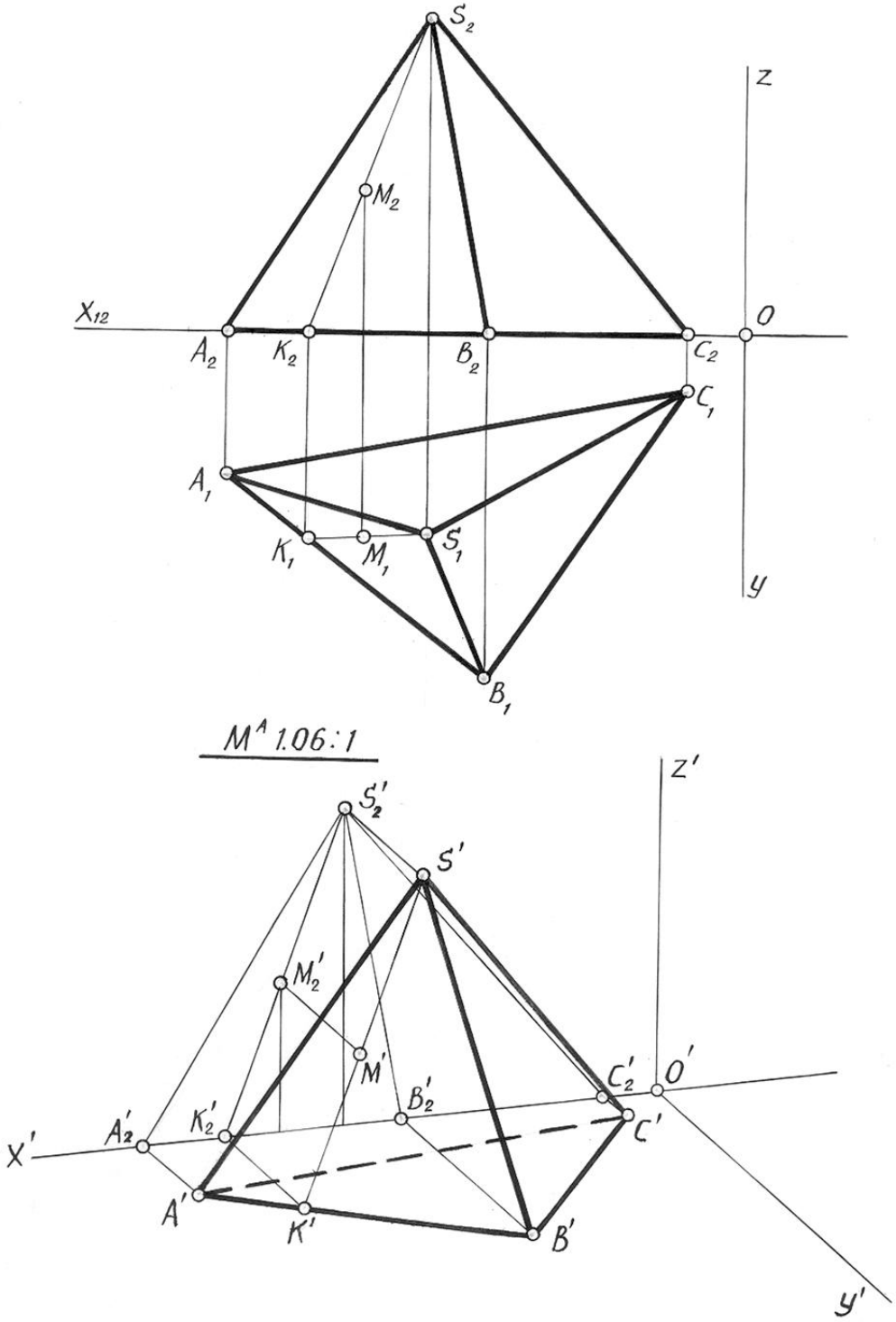


Рисунок 6.32 – Диметрія піраміди

6.4.3 Приклади побудови ізометричної проекції деяких поверхонь

На рисунку 6.33 зображено конус, перерізаний площиною Σ, що є фронтально проектуючою, яку можна розглядати як грань поверхні будь-якого багатогранника. У перетині виходить еліпс з великою (1–2) та малою (3–4) осями.

Для побудови горизонтальної проекції цього еліпса використовуємо допоміжні площини Δ и Г. Побудову аксонометрії зробимо в приведених коефіцієнтах спотворення по вторинній горизонтальній проекції. Будуємо аксонометричну проекцію основи конуса і його вершини, і з точки S′ проводимо дотичні до еліпса в точках K′ і L′ – це твірні нарису конуса в аксонометрії, а $S'_1L'_1$ і $K'_1S'_1$ – їхні вторинні горизонтальні проекції. Далі, будуємо вторинну горизонтальну проекцію лінії перетину. Точки перетину вторинних проекцій нарисових твірних і лінії перетину точки N'_1 і M'_1 – дають можливість побудувати точки N′ і M′, що є точками перехідної видимості для лінії перетину в ізометрії.

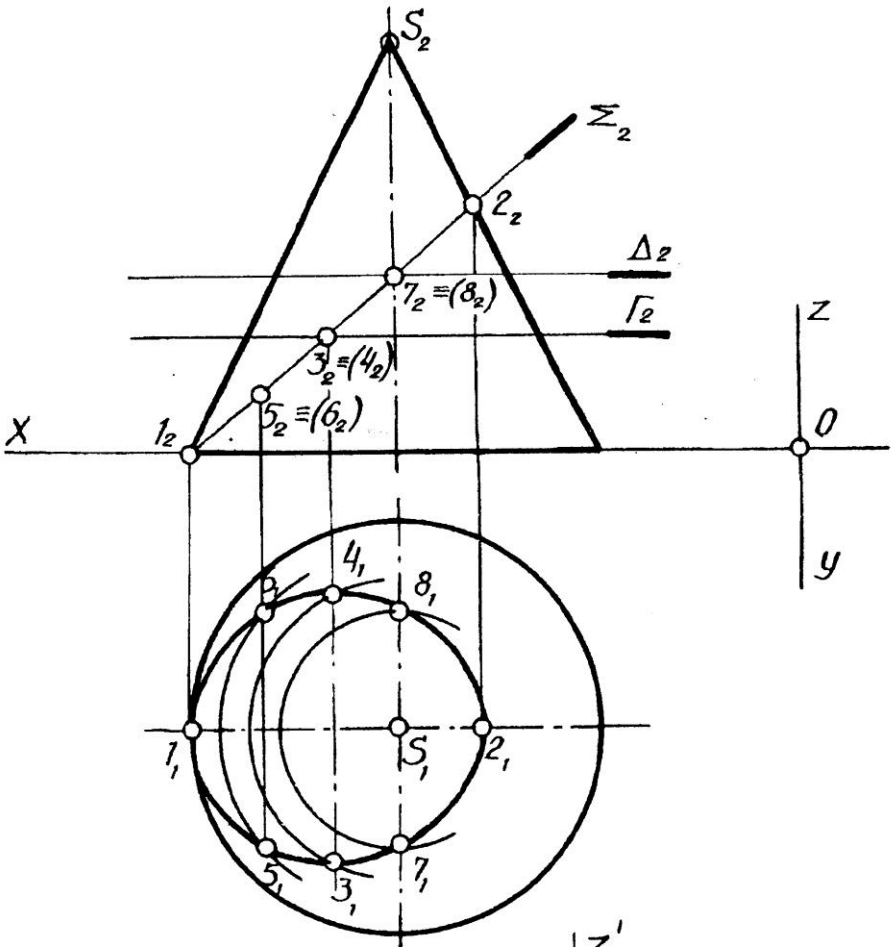


Рисунок 6.33 – Конус

Аксонометрична проекція будь-якої точки лінії перетину може бути побудована двома способами : чи за допомогою вторинної проекції самої точки (з якої на вертикальної прямої відкладаємо висоти з фронтальної проекції) чи за допомогою вторинної проекції твірної, що проходить через точку (див. на

рисунок 6.34 побудова точки 7′ за допомогою твірної SA). Другий спосіб є більш точним.

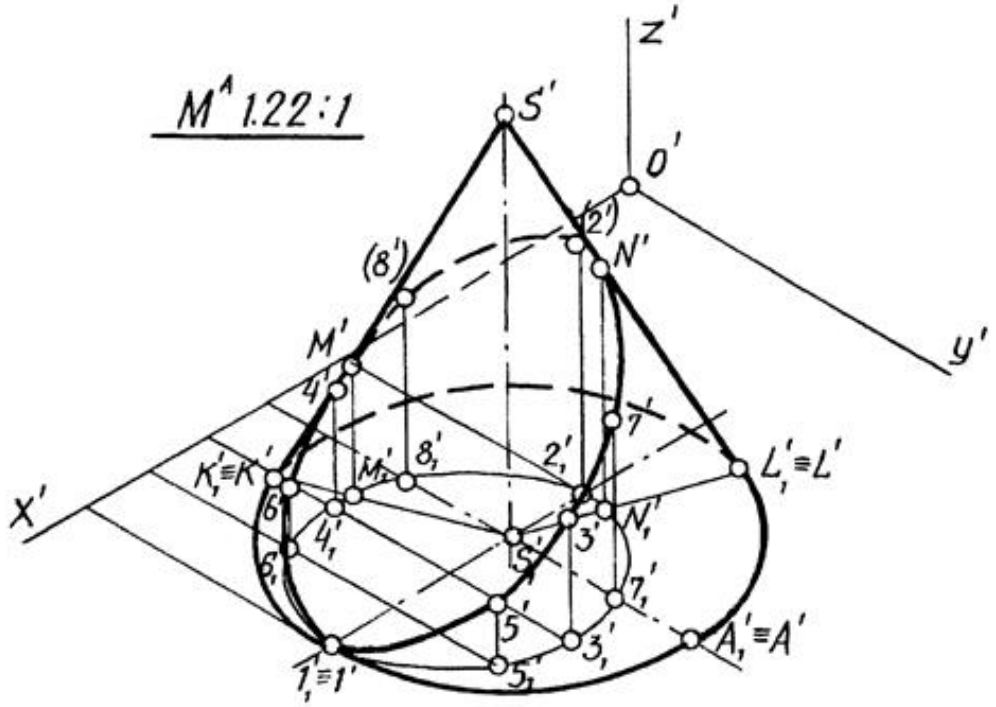


Рисунок 6.34 – Ізометрія конуса

На рисунку 6.35 наведено приклад побудови аксонометричної проекції шестигранної призми.

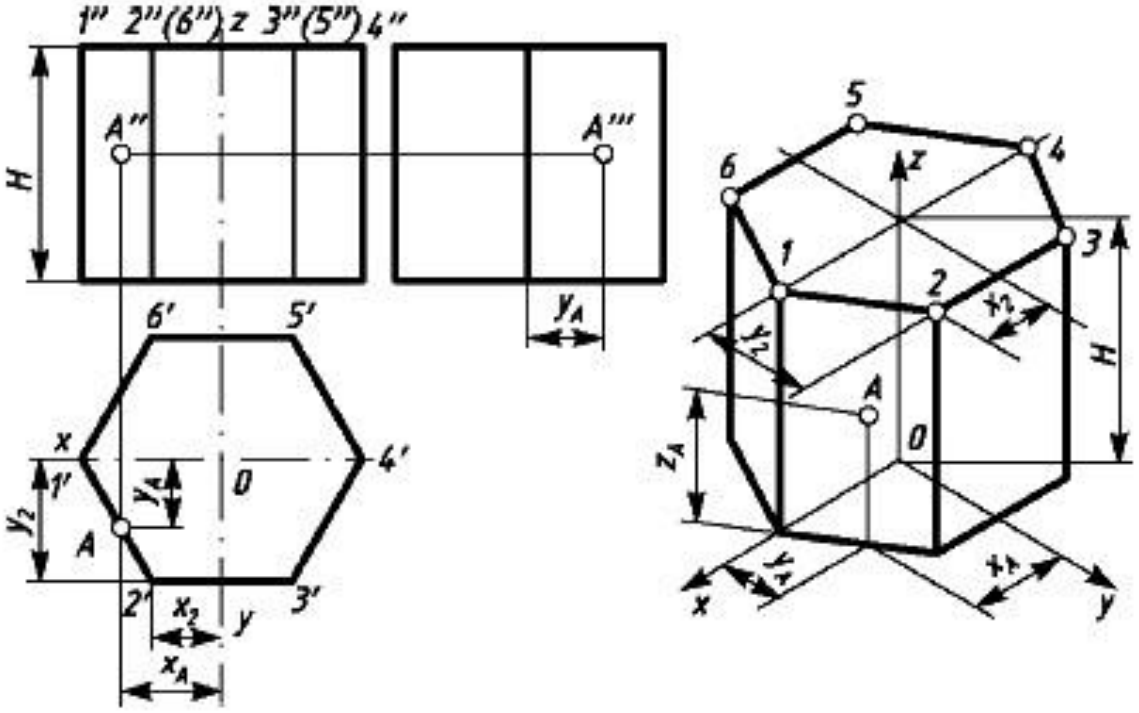


Рисунок 6.35 – Приклад побудови аксонометричної проекції шестигранної призми та точки А, що належить цій поверхні

6.5 Питання для самоперевірки

1. Що називають видом? Скільки основних видів регламентовано ГОСТ 2.305-68?
2. Який вид називають головним? Чому?
3. Як утворюються додаткові та місцеві види? Як вони позначаються на кресленні?
4. Що називають розрізом? Чим відрізняється простий розріз від складного?
5. Як утворюється місцевий розріз? Якою лінією він відділяться від виду?
6. Яке зображення називають перерізом? Які бувають перерізи?
7. У чому різниця між розрізом та перерізом?
8. Яке положення деталі треба вибрати для головного виду?
9. Які основні правила нанесення розмірів на кресленні?
10. Як треба розміщувати розміри зовнішніх та внутрішніх форм деталі при з’єднанні частини виду з розрізом?
11. Які основні принципи побудови аксонометричних проекцій?
12. Як побудувати аксонометричну проекцію точки, прямої, поверхні?

ЛЕКЦІЯ 7 АРХІТЕКТУРНО-БУДІВЕЛЬНЕ КРЕСЛЕННЯ

7.1 Загальні відомості про будівельні кресленнях
7.2 Масштаби
7.3 Правила нанесення розмірів на архітектурно-будівельних кресленнях
7.4 Робочі креслення та умовні графічні зображення на них
7.5 Креслення планів будівлі
7.6 Креслення фасадів будівлі
7.7 Креслення розрізів будівлі
7.8 Питання для самоперевірки

7.1 Загальні відомості про будівельні креслення

Будівельними називаються креслення, які містять проекційні зображення будівельних об'єктів або їхніх частин та інші дані, необхідні для їхнього зведення.

При виконанні й оформленні будівельних креслень необхідно керуватися ДСТ ЄСКД і СПДБ (система проектної документації для будівництва).

На будівельних кресленнях використовують типи ліній, наведені в ДСТ 2.303-68. Товщина ліній для всіх типів зображень, виконаних у одному масштабі, повинна бути однаковою. Однак у будівельних кресленнях є деякі особливості в застосуванні окремих типів ліній. На планах і розрізах будинку видимі контури обводять лініями різної товщини. Більш товстою лінією обводять контури ділянок стін, що потрапили в січну площину. Контури ділянок стін, що не потрапили в площину перерізу, обводять тонкою лінією.

Написи й буквено-цифрові позначення на форматах і в основному написі виконують стандартним шрифтом типу Б з нахилом за ДСТ 2.304-81.

7.2 Масштаби

Масштаби креслень вибирають відповідно до ДСТ 2.302-68. Для житлових і громадських будинків:

• плани поверхів, підвалу, фундаментів, розрізи, фасади, монтажні плани перекриттів – М 1:100, 1:200, 1:500;

• плани секцій, фрагменти планів, розрізів і фасадів – М 1:50, 1:100;

• вироби й вузли – М 1:5, 1:10, 1:20.

Будинок або споруда в плані розчленовується осьовими лініями на ряд елементів. Ці вісі визначають розташування основних несучих конструкцій і називаються поздовжніми й поперечними координаційними вісями.

Координаційні вісі наносять штрихпунктирними лініями й позначають марками в колах діаметром 8–12 мм. Цифрами маркірують вісі по стороні будинку з більшою кількістю вісей. Послідовність маркування – ліворуч-праворуч, знизу вгору.

У будинках з несучими поздовжніми й поперечними стінами прив'язку до координаційних вісей зовнішніх і внутрішніх стін роблять у такий спосіб:

• внутрішню грань зовнішньої стіни розміщають від координаційної вісі на відстані М або 2М, тобто 100 або 200мм (модульна прив'язка);

• координаційна вісь збігається із внутрішньою поверхнею стіни (нульова прив'язка);

• у внутрішніх стінах координаційна вісь повинна збігатися з віссю симетрії стіни, крім стін сходових кліток і стін з вентиляційними каналами (центральна прив'язка).

7.3 Правила нанесення розмірів на архітектурно-будівельних кресленнях

Розміри на архітектурно-будівельних кресленнях проставляють у мм без позначення одиниць виміру та наносять у вигляді замкнутого ланцюга (рис. 5.1). Розміри дозволяється повторювати. Замість стрілок застосовують зарубки у вигляді короткої суцільної основної лінії довжиною 2–4 мм під кутом 45° до розмірної лінії (рис. 5.2). При цьому розмірні лінії повинні виступати за крайні виносні на 1...3 мм.

Розмірну і виносну лінії проводять суцільною тонкою лінією завтовшки від s/3 до s/2. Розмірні лінії переважно наносити поза контуром зображення. Відстань розмірної лінії від паралельної їй лінії контуру, осьової, виносної та інших ліній, і навіть відстань між паралельними розмірними лініями має бути, у межах 6... 10 мм. Для креслень загальних видів (плани, розрізи, фасади тощо) розмірні лінії мають бути розташовані, залежно від розміру зображення, з відривом від 15 до 25 мм від лінії зовнішнього контуру (рис. 7.1, 7.2).

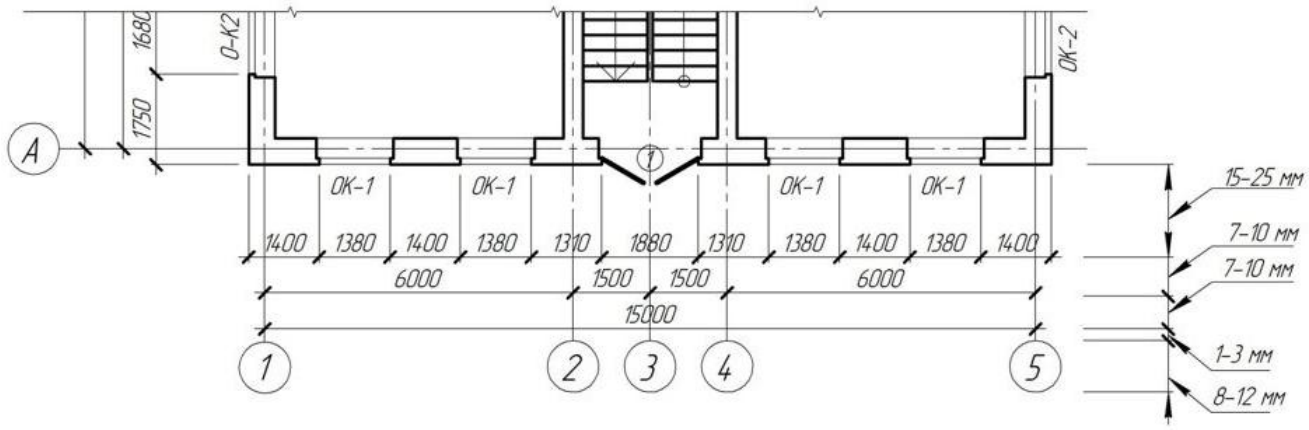


Рисунок 7.1 – Фрагмент плану з розмірними лініями

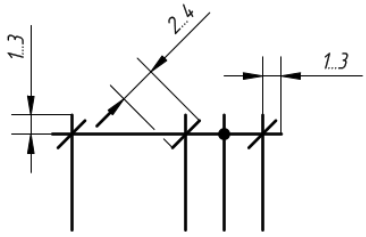


Рисунок 7.2 – Розмірна лінія

Позначки рівнів (висоти, глибини) елемента будинку або конструкції від якогось відлікового рівня, прийнятого за нульовий, розміщують на виносних лініях або лініях контуру й позначають знаком, зображеним на рисунку 7.3.

Позначки вказують у метрах із трьома десятковими знаками. Умовну нульову позначку позначають 0.000 (рис. 7.4).

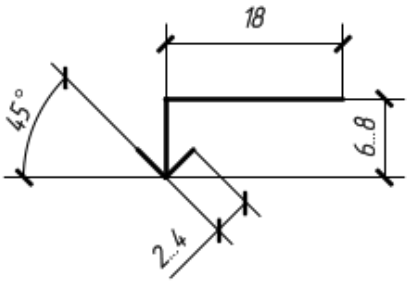


Рисунок 7.3 – Виносна лінія рівня відповідної поверхні

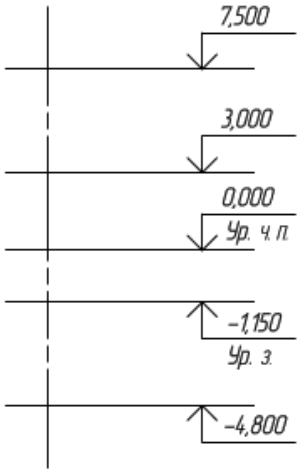


Рисунок 7.4 – Позначки рівнів

Позначки нижче умовної нульової позначають зі знаком мінус, позначки вище нульової – без знака (рис. 7.4). У якості нульової для будинків зазвичай приймають рівень підлоги першого поверху. Позначки при необхідності супроводжують написами, що пояснюють – Р.ч.п. (рівень чистої підлоги), Р.з. (рівень землі).

Будівельні креслення будинків і споруд складають за загальними правилами прямокутного проектування на основні площини проекцій.

Зображення будинків мають свої назви: план, фасад та розріз.

7.4 Робочі креслення та умовні графічні зображення на будівельних кресленнях

Житлові, громадські та промислові споруди зводять по остаточно затвердженими проектами. Склад та зміст проектної документації на будівництво ДБН А.2.2-3-2014.

До складу проекту, як правило, входять: робочі креслення, необхідні для організації загальнобудівельних та спеціальних робіт і для установки обладнання, пояснювальна записка і кошторисна документація.

Робочі креслення комплектують по розділах, наприклад:

АР «Архітектурні рішення»;

КЗ «Конструкції залізобетонні»;

КМ «Конструкції металеві»;

ГП «Генеральний план» та інші.

У комплект проектної документації входить також схема генерального плану місця забудови з нанесенням проектованих і вже існуючих будівель.

До складу робочої документації на зведення будівель входять наступні документи:

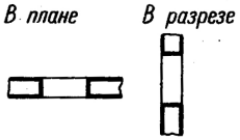
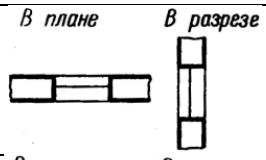
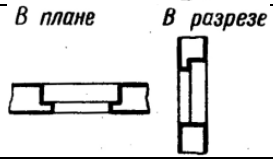
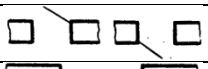
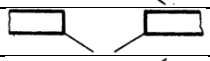
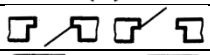
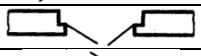
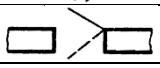
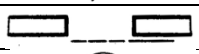
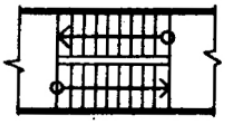
– архітектурно-будівельні креслення будівлі такі як, плани, фасади і розрізи, елементи планів, плани секцій, фрагменти фасадів;

– креслення і схеми розташування фундаментів, перекриттів, стін і даху креслення вузлів і деталей;

– креслення благоустрою території та ін.

На будівельних кресленнях застосовуються умовні графічні позначення будівельних матеріалів, елементів будинків, конструкцій, санітарно-технічних пристроїв згідно ДСТУ Б А.2.4-7:2009. В таблиці 7.1 наведено основні умовні графічні зображення на будівельних кресленнях планів і розрізів, які необхідні для архітектурно-будівельних креслень плану, фасаду та розрізу.

Таблиця 7.1 – Умовні графічні зображення на будівельних кресленнях планів і розрізів

Найменування	**Зображення**
1	2
1. Проріз без чвертей у стіні або перегородці	
Вікна	
2. Проріз віконний без чвертей	
3. Проріз віконний із чвертями	
Двері (ворота)	
4. Двері однопільні в прорізі без чвертей	
5. Двері двопільні в прорізі без чвертей	
6. Двері однопільні в прорізі з чвертями	
7. Двері двопільні в прорізі з чвертями	
8. Двері однопільні з хитним полотном	
9. Двері відкотні однопільні	
10. Двері обертові	
Сходи	
11. Сходи в плані – верхній марш	

Продовження таблиці 7.1

1	2
12. Сходи в плані – проміжні марші	
13. Сходи в плані – нижній марш	
14. Сходи в розрізі в масштабі 1:100 і дрібніше	
Перегородки, кабіни, шафи	
15. Перегородка в плані й розрізі	
16. Перегородка збірна щитова в плані	
17. Перегородка зі склоблоків у плані й розрізі	
18. Кабіни душові у плані	
19. Кабіни вбиралень у плані	
20. Шафа вбудована у плані	
Отвори, канали в стінах	
21. Отвір прямокутний, круглий	
22. Димохід у плані	
23. Канал вентиляційний у плані	
Печі, плити, холодильники	
24. Піч опалювальна (загальне призначення)	
25. Піч опалювальна стаціонарна на газі	
26. Плита (загальне призначення)	
27. Плита стаціонарна електрична	
28. Плита стаціонарна на газі	

Закінчення таблиці 7.1

1	2
29. Плита переносна на газі	
30. Плита переносна электрична	
31. Холодильник электричний	
Санітарно-технічні пристрої	
32. Раковина	
33. Мийка кухонна	
34. Умивальник	
35. Ванна	
36. Біде	
37. Унітаз із випуском на підлогу	
38. Пісуар настінний	

7.5 Креслення планів будівлі

Планом будинку називається зображення будинку, умовно розсіченого горизонтальною площиною на рівні віконних і дверних прорізів (~1м) і спроектованого на горизонтальну площину проекцій. На плані показують те, що знаходиться в січній площині й те, що розташовано під нею. Тобто план – це горизонтальний розріз. На плані будинку показують віконні й дверні прорізи, розташування сходів, перегородок і капітальних стін, вбудованих шаф, санітарно-технічного обладнання, вентканалів.

Розташування всіх конструктивних елементів визначається прив’язкою до координаційних вісей.

Поза контуром будинку проставляють розміри віконних і дверних прорізів «у світлі» і простінків між ними (перший розмірний ланцюжок), між координаційними вісями (другий розмірний ланцюжок) і в вісях (третій розмірний ланцюжок), як зображено на рисунку 7.5. Перший ланцюжок креслять на відстані 20 мм від контуру стіни, наступні – на відстані 7 мм один від одного.

Внутрішні розміри приміщень, товщини стін і перегородок проставляють на внутрішніх розмірних ланцюжках. Їх проводять на відстані не менш 8...10 мм від стіни або перегородки. Проставляють також прив'язку всіх внутрішніх капітальних стін до вісей.

Площі приміщень проставляють у правому нижньому куті плану приміщення у квадратних метрах без позначення одиниць виміру із двома десятковими знаками й рискою внизу.

Підйом з одного поверху на інший зазвичай здійснюється двома маршами. План поверху утворюють розсіченням умовною січною площиною на рівні ~1м, тому в сходовій клітці висхідний марш перетинається приблизно посередині. На плані в цьому місці проводять хвилясту лінію обриву під кутом 45°. Більш довга сторона цієї частини маршу повинна примикати до стіни сходової клітки. На планах першого поверху показують скорочений цокольний марш.

Невидимі конструктивні елементи на планах зображують штриховими лініями.

На планах показують, у який бік відчиняються двері. Зовнішні двері з вулиці в будинок повинні відкриватися назовні, відкривання інших дверей визначається зручністю планування й експлуатації. Марки віконних прорізів і зовнішніх дверей проставляють із зовнішнього боку стіни.

На плані розімкнутою лінією показують положення січної площини для відповідного розрізу.

Приклад креслення плану будинку наведений на рисунку 7.5

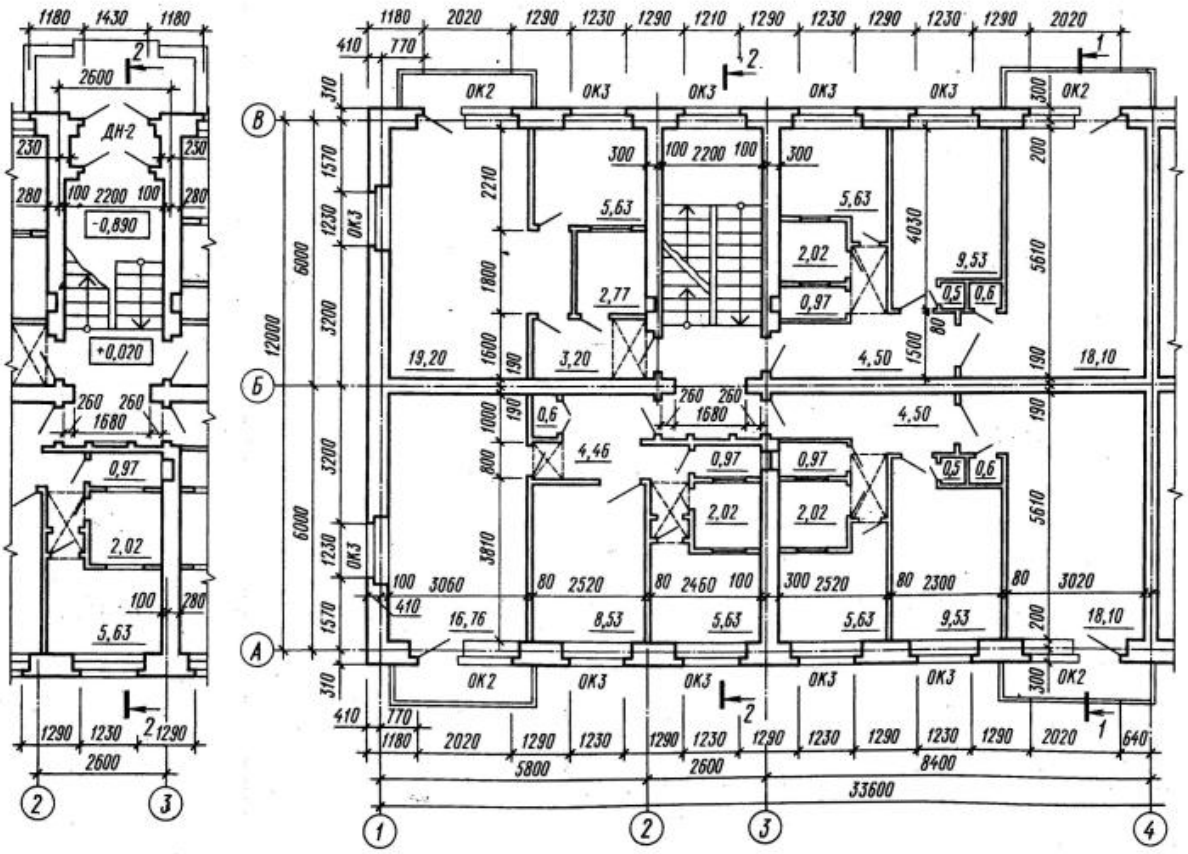


Рисунок 7.5 – План будинку

7.6 Креслення розрізу будинку

Розрізом називається зображення будинку, подумки розсіченого вертикальною площиною й спроектованого на площину проекції. Положення січної площини для даного розрізу показують на плані будинку.

Розріз будинку називається поперечним, коли січна площина перпендикулярна поздовжнім стінам будинку й поздовжнім, коли січна площина паралельна поздовжнім стінам. Це найменування умовно, тому що іноді важко виділити переважне (поздовжнє) вимірювання.

Іноді при виконанні розрізу застосовують не одну, а дві й більше січні паралельні площини. Такий розріз називається східчастим.

Напрямок січної площини позначають на плані першого поверху розімкнутою лінією зі стрілками на кінцях, що показують напрямок погляду.

Біля стрілок ставлять арабські цифри або прописні літери, а на самому розрізі роблять напис типу: ***Розріз 1–1***.

На розрізах видимі лінії контурів, що не попадають у площину перетину, виконують суцільною тонкою лінією (рис. 7.6).

На початковій стадії проектування для виявлення внутрішнього виду приміщень і розташування архітектурних елементів інтер'єра складають архітектурні (або контурні) розрізи будинку, на яких не показують конструкції фундаментів, перекриттів, кроків та інших елементів, але проставляють розміри й висотні позначки, необхідні для пророблення фасаду. Архітектурний розріз для будівництва будинку не використовується.

На розрізах координаційні вісі виносять вниз, маркірують і проставляють розміри між суміжними вісями.

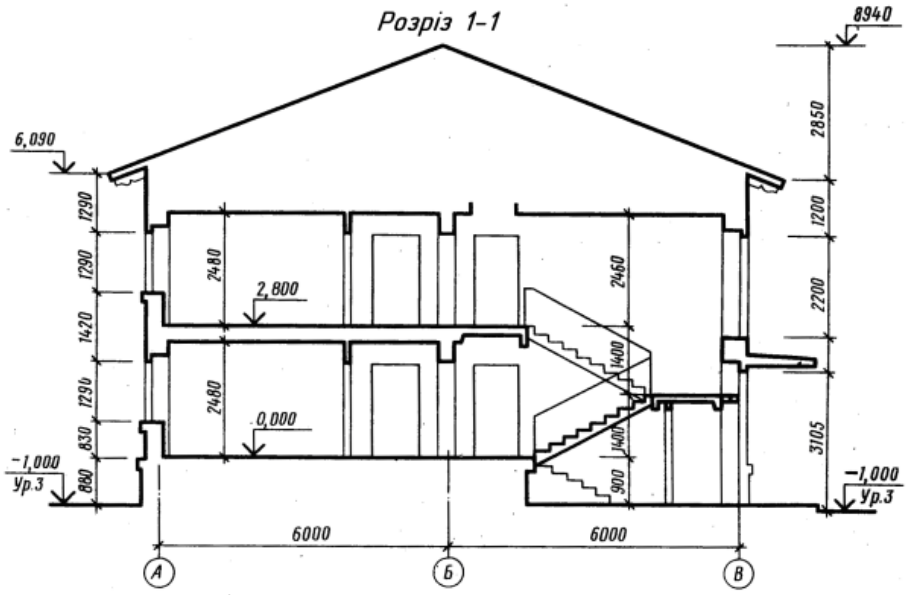


Рисунок 7.6 – Розріз будинку

Положення конструктивних елементів по висоті визначають за допомогою висотних позначок і розмірів, які проставляють на виносних лініях рівнів відповідних елементів.

Усередині розрізу наносять висоти поверхів, дверних і віконних прорізів, а також висотні позначки рівнів підлог і сходових площадок.

Із зовнішньої сторони розрізу на відстані 12–15 мм проводять розмірні ланцюжки, що визначають розміри віконних прорізів і простінків, цоколя, зовнішнього дверного прорізу. На відстані 10–15 мм від цього ланцюжка наносять висотні позначки рівня землі й верху стіни, полки повернені назовні.

За умовну нульову приймають позначку підлоги першого поверху. Також наносять позначки підлоги сходової клітки в тамбурі, вхідної площадки – на один східець вище тротуару. Рівень цих площадок підвищується в напрямку до сходового маршу для того, щоб дощова вода не попадала в сходову клітку.

Для монтажу сходових маршів і площадок служить розріз по сходах.

Січна площина проводиться по ближнім до спостерігача сходовим маршам.

7.7 Рекомендації до виконання фасаду будинку

Види будинків попереду, позаду, праворуч і ліворуч називаються фасадами. У найменуванні фасадів вказують крайні координаційні вісі. Фасади дають уявлення про зовнішній вигляд будинку, про його загальну форму, розміри, кількість поверхів, наявність балконів і лоджій.

На кресленнях фасадів показують розташування вікон, дверей, балконів, лиштв і т.п. У великоблочних і панельних будинках показують розрізування стін на блоки й панелі.

Розміри на фасадах не наносять, показують тільки крайні координаційні вісі. Праворуч або ліворуч проставляють позначки висот – рівня землі, цоколя, низу й верху прорізів, карниза, верху покрівлі. На фасадах маркують конструктивні елементи, які не були показані на кресленнях планів і розрізів.

Основою фасаду служить суцільна стовщена лінія 1,5...2s.

Приклад фасаду наведений на рисунку 7.7.

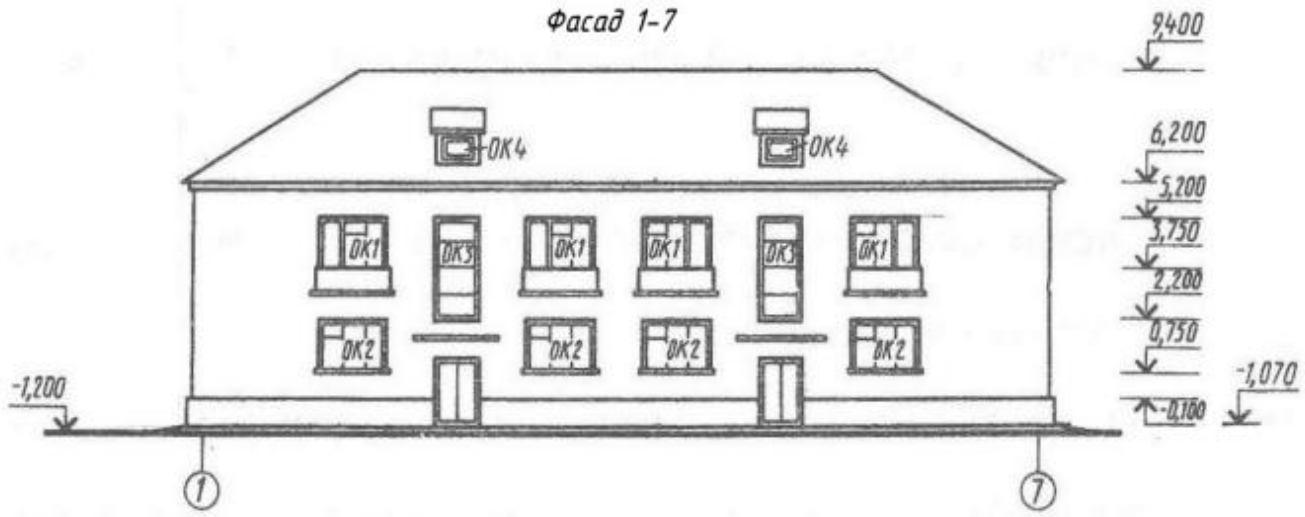


Рисунок 7.7 – Фасад будинку

7.8 Питання для самоперевірки

1. Що називають координаційними вісями будинку і як вони маркіруються на плані і розрізі?

2. В чому особливості ліній обведення на планах та розрізах будинків?

3. Що називається планом будинку, поверху?

4. По яких частинах будинку треба проводити січну площину при виконанні розрізу будинку?

5. Які розміри й позначки наносять на кресленнях розрізів та фасадів?

ЛІТЕРАТУРА

1. Михайленко В. Є. Інженерна графіка / В. Є. Михайленко, А. М. Пономарьов. – Київ : 1991 – 302 с.
2. Інженерна та комп'ютерна графіка. Підручник. В. Є. Михайленко та інші. – Київ : Вища школа, 2000 – 341 с.
3. Потемкин А. К. Инженерная и компьютерная графика / А. К. Потемкин. – Москва : ДМК Пресс, 2001 – 592 с.
4. ЄСКД (Держстандарти).

Навчальне видання

ЛЮБЧЕНКО Марія Анатоліївна

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
із курсу

«ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА»

(для студентів 1 курсу денної, заочної та прискореної форм навчання спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія)

Відповідальний за випуск *В. І. Лусь*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2016, поз. 32 Л

Підп. до друку 29.06.2017. Формат 60 х 84/16
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 4,1
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017 р.