

выхода ее из эксплуатации не только вследствие усталостных разрушений, но и через ухудшение условий отвода тепла.

Получено 29.08.2001

УДК 614.84:664

В.П.ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-матем. наук, И.А.КРИСА,

В.П.МАМОН, канд. техн. наук

Академия пожарной безопасности Украины, г.Харьков

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО МАССИВА СЫРЬЯ, ВЫЗВАННОЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ОЧАГОМ САМОНАГРЕВАНИЯ

В форме ряда Фурье - Бесселя построено решение задачи стационарной теплопроводности для цилиндра с внутренним термоисточником такой же формы. Проанализированы результаты расчетов.

Контроль температуры сырья при его хранении важен для обеспечения лучшей сохранности продукта и исключения чрезвычайных ситуаций, связанных с его самонагреванием и самовозгоранием. Поэтому разработке систем контроля и анализу температурных полей посвящено много научных работ [1, 2]. В дополнение к ним изучим распределение температуры в насыпи цилиндрической формы, вызванное цилиндрическим очагом самонагревания, коаксиальным с внешней поверхностью массива.

Функцию $T = T(r, z)$, описывающую осесимметричное распределение избыточной температуры по радиальной r и осевой z координатам, ищем путем решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{1}{\lambda} \begin{cases} q_0 & r, z \in D \\ 0 & r, z \notin D. \end{cases} \quad (1)$$

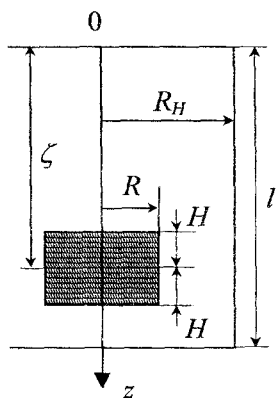
Здесь λ – коэффициент теплопроводности сырья; q_0 – плотность термоисточников в очаге, занимающем цилиндрическую область D .

Радиус и высоту очага обозначаем через R и $2H$, а положение его центра на вертикальной оси характеризуем расстоянием ζ (см. рисунок). Радиус и высоту массива сырья принимаем соответственно равными R_H и l .

Координатную ось z направляем вертикально вниз, поместив ее начало на верхнем торце насыпи.

В качестве граничных условий к уравнению (1) принимаем

$$T(R, z) = 0, T'_z(r, 0) = T'_z(r, l) = 0, \quad (2)$$



Расчетная схема

что означает идеальный теплообмен с внешней средой на боковых поверхностях и полное отсутствие его на торцах. Выражения (2) аппроксимируют условия теплоотдачи, которые возникают при хранении насыпи на открытом воздухе (стога сена, соломы и др.), защищенной сверху и снизу пленкой от попадания влаги при атмосферных осадках.

Решение поставленной краевой задачи ищем в форме двойного ряда

$$T(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk} J_0(\gamma_m r) \cos(\mu_k z), \quad (3)$$

где a_{mk} – неизвестные коэффициенты;

$\mu_k = k\pi l^{-1}$; $\gamma_m = S_m R_H^{-1}$; $J_0(t)$ – функция Бесселя первого рода нулевого индекса; S_m – множество положительных корней трансцендентного уравнения $J_0(S) = 0$.

Подставив разложение (3) в уравнение (1), находим коэффициенты a_{mk} , а затем и само решение. В итоге получаем

$$T(r, z) = \frac{8q_0}{\lambda R_H^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_m r)}{J_1^2(S_m)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_{mk}}{1 + \delta_{k0}} \frac{\cos(\mu_k \zeta) \cos(\mu_k z)}{\mu_k^2 + \gamma_m^2}. \quad (4)$$

Здесь δ_{k0} – символ Кронекера; $J_1(t)$ – функция Бесселя первого рода индекса единица;

$$F_{mk} = \int_0^R r J_0(\gamma_m r) dr \int_0^H \cos(\mu_k z) dz. \quad (5)$$

Интегралы (5) находим аналитически. Учитывая, что [3]

$$\int_0^H \cos(\mu_k z) dz = \frac{1}{\mu_k} \sin(\mu_k H); \quad \int_0^R r J_0(\gamma_m r) dr = \frac{R}{\gamma_m} J_1(\gamma_m R),$$

выражение (5) сводим к виду

$$T(r, z) = \frac{8q_0 R}{\lambda R_H^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(\gamma_m R) J_0(\gamma_m r)}{\gamma_m J_1^2(S_m)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\mu_k H)}{\mu_k (1 + \delta_{k0})} \times \frac{\cos(\mu_k \zeta) \cos(\mu_k z)}{\mu_k^2 + \gamma_m^2} \quad (6)$$

Построенное решение (6) целесообразно упростить в вычислительном отношении, просуммировав ряд по k . Это преобразование можно выполнить с помощью формулы [3]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin(kz)}{k^2 + s^2} = \frac{\pi \operatorname{sh}(s(\pi - z))}{2 \operatorname{sh}(s\pi)}, \quad (0 < z \leq \pi).$$

Учитывая ее, распределение избыточной температуры в цилиндрическом массиве представляем одинарным рядом Фурье - Бесселя:

$$T(r, z) = \frac{2q_0}{\lambda} R R_H \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(\gamma_m R) \cdot g_m(z)}{S_m^3 J_1^2(S_m)} \cdot J_0(\gamma_m r). \quad (7)$$

В нем функция-множитель $g_m(z)$ определяется выражениями

$$g_m(z) = \frac{2}{\operatorname{sh}(\gamma_m l)} \cdot \operatorname{ch}(\gamma_m(l - \zeta)) \operatorname{sh}(\gamma_m H) \operatorname{ch}(\gamma_m z)$$

при $0 \leq z \leq \zeta - H$;

$$g_m(z) = 1 - \frac{1}{\operatorname{sh}(\gamma_m l)} \cdot [\operatorname{sh}(\gamma_m(l - \zeta - H)) \operatorname{ch}(\gamma_m z) + \operatorname{ch}(\gamma_m(l - z)) \operatorname{sh}(\gamma_m(\zeta - H))] \quad \text{при } \zeta - H \leq z \leq \zeta + H; \quad (8)$$

$$g_m(z) = \frac{2}{\operatorname{sh}(\gamma_m l)} \cdot \operatorname{sh}(\gamma_m H) \operatorname{ch}(\gamma_m \zeta) \operatorname{ch}(\gamma_m(l - z)) \quad \text{при } \zeta + H \leq z \leq l.$$

Заслуживает внимания то, что при $\zeta = H = l/2$ функция $g_m(z) = 1$ и согласно решению (7), (8) распределение температуры в цилиндре не зависит от координаты z . В этом случае гнездовое самонагревание переходит в стержневое.

Проанализируем численные результаты. Выясним прежде всего скорость сходимости рядов (6), (7). Для расчета примем $R_H = 5$ м,

$$l = 2R_H.$$

Центр очага, у которого $R = H$, помещаем в центр массива ($\zeta = l/2$). Для различных отношений $R_H R^{-1}$ вычисляем безразмерные значения температуры $\bar{T}(0, \zeta) = 10^3 \lambda T(0, \zeta) \cdot (q_0 R_H^2)^{-1}$, удерживая в частичных суммах рядов (6), (7) по N членов. Результаты, полученные с помощью решения (6), записаны в числители, а с помощью (7), (8) – в знаменатели табл. 1.

Исследование показывает, что скорость сходимости рядов зависит от отношения размеров насыпи к размерам очага. При малых размерах очага по отношению к размерам массива скорость сходимости медленная и преимущества решения в форме (7), (8) в вычислительном отношении очевидны. Ведь для достижения той же точности расчета с помощью рядов (6) в них приходится вычислять на два порядка больше членов, чем в разложении (7).

Таблица 1 – Значения $\bar{T}(0, \zeta)$, вычисленные при разных $R_H R^{-1}$ и N

$R_H R^{-1}$	$N = 10$	$N = 50$	$N = 100$	$N = 200$	$N = 500$
5	<u>22,863</u>	<u>22,638</u>	<u>22,635</u>	<u>22,637</u>	<u>22,637</u>
	22,462	22,632	22,636	22,637	22,637
10	<u>5,908</u>	<u>6,072</u>	<u>6,069</u>	<u>6,068</u>	<u>6,068</u>
	6,206	6,073	6,071	6,068	6,068
20	<u>0,986</u>	<u>1,576</u>	<u>1,569</u>	<u>1,568</u>	<u>1,568</u>
	1,252	1,559	1,570	1,568	1,568
40	<u>0,133</u>	<u>0,404</u>	<u>0,401</u>	<u>0,399</u>	<u>0,398</u>
	0,197	0,411	0,396	0,399	0,398

Чтобы установить, при каких соотношениях размеров очага постоянной мощности, находящийся в центре массива, дает наибольший прирост температуры, проводили вычисления $\bar{T}(0, \zeta)$ при разных H . Постоянство мощности обеспечивалось тем, что радиус очага находился из условия $HR^2 = 1 \text{ м}^3 = \text{const}$. Результаты проведенных расчетов занесены в табл. 2.

Анализ этих результатов приводит к выводу, что в семействе равномоощных центральных очагов максимум прироста температуры приходится на термоисточник, у которого $H = 0,9 \text{ м}$, $R \approx 1,054 \text{ м}$. Диаметр

такого очага несколько превышает его высоту.

Таблица 2 – Значения $\bar{T}(0, \zeta)$ при разных H

$H, м$	$\bar{T}(0, \zeta)$	$H, м$	$\bar{T}(0, \zeta)$	$H, м$	$\bar{T}(0, \zeta)$
0,2	13,763	0,9	22,669	1,4	21,603
0,4	19,053	1,0	22,637	1,6	20,848
0,6	21,569	1,1	22,484	1,8	20,058
0,8	22,544	1,2	22,244	2,0	19,269

Иное соотношение размеров соответствует экстремальному приросту температуры, когда очаг находится у термоизолированного торца насыпи. Чтобы найти это соотношение, провели вычисления

$\bar{T}(0, \zeta)$ и $\bar{T}(0, l) = 10^3 \lambda T(0, l) \cdot (q_0 R_H^2)^{-1}$ для случая, когда очаг нижним торцом лежит на термоизолированной нижней грани насыпи ($\zeta = l - H$). Полученные результаты приведены в табл.3.

В придонном очаге максимум прироста температуры пришелся на размеры: $H = 0,6 м$, $R \approx 1,291 м$.

Таблица 3 – Значения $\bar{T}(0, \zeta)$ и $\bar{T}(0, l)$ в придонном очаге

$H, м$	$\bar{T}(0, \zeta)$	$\bar{T}(0, l)$	$H, м$	$\bar{T}(0, \zeta)$	$\bar{T}(0, l)$
0,2	25,067	25,724	0,9	30,026	32,373
0,4	31,130	32,889	1,0	29,179	31,424
0,5	31,870	34,007	1,1	28,305	30,433
0,6	31,881	34,232	1,2	27,431	29,437
0,7	31,467	33,899	1,4	25,743	27,511
0,8	30,813	33,232	1,6	24,174	25,729

Как видим, конфигурация очага постоянной мощности, при которой происходит наибольший прирост температуры, зависит от места расположения термоисточника в насыпи. Этот фактор также существенно влияет на величину температуры самонагрева. Для придонного очага (табл.3) она существенно больше, чем для центрального (табл.2). Это объясняется влиянием, которое оказывает термоизолированный торец насыпи. Температуры в точке $(0; \zeta)$ оказались меньше, чем в точке $(0; l)$, т.е. максимальные температуры самонагрева могут достигаться и не в центре очага.

1. Сергунов В.С. Дисанционный контроль температуры зерна при хранении. – М.: Агропром, 1987. – 173 с.

2. Вогман Л.П., Горшков В.И., Дегтярев А.Г. Пожарная безопасность элеваторов. – М.: Стройиздат, 1993. – 288 с.

3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.

Получено 21.08.2001