МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

А. І. Колосов, А. В. Якунін

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
у двох модулях
Модуль 2

Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Функції багатьох змінних. Ряди

(*для студентів денної форми навчання освітнього рівня бакалавр спеціальності 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології*)

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2017

Колосов А. І. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» : у 2-х модулях. Модуль 2 : Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диферен¬ціальні рівняння. Функції багатьох змінних. Ряди (для студентів денної форми навчання освітнього рівня бакалавр спеціальності 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології) / А. І. Колосов, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 227 с.

Колосов А. І. Модуль 2 : Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диферен¬ціальні рівняння. Функції багатьох змінних. Ряди / А. І. Колосов, А. В. Якунін. – 2017. – 227 с.

Автори : д-р фіз.-мат. наук, проф. А. І. Колосов,
канд. техн. наук, доц. А. В. Якунін

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доц. М. П. Данилевський

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 9 від 28.04.2017 р.

З М І С Т

Передмова 6

Змістовий модуль 1 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ 7

1.1 Невизначений інтеграл 7

1.1.1 Первісна функція та невизначений інтеграл. Геометричний зміст невизначеного інтеграла 7

1.1.2 Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів. Безпосереднє інтегрування 9

1.1.3 Методи інтегрування: заміна змінної та інтегрування частинами 14

1.1.4 Інтегрування раціональних дробів 19

1.1.5 Інтегрування тригонометричних виразів 32

1.1.6 Інтегрування деяких типів ірраціональностей. Тригонометричні підстановки 37

1.1.7 Інтеграли, що «не беруться» 39

1.2 Визначений інтеграл 40

1.2.1 Інтегральна сума та її геометричний зміст. Поняття визначеного інтеграла. Умови його існування. Формула Ньютона – Лейбниця 40

1.2.2 Властивості визначеного інтеграла. Теорема про середнє значення 44

1.2.3 Заміна змінної у визначеному інтегралі 47

1.2.4 Інтегрування частинами у визначеному інтегралі . 49

1.3 Невласні інтеграли першого та другого роду 51

1.4 Геометричні застосування визначеного інтеграла 57

1.4.1 Обчислення площі плоскої фігури 57

1.4.2 Обчислення довжини дуги кривої 64

1.4.3 Обчислення об’єму тіла обертання 66

1.5 Диференціальні рівняння 69

1.5.1 Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь 69

1.5.2 Поняття про диференціальне рівняння. Загальний і частинний розв’язки та їх геометричний зміст 71

1.5.3 Початкові та крайові умови. Задача Коші та крайова задача 74

1.5.4 Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними 76

1.5.5 Однорідні рівняння першого порядку.
Лінійні рівняння першого порядку 80
1.5.6 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку . 88
1.5.7 Структура загального розв’язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку. Характеристичне рівняння 89
1.5.8 Структура загального розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку. Принцип суперпозиції 96
1.5.9 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною спеціального вигляду. Метод невизначених коефіцієнтів 98
1.5.10 Системи двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами 108
1.6 Контрольні запитання 114

Змістовий модуль 2 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. РЯДИ 117
2.1 Функції багатьох змінних. Диференціювання функцій багатьох змінних 117
2.1.1 Поняття функції багатьох змінних. Область визначення 117
2.1.2 Геометричне зображення функції двох змінних. Лінії та поверхні рівня 121
2.1.3 Частинні прирости. Повний приріст. Границя. Неперервність. Точки розриву 125
2.1.4 Частинні похідні та їх обчислення. Геометричний зміст частинних похідних 128
2.1.5 Частинні та повний диференціали 131
2.1.6 Складені функції та їх диференціювання. Неявні функції та їх диференціювання. Частинні похідні вищих порядків 136
2.1.7 Дотична площина і нормаль до поверхні. Геометричний зміст повного диференціала 142
2.1.8 Похідна за напрямом і градієнт 146
2.2 Екстремум функції багатьох змінних 152
2.2.1 Екстремум функції багатьох змінних. Необхідні умови екстремуму. Стаціонарні точки 152
2.2.2 Достатні умови екстремуму 156

2.2.3 Знаходження найменшого та найбільшого значень функції в замкненій області 158
2.3 Числові ряди 163
2.3.1 Числові ряди. Основні поняття. Необхідна ознака збіжності 163
2.3.2 Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів 167
2.3.3 Знакозмінні ряди. Знакопочергові ряди. Ознака Лейбниця. Абсолютна й умовна збіжність 179
2.4 Степеневі та тригонометричні ряди 184
2.4.1 Функціональні ряди. Область збіжності функціонального ряду. Рівномірна збіжність 184
2.4.2 Степеневі ряди. Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду. Область збіжності. Основні властивості степеневих рядів 187
2.4.3 Ряди Тейлора і Маклорена. Розкладання функцій у степеневі ряди 193
2.4.4 Застосування степеневих рядів до наближених обчислень 204
2.4.5 Тригонометричні ряди. Ортогональність функцій 210
2.4.6 Розкладання періодичних функцій у тригонометричний ряд Фур'є. Умови збіжності ряду Фур'є 213
2.4.7 Розкладання в ряд Фур'є непарної та парної функцій 218
2.5 Контрольні запитання 222

Список джерел 225

Передмова

У конспекті лекцій викладено розділи, що відповідають другому семестру курсу вищої математики за діючою програмою для студентів підготовки бакалавра спеціальності 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології. Головна увага приділяється розкриттю сутності понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу з об'єднуючою прикладною спрямованістю. Теоретичні відомості подаються чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. Частина викладеного матеріалу розрахована на самостійне опрацювання. До всіх розділів додаються контрольні запитання.

Основою даного посібника є цикл лекцій з вищої математики, що читаються на факультеті менеджменту Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Конспект лекцій також може бути використаний для студентів спеціальності підготовки бакалавра 122 – Комп'ютерні науки та інформаційні технології.

Змістовий модуль 1 ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1.1 Невизначений інтеграл

1.1.1 Первісна функція та невизначений інтеграл. Геометричний зміст невизначеного інтеграла

Основна задача диференціального числення – знаходження похідної $f'(x)$ відомої функції $f(x)$. Механічне тлумачення: за відомим законом руху матеріальної точки $s(x)$ диференціюванням знайти її швидкість $v(x)=s'(x)$.

Основною для інтегрального числення є обернена задача – знаходження функції $F(x)$ за відомою її похідною $F'(x)=f(x)$. У механічній інтерпретації: якщо відома швидкість $v(x)=s'(x)$ матеріальної точки, то інтегруванням можна знайти закон її руху $s(x)$.

Нехай X – деякий проміжок на множині дійсних чисел R. Тобто X – це множина вигляду $[a;b]$, $[a;b)$, $(a;b]$ або $(a;b)$, причому цей проміжок може бути скінченним чи нескінченним.

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$ на X, якщо в усіх точках цього проміжку виконується рівність

$\boxed{F'(x)=f(x)}$ або, що те саме, $\boxed{dF(x)=f(x)dx}$.

Іншими словами, *функція* $f(x)$ *– похідна своєї первісної* $F(x)$.

Приклад 1. Знайти первісну для даної функції:

а) $f(x)=x^3$; б) $f(x)=\cos 3x$; в) $f(x)=1/x$.

□ а) Оскільки $(x^4)'=4x^3$, то з означення первісної випливає, що функція $F(x)=x^4/4$ є первісна для $f(x)=x^3$: $(x^4/4)'=x^3$. Первісною є також $F(x)=x^4/4+C$, де C – довільна стала, оскільки додавання константи не змінює значення похідної. При цьому $X=(-\infty;+\infty)$.

б) Оскільки $(\sin 3x)'=3\cos 3x$, то для $f(x)=\cos 3x$ первісною є функція $F(x)=(1/3)\sin 3x + C$, $X=(-\infty;+\infty)$.

в) Оскільки $(\ln x)'=1/x$, то первісною для функції $f(x)=1/x$ служить функція $F(x)=\ln x + C$, $X=(0;+\infty)$, а також $F(x)=\ln|x|+C$. $X=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. ■

Теорема (про загальний вигляд усіх первісних). Нехай $F(x)$ – *деяка первісна функції* $f(x)$ *на проміжку* X. *Тоді функція* $F(x)+C$, *де* C – *довільна стала, також буде первісною функції* $f(x)$. *І навпаки, будь-яка первісна функції* $f(x)$ *на проміжку* X *може бути подана у вигляді* $F(x)+C$.

□ Доведення першої частини теореми випливає з властивостей похідної та означення первісної:

$$\left(F(x)+C\right)' = F'(x)+C' = f(x).$$

Для доведення другої частини припустимо, що $\Phi(x)$ – довільна первісна функції $f(x)$. Знайдемо похідну різниці $\Phi(x)-F(x)=\varphi(x)$:

$$\varphi'(x)=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)\equiv 0, \quad x\in X.$$

З одержаної тотожності випливає, що $\varphi(x)$ є сталою, $\varphi(x)=C$. Тоді $\Phi(x)-F(x)=C$, звідки $\Phi(x)=F(x)+C$. ■

Множину всіх первісних функції $f(x)$ на проміжку X називають ***невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ і позначають символом $\int f(x)\,dx$.

При цьому $f(x)$ називають ***підінтегральною функцією***, $f(x)\,dx$ – ***підінтегральним виразом***, $\int$ – ***знаком інтеграла***, x – ***змінною інтегрування***.

Якщо функція $F(x)$ є деякою первісною для $f(x)$, тоді

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+C}, \quad \text{де } C \text{ – довільна стала.}$$

Операція знаходження невизначеного інтеграла (множини всіх первісних функцій для $f(x)$) називається ***інтегруванням***.

Інтегрування – це обернена операція до диференціювання.

Тому інколи первісну називають ***антипохідною***.

Зауваження. При інтегруванні різними способами однієї й тієї ж функції результати можуть відрізнятися за своїм зовнішнім виглядом.

Геометричний зміст. Первісна функції $f(x)$ є лінією $y = F(x)$, у кожній точці якої кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює відповідному значенню функції $f(x)$. Невизначений інтеграл $\int f(x)\,dx$ – це сім'я таких «паралельних» ліній, що задається рівнянням $y = F(x) + C$ (рис. 1.1).

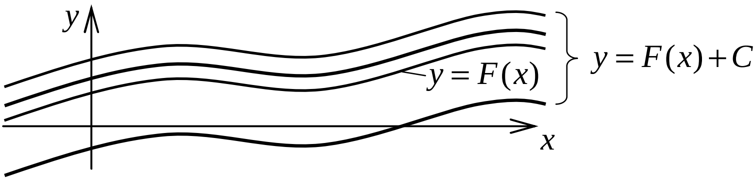

Рисунок 1.1

1.1.2 Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів. Безпосереднє інтегрування

Невизначений інтеграл має наступні властивості:

1. *Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції*:

$$\boxed{(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = f(x)}.$$

2. *Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу*:

$$\boxed{d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx}.$$

3. *Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала*:

$$\boxed{\int dF(x) = F(x) + C}.$$

Ці три властивості випливають з означення невизначеного інтеграла. Наступні дві співпадають з відповідними властивостями похідної.

4. *Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної функції окремо*:

$$\boxed{\int\left(f(x)+g(x)-h(x)\right)dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx-\int h(x)\,dx}.$$

5. *Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити з-під знака інтеграла*:

$$\boxed{\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx,\quad a=const\neq 0}.$$

6. *Якщо* $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ і $u=\varphi(x)$ – *будь-яка неперервно диференційована функція, то*

$$\boxed{\int f(u)\,du=F(u)+C}.$$

Тобто, *змінною інтегрування може бути як незалежна змінна, так і довільна неперервно диференційована функція іншої змінної*.

□ Доведемо цю властивість. Розглянемо $\int f(u)\,du$, в якому $u=\varphi(x)$. Тоді $du=\varphi'(x)\,dx$. Нехай для підінтегральної функції первісною є $F(u)=F\left(\varphi(x)\right)$. Знайдемо її похідну:

$$F'\left(\varphi(x)\right)=F'(u)\,\varphi'(x)=f(u)\,\varphi'(x)=f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x).$$

Тоді за третьою властивістю

$$\int dF\left(\varphi(x)\right)=\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx=F\left(\varphi(x)\right)+C$$

або $\int f(u)\,du=F(u)+C$. ■

Зауваження 1. Згідно з властивостями 1 і 2 *правильність виконання операції інтегрування перевіряється диференціюванням*.

Зауваження 2. Властивості 4 і 5 виражають лінійність операції інтегрування.

Зауваження 3. Властивість 6 виражає інваріантність формул інтегрування: *будь-яка формула залишається справедливою, якщо змінну інтегрування розглядати як довільну неперервно диференційовану функцію*.

На основі таблиці похідних (диференціалів) елементарних функцій можна скласти таблицю невизначених інтегралів:

Таблиця 1.1 – Стандартні невизначені інтеграли

Основні невизначені інтеграли			
1	2	3	4
1	$\int 0\,du = C$	5	$\int \sin u\ du = -\cos u + C$
2	$\int u^{\alpha}\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$	6	$\int \cos u\ du = \sin u + C$
2а	$\int du = u + C$	7	$\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\ u + C$
2б	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	8	$\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\ ctg\ u + C$
2в	$\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$	9	$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$ $(a > 0)$
3	$\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	10	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + b}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + b}\right\rvert + C$ $(b \neq 0)$
4	$\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$ $(a > 0;\ \ a \neq 1)$	11	$\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\ arctg\dfrac{u}{a} + C$ $(a \neq 0)$
4а	$\int e^u\,du = e^u + C$	12	$\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$ $(a > 0)$

Додаткові невизначені інтеграли			
1	2	3	4
1	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\| tg\frac{u}{2}\right\| + C$	2	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\| tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
3	$\int tg\, u\; du = -\ln\left\|\cos u\right\| + C$	4	$\int ctg\, u\; du = \ln\left\|\sin u\right\| + C$
5	$\int sh u\; du = ch u + C$	6	$\int ch u\; du = sh u + C$
7	$\int \frac{du}{ch^2 u} = th\, u + C$	8	$\int \frac{du}{sh^2 u} = -\, cth\, u + C$
9	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm$ $\pm\frac{1}{2}a^2\ \ln\left\| u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$ $(a \neq 0)$	10	$\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{a}\sqrt{a^2 - u^2} +$ $+\ \frac{1}{2}a^2\ \arcsin\frac{u}{a}\ + C$ $(a > 0)$
11	$\int e^{au}\sin bu\; du = \left(-b e^{au}\cos bu +\right.$ $\left.+ a e^{au}\sin bu\right)/\left(a^2+b^2\right) + C$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$	12	$\int e^{au}\cos bu\; du = \left(a e^{au}\cos bu +\right.$ $\left.+ b e^{au}\sin bu\right)/\left(a^2+b^2\right) + C$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$

Безпосереднім інтегруванням називають обчислення невизначеного інтеграла зведенням його до табличного на основі властивостей лінійності й інваріантності з використанням *тотожних перетворень* підінтегральної функції та *підведення під знак диференціалу*.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int (2x^3 - 3e^x + 1)\,dx$; б) $\int tg^2 x\; dx$; в) $\int 2^{\sin x}\cos x\,dx$.

□ а) Використавши властивості 4 та 5, запишемо даний інтеграл у вигляді лінійної комбінації табличних інтегралів

$$\int (2x^3 - 3e^x + 1)\,dx = 2\int x^3 dx - 3\int e^x dx + \int dx$$

і з огляду на наведену вище таблицю отримаємо

$$2x^{3+1}/(3+1)-3e^{x}+x^{0+1}/(0+1)+C=x^{4}/2-3e^{x}+x+C\,.$$

б) Використавши властивості тригонометричних функцій та інтегралів, зробивши деякі елементарні перетворення, отримаємо

$$\int\left(\sin^2 x\big/\cos^2 x\right)dx=\int\left((1-\cos^2 x)\big/\cos^2 x\right)dx=$$

$$=\int\left(1/\cos^2 x-1\right)dx=\int dx/\cos^2 x-\int dx=tgx-x+C\,.$$

в) Використавши підведення під знак диференціала, отримаємо

$$\int 2^{\sin x}\cos x\,dx=\int 2^{\sin x}\,d(\sin x)=2^{\sin x}\big/\ln 2+C\,.\quad\blacksquare$$

Приклад 2. Знайти інтеграли і результат перевірити диференціюванням:

$$\text{а)}\int\left(3x^3-1/x\right)^2 dx\,;\qquad\qquad \text{б)}\int 3^{2x+1}5^{x}\,dx\,.$$

$\square$ а) $\int(3x^3-1/x)^2\,dx=\int(9x^6-6x^2+1/x^2)\,dx=9\int x^6\,dx-$

$$-6\int x^2\,dx+\int(1/x^2)\,dx=9x^7\big/7-2x^3-1/x+C\,;$$

$$((9/7)x^7-2x^3-1/x+C)'=(9/7)\cdot 7x^6-2\cdot 3x^2+$$

$$+1/x^2+0=(3x^3-1/x)^2\,;$$

б) $\int 3^{2x+1}5^{x}\,dx=3\int(3^2\cdot 5)^{x}\,dx=3\int 45^{x}\,dx=3\cdot 45^{x}\big/\ln 45+C\,;$

$$((3/\ln 45)\cdot 45^{x}+C)'=(3/\ln 45)\cdot 45^{x}\ln 45+0=3^{2x+1}5^{x}\,.\quad\blacksquare$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int\frac{3\sqrt{x^3}-\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x^2}+1}{x}\,dx$. Виділити первісну $y=F(x)$, графік якої проходить через точку $M_0(x_0\,;y_0)$, де $x_0=1$ і $y_0=-10$. Обчислити значення $F(x_1)$ отриманої первісної в точці $x_1=64$.

$$\int\frac{3\sqrt{x^3}-\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x^2}+1}{x}\,dx=\int\left(3x^{1/2}-\frac{1}{\sqrt{x}}-4x^{-1/3}+\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$= 3\int x^{1/2}dx - \int\frac{dx}{\sqrt{x}} - 4\int x^{-1/3}dx + \int\frac{dx}{x} = 3\cdot x^{3/2}\big/(3/2) - 2\sqrt{x} -$$

$$-4\cdot x^{2/3}\big/(2/3) + \ln|x| + C = 2x^{3/2} - 2\sqrt{x} - 6x^{2/3} + \ln|x| + C.$$

З умови $F(x_0) = y_0$ знайдемо відповідне значення довільної сталої та шукану первісну:

$$F(1) = -10:\ \ 2\cdot 1^{3/2} - 2\sqrt{1} - 6\cdot 1^{2/3} + \ln|1| + C = -10;$$

$$C = -4;\ \ F(x) = 2x^{3/2} - 2\sqrt{x} - 6x^{2/3} + \ln|x| - 4$$

Обчислимо значення первісної в указаній точці $x_1 = 64$:

$$F(64) = 2\cdot 64^{3/2} - 2\sqrt{64} - 6\cdot 64^{2/3} + \ln|64| - 4 = 908 + \ln 64.\ \blacksquare$$

1.1.3 Методи інтегрування: заміна змінної та інтегрування частинами

Метод заміни змінної (***підстановки***), що ґрунтується на властивості інваріантності, є основним при інтегруванні. Зокрема, підведення під знак диференціала можна розглядати як неявне застосування цього методу.

Нехай треба обчислити інтеграл $\int f(x)\,dx$, але безпосередньо підібрати первісну не можна, хоча відомо, що вона існує.

Заміну змінної можна здійснити двома способами.

Перший спосіб. Зробимо заміну змінної у підінтегральному виразі, поклавши $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна функція з неперервною похідною, яка має обернену функцію $t = \varphi^{-1}(x)$. Тоді

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int g(t)\,dt =}$$

$$\boxed{= G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C}.$$

Після інтегрування у правій частині рівності замість t підставлено його вираз через стару змінну x.

Зауваження 1. Функція $\varphi(t)$ обирається таким чином, щоб отриманий інтеграл $\int g(t)\,dt$ був простішим, зокрема, мав табличний вигляд або його можна було звести до такого вигляду за допомогою елементарних перетворень. Далі будуть наведені стандартні підстановки $x=\varphi(t)$ для деяких класів інтегралів.

Зауваження 2. Заміна змінної може застосовуватися повторно.

Другий спосіб. Запишемо інтеграл $\int f(x)\,dx$ у вигляді $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$, тобто виділимо диференціал деякої функції $\varphi(x)$, і застосовуючи підстановку $u=\varphi(x)$, перейдемо в інтегралі $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ до нової змінної:

$$\boxed{\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\int g(u)\,du}.$$

Після цього знайдемо одержаний інтеграл і повернемося до старої змінної x, поклавши $u=\varphi(x)$:

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\int g(u)\,du=G(u)+C=G(\varphi(x))+C.$$

Зауваження 3. При другому способі за нову змінну вибирають функцію, похідна (диференціал) якої у вигляді множника, по суті, вже міститься у підінтегральному виразі.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int \sin(x^3+2)x^2dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{arctg\,x}}{1+x^2}dx$.

□ а) Зробимо підстановку $u=x^3+2$. Тоді $du=3x^2dx$, $x^2dx=(1/3)\,du$ і, отже,

$$\int \sin(x^3+2)\,x^2dx=(1/3)\int \sin u\,du=(-1/3)\cos u+C=$$

$$=(-1/3)\cos(x^3+2)+C.$$

б) Зробимо підстановку $u=arctg\,x$. Тоді $dt=du/(1+x^2)$ і, отже,

$$\int \frac{\sqrt[3]{arctg\,x}}{1+x^2}dx=\int \sqrt[3]{u}\,du=\int u^{1/3}du=(3/4)u^{4/3}+C=$$

$$=(3/4)arctg^{4/3}x+C. \quad ■$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int f(ax+b)dx$, $a \neq 0$, якщо відомо, що $\int f(x)dx = F(x)$.

□ Застосуємо лінійну підстановку $u = ax+b$. Для цієї підстановки $du = a\,dx$.

$$\int f(ax+b)dx = (1/a)\int f(ax+b)adx = (1/a)\int f(u)du =$$

$$= (1/a)F(u) + C.$$

Повертаючись до початкової змінної, маємо

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx = (1/a)F(ax+b)+C}. \blacksquare$$

Висновок 1. Оскільки у наведеному прикладі розглядалася довільна функція $f(x)$, отриманий результат можна застосовувати як одну з властивостей невизначеного інтеграла.

Приклад 3. Знайти інтеграл

$$\int \left(1/\cos^2 6x + (2-9x)^{10} + \sin(x-6)\right) dx.$$

$$\square \int \left(1/\cos^2 6x + (2-9x)^{10} + \sin(x-6)\right) dx =$$

$$= \int dx/\cos^2 6x + \int (2-9x)^{10} dx + \int \sin(x-6)\,dx =$$

$$= (1/6)tg\,6x - (1/99)(2-9x)^{11} - \cos(x-6) + C. \quad \blacksquare$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$.

$$\square \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{c} u = f(x) \\ du = f'(x)\,dx \end{array} \right| = \int \frac{du}{u} =$$

$$= \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C. \quad \blacksquare$$

Висновок 2. Інтеграл дробу, в якому чисельник є похідною знаменника, дорівнює сумі натурального логарифма модуля знаменника і довільної сталої:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C}$$

Метод інтегрування частинами, що ґрунтується на правилі диференціювання добутку двох функцій, відіграє допоміжну роль і має специфічні сфери застосування.

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – дві неперервні функції, які мають неперервні похідні. Візьмемо диференціал добутку цих функцій

$$d(uv) = v\,du + u\,dv,$$

а тепер проінтегруємо

$$\int d(uv) = \int v\,du + \int u\,dv, \text{ але } \int d(uv) = uv + C.$$

Маємо ***формулу інтегрування частинами***

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}.$$

Зауваження 4. Застосовувати цей метод доречно, коли інтеграл праворуч простіший, ніж той, що ліворуч, або йому подібний. Як правило, за u вибирають функцію, що спрощується при диференціюванні. Функцію v знаходять у явному вигляді як одну з первісних $\int dv$ (звичайно, поклавши $C = 0$).

Типовими застосуваннями методу інтегрування частинами є випадки, коли підінтегральна функція містить добуток раціональних і трансцендентних функцій, а при цьому інші способи не прийнятні. Наведемо відповідні рекомендації щодо вибору u.

Якщо підінтегральна функція має вигляд:

а) $P_n(x)\cos bx$, $P_n(x)\sin bx$, $P_n(x)\,e^{ax}$, $P_n(x)\,ch\,bx$, $P_n(x)\,sh\,bx$, то за u слід взяти многочлен $P_n(x)$;

б) $P_n(x)\ln x$, $P_n(x)\arcsin bx$, $P_n(x)\arccos bx$, $P_n(x)\,arctg\,bx$, $P_n(x)\,arcctg\,bx$, $P_n(x)\,arsh\,bx$, $P_n(x)\,arch\,bx$, $P_n(x)\,arth\,bx$, $P_n(x)\,arcth\,bx$, то за u слід взяти відповідно логарифмічну $\ln x$, обернену тригонометричну $\arcsin bx$, $\arccos bx$, $arctg\,bx$, $arcctg\,bx$ чи обернену гіперболічну $arsh\,bx$, $arch\,bx$, $arth\,bx$, $arcth\,bx$ функцію;

в) $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$, $\int \cos\ln x\,dx$, $\int \sin\ln x\,dx$, то за u в перших двох інтегралах можна взяти будь-яку з двох функцій: показникову чи тригонометричну, а в останніх – відповідну тригонометричну функцію. Після двократного інтегрування частинами одержуємо лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Знаходимо інтеграл як розв'язок цього рівняння.

Приклад 5. Знайти інтеграли:

а) $\int x5^x dx$; б) $\int \left(x^2+4\right)\cos x\,dx$; в) $\int \ln(x+3)\,dx$; г) $\int e^x \sin 7x\,dx$.

□ а) Нехай $x=u$, $5^x dx = dv$. Тоді $v=\int 5^x dx = 5^x/\ln 5$. Інтегруємо частинами:

$$\int x5^x dx = x5^x/\ln 5-(1/\ln 5)\int 5^x dx = x5^x/\ln 5+5^x/\ln^2 5+C.$$

б) Припустимо, що $u=x^2+4$; $dv=\cos x\,dx$. Тоді $du=2x\,dx$, $v=\sin x$. Інтегруємо частинами:

$$\int \left(x^2+4\right)\cos x\,dx = \left(x^2+4\right)\sin x - 2\int x\sin x\,dx.$$

Застосувавши до інтегралу, який стоїть праворуч, ще раз інтегрування частинами $u=x$, $dv=\sin x\,dx$, $du=dx$, $v=-\cos x$, остаточно дістанемо:

$$\int \left(x^2+4\right)\cos x\,dx = \left(x^2+4\right)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

в) Приймемо, що $u=\ln(x+3)$, $dv=dx$. Тоді $du=dx/(x+3)$, $v=x$. Маємо:

$$\int \ln(x+3)\,dx = x\ln(x+3)-\int x\,dx/(x+3) = x\ln(x+3)-$$

$$-\int \frac{x+3-3}{x+3}dx = x\ln(x+3)-\int dx+3\int \frac{dx}{x+3} = x\ln(x+3)-$$

$$-x+3\ln(x+3)+C.$$

г) Покладемо $u=\sin 7x$, $dv=e^x dx$. Спираючись на це, знаходимо $du=7\cos 7x\,dx$ та $v=e^x$. Використавши формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$I=\int e^x \sin 7x\,dx = e^x\sin 7x-\int e^x 7\cos 7x dx =$$

$$= e^x \sin 7x - 7\int e^x \cos 7x\,dx\ .$$

До інтегралу, що залишився, знову застосовуємо інтегрування частинами, причому $u = \cos 7x$, $dv = e^x dx$; $du = -7\sin 7x\,dx$, $v = e^x$. Маємо:

$$I = e^x \sin 7x - 7\left(e^x \cos 7x - \int e^x (-7\sin 7x)\,dx\right) =$$

$$= e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49\int e^x \sin 7x\,dx.$$

Далі прирівнюємо початковий вираз до останнього отриманого. Одержану рівність можна розглядати як рівняння, в якому невідомим є шуканий інтеграл I. Розв'язавши це рівняння, маємо:

$$I = e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49I;\ 50I = e^x \sin x - 7e^x \cos 7x;$$

$$I = \int e^x \sin 7x\,dx = (1/50)\left(e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x\right) + C. \quad \blacksquare$$

Зауваження 5. Наведені методи вичерпують відомі загальні способи інтегрування. Вони можуть застосовуватися разом у різній послідовності й багаторазово. Далі будуть розглянуті особливості їх використання для інтегрування основних класів функцій. Треба творчо підходити до конкретної задачі, враховуючи її специфіку і допускаючи застосування нетипових способів інтегрування.

1.1.4 Інтегрування раціональних дробів

Розкладання многочлена з дійсними коефіцієнтами на прості дійсні множники.

Розглянемо многочлен $P_n(x)$ ***стандартного вигляду*** з дійсними коефіцієнтами

$$\boxed{P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n};\ a_i \in R;\ i = \overline{0,n}.$$

На множині комплексних чисел C будь-який многочлен $P_n(x)$ n-го степеня за основною теоремою алгебри має точно n коренів, а тому єдиним способом (з точністю до порядку співмножників) розкладається у добуток

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_m)^{k_m},$$

де a_0 – старший коефіцієнт; $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – різні (дійсні чи комплексні) корені; $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – відповідні кратності цих коренів, причому $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

При інтегруванні дійсних виразів бажано не виходити за межі множини дійсних чисел R. Розглянемо особливості розкладання на множники при цьому обмеженні.

Якщо комплексне число $a = \alpha + \beta i$ є коренем многочлена $P_n(x)$ з дійсними коефіцієнтами, то й комплексно-спряжене з ним $\overline{a} = \alpha + \beta i$ також буде коренем даного многочлена. Добуток $(x - a)(x - \overline{a})$, що відповідає парі комплексно-спряжених коренів, породжує ***простий*** (***незвідний*** у множині дійсних чисел) квадратний тричлен $x^2 + px + q$ з дійсними коефіцієнтами $p, q \in R$ і від'ємним дискримінантом $D = p^2 - 4q < 0$.

Таким чином, *будь-який многочлен* $P_n(x)$ *з дійсними коефіцієнтами можна подати, і причому єдиним способом (з точністю до порядку), у вигляді добутку різних простих (лінійних і квадратичних) дійсних множників у відповідних степенях*:

$$\boxed{P_n(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_s)^{k_s} \times}$$

$$\boxed{\times (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2} \ldots (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t}},$$

де лінійні двочлени $x - a$ відповідають його різним дійсним кореням $x_1, x_2, \ldots, x_s$; квадратні тричлени $x^2 + px + q$ з від'ємним дискримінантом – різним парам спряжених комплексних коренів; $k_1, k_2, \ldots, k_s$ і $l_1, l_2, \ldots, l_t$ – кратності цих коренів, причому $k_1 + \ldots + k_s + 2(l_1 + \ldots + l_t) = n$.

Приклад 1. Розкласти многочлен $P(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 10x - 6$ на різні прості дійсні множники.

□ За теоремою Вієта добуток коренів многочлена такого типу дорівнює вільному члену. Тобто, $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = -6$. Перевіримо числа $\pm 1, \pm 2, \pm 3, , \pm 6$, які є дільниками вільного члена -6.

Нехай $x = -1$. Тоді

$$P(-1)=(-1)^5-(-1)^4-3\cdot(-1)^3-5\cdot(-1)^2-10\cdot(-1)-6=$$
$$=-1-1+3-5+10-6=0.$$ Отже, $x=-1$ – корінь.

Знизимо степінь, розділивши многочлен «кутом» на двочлен $x-(-1)=x+1$:

$$\begin{array}{l|l}
-\,x^5-x^4-3x^3-5x^2-10x-6 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5+x^4} & x^4-2x^3-x^2-4x-6 \\
\quad -\,-2x^4-3x^3-5x^2-10x-6 & \\
\quad \underline{-2x^4-2x^3} & \\
\qquad -\,-x^3-5x^2-10x-6 & \\
\qquad \underline{-x^3-x^2} & \\
\qquad\quad -\,-4x^2-10x-6 & \\
\qquad\quad \underline{-4x^2-4x} & \\
\qquad\qquad -\,-6x-6 & \\
\qquad\qquad \underline{-6x-6} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Отримаємо

$$P(x)=(x+1)S(x), \text{ де } S(x)=x^4-2x^3-x^2-4x-6.$$

Тепер треба знайти корені многочлена четвертого степеня. Нехай $x=-1$. Тоді $S(-1)=1+2-1+4-6=0$. Отже, $x=-1$ – корінь. Знизимо степінь, розділивши многочлен «кутом» на двочлен $x-(-1)=x+1$. (Виконайте ділення самостійно). Одержимо

$$S(x)=(x+1)T(x), \quad \text{де } T(x)=x^3-3x^2+2x-6.$$

Тепер треба знайти корені многочлена третього степеня. Нехай $x=3$. Тоді $T(3)=3^3-3\cdot 3^2+2\cdot 3-6=0$. Отже, $x=3$ – корінь. Знизимо степінь, розділивши многочлен «кутом» на двочлен $x-3$. (Виконайте ділення самостійно). Отримаємо

$$T(x)=(x-3)(x^2+2),$$

де неповний квадратний тричлен x^2+2 є простим, оскільки дійсних коренів не має.

Отже, $P(x)=(x+1)^2(x-3)(x^2+2)$. ■

Раціональні дроби.

Розглянемо два многочлена $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ степеня m і n відповідно:

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m;$$

$$Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n.$$

Раціональним дробом (***дробово-раціональною функцією***) називається відношення двох многочленів $P_m(x)/Q_n(x)$.

Якщо степінь m чисельника нижче степеня n знаменника, то дріб називається ***правильним***, якщо, навпаки, $m > n$ або $m = n$, то дріб – ***неправильний***.

Будь-який неправильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ *можна зобразити у вигляді суми многочлена і правильного дробу*

$$\boxed{P_m(x)/Q_n(x) = G_{m-n}(x) + R_k(x)/Q_n(x)},$$

причому цей розклад єдиний.

Тут $G_{m-n}(x)$ – многочлен, який називають ***цілою частиною*** раціонального дробу, а $R_k(x)/Q_n(x)$ – правильний дріб, тобто $k < n$. Многочлени $G_{m-n}(x)$ і $R_k(x)$ – відповідно частка й остача від ділення «кутом» $P_m(x)$ на $Q_n(x)$.

Приклад 2. Вилучити цілу частину неправильного дробу $P(x)/Q(x) = (x^4 - 3x^2 + 5x + 4)/((x+4)(x-2))$ і подати його у вигляді суми многочлена та правильного дробу.

□ Для вилучення цілої частини використаємо ділення «кутом» многочлена на многочлен, спочатку виконавши множення в знаменнику і записавши результат у стандартному вигляді в порядку спадання степенів: $Q(x) = (x+4)(x-2) = x^2 + 2x - 8$;

$$\begin{array}{r|l} \_\,x^4 - 3x^2 + 5x + 4 & \underline{x^2 + 2x - 8} \\ \underline{x^4 + 2x^3 - 8x^2} \quad & x^2 - 2x + 9 \\ \_\,-2x^3 + 5x^2 + 5x + 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{-2x^3-4x^2+16x} \\ \_9x^2-11x+4 \\ \underline{9x^2+18x-72} \\ -29x+76 \end{array}$$

Таким чином,

$$P(x)/Q(x)=x^2-2x+9+(-29x+76)/((x+4)(x-2)). \quad ■$$

Зауваження 1. Вилучення цілої частини неправильного раціонального дробу інколи можна зробити простіше, виконавши алгебраїчні перетворення чисельника.

Приклад 3. Вилучити цілу частину неправильного дробу $x^4/(x^2+1)$ і подати його у вигляді суми многочлена та правильного дробу.

□ Скористаємося алгебраїчними перетвореннями:

$$x^4/(x^2+1)=(x^4-1+1)/(x^2+1)=(x^2-1)(x^2+1)/(x^2+1)+$$

$$+1/(x^2+1)=x^2-1+1/(x^2+1). \quad ■$$

Найпростіші раціональні дроби. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.

Правильні раціональні дроби наступних чотирьох типів:

1) $\boxed{\dfrac{A}{x-a}}$; 2) $\boxed{\dfrac{A}{(x-a)^k},\ k\ge 2}$; 3) $\boxed{\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q},\ D=p^2-4q<0}$;

4) $\boxed{\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},\ k\ge 2,\ D=p^2-4q<0}$

називаються ***елементарними*** (***найпростішими***). Тут A, B, a, p, q – дійсні числа, $k\in N$. Підкреслимо, що квадратний тричлен x^2+px+q має тільки комплексні корені.

Елементарні дроби першого і другого типів легко інтегруються заміною змінної $t=x-a$ (пробобіть це самостійно):

1) $\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$;

2) $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}\,dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$, $k \geq 2$.

Розглянемо інтегрування найпростішого дробу третього типу:

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$.

Виділимо в квадратному тричлені повний квадрат

$$x^2+px+q = x^2+2x\cdot(p/2)+(p/2)^2+q-(p/2)^2 =$$

$$=(x+p/2)^2+a^2;\ a=\sqrt{q-p^2/4}>0.$$

Зробимо заміну $t = x + p/2$. Тоді $x = t - p/2$, $dx = dt$. Одержимо

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{A(t-p/2)+B}{t^2+a^2}dt = A\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} +$$

$$+(B-Ap/2)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = A\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + (B-Ap/2)\cdot\frac{1}{a}arctg\,\frac{t}{a}.$$

Далі використовуємо заміну $u = t^2 + a^2$. Тоді $du = 2tdt$, $tdt = (1/2)\,du$. Отримаємо

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = (1/2)\int \frac{du}{u} = (1/2)\ln|u| + C.$$

Повертаючись до старої змінної

$$t = x + p/2;\quad a = \sqrt{q-p^2/4};$$

$$u = t^2+a^2 = (x+p/2)^2+q-p^2/4 = x^2+px+q,$$

після спрощення остаточно маємо

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = (A/2)\ln|x^2+px+q| +$$

$$+\left((2B-Ap)\big/(4q-p^2)\right) arctg\left((2x+p)\Big/\sqrt{4q-p^2}\right)+C\,.$$

Зауваження 2. Якщо в квадратному тричлені x^2+px+q дискримінант додатний $D>0$, то дріб $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ за означенням неелементарний і зводиться до двох дробів першого типу. Однак його можна інтегрувати й наведеним вище способом, де замість арктангенса з'явиться логарифм.

Зауваження 3. Одержані формули запам'ятовувати не потрібно. Краще безпосередньо застосовувати розглянуті підходи для інтегрування кожного конкретного елементарного дробу.

Зауваження 4. Інтегрування найпростішого дробу четвертого типу розглядати не будемо. Бажаючим вивчити це питання треба звернутися до більш ґрунтовних підручників.

Розкладання правильного раціонального дробу на найпростіші.

Кожний правильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ можна розкласти на суму скінченного числа найпростіших дробів вказаних чотирьох типів, причому цей розклад єдиний.

Розглянемо довільний правильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$, в якому знаменник $Q_n(x)$ – зведений многочлен (старший коефіцієнт $b_0=0$), розкладений на прості дійсні множники

$$Q_n(x)=(x-x_1)^{k_1}\ldots\,(x-x_s)^{k_s}\,(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}\,,$$

де $k_1+\ldots+k_s+2(l_1+\ldots+l_t)=n$.

Тоді правильний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ можна подати у вигляді

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_{11}}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{A_{12}}{(x-x_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{A_{1k_1}}{x-x_1}+\ldots+\frac{A_{s1}}{(x-x_s)^{k_s}}+$$

$$+\frac{A_{s2}}{(x-x_s)^{k_s-1}}+\ldots+\frac{A_{sk_s}}{x-x_s}+\ldots+\frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+$$

$$+\frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}}+\ldots+\frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+$$

$$+\frac{B_{t1}x+C_{t1}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}}+\frac{B_{t2}x+C_{t2}}{(x^2+p_tx+q_t)^{l_t-1}}+\ldots+\frac{B_{tl_t}x+C_{tl_t}}{x^2+p_tx+q_t}.$$

Коефіцієнти A_{ij} $(i=\overline{1,s}\,;\ j=\overline{1,k_i})$ і B_{ij}, C_{ij} $(i=\overline{1,t}\,;\ j=\overline{1,l_t})$ визначаються після зведення правої частини до спільного знаменника і виділення тотожності многочленів у чисельниках праворуч і ліворуч (відкиданням однакових знаменників). Далі застосовуються наступні методи (окремо чи в комбінації):

– ***метод невизначених коефіцієнтів***: *прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях* x, *приходимо до системи лінійних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів* (два многочлена тотожно рівні, коли рівні коефіцієнти при подібних членах – однакових степенях x);

– ***метод окремих значень*** (***метод підстановки***): *надаючи змінній* x *в отриманій тотожності конкретні значення, одержуємо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів* (тотожні вирази приймають однакові значення при довільному допустимому значенні аргументу x).

Зауваження 5. Використовуючи метод окремих значень, не треба розкривати дужки в многочленах, а підставляти зручно різні дійсні корені знаменника $Q_n(x)$, що приводить до простих рівнянь. Отримана система повинна мати розмірність, що дорівнює числу шуканих коефіцієнтів.

Зауваження 6. Метод підстановки рекомендується вживати, коли всі корені знаменника дійсні й серед них немає кратних. У протилежному випадку краще поєднати цей метод з методом невизначених коефіцієнтів. Але треба вибирати незалежні рівняння, щоб система мала єдиний розв’язок.

Зауваження 7. Існують інші, менш поширені, методи знаходження невідомих коефіцієнтів. Допитливі можуть з ними познайомитися, звернувшись до спеціалізованої літератури.

Приклад 4. Правильний раціональний дріб $P(x)/Q(x)$ розкласти на суму найпростіших дробів, де

а) $P(x) = -2x^4 - x^3 - 6x^2 + 18x + 13$

і $Q(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 10x - 6$;

б) $P(x) = 7x - x^2 - 4$ і $Q(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$;

в) $P(x) = x^3 - 8$ і $Q(x) = x(x+4)(x^2 + 2x + 2)$.

□ а) Многочлен $Q(x)$ було розкладено на множники вище (див. Прикл.1): $Q(x) = (x+1)^2 (x-3)(x^2+2)$.

Шукане розкладання дробу матиме вигляд

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+2},$$

де числа A, B, C, D і E ще треба знайти. Зводячи праву частину до спільного знаменника (ним служить многочлен $Q(x)$), з умови рівності дробів дістаємо (відкидаючи однакові знаменники) тотожність многочленів:

$$A(x+1)^2(x^2+2) + B(x-3)(x^2+2) + C(x-3)(x+1)(x^2+2) +$$

$$+ (Dx+E)(x-3)(x+1)^2 = P(x).$$

Знайдемо невідомі A, B, C, D, E методом невизначених коефіцієнтів. Розкривши дужки і звівши подібні, прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях змінної x у лівій і правій частинах отриманої тотожності. Отримаємо і розв’яжемо (зробіть це самостійно, наприклад, методом Гауса) систему п'яти лінійних рівнянь з п'ятьма невідомими:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^4 & A + C + D = -2, \\ x^3 & 2A + B - 2C - D + E = -1, \\ x^2 & 3A - 3B - C - 5D - E = -6, \\ x^1 & 4A + 2B - 4C - 3D - 5E = 18, \\ x^0 & 2A - 6B - 6C - 3E = 13; \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l|} A = -1; \\ B = 1; \\ C = -2; \\ D = 1; \\ E = -3. \end{array}$$

Шуканий розклад має вигляд ·

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}+\frac{x-3}{x^2+2}.$$

б) Даний дріб розкладається на елементарні наступним чином: $P(x)/Q(x)=A/(x+1)+B/(x-2)+C/(x-3)$.

Зводячи праву частину до спільного знаменника, з умови рівності дробів дістаємо тотожність многочленів:

$$A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2)=P(x).$$

Щоб знайти невідомі коефіцієнти A, B і C, скористаємося методом окремих значень. Для отримання простої системи візьмемо ті значення x, що є коренями знаменника $Q(x)$, тобто $x=-1$, $x=2$ та $x=3$. Тоді

$$\left.\begin{array}{r|r} x=-1 & 12A=-12, \\ x=\ \ 2 & -3B=6, \\ x=\ \ 3 & 4C=8; \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{c} A=-1; \\ B=-2; \\ C=2. \end{array}$$

Шуканий розклад має вигляд

$$P(x)/Q(x)=-1/(x+1)-2/(x-2)+2/(x-3).$$

в) Многочлен $Q(x)$ уже розкладений на різні прості дійсні множники (переконайтеся самостійно, що квадратний тричлен x^2+2x+2 має від'ємний дискримінант). Шукане розкладання дробу на суму найпростіших матиме вигляд

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$

Зводячи праву частину до спільного знаменника, з умови рівності дробів маємо тотожність многочленів:

$$A(x+4)(x^2+2x+2)+Bx(x^2+2x+2)+$$
$$+(Cx+D)\,x(x+4)=P(x).$$

Оскільки знаменник $Q(x)$ має лише два різних дійсних кореня $x=0$ і $x=-4$, то для складання системи рівнянь відносно невідомих A, B, C і D використаємо комбінацію методів окремих значень і невизначених коефіцієнтів. Дістанемо і розв'яжемо систему чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими:

$$\begin{array}{r|c}
x=0 & 8A=-8, \\
x=-4 & -40B=-72, \\
x^3 & A+B+C=1, \\
x & 10A+2B+4D=0;
\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\quad
\begin{array}{c}
A=-1; \\
B=9/5 \\
C=1-A-B=1/5; \\
D=-(5A+B)/2=8/5.
\end{array}$$

Шуканий розклад має вигляд

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=-\frac{1}{x}+\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{x+4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{x+8}{x^2+2x+2}. \quad \blacksquare$$

Розгляд основних випадків інтегрування раціональних дробів.

Нехай треба обчислити інтеграл від раціонального дробу $\int P(x)dx/Q(x)$. Якщо дріб неправильний, то його подаємо у вигляді суми цілої частини і правильного раціонального дробу. Останній дріб розкладаємо на суму найпростіших дробів.

Приклад 5. Знайти інтеграл $I=\int\frac{2x^3-15x-45}{x^2-6x+13}dx$.

□ Оскільки дріб неправильний, то діленням «кутом» виділимо в ньому цілу частину (проробіть це самостійно), а потім проінтегруємо, використовуючи метод заміни змінної:

$$I=\int(2x-3)\,dx+\int(-44x-6)\,dx\big/(x^2-6x+13)=$$

$$=\left|x^2-6x+13=(x-3)^2+4;\ t=x-3;\ x=t+3;\ dx=dt\right|=x^2-$$

$$-3x+\int\frac{-44(t+3)-6}{t^2+4}dt=x^2-3x-44\int\frac{t\,dt}{t^2+4}-6\int\frac{dt}{t^2+4}=$$

$$=\left|u=t^2+4;\ du=2t\,dt;\ t\,dt=(1/2)\,du\right|=x^2-3x-44\times$$

$$\times\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}-6\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}=x^2-3x-22\ln|u|-3arctg\frac{t}{2}+C=$$

$$=\left|\,t=x-3;\ u=t^2+4=(x-3)^2+4=x^2-6x+13\right|=$$

$$= x^2 - 3x - 22\ln(x^2 - 6x + 13) - 3\,arctg\,\frac{x-3}{2} + C$$

$$= 3arctg\,(x+1) - \ln|x-2| + C\,. \;\blacksquare$$

З попереднього відомо, що структура розвинення на елементарні дроби визначається коренями знаменника $Q(x)$. Тут можливі такі випадки:

а) Корені знаменника дійсні й прості, тобто

$$Q(x) = (x-a)(x-b)\cdot\ldots\cdot(x-d)\,.$$

У цьому разі правильний дріб розкладається на найпростіші дроби тільки першого типу

$$P(x)/Q(x) = A/(x-a) + B/(x-b) + \ldots + D/(x-d)\,.$$

Тоді

$$\int\frac{P(x)\,dx}{Q(x)} = \int\frac{A\,dx}{x-a} + \int\frac{B\,dx}{x-b} + \ldots + \int\frac{D\,dx}{x-d} =$$

$$= A\ln|x-a| + B\ln|x-b| + \ldots + D\ln|x-d| + C\,.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $I = \int\frac{4x^2-13x+7}{(x^2-5x+6)(x+1)}dx$.

□ $I = \int\frac{4x^2-13x+7}{(x-2)(x-3)(x+1)}dx = \int\frac{A\,dx}{x-2} + \int\frac{B\,dx}{x-3} + \int\frac{C\,dx}{x+1}$.

Тут $4x^2 - 13x + 7 = A(x-3)(x+1) + B(x-2)(x+1) +$

$$+ C(x-2)(x-3)\,.$$

Використавши метод підстановки (пробобіть це самостійно), маємо: $A = 1;\; B = 1; C = 2$.

$$I = \int\frac{dx}{x-2} + \int\frac{dx}{x-3} + \int\frac{2dx}{x+1} =$$

$$= \ln|x-2| + \ln|x-3| + 2\ln|x+1| + C\,. \quad\blacksquare$$

б) Корені знаменника дійсні, але деякі з них кратні:

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha}\cdot(x-b)^{\beta}\ldots(x-d)^{\gamma}\,.$$

У цьому разі дріб розкладається на найпростіші дроби першого і другого типів.

Приклад 7. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x^3+4x^2+5x+8}{(x+2)^3(x-1)}dx$.

□ $I=\int\frac{A\,dx}{(x+2)^3}+\int\frac{B\,dx}{(x+2)^2}+\int\frac{C\,dx}{x+2}+\int\frac{D\,dx}{x-1}$.

Маємо тотожність $x^3+4x^2+5x+8=A(x-1)+$

$$+B(x+2)(x-1)+C(x+2)^2(x-1)+D(x-1)^3.$$

Застосувавши метод невизначених коефіцієнтів (проробіть це самостійно), отримаємо: $A=-2, B=-1, \ C=1/3, D=2/3$.

Тоді $I=\int\frac{-2\,dx}{(x+2)^3}+\int\frac{-1dx}{(x+2)^2}+\int\frac{(1/3)\,dx}{x+2}+\int\frac{(2/3)\,dx}{x-1}=$

$$=\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+C. \ ■$$

в) Корені знаменника – дійсні (можливо, кратні) і прості комплексно-спряжені:

$$Q(x)=(x^2+px+q)...(x^2+rx+s)(x-a)^{\alpha}...(x-c)^{\gamma}.$$

У цьому разі дріб $P(x)/Q(x)$ розкладається на найпростіші дроби першого, другого і третього типів.

Приклад 8. Знайти інтеграл $I=\int\frac{-x^2+x-8}{(x^2+2x+2)(x-2)}dx$.

□ $I=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+2x+2}+\int\frac{C\,dx}{x-2}$.

Тут $-x^2+x-8=(Ax+B)(x-2)+C(x^2+2x+2)$.

Використаємо комбінацію методу окремих значень і методу невизначених коефіцієнтів. Нехай $x=2$ (дійсний корінь), маємо $10C=-10$, $C=-1$; нехай $x=0$ (довільно взяте значення), тоді $-2B+2C=-8$; $B=4+C=3$. Прирівнявши коефіцієнти при x^2, маємо $A+C=-1$; $A=-1-C=0$. Отже,

$$I=\int\frac{3\,dx}{x^2+2x+2}-\int\frac{dx}{x-2}=3\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}-\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=3arctg\,(x+1)-\ln|x-2|+C\,.\ \blacksquare$$

Зауваження 8. Розглядати випадок, коли у знаменнику є кратні комплексні корені ми не будемо. Бажаючих поглибити свою математичну підготовку відсилаємо до більш ґрунтовних підручників.

Справедливе твердження: *інтеграл від будь-якої раціональної функції може бути визначений через елементарні функції у скінченному вигляді.*

1.1.5 Інтегрування тригонометричних виразів

Інтегралів від тригонометричних функцій може бути безліч. Більшість з них взагалі не обчислюються аналітично. Тому розглянемо деякі найголовніші типи таких функцій, що завжди інтегруються.

Домовимося, що запис $R(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ означає раціональну функцію вказаних аргументів.

Інтеграли вигляду:

$$\boxed{\int\cos ax\,\cos bx\;dx\,,\ \int\sin ax\,\cos bx\;dx\,,\int\sin ax\,\sin bx\;dx}$$

знаходяться за допомогою тригонометричних формул перетворення добутків у суму відповідно:

$$\cos ax\cos bx=\big(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\big)/2\,;$$

$$\sin ax\cos bx=\big(\sin(a+b)x+\cos(a-b)x\big)/2\,;$$

$$\sin ax\sin bx=\big(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\big)/2\,.$$

Приклад 1. Знайти інтеграл $I=\int\sin 8x\cos 2x\,dx$.

□ $I=(1/2)\int(\sin 10x+\sin 6x)\,dx=$

$$=(-1/20)\cos 10x-(1/12)\cos 6x+C\,.\ \blacksquare$$

Інтеграл вигляду $\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\, dx}$. Покажемо, що *цей інтеграл за допомогою* ***універсальної тригонометричної підстановки*** $\boxed{tg\,(x/2) = t}$ *завжди зводиться до інтеграла від раціональної функції*. Виконаємо необхідні перетворення:

$$\sin x = \frac{2tg\,(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2};\quad \cos x = \frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2arctg\, t\,;\quad dx = 2dt/(1+t^2)\,.$$

Отже, $\sin x$, $\cos x$ і dx мають раціональні вирази відносно t. Оскільки раціональна функція від раціональних функцій знову раціональна, маємо:

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int \frac{R\left(2t/(1+t^2), (1-t^2)/(1+t^2)\right) 2\,dt}{1+t^2}\,.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $I = \int \dfrac{dx}{3\sin x + \cos x}$.

$$\square\quad I = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left(6t/(1+t^2) + (1-t^2)/(1+t^2)\right)} = \int \frac{2\,dt}{6t+1-t^2} =$$

$$= -2\int \frac{dt}{(t-3)^2 - 10} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln\left|\frac{t-3-\sqrt{10}}{t-3+\sqrt{10}}\right| + C =$$

$$= \left(-1/\sqrt{10}\right)\ln\left|\left(tg(x/2) - 3 - \sqrt{10}\right)/\left(tg(x/2) - 3 + \sqrt{10}\right)\right| + C\,. \blacksquare$$

Поряд з універсальною також є інші підстановки, що у ряді випадків дають значно простіші раціональні вирази і тим самим швидше ведуть до мети:

а) $\boxed{\int R(\sin x)\cos x\, dx}$. Підстановка $\boxed{\sin x = t}$, $\cos x\, dx = dt$ зводить цей інтеграл до $\int R(t)\, dt$;

Приклад 3. Знайти інтеграл $I = \int \dfrac{\cos^3 x\, dx}{\sin x - 2}$.

$$\square \quad I=\int \frac{\cos^2 x \cos x\,dx}{\sin x-2}=\left|\cos^2 x=1-\sin^2 x\right|=$$

$$=\int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x\,dx}{\sin x-2}=\left|\begin{array}{c}\sin x=t;\\ \cos x\,dx=dt\end{array}\right|=\int \frac{(1-t^2)\,dt}{t-2}=$$

$$=\int\bigl(-t-2-3/(t-2)\bigr)dt=(-1/2)t^2-2t-3\ln|t-2|+C=$$

$$=(-1/2)\sin^2 x-2\sin x-3\ln|\sin x-2|+C\,. \quad \blacksquare$$

б) $\boxed{\int R(\cos x)\sin x dx}$. Підстановка $\boxed{\cos x=t}$, $-\sin x\,dx=dt$ зводить цей інтеграл до $-\int R(t)\,dt$;

Приклад 4. Знайти інтеграл $I=\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x-16}dx$.

(Розв'яжіть самостійно, використовуючи підстановку $\cos x=t$).

в) $\boxed{\int R(tg\ x)\,dx}$. Підстановка $\boxed{tg\ x=t}$, $x=arctg\,t$, $dx=dt/(1+t^2)$, зводить цей інтеграл до $\int R(t)dt/(1+t^2)$;

Приклад 5. Знайти інтеграл $I=\int \frac{tg\ x\ (1+tg^2 x)}{tg^2 x+2tg\ x+5}dx$.

(Розв'яжіть самостійно, використовуючи підстановку $tg\ x=t$).

г) $\int R(\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x\cos x)\,dx$. Підстановка $tg\ x=t$, $x=arctg\,t$ зводить цей інтеграл до $\int R(t)\,dt$ тому що

$$\sin^2 x=\frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2}\,;\quad \cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2 x}=\frac{1}{1+t^2}\,;$$

$$\sin x\cos x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{t}{1+t^2}\,;\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}\,.$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $I=\int \frac{dx}{\sin^2 x+6\sin x\cos x}$.

$$\square \quad I = \left| \begin{matrix} t = tg\,x; \\ x = arctg\,t; \end{matrix} \ dx = \frac{dt}{1+t^2};\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \right.$$

$$\left. \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right| = \int \frac{dt/(1+t^2)}{\left(t/\sqrt{1+t^2}\right)^2 + 6\left(t/\sqrt{1+t^2}\right)\left(1/\sqrt{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t(t+6)} = \int \frac{Adt}{t} + \int \frac{Bdt}{t+6} = \left| \begin{array}{c|c} & A(t+6)+Bt=1 \\ t=0 & \left.\begin{array}{l} 6A=1 \\ -6B=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=1/6 \\ B=-1/6 \end{array} \\ t=-6 & \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t+6} = \frac{1}{6}\ln|t| - \frac{1}{6}\ln|t+6| + C =$$

$$= \left| t = tg\,x \right| = (1/6)\ln|tg\,x| - (1/6)\ln|tg\,x + 6| + C. \quad \blacksquare$$

д) $\boxed{\int \sin^m x \cos^n x\,dx}$, де m і n – цілі числа. Тут можливі такі особливості:

• Якщо хоча б одне з чисел m чи n – непарне, то відокремлюємо від непарного степеня одну функцію, що в добутку з dx дає диференціал «кофункції» (без врахування знака). Цю «кофункцію» приймаємо за нову змінну t.

Наприклад, нехай $n = 2p+1$, тоді

$$\int \sin^m x \cos^{2p+1} x\,dx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x\,dx =$$

$$= \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^p \cos x\,dx.$$

Зробимо заміну: $\sin x = t$, $\cos x\,dx = dt$. Отже,

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int t^m (1-t^2)^p\,dt$$

– інтеграл від раціональної функції.

Зауваження 1. Якщо можливо, то треба вибирати непарний додатний (краще менший за модулем) показник степеня. При цьому показник степеня іншої функції може бути довільним.

Зауваження 2. Якщо обидва числа m і n – непарні від’ємні, то краще застосувати підстановку $\boxed{tg\,x = t}$.

Приклад 7. Знайти інтеграл $I=\int\sqrt[6]{\cos x}\sin^5 x\,dx$

$$\square\quad I=\int\sqrt[6]{\cos x}\sin^4 x\sin x\,dx=\int\sqrt[6]{\cos x}(1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx=$$

$$=\left|\cos x=t;\ -\sin x\,dx=dt\right|=$$

$$=-\int t^{1/6}(1-t^2)^2\,dt=-\int(t^{1/6}-2t^{13/6}+t^{25/6})\,dt=(-6/7)t^{7/6}+$$

$$+(12/19)t^{19/6}-(6/31)t^{31/6}=-(6/7)(\cos x)^{7/6}+$$

$$+(12/19)(\cos x)^{19/6}-(6/31)(\cos x)^{31/6}+C\,.\ \blacksquare$$

• Якщо m і n – парні невід'ємні числа, то використовуємо формули зниження степеня тригонометричних функцій:

$$\boxed{\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2\,;\ \cos^2 x=(1+\cos 2x)/2}.$$

Отже, $\int\sin^m x\cos^n x\,dx=2^{-p-q}\int(1-\cos 2x)^p(1+\cos 2x)^q\,dx$, де $m=2p$ і $n=2q$.

Після піднесення до степенів p, q і множення матимемо $\cos 2x$ як у парних, так і непарних степенях. Члени з непарними степенями інтегруються, як показано вище. Члени з парними степенями знову перетворюємо за формулами зниження степеня. Продовжуючи цей процес, дійдемо до інтегралів від сталих величин і функцій $\cos kx$, які легко інтегруються.

Зауваження 3. Для зниження степеня можна додатково використати формулу $\sin x\cos x=(\sin 2x)/2$.

Приклад 8. Знайти інтеграл $I=\int\sin^2 3x\cos^2 3x\,dx$.

$$\square\quad I=\left|\sin^2 3x\cos^2 3x=(\sin 3x\cos 3x)^2=\left((1/2)\sin 6x\right)^2=\right.$$

$$=\left.\frac{1}{4}\sin^2 6x\right|=\frac{1}{4}\int\sin^2 6x\,dx=\left|\sin^2 6x=\frac{1-\cos 12x}{2}\right|=$$

$$=(1/8)\int(1-\cos 12x)\,dx=(1/8)\,x-(1/96)\sin 12x+C\,.\ \blacksquare$$

• Якщо m і n – парні числа, з яких хоча б одне від'ємне, то робимо заміну $\boxed{tg\,x=t}$, або $ctg\,x=t$;

Приклад 9. Знайти інтеграл $I=\int dx \big/ \cos^4 x$

□ $I=\left| tg\, x=t;\ x=arctg\, t;\ dx=dt/(1+t^2) \right| =$

$$=\int \frac{dt}{(1+t^2)\cdot 1/(1+t^2)^2}=\int \frac{dt}{1/(1+t^2)}=\int (1+t^2)\,dt=$$

$$=t+(1/3)\,t^3+C=tg\,x+(1/3)\,tg^3 x+C\,.\ ■$$

Приклад 10. Знайти інтеграл $I=\int \left(\cos^2 x \big/ \sin^6 x\right) dx$.

(Розв'яжіть самостійно, використовуючи підстановку $tg\,x=t$).

1.1.6 Інтегрування деяких типів ірраціональностей. Тригонометричні підстановки

Не від усякої ірраціональної функції інтеграл можна виразити через елементарні функції у скінченній формі. Розглянемо інтеграли від ірраціональних функцій, що за допомогою підстановок зводяться до інтегралів від раціональних функцій і, отже, інтегруються.

Інтеграл вигляду

$$\boxed{\int R\left(x,(ax+b)^{m/n},\ldots,(ax+b)^{r/s}\right) dx,\quad a\neq 0}.$$

Він зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки $\boxed{ax+b=t^k}$, де k – найменший спільний знаменник дробів у показниках степенів $m/n,\ldots,r/s$. Тоді $x=(t^k-b)/a$; $dx=(k/a)t^{k-1}dt$. Після інтегрування за змінною t повертаємося до початкової змінної x: $t=(ax+b)^{1/k}=\sqrt[k]{ax+b}$.

Приклад 1. Знайти інтеграл $I=\int \frac{(\sqrt{x-1}+2x)\,dx}{x-2\sqrt{x-1}}$.

□ Робимо заміну: $x-1=t^2$; $x=t^2+1$; $dx=2tdt$. Тоді

$$I=\int \frac{(t+2t^2+2)2t\,dt}{t^2+1-2t}=\int \frac{(4t^3+t^2+4t)\,dt}{t^2-2t+1}=\int (4t+10)\,dt+$$

$$=\int \left(4t+10+(20t-10)/(t-1)^2\right)dt=2t^2+10t+$$

$$+\int\frac{\big(20(t-1)+10\big)dt}{(t-1)^2}=2t^2+10t+\int\left(\frac{20}{t-1}+\frac{10}{(t-1)^2}\right)dt=$$

$$=2t^2+10t+20\ln|t-1|-10/(t-1)+C=\left|t=\sqrt{x-1}\right|=2(x-1)+$$

$$+10\sqrt{x-1}+20\ln|\sqrt{x-1}-1|-10\Big/\left(\sqrt{x-1}-1\right)+C\,.\quad\blacksquare$$

Для інтегралів наведених нижче типів застосовують спеціальні тригонометричні підстановки в залежності від вигляду підкореневого виразу:

1) $\boxed{\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx \quad\Rightarrow\quad x=a\cdot\sin t\,,\ dx=a\cos t dt}$;

2) $\boxed{\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx \quad\Rightarrow\quad x=\frac{a}{\sin t}\,,\ dx=-\frac{a\cdot\cos t}{\sin^2 t}dt}$;

3) $\boxed{\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx \quad\Rightarrow\quad x=a\cdot tgt\,,\ dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt}$.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$.

□ Зробимо підстановку $x=3\sin t$ з метою позбутись іррраціональності. Тоді $dx=3\cos t\,dt$ і

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}dx=\int(3\sin t)^2\sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt=$$

$$=\int 9\sin^2 t\cdot 3|\cos t|\cdot 3\cos t\,dt=81\int\sin^2 t\cos^2 t\,dt=$$

$$=(81/4)\int\sin^2 2t\,dt=(81/8)\int(1-\cos 4t)\,dt=$$

$$=(81/8)\cdot\left(\int dt-\int\cos 4t\,dt\right)=(81/8)\cdot t-(81/8)\cdot\int\cos 4t\,dt$$

при умові $\cos t\geq 0$. Нехай $t=u/4$. Тоді $dt=(1/4)\,du$ і

$$\int\cos 4t\,dt=(1/4)\int\cos u\,du=(1/4)\sin u+C\,.$$

Отже $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx=(81/8)\cdot t-(81/8)\cdot(1/4)\sin u+C$.

Повернемось до початкової змінної x:

$$t=\arcsin(x/3)\,;\quad u=4t=4\arcsin(x/3)\,.$$

Тоді

$$\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{81}{8}\arcsin(x/3) - \frac{81}{32}\sin(4\arcsin(x/3)) + C\,.$$

Звичайно, отриманий результат можна спростити, використовуючи тригонометричні тотожності. ■

1.1.7 Інтеграли, що «не беруться»

Диференціювання ґрунтується на формулах для похідної кожної з операцій, за допомогою яких формуються елементарні функції. Тому *похідна довільної елементарної функції також є елементарною*.

При інтегруванні не існує відповідних формул для добутку, частки і суперпозиції функцій. Тому *не кожну первісну, навіть коли вона існує, можна подати через елементарні функції у скінченному вигляді*.

Говорять, що інтеграл $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ «***не береться***», якщо первісна $F(x)$ – неелементарна функція.

Такого типу первісні, що часто застосовуються в математиці та інших дисциплінах, називаються ***спеціальними функціями***. Для них складені відповідні таблиці, побудовані графіки і створені комп'ютерні програми.

Наведемо деякі інтеграли, що «не беруться», і відповідні спеціальні функції:

а) $\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int e^{-x^2/2}dx = \Phi(x) + C$, де первісна $\Phi(x)$, що задовольняє додатковій умові $\Phi(0) = 0$, називається ***функцією Лапласа*** (***інтегралом ймовірностей***);

б) $\int \frac{\sin x}{x}dx = \mathrm{Si}\,(x) + C$, де первісна $\mathrm{Si}\,(x)$, що задовольняє додатковій умові $\mathrm{Si}\,(0) = 0$, називається ***інтегральним синусом***.

1.2 Визначений інтеграл

1.2.1 Інтегральна сума та її геометричний зміст. Поняття визначеного інтеграла. Умови його існування. Формула Ньютона – Лейбниця

Визначений інтеграл відіграє значну роль як у суто теоретичних дослідженнях, так і в практичних застосуваннях. До його обчислення зводяться задачі знаходження площі фігури, об'єму тіла, центру ваги плоскої кривої, моменту інерції та інші.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n довільних (не обов'язково рівних) елементарних частин точками поділу x_i, $i = \overline{0,n}$ такими, що $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$. На кожному частинному відрізку $[x_{i-1};x_i]$ візьмемо по одній довільній (не обов'язково середній) точці c_i, $i = \overline{1,n}$. Обчислимо значення функції $f(c_i)$ і помножимо його на довжину відповідного частинного відрізка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Складемо суму отриманих добутків

$$S_n(f) = f(c_1)\Delta x_1 + ... + f(c_i)\Delta x_i + ... + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Цей вираз називається ***інтегральною сумою*** для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Зауваження 1. Інтегральна сума $S_n(f)$, як це випливає з її побудови, не є функцією змінної n і не є функцією змінної x. Інтегральна сума залежить як від способу розбиття, тобто від вибору точок поділу x_i, $i = \overline{0,n}$, так і від вибору точок c_i, $i = \overline{1,n}$ по одній на кожному частинному відрізку.

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Фігура, обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$, знизу віссю Ox і вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 1.2), називається ***криволінійною трапецією***. Знайдемо її площу S.

Добуток $f(c_i)\Delta x_i$ чисельно дорівнює площі прямокутника D_i з основою Δx_i і висотою $f(c_i)$. *Інтегральна сума* $S_n(f)$ чисельно дорівнює площі східчастої фігури, утвореної з таких прямокутників, і *служить наближеним значенням площі криволінійної трапеції*: $S \approx S_n(f)$.

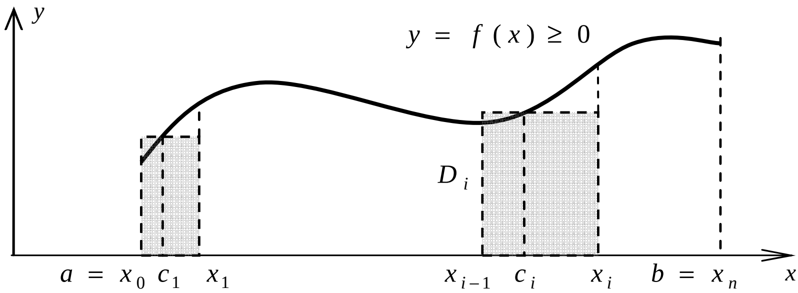

Рисунок 1.2

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, $S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ – її інтегральна сума на $[a;b]$. Позначимо через $\max \Delta x_i$ найбільшу з довжин відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1,n}$. Розглянемо довільну послідовність інтегральних сум при умові $\max \Delta x_i \to 0$. Очевидно, що при цьому число n у розбитті прямує до нескінченності.

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається границя послідовності інтегральних сум при необмеженому здрібненні розбиття відрізка $[a;b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i},$$

де a і b – відповідно ***нижня*** і ***верхня межі інтегрування***; $[a;b]$ – ***відрізок інтегрування***.

Підкреслимо, що границя розглядається при будь-яких розбиттях відрізка $[a;b]$ таких, що $\max \Delta x_i \to 0$, і при будь-якому виборі точок c_i на елементарних відрізках $[x_{i-1};x_i]$, $i=\overline{1,n}$.

Зауваження 2. Не зважаючи на близькість позначень, невизначений і визначений інтеграли різні за суттю, оскільки невизначений інтеграл – це сім'я функцій (первісних), а визначений інтеграл – це число (значення границі).

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді *визначений інтеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *чисельно дорівнює площі* S *відповідної криволінійної трапеції*: $\boxed{S=\int_a^b f(x)\,dx}$.

Теорема 1 (***необхідна умова інтегрованості***). *Якщо функція інтегрована на деякому відрізку, то вона обмежена на ньому.*

□ Припустимо супротивне. Нехай функція $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$ необмежена. Тоді для довільного розбиття існує хоча б один елементарний відрізок $[x_{i-1};x_i]$, де функція необмежена. Вибираючи на ньому відповідним чином точку c_i, можна зробити значення функції $f(c_i)$, а з нею інтегральну суму $S_n(f)$ як завгодно великою. Тому скінченна границя для $S_n(f)$ не існує. ■

Зауваження 3. Умова обмеженості функції є необхідною, але не є достатньою для інтегрованості функції.

Теорема 2 (***достатня умова інтегрованості***). *Функція, неперервна на відрізку, інтегрована на ньому.*

Зауваження 4. Розглядаючи визначені інтеграли, надалі будемо припускати підінтегральну функцію неперервною на проміжку інтегрування.

Визначений інтеграл фактично відкрито понад 2000 років тому. Але широкого застосування він довго не мав, оскільки безпосередньо знаходити границі інтегральних сум важко навіть у найпростіших випадках. Невизначений інтеграл відкрито значно пізніше (у XXVII столітті) і для нього розроблено досить ефективні методи обчислення. Тоді ж був встановлений зв'язок між цими типами інтегралів, що дозволило розширити сфери застосування інтегрального числення.

Теорема (***Ньютона – Лейбниця***). *Нехай функція* $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і* $F(x)$ *– яка-небудь її первісна на цьому відрізку. Тоді визначений інтеграл від функції* $y = f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$ *дорівнює приросту первісної* $F(x)$ *на цьому відрізку*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b}$$ – ***формула Ньютона – Лейбниця***.

Тут символом $\boxed{F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$ позначено приріст первісної (читається: «F від x з підстановкою від a до b»).

□ Розглянемо приріст $F(b) - F(a)$. Перепишемо його, додаючи та віднімаючи значення функції в кожній внутрішній точці розбиття $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, враховуючи, що $x_0 = a, x_n = b$, та використовуючи на кожному елементарному відрізку формулу Лагранжа, а потім зробимо граничний перехід:

$$F(b) - F(a) = (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + ... +$$

$$+ (F(x_n) - F(x_{n-1})) = \Big| F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\,\Delta x_i\,,$$

$$c_i \in [x_{i-1}; x_{i-1}] \Big| = F'(c_1)\Delta x_1 + F'(c_2)\Delta x_2 + ... + F'(c_n)\Delta x_n =$$

$$= \Big| F'(c_i) = f(c_i) \Big| = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... +$$

$$+ f(c_n)\Delta x_n = S_n(f); \quad \lim_{\Delta x_i \to 0}(F(b) - F(a)) = \lim_{\Delta x_i \to 0} S_n(f).$$

Таким чином $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$. ■

Приклад. Знайти інтеграл $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$.

□ Використовуючи таблицю первісних та формулу Ньютона – Лейбниця, отримаємо:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1. \quad ■$$

1.2.2 Властивості визначеного інтеграла. Теорема про середнє значення

Спираючись на означення та формулу Ньютона – Лейбниця, що зв'язує визначений інтеграл з невизначеним, можна встановити основні властивості визначеного інтеграла.

Найпростіші властивості:

1. *Визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування* (змінна інтегрування є «німою»):

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt}.$$

2. *Визначений інтеграл з рівними між собою межами інтегрування дорівнює нулю*:

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}.$$

3. *Якщо переставити місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл тільки змінить знак*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}.$$

Властивість адитивності за проміжком:

4. *Для будь-яких трьох чисел* a, b *і* c *справедлива рівність*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx},$$

якщо тільки всі ці інтеграли існують.

Доведення спирається на властивість інтегральної суми, яку можна розділити на окремі частини, що відповідають частинам всього відрізка інтегрування.

Властивості лінійності:

5. *Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла*:

$$\boxed{\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx, \text{ де } A = const}.$$

$$\square \quad \int_a^b Af(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n A\, f(c_i)\Delta x_i =$$

$$= A \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = A\int_a^b f(x)\,dx\,. \quad \blacksquare$$

6. *Визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з цих функцій окремо*. Так, у разі трьох функцій:

$$\boxed{\int_a^b (f(x)+g(x)-h(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx}.$$

Доведення спирається на відповідну властивість границі суми.

Властивості монотонності:

7. *Якщо підінтегральна функція неперервна і невід'ємна на відрізку* $[a;b]$, $f(x) \geq 0, x \in [a;b]$, *а верхня межа інтегрування більша або дорівнює нижній* $b \geq a$, *то визначений інтеграл на цьому відрізку також невід'ємний*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \geq 0}.$$

8. *Якщо на відрізку* $[a;b]$, *де* $a < b$, *функції* $f(x)$ *і* $\varphi(x)$ *задовольняють нерівності*

$$\boxed{f(x) \leq \varphi(x)\text{, то } \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \varphi(x)\,dx}.$$

Іншими словами, *нерівність між неперервними функціями можна інтегрувати почленно при умові, що верхня межа інтегрування більша нижньої*.

□ Розглянемо різницю

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (\varphi(x) - f(x))\,dx =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n (\varphi(c_i) - f(c_i))\Delta x_i\,.$$

Тут кожна різниця $\varphi(c_i) - f(c_i) \geq 0$, $\Delta x_i > 0$. Отже, кожен член суми додатний, додатна вся сума і невід'ємна її границя, тобто

$\int_a^b (\varphi(x) - f(x))\, dx \ge 0$. Звідси

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx - \int_a^b f(x) dx \ge 0 \quad \text{або} \quad \int_a^b \varphi(x)\, dx \ge \int_a^b f(x)\, dx. \ \blacksquare$$

9. *Абсолютна величина визначеного інтеграла не перевищує визначеного інтеграла від абсолютної величини підінтегральної функції при умові, що верхня межа інтегрування не менша за нижню* $b \ge a$:

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx}.$$

□ За властивістю модуля $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$. Враховуючи властивість 8, з цього випливає

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \le \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b |f(x)|\, dx$$

$$\text{або} \quad \left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx. \ \blacksquare$$

Для функції $f(x)$, інтегрованої на відрізку $[a;b]$, ***середнім інтегральним значенням*** на цьому відрізку називається число μ, яке визначається рівністю

$$\boxed{\mu = \left(1/(b-a)\right)\int_a^b f(x)\, dx}.$$

Теорема (***про середнє значення***). *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *то на інтервалі* $(a;b)$ *існує хоча б одна точка* c *така, що середнє інтегральне* μ *функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$ *дорівнює значенню функції* $f(c)$ *в цій точці:*

$$\boxed{f(c) = \mu = \left(1/(b-a)\right)\int_a^b f(x)\, dx}.$$

□ Нехай $a < b$. Якщо m і M найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тобто $m \le f(x) \le M$, тоді:

$$\int_a^b m\, dx \le \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b M\, dx; \quad m \le \left(1/(b-a)\right)\int_a^b f(x)\, dx \le M .$$

Вираз, який розташований всередині цієї подвійної нерівності, дорівнює μ. Тобто, $m \le \mu \le M$. Тоді за теоремою про проміжне значення неперервної на відрізку функції при деякому значенні c $(a < c < b)$ будемо мати $\mu = f(c)$. ■

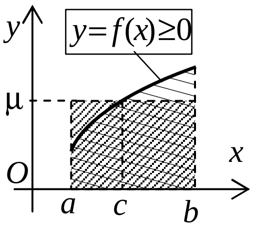

Рисунок 1.3

Геометричний зміст (рис. 1.3). Для неперервної невід'ємної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ всередині цього відрізка знайдеться хоча б одна точка c така, що площа відповідної криволінійної трапеції дорівнює площі прямокутника з тією ж основою $b-a$ і висотою $\mu = f(c)$.

Приклад. Продуктивність праці робітника протягом восьмигодинної зміни описується функцією $f(t) = 1 + t^{2/3} - 0{,}55t$, $t \in [0;8]$. Знайти $\overline{f}$ – середню продуктивність праці робітника за зміну.

$$\square \quad \overline{f} = \frac{1}{8}\int_0^8 (1 + t^{2/3} - 0{,}55t)\,dt = \frac{1}{8}\left(t + \frac{t^{5/3}}{5/3} - 0{,}55 \cdot \frac{t^2}{2} \right)\Bigg|_0^8 =$$

$$= (1/8)\cdot(8 + 19{,}2 - 17{,}6) = 1{,}2. \quad ■$$

1.2.3 Заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема. Нехай функція $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *а функція* $x = \varphi(t)$ *неперервна разом зі своєю похідною* $x' = \varphi'(t)$ *і монотонна на відрізку* $[\alpha;\beta]$, *причому* $\varphi(\alpha) = a$ *і* $\varphi(\beta) = b$. *Тоді справедлива* ***формула заміни змінної у визначеному інтегралі***

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left| x = \varphi(t);\ dx = \varphi'(t)\,dt;\ t = \varphi^{-1}(x);\right.}$$

$$\boxed{\left. \alpha = \varphi^{-1}(a);\ \beta = \varphi^{-1}(b) \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt},$$

де $t = \varphi^{-1}(x)$ *– обернена функція.*

□ Якщо $F(x)$ – деяка первісна для функції $f(x)$, то можемо записати

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C; \quad \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Справедливість останньої рівності перевіряється диференціюванням обох частин по t. З цих рівностей відповідно маємо:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a); \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt =$$

$$= F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Праві частини одержаних виразів рівні, отже, ліві частини теж рівні: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. ■

Зауваження 1. При заміні змінної значення функції $\varphi(t)$ не повинні виходити за межі відрізка $[a;b]$, коли аргумент t змінюється на проміжку $[\alpha;\beta]$, причому $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$. Монотонна на $[\alpha;\beta]$ функція $x = \varphi(t)$ ці умови задовольняє.

Зауваження 2. Аналогічно випадку невизначеного інтеграла, формула заміни змінної може використовуватись як в прямому, так і в зворотному напрямку.

Зауваження 3. Виконуючи заміну змінної у визначеному інтегралі, немає потреби повертатися до початкової змінної: якщо обчислено один з визначених інтегралів формули заміни, то маємо деяке число; цьому числу дорівнює також інший інтеграл.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

$$□\quad I = \left| \begin{matrix} x+1 = t^2;\ x = t^2 - 1;\ dx = 2t\,dt; \\ t = \sqrt{x+1};\ t_1 = \sqrt{3+1} = 2;\ t_2 = \sqrt{8+1} = 3 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\limits_2^3 \frac{t^2 - 1 - 3}{t} 2tdt = 2\int\limits_2^3 (t^2 - 4)\,dt = 2\int\limits_2^3 t^2 dt - 8\int\limits_2^3 dt =$$

$$= (2/3)t^3\Big|_2^3 - 8t\Big|_2^3 = (2/3)\cdot(3^3 - 2^3) - 8\cdot(3-2) = 14/3. \quad ■$$

Приклад 2. Обчислити: а) $\int\limits_2^7 \frac{\sqrt[4]{3x-5}\,dx}{\sqrt{3x-5}+1}$; б) $\int\limits_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$.

(Розв'яжіть самостійно, використовуючи відповідно підстановки: а) $3x-5=t^4$; б) $x=2/\cos t$).

Зауваження 4. При обчисленні визначеного інтеграла заміну змінної можна проводити у відповідному невизначеному інтегралі. Тоді треба повернутись до початкової змінної і застосувати формулу Ньютона – Лейбниця. Звичайно цим користуються у простих випадках, коли заміну здійснюють усно.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{4+5\cos x}$, виконуючи заміну змінної у відповідному невизначеному інтегралі.

$$\square\ I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{4+5\cos x}=\left|\int\frac{dx}{4+5\cos x}=\right| t=tg\,\frac{x}{2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x=2\,arctg\,t;\ dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}\ \left|=\int\frac{2\,dt\big/(1+t^2)}{4+5\cdot(1-t^2)\big/(1+t^2)}=\right.$$

$$=-2\int\frac{dt}{t^2-9}=-2\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\,(x/2)-3}{tg\,(x/2)+3}\right|+C\ \left|=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\,(x/2)-3}{tg\,(x/2)+3}\right|\right|_0^{\pi/2}=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\ln\left|\frac{tg\,(\pi/4)-3}{tg\,(\pi/4)+3}\right|-\ln\left|\frac{tg\,0-3}{tg\,0+3}\right|\right)=\frac{1}{3}\ln 2.\ \blacksquare$$

1.2.4 Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – диференційовані функції від x на відрізку $[a;b]$. Тоді $(uv)'=u'v+v'u$. Інтегруємо обидві частини рівності у межах від a до b, маємо

$$\int_a^b (u\,v)'\,dx = \int_a^b u'\,v\,dx + \int_a^b u\,v'\,dx\,.$$

Оскільки $\int (u\,v)'\,dx = u\,v + C$, тому $\int_a^b (u\,v)'\,dx = u\,v\Big|_a^b$.

Отже $u\,v\Big|_a^b = \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv$. Звідси остаточно маємо ***формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі***

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du},$$

що відрізняється від аналогічної формули для невизначеного інтеграла тільки наявністю меж інтегрування.

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{-2}^{0} (4x^2 - 12x - 8)\cos 2x\,dx\,.$$

$$\square \quad I = \left| \begin{array}{l} u = 4x^2 - 12x - 8;\ \ dv = \cos 2x\,dx; \\ du = (8x - 12)\,dx;\ v = (1/2)\sin 2x \end{array} \right| =$$

$$= (4x^2 - 12x - 8)(1/2)\sin 2x\Big|_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} (1/2)\sin 2x \cdot (8x - 12)\,dx =$$

$$= 32\sin 4 - 2\int_{-2}^{0} (2x - 3)\sin 2x\,dx = \Big| u = 2x - 3;\ \ du = 2dx;$$

$$dv = \sin 2x\,dx;\ \ v = -(1/2)\cos 2x\,\Big| = 32\sin 4 -$$

$$-2\left((2x - 3)\cdot(-1/2)\cos 2x\Big|_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} (-1/2)\cos 2x \cdot 2dx\right) =$$

$$= 32\sin 4 - 3 + 7\cos 4 - 2\int_{-2}^{0} \cos 2x\,dx = 32\sin 4 - 3 +$$

$$+ 7\cos 4 - 2\cdot(1/2)\sin 2x\Big|_{-2}^{0} = 31\sin 4 + 7\cos 4 - 3\,. \ \blacksquare$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{\pi/2} e^{4x} \cos 5x\,dx$.

(Розв’яжіть самостійно, застосовуючи двічі інтегрування частинами).

1.3 Невласні інтеграли першого та другого роду

При вивченні визначеного інтеграла виходили з двох умов:

– скінченність проміжку інтегрування;

– неперервність (або хоча б обмеженість) підінтегральної функції.

Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то наведене вище означення визначеного інтеграла стає неприйнятним.

Так у випадку нескінченного проміжку інтегрування його не можна розбити на n частинних відрізків скінченної довжини, а у випадку необмеженої функції інтегральна сума очевидно не має скінченної границі.

Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла на ці випадки, приходимо до ***невласного інтеграла*** – інтеграла на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

Невласний інтеграл по нескінченному проміжку від обмеженої функції також називають ***невласним інтегралом першого роду***.

Нехай функція $f(x)$ визначена на вправо нескінченному проміжку $[a\,;+\infty)$ й інтегрована на будь-якому відрізку $[a\,;b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді границю $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ називають ***невласним інтегралом з нескінченною верхньою межею*** і позначають $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Таким чином,

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx}\,.$$

Якщо вказана границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називають ***збіжним***, а підінтегральну функцію $f(x)$ – ***інтегровано*** на нескінченному проміжку $[a\,;+\infty)$. Сама границя приймається за ***значення*** цього ***інтеграла***.

Якщо ж вказана границя нескінченна або взагалі не існує, то невласний інтеграл називається ***розбіжним***, а функція $f(x)$ – ***неінтегрованою*** на $[a;+\infty)$.

Невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею визначається аналогічно (на вліво нескінченному проміжку $(-\infty;b]$):

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx}\,.$$

Невласний інтеграл з обома нескінченними межами визначається рівністю

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx}\,,$$

де c – довільне фіксоване дійсне число. *Інтеграл ліворуч у цій формулі існує (є збіжним) лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли праворуч*. Можна довести, що інтеграл, визначений цією рівністю, не залежить від вибору числа c.

З наведених означень випливає, що невласний інтеграл не є границею інтегральних сум, а є границею визначеного інтеграла зі змінною межею інтегрування.

Збіжні невласні інтеграли мають усі основні властивості звичайних визначених інтегралів. Тому при розгляді невласного інтеграла перш за все виникає питання про його збіжність, яке вирішується або його безпосереднім обчисленням, або за допомогою спеціальних ***ознак збіжності***.

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ неперервна і невід’ємна на проміжку $[a;+\infty)$, а відповідний *невласний інтеграл* $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається. Тоді природно вважати, що він *визначає площу необмеженої області – трапеції з нескінченною основою*, що на рис. 1.4 позначена похилими та перехресними штрихами. Починаючи з деякого значення b, ця площа приблизно дорівнює площі обмеженої області, яка позначена на рис. 1.4 перехресними штрихами. Тобто, при $x\to+\infty$ функція $f(x)$ прямує до нуля настільки швидко, що площа відповідної нескінченної криволінійної трапеції виявляється скінченною.

Приклад 1. Обчислити дані невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\text{а)}\ \int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1};\qquad \text{б)}\ \int_{3}^{+\infty}\frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10};\qquad \text{в)}\ \int_{-\infty}^{2}\frac{x^2dx}{x^6+64}.$$

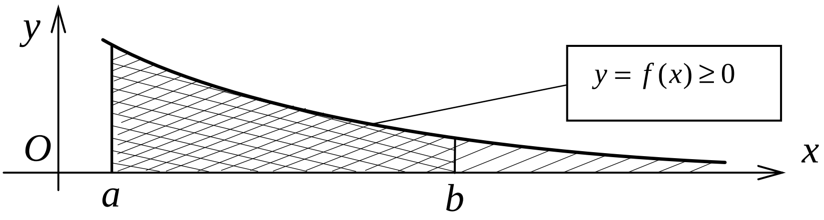

Рисунок 1.4

□ а) $I = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{2}^{b} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \lim\limits_{b\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_2^b = \frac{1}{2} \times$

$\times \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\ln\left|(b-1)/(b+1)\right| - \ln(1/3)\right) = (1/2)(\ln 1 + \ln 3) = (1/2)\ln 3$.

Невласний інтеграл збігається. Його значення $I = (1/2)\ln 3$.

$$\text{б) } I = \int\limits_{3}^{+\infty} \frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{3}^{b} \frac{2x+3}{x^2+3x-10}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = x^2+3x-10; \quad dt = 2x+3; \\ t_1 = 3^2+3\cdot 3-10 = 8; \ t_2 = b^2+3b-10 \end{array} \right| = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{8}^{b^2+3b-10} \frac{dt}{t} =$$

$$= \lim\limits_{b\to+\infty} \ln|t|\,\Big|_8^{b^2+3b-10} = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\ln|b^2+3b-10| - \ln|8|\right) = +\infty .$$

Невласний інтеграл розбігається.

в) (Розв'яжіть самостійно). ■

Зауваження 2. При обчисленні невласних інтегралів застосовують скорочений запис, подібний формулі Ньютона – Лейбниця:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \text{ де } F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)}.$$

Аналогічно узагальнюється формула інтегрування частинами:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} u\,dv = u\,v\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v\,du}.$$

Приклад 2. Обчислити невласний інтеграл $I=\int_{-\infty}^{0} x\,e^{x/4}dx$ або встановити його розбіжність.

$$\square \quad I=\int_{-\infty}^{0} x\,e^{x/4}dx=\left|u=x;\ dv=e^{x/4}dx;du=dx;\ v=4e^{x/4}\right|=$$

$$=\left(x\cdot 4e^{x/4}\right)\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}4\,e^{x/4}dx=-4e^{-\infty}-4\cdot 4e^{x/4}\Big|_{-\infty}^{0}=\left|e^{-\infty}=0\right|=$$

$=0-16\ (e^{0}-e^{-\infty})=-16$. Інтеграл збігається і дорівнює -16. ■

Зауваження 3. Застосування заміни змінної може звести невласний інтеграл до звичайного визначеного інтеграла.

Перейдемо до розгляду невласних інтегралів від необмежених функцій (невласних інтегралів другого роду).

Нехай функція $f(x)$ інтегрована на будь-якому проміжку $[a;\eta]$, де $\eta<b$, тобто існує визначений інтеграл $\int\limits_a^{\eta} f(x)dx$, і функція $f(x)$ необмежена на проміжку $[a;b]$. У цьому випадку точку b називають ***особливою***. Тоді границю $\boxed{\lim\limits_{\eta\to b-0}\int\limits_a^{\eta} f(x)dx}$ називають ***невласним інтегралом від необмеженої функції*** (***невласним інтегралом другого роду***) на проміжку $[a;b]$ і позначають $\boxed{\int\limits_a^{b} f(x)dx}$.

Якщо ця границя існує й скінченна, то невласний інтеграл $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ називається ***збіжним***; якщо ж ця границя не існує чи дорівнює нескінченності, то невласний інтеграл $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ – ***розбіжний***.

Аналогічно визначається невласний інтеграл $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ від необмеженої функції з особливою точкою a:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to a+0} \int_\eta^b f(x)\,dx}.$$

У випадку, коли внутрішня точка $c \in (a;b)$ особлива, тобто в будь-якому околі точки c функція $f(x)$ необмежена, то за невласний інтеграл від функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$ приймають суму границь:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta \to c-0} \int_a^\eta f(x)\,dx + \lim_{\mu \to c+0} \int_\mu^b f(x)\,dx}.$$

Приклад 3. Обчислити невласний інтеграл чи встановити його розбіжність

$$\text{а) } \int_0^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{x+x^2}; \quad \text{в) } \int_2^6 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

□ а) Особлива точка $x = 3$. Отже, за означенням невласного інтеграла, формулами заміни змінної та Ньютона – Лейбниця, знайдемо

$$\int_0^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\eta \to 3-0} \int_0^\eta \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{9-x^2} = t; \;\; 9-x^2 = t^2 \\ x^2 = 9-t^2; \;\; 2xdx = -2tdt \\ xdx = -tdt \\ t_{í} = 3; \;\; t_{â} = \sqrt{9-\eta^2} \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\eta \to 3-0} \left(- \int_3^{\sqrt{9-\eta^2}} \frac{(9-t^2)tdt}{t} \right) = \lim_{\eta \to 3-0} \left(\left(-9t + \frac{t^3}{3} \right) \Bigg|_3^{\sqrt{9-\eta^2}} \right) =$$

$$= \lim_{\eta \to 3-0} \left(-9\sqrt{9-\eta^2} + 27 + \frac{\sqrt{(9-\eta^2)^3}}{3} - 9 \right) = 18.$$

Отже, інтеграл збігається, його значення дорівнює 18.

б) Особливі точки: $x=0$ і $x=-1\notin[0;1]$. Маємо

$$\int_0^1\frac{dx}{x+x^2}=\lim_{\eta\to+0}\int_\eta^1\frac{dx}{x+x^2}=\lim_{\eta\to+0}\int_\eta^1\frac{1+x-x}{x+x^2}dx=$$

$$=\lim_{\eta\to+0}\left(\int_\eta^1\frac{1+x}{x(1+x)}dx-\int_\eta^1\frac{x}{x(1+x)}dx\right)=\lim_{\eta\to+0}\left(\ln|x|\Big|_\eta^1-\ln|1+x|\Big|_\eta^1\right)=$$

$$=\lim_{\eta\to+0}\left(\ln 1-\ln\eta-\ln 2+\ln(1+\eta)\right)=\infty.$$

Отже, інтеграл розбіжний.

в) Особливі точки:

$x^2-4x+3=0$; $x=3$ і $x=1\notin[2;6]$. Маємо

$$I=\int_2^6\frac{dx}{x^2-4x+3}=\lim_{\eta\to3-0}\int_2^\eta\frac{dx}{x^2-4x+3}+\lim_{\mu\to3+0}\int_\mu^6\frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

Знайдемо відповідний невизначений інтеграл:

$$\int\frac{dx}{x^2-4x+3}=\int\frac{dx}{(x-1)(x-3)}=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}\right)dx=$$

$$=\left|A(x-3)+B(x-1)=1;\quad \begin{matrix}x=1:\\ x=3:\end{matrix}\begin{cases}-2A=1; & A=-1/2;\\ 2B=1; & B=1/2\end{cases}\right|=$$

$$=\int\left(\frac{-1/2}{x-1}+\frac{1/2}{x-3}\right)dx=-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x-3|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C.$$

Тоді $I=\lim\limits_{\eta\to3-0}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\right)\Bigg|_2^\eta+\lim\limits_{\mu\to3+0}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\right)\Bigg|_\mu^6=$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\eta\to3-0}\left(\ln\left|\frac{\eta-3}{\eta-1}\right|-\ln 1\right)+\frac{1}{2}\lim_{\mu\to3+0}\left(\ln\frac{3}{5}-\ln\left|\frac{\mu-3}{\mu-1}\right|\right)-$$ *границя не існує.*

Отже, інтеграл $I=\int\limits_2^6 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ розбігається. ■

1.4 Геометричні застосування визначеного інтеграла

Різноманітні застосування визначеного інтеграла реалізуються за однією з двох схем:

1) Для шуканої величини, в припущенні адитивності (можливість підсумовування по елементам розбиття) і лінійності в малому (лінійна залежність між головними частинами нескінченно малих приростів, що фігурують у задачі), складається інтегральна сума, що наближено її визначає, а потім здійснюється граничний перехід при необмеженому здрібненні розбиття і одержується точне значення у вигляді визначеного інтеграла.

2) Складають співвідношення для диференціала (або похідної) шуканої функції, а потім саму функцію знаходять інтегруванням.

Розглянемо задачі обчислення основних кількісних характеристик геометричних об'єктів – довжини, площі та об'єму.

1.4.1 Обчислення площі плоскої фігури

Під час розгляду питання про обчислення площі плоскої фігури основним є поняття правильної області.

Непорожня множина D точок координатної площини Oxy називається ***областю*** (***відкритою областю***), якщо виконуються такі умови: 1) вона ***відкрита***, тобто разом з кожною своєю точкою містить деякий окіл цієї точки; 2) вона ***зв'язна***, тобто будь-які дві її точки можна сполучити деякою ламаною L, всі точки якої належать цій множині D.

Точка M_0 називається ***межовою точкою*** області D, якщо в кожному її околі містяться точки, що належать і що не належать цій області. Множина всіх межових точок Γ області D називається ***межею*** цієї області.

Зауваження 1. Надалі розглядаються області, межа яких Γ складається зі скінченного числа кусково-неперервних кривих та ізольованих точок.

Якщо при русі вздовж межі Γ область D весь час залишається ліворуч, то такий напрям орієнтації межі Γ називається ***додатним обходом***.

Об'єднання області D з її межею Γ, називається ***замкненою областю***.

Зауваження 2. Будемо ділянку межі Γ зображати суцільною лінією, якщо вона входить в область D, і пунктирною лінією, якщо вона не входить в область D.

Область D називається ***обмеженою***, якщо існує таке додатне число C, що відстань будь-якої точки області D до початку координат не перевищує числа C. У протилежному випадку область D називається ***необмеженою***.

Нехай D – деяка замкнена плоска область (рис. 1.5), відрізок $[a;b]$ - її проекція паралельно осі Oy на вісь Ox. Область D називається ***правильною*** (***стандартною***) ***в напрямку осі*** Oy, якщо виконуються наступні умови:

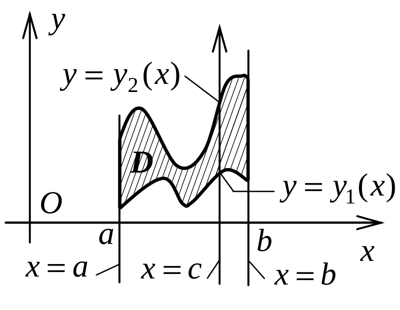

Рисунок 1.5

1) вона обмежена знизу «горизонтальною» ***лінією входу*** $y = y_1(x)$, зверху – «горизонтальною» ***лінією виходу*** $y = y_2(x)$, а зліва і справа – вертикальними прямими відповідно $x = a$ і $x = b$ ($a < b$);

2) довільна пробна пряма $x = c$, що паралельна осі Oy, так само напрямлена і проходить через деяку внутрішню точку c відрізка $[a;b]$, перетинає межу цієї області лише в двох точках: в одній точці на ближній лінії входу та в одній точці на дальній лінії виходу;

3) лінію входу (аналогічно лінію виходу) можна задати в явному вигляді одним рівнянням $y = y_1(x)$ (аналогічно $y = y_2(x)$), розв'язаним відносно y.

Правильна в напрямку осі Oy плоска область D може бути задана системою нерівностей

$$\boxed{\begin{cases} a \le x \le b; \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), \end{cases}}$$

де $D \xrightarrow{Oy} [a;b] \subset Ox$.

Площу такої області можна подати як алгебраїчну суму площ відповідних криволінійних трапецій, одна з основ кожної з яких лежить на осі Ox. Тоді площу правильної в напрямку осі Oy області D можна обчислити за формулою:

$$\boxed{S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx}.$$

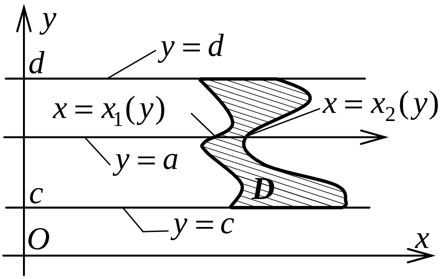

Рисунок 1.6

Аналогічно визначається **_правильна_** (**_стандартна_**) **_в напрямку осі_** Ox плоска область D (рис. 1.6). При цьому змінні x і y міняються ролями. (Сформулюйте означення самостійно).

Правильна в напрямку осі Ox плоска область D може бути задана системою нерівностей

$$\boxed{\begin{cases} c \le y \le d; \\ x_1(y) \le x \le x_2(y), \end{cases}} \qquad \text{де } D \xrightarrow{Ox} [c;d] \subset Oy.$$

Площу правильної в напрямку осі Ox області D можна обчислити за формулою:

$$\boxed{S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))\,dy}.$$

Якщо область D – правильна в напрямку обох координатних осей Ox і Oy, то вона називається просто **_правильною_** (**_стандартною_**).

Наприклад, область, обмежена еліпсом $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, є правильною. Область D: $x^2 \le y \le 2 - x^2$; $x \in [-1;1]$, обмежена двома вертикальними параболами, що перетинаються, – правильна в напрямку осі Oy, але неправильна в напрямку осі Ox. Кругове кільце $r^2 \le x^2 + y^2 \le R^2$ – неправильне в обох напрямках.

Зауваження 3. Якщо область D – неправильна, то звичайно прямими, що паралельні осям координат, її розбивають на правильні частини, що не мають спільних внутрішніх точок.

Приклад 1. Знайти площу області D, обмеженої лініями $x = 4 - \sqrt{y}$, $x - y + 2 = 0$ та $y = 1$. Задачу розв'язати двома способами: а) використовуючи інтегрування за змінною x; б) використовуючи інтегрування за змінною y. Для кожного способу зробити відповідний рисунок.

□ Знайдемо характерні точки області D – її кутові точки, в яких перетинаються лінії, що утворюють межу області. Для цього складемо і розв'яжемо відповідні системи з рівнянь цих ліній:

$$\begin{cases} x = 4 - \sqrt{y}; \\ y = 1; \end{cases} \quad x = 3;\ A(3;1); \quad \begin{cases} x - y + 2 = 0; \\ y = 1; \end{cases} \quad x = -1;\ B(-1;1);$$

$$\begin{cases} x = 4 - \sqrt{y}; \\ x - y + 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y = (4 - x)^2,\ x \le 4; \\ x - (4 - x)^2 + 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 2; \\ x_2 = 7 > 4; \end{matrix}$$

$$y_1 = (4-2)^2 = 4; \quad C(2;4).$$

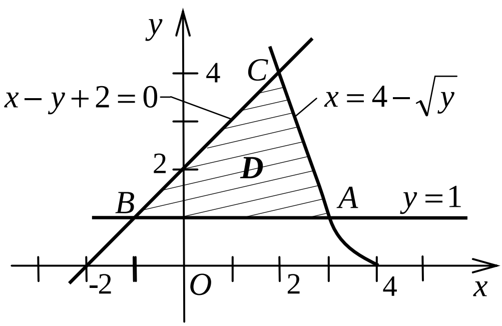

Рисунок 1.7

За цими точками побудуємо ескізи заданих ліній – двох прямих $x - y + 2 = 0$, $y = 1$ і лівої половини $x = 4 - \sqrt{y}$ вертикальної параболи. Одержимо попереднє зображення області D (рис. 1.7) і проаналізуємо її форму.

а) Щоб скористатися формулою $S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx$, необхідно подати область D як правильну в напрямку осі Oy. Якщо у вибраному напрямку вона неправильна, то її треба розбити на правильні частини. З рис. 1.7 видно, що область D – неправильна, оскільки її верхня межа утворена двома різними лініями, що з'єднуються в кутовій точці C. Тому розбиваємо область D на дві правильні частини D_1 і D_2 (рис. 1.8).

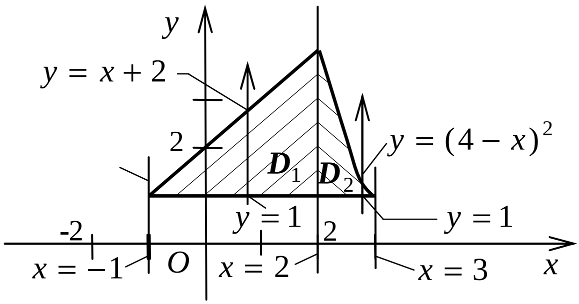

Рисунок 1.8

Нехай площа першої фігури S_1, площа другої фігури S_2. Тоді шукана площа заданої області $S = S_1 + S_2$. Проведемо обчислення:

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{2}((x+2)-1)\,dx + \int_{2}^{3}\left((x-4)^2-1\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{2}(x+1)\,dx + \int_{2}^{3}(x^2-8x+15)dx = \left((1/2)x^2+x\right)\Big|_{-1}^{2} +$$

$$+\left((1/3)x^3-4x^2+15x\right)\Big|_{2}^{3} = 2+2-1/2+1+9-36+45-$$

$$-8/3+16-30 = 35/6 \text{ (кв. од.).}$$

б) Щоб скористатися формулою $S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))\,dy$, необхідно розглянути область D як правильну в напрямку осі Ox. Якщо у вибраному напрямку вона неправильна, то треба розбити її на правильні частини. З рис. 1.7 видно, що область D у напрямку осі Ox є правильною. Відповідне зображення подано на рис. 1.9.

Проведемо обчислення:

$$S=\int_1^4\left(\left(4-\sqrt{y}\right)-(y-2)\right)dy=\int_1^4\left(6-\sqrt{y}-y\right)dy=$$

$$=\left(6y-(2/3)\,y^{3/2}-(1/2)\,y^2\right)\Big|_1^4=24-16/3-8-6+2/3+$$

$$+1/2=35/6 \text{ (кв. од.).} \quad \blacksquare$$

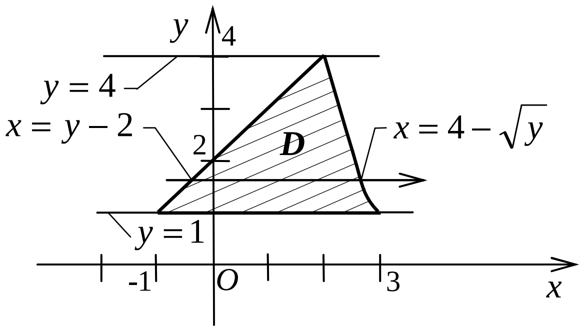

Рисунок 1.9

Зауваження 4. Звичайно, при обчисленні площі конкретної фігури треба використовувати особливості її форми і вибирати той спосіб її подання як правильної області, що приводить до більш простих розрахунків.

Приклад 2. Обчислити площу фігури D, обмеженої параболами $y=2x-x^2+3$ і $y=x^2-4x+3$.

□ Знайдемо точки перетину парабол:

$$\begin{cases} y=2x-x^2+3; \\ y=x^2-4x+3; \end{cases} \quad 2x-x^2+3=x^2-4x+3;\ 2x(x-3)=0;$$

$$x_1=0;\ y_1=3;\ x_2=3;\ y_2=0;\ x=3;\ A(0;3);\ B(3;0).$$

Характерними точками також є вершини парабол. Для знаходження вершин і зручності побудови парабол виділимо в їх рівняннях повні квадрати двочлена:

$$y=2x-x^2+3=-(x^2-2x+1)+1+3=4-(x-1)^2;\ C(1;4);$$

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1;\ E(2;-1).$$

Вказану фігуру D зображено на рис. 10.

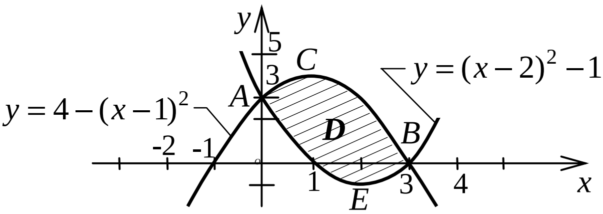

Рисунок 1.10

З нього видно, що область D – правильна в напрямку осі Oy. Крім того, задані рівняння кривих, що обмежують область, мають явний вигляд відносно змінної y. Відповідне зображення подано на рис. 1.11.

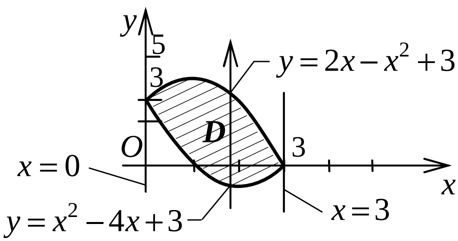

Рисунок 1.11

За формулою $S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx$ маємо:

$$S = \int_0^2 \Big((2x - x^2 + 3) - (x^2 - 4x + 3)\Big)dx = \int_0^2 (6x - 2x^2)\,dx =$$

$$= \Big(3x^2 - (2/3)x^3\Big)\Big|_0^3 = 27 - 18 = 9 \text{ (кв. од.)}. \ \blacksquare$$

1.4.2 Обчислення довжини дуги кривої

Нехай на координатній площині Oxy задана деяка лінія рівнянням у явній формі $y = y(x)$. Потрібно обчислити довжину L її дуги L_{AB}. (рис. 1.12).

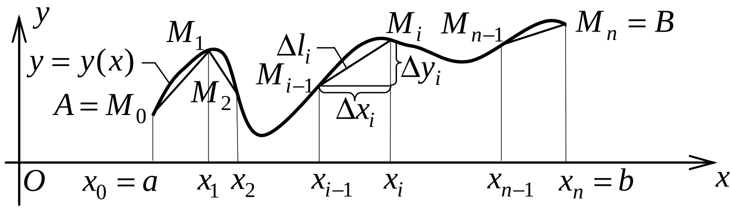

Рисунок 1.12

Розіб'ємо дугу L_{AB} довільним способом на n елементарних дуг Δl_i, $i = \overline{1,n}$ точками $A = M_0, M_1, M_2, ..., M_n = B$ з абсцисами $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_i < ... < x_n = b$ і проведемо хорди $M_0M_1, M_1M_2, ..., M_{i-1}M_i, ..., M_{n-1}M_n$, довжини яких позначимо відповідно через Δl_1, $\Delta l_2, \ldots, \Delta l_i, ..., \Delta l_n$. Тоді маємо ламану $M_0M_1...M_i...M_{n-1}M_n$, вписану в дугу L_{AB}. Довжина ламаної L_n дорівнює сумі довжин її ланок $L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$.

Довжиною L ***дуги*** L_{AB} називають границю довжини L_n вписаної ламаної при необмеженому здрібненні розбиття, тобто коли довжина її найбільшої ланки прямує до нуля (при цьому число n цих ланок прямує до нескінченності):

$$L = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i .$$

Теорема. Якщо функція $y = y(x)$, *визначена на відрізку* $[a;b]$, *неперервна разом зі своєю похідною на цьому відрізку, то довжина* L *дуги* L_{AB}, *що служить її графіком на відрізку* $[a;b]$, *обчислюється за формулою*

$$\boxed{L=\int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx}\,.$$

□ Позначимо $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $\Delta y_i = y(x_i) - y(x_{i-1})$. Тоді

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1+(\Delta y_i/\Delta x_i)^2}\,\Delta x_i$$

За формулою Лагранжа про скінченні прирости маємо

$\Delta y_i/\Delta x_i = (y(x_i) - y(x_{i-1}))/(x_i - x_{i-1}) = y'(c_i)$, де $x_{i-1} < c_i < x_i$.

Отже, $\Delta l_i = \sqrt{1+(y'(c_i))^2}\,\Delta x_i$, оскільки $\Delta x_i > 0$.

Таким чином, довжина вписаної ламаної дорівнює

$$L_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{1+(y'(c_i))^2}\,\Delta x_i\ .$$

За умовою похідна $y'(x)$ – неперервна, тому функція $\sqrt{1+(y'(x))^2}$ теж неперервна. Тоді вираз для довжини ламаної L_n є інтегральною сумою для неперервної функції. Отже, існує визначений інтеграл – границя L_n при необмеженому здрібненні розбиття, що дає довжину L дуги L_{AB}:

$$L = \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n \sqrt{1+(y'(c_i))^2}\,\Delta x_i = \int_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx\,.\ \blacksquare$$

Приклад 1. Знайти довжину вказаної дуги

$$y = \ln x,\ x\in[\sqrt{3};\sqrt{8}].$$

□ Похідна $y' = 1/x$. Тоді:

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+(1/x)^2}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx =$$

$$=\left|x^2+1=t^2;\ \sqrt{1+x^2}=t;\ x=\sqrt{t^2-1};\ dx = t\,dt\Big/\sqrt{t^2-1}\right.\ ;$$

$$t_1=\sqrt{1+3}=2; \atop t_1=\sqrt{1+8}=3 \Bigg| = \int_2^3 \frac{t\cdot t\,dt}{\sqrt{t^2-1}\sqrt{t^2-1}} = \int_2^3 \frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt = \int_2^3 dt +$$

$$+\int_2^3 \frac{dt}{t^2-1} = t\,|_2^3 + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3 = 3-2+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right)=$$

$$=1+(1/2)\ln(3/2) \text{ (од.).} \ \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти довжину кола $x^2+y^2=R^2$.

□ Довжина L_1 дуги кола, що розташована у першому квадранті, складає четверту частину довжини L всього кола. Рівняння цієї дуги має вигляд $y=\sqrt{R^2-x^2}$, звідки $y'=-x\big/(R^2-x^2)^{1/2}$. Тоді довжину L кола можна обчислити так:

$$L=4L_1=4\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=4R\int_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=4R\arcsin\frac{x}{R}\bigg|_0^R=$$

$$=4R(\arcsin 1-\arcsin 0)=2\pi R \text{ (од.).} \ \blacksquare$$

1.4.3 Обчислення об’єму тіла обертання

Об'єм тіла з відомими площами паралельних перерізів.

Нехай маємо деяке тіло T. Припустимо, що відома площа будь-якого перерізу цього тіла площиною, що перпендикулярна до осі Ox (рис. 1.13). Ця площа залежить від положення січної площини, тобто є функцією від x: $S=S(x)$. Знайдемо об'єм V тіла.

Припустимо, що функція $S(x)$ – неперервна на відрізку $[a;b]$, що служить проекцією тіла T на вісь Ox. Проведемо довільно площини $x=x_0$, $x=x_1$, ..., $x=x_i$, ..., $x=x_n$, де $a=x_0<x_1<x_2<...<x_i<...<x_n=b$. Тим самим тіло розбивається на елементарні шари між сусідніми площинами $x=x_{i-1}$ і $x=x_i$. На кожному частинному проміжку $[x_{i-1};x_i]$ візьмемо довільну точку

c_i і для кожного i-го шару побудуємо елементарний циліндр, твірна якого паралельна осі Ox і має довжину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, а напрямною служить контур перерізу тіла T площиною $x = c_i$. Тоді об'єм шару ΔV_i наближено дорівнює об'єму такого циліндра з площею основи $S(c_i)$ і висотою Δx_i: $\Delta V_i \approx S(c_i)\Delta x_i$. Об'єм V тіла T наближено дорівнює сумі V_n об'ємів усіх частинних циліндрів: $V \approx V_n = \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\,\Delta x_i$. Точність цього наближення підвищується зі зменшенням кроків Δx_i розбиття.

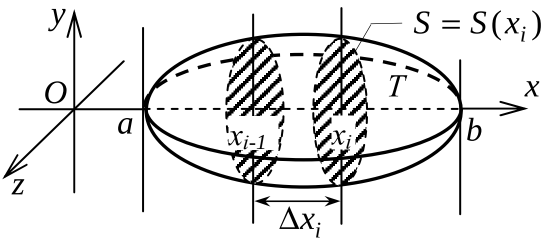

Рисунок 1.13

Границя цієї суми (якщо вона існує) при необмеженому здрібненні розбиття (коли $\max \Delta x_i \to 0$ і при цьому, очевидно, $n \to \infty$) визначає об'єм V даного тіла T: $V = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\,\Delta x_i$.

Таким чином, об'єм V є границею інтегральної суми V_n для неперервної функції $S(x)$ на відрізку $[a;b]$, тому вказана границя існує і дорівнює визначеному інтегралу: $\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}$.

Приклад 1. Знайти об’єм еліпсоїда

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

□ У перерізі еліпсоїда (рис. 1.14) площиною, паралельною площині Oyz на відстані x від неї, утворюється еліпс

$$\begin{cases} y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 - x^2/a^2; \\ x = const \end{cases}$$

або $\quad y^2 \Big/ \left(b^2(1 - x^2/a^2)\right) + z^2 \Big/ \left(c^2(1 - x^2/a^2)\right) = 1$

з півосями $b_1 = b\sqrt{1 - x^2/a^2}, \quad c_1 = c\sqrt{1 - x^2/a^2}$.

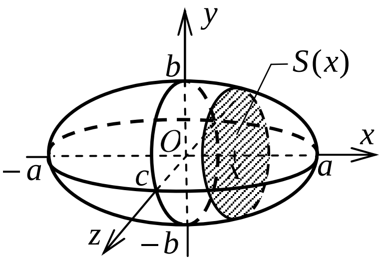

Рисунок 1.14

Площа такого еліпса

$$S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi bc\left(1 - x^2/a^2\right).$$

Обчислимо об'єм еліпсоїда, враховуючи його симетрію відносно площини Oyz:

$$V = \pi bc\int_{-a}^{a}(1 - x^2/a^2)\,dx =$$

$$= 2\pi bc\int_{0}^{a}(1 - x^2/a^2)\,dx =$$

$$= 2\pi bc\left(x - x^3/(3a^2)\right)\Big|_0^a = (4/3)\pi abc \text{ (куб.од.).} \ \blacksquare$$

***Об'єм тіла обертання*.**

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену графіком неперервної невід'ємної функції $y = y(x) \geq 0$, віссю Ox і двома прямими $x = a$ та $x = b$, де $a \leq b$. Якщо обертати цю фігуру навколо осі Ox, то утвориться тіло обертання T (рис. 1.15). Переріз цього тіла площиною, паралельною площині Oyz на відстані x від неї, – круг з площею $S(x) = \pi R^2 = \pi(y(x))^2$. Тоді об'єм тіла обертання можна обчислити за формулою

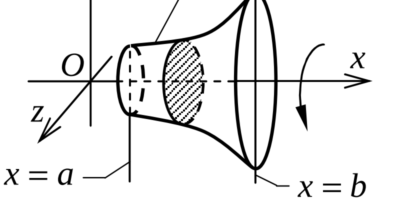

Рисунок 1.15

$$\boxed{V = \pi\int_{a}^{b} y^2(x)\,dx}\,.$$

Приклад 2. Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням плоскої фігури, обмеженої лініями $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$, навколо осі Ox.

□ Тіло, об'єм якого треба знайти, зображене на рис. 1.16. Фігура (криволінійна трапеція), що обертається, показана штриховою.

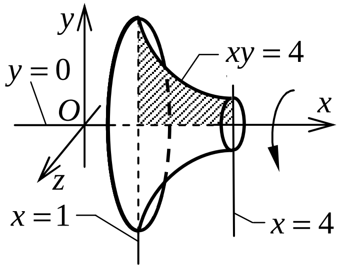

Рисунок 1.16

Проведемо обчислення:

$$V=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx=\pi\int_1^4 (4/x)^2\,dx=$$

$$=16\pi(-1/x)\Big|_1^4=12\pi \text{ (куб.од.).} \ ■$$

Приклад 3. Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням плоскої фігури D, обмеженої дугою синусоїди $y=4\sin x,\ x\in[0;\pi/6]$, віссю Oy і горизонтальною прямою $y=2$, навколо осі Ox.

(Розв'яжіть самостійно).

1.5. Диференціальні рівняння

1.5.1 Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь

При вивченні різноманітних явищ у науці, техніці та інших сферах часто не вдається безпосередньо встановити функціональну залежність між значеннями шуканих і відомих величин, проте можливо виявити зв'язки між нескінченно малими приростами (диференціалами) змінних, що фігурують у задачі. Диференціальні зв'язки завдяки лінеаризації, як правило, суттєво простіші скінченних. Крім того, результати спостережень чи експериментів часто подаються в диференціальній формі. Тому для моделювання неперервних динамічних процесів широко використовуються диференціальні та інші споріднені з ними рівняння. Далі наведемо декілька прикладів подібних задач.

Задача 1. Тіло масою m падає з деякої висоти. Потрібно встановити закон $v=v(t)$ зміни швидкості v з бігом часу t, якщо на тіло діють сила тяжіння $F_1=mg$ (g − прискорення вільного падіння) і гальмуюча сила опору повітря $F_2=-kv$, пропорційна швидкості (коефіцієнт пропорційності $k>0$). За другим законом Ньютона $ma = F$, де $a = dv/dt$ − прискорення рухомого тіла, а $F = F_1 + F_2 = mg - kv$ − рівнодійна сил, діючих на тіло. Отже, $dv/dt = mg - kv$. Одержано диференціальне рівняння відносно невідомої функції $v = v(t)$.

Задача 2. Повні витрати V залежать від об'єму (кількості одиниць) виробленої продукції x. Знайти функцію $V = V(x)$, якщо відомо: швидкість росту витрат dV/dx для всіх значень x дорівнює середнім витратам на одиницю продукції V/x.

Таким чином, маємо диференціальне рівняння $dV/dx = V/x$, розв'язком якого при додатковій умові $V(1) = V_0$ служить лінійна функція: $V = V_0 x$.

Задача 3. Нехай в початковий момент $t = 0$ часу t на деякій фірмі вироблялося x_0 одиниць продукції, а швидкість зростання dx/dt випуску продукції x в довільний момент часу t прямо пропорційна поточному об'єму інвестування $I(t)$ зі сталим коефіцієнтом пропорційності k. Знайти залежність $x = x(t)$ кількості виробленої продукції від часу при сталому інвестуванні $I(t) = I_0$.

Таким чином, приходимо до диференціального рівняння $dx/dt = kI_0$. Розв'язком цього рівняння при додатковій умові $x(0) = x_0$ служить лінійна функція: $x = kI_0 t + x_0$.

Задача 4. Відомо, що швидкість зростання dK/dt інвестованого капіталу K в довільний момент часу t прямо пропорційна поточній величині капіталу $K(t)$ з коефіцієнтом пропорційності $p/100$, де p – узгоджений відсоток неперервного зростання капіталу. Знайти закон зростання $K = K(t)$ інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової інвестиції $K(0) = K_0$.

Таким чином, маємо диференціальне рівняння $\dfrac{dK}{dt} = \dfrac{p}{100}K$, розв'язком якого при додатковій умові $K(0)=K_0$ служить експонента: $K=K_0e^{pt/100}$.

Задача 5. Нехай ведеться виборча компанія. У початковий момент часу $t_0=0$ агітаційну інформацію про кандидата A мають x_0 громадян, загальна кількість яких дорівнює X. Далі ця інформація поширюється через спілкування людей між собою. Припустимо, що швидкість цього процесу dx/dt (зростання числа громадян $x=x(t)$, ознайомлених з даною інформацією за час t) прямо пропорційна як числу x вже проінформованих на даний момент t людей, так і числу $X-x$ громадян, ще не охоплених агітацією.

Таким чином, приходимо до диференціального рівняння

$$dx/dt=kx(X-x) \quad \text{або} \quad dx/dt=kXx-kx^2,$$

де k − додатний сталий коефіцієнт пропорційності.

Розв'язком цього рівняння при додатковій умові $x(0)=x_0$ служить ***логістична крива***:

$$x=X\Big/\left(1+(X/x_0-1)\,e^{-Xkt}\right).$$

Подібне диференціальне рівняння моделює поширення технічних нововведень, зростання популяції певного виду тварин та інші процеси.

1.5.2 Поняття про диференціальне рівняння. Загальний і частинний розв'язки та їх геометричний зміст

Рівняння називається ***диференціальним***, якщо воно містить похідні (диференціали) шуканої функції.

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної (диференціала), що входить у нього.

Коли шукана функція $y=y(x)$ є функцією однієї змінної x, то диференціальне рівняння (ДР) називають ***звичайним***. Далі будемо займатися лише звичайними ДР.

Диференціальне рівняння n***–го порядку*** зв'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y = f(x)$ та її похідні $y', y'', ..., \ y^{(n)}$ (чи відповідні диференціали).

Диференціальне рівняння n–го порядку можна подати в ***загальному вигляді***

$$\boxed{F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0},$$

де $y = y(x)$ – шукана функція. Рівняння може не містити в явному вигляді незалежну змінну x, саму шукану функцію y та її похідні нижчих порядків $y', y'', ..., y^{(n-1)}$, але до нього обов'язково повинна входити n-а похідна $y^{(n)}$.

Це неявна форма запису ДР. Розв'язавши загальне рівняння відносно найвищої похідної, отримаємо ***канонічний*** (***нормальний***) ***вигляд*** ДР

$$\boxed{y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)}.$$

Наприклад, $y'''-3(y')^4 - \sqrt{y} - 2\sin x = 0$ – ДР третього порядку, подане у загальній (неявній) формі; $y^{(6)} = y'''-4x(y')^8$ – ДР шостого порядку, записане в канонічній (явній) формі.

Уже відома задача знаходження первісної $y = F(x)$ для даної функції $f(x)$ породжує найпростіше диференціальне рівняння $y' = f(x)$, розв'язування якого зводиться до інтегрування.

Розв'язком диференціального рівняння називається довільна функція $y = y(x)$, що при підстановці в це рівняння перетворює його в тотожність.

Графік розв'язку ДР називається ***інтегральною кривою***.

Зауваження 1. Розв'язок ДР n–го порядку є n разів диференційованою функцією. Тому інтегральна крива є досить гладкою.

Процес знаходження розв'язку ДР називається його ***інтегруванням***.

Зауваження 2. Розв'язок ДР, записаний ***у неявній формі***, часто називають ***інтегралом*** диференціального рівняння. Розв'язок ДР також може подаватися ***в параметричній формі***.

Зауваження 3. Диференціальне рівняння вважається ***розв'язаним***, якщо множина його розв'язків задається співвідношеннями без диференціювання, що можуть включати операції інтегрування відомих функцій. Серед вказаних інтегралів допускаються й ті, що не виражаються через елементарні функції у скінченному вигляді. Як правило, будемо намагатися знаходити розв'язок ДР у найбільш простій явній формі та обчислювати всі наявні інтеграли.

Приклад 1. Перевірити, чи служить явно задана функція $y = C_1 + C_2 e^{10x} - x^3/30 - x^2/100 - x/500$, де C_1, C_2 − довільні сталі, розв'язком диференціального рівняння $y'' - 10y' = x^2$.

□ Диференціюючи вказану функцію, знайдемо

$$y' = 10C_2 e^{10x} - x^2/10 - x/50 - 1/500;$$

$$y'' = 100C_2 e^{10x} - x/5 - 1/50.$$

Підставимо функцію та її похідні у рівняння:

$$100C_2 e^{10x} - x/5 - 1/50 - 10\left(10C_2 e^{10x} - x^2/10 - x/50 - \right.$$

$$\left. -1/500\right) = x^2; \quad x^2 = x^2.$$

Оскільки тотожність вірна, то вказана функція є розв'язком заданого ДР. ■

Щоб знайти шукану функцію з ДР n-го порядку, треба в загальному випадку виконати n операцій інтегрування, що дає n довільних сталих. Таким чином, диференціальне рівняння має безліч розв'язків.

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку є функція $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, що містить n довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ і задовольняє диференціальному рівнянню при будь-яких допустимих значеннях $C_1, C_2, ..., C_n$.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок, який одержується із загального розв'язку при конкретних фіксованих значеннях довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$.

Геометричний зміст. Загальному розв'язку відповідає сім'я інтегральних кривих. При цьому через кожну внутрішню точку області визначення сім'ї проходить єдина інтегральна крива. Частинному розв'язку відповідає конкретний екземпляр з сім'ї інтегральних ліній.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = 3x^2$. Вказати три його частинні розв'язки.

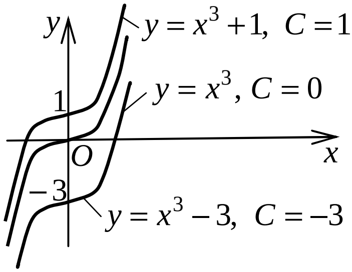

Рисунок 1.17

□ $dy/dx = 3x^2$; $dy = 3x^2 dx$;

$$y = 3\int x^2 dx = x^2 + C.$$

Отже, $y = x^3 + C$ − загальний розв'язок. Геометрично йому відповідає однопараметрична сім'я інтегральних кривих. Поклавши послідовно $C = -3$, $C = 0$ і $C = 1$, отримаємо три частинні розв'язки, зображені на рис. 1.17. ■

1.5.3 Початкові та крайові умови. Задача Коші та крайова задача

Для знаходження конкретних значень довільних сталих, що входять у загальний розв'язок, звичайно використовуються:

– ***початкові умови*** – відомі значення функції та її похідних в деякій одній фіксованій точці $x = x_0$; або

– ***крайові*** (***граничні***) ***умови*** – відомі значення функції та її похідних в декількох різних фіксованих точках.

Початкових або крайових умов повинно бути стільки, скільки довільних сталих.

Для ДР n-го порядку початкові умови мають вигляд:

$$y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_0';\ldots;\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ − відомі числа (початкові дані).

Диференціальне рівняння разом з початковими умовами називають ***початковою задачею*** (***задачею Коші***).

Диференціальне рівняння разом з крайовими умовами називають ***крайовою*** (***граничною***) ***задачею***.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші (знайти частинний розв'язок заданого ДР, що задовольняє вказаним початковим умовам):

$$y''=\cos x\,; \quad y(0)=1\,; \quad y'(0)=2\,.$$

□ Знайдемо загальний розв’язок рівняння:

$$y'=\int\cos x dx\,; \quad y'=\sin x+C_1\,; \quad y=\int(\sin x+C_1)\,dx\,;$$

$$y=-\cos x+C_1x+C_2\,.$$

В одержаний загальний розв’язок та його першу похідну підставимо задані початкові умови і знайдемо C_1, C_2:

$$1=-\cos 0+C_1\cdot 0+C_2\,;\ 2=\sin 0+C_1\,;\ C_1=2\,,\ C_2=2\,.$$

Тоді частинний розв’язок рівняння (розв'язок задачі Коші):

$$y_K=-\cos x+2x+2\,. \quad ■$$

Приклад 2. Розв’язати крайову задачу (знайти частинний розв’язок заданого ДР, що задовольняє вказаним граничним умовам):

$$y''=12x\,; \quad y(0)=3\,; \quad y'(1)=-1\,.$$

□ Знайдемо загальний розв’язок рівняння:

$$y'=12\int x\,dx\,; \quad y'=6x^2+C_1\,; \quad y=\int(6x^2+C_1)\,dx\,;$$

$$y=2x^3+C_1x+C_2\,.$$

В отриманий загальний розв’язок та його першу похідну підставимо задані крайові умови і знайдемо C_1, C_2:

$$3=0+C_1\cdot 0+C_2\,;\ -1=3\cdot 1+C_1\,;\ C_1=-4\,,\ C_2=3\,.$$

Звідси частинний розв’язок (розв'язок крайової задачі):

$$y_b=2x^3-4x+3\,. \quad ■$$

Зауваження 1. У диференціального рівняння можуть існувати так звані ***особливі розв’язки***, які неможливо дістати із загального розв’язку ні при яких значеннях довільних сталих. Геометрично особлива інтегральна крива не входить у сім’ю, що відповідає загальному розв’язку, а тому не може лежати всередині області існування цієї сім’ї.

Наприклад, нехай маємо рівняння $y'=y^{2/3}$. При $y\neq 0$ отримаємо: $y^{-2/3}y'=1$; $(3y^{1/3})'=1$; $3y^{1/3}=x+C$. Звідси $y=(1/27)(x+C)^3$ − загальний розв'язок. Але розв'язок $y(x)\equiv 0$ до нього не входить і тому є особливим.

Зауваження 2. У деяких випадках виникає обернена задача знаходження ДР, що описує задану сім'ю інтегральних кривих.

Приклад 3. Знайти ДР першого порядку, загальний розв'язок якого $y=C\sin x-x^2$, де C − довільна стала.

□ Продиференціюємо загальний розв'язок. Вираз для похідної $y'=C\cos x-2x$ не можна назвати диференціальним рівнянням, оскільки коефіцієнт C − невизначений. Вилучимо з нього C. Для цього з початкового рівняння $y=C\sin x-x^2$ виразимо C і підставимо знайдене значення у співвідношення для похідної:

$$C=(y+x^2)/\sin x;\quad y'=\cos x(y+x^2)/\sin x-2x \text{ або}$$

$$y'\sin x=y\cos x+x^2\cos x-2x\sin x$$

− шукане ДР першого порядку. ■

Зауваження 3. Теорія диференціальних рівнянь ще далека до завершення. Для ДР у канонічній формі доведено теореми, що виражають достатні умови існування та єдиності розв'язку відповідної задачі Коші. На жаль, аналогічні умови для крайових задач значно жорсткіші та досить віддалені від необхідних. У практичних застосуваннях задача Коші, при певних обмеженнях, має єдиний розв'язок, крайова задача може мати довільну кількість розв'язків.

1.5.4 Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння першого порядку має ***загальний вигляд*** $\boxed{F(x,y,y')=0}$, де $y=y(x)$ – шукана функція незалежної змінної x.

Припустимо, що це рівняння можна розв'язати відносно похідної і подати його в ***нормальній формі*** $\boxed{y'=f(x,y)}$. Для таких рівнянь справджується

теорема Коші (*умови існування та єдиності розв'язку*). *Нехай* *у рівнянні* $y' = f(x,y)$ *функція* $f(x,y)$ *та її частинна похідна* $f_y'(x,y)$ *неперервні у деякій області* D *площини* Oxy. *Тоді для довільної внутрішньої точки* $M_0(x_0;y_0)$ *цієї області існує визначений і диференційовний у деякому околі точки* x_0 *єдиний розв'язок* $y = y(x)$ *даного рівняння, що задовольняє початковій умові* $y(x_0) = y_0$. (Без доведення).

З неперервності правої частини $f(x,y)$ випливає існування розв'язку, а умова неперервності похідної $f_y'(x,y)$ забезпечує його єдиність.

Геометричний зміст: для кожної внутрішньої точки $M_0(x_0;y_0)$ області D існує і причому єдина інтегральна крива ДР $y' = f(x,y)$, яка проходить через цю точку.

Особливими точками ДР $y' = f(x,y)$ називаються ті, в яких не виконуються умови теореми Коші, тобто де права частина $f(x,y)$ або її похідна $f_y'(x,y)$ мають розрив.

Такі точки можуть бути ізольованими чи утворювати ***особливі лінії***. Якщо особлива лінія є інтегральною, то вона відповідає особливому розв'язку ДР. Геометрично через особливу точку або не проходить жодна інтегральна крива, або проходить не менше двох.

Зауваження 1. При грубій оцінці розв'язку ДР часто використовуються різні ***спрощуючі прийоми***: лінеаризація функцій; усереднення коефіцієнтів; розщеплення на швидкі та повільні процеси; розбиття області дослідження на частини, де домінують певні фактори; введення додаткових чи відкидання наявних малих членів і т.п.

Не існує єдиного аналітичного методу точного розв'язування ДР першого порядку. Далі розглянемо окремі типи таких рівнянь і відповідні методи знаходження аналітичного розв'язку.

Зауваження 2. Зустрічаються рівняння, що одночасно відносяться до різних типів. Інколи ДР тотожними перетвореннями чи заміною змінних можна перевести з одного типу в інший. Для розв'язування таких рівнянь треба вибирати їх найзручніше подання.

Диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x,y)$ називається ***рівнянням з відокремлюваними змінними***, якщо його права частина $f(x,y)$ може бути подана як добуток $f(x,y)=h(x)\,g(y)$ двох функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної.

Щоб знайти розв'язок такого ДР $\boxed{y'=h(x)\,g(y)}$, треба відокремити змінні: похідну записати як відношення диференціалів $y'=dy/dx$, а потім обидві його частини помножити на dx і поділити на такий вираз $g(y)$, щоб в одну частину рівняння входила тільки змінна y, а в іншу − тільки змінна x. Шуканий розв'язок $y=y(x)$ перетворює одержане рівняння $dy/g(y)=h(x)\,dx$ у тотожність. Інтегруючи її, знайдемо загальний інтеграл рівняння:

$$\boxed{\int dy/g(y)=\int h(x)\,dx+C},$$

де C – довільна стала.

Зауваження 3. При діленні обох частин рівняння на вираз, який містить змінні x чи y, можна "втратити" розв'язки, що перетворюють цей вираз у нуль. Такі випадки треба розглядати окремо.

Зауваження 4. Для спрощення запису загального розв'язку ДР часто довільну сталу подають у вигляді деякого виразу з іншою довільною сталою C, при умові, що цей вираз приймає довільні значення. Наприклад, $(1/2)\ln C$, де $C>0$.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

а) $xyy'=1+y^2$; б) $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$;

в) $(x+xy^2)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0$.

□ а) Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$xy\frac{dy}{dx}=1+y^2;\quad \frac{ydy}{1+y^2}=\frac{dx}{x};\quad \int\frac{2ydy}{1+y^2}=2\int\frac{dx}{x};$$

$$\ln(1+y^2)=2\ln|x|+\ln|C|.$$

Вигляд одержаного загального інтеграла можна спростити потенціюванням. Саме тому довільна стала записана як логарифм іншої довільної сталої. Тоді загальний інтеграл можна записати так: $1+y^2=Cx^2$. Далі $y=\pm\sqrt{Cx^2-1}$ – загальний розв'язок в явній формі.

Виконуючи ділення, припускали, що $x \neq 0$, і могли втратити розв’язок $x = 0$. Підставляючи $x = 0$ у рівняння, переконуємося, що ця функція не є розв'язком.

б) Перенесемо синуси в один бік від знака рівності та перетворимо їх різницю в добуток, користуючись відповідною тригонометричною тотожністю:

$$y' = \sin(x - y) - \sin(x + y);$$

$$y' = 2\sin((x - y - x - y)/2)\cos((x - y + x + y)/2);$$

$$y' = 2\sin(-y)\cos x; \quad y' = -2\sin y \cos x.$$

Відокремимо змінні й проінтегруємо:

$$dy/\sin y = -2\cos x\,dx; \quad \int \frac{dy}{\sin y} = -2\int \cos x\,dx + \ln|C|;$$

$$\ln\left|tg(y/2)\right| = -2\sin x + \ln|C|; \quad \ln\left|tg(y/2)\right| = \ln\left|Ce^{-2\sin x}\right|;$$

$$tg(y/2) = Ce^{-2\sin x}$$

– загальний розв’язок у неявній формі (загальний інтеграл).

в) Спочатку винесемо з перших дужок x, з других − y, а потім відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$x(1 + y^2)\,dx + y(1 - x^2)\,dy = 0;$$

$$\frac{x\,dx}{1 - x^2} + \frac{y\,dy}{1 + y^2} = 0; \quad \int \frac{x\,dx}{1 - x^2} + \int \frac{y\,dy}{1 + y^2} = \frac{1}{2}\ln C.$$

Зробимо заміну змінної: у першому інтегралі $s = 1 - x^2$, у другому − $t = 1 + y^2$. Отримаємо

$$-\frac{1}{2}\int \frac{ds}{s} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln C;$$

$$(-1/2)\ln|s| + (1/2)\ln|t| = (1/2)\ln C; \quad \ln|t/s| = \ln C.$$

Здійснивши обернену підстановку та потенціювання одержимо загальний інтеграл рівняння

$$(1+y^2)/(1-x^2)=C.$$

Звідси $y=\pm\sqrt{C(1-x^2)-1}$ – загальний розв'язок в явній формі. ■

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші:

а) $y/y'=\ln y$, $y(2)=1$; б) $e^x y'+xy^2=0$, $y(0)=-1$.

□ а) Спочатку знайдемо загальний інтеграл рівняння:

$$y'=\frac{y}{\ln y};\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{\ln y};\quad \frac{\ln y\,dy}{y}=dx;\quad \int\frac{\ln y\,dy}{y}=\int dx.$$

Зробивши заміну $t=\ln y$, отримаємо

$$(1/2)\ln^2 y=x+C.$$

Враховуючи початкову умову $y(2)=1$, підставимо у рівняння замість x значення 2, замість y значення 1 і знайдемо C:

$$(1/2)\ln^2 1=2+C;\quad 2+C=0;\quad C=-2.$$

Отримуємо частинний розв'язок у неявній формі (частинний інтеграл)

$$\ln^2 y=2(x-2).$$

Звідси $y=e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ – частинний розв'язок в явній формі.

(Задачу б) розв'язати самостійно). ■

1.5.5 Однорідні рівняння першого порядку. Лінійні рівняння першого порядку

Функція $f(x,y)$ називається ***однорідною*** k***-го порядку однорідності***, якщо виконується тотожність

$$\boxed{f(tx,ty)=t^k f(x,y)}.$$

Приклад 1. Переконатися, що функція

$$f(x,y)=xy+5y^2\sin(x/y)+\sqrt{x^4+y^4}-x^5/(x^3+y^3)$$

є однорідною і знайти порядок однорідності.

$$\square\ f(tx,ty)=tx\cdot ty+5(ty)^2\sin(tx/ty)+\sqrt{(tx)^4+(ty)^4}-$$

$$-(tx)^5/((tx)^3+(ty)^3)=t^2xy+5t^2y^2\sin(x/y)+t^2\sqrt{x^4+y^4}-$$

$$-t^2x^5/(x^3+y^3)=t^2(xy+5y^2\sin(x/y)+\sqrt{x^4+y^4}-$$

$$-x^5/(x^3+y^3))=t^2 f(x,y);\quad k=2.$$

Отже, дана функція є однорідною другого порядку однорідності. ■

Диференціальним рівнянням з однорідною правою частиною (***однорідним рівнянням***) називається рівняння, яке можна подати у вигляді

$$\boxed{y'=f(y/x)}\ \text{або}\ \boxed{P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0},$$

де $f(y/x)$ − однорідна функція нульового порядку однорідності; $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ − однорідні функції одного порядку однорідності.

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною $u=y/x$, де $u=u(x)$ − допоміжна шукана функція. Тоді $y=ux$, $y'=u'x+u$ і ДР $y'=f(y/x)$ після перетворень приймає вигляд $du/\big(f(u)-u\big)=dx/x$.

Зауваження 1. Якщо $f(u)-u=0$, тобто $f(y/x)-y/x=0$. Тоді $f(y/x)=y/x$. Рівняння $y'=f(y/x)$ приймає вигляд ДР з відокремлюваними змінними $y'=y/x$ і розв’язується відповідним чином.

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

а) $y'=-3xy/(x^2-y^2)$; б) $\sqrt{x^2-y^2}\,dx+y\,dx-x\,dy=0$.

□ а) Це рівняння – однорідне, оскільки його права частина є однорідною функцією нульового порядку однорідності:

$$f(tx,ty)=-3(tx)(ty)/((tx)^2-(ty)^2)=-3t^2xy/(t^2(x^2-y^2))=$$

$$=-3xy/(x^2-y^2)=f(x,y).$$

Зробимо заміну $u = y/x$, де u − нова шукана функція аргументу x. Тоді $y = ux,\ \ y' = u'x + u$. Вихідне рівняння набуває вигляду

$$u'x + u = -3x \cdot ux/(x^2 - u^2x^2) = 3u/(u^2 - 1)\,;$$

$$u'x = \frac{3u}{u^2 - 1} - u;\ \ u'x = \frac{3u - u^3 + u}{u^2 - 1};\quad \frac{du}{dx}\,x = -\frac{u(u^2 - 4)}{u^2 - 1}\,.$$

Припускаючи, що $x \neq 0$ і $u(u^2 - 4) \neq 0$, тобто $u \neq 0$, $u \neq \pm 2$, відокремимо змінні:

$$\frac{(u^2 - 1)du}{u(u^2 - 4)} = -\frac{dx}{x}\,.$$

Після інтегрування обох частин рівняння знайдемо

$$\int \frac{(u^2 - 1)\,du}{u(u^2 - 4)} = \int \frac{(u^2 - 1)\,du}{u(u + 2)(u - 2)} = \int \left(\frac{A}{u} + \frac{B}{u + 2} + \frac{C}{u - 2}\right)du =$$

$$= \Big| A(u + 2)(u - 2) + Bu(u - 2) + Cu(u + 2) = u^2 - 1;$$

$$\left.\begin{array}{r} u = 0: \\ u = 2: \\ u = -2: \end{array} \begin{cases} -4A = -1, & A = 1/4; \\ 8C = 3, & C = 3/8; \\ 8B = 3; & B = 3/8 \end{cases}\right| = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} + \frac{3}{8}\int \frac{du}{u + 2} +$$

$$+ \frac{3}{8}\int \frac{du}{u - 2} = \frac{1}{4}\ln|u| + \frac{3}{8}\ln|u + 2| + \frac{3}{8}\ln|u - 2| + C =$$

$$= \frac{1}{8}\ln|u^2(u^2 - 4)^3| + C\,;\quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C\,;$$

$$(1/8)\ln|u^2(u^2 - 4)^3| = -\ln|x| + (1/8)\ln|C|;$$

$$\ln|u^2(u^2 - 4)^3| = \ln|Cx^{-8}|;\ \ u^2(u^2 - 4)^3 = Cx^{-8}.$$

Підставляючи значення $u = y/x$, одержимо загальний інтеграл рівняння:

$$(y/x)^2((y/x)^2 - 4)^3 = Cx^{-8}\ \text{ або }\ y^2((y^2 - 4x^2)^3 = C\qquad.$$

Виконуючи ділення, могли втратити розв’язки $x=0$, $u=0 \Rightarrow y=0$, $u=\pm 2 \Rightarrow y=\pm 2x$. Підставляючи їх у початкове рівняння, переконуємося, що функція $x=0$ не є розв'язком, а функції $y=0$ та $y=\pm 2x$ служать розв'язками, причому входять у загальний інтеграл при $C=0$.

б) Функції $P(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}+y$ та $Q(x,y)=-x$ є однорідними одного (першого) порядку однорідності. Це означає, що дане ДР є однорідним. Розв'яжемо його відносно похідної $y'=dy/dx$:

$$\sqrt{x^2-y^2}+y=x\,dy/dx;\quad y'=\sqrt{1-(y/x)^2}+y/x.$$

Покладемо $u=y/x$. Тоді $y=ux$, $y'=xu'+u$. Підставивши в рівняння вирази для y та y', отримаємо

$$x\,du/dx=\sqrt{1-u^2}.$$

Відокремимо змінні та проінтегруємо:

$$du/\sqrt{1-u^2}=dx/x;\quad \int du/\sqrt{1-u^2}=\int dx/x;$$

$$\arcsin u=\ln x+\ln C;\quad \arcsin u=\ln Cx.$$

Замінивши u на y/x, будемо мати загальний інтеграл

$$\arcsin(y/x)=\ln Cx \quad \text{або} \quad y=x\sin\ln Cx$$

– загальний розв’язок в явній формі.

Крім того, розв'язками є $u=\pm 1 \Rightarrow y=\pm x$, що могли бути втрачені при діленні. Ці розв'язки не містяться в загальному розв’язку і є особливими. ■

Диференціальне рівняння першого порядку, яке алгебраїчними перетвореннями можна звести до вигляду

$$\boxed{y'+p(x)y=q(x)},$$

де $p(x)$ і $q(x)$ − відомі неперервні функції від x (або сталі), називається ***лінійним***. Тобто, таке ДР є лінійним відносно шуканої функції $y=y(x)$ та її похідної $y'=dy/dx$.

Якщо $q(x)\equiv 0$, то рівняння називається ***лінійним однорідним***

(***ЛОДР***) (***лінійним рівнянням з нульовою правою частиною***), у протилежному випадку – ***лінійним неоднорідним*** (***ЛНДР***) (***лінійним рівнянням з ненульовою правою частиною***).

Лінійне однорідне рівняння – це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’яжемо його відповідним чином:

$$\boxed{y'+p(x)\,y=0};\;\; dy/y=-p(x)\,dx\,;\;\; \int dy/y=-\int p(x)\,dx\,;$$

$$\ln|y|=-\int p(x)\,dx+\ln|C|\,;\;\; \boxed{y=C\,e^{-\int p(x)\,dx}}$$

– загальний розв'язок.

Для розв'язування ЛНДР застосуємо ***метод варіації довільної сталої*** (***метод Лагранжа***). За цим методом загальний розв'язок шукаємо в такому ж самому вигляді, як і розв'язок відповідного однорідного ДР, одержаного відкиданням правої частини $q(x)$ (поклавши $q(x)\equiv 0$), але вважаємо C не сталою, а невідомою функцією x, тобто $\boxed{y=C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx}}$.

Знайдемо похідну y':

$$y'=C'(x)\,e^{-\int p(x)dx}-C(x)\,e^{-\int p(x)dx}p(x)\,.$$

Підставимо вирази для y і y' в неоднорідне ДР і отримаємо співвідношення для знаходження функції $C(x)$:

$$C'(x)\,e^{-\int p(x)dx}-C(x)\,e^{-\int p(x)dx}p(x)+p(x)\,C(x)\,e^{-\int p(x)dx}=$$

$$=q(x);\;\; C'(x)\,e^{-\int p(x)dx}=q(x)\,;\;\; C'(x)=q(x)\,e^{\int p(x)dx}\,.$$

Інтегруючи, одержуємо

$$C(x)=\int q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx+\tilde{C}\,,$$ де $\tilde{C}$ – довільна стала.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$\boxed{y=\left(\int q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx+\tilde{C}\right)e^{-\int p(x)\,dx}}\,.$$

Зауваження 2. Загальний розв'язок ЛНДР можна подати у вигляді суми

$$\boxed{y=\tilde{C}e^{-\int p(x)\,dx}+\left(\int q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx\right)e^{-\int p(x)\,dx}=\bar{y}+y_*},$$

де $\bar{y}=\tilde{C}e^{-\int p(x)\,dx}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння; $y_*=\left(\int q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx\right)e^{-\int p(x)\,dx}$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (при $\tilde{C}=0$).

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок ЛНДР першого порядку $x^2y'-x^2y\cos x=3e^{\sin x}$ методом варіації довільної сталої.

□ Ділячи обидві частини ДР на x^2, зводимо його до стандартного вигляду $y'-y\cos x=(3/x^2)e^{\sin x}$.

Розв'язуємо відповідне однорідне ДР (без правої частини):

$$y'-y\cos x=0;\;\; dy/dx=y\cos x;\;\; dy/y=\cos x\,dx;$$

$$\int dy/y=\int\cos x\,dx;\quad \ln|y|=\sin x+\ln|C|;\quad y=C\,e^{\sin x}$$

– загальний розв'язок.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y=C(x)e^{\sin x}$. Тоді $y'=C'(x)\,e^{\sin x}-C(x)\,e^{\sin x}\cos x$.

Підставляємо в неоднорідне ДР і знаходимо невідому функцію $C(x)$:

$$C'(x)\,e^{\sin x}-C(x)\,e^{\sin x}\cos x+C(x)\,e^{\sin x}\cos x=(3/x^2)e^{\sin x};$$

$$C'(x)=3/x^2;\;\; C(x)=3\int dx/x^2=-3/x+\tilde{C}.$$

Таким чином, $y=(-3/x+\tilde{C})e^{\sin x}$ – загальний розв’язок неоднорідного ДР. ■

Лінійне неоднорідне ДР можна розв'язати безпосередньо ***методом Бернуллі***. Згідно з ним загальний розв'язок будуємо у вигляді добутку двох функцій від x: $\boxed{y=u(x)v(x)}$ (***підстановка Бернуллі***). Оскільки при такій заміні вже відшукуються дві функції, то виникає додатковий ступінь вільності, що дозволяє розщепити лінійне ДР на два рівняння з відокремлюваними змінними.

Диференціюємо добуток: $y'=u'v+uv'$. Підставимо цей вираз у початкове рівняння, матимемо

$$u'v + uv' + puv = q \text{ або } u'v + u(v' + pv) = q .$$

Використовуючи наявний ступінь вільності, виберемо функцію v такою, що

$$v' + pv = 0 .$$

Це співвідношення є рівнянням з відокремлюваними змінними для функції $v = v(x)$. Інтегруючи його, виберемо найпростіший за формою частинний розв'язок $v = e^{-\int p(x)\,dx}$.

Підставимо знайдену функцію у передостаннє ДР (враховуючи, що $v' + pv = 0$) і отримаємо для функції $u = u(x)$ рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'v = q \quad \text{або} \quad du/dx = q(x)/v(x),$$

звідки $u = \int \big(q(x)/v(x)\big)dx + C$ – загальний розв’язок. Тут C – довільна стала.

Підставивши u і v у вираз для шуканої функції y, остаточно маємо

$$y = uv = \Big(\int \big(q(x)/v(x)\big)dx + C\Big)v(x) .$$

Приклад 4. Знайти загальний розв’язок ЛНДР першого порядку $y' + 2y = e^x$ за допомогою підстановки Бернуллі.

□ Рівняння є лінійним відносно шуканої функції y та її похідної y'. Зробимо заміну $y = u(x)\cdot v(x)$, тоді $y' = u'v + uv'$. Отримаємо рівняння

$$u'v + uv' + 2uv = e^x \quad \text{або} \quad u'v + u(v' + 2v) = e^x .$$

Знайдемо функцію v як частинний розв’язок рівняння $v' + 2v = 0$. Це ДР з відокремлюваними змінними. Відокремимо змінні і проінтегруємо його:

$$dv/dx + 2v = 0 ; \quad dv = -2v\,dx ; \quad dv/v = -2\,dx ;$$

$$\int dv/v = -2\int dx ; \quad \ln v = -2x .$$

Потенціюючи обидві частини рівняння, отримаємо $v = e^{-2x}$.

Враховуючи, що $v'+2v=0$, підставимо цю функцію у ДР, де виконали заміну, і одержимо рівняння з відокремлюваними змінними для функції $u=u(x)$: $u'e^{-2x}=e^{x}$.

Розв'язавши його, знайдемо функцію u:

$$e^{-2x}du/dx=e^{x};\ du=e^{3x}dx;\ \int du=\int e^{3x}dx;\ u=(1/3)e^{3x}+C.$$

Тоді загальний розв'язок початкового рівняння:

$$y=u\,v=((1/3)e^{3x}+C)e^{-2x} \quad \text{або} \quad y=(1/3)e^{x}+Ce^{-2x}. \quad \blacksquare$$

Приклад 5. Розв'язати задачу Коші і знайти значення $\tilde{y}=y_K(\tilde{x})$ отриманого розв'язку $y_K=y_K(x)$ при вказаному значенні аргументу $\tilde{x}$:

$$y'+2xy=xe^{-x^2},\ y(0)=2;\quad \tilde{x}=-1.$$

□ Задане рівняння – лінійне. Спочатку знайдемо його загальний розв'язок за допомогою підстановки Бернуллі $y=uv$. Здійснимо заміну:

$$u'v+u\,v'+2xuv=xe^{-x^2};\ u'v+u(v'+2xv)=xe^{-x^2}.$$

Знайдемо v як деякий частинний розв'язок рівняння $v'+2xv=0$:

$$dv/dx=-2xv;\ dv/v=-2x\,dx;\ \int dv/v=-2\int x\,dx;$$

$$\ln v=-x^2;\quad v=e^{-x^2}.$$

Підставимо отриману функцію у рівняння, в якому зробили заміну, і розв'яжемо його відносно u:

$$u'e^{-x^2}=xe^{-x^2};\ du/dx=x;\ du=x\,dx;\ u=x^2/2+C.$$

Одержуємо загальний розв'язок початкового ДР:

$$y=u\,v=(x^2/2+C)e^{-x^2}.$$

Виділимо частинний розв'язок, що задовольняє початковій умові $y(0)=2$. Для цього знайдемо відповідне значення довільної сталої C:

$$2=(0/2+C)e^0;\ C=2.$$

Підставивши $C=2$ у загальний розв’язок, дістаємо шуканий частинний розв’язок (розв'язок задачі Коші):

$$y_K=(x^2/2+2)e^{-x^2}.$$

Обчислимо значення цього розв’язку в точці $\tilde{x}=-1$:

$$y_K(-1)=((-1)^2/2+2)e^{-(-1)^2}=(5/2)e^{-1}.\quad\blacksquare$$

1.5.6 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Лінійним диференціальним рівнянням** n**-го порядку $(n\geq 1)$ називається рівняння вигляду

$$\boxed{y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=f(x)},$$

де $y=y(x)$ − шукана функція аргументу x; $a_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ та $f(x)$ − відомі неперервні функції від x (або сталі), причому $a_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ − ***коефіцієнти***, $f(x)$ − ***права частина***. Тобто, таке ДР є лінійним відносно шуканої функції $y=y(x)$ та всіх її похідних.

Якщо $f(x)\equiv 0$, то рівняння називається ***лінійним однорідним*** ДР (ЛОДР) (***лінійним рівнянням з нульовою правою частиною***), у протилежному випадку, коли $f(x)\neq 0$, − ***лінійним неоднорідним*** (ЛНДР) (***лінійним рівнянням з ненульовою правою частиною***).

Загальні властивості лінійних ДР вищих порядків розглянемо на прикладі ***лінійного ДР другого порядку***

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)},$$

де $p(x)$ і $q(x)$ − коефіцієнти; $f(x)$ − права частина.

Система функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ $(n\geq 2)$ називається ***лінійно залежною*** в інтервалі $(a;b)$, якщо існують сталі числа $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$, не всі рівні нулю, такі, що для відповідної лінійної комбінації у кожній точці $x\in(a;b)$ виконується рівність

$$\boxed{\mu_1 y_1(x) + \mu_2 y_2(x) + \ldots + \mu_n y_n(x) \equiv 0}\,.$$

Якщо ця тотожність виконується лише за умови, коли всі $\mu_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, то система функцій $y_i(x),\ i = \overline{1,n}$ називається ***лінійно незалежною*** в інтервалі $(a;b)$.

У випадку двох функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ умову лінійної залежності можна подати у вигляді

$$y_1(x)/y_2(x) = C = const\,,\ \forall x \in (a;b)\,.$$

Наприклад, а) функції $y_1(x) = \ln x$ і $y_2(x) = \lg x$ лінійно залежні на півпрямій $(0;+\infty)$, оскільки

$$y_1(x)/y_2(x) = \ln x/\lg x = \ln 10 = const\,;$$

б) функції $y_1(x) = \sin x$ і $y_2(x) = \sin 2x$ лінійно незалежні на множині дійсних чисел R, оскільки

$$y_1(x)/y_2(x) = \sin x/\sin 2x = 1/(2\cos x) \neq const\,.$$

1.5.7 Структура загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку. Характеристичне рівняння

На деякому проміжку $(a;b)$ розглянемо систему n функцій $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$, що є частинними розв'язками деякого одного ЛОДР n-го порядку $(n \geq 2)$ і тому n разів диференційовані. Сформуємо функціональний визначник

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

що називається ***визначником Вронського*** (***вронськіаном***) даної системи.

Ознаку лінійної залежності чи незалежності такої системи виражає наступна *теорема 1. Якщо вронськіан $W(x)$ системи n частинних розв'язків $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ якого-небудь одного ЛОДР n-го порядку дорівнює нулю в деякій точці $x_0 \in (a;b)$, то ця система розв'язків – лінійно залежна, причому вронськіан $W(x)$ тотожно рівний нулю на всьому проміжку $(a;b)$. Якщо вронськіан $W(x)$ системи $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ відмінний від нуля в деякій точці $x_0 \in (a;b)$, то ця система розв'язків – лінійно незалежна, причому вронськіан $W(x)$ не перетворюється в нуль у жодній точці проміжку $(a;b)$.* (Без доведення).

Для даного ЛОДР n-го порядку будь-яка лінійно незалежна система n його частинних розв'язків $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ називається ***фундаментальною***.

Структуру загального розв'язку ЛОДР другого порядку відображає така

теорема 2. Якщо функції $y_1(x), y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків ЛОДР другого порядку, то їх лінійна комбінація

$$\boxed{\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2},$$

де C_1 і C_2 − довільні сталі, служить загальним розв'язком цього рівняння.

□ Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ − фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Перевіримо, чи їх лінійна комбінація $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ також є розв'язком (задовольняє ЛОДР). Для цього підставимо функцію $\bar{y}$ та її похідні у рівняння:

$$\bar{y}' = C_1 y_1' + C_2 y_2'; \quad \bar{y}'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'';$$

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1(y_1'' +$$

$$+ py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Далі покажемо, що для довільних початкових умов

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_0'$$

знаходяться єдині конкретні значення сталих C_1 і C_2.

Справді, для визначення C_1 і C_2 дістаємо лінійну алгебраїчну систему

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0; \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0', \end{cases}$$

визначником якої служить вронськіан

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}.$$

Для фундаментальної системи $y_1(x)$, $y_2(x)$ вронськіан відмінний від нуля $W(x_0) \neq 0$. Тому система лінійних рівнянь відносно C_1 і C_2 завжди має і причому єдиний розв'язок.

Отже, $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ − загальний розв'язок ЛОДР. ■

Наприклад, частинними розв'язками ЛОДР другого порядку $y'' + y = 0$ є функції $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$. (Перевірте це самостійно). Їх вронськіан відмінний від нуля:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Тому ці розв'язки $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$ − лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему. Отже, загальний розв'язок ЛОДР можна подати у вигляді

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Зауваження 1. Очевидний нульовий розв'язок ЛОДР $y = 0$ не утворює фундаментальної системи з довільними іншими частинними розв'язками, оскільки при цьому вронськіан тотожно рівний нулю. (Перевірте це самостійно).

Для ***ЛОДР*** n***-го порядку зі сталими коефіцієнтами***

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0\,,\ \ a_i = const \in R\,,\ i = \overline{1,n}}$$

Ейлером розроблено загальний метод його розв'язування шляхом побудови фундаментальної системи та на її основі загального розв’язку. Розглянемо його на прикладі ***ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами***:

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0\,,\ \ p = const \in R;\ q = const \in R}\ .$$

Частинні розв'язки шукаємо у вигляді експоненти $y = e^{kx}$, де k − невідомий сталий коефіцієнт. Підставимо цю функцію $y = e^{kx}$ та її похідні $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ у рівняння і дістанемо $(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0$. Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то для визначення k отримуємо співвідношення $\boxed{k^2 + pk + q = 0}$, яке називають ***характеристичним рівнянням*** даного ЛОДР.

Характеристичне рівняння є квадратним відносно k і на множині комплексних чисел завжди має два розв’язки k_1 і k_2. При цьому можливі три випадки, в залежності від знака дискримінанта $\boxed{D = p^2 - 4q}$.

Випадок 1. $D > 0$. Обидва корені k_1 і k_2 − дійсні різні числа $k_1 \neq k_2$: $k_{1,2} = \left(-p \pm \sqrt{D}\right)/2$. Тоді $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$ − лінійно незалежні розв’язки, що утворюють фундаментальну систему. Загальний розв’язок має вигляд $\boxed{\overline{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок $y'' - 5y' + 6y = 0$.

$$\square\ k^2 - 5k + 6 = 0\,;\ D = 25 - 24 = 1 > 0\,;$$

$$k_1 = 3\,,\ k_2 = 2\,;\ \overline{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}\,. \quad \blacksquare$$

Випадок 2. $D = 0$. Корені k_1 і k_2 − дійсні рівні числа $k_1 = k_2 = k = -p/2$. Тобто, $k = -p/2$ − один корінь кратності $r = 2$. Тоді $y_1 = e^{kx}$ − частинний розв’язок. Знайдемо другий лінійно незалежний з ним розв’язок y_2. Скористаємося методом збурень.

Вважатимемо, що k_1 і k_2 відрізняються на нескінченно малу величину Δk: $k_1 = k$; $k_2 = k + \Delta k$; $\Delta k \to 0$. Таким чином, повертаємося до випадку 1. Тоді лінійна комбінація $y_{2*} = \left(e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx}\right)/\Delta k$ – теж частинний розв'язок. Переходячи у y_{2*} до границі при $\Delta k \to 0$, дістаємо невизначеність типу $0/0$, що розкривається за правилом Лопіталя:

$$y_2 = \lim_{\Delta k \to 0} y_{2*} = \lim_{\Delta k \to 0} \left(e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx}\right)/\Delta k = |0/0| =$$

$$= \lim_{\Delta k \to 0} (e^{(k+\Delta k)x} - e^{kx})'/(\Delta k)' = \lim_{\Delta k \to 0} e^{(k+\Delta k)x} x = xe^{kx}.$$

Перевіримо, що одержана функція $y_2 = x\,e^{kx}$ є розв'язком ЛОДР:

$$y_2' = e^{kx} + kxe^{kx}; \quad y_2'' = ke^{kx} + ke^{kx} + k^2xe^{kx} = 2ke^{kx} + k^2xe^{kx};$$

$$2ke^{kx} + k^2xe^{kx} + p(e^{kx} + kxe^{kx}) + qxe^{kx} = e^{kx}(k^2x + 2k +$$

$$+ p + pkx + qx) = |k = -p/2| = e^{kx}((-p/2)^2 x + 2(-p/2) +$$

$$+ p + p(-p/2)x + qx) = -(1/4)e^{kx}(p^2 - 4q)x =$$

$$= \left|p^2 - 4q = D = 0\right| = -xe^{kx} \cdot 0 = 0.$$

До того ж, вронськіан системи $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = x\,e^{kx}$ відмінний від нуля:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{kx} & x\,e^{kx} \\ k\,e^{kx} & e^{kx} + kx\,e^{kx} \end{vmatrix} = e^{2kx} \neq 0.$$

Тому ці розв'язки $y_1 = e^{kx}$ і $y_2 = x\,e^{kx}$ – лінійно незалежні і утворюють фундаментальну систему.

Отже, загальний розв'язок ЛОДР можна подати у вигляді

$$\boxed{\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1\,e^{kx} + C_2x\,e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2x)}.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок $y'' - 2y' + y = 0$.

$\square$ $D = 4 - 4 = 0$, $k_1 = k_2 = \mathrm{k} = 1$; $\bar{y} = e^x(C_1 + C_2 x)$. $\blacksquare$

Випадок 3. $D < 0$. Характеристичне рівняння має два комплексно-спряжені корені $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, де $\alpha = -p/2$, $\beta = \sqrt{-D}/2$, $D = p^2 - 4q < 0$, $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Тоді $y_{1к} = e^{k_1 x} = e^{(\alpha+\beta i)x}$, $y_{2к} = e^{k_2 x} = e^{(\alpha-\beta i)x}$ – комплексні лінійно незалежні розв'язки. Їх лінійна комбінація

$$\boxed{\bar{y}_к = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x}}$$

є комплексним загальним розв'язком.

Але ДР має дійсні коефіцієнти, тому бажано мати розв'язки в дійсній формі. На основі формули Ейлера маємо:

$$y_{1к} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x); \quad y_{2к} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Можна показати, що *для комплекснозначної функції, яка є розв'язком диференціального рівняння, її уявна та дійсна частини також будуть його розв'язками*. (Зробіть це самостійно).

Таким чином, дістаємо лінійно незалежні дійсні частинні розв'язки $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, що утворюють фундаментальну систему. Дійсним загальним розв'язком є їх лінійна комбінація

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x =$$

$$= e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок $y'' + 8y' + 25y = 0$.

$$\square\ k^2 + 8k + 25 = 0;\ D = 64 - 100 = -36 < 0;$$

$$k_{1,2} = (-8 \pm \sqrt{-36})/2 = (-8 \pm 6\sqrt{-1})/2 = (-8 \pm 6i)/2 = -4 \pm 3i;$$

$$\alpha = -4;\ \beta = 3; \quad \bar{y} = e^{-4x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x). \ \blacksquare$$

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші:

а) $y'' + 25y' = 0;\quad y(1) = -2;\ y'(1) = 0$;

б) $y'' - 9y = 0;\quad y(0) = 3;\ y'(0) = -3$;

в) $y''+4y'+4y=0;\quad y(0)=1;\ y'(0)=3$;

г) $y''+16y=0;\quad y(\pi/2)=6;\ y'(\pi/2)=2$;

д) $y''+8y'+20y=0;\quad y(0)=0;\ y'(0)=12$.

□ а) Складаємо і розв’язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2+25k=0;\ \ k(k+25)=0;\ \ k_1=0;\ \ k_2=-25.$$

Оскільки корені k_1 і k_2 − дійсні різні числа $k_1\neq k_2$, то маємо випадок 1. У відповідній формі записуємо загальний розв’язок: $\bar{y}=C_1e^{0x}+C_2e^{-25x}=C_1+C_2e^{-25x}$.

Конкретні значення довільних сталих C_1 і C_2 знаходимо, враховуючи початкові умови:

$$\bar{y}'=-25C_2e^{-25x};$$

$$\begin{matrix} y(1)=-2: \\ y'(1)=0: \end{matrix}\quad \begin{cases} -2=C_1+C_2e^{-25\cdot 1}; \\ 0=-16C_2e^{-25\cdot 1}; \end{cases}\quad \begin{cases} C_2=0; \\ C_1=-2-0=-2. \end{cases}$$

Тоді $y_K=-2$ − розв’язок задачі Коші.

б) $k^2-9=0;\ k^2=9;\ k_{1,2}=\pm 3;\ \bar{y}=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x};$

$$\bar{y}'=3C_1e^{3x}-3C_2e^{-3x};\quad \begin{cases} 3=C_1e^{3\cdot 0}+C_2e^{-3\cdot 0}; \\ -3=3C_1e^{3\cdot 0}-3C_2e^{-3\cdot 0}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1+C_2=3; \\ C_1-C_2=-1; \end{cases}\quad \begin{cases} C_1=1; \\ C_2=2; \end{cases}\quad y_K=e^{4x}+2e^{-4x}.$$

в) $k^2+4k+4=0;\ D=16-16=0;\ k_1=k_2=k=-2;$

$$\bar{y}=e^{-2x}(C_1+C_2x);\ \bar{y}'=C_2e^{-2x}-2(C_1+C_2x)e^{-2x};$$

$$\begin{cases} 1=e^{-2\cdot 0}(C_1+C_2\cdot 0); \\ 3=C_2e^{-2\cdot 0}-2(C_1+C_2\cdot 0)e^{-2\cdot 0}; \end{cases}\quad \begin{cases} C_1=1; \\ C_2-2C_1=3;\ C_2=5; \end{cases}$$

$$y_{\text{К}}=e^{-2x}(1+5x).$$

г) $k^2+16=0;\ k^2=-16;\ k_{1,2}=\pm 4i;\ \alpha=0;\ \beta=4;$

$$\bar{y}=e^{0x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x\,;$$

$$\bar{y}'=-4C_1\sin 4x+4C_2\cos 4x\,;$$

$$\begin{matrix} y(\pi/2)=6: \\ y'(\pi/2)=2: \end{matrix}\quad \begin{cases} 6=C_1\cos(4\cdot\pi/2)+C_2\sin(4\cdot\pi/2); \\ 2=-4C_1\sin(4\cdot\pi/2)+4C_2\cos(4\cdot\pi/2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6=C_1; \\ 2=4C_2;\ C_2=1/2; \end{cases}\quad y_K=6\cos x+(1/2)\sin 4x\,.$$

д) $k^2+8k+20=0\,;\ D=64-80=-16<0\,;$

$$k_{1,2}=(-4\pm\sqrt{-16})/2=(-4\pm 4i)/2=-2\pm 2i\,;\ \ \alpha=-2;\ \beta=2\,;$$

$$\bar{y}=e^{-2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)\,;\ \ \bar{y}'=-2e^{-2x}(C_1\cos 2x+$$

$$+C_2\sin 2x)+e^{-2x}(-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x)\,;$$

$$\begin{cases} 0=e^0(C_1\cos 0+C_2\sin 0); \\ 12=-2e^0(C_1\cos 0+C_2\sin 0)+e^0(-2C_1\sin 0+2C_2\cos 0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=C_1; \\ 12=-2C_1+2C_2;\ C_2=6; \end{cases}\quad y_K=6e^{-2x}\sin 2x\,.\ \ \blacksquare$$

1.5.8 Структура загального розв’язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку. Принцип суперпозиції

Структуру загального розв’язку ЛНДР другого порядку визначає така

теорема 1. Загальний розв’язок ЛНДР другого порядку

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)}\,,$$

можна подати у вигляді суми загального розв’язку $\bar{y}$ *відповідного ЛОДР*

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=0}$$

і якого-небудь частинного розв'язку y_* *ЛНДР*: $\boxed{y=\bar{y}+y_*}$.

□ Перевіримо, що функція $y=\bar{y}+y_*$ є розв'язком ЛНДР:

$$y'=\bar{y}'+y_*'\,;\ y''=\bar{y}''+y_*'';\ \ \bar{y}''+y_*''+p(\bar{y}'+y_*')+q(\bar{y}+y_*)=$$

$$=(\bar{y}''+p\bar{y}'+q\bar{y})+(y_*''+py_*'+qy_*)=0+f(x)=f(x)\,.$$

Оскільки $\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2$, де $y_1(x),y_2(x)$ – фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР, то розв'язок $y=\bar{y}+y_*=C_1y_1+C_2y_2+y_*$ містить дві довільні сталі C_1 і C_2. Можна показати (зробіть це самостійно, аналогічно доведенню теореми про структуру загального розв'язку ЛОДР), що для довільних початкових умов $y(x_0)=y_0;\ \ y'(x_0)=y_0'$ знаходяться єдині конкретні значення сталих C_1 і C_2. Тобто розв'язок $y=\bar{y}+y_*$ є загальним. ■

Принцип суперпозиції розв'язків ЛНДР другого порядку відображає наступна

теорема 2. Якщо у ЛНДР другого порядку

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)}$$

права частина є сумою двох функцій $\boxed{f(x)=f_1(x)+f_2(x)}$, *то його частинний розв'язок також можна подати у вигляді суми* $\boxed{y_*=y_{*1}+y_{*2}}$, *де* y_{*1} *і* y_{*2} *– частинні розв'язки рівнянь*

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)}\ \text{ і }\ \boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)}$$

з тією ж самою частиною ліворуч і відповідними функціями $f_1(x)$, $f_2(x)$ *праворуч.*

(Доведіть самостійно безпосередньою підстановкою).

1.5.9 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і з правою частиною спеціального вигляду. Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо ***ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами***

$$\boxed{y''+py'+qy = f(x)\,, \quad p = const \in R;\ q = const \in R}\,,$$

де права частина має ***спеціальний вигляд***

$$\boxed{f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)}\,.$$

Тут $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ − многочлени відповідно степеня n і m; a і b − дійсні сталі, з яких формується ***характерне комплексне число*** $z = a + bi$.

Зауваження 1. m і n − довільні невід’ємні цілі числа, $m \geq 0$, $n \geq 0$; a і b − довільні дійсні числа, в тому числі $a = 0,\ b = 0$.

Згідно з ***методом невизначених коефіцієнтів*** *структура частинного розв'язку* y_* *ЛНДР формується за виглядом правої частини* $f(x)$ *з урахуванням того, коренем якої кратності* r $(r \geq 0)$ *є характерне число* $z = a + bi$ *для характеристичного рівняння. Невідомі параметри (коефіцієнти) цієї структури знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь, які одержуються прирівнюванням коефіцієнтів при подібних відносно* x *членах.*

Частинний розв’язок має вигляд

$$\boxed{y_* = x^r e^{ax}(\overline{P_s}(x)\cos bx + \overline{Q}_s(x)\sin bx)}\,,$$

де $\overline{P_s}(x)$ і $\overline{Q}_s(x)$ − многочлени степеня $s = \max\{n, m\}$ з невідомими коефіцієнтами.

Приклад 1. Записати структуру частинного розв’язку y_*:

$$y''+4y'+20y = e^{-2x}(x^2\cos 4x - \sin 4x)\,.$$

□ $y''+4y'+13y = 0$; $k^2 + 4k + 13 = 0$; $D = -36$;

$k_{1,2} = -2 \pm 3i$; $\mathrm{z = a + bi} = -2 + 3i$ − корінь кратності $r = 1$; $s = \max\{2; 0\} = 2$;

$y_* = x^1 e^{-2x}((Ax^2 + Bx + C)\cos 4x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 4x)$,

де A, B, C, D, E, F – невідомі коефіцієнти. ■

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 2y' - 3y = e^x(10\cos x - 25\sin x)$.

□ $y'' - 2y' - 3y = 0$; $k^2 - 2k - 3 = 0$; $D = 16$; $k_1 = 3$;

$k_2 = -1$; $\bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$; $z = a + bi = 1 + i$ − не є коренем

$(r = 0)$; $s = \max\{0; 0\} = 0$; $y_* = e^x(A\cos x + B\sin x)$;

$y_*' = e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x) = e^x(A\cos x +$

$+ B\sin x - A\sin x + B\cos x)$; $y_*'' = e^x(A\cos x + B\sin x -$

$- A\sin x + B\cos x) + e^x(-A\sin x + B\cos x - A\cos x - B\sin x) =$

$= e^x(-2A\sin x + 2B\cos x)$;

$e^x(-2A\sin x + 2B\cos x) - 2e^x(A\cos x + B\sin x - A\sin x +$

$+ B\cos x) - 3e^x(A\cos x + B\sin x) = e^x(10\cos x - 25\sin x) \,|: e^x \neq 0$;

$-5A\cos x - 5B\sin x = 10\cos x - 25\sin x$;

$$\begin{array}{l} \cos x: \\ \sin x: \end{array} \begin{cases} -5A = 10; & A = -2; \\ -5B = -25; & B = 5; \end{cases}$$

Отже, маємо загальний розв'язок

$y = \bar{y} + y_* = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + e^x(-2\cos x + 5\sin x)$. ■

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші:

$y'' + 2y' + 5y = 12e^{-x}\sin 2x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 5$.

□ $y'' + 2y' + 5y = 0$; $k^2 + 2k + 5 = 0$; $D = 4 - 20 = -16$;

$k_{1,2} = -1 \pm 2i$; $\bar{y} = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$;

$z = a + bi = -1 + 2i$ − корінь кратності $r = 1$; $s = \max\{0; 0\} = 0$;

$$y_* = x^1 e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x)\,; \quad y_*' = e^{-x}(A\cos 2x +$$

$$+ B\sin 2x) - xe^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 2xe^{-x}(-A\sin 2x +$$

$$+ B\cos 2x)\,; \quad y_*'' = -2e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 4e^{-x} \times$$

$$\times(-A\sin 2x + B\cos 2x) - 3xe^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) -$$

$$-4xe^{-x}(-A\sin 2x + B\cos 2x)\,;$$

$$-2e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + 4e^{-x}(-A\sin 2x + B\cos 2x) -$$

$$-3xe^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) - 4xe^{-x}(-A\sin 2x + B\cos 2x) +$$

$$+2e^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) - 2xe^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) +$$

$$+4xe^{-x}(-A\sin 2x + B\cos 2x) + 5xe^{-x}(A\cos 2x + B\sin 2x) =$$

$$= 12e^{-x}\sin 2x \;\; | \div e^{-x} \neq 0\,;$$

$$-2A\cos 2x - 2B\sin 2x - 4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 3Ax\cos 2x -$$

$$-3Bx\sin 2x + 4Ax\sin 2x - 4Bx\cos 2x + 2A\cos 2x +$$

$$+2B\sin 2x - 2Ax\cos 2x - 2Bx\sin 2x - 4Ax\sin 2x +$$

$$+4Bx\cos 2x + 5Ax\cos 2x + 5Bx\sin 2x = 12\sin 2x\,;$$

$$4B\cos 2x - 4A\sin 2x = 12\sin 2x\,;$$

$$\begin{array}{l|} \cos 2x \\ \sin 2x \end{array} \; \begin{cases} 4B = 0; & B = 0; \\ -4A = 12; & A = -3; \end{cases} \quad y_* = -3xe^{-x}\cos 2x\,;$$

$$y = \bar{y} + y_* = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - 3xe^{-x}\cos 2x\,;$$

$$y' = -e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + 2e^{-x}(-C_1\sin 2x + C_2\cos 2x) -$$

$$-3e^{-x}\cos 2x + 3xe^{-x}\cos 2x + 6xe^{-x}\sin 2x\,;$$

$$\begin{array}{r} y(0) = 0: \\ y'(0) = 5: \end{array} \begin{cases} C_1 = 0; & C_1 = 0; \\ -C_1 + 2C_2 - 3 = 5; & C_2 = 4; \end{cases}$$

Таким чином, маємо розв’язок задачі Коші:

$$y_K = 4e^{-x}\sin 2x - 3xe^{-x}\cos 2x\,. \quad \blacksquare$$

Розглянемо більш детально окремі випадки правої частини спеціального вигляду і відповідні форми частинного розв'язку y_* ЛНДР зі сталими коефіцієнтами.

1. *Права частина – многочлен степеня* n:

$$\boxed{f(x)=P_n(x),\ \ P_n(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+...+A_n}\ .$$

Можливі наступні випадки структури y_* в залежності від того, чи є характерне число $z=a+bi=0+0i=0$ коренем характеристичного многочлена:

а) Якщо жоден з коренів характеристичного рівняння не дорівнює характерному числу $z=0$, тобто $k_1\neq 0,\ k_2\neq 0$, то y_* шукаємо у вигляді многочлена того ж степеня n з невизначеними коефіцієнтами: $\boxed{y_*=\overline{P_n}(x)=\overline{A}_0x^n+\overline{A}_1x^{n-1}+...+\overline{A}_n}$.

б) Якщо один з коренів характеристичного рівняння дорівнює числу $z=0$, наприклад, $k_1=0,\ k_2\neq 0$, то:

$$\boxed{y_*=x\overline{P_n}(x)=\overline{A}_0x^{n+1}+\overline{A}_1x^n+...+\overline{A}_nx}\ .$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок:

а) $y''+3y'+2y=1-x^2$; б) $7y''-y'=12x$.

□ а) $y''+3y'+2y=0$; $k^2+3k+2=0$; $D=9-8=1$;

$k_1=-1$; $k_2=-2$; $\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$; $z=a+bi=0+0i=0$ – не є коренем; $n=2$; $y_*=Ax^2+Bx+C$; $y_*'=2Ax+B$; $y_*''=2A$;

$$2A+3(2Ax+B)+2(Ax^2+Bx+C)=1-x^2;$$

$$2Ax^2+(6A+2B)x+(2A+3B+2C)=1-x^2;$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \left\{\begin{array}{ll} 2A=-1; & A=-1/2; \\ 6A+2B=0; & B=-3A=3/2; \\ 2A+3B+2C=1; & C=1/2-A-(3/2)B=-5/4; \end{array}\right. \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}$$

$$y_* = -x^2/2 + (3/2)x - 5/4; \quad y = \bar{y} + y_*;$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - x^2/2 + (3/2)x - 5/4.$$

б) $7y'' - y' = 0$; $7k^2 - k = 0$; $k(7k-1) = 0$;

$$k_1 = 0; \quad k_2 = 1/7; \quad \bar{y} = C_1 + C_2 e^{x/7};$$

$z = a + bi = 0 + 0i = 0$ – корінь кратності $r = 1$; $n = 1$;

$$y_* = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx; \quad y_*' = 2Ax + B; \quad y_*'' = 2A;$$

$$7 \cdot 2A - (2Ax + B) = 12x; \; 14A - 2Ax - B = 12x;$$

$$-2Ax + (14A - B) = 12x; \quad \begin{array}{c|} x^1 \\ x^0 \end{array} \begin{cases} -2A = 12; \\ 14A - B = 0; \end{cases} \quad A = -6;$$

$$B = 14A; \quad B = -84; \quad y_* = -6x^2 - 84x;$$

$$y = \bar{y} + y_*; \quad y = C_1 + C_2 e^{x/7} - 6x^2 - 84x. \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. Підкреслимо, що у многочлені $P_n(x)$ коефіцієнти A_i, $i = \overline{1, n}$ можуть дорівнювати нулю. Але в будь-якому разі частинний розв'язок y_* шукаємо з повним многочленом $\overline{P_n}(x)$.

2. *Права частина – добуток сталого множника на експоненту*:

$$\boxed{f(x) = Ae^{ax}}.$$

При цьому в залежності від того, чи є характерне число $z = a + 0i = a$ коренем характеристичного многочлена та якої кратності r, можливі наступні випадки структури y_*:

а) Якщо жоден з коренів характеристичного рівняння не дорівнює числу $z = a$, тобто $k_1 \neq a, k_2 \neq a$, то $\boxed{y_* = \bar{A}e^{ax}}$.

б) Якщо тільки один з коренів характеристичного рівняння дорівнює $z = a$, наприклад, $k_1 = a,\ k_2 \neq a$, то $\boxed{y_* = \bar{A}xe^{ax}}$.

в) Якщо обидва корені характеристичного рівняння дорівнюють числу $z=a$, тобто $k_1=k_2=a$, то $\boxed{y_*=\overline{A}x^2e^{ax}}$.

Приклад 5. Знайти загальний розв’язок:

а) $y''+4y'+3y=8e^{3x}$; б) $y''-5y'-6y=2e^{-x}$;

в) $3y''-6y'+3y=e^{x}$; г) $y''-4y=e^{-2x}$.

□ а) $y''+4y'+3y=0$; $k^2+4k+3=0$; $D=4$; $k_1=-1$;

$$k_2=-3;\ \ \overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x};\ \ z=a+bi=3+0i=3$$

– не є коренем; $y_*=\overline{A}e^{3x}$; $y_*'=3\overline{A}e^{3x}$; $y_*''=9\overline{A}e^{3x}$;

$$9\overline{A}e^{3x}+4\cdot 3\overline{A}e^{3x}+3\overline{A}e^{3x}=8e^{3x};\ \ 24\overline{A}e^{3x}=8e^{3x};\ \ \overline{A}=1/3;$$

$$y_*=e^{3x}/3;\ \ y=\overline{y}+y_*;\ \ y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+e^{3x}/3.$$

б) $y''-5y'-6y=0$; $k^2-5k-6=0$; $D=49$; $k_1=-1$;

$k_2=6$; $\overline{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}$; $z=a+bi=-1+0i=-1$

– корінь кратності $r=1$; $y_*=\overline{A}xe^{-x}$; $y_*'=\overline{A}e^{-x}-\overline{A}xe^{-x}$;

$$y_*''=-\overline{A}e^{-x}-\overline{A}e^{-x}+\overline{A}xe^{-x}=-2\overline{A}e^{-x}+\overline{A}xe^{-x};$$

$$-2\overline{A}e^{-x}+\overline{A}xe^{-x}-5(\overline{A}e^{-x}-\overline{A}xe^{-x})-6\overline{A}xe^{-x}=2e^{-x};$$

$$-2\overline{A}e^{-x}+\overline{A}xe^{-x}-5\overline{A}e^{-x}+5\overline{A}xe^{-x}-6\overline{A}xe^{-x}=2e^{-x};$$

$$-7\overline{A}e^{-x}=2e^{-x};\ \ \overline{A}=-2/7;\ \ y_*=(-2/7)xe^{-x};$$

$$y=\overline{y}+y_*;\ \ y=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}-(2/7)xe^{-x}.$$

в) $3y''-6y'+3y=0$; $y''-2y'+y=0$; $D=0$;

$k_1=k_2=k=1$; $\overline{y}=e^{x}(C_1+C_2x)$; $z=a+bi=1+0i=1$

– корінь кратності $r=2$; $y_*=\overline{A}x^2e^{x}$; $y_*'=2\overline{A}xe^{x}+\overline{A}x^2e^{x}$;

$$y_*''=2\overline{A}e^{x}+2\overline{A}xe^{x}+2\overline{A}xe^{x}+\overline{A}x^2e^{x}=2\overline{A}e^{x}+4\overline{A}xe^{x}+$$

$$+\overline{A}x^2e^{x};\ \ 3(2\overline{A}e^{x}+4\overline{A}xe^{x}+\overline{A}x^2e^{x})-6(2\overline{A}xe^{x}+\overline{A}x^2e^{x})+$$

$$+3\overline{A}x^2e^{x}=e^{x};\ \ 6\overline{A}e^{x}+12\overline{A}xe^{x}+3\overline{A}x^2e^{x}-12\overline{A}xe^{x}-$$

$$-6\overline{A}x^2e^x+3\overline{A}x^2e^x=e^x;\ \ 6\overline{A}e^x=e^x;\ \ \overline{A}=1/6;$$

$$y_*=x^2e^x/6;\ \ y=\overline{y}+y_*;\ \ y=e^x(C_1+C_2x)+x^2e^x/6.$$

(Рівняння г) розв’язати самостійно). ■

3. *Права частина – лінійна комбінація косинуса і синуса одного і того ж аргументу*:

$$\boxed{f(x)=A\cos bx+B\sin bx}\,.$$

При цьому в залежності від того, чи є характерне число $z=0+bi=bi$ коренем характеристичного многочлена, можливі наступні випадки структури y_*:

а) Якщо жоден з коренів характеристичного рівняння не дорівнює $z=bi$, тобто $k_{1,2}\neq\pm bi$, то $y_*=\overline{A}\cos bx+\overline{B}\sin bx$.

$$\boxed{y_*=\overline{A}\cos bx+\overline{B}\sin bx}\,.$$

б) Якщо один з коренів характеристичного рівняння дорівнює числу $z=bi$, тобто $k_{1,2}=\pm\beta i$ і $\beta=b$, то

$$\boxed{y_*=x(\overline{A}\cos bx+\overline{B}\sin bx)}\,.$$

Зауваження 3. A і B − довільні задані числа, одне з яких може дорівнювати нулю. У будь-якому разі частинний розв'язок y_* шукаємо у відповідному повному вигляді з $\overline{A}$ і $\overline{B}$.

Приклад 6. Знайти загальний розв’язок:

а) $y''-6y'+5y=2\cos x$; б) $y''+16y=4\cos 4x-24\sin 4x$.

□ а) $y''-6y'+5y=0$; $k^2-6k+5=0$; $D=16$; $k_1=1$;

$$k_2=5;\ \ \overline{y}=C_1e^{5x}+C_2e^x;\ \ z=a+bi=0+1i=i$$

− не є коренем; $y_*=\overline{A}\cos x+\overline{B}\sin x$; $y_*'=-\overline{A}\sin x+$

$+\overline{B}\cos x$; $y_*''=-A\cos x-B\sin x$; $-\overline{A}\cos x-\overline{B}\sin x-$

$$-6(-\overline{A}\sin x+\overline{B}\cos x)+5(\overline{A}\cos x+\overline{B}\sin x)=2\cos x;$$

$$-\overline{A}\cos x-\overline{B}\sin x+6\overline{A}\sin x-6\overline{B}\cos x+5\overline{A}\cos x+5\overline{B}\sin x=$$

$$= 26\cos x;\;\; (-\overline{A} - 6\overline{B} + 5\overline{A})\cos x + (-\overline{B} + 6\overline{A} + 5\overline{B})\sin x =$$

$$= 26\cos x;\;\; (4\overline{A} - 6\overline{B})\cos x + (6\overline{A} + 4\overline{B})\sin x = 2\cos x;$$

$$\begin{array}{c|} \cos x \\ \sin x \end{array} \;\; \begin{cases} 4\overline{A} - 6\overline{B} = 2; \\ 6\overline{A} + 4\overline{B} = 0; \end{cases} \;\; \begin{cases} \overline{B} = (-3/2)\overline{A}; \\ 4\overline{A} + 9\overline{A} = 2;\;\; \overline{A} = 2/13;\; \overline{B} = -3/13; \end{cases}$$

$$y_* = 2/13\cos x - 3/13\sin x;$$

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{x} + 2/13\cos x - 3/13\sin x.$$

б) $y'' + 16y = 0$; $k^2 + 16 = 0$; $k^2 = -16$; $k_{1,2} = \pm 4i$;

$$\overline{y} = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x;\;\; z = a + bi = 0 + 4i = 4i$$

– корінь кратності $r = 1$; $y_* = x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x)$;

$$y_*' = \overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x + x(-4\overline{A}\sin 4x + 4\overline{B}\cos 4x);$$

$$y_*'' = -4\overline{A}\sin 4x + 4\overline{B}\cos 4x - 4\overline{A}\sin 4x + 4\overline{B}\cos 4x +$$

$$+ x(-16\overline{A}\cos 4x - 16\overline{B}\sin 4x) = -16x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x) -$$

$$-8A\sin 4x + 8B\cos 4x;\;\; -16x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x)x -$$

$$-8\overline{A}\sin 4x + 8\overline{B}\cos 4x + 16x(\overline{A}\cos 4x + \overline{B}\sin 4x) = 4\cos 4x -$$

$$-24\sin 4x;\;\; -8\overline{A}\sin 4x + 8\overline{B}\cos 4x = 4\cos 4x - 24\sin 4x;$$

$$\begin{array}{c|} \cos 4x \\ \sin 4x \end{array} \;\; \begin{cases} \quad 8\overline{B} = 4; & \overline{B} = 1/2; \\ -8\overline{A} = -24; & \overline{A} = 3; \end{cases}$$

$$y_* = x(3\cos 4x + (1/2)\sin 4x);\;\; y = \overline{y} + y_*;$$

$$y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x + x(3\cos 4x + (1/2)\sin 4x).\; \blacksquare$$

Зауваження 4. Якщо права частина $f(x)$ не має спеціального вигляду, то часто її можна подати як скінченну суму

$$\boxed{f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)},$$

де кожний доданок $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ уже має спеціальний вигляд. Тоді за принципом суперпозиції $\boxed{y_* = y_{*1} + y_{*2} + \ldots + y_{*n}}$, де y_{*i} – частинний розв'язок рівняння $\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f_i(x)}$ з тією ж самою лівою і відповідною правою частиною, $i=\overline{1,n}$.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок

$$\text{а) } y''-2y'+6y=18e^{2x}-29\sin x;$$

$$\text{б) } y''+4y=12e^{-2x}+8x.$$

□ а) Для відповідного ЛОДР $y''-2y'+6y=0$ розв'язуємо характеристичне рівняння

$$k^2-2k+6=0;\ \ D=-20;\ k_{1,2}=1\pm\sqrt{5}i$$

і записуємо його загальний розв'язок

$$\bar{y}=e^x(C_1\cos\sqrt{5}x+C_2\sin\sqrt{5}x).$$

Права частина $f(x)=18e^{2x}-29\sin x$ не має спеціального вигляду, але її можна подати як суму двох доданків спеціального вигляду

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),\ \text{де}\ f_1(x)=18e^{2x},\ f_2(x)=-29\sin x.$$

Тоді $y_*=y_{*1}+y_{*2}$. Знайдемо окремо y_{*1} і y_{*2}:

$$z_1=a_1+b_1i=2+0i=2\ -\text{не є коренем};\ \ y_{*1}=\overline{A}e^{2x};$$

$$y'_{*1}=2\overline{A}e^{2x};\ \ y''_{*1}=4\overline{A}e^{2x};\ \ 4\overline{A}e^{2x}-2\cdot2\overline{A}e^{2x}+6\overline{A}e^{2x}=$$

$$=18e^{2x};\ \ 6\overline{A}e^{2x}=18e^{2x};\ \ \overline{A}=3;\ \ \ y_{*1}=3e^{2x};$$

$$z_2=a_2+b_2i=0+1i=i\ -\text{не є коренем};\ y_{*2}=\overline{A}\cos x+\overline{B}\sin x;$$

$$y'_{*2}=-\overline{A}\sin x+\overline{B}\cos x;\ \ y''_{*2}=-\overline{A}\cos x-\overline{B}\sin x;$$

$$-\overline{A}\cos x-\overline{B}\sin x-2(-\overline{A}\sin x+\overline{B}\cos x)+6(\overline{A}\cos x+$$

$$+\overline{B}\sin x)=-29\sin x;$$

$$-(5\overline{A}-2\overline{B})\cos x+(2\overline{A}+5\overline{B})\sin x=-29\sin x;$$

$$\begin{array}{c|} \cos x \\ \sin x \end{array} \begin{cases} 5\overline{A}-2\overline{B}=0; \\ 2\overline{A}+5\overline{B}=-29; \end{cases} \begin{cases} \overline{B}=(5/2)\overline{A}; \\ 2\overline{A}+5\cdot(5/2)\overline{A}=-29; \end{cases}$$

$$\overline{A}=-2;\quad \overline{B}=-5;\quad y_{*2}=-2\cos x-5\sin x;$$

$$y_*=y_{*1}+y_{*2}=3e^{2x}-2\cos x-5\sin x.$$

Отже, загальний розв'язок ЛНДР

$$y=\bar{y}+y_*=e^{x}(C_1\cos\sqrt{5}x+C_2\sin\sqrt{5}x)+$$

$$+3e^{2x}-2\cos x-5\sin x.$$

(Рівняння б) розв'язати самостійно). ■

Приклад 8. Розв'язати задачу Коші:

а) $y''+4y'=-16x+8+40\sin 2x;\quad y(0)=3;\ y'(0)=7;$

б) $y''+4y'+5y=2e^{-x}+6\cos x;\quad y(0)=-1;\ y'(0)=0.$

□ а) $y''+4y'=0;\quad k^2+4k=0;\quad k(k+4)=0;\quad k_1=0;$

$$k_2=-4;\quad \bar{y}=C_1+C_2e^{-4x};\quad f(x)=f_1(x)+f_2(x);$$

$$f_1(x)=-16x+5;\quad f_2(x)=40\sin 2x;\quad y_*=y_{*1}+y_{*2};$$

$z_1=a_1+b_1i=0+0i=0$ – корінь кратності $r=1;\quad n=1;$

$$y_{*1}=(\overline{A}x+\overline{B})x=\overline{A}x^2+\overline{B}x;\quad y'_{*1}=2\overline{A}x+\overline{B};\quad y''_{*1}=2\overline{A};$$

$$2\overline{A}+4(2\overline{A}x+\overline{B})=-16x+8;\quad 8\overline{A}x+2\overline{A}+4\overline{B}=-16x+8;$$

$$\begin{array}{c|l} x^1 & \left\{\begin{array}{ll} 8\overline{A}=-16; & \overline{A}=-2; \\ 2\overline{A}+4\overline{B}=8; & 2\cdot(-2)+4\overline{B}=8;\ \overline{B}=3; \end{array}\right. \\ x^0 & \end{array}\quad y_{*1}=-2x^2+3x;$$

$z_2=a_2+b_2i=0+2i=2i$ – не є коренем;

$$y_{*2}=\overline{A}\cos 2x+\overline{B}\sin 2x;\quad y'_{*2}=-2\overline{A}\sin 2x+2\overline{B}\cos 2x;$$

$$y''_{*2}=-4\overline{A}\cos 2x-4\overline{B}\sin 2x;\quad -4\overline{A}\cos 2x-4\overline{B}\sin 2x+$$

$$+4(-2\overline{A}\sin 2x+2\overline{B}\cos 2x)=40\sin 2x;$$

$$(-4\overline{A}+8\overline{B})\cos 2x+(-8\overline{A}-4\overline{B})\sin 2x=40\sin 2x;$$

$$\begin{array}{c|l} \cos 2x & \left\{\begin{array}{ll} -4\overline{A}+8\overline{B}=0; & \overline{A}=2\overline{B}; \\ -8\overline{A}-4\overline{B}=40; & -8\cdot 2\overline{B}-4\overline{B}=40;\ \overline{B}=-2;\ \overline{A}=-4; \end{array}\right. \\ \sin 2x & \end{array}$$

$$y_{*2} = -4\cos 2x - 2\sin 2x;\quad y_* = y_{*1} + y_{*2} = -2x^2 + 3x -$$

$$-4\cos 2x - 2\sin 2x;\quad y = \bar{y} + y_* = C_1 + C_2 e^{-4x} - 2x^2 + 3x -$$

$$-4\cos 2x - 2\sin 2x;\quad y' = -4C_2 e^{-4x} - 4x + 3 + 8\sin 2x -$$

$$-4\cos 2x;\quad \begin{matrix} y(0) = 3: \\ y'(0) = 7: \end{matrix} \begin{cases} C_1 + C_2 - 4 = 3; & C_2 = -2; \\ -4C_2 + 3 - 4 = 7; & C_1 = 7 - C_2 = 9; \end{cases}$$

$$y_K = 9 - 2e^{-4x} - 2x^2 + 3x - 4\cos 2x - 2\sin 2x.$$

(Задачу б) розв'язати самостійно). ■

1.5.10 Системи двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами

У багатьох задачах потрібно знайти не одну, а декілька невідомих функцій, які характеризують взаємодіючі об'єкти. що описуються системою диференціальних рівнянь.

При розгляді специфічних підходів до розв'язування диференціальних систем обмежимося лише найпростішою ***нормальною системою лінійних ДР першого порядку*** (***СЛДР***) ***зі сталими коефіцієнтами***, що має вигляд:

$$\begin{cases} dx_1 / dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1(t); \\ dx_2 / dt = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2(t); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dx_n / dt = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n(t), \end{cases}$$

де t − аргумент; $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ − шукані функції; $a_{ij},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$ − сталі коефіцієнти (відомі дійсні числа); $b_1(t),\ b_2(t),\ \ldots, b_n(t)$ − вільні члени (відомі неперервні функції). Число n називається ***порядком*** системи.

Якщо всі вільні члени $b_i(t)$, $i = \overline{1,n}$ тотожно рівні нулю $b_i(t) \equiv 0$, $i = \overline{1,n}$, то система називається ***однорідною***, в протилежному випадку – ***неоднорідною***. У матричній формі однорідну та неоднорідну системи можна записати відповідно так:

$$\boxed{\frac{dX}{dt} = AX}\ ; \qquad \boxed{\frac{dX}{dt} = AX + B}\ ,$$

де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix};\ \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ \ldots \\ dx_2/dt \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots\ a_{nn} \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Розв'язком системи називається матриця-стовпець функцій $X = (x_1(t)\ x_2(t)\ \ldots\ x_n(t))^T$, підстановка яких у рівняння системи перетворює їх у вірні тотожності. У $(n+1)$-вимірному просторі $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ йому відповідає ***інтегральна крива***.

За аналогією з диференціальними рівняннями визначаються ***загальний*** і ***частинний розв'язки***.

Загальний розв'язок неоднорідної СЛДР $dX/dt = AX + B$ можна зобразити у вигляді суми загального розв'язку $\overline{X}$ відповідної однорідної системи $dX/dt = AX$ і будь-якого частинного розв'язку X_* неоднорідної системи: $X = \overline{X} + X_*$.

Загальний розв'язок однорідної СЛДР має вигляд лінійної комбінації

$$\boxed{\overline{X} = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n = M(t)C}\ ,$$

де $M(t) = (X_1\ X_2\ \ldots\ X_n)$ − ***фундаментальна матриця розв'язків***, складена з n лінійно незалежних частинних розв'язків $X_i = (x_{1i}\ x_{2i}\ \ldots\ x_{ni})^T$, $i = \overline{1, n}$, що утворюють ***фундаментальну систему***; $C = (C_1\ C_2\ \ldots\ C_n)^T$ − матриця-стовпець довільних сталих.

Фундаментальна матриця є квадратною n-го порядку і невиродженою (її визначник відмінний від нуля $|M(t)| \neq 0$).

Якщо нормальну систему доповнити ***початковими умовами*** $X(t_0) = X_0$, де $X_0 = (x_{10}\ x_{20}\ \ldots\ x_{n0})^T$ − матриця-стовпець; x_{i0}, $i = \overline{1, n}$ − задані дійсні числа, то одержимо для неї ***задачу Коші***. У цьому випадку справедлива відповідна теорема існування і єдиності розв'язку.

Зауваження. У більшості практично важливих випадків система, що складається з ДР довільного порядку, введенням додаткових шуканих функцій може бути зведена до системи, що включає ДР тільки першого порядку.

Нормальну неоднорідну СЛДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} dx_1/dt = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1(t); \\ dx_2/dt = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2(t) \end{cases}$$

можна звести до одного лінійного неоднорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, вилучивши невідомі функції $x_i(t)$, $i=\overline{1,2}$, крім довільно вибраної однієї, наприклад, $x_1(t)$. Розв'язавши його, отримаємо відповідну шукану функцію $x_1(t)$. Потім знайдемо іншу функцію з набору $x_i(t)$, $i=\overline{1,2}$ за допомогою операції диференціювання.

Застосовуючи ***метод вилучення***, спочатку перше рівняння системи продиференціюємо по t

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a_{11}\frac{dx_1}{dt} + a_{12}\frac{dx_2}{dt} + \frac{db_1(t)}{dt}.$$

В одержане співвідношення замість похідної dx_2/dt підставимо її вираз з нормальної системи

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a_{11}\frac{dx_1}{dt} + a_{12}\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2(t)\right) + \frac{db_1(t)}{dt}.$$

Звідси

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a_{11}\frac{dx_1}{dt} + a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 + a_{12}b_2(t) + \frac{db_1(t)}{dt}.$$

Якщо $a_{12} \neq 0$, то останнє рівняння вже не містить функції $x_2(t)$). Нехай $a_{12} \neq 0$. Тоді з першого рівняння нормальної системи виразимо функцію $x_2(t)$

$$x_2 = \frac{1}{a_{12}}\left(\frac{dx_1}{dt} - a_{11}x_1 - b_1(t)\right)$$

і підставимо в останнє рівняння

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a_{11} + a_{12}a_{21}x_1 + a_{22}\left(\frac{dx_1}{dt} - a_{11}x_1 - b_1(t)\right) +$$

$$+ a_{12}b_2(t) + \frac{db_1(t)}{dt}.$$

У результаті дістанемо ЛНДР другого порядку відносно функції $x_1(t)$ вигляду:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + p\frac{dx_1}{dt} + qx_1 = f(t).$$

Знайшовши його загальний розв'язок $x_1(t)$, іншу функцію $x_2(t)$ визначимо з попередніх проміжних співвідношень, в які треба підставити загальний розв'язок $x_1(t)$ та його похідну dx_1/dt.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші для неоднорідної СЛДР методом вилучення (зведенням до одного ДР вищого порядку). Обчислити значення $\tilde{x}_1 = x_{1K}(\tilde{t})$; $\tilde{x}_2 = x_{2K}(\tilde{t})$ отриманого розв'язку в заданій точці $\tilde{t}$:

а) $\begin{cases} dx_1/dt = 4x_1 - x_2 - 5t + 1; \\ dx_2/dt = x_1 + 2x_2 + t - 1; \end{cases}$ $x_1(0) = 3$; $x_2(0) = 2$; $\tilde{t} = 2$;

б) $\begin{cases} dx_1/dt = -x_1 + 2x_2 + \sin 2t; \\ dx_2/dt = -4x_1 + 3x_2; \end{cases}$ $x_1(0) = 2$; $x_2(0) = 0$; $\tilde{t} = \pi$.

Записати систему та знайдений розв'язок і його обчислені значення у матричній формі.

□ а) Обидві частини першого рівняння системи диференціюємо по t і отримуємо ДР другого порядку:

$$d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - dx_2/dt - 5.$$

Замість похідної dx_2/dt підставимо вираз з другого рівняння системи:

$$d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - (x_1 + 2x_2 + t - 1) - 5\,;$$

$$d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - x_1 - 2x_2 - t - 4\,.$$

З першого рівняння системи виразимо функцію x_2:

$$x_2 = -dx_1/dt + 4x_1 - 5t + 1$$

і підставимо цей вираз замість x_2 у останнє рівняння:

$$d^2x_1/dt^2 = 4\,dx_1/dt - x_1 - 2(-dx_1/dt + 4x_1 - 5t + 1) - t - 4\,;$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 6\frac{dx_1}{dt} - 9x_1 + 9t - 6\,;\ \ \frac{d^2x_1}{dt^2} - 6\frac{dx_1}{dt} + 9x_1 = 9t - 6\,.$$

Для одержаного ЛНДР другого порядку спочатку знайдемо загальний розв’язок відповідного однорідного ДР за допомогою характеристичного рівняння:

$$d^2x_1/dt^2 - 6\,dx_1/dt + 9x_1 = 0\,;\ \ k^2 - 6k + 9 = 0\,;\ \ k_1 = k_2 = 3\,;$$

$$\bar{x}_1 = (C_1 + C_2t)e^{3t}\,.$$

Оскільки права частина ЛНДР має спеціальний вигляд − многочлен першого степеня, то його частинний розв'язок x_{1*} будуємо методом невизначених коефіцієнтів:

$$z = a + bi = 0 + 0i = 0\ \text{ − не є коренем;}\ \ x_{1*} = At + B\,;$$

$$x'_{1*} = A\,;\ \ x''_{1*} = 0\,;\ \ -6A + 9At + 9B = 9t - 6\,;$$

$$\begin{array}{c|l} t^1 & \\ t^0 & \end{array}\!\!\begin{cases} 9A = 9; & A = 1; \\ -6A + 9B = -6; & -6\cdot 1 + 9B = -6;\ B = 0; \end{cases}\quad x_{1*} = t\,.$$

Тоді загальний розв’язок неоднорідного ДР можна подати у вигляді суми:

$$x_1 = \bar{x}_1 + x_{1*} = (C_1 + C_2t)e^{3t} + t\,.$$

Знайдемо похідну отриманого загального розв’язку

$$dx_1/dt = C_2e^{3t} + 3(C_1 + C_2t)e^{3t} + 1$$

і підставимо вирази для $x_1(t)$, dx_1/dt у співвідношення для x_2:

$$x_2 = -C_2e^{3t} - 3(C_1 + C_2t)e^{3t} - 3 + 4(C_1 + C_2t)e^{3t} + 4t - 5t + 1 =$$

$$= (-C_2 - 3C_1 - 3C_2t + 4C_1 + 4C_2t)e^{3t} - t - 2 =$$

$$= (C_1 - C_2 + C_2t)e^{3t} - t - 2\,.$$

Для знаходження конкретних значень довільних сталих C_1 і C_2 використаємо початкові умови:

$$\begin{matrix} x_1(0) = 3: \\ x_2(0) = 2: \end{matrix} \begin{cases} C_1 = 3; \\ C_1 - C_2 - 2 = 2; \end{cases} \quad \begin{matrix} C_1 = 3; \\ -C_2 = 4 - 3;\ C_2 = -1. \end{matrix}$$

Отже, маємо розв'язок задачі Коші:

$$x_{1K} = (3 - t)e^{3t} + t;\ \ x_{2K} = (4 - t)e^{3t} - t - 2\,.$$

Обчислимо значення отриманого розв'язку в заданій точці:

$$\tilde{x}_1 = x_{1K}(2) = (3 - 2)e^{3\cdot 2} + 2 = e^6 + 2\,;$$

$$\tilde{x}_2 = x_{2K}(2) = (4 - 2)e^{3\cdot 2} - 2 - 2 = 2e^6 - 4\,.$$

Запишемо СЛДР та її розв'язок і його обчислені значення у матричній формі:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\ \ A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};\ \ B = \begin{pmatrix} -5t + 1 \\ t - 1 \end{pmatrix};\ \ \frac{dX}{dt} = AX + B\,;$$

$$\begin{pmatrix} x_{1K} \\ x_{2K} \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 3 - t \\ 4 - t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -t - 2 \end{pmatrix};\ \ \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = e^6\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(Задачу б) розв'язати самостійно). ■

Приклад 2. Розв'язати крайову задачу для неоднорідної СЛДР зведенням до одного ДР вищого порядку:

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_2 - \cos t; \\ dx_2/dt = -x_1 + \sin t; \end{cases} \quad x_1(-\pi) = -\pi\,;\ \ x_2(\pi) = 3\,.$$

Записати систему та знайдений розв'язок у матричній формі.

(Розв'язати самостійно).

1.6 Контрольні запитання

1. Яка функція служить первісною для даної функції?
2. Що називається невизначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний зміст?
3. Які основні властивості невизначеного інтеграла?
4. Як перевірити правильність виконання операції інтегрування?
5. У чому полягає спосіб безпосереднього інтегрування?
6. У яких двох формах реалізується метод заміни змінної в невизначеному інтегралі?
7. Наведіть формулу методу інтегрування частинами в невизначеному інтегралі. Коли доречно застосовувати цей метод?
8. Наведіть типові випадки застосування інтегрування частинами і дайте відповідні рекомендації щодо вибору u.
9. Наведіть стандартний вигляд многочлена $P_n(x)$ n-го степеня.
10. Як розкладається многочлен з дійсними коефіцієнтами на прості дійсні множники?
11. Що називається раціональним дробом? За якої умови раціональний дріб є правильним? Неправильним?
12. Як подати неправильний раціональний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу?
13. Які правильні раціональні дроби називаються елементарними (найпростішими)?
14. Який вигляд має розклад правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів?
15. Які методи застосовуються для знаходження коефіцієнтів цього розкладу? У чому суть методу невизначених коефіцієнтів і методу окремих значень? Дайте рекомендації щодо їх застосування.
16. Як інтегруються елементарні дроби різних типів?
17. Як інтегруються правильні раціональні дроби у наступних випадках: а) корені знаменника дійсні й прості; б) корені знаменника дійсні, але деякі з них кратні; в) корені знаменника – дійсні (можливо, кратні) і прості комплексно спряжені?
18. Як за допомогою підстановок інтеграли з лінійними ірраціональностями зводяться до інтегралів від раціональних функцій?
19. Як знаходяться інтеграли вигляду $\int \cos ax \cos bx \, dx$, $\int \sin ax \cos bx \, dx$, $\int \sin ax \sin bx \, dx$?

20. У чому полягає універсальна тригонометрична підстановка?
21. Як знаходяться інтеграли вигляду $\int R(\sin x)\cos x\,dx$, $\int R(\cos x)\sin x\,dx$, $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x\cos x)\,dx$, $\int R(tg\,x)\,dx$, $\int \sin^m x\cos^n x\;dx$, де R – знак раціональної функції?
22. Як за допомогою тригонометричних підстановок інтегруються вирази, що містять квадратний корінь із суми чи різниці квадратів?
23. Наведіть приклади інтегралів, що "не беруться".
24. Що таке інтегральна сума? Який її геометричний і фізичний зміст?
25. Що називається визначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний зміст?
26. Сформулюйте необхідну умову інтегровності функції.
27. У чому полягає достатня умова інтегровності?
28. Наведіть формулу Ньютона – Лейбниця, що встановлює зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами.
29. Сформулюйте основні властивості визначеного інтеграла.
30. Що називається середнім інтегральним значенням функції на відрізку? Сформулюйте теорему про середнє інтегральне. У чому полягає її геометричний зміст?
31. Як здійснюється заміна змінної у визначеному інтегралі?
32. Наведіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
33. Що таке невласний інтеграл на необмеженому проміжку? У чому полягає його геометричний зміст?
34. Що таке невласний інтеграл від необмеженої функції? У чому полягає його геометричний зміст?
35. Наведіть дві основні схеми застосування визначеного інтеграла.
36. Що таке область? Замкнена область? Обмежена область?
37. Яка область називається правильною (стандартною) в напрямку осі Oy? Осі Ox? Просто правильною?
38. Як знаходиться площа правильної в напрямку осі Oy області? Правильної в напрямку осі Ox області?
39. Як знаходиться довжина дуги плоскої лінії, що задана явно в прямокутних координатах?

40. Як знаходиться об'єм тіла з відомими площами паралельних перерізів?
41. Як знаходиться об'єм тіла обертання?
42. Що таке диференціальне рівняння? Як визначається його порядок?
43. Який загальний вигляд ДР n–го порядку? Його канонічний (нормальний) вигляд?
44. Що називається розв'язком ДР?
45. Що таке інтегральна крива ДР?
46. Що називається загальним розв'язком ДР? Частинним розв'язком? Який їх геометричний зміст?
47. Що таке початкові та крайові умови? Як ставиться початкова задача (задача Коші)? Крайова задача?
48. Що таке особливий розв'язок ДР?
49. Як для ДР першого порядку формулюється теорема Коші (умови існування та єдиності розв'язку)? У чому її геометричний зміст?
50. Що таке ДР з відокремлюваними змінними?
51. Яка функція називається однорідною k-го порядку однорідності?
52. Що таке ДР з однорідною правою частиною (однорідне рівняння)?
53. За допомогою якої підстановки однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними?
54. Яке ДР першого порядку називається лінійним однорідним? Лінійним неоднорідним?
55. Як будується розв'язок ЛНДР першого порядку методом варіації довільної сталої?
56. Як розв'язується ЛНДР першого порядку методом Бернуллі?
57. Яке ДР n-го порядку називається лінійним однорідним? Лінійним неоднорідним?
58. Яка система функцій $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_n(x)$ $(n \geq 2)$ називається лінійно залежною? Лінійно незалежною?
59. Сформулюйте ознаку лінійної залежності чи незалежності системи n частинних розв'язків $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ одного ЛОДР n-го порядку.
60. Що таке фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР n-го порядку?

61. Яка структура загального розв’язку ЛОДР другого порядку?
62. Що таке характеристичне рівняння для ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
63. За якими формулами будується загальний розв’язок ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами в залежності від виду коренів характеристичного рівняння?
64. Яка структура загального розв’язку ЛНДР другого порядку?
65. У чому полягає принцип суперпозиції розв’язків ЛНДР?
66. Для ЛНДР що таке права частина спеціального вигляду?
67. Як методом невизначених коефіцієнтів будується частинний розв'язок ЛНДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами, що відповідає правій частині спеціального вигляду?
68. Який вигляд має нормальна система лінійних ДР першого порядку зі сталими коефіцієнтами? Наведіть матричний запис однорідної та неоднорідної систем.
69. У чому полягає метод вилучення розв’язування система лінійних ДР першого порядку зі сталими коефіцієнтами?

Змістовий модуль 2 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. РЯДИ

2.1 Функції багатьох змінних. Диференціювання функцій багатьох змінних

2.1.1 Поняття функції багатьох змінних. Область визначення

Нехай n – деяке фіксоване натуральне число. Упорядкована множина n довільних дійсних чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ називаються n-***вимірною точкою*** і позначається однією буквою, наприклад, M. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ називаються ***координатами*** точки M. Позначається $M(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Множина всіх n-вимірних точок називається n-***вимірним точковим простором*** R^n.

Нехай задано деяку n-вимірну непорожню множину D. Якщо за вказаним правилом (***законом відповідності***) f кожній точці M цієї множини відповідає одне цілком певне значення дійсної змінної u, то кажуть, що задано ***функцію*** n ***змінних*** $u = f(M) =$

$= f(x_1, x_2, ..., x_n)$. При цьому множину D називають ***областю визначення*** функції $u = f(M)$. Незалежні змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ називають ***аргументами***, а залежну змінну u – ***функцією***.

Якщо D – область на координатній площині Oxy (плоска, двовимірна), то функція $z = f(M) = f(x, y)$ є ***функцією двох змінних*** x, y.

Якщо D – область у тривимірному координатному просторі $Oxyz$, то функція $u = f(M) = f(x, y, z)$ є ***функцією трьох змінних*** x, y, z.

Нехай $M_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ – деяка точка n-вимірного простору. Множина всіх точок цього простору, для кожної з яких $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ відстань $\rho = M_0M$ від точки M_0 менша ε, тобто виконується умова

$$\boxed{\rho = M_0M = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2} < \varepsilon},$$

де $\varepsilon > 0$ – деяке додатне число, називається ε***-околом*** точки M_0 і позначається $U(M_0, \varepsilon)$.

У випадку двовимірного простору (площини) ε-околом точки M_0 є внутрішня частина круга радіуса ε з центром M_0.

Зауваження 1. Надалі обмежимось, в основному, розглядом функцій лише двох і, рідше, трьох змінних. На випадок функцій більшого числа змінних відповідні результати поширюються за аналогією.

Зауваження 2. Якщо функція задана аналітично (формулами) без будь-яких додаткових умов, то розглядають її ***природну область визначення*** (***область допустимих значень***) D – множину всіх тих точок, у яких дані аналітичні вирази мають смисл.

Приклад. Знайти і зобразити штриховкою на координатній площині Oxy природну область визначення D заданої функції:

а) $z = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$; б) $z = \sqrt{y^2 - 1 - x}$;

в) $z = \arcsin((x - 3y)/6) + 1 \big/ \sqrt{9 - x^2 - y^2} - \ln x$.

□ а) Природна область визначення D даної функції $z = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$ – множина всіх тих точок (x, y), для яких $9 - x^2 - 9y^2 > 0$, бо логарифм визначений тільки для додатних значень аргументу, а жодних інших обмежень на змінні x, y немає.

Щоб зобразити область D геометрично, знайдемо її межу:

$$9 - x^2 - 9y^2 = 0; \quad x^2 + 9y^2 = 9; \quad x^2/9 + y^2/1 = 1.$$

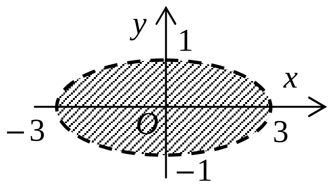

Рисунок 2.1

Це рівняння еліпса з півосями $a = 3$ та $b = 1$. Даний еліпс у залежності від знака виразу $9 - x^2 - 9y^2$ ділить всю координатну площину Oxy на дві частини – внутрішню і зовнішню (рис. 2.1).

Щоб виявити, яка з частин входить у область визначення, тобто задовольняє умову $9 - x^2 - 9y^2 > 0$, треба взяти довільно по одній пробній внутрішній точці з кожної частини і для них перевірити цю умову. Наприклад, для точки $O(0,0)$ умова виконується $9 - 0^2 - 9 \cdot 0^2 = 9 > 0$, тому внутрішня область, обмежена еліпсом, входить в D. Для точки $B(0,2)$ ця умова не виконується $9 - 0^2 - 9 \cdot 2^2 = -27 < 0$, тому область, що лежить поза еліпсом, не входить в D.

Отже, внутрішніми точками області визначення D даної функції є точки, обмежені еліпсом. Сам еліпс не належить області D, тому що для його точок $9 - x^2 - 9y^2 = 0$ і відповідна нерівність не виконується. Така лінія зображується пунктиром. Область D – відкрита (рис. 2.1).

б) Квадратний корінь добувається тільки з невід'ємних чисел, тому $y^2 - 1 - x \geq 0$. Жодних інших обмежень на аргументи x, y немає.

Рівняння $y^2 - 1 - x = 0$ визначає параболу, яка в залежності від знака виразу $y^2 - 1 - x$ поділяє координатну площину на дві частини – внутрішню і зовнішню.

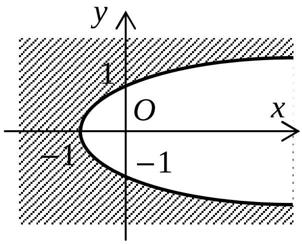

Рисунок 2.2

Точка $O(0,0)$ лежить усередині параболи і не задовольняє належній умові. Точка $A(-2,0)$ лежить зовні параболи і задовольняє цій умові. Отже, область визначення D складається з точок, що лежать ззовні параболи. Область D – замкнена, її межа позначена суцільною лінією (рис. 2.2).

в) Природна область визначення D даної функції – множина всіх тих точок (x, y), які задовольняють системі

$$\begin{cases} -1 \le (x-3y)/6 \le 1; \\ 9 - x^2 - y^2 > 0; \\ x > 0. \end{cases}$$

Межа області D визначається рівняннями

$$(x-3y)/6 = -1;\ (x-3y)/6 = 1;\ 9 - x^2 - y^2 = 0;\ x = 0$$

або $x - 3y + 6 = 0$; $x - 3y - 6 = 0$; $x^2 + y^2 = 9$; $x = 0$.

Перші два рівняння визначають паралельні прямих, третє рівняння – коло з центром у початку координат і радіусом $R = 3$, а четверте – задає вісь Oy. Кожна пряма ділить координатну площину на дві півплощини. Точки прямих $x - 3y + 6 = 0$ і $x - 3y - 6 = 0$ задовольняють відповідні нерівності. Такі лінії зображуються суцільно. Коло ділить координатну площину на внутрішню і зовнішню частини (всередині круга і поза ним). Для точок кола і прямої $x = 0$ відповідні нерівності не виконуються, тому вони зображуються пунктиром. Використовуючи пробні точки, знаходимо область визначення D (рис. 2.3). ■

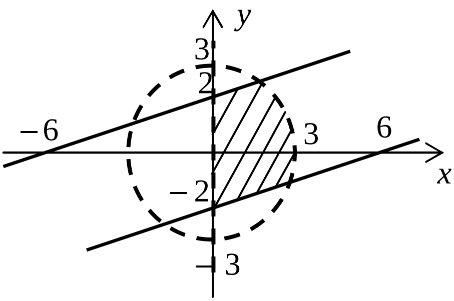

Рисунок 2.3

2.1.2 Геометричне зображення функції двох змінних. Лінії та поверхні рівня

Множина всіх точок $P(x, y, z)$ простору, координати яких задовольняють рівняння $z = f(x, y)$, називається ***графіком*** функції двох змінних $z = f(x, y)$.

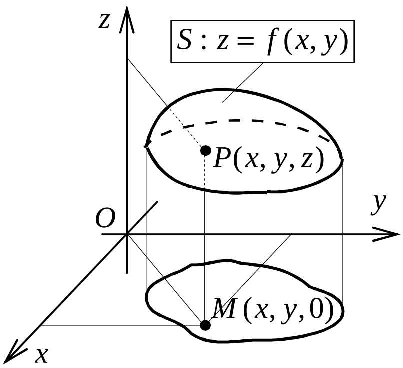

Рисунок 2.4

Звичайно графіком є деяка поверхня S, що проектується на площину Oxy на область визначення D (рис. 2.4). (Поверхня $z = f(x, y)$ – це «дах», що «нависає» над плоскою областю D).

Приклад 1. Побудувати поверхню, яка є графіком функції $z = x^2 + y^2/4$ (еліптичний параболоїд).

□ Використовуємо метод паралельних перерізів.

Знаходимо головні перерізи (перерізи координатними площинами).

Oyz: $x = 0$; $z = y^2/4$; $y^2 = 4z$ – парабола з вершиною у початку координат $O(0,0)$ і віссю Oz.

Oxz: $y = 0$; $z = x^2$; $x^2 = z$ – парабола з вершиною у початку координат $O(0,0)$ і віссю Oz.

Oxy: $z = 0$; $x^2 + y^2/4 = 0$; $O(0,0)$ – початок координат (вершина параболоїда).

Додатково знаходимо переріз поверхні площиною, що паралельна координатній площині Oxy: $z = 0$.

$z = 9$; $x^2 + y^2/4 = 9$; $x^2/9 + y^2/36 = 1$ – еліпс з великою піввіссю $a = 6$, що паралельна осі Oy, і з малою піввіссю $b = 3$, що паралельна осі Ox.

Еліптичний параболоїд $z = x^2 + y^2/4$ зображений на рис. 2.5.

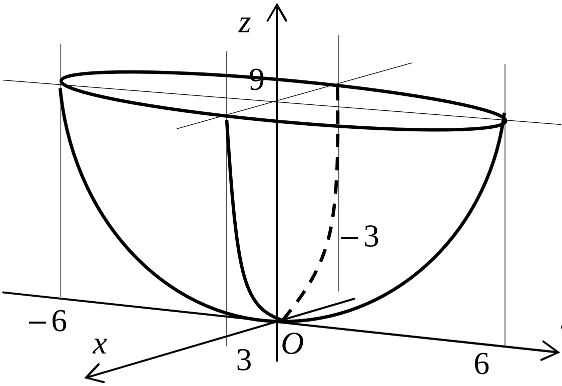

Рисунок 2.5

Зауваження 1. Функцію трьох чи більше змінних зобразити за допомогою графіка неможливо.

Зауваження 2. Для функції двох чи більше змінних не можна ввести поняття монотонності (зростання чи спадання). Наприклад, для функції $z = f(x, y)$, що зображена на рис. 2.6, у точці $M(x, y)$ у напрямку променя l_1 ця функція спадає $f(M_1) < f(M)$, а у напрямку променя l_2 ця функція зростає $f(M_2) > f(M)$.

Для графічного зображення функцій двох і трьох змінних використовуються також відповідно лінії та поверхні рівня.

Лінією рівня функції двох змінних $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок координатної площини Oxy, в яких ця функція набуває одного й того ж значення $z = C$, $C = const$. Рівняння лінії рівня

$$\boxed{f(x, y) = C}.$$

Через кожну точку $M_0(x_0, y_0)$ області D проходить єдина лінія рівня $f(x, y) = f(M_0)$.

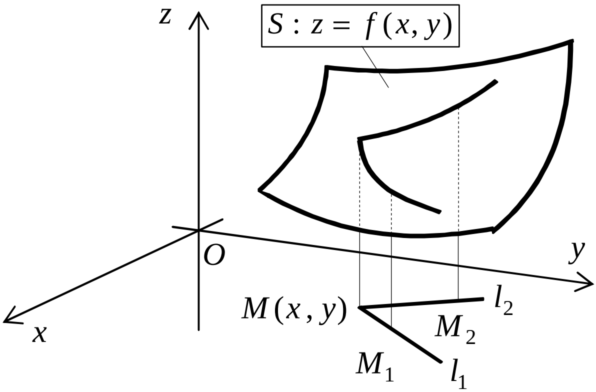

Рисунок 2.6

При різних C дістанемо різні лінії рівня для даної функції $z = f(x, y)$, кожна з яких виконує роль проекції лінії перетину поверхні $z = f(x, y)$ відповідною площиною $z = C$ (рис. 2.7).

Якщо вибрати числа $C_1, C_2, ..., C_n$ так, щоб вони утворювали арифметичну прогресію з різницею d $C_{n+1} = C_n + d$, то отримаємо топографічну карту рельєфу поверхні $z = f(x, y)$. За взаємним розташуванням ліній рівня можна судити про характер рельєфу: там, де лінії розміщуються густіше, функція $z = f(x, y)$ змінюється швидше (поверхня крутіша); там, де лінії розміщуються рідше, функція змінюється повільніше (поверхня більш пологa).

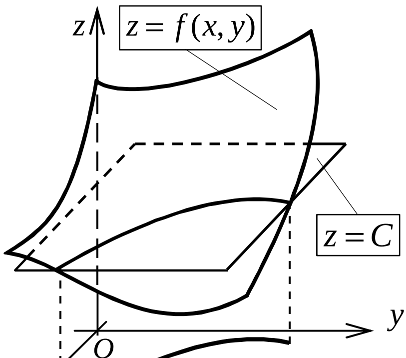

Рисунок 2.7

Приклади ліній рівня: ізотерми, ізобари на географічних картах; еквіпотенціальні лінії плоского електростатичного поля в електротехніці; криві байдужості функції загальної корисності $TU(Q_1, Q_2)$ споживання товарів двох видів Q_1, Q_2 у мікроекономіці.

Приклад 2. Побудувати сім'ю ліній рівня функції $z = x^2 + y^2 + 2$ при $C_1 = 2,\ C_2 = 3,\ C_3 = 4,\ C_4 = 5$.

□ $x^2 + y^2 + 2 = C$; $x^2 + y^2 = C - 2$.

$C_1 = 2$: $x^2 + y^2 = 0$ – точка $O(0;0)$ (вироджене коло).

$C_2 = 3$: $x^2 + y^2 = 1$ – коло радіуса $R = 1$ з центром $O(0;0)$.

$C_3 = 4$: $x^2 + y^2 = 2$ – коло радіуса $R = \sqrt{2}$ з центром $O(0;0)$.

$C_4 = 5$: $x^2 + y^2 = 3$ – коло радіуса $R = \sqrt{3}$ з центром $O(0;0)$.

Сім'я ліній рівня $x^2 + y^2 = C - 2$ – це сім'я концентричних кіл з центром у початку координат $O(0;0)$ (рис. 2.8).

Функція $z = x^2 + y^2 + 2$ зростає вздовж кожного радіального напрямку. Поверхня $z = x^2 + y^2 + 2$ – це симетрична «чаша» з круто зростаючими краями (параболоїд обертання). ■

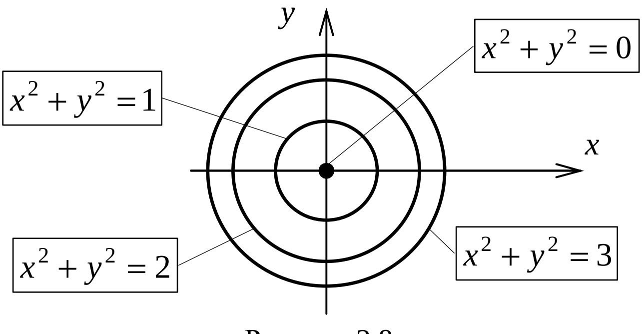

Рисунок 2.8

Поверхнею рівня функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ називається множина всіх точок простору $Oxyz$, в яких ця функція набуває одного й того ж значення $u = C$, $C = const$. Рівняння поверхні рівня

$$\boxed{f(x, y, z) = C}.$$

Приклад 3. Побудувати сім'ю поверхонь рівня функції $u = x^2 + y^2 + z^2$ при $C_1 = 0,\ C_2 = 1,\ C_3 = 4$.

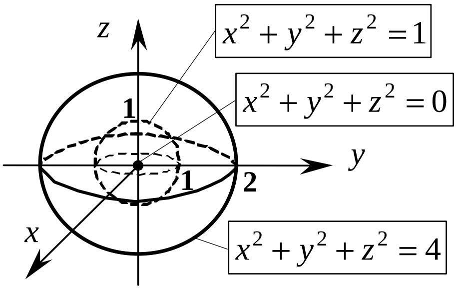

Рисунок 2.9

□ Поверхні рівня $x^2 + y^2 + z^2 = C$ – це сім'я концентричних сфер з центром у початку координат $O(0;0;0)$. На рис. 2.9 зображено поверхні рівня при $C_1 = 0,\ C_2 = 1,\ C_3 = 4$. ■

Приклад 4. Побудувати сім'ю поверхонь рівня функції $u = x^2 + y^2 - z$ при $C_1 = 0,\ C_2 = 1,\ C_3 = 4$. (Розв'язати самостійно).

2.1.3 Частинні прирости. Повний приріст. Границя. Неперервність. Точки розриву

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі фіксованої точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y фіксованою (рис. 2.10).

Різниця $\boxed{\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}$ називається ***частинним приростом по*** x функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x; y)$, що відповідає приросту Δx незалежної змінної x.

Аналогічно $\boxed{\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}$ – ***частинний приріст по*** y.

Якщо одночасно надати змінній x приросту Δx, а змінній y приросту Δy, то різниця $\boxed{\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}$ називається ***повним приростом*** функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x; y)$.

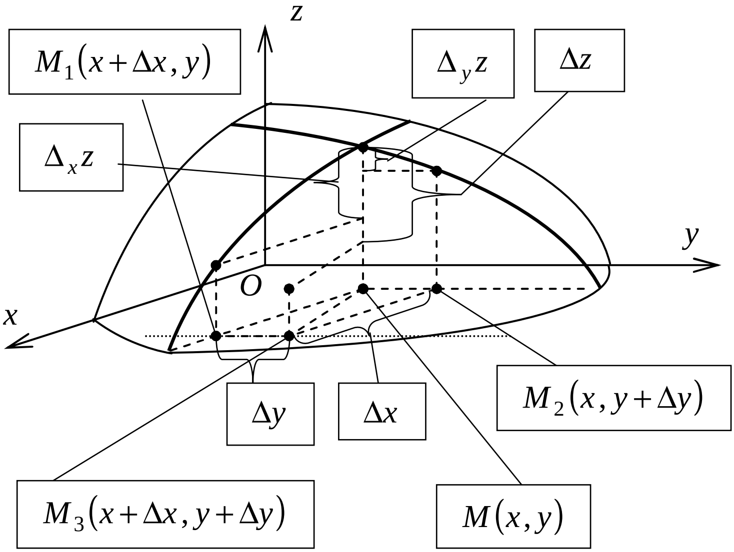

Рисунок 2.10

Зауваження 1. Із рис. 2.10 зрозуміло, що повний приріст Δz, у загальному випадку, не дорівнює сумі частинних приростів:

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z .$$

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, крім, можливо, самої точки M_0. Число A називається ***границею функції*** $z = f(x, y)$ ***в точці*** M_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-якої точки M із δ-околу точки M_0, крім, можливо, самої точки M_0, виконується нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Позначається

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \quad \text{або} \quad \lim_{x \to x_0,\, y \to y_0} f(x, y) = A.$$

Іншими словами, число A називається ***границею функції*** $z = f(x, y)$ ***в точці*** M_0, якщо їх різниця $\alpha = f(x, y) - A$ є нескінченно малою величиною при $M \to M_0$:

$$\alpha = f(x, y) - A \to 0 \quad \text{при } M \to M_0.$$

Зауваження 2. Точка M необмежено наближається до точки M_0 довільним способом. Важливо лише, що відстань $\rho = M_0 M$ від точки M_0 прямує до нуля.

Функція $z = f(x, y)$ називається ***неперервною в точці*** M_0, якщо виконуються умови:

1) функція $z = f(x, y)$ визначена в самій точці M_0 і в деякому її околі;

2) існує скінченна границя $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

3) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Оскільки для неперервної функції $z = f(x, y)$ її приріст прямує до нуля .при $M \to M_0$: $\Delta z = f(M) - f(M_0) \to 0$ і при цьому прирости всіх аргументів прямують до нуля:

$$\Delta x = x - x_0 \to 0\,; \;\; \Delta y = y - y_0 \to 0\,,$$

то означення неперервної в точці функції можна подати так.

Функція $z = f(x, y)$ називається ***неперервною в точці*** M_0, якщо в цій точці нескінченно малим приростам Δx і Δy її аргументів відповідає нескінченно малий приріст функції Δz:

$$\lim_{\Delta x \to 0,\; \Delta y \to 0} \Delta z = 0.$$

Функція $z = f(x, y)$ називається ***неперервною в області*** D**,** якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Властивості функції багатьох змінних, що неперервна в обмеженій замкненій області, аналогічні відповідним властивостям функції однієї змінної, що неперервна на відрізку.

Властивість 1. Функція $z = f(x, y)$, що неперервна в обмеженій замкненій області D, є обмеженою і досягає в ній свого найменшого m і найбільшого M значення.

Властивість 2. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в обмеженій замкненій області D, а m і M – відповідно її найменше і найбільше значення у цій області, то для будь-якого числа μ, що задовольняє нерівність $m \le \mu \le M$, у області D знайдеться хоча б одна точка $N \in D$, в якій значення функції дорівнює числу μ.

Якщо в точці M_0 порушується хоча б одна з умов неперервності, то ця точка називається ***точкою розриву*** функції $z = f(x, y)$, а сама функція $z = f(x, y)$ називається ***розривною*** в точці M_0.

Зауваження 4. У випадку функції двох змінних точки розриву можуть бути ***ізольованими*** чи утворювати ***лінії розриву***. Для функції трьох змінних точки розриву, крім цього, можуть утворювати ***поверхні розриву***.

Наприклад, функція $z = 1/(x^2 + y^2)$ має ізольовану точку розриву $O(0,0)$, для функції $z = 1/(2x + y + 2)$ пряма $2x + y + 2 = 0$ є лінією розриву, а функція $u = 1/(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$ має поверхню розриву – сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

2.1.4 Частинні похідні та їх обчислення. Геометричний зміст частинних похідних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі фіксованої точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y фіксованою.

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x називається границя відношення частинного приросту по x цієї функції $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ до відповідного приросту аргументу Δx, коли останній прямує до нуля:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}}\,.$$

Застосовуються також позначення:

$$z_x^I;\ f_x^I;\ f_x^I(x,y);\ f_x^I(M);\ \frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial f}{\partial x};\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x};\ \frac{\partial f(M)}{\partial x};\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M.$$

Аналогічно

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}}\,.$$

Таким чином, $\partial z/\partial x=[dz/dx]_{y=const}$; $\partial z/\partial y=[dz/dy]_{x=const}$.

Зауваження. Якщо у функції багатьох змінних $u=f(M)=$ $=f(x_1,x_2,...,x_n)$ всі аргументи, крім вибраного x_j, зафіксувати, то отримаємо функцію $u=\varphi_j(x_j)=f(x_1,x_2,...,x_j,...,x_n)$ тільки однієї вибраної змінної x_j. До цієї функції можна застосувати весь апарат математичного аналізу функцій однієї змінної. Зокрема, *частинна похідна за вибраною змінною обчислюється за правилами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи всі інші аргументи сталими* (*фіксованими*, «*замороженими*»):

$$\boxed{\partial u/\partial x_j=\left[du/dx_j\right]_{x_i=const,\ i=\overline{1,n};\ i\neq j}},\quad j=\overline{1,n}\,.$$

Приклад. Знайти всі частинні похідні заданої функції:

а) $z=x^2/y-\sin y+\pi$; б) $z=x^y$; в) $u=e^{xy^2z}/z$;

г) $u=x\cos(xy^3-z)$; д) $u=tg\left(xy^4/z^2\right)$.

□ а) $\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2/y-\sin y+\pi\right)_x'=\left(x^2/y\right)_x'-(\sin y)_x'+\pi_x^I=$

$$=(1/y)\,(x^2)_x'-0+0=(1/y)\cdot 2x=2x/y\,;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2/y-\sin y+\pi\right)_y'=\left(x^2/y\right)_y'-(\sin y)_y'+\pi_y^I=x^2\,(1/y)_x'-$$

$$-\cos y+0=x^2\cdot\left(-1/y^2\right)-\cos y=-\,x^2\big/y^2-\cos y;$$

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(x^y)'_x=y\,x^{y-1}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=(x^y)'_y=x^y\ln x$;

в) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\left(e^{xy^2z}\big/z\right)'_x=\dfrac{1}{z}\,(e^{xy^2z})'_x=\dfrac{1}{z}\cdot e^{xy^2z}(xy^2z)'_x=$

$$=(1/z)\cdot e^{xy^2z}\cdot y^2z=y^2\,e^{xy^2z};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\left(e^{xy^2z}\big/z\right)'_y=\frac{1}{z}\,(e^{xy^2z})'_y=$$

$$=(1/z)\cdot e^{xy^2z}(xy^2z)'_y=(1/z)\cdot e^{xy^2z}\cdot xz\cdot 2y=2xye^{xy^2z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(e^{xy^2z}\big/z\right)'_z=\frac{(e^{xy^2z})'_z\cdot z-e^{xy^2z}\,z'_z}{z^2}=\frac{e^{xy^2z}\,(xy^2z)'_z\cdot z-e^{xy^2z}}{z^2}=$$

$=(e^{xy^2z}\,xy^2z-e^{xy^2z})\big/z^2$. (Завдання г) і д) виконати самостійно). ■

Розглянемо *геометричний зміст* частинних похідних.

Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0,y_0)$. Графіком функції $z=f(x,y)$ є деяка поверхня (рис. 2.11).

Рівняння $y=y_0$ визначає січну площину, яка перпендикулярна до осі Oy. Ця площина перетинає поверхню $z=f(x,y)$ по деякій плоскій лінії l. Оскільки $\partial z/\partial x=\left[dz/dx\right]_{y=y_0}$, то виходячи з геометричного змісту звичайної похідної, маємо $\partial z/\partial x\big|_{M_0}=tg\,\alpha$.

Частинна похідна $\partial z/\partial x\big|_{M_0}$ *чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу* α *дотичної до лінії перерізу* l *поверхні* $z=f(x,y)$ *площиною* $y=y_0$ *у відповідній точці* $P_0(x_0,y_0,z_0)$, *де* $z_0=f(x_0,y_0)$. (Геометричний зміст частинної похідної).

Загальні рівняння дотичної прямої до лінії перерізу l поверхні $z=f(x,y)$ площиною $y=y_0$: $\begin{cases} z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0); \\ y=y_0. \end{cases}$

Аналогічно $\begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0); \\ x = x_0 \end{cases}$

– загальні рівняння дотичної прямої до лінії перерізу l поверхні $z = f(x, y)$ площиною $x = x_0$.

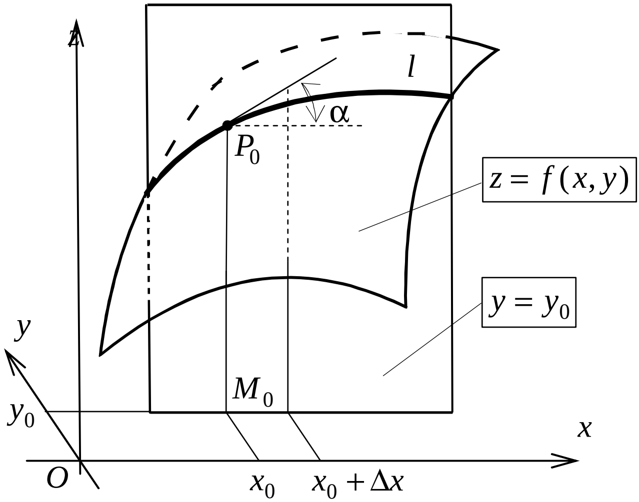

Рисунок 2.11

2.1.5 Частинні та повний диференціали

Нехай задано функцію багатьох змінних $u = f(M) = = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Якщо всі аргументи, крім вибраного x_j, зафіксувати, то одержимо функцію $u = \varphi_j(x_j) = f(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n)$ тільки однієї вибраної змінної x_j, диференціал якої називається ***частинним диференціалом функції*** $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ***за змінною*** x_j і позначається $d_{x_j} u$.

Частинний диференціал зв’язаний з відповідною частинною похідною співвідношенням

$$\boxed{d_{x_j} u = \frac{\partial z}{\partial x_j}\, dx_j},$$

де dx_j – диференціал незалежної змінної x_j. Диференціал незалежної змінної збігається з її приростом $dx_j = \Delta x_j$.

Приклад 1. Знайти частинні диференціали функції:

а) $z = arctg\,(y/x)$; б) $u = 3x^2yz - x\ln y$.

□ а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{1+(y/x)^2} \cdot y \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(y/x)^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{x}{x^2+y^2};$$

$$d_x z = -\frac{y\,dx}{x^2+y^2}; \quad d_y z = \frac{x\,dx}{x^2+y^2};$$

б) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3yz \cdot 2x - \ln y \cdot 1 = 6xyz - \ln x$;

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2z \cdot 1 - x \cdot \frac{1}{y} = 3x^2z - x/y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3x^2y \cdot 1 - 0 = 3x^2y;$$

$$d_x u = (6xyz - \ln x)\,dx; \; d_y u = (3x^2z - x/y)\,dy; \; d_z u = 3x^2y\, dz. \; ■$$

Функція $z = f(M) = f(x,y)$ називається ***диференційованою*** в точці $M(x,y)$, якщо її повний приріст $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

де A, B – незалежні від Δx і Δy величини; $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ і $\beta(\Delta x, \Delta y)$ – нескінченно малі при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ функції.

Повним диференціалом dz функції $z = f(x,y)$ в точці $M(x,y)$ називається головна частина її повного приросту в цій точці, лінійна щодо приростів Δx і Δy аргументів:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Теорема 1 (***необхідна умова диференційованості***). *Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована в деякій точці $M(x, y)$, то вона неперервна в цій точці.*
(Без доведення)

Теорема 2. Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці $M(x; y)$, тобто $dz = A\,dx + B\,dy$, то ця функція має в точці $M(x; y)$ частині похідні $\partial z/\partial x$ і $\partial z/\partial y$, причому

$$\partial z/\partial x = A; \quad \partial z/\partial y = B.$$

Іншими словами, *повний диференціал функції $z = f(x, y)$ дорівнює сумі добутків частинних похідних цієї функції на диференціали відповідних аргументів* $\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy}$.
(Без доведення)

Теорема 3 (***Достатня умова диференційованості***). *Якщо функція $z = f(x, y)$ має в деякій точці $M(x; y)$ неперервні частинні похідні $\partial z/\partial x$ і $\partial z/\partial y$, то ця функція диференційована в точці M.*
(Без доведення)

Приклад 2. Знайти повний диференціал функції:

$$\text{а) } u = \ln\left(x + \sqrt{y + z^2}\right); \qquad \text{б) } u = e^{z^2} \sin^2(x + y^3).$$

□ а) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x + \sqrt{y + z^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x + \sqrt{y + z^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y + z^2}} \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y + z^2}\left(x + \sqrt{y + z^2}\right)}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x + \sqrt{y + z^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y + z^2}} \cdot 2z =$$

$$= \frac{z}{\sqrt{y + z^2}\left(x + \sqrt{y + z^2}\right)}; \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz =$$

$$=\frac{2\sqrt{y+z^2}\,dx+dy+2z\,dz}{2\sqrt{y+z^2}\left(x+\sqrt{y+z^2}\right)};$$

б) $\frac{\partial u}{\partial x}=e^{z^2}\cdot 2\sin(x+y^3)\cdot\cos(x+y^3)=e^{z^2}\sin 2(x+y^3);$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{z^2}2\sin(x+y^3)\cos(x+y^3)\cdot 3y^2=3y^2e^{z^2}\sin 2(x+y^3);$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\sin^2(x+y^3)\cdot e^{z^2}\cdot 2z=2ze^{z^2}\sin^2(x+y^3);$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=e^{z^2}\sin 2(x+y^3)\,dx+$$

$$+3y^2e^{z^2}\sin 2(x+y^3)\,dy+2z\,e^{z^2}\sin^2(x+y^3)\,dz. \quad ■$$

Зауваження. При достатньо малих приростах аргументів Δx і Δy повний приріст Δz функції $z=f(x,y)$ можна наближено замінити повним диференціалом $\Delta z\approx dz$. Звідси маємо формулу для наближеного обчислення значення функції

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y.$$

Приклад 3. Знайти повний приріст і повний диференціал функції $z=x/y$ в точці $M(9,3)$ при $\Delta x=0{,}1$ і $\Delta y=-0{,}2$.

□ $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=$

$$=\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-\frac{x}{y}=\frac{(x+\Delta x)y-x(y+\Delta y)}{y(y+\Delta y)}=\frac{y\Delta x-x\Delta y}{y(y+\Delta y)};$$

$$\Delta z=\frac{3\cdot 0{,}1-9\cdot(-0{,}2)}{3\cdot(3-0{,}2)}=\frac{2{,}1}{3\cdot 2{,}8}=0{,}25;\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2};$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{1}{y}\Delta x-\frac{x}{y^2}\Delta y;$$

$$dz=(1/3)\cdot 0{,}1-(9/3^2)\cdot(-0{,}2)\approx 0{,}233. \quad ■$$

Приклад 4. Знайти наближене значення

$$\text{а) } A = 1{,}98\cos 1; \qquad \text{б) } A = \sqrt{17}\ln 3.$$

□ а) Розглянемо функцію $z = z(x, y) = x\cos y$. Нехай $x = 2$; $y = \pi/3$. Тоді $\Delta x = 1{,}98 - 2 = -0{,}02$; $\Delta y = 1 - \pi/3 \approx -0{,}047$.

Дістанемо:

$$A = 1{,}98\cos 1 = z(2 + \Delta x,\ \pi/3 + \Delta y) \approx z(2, \pi/3) +$$

$$+\frac{\partial z(2, \pi/3)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(2, \pi/3)}{\partial y}\Delta y; \quad z(2, \pi/3) = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y; \quad \frac{\partial z(2, \pi/3)}{\partial x} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x\sin y;$$

$$\frac{\partial z(2, \pi/3)}{\partial y} = -2\sin\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \approx -1{,}73;$$

$$A = 1{,}98\cos 1 \approx 1 + (1/2)\cdot(-0{,}02) + (-1{,}73)\cdot(-0{,}047) \approx$$

$$\approx 1 - 0{,}01 + 0{,}081 \approx 1{,}07.$$

б) Розв’язати самостійно. ■

Теорема 4 (***Інваріантність форми повного диференціала***). *Повний диференціал складеної функції* $z = f(x, y)$, *де* $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, *можна подати у вигляді*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

який збігається з виглядом повного диференціала звичайної функції.

Іншими словами, *вигляд повного диференціала функції не залежить від того, чи є її аргументи незалежними змінними чи функціями інших змінних.*

(Без доведення)

2.1.6 Складені функції та їх диференціювання. Неявні функції та їх диференціювання. Частинні похідні вищих порядків

Обмежимось розглядом трьох важливих випадків у припущенні, що всі частинні похідні неперервні.

1) Нехай задана функція двох змінних $z = f(x, y)$, аргументи якої самі є функціями незалежної змінної t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тоді повна похідна складеної функції однієї змінної t $z = f\left(x(t), y(t)\right)$ обчислюється за формулою

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}}.$$

2) Якщо аргументи функції двох змінних $z = f(x, y)$ самі є функціями інших двох незалежних змінних $x = x(u, v)$ і $y = y(u, v)$. Тоді частинні похідні складеної функції двох змінних $z = f\left(x(u, v),\, y(u, v)\right)$ обчислюються за формулами:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}}; \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}}.$$

3) Нехай задана функція двох змінних $z = f(x, y)$, де другий аргумент y сам є функцією першого аргументу x: $y = y(x)$. Тоді ***повна похідна*** за x складеної функції однієї змінної $z = f\left(x, y(x)\right)$ обчислюється за формулою

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}}.$$

Зауваження 1. Праворуч у цій формулі перший доданок $\partial z/\partial x$ – це частинна похідна за x, обчислена в припущенні, що $y = const$. У лівій частині маємо dz/dx – повну похідну за x, обчислену при умові, що y є функцією від x: $y = y(x)$.

Приклад 1. Знайти значення вказаних похідних складеної функції у відповідній точці:

а) dz/dt, якщо $z = x e^{xy}$, де $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $t_0 = \pi$;

б) $\partial z/\partial u$ і $\partial z/\partial v$, якщо $z = arctg(x^2 + y)$, де $x = u\ln v$, $y = v\cos u$, $u_0 = \pi$, $v_0 = 1$;

в) dz/dx, якщо $z = \arcsin(xy)$, де $y = \ln x$, $x_0 = 1$.

□ а) $x_0 = x(t_0) = \pi\cos\pi = -\pi$; $y_0 = y(t_0) = \pi\sin\pi = 0$;

$$dx/dt = \cos t - t\sin t; \quad dx/dt\big|_{t=\pi} = \cos\pi - \pi\sin\pi = -1;$$

$$dy/dt = \sin t + t\cos t; \quad dy/dt\big|_{t=\pi} = \sin\pi + \pi\cos\pi = -\pi;$$

$$\partial z/\partial x = e^{xy} + xy\,e^{xy}; \quad \partial z/\partial x\big|_{t=\pi} = e^{-\pi\cdot 0} - \pi\cdot 0\cdot e^{-\pi\cdot 0} = 1;$$

$$\partial z/\partial y = x^2 e^{xy}; \quad \partial z/\partial y\big|_{t=\pi} = (-\pi)^2 e^{-\pi\cdot 0} = \pi^2;$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}; \quad \frac{dz}{dt}\bigg|_{t=\pi} = 1\cdot -1) + \pi^2\cdot(-\pi) = -(\pi^3 + 1).$$

б) $x_0 = x(u_0, v_0) = \pi\cdot\ln 1 = 0$; $y_0 = y(u_0, v_0) = 1\cdot\cos\pi = -1$;

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \ln v; \quad \frac{\partial x}{\partial u}\bigg|_{u=\pi,\, v=1} = \ln 1 = 0; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{v}; \quad \frac{\partial x}{\partial v}\bigg|_{u=\pi,\, v=1} = \frac{\pi}{1} = \pi;$$

$$\partial y/\partial u = -v\sin u; \quad \partial y/\partial u\big|_{u=\pi,\, v=1} = -1\cdot\sin\pi = 0; \quad \partial y/\partial v = \cos u;$$

$$\partial y/\partial v\big|_{u=\pi,\, v=1} = \cos\pi = -1; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{1 + (x^2 + y)^2};$$

$$\partial z/\partial x\big|_{u=\pi,\, v=1} = \frac{2\cdot 0}{1 + (0^2 - 1)^2} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + (x^2 + y)^2};$$

$$\partial z/\partial y\big|_{u=\pi,\, v=1} = \frac{1}{1 + (0^2 - 1)^2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};$$

$$\partial z/\partial u\big|_{u=\pi,\, v=1} = 0\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v};$$

$$\partial z/\partial v\big|_{u=\pi,\, v=1} = 0\cdot\pi + (1/2)\cdot(-1) = -1/2;$$

в) $y_0 = y(x_0) = \ln 1 = 0$; $dy/dx = 1/x$; $dy/dx\big|_{x=1} = 1/1 = 1$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{1-(xy)^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{x=1} = \frac{0}{\sqrt{1-(1\cdot 0)^2}} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1-(xy)^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{1-(1\cdot 0)^2}} = 1; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}; \quad \frac{dz}{dx}\bigg|_{x=1} = 0 + 1\cdot 1 = 1. \ \blacksquare$$

Теорема 1 (***умови існування неявної функції***). *Якщо функція* $F(x, y)$ *та її частинні похідні* $F_y'(x, y)$, $F_x'(x, y)$ *визначені та неперервні в деякому околі точки* $M_0(x_0, y_0)$ *і при цьому* $F(x_0, y_0) = 0$, *а* $F_y'(x_0, y_0) \neq 0$, *то рівняння* $F(x, y) = 0$ *в деякому околі точки* $M_0(x_0, y_0)$ *визначає єдину неявну неперервну і диференційовану функцію* $y = y(x)$, *причому* $y_0 = y(x_0)$.

(Без доведення).

Теорема 2. Нехай функція $y = y(x)$ *задається неявно рівнянням* $F(x, y) = 0$, *де функція* $F(x, y)$ *та її частинні похідні* $F_y'(x, y)$ *і* $F_x'(x, y)$ *неперервні в околі деякої точки* $M(x, y)$, *координати якої задовольняють це рівняння, і при цьому* $F_y'(x, y) \neq 0$. *Тоді в цій точці* $\boxed{y_x' = -F_x'(x, y)\big/F_y'(x, y)}$. (Без доведення).

Приклад 2. Написати рівняння дотичної до кривої

$$l: \quad x^3y^4 - 3y^2 = 4 \quad \text{у точці } M_0(1;2).$$

□ Перевіримо, чи задовольняє точка $M_0(1;2)$ рівняння лінії

$$l: \ F(x, y) = x^3y^4 - 3y^2 - 4 = 0;$$

$$M_0(1;2): \ F(x_0, y_0) = 1^3\cdot 2^4 - 3\cdot 2^2 - 4 = 0; \ 0 = 0; \ M_0 \in l.$$

Рівняння дотичної прямої $y - y_0 = y_0' \cdot (x - x_0)$.

Знайдемо шукану похідну $y_0' = y_x'\big|_{M_0}$:

$$y_x^I = -F_x^I \big/ F_y^I; \quad F_x^I = 3x^2y^4; \quad F_y^I = 4x^3y^3 - 6y;$$

$$y_x^I = -\frac{3x^2y^4}{4x^3y^3 - 6y} = -\frac{3x^2y^3}{4x^3y^2 - 6};$$

$$y_0^I = y_x^I\Big|_{M_0} = -3 \cdot 1^2 \cdot 2^3 \big/ (4 \cdot 1^2 \cdot 2^2 - 6) = -12/5.$$

Рівняння шуканої дотичної

$$y - 2 = -\frac{12}{5}(x-1); \quad y = -\frac{12}{5}x + \frac{22}{5}. \quad \blacksquare$$

Зауваження 2. Нехай рівняння $F(x,y,z) = 0$ задає неявно функцію двох змінних $z = z(x,y)$. Тоді, фіксуючи y, за теоремою 2 отримаємо $\boxed{\partial z/\partial x = -F_x^I(x,y) \big/ F_z^I(x,y)}$.

Фіксуючи x, аналогічно маємо $\boxed{\partial z/\partial y = -F_y^I(x,y) \big/ F_z^I(x,y)}$.

Приклад 3. Знайти значення частинних похідних функції $z = z(x,y)$, яка задана неявно рівнянням $x^2 + 2e^y + xz = 5$, у точці $M_0(1;0;2)$.

□ Перевіримо, чи задовольняє точка $M_0(1;0;2)$ задане рівняння, що визначає деяку поверхню

$$S: \ F(x,y,z) = x^2 + 2e^y + xz - 5 = 0; \ M_0(1;0;2): \ F(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= 1^2 + 2 \cdot e^0 + 1 \cdot 2 - 5 = 0; \quad 0 = 0; \quad M_0 \in S.$$

Знайдемо шукані похідні:

$$F_x' = 2x + z; \quad F_y' = 2e^y; \quad F_z' = x; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x+z}{x};$$

$$\partial z/\partial x\big|_{M_0} = -(2 \cdot 1 + 2)/1 = -4; \ \partial z/\partial x = -F_y' \big/ F_z'; \ \partial z/\partial x = -2e^y \big/ x;$$

$$\partial z/\partial y\big|_{M_0} = -2e^0 \big/ 1 = -2. \quad \blacksquare$$

Приклад 4. Продиференціювати неявно задану функцію $z = z(x,y)$ двох змінних: $y^2 - \sin yz + xz^4 - 3 = 0$.

□ $F'_x = z^4$; $F'_y = 2y - z\cos yz$; $F'_z = -y\cos yz + 4xz^3$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{z^4}{-y\cos yz + 4xz^3}; \ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_y}{F'_z} - \frac{2y - z\cos yz}{-y\cos yz + 4xz^3}. \ ■$$

Частинні похідні $\partial z/\partial x$ і $\partial z/\partial y$ функції двох змінних $z = f(x, y)$ також є функціями двох змінних x і y, а тому самі можуть мати частинні похідні.

Частинна похідна по x від частинної похідної по x називається ***другою чистою частинною похідною по*** x і позначається

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, або $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, або z''_{xx}. Таким чином, $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}$.

Аналогічно частинна похідна по y від частинної похідної по y називається ***другою чистою частинною похідною по*** y та позначається $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, або $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, або z''_{yy}. Отже, $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}$.

Якщо від частинної похідної по x взяти частинну похідну по y, то отримаємо ***другу мішану частинну похідну по*** x ***і*** y, яка

Позначається $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, або $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, або z''_{xy}. Отже, $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}$.

Якщо від частинної похідної по y взяти частинну похідну по x, то одержимо ***другу мішану частинну похідну по*** y ***і*** x (з іншим порядком диференціювання), яка позначається

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, або $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, або z''_{yx}. Отже, $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}$.

У загальному випадку $\partial^2 z/\partial y \partial x \neq \partial^2 z/\partial x \partial y$.

Зауваження 3. Аналогічно частинним похідним другого порядку вводяться частинні похідні третього, четвертого і т.д., порядку. Наприклад,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right); \qquad \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right).$$

Теорема 3. Для неперервних мішаних частинних похідних порядок диференціювання значення не має, зокрема $\boxed{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}$.

(Без доведення).

Приклад 6. Для заданої функції $z = f(x, y)$ перевірити рівність указаних мішаних частинних похідних:

а) $z = \sin(xy)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; б) $z = y \ln x$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

□ а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (\sin(xy))'_x = y\cos(xy)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (y\cos(xy))'_y =$

$$= \cos(xy) - xy\sin(xy); \quad \partial z / \partial y = (\sin(xy))'_y = x\cos(xy);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (x\cos(xy))'_x = \cos(xy) - xy\sin(xy); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$$

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{1}{x}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2}; \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2};$$

$$\partial^3 z / \partial x \partial y \partial x = \partial^3 z / \partial x^2 \partial y. \quad \blacksquare$$

Приклад 7. Перевірити, що задана функція $z = f(x, y)$ задовольняє вказаній умові:

а) $z = arctg\,\dfrac{x}{y}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 4\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$;

б) $z = x\sin(x - y)$; $x\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2z = 0$.

□ а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};\quad -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - 4\cdot\frac{y}{x^2+y^2}\times$$

$$\times\Big(-x\big/(x^2+y^2)\Big) = 0;\quad (-2xy - 2xy + 4xy)\big/(x^2+y^2)^2 = 0;\quad 0 = 0.$$

Таким чином, задана функція задовольняє вказаній умові.

б) $\partial z/\partial x = \sin(x-y) + x\cos(x-y)$; $\partial z/\partial y = -x\cos(x-y)$;

$$\partial^2 z/\partial y^2 = -x\sin(x-y);\quad x\Big(\sin(x-y) + x\cos(x-y) -$$

$$- x\cos(x-y)\Big) - \Big(-x\sin(x-y)\Big) - 2x\sin(x-y) = 0;\quad 0 = 0.$$

Отже, задана функція задовольняє вказаній умові. ■

2.1.7 Дотична площина і нормаль до поверхні. Геометричний зміст повного диференціала

Нехай поверхня S задана рівнянням $z = f(x,y)$ і $P_0(x_0, y_0, z_0)$ – деяка точка цієї поверхні (рис. 2.12). Рівняння дотичної площини α_d у точці P_0 будемо шукати у вигляді

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0),$$

де A, B – невизначені коефіцієнти.

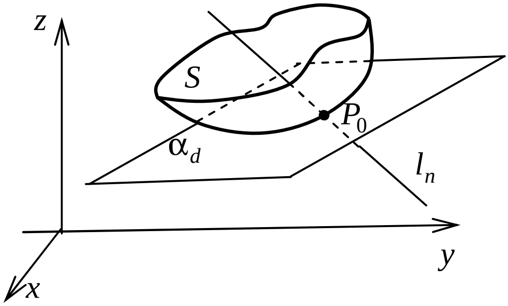

Рисунок 2.12

З геометричного змісту частинних похідних $f'_x(x_0, y_0)$ і $f'_y(x_0, y_0)$ випливає, що рівняння дотичних у точці P_0 до ліній перетину поверхні $S:\ z = f(x, y)$ площинами $y = y_0$ і $x = x_0$ мають відповідно вигляд:

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0); \\ \qquad y = y_0; \end{cases} \qquad \begin{cases} z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0); \\ \qquad x = x_0. \end{cases}$$

Ці дві прямі є лініями перетину дотичної площини α_d відповідно з площинами $y = y_0$ і $x = x_0$. Тому рівняння дотичних прямих можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0); \\ \qquad y = y_0; \end{cases} \qquad \begin{cases} z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0); \\ \qquad x = x_0. \end{cases}$$

Порівнюючи ці рівняння з попередніми рівняннями дотичних прямих, знаходимо $A = f'_x(x_0, y_0)$; $B = f'_y(x_0, y_0)$.

Отже, ***рівняння дотичної площини*** α_d має вигляд:

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)}\,.$$

Вектор нормалі дотичної площини

$$\vec{n} = (A,\ B,\ C) = \left(f'_x(x_0, y_0),\ f'_y(x_0, y_0),\ -1\right)$$

називається також ***вектором нормалі до поверхні*** $S:\ z = f(x, y)$ у точці дотику $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Пряма l_n, яка проходить через точку P_0 перпендикулярно до дотичної площини α_d у цій точці, називається ***нормальною прямою*** (***нормаллю***) до поверхні $S:\ z = f(x, y)$ у цій точці P_0.

Взявши вектор нормалі дотичної площини за напрямний вектор, можна записати ***канонічні рівняння нормальної прямої***:

$$\boxed{l_n:\ \ \frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}}\,.$$

Зауваження. Якщо поверхня S задана неявно рівнянням $F(x;y;z)=0$, то:

1) рівняння дотичної площини

$$\boxed{\alpha_d:\ \ F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0)+}$$

$$\boxed{+F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)=0}$$

і вектор нормалі $\vec{n}=\left(F'_x(x_0,y_0,z_0),F'_y(x_0,y_0,z_0),F'_z(x_0,y_0,z_0)\right)$;

2) канонічні рівняння нормальної прямої

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}}\,.$$

Приклад. Написати рівняння дотичної площини α_d та нормальної прямої l_n до заданої поверхні S в указаній точці $P_0(x_0;y_0;z_0)$:

а) $x_0=0$, $y_0=2$, а поверхня S задана явно рівнянням $z=x^2-y\cos x+y^3-2x$;

б) $P_0(1;-2;-1)$, а поверхня S задана неявно рівнянням $x^2+y^2/x-z^3+4yz=14$.

□ а) $z=f(x,y)=x^2-y\cos x+y^3-2x$;

$$z_0=f(x_0,y_0)=0^2-2\cos 0+2-0^3=6;\quad P_0(0;2;6);$$

$$f'_x=2x+y\sin x-2;\quad f'_x\big|_{P_0}=2\cdot 0+2\cdot\sin 0-2=-2;$$

$$f'_y=-\cos x+3y^2;\quad f'_y\big|_{P_0}=-\cos 0+3\cdot 2^2=11;$$

$$\alpha_d:\ \ z-z_0=f'_x\big|_{P_0}(x-x_0)+f'_y\big|_{P_0}(y-y_0);$$

$$z-6=-2(x-0)+11(y-2);\quad -2x+11y-22-z+6=0;$$

$$-2x+11y-z-16=0;\ \ 2x-11y+z+16=0$$ – дотична площина;

$$l_n:\ \ \frac{x-x_0}{f'_x\big|_{P_0}}=\frac{y-y_0}{f'_y\big|_{P_0}}=\frac{z-z_0}{-1};\quad \frac{x-0}{-2}=\frac{y-2}{11}=\frac{z-6}{-1}$$

– нормальна пряма;

б) Перевіримо спочатку, чи належить указана точка $P_0(1;-2;-1)$ даній поверхні S:

$$F(x,y,z)=x^2+y^2/x-z^3+4yz-14=0;\ \ 1^2+(-2)^2/1-(-1)^3+$$
$$+4\cdot(-2)\cdot(-1)-14=0;\quad 0=0 \text{ вірно};\quad P_0(1;-2;-1)\in S.$$

Обчислимо значення частинних похідних у точці дотику P_0:

$$F'_x=2x-y^2/x^2;\ \ F'_x\big|_{P_0}=2\cdot1-(-2)^2/1^2=-2;\ \ F'_y=2y/x+4z;$$
$$F'_y\big|_{P_0}=2\cdot(-2)/1+4\cdot(-1)=-8;\ \ F'_z=-3z^2+4y;\ \ F'_z\big|_{P_0}=-3\times$$
$$\times(-1)^2+4\cdot(-2)=-11.$$

Складаємо рівняння дотичної площини та нормальної прямої:

$$\alpha_d:\ \ F'_x\big|_{P_0}(x-x_0)+F'_y\big|_{P_0}(y-y_0)+F'_z\big|_{P_0}(z-z_0)=0;$$
$$-2\cdot(x-1)-8\cdot(y+2)-11\cdot(z+1)=0;\ \ 2x-2+8y+16+$$
$$+11z+11=0;\quad 2x+8y+11z+25=0$$ – дотична площина;

$$l_n:\ \ \frac{x-x_0}{F'_x\big|_{P_0}}=\frac{y-y_0}{F'_y\big|_{P_0}}=\frac{z-z_0}{F'_z\big|_{P_0}};\quad \frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{-8}=\frac{z+1}{-11};$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{8}=\frac{z+1}{11}$$ – нормальна пряма. ■

Порівнюючи рівняння дотичної площини

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

з формулою повного диференціала, яку можна подати у вигляді

$$dz=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

бачимо, що праві частини цих виразів збігаються.

Отже, й ліві частини є рівними. Тобто, *повний диференціал функції* dz *дорівнює приросту* $\Delta z = z - z_0$ *аплікати дотичної площини* α_d, *проведеної до поверхні* $S: z = f(x, y)$ *у точці* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 2.13). (*Геометричний зміст* повного диференціалу).

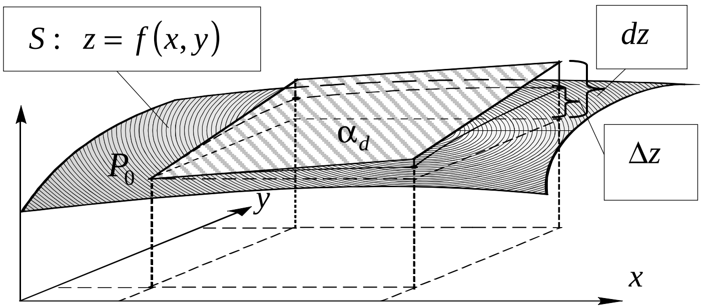

Рисунок 2.13

2.1.8 Похідна за напрямом і градієнт

Нехай у деякому околі фіксованої точки $M(x, y, z)$ задано функцію трьох змінних $u = u(M) = u(x, y, z)$. Проведемо з цієї точки M довільний ненульовий вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha$, $\cos\beta$ і $\cos\gamma$. У напрямі цього вектора на деякій відстані Δl від початку M візьмемо іншу точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ (рис. 2.14). Тоді

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\ ;$$

$$\Delta x = \Delta l\ \cos\alpha;\quad \Delta y = \Delta l\ \cos\beta;\quad \Delta z = \Delta l\ \cos\gamma\ .$$

Різниця $\Delta_l u = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z)$ значень функції в точках M_1 і M називається ***приростом функції*** $u = u(x, y, z)$ ***у напрямі вектора*** $\vec{l}$.

Якщо функція $u = u(x, y, z)$ неперервна і має неперервні частинні похідні, то

$$\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

де $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, $\varepsilon_3 \to 0$ при $\Delta l \to 0$.

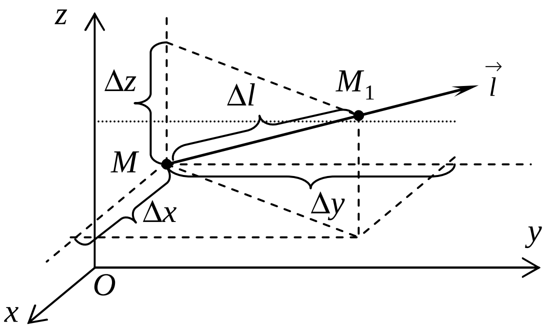

Рисунок 2.14

Тоді $\Delta_l u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta l \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta l \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta l \cos\gamma +$

$$+\varepsilon_1 \Delta l \cos\alpha + \varepsilon_2 \Delta l \cos\beta + \varepsilon_3 \Delta l \cos\gamma$$.ё

Похідною функції $u = u(x, y, z)$ ***у точці*** $M(x, y, z)$ ***за напрямом вектора*** $\vec{l}$ називається границя $\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}}$.

Похідна за напрямом обчислюється за формулою:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma}$$

і визначає швидкість змінювання функції за напрямом вектора $\vec{l}$ у точці $M(x, y, z)$.

Зауваження. Якщо напрям вектора $\vec{l}$ співпадає з напрямом одного з координатних ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$ чи $\vec{k}$, то похідна за напрямом

$\partial u/\partial l$ співпадає з відповідною частинною похідною:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial i}=\frac{\partial u}{\partial x}};\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial j}=\frac{\partial u}{\partial y}};\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial k}=\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

Приклад 1. Для заданої функції $u=u(x,y,z)$ і вказаного вектора $\vec{l}$ знайти похідну за напрямом $\partial u/\partial l$ у зазначеній точці M :

а) $u=(x^2+y^2)tg\,z$; $\quad \vec{l}\,(-1;\,2;\,-2)$; $\quad M(1;-2;\,\pi/4)$;

б) $u=\sqrt{x^2+2y}\ln(x+y+z)$; $\quad \vec{l}\,(-6;\,2;\,-3)$; $\quad M(3;-4;2)$.

□ а) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\ tgz$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y\ tgz$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{x^2+y^2}{\cos^2 z}$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=2\cdot 1\cdot tg\frac{\pi}{4}=2;\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=2\cdot(-2)\cdot tg\frac{\pi}{4}=-4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x^2+y^2}{\cos^2 z};\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\frac{1^2+(-2)^2}{\cos^2(\pi/4)}=10;\ |\vec{l}\,|=\sqrt{l_x^2+l_y^2+l_y^2};$$

$$|\vec{l}\,|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=3;$$

$$\cos\alpha=l_x\big/|\vec{l}\,|;\ \cos\beta=l_y\big/|\vec{l}\,|;\ \cos\gamma=l_z\big/|\vec{l}\,|;\ \cos\alpha=-1/3;$$

$$\cos\beta=\frac{2}{3};\ \cos\gamma=\frac{-2}{3};\ \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma;$$

$$\partial u/\partial l\,\big|_M=2\cdot(-1/3)+(-4)\cdot(2/3)+10\cdot(-2/3)=-10.$$

б) (Розв’язати самостійно). Відповідь: $\partial u/\partial l\,\big|_M=-1$. ■

Градієнтом функції $u=u(x,y,z)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\boxed{grad\,u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}}.$$

Теорема (***Зв’язок між градієнтом і похідною за напрямом***). *Похідна* $\partial u/\partial l$ *за напрямом вектора* $\vec{l}$ *дорівнює проекції градієнта* $grad\,u$ *на цей вектор* (рис. 2.15):

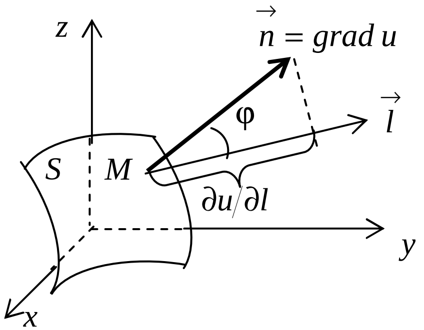

Рисунок 2.15

$$\boxed{\partial u/\partial l = np_{\vec{l}}\, grad\,u}\,.$$

□ Розглянемо одиничний вектор $\vec{l_0} = \vec{l}/|\vec{l}|$, $|\vec{l_0}|=1$, що відповідний вектору $\vec{l}$:

$$\vec{l_0} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}\,.$$

Знайдемо у координатній формі скалярний добуток градієнта $grad\,u$ на одиничний вектор $\vec{l_0}$:

$$grad u \cdot \vec{l_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\,.$$

Вираз у правій частині отриманої рівності є похідною за напрямом $\partial u/\partial l$. Отже, $grad\,u \cdot \vec{l_0} = \partial u/\partial l$.

Нехай φ – кут між векторами $grad\,u$ і $\vec{l}$. Тоді за означенням скалярного добутку, враховуючи, що $|\vec{l_0}|=1$, маємо

$$\partial u/\partial l = grad\,u \cdot \vec{l_0} = |grad\,u| \cdot |\vec{l_0}| \cdot \cos\varphi = |grad\,u| \cdot \cos\varphi\,.$$

Вираз у правій частині цієї рівності є проекцією градієнта на вектор $\vec{l}$. Отже, $\partial u/\partial l = np_{\vec{l}}\, grad\,u$. ■

Основні властивості градієнта:

1) *Похідна* $\partial u/\partial l$ *функції* $u = u(x, y, z)$ *у даній точці*

$M(x,y,z)$ *за напрямом вектора* $\vec{l}$ *має найбільше значення, коли напрям цього вектора співпадає з напрямом градієнта* $grad\,u$ *. Це найбільше значення похідної* $\partial u/\partial l$ *дорівнює модулю градієнта*:

$$\boxed{(\partial u/\partial l)_{max} = |\,grad\,u\,|} \quad \text{при} \quad \boxed{\vec{l}_{\max} = grad\,u}.$$

(*Фізичний зміст* градієнта).

Іншими словами, *градієнт указує напрям найшвидшого зростання функції в даній точці, а його модуль дорівнює цій найбільшій швидкості*:

$$\boxed{\vec{l}_{\max} = grad\,u}; \quad \boxed{|\,grad\,u\,| = (\partial u/\partial l)_{max}}\,.$$

□ $\partial u/\partial l = |grad\,u| \cdot \cos\varphi$; $(\partial u/\partial l)_{max} = |\,grad\,u\,|$ при $\cos\varphi_{\max} = 1$.

Тоді $\varphi_{\max} = 0 \Rightarrow \vec{l}_{\max} \uparrow\uparrow grad u$. ■

2) *Похідна* $\partial u/\partial l$ *функції* $u = u(x,y,z)$ *у довільній точці* $M(x,y,z)$ *за напрямом вектора, який перпендикулярний до градієнта* $grad\,u$ *, дорівнює нулю*: $\boxed{\vec{l} \perp grad u \;\; \Rightarrow \;\partial u/\partial l = 0}$.

□ $\partial u/\partial l = |grad\,u| \cdot \cos\varphi$; $\vec{l} \perp grad u$; $\varphi = \pi/2$; $\cos\varphi = 0$;

$$\partial u/\partial l = 0\,. \quad ■$$

3) *градієнт* $grad\,u$ *функції* $u = u(x,y,z)$ *у кожній точці* $M(x,y,z)$ *перпендикулярний до поверхні рівня* $S:\ u(x,y,z) = C$ *, яка проходить через цю точку* (рис. 33). (*Геометричний зміст* градієнта). Іншими словами, *градієнт* $grad\,u$ *можна прийняти за вектор нормалі* $\vec{n}$ *до поверхні рівня* $S:\ u(x,y,z) = C$ *у відповідній точці* $M(x,y,z)$

$$\boxed{S:\ u(x,y,z) = C}; \quad grad\,u \perp S \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{n} = grad\,u}\,.$$

□ Оскільки поверхня рівня S задається неявно рівнянням $F(x,y,z) = u(x,y,z) - C = 0$, то її вектор нормалі

$$\vec{n} = \left(\partial F/\partial x\big|_M, \ \partial F/\partial y\big|_M, \ \partial F/\partial z\big|_M \right).$$ Але $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(u - C) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$;

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(u - C) = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(u - C) = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Тоді $\vec{n} = \left(\partial u/\partial x\big|_M, \ \partial u/\partial y\big|_M, \ \partial u/\partial z\big|_M \right) = grad\, u\big|_M$. ■

Приклад 2. Для заданої функції знайти градієнт і модуль градієнта в указаній точці:

а) $z = x^2 y - 5\sin(3x - 2y)$; $M_0(2, 3)$;

б) $u = 3xyz - 2x^3 y + y^2/z$; $M_0(-1, 2, 1)$.

□ а) $grad\, z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy - 15\cos(3x - 2y)$;

$$\partial z/\partial y = x^2 + 10\cos(3x - 2y); \quad \partial z/\partial x\big|_{M_0} = 2 \cdot 2 \cdot 3 -$$

$$-15\cos(3 \cdot 2 - 2 \cdot 3) = -3; \ \partial z/\partial y\big|_{M_0} = 2^2 + 10\cos(3 \cdot 2 - 2 \cdot 3) = 14;$$

$$grad\, z\big|_{M_0} = -3\vec{i} + 14\vec{j}; \ \left| grad\, z \right| = \sqrt{(\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2};$$

$$\left| grad\, z \right|_{M_0} = \sqrt{(-3)^2 + 14^2} = \sqrt{205};$$

б) $grad\, u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$; $\partial u/\partial x = 3yz - 6x^2 y$;

$$\partial u/\partial y = 3xz - 2x^3 + 2y/z; \ \partial u/\partial z = 3xy - y^2/z^2; \ \partial u/\partial x\big|_{M_0} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 1 - 6 \cdot (-1)^2 \cdot 2 = -6; \ \partial u/\partial y\big|_{M_0} = 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-1)^3 +$$

$$+ 2 \cdot 2/1 = 3; \ \partial u/\partial z\big|_{M_0} = 3 \cdot (-1) \cdot 2 - 2^2/1^2 = -8; \ grad\, u\big|_{M_0} =$$

$$= -6\vec{i} + 3\vec{j} - 8\vec{k}; \ \left| grad\, u \right| = \sqrt{(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 + (\partial u/\partial z)^2};$$

$$\left| grad\, u \right|_{M_0} = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-8)^2} = \sqrt{109}. \quad ■$$

Приклад 3. Знайти найбільшу швидкість зростання функції $u = \ln(2x^4 + y^2 - 2z^4)$ у точці $M_0(1, -2, -1)$.

□ Напрям найбільшої швидкості зростання функції співпадає з напрямом градієнта, а її величина дорівнює модулю градієнта:

$$\left(\partial u/\partial l\right)_{max}\Big|_{M_0} = \left| grad\, u \right|_{M_0} \quad \text{при} \quad \vec{l}_{\max} = grad\, u\Big|_{M_0}.$$

Знайдемо градієнт і його модуль у заданій точці M_0:

$$grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 8x^3 \big/ (2x^4 + y^2 - 2z^4);$$

$$\partial u/\partial y = 2y \big/ (2x^4 + y^2 - 2z^4); \quad \partial u/\partial z = -8z^3 \big/ (2x^4 + y^2 - 2z^4);$$

$$\partial u/\partial x\big|_{M_0} = (8\cdot 1^3)\Big/\left(2\cdot 1^4 + (-2)^2 - 2\cdot(-1)^4\right) = 2; \quad \partial u/\partial y\big|_{M_0} =$$

$$= 2\cdot(-2)\Big/\left(2\cdot 1^4 + (-2)^2 - 2\cdot(-1)^4\right) = -1; \quad \partial u/\partial z\big|_{M_0} = -8\cdot(-1)^3 :$$

$$: \left(2\cdot 1^4 + (-2)^2 - 2\cdot(-1)^4\right) = 2; \quad grad\, u\big|_{M_0} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k};$$

$$\left| grad\, u \right| = \sqrt{(\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 + (\partial u/\partial x)^2};$$

$$\left| grad\, u \right|_{M_0} = \; = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3.$$

Тоді $\left(\partial u/\partial l\right)_{max}\Big|_{M_0} = 3$ при $\vec{l}_{\max} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. ■

2.2 Екстремум функції багатьох змінних

2.2.1 Екстремум функції багатьох змінних. Необхідні умови екстремуму. Стаціонарні точки

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(M) = f(x, y)$, що визначена в деякій області D. Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – внутрішня точка цієї області. Точка M_0 називається ***точкою максимуму*** функції $z = f(M)$, якщо значення функції в цій точці M_0 більше, ніж значення функції у всіх близьких сусідніх точках:

$$\forall M \in U(M_0, \varepsilon),\ M \neq M_0,\ f(M_0) > f(M) \ \Leftrightarrow\ M_0 - \max,$$

де $U(M_0, \varepsilon)$ – деякий ε-окіл точки M_0, $\varepsilon > 0$.

Аналогічно вводиться поняття ***точки мінімуму***:

$$\forall M \in U(M_0, \varepsilon),\ M \neq M_0,\ f(M_0) < f(M) \ \Leftrightarrow\ M_0 - \min\ .$$

Точки максимуму та мінімуму називаються ***точками екстремуму***. Значення функції $z = f(M_0) = f(x_0, y_0)$ у точці екстремуму M_0 називається її ***екстремальним значенням*** (***екстремумом***).

Зауваження 1. Розглянутий екстремум є ***строгим внутрішнім локальним екстремумом***. Його не треба плутати з ***глобальним екстремумом*** у деякій заданій області D (найбільше $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ та найменше $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ значення функції в області D).

Зауваження 2. Розрізняють ***гладкий екстремум*** (рис. 2.16), в якому функція диференційовна, і ***гострий екстремум*** (рис. 2.17).

Теорема (***необхідні умови гладкого екстремуму***). *Якщо диференційовна функція $z = f(x, y)$ має екстремум у точці $M_0(x_0, y_0)$, то всі частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю*:

$$\boxed{\begin{cases} \partial z/\partial x\big|_{M_0} = 0; \\ \partial u/\partial y\big|_{M_0} = 0. \end{cases}}$$

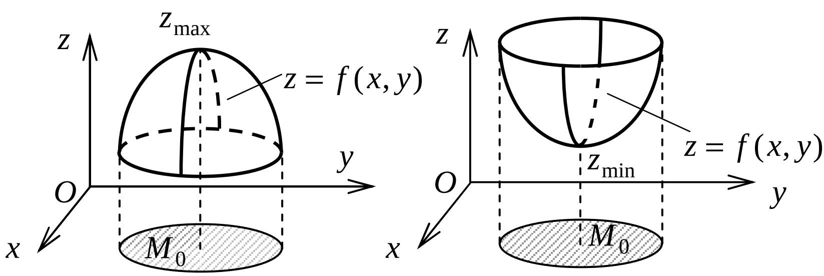

Рисунок 2.16

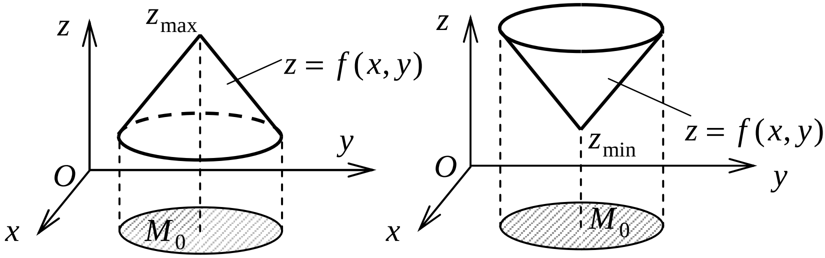

Рисунок 2.17

□ Зафіксуємо змінну y, поклавши $y = y_0 = const$. Тоді точка x_0 є точкою екстремуму диференційованої функції однієї змінної $z = \varphi(x) = f(x, y_0)$. Згідно з необхідною умовою екстремуму функції однієї змінної $d\varphi/dx\big|_{x=x_0} = 0$. Але вказана похідна є частинною похідною по x функції $z = f(x, y)$: $d\varphi/dx\big|_{x=x_0} = \partial f/\partial x\big|_{M_0}$. Отже, $\partial f/\partial x\big|_{M_0} = 0$.

Аналогічно, якщо зафіксувати аргумент x, поклавши $x = x_0 = const$, то отримаємо диференційовану функцію однієї змінної $z = \psi(y) = f(x_0, y)$. Ця функція має екстремум при $y = y_0$. У точці екстремуму y_0 похідна одержаної функції теж дорівнює нулю: $d\psi/dy\big|_{y=y_0} = 0$. Але вказана похідна є частинною похідною по y функції $z = f(x, y)$: $d\psi/dy\big|_{y=y_0} == \partial f/\partial y\big|_{M_0}$.

Отже, $\partial f/\partial y\big|_{M_0} = 0$. У точці екстремуму $M_0(x_0, y_0)$ обидві знайдені умови повинні виконуватись одночасно. ■

Зауваження 3. У точці гострого екстремуму хоча б одна з частинних похідних першого порядку не існує, а всі інші дорівнюють нулю (***необхідні умови гострого екстремуму***).

Точки, в яких виконуються необхідні умови екстремуму, тобто всі частинні похідні або дорівнюють нулю або не існують, називаються ***критичними точками*** функції $z = z(M)$.

Критичні точки, в яких всі перші частинні похідні дорівнюють нулю, називаються ***стаціонарними точками*** функції $z = z(M)$.

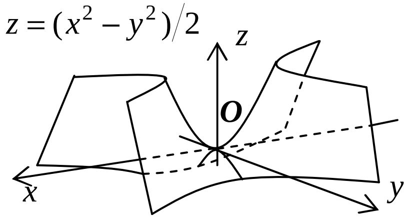

Рисунок 2.18

Зауваження 4. Стаціонарна точка – це точка, що «підозріла» на гладкий екстремум. Тобто в цій точці екстремум може бути, а може і не бути. Наприклад, для функції $z=(x^2-y^2)/2$ (гіперболічний параболоїд на рис. 2.18) початок координат $O(0,0)$ є стаціонарною точкою, оскільки $\partial z/\partial x\big|_O = x\big|_O = 0$; $\partial z/\partial y\big|_O = -y\big|_O = 0$, але екстремум у ній відсутній ($O(0,0)$ – ***сідлова точка*** (***точка перевалу***) функції).

Зауваження 5. Надалі обмежимося розглядом тільки гладкого екстремуму.

Приклад. Знайти стаціонарні точки функції:

а) $u = x^3 + xy + 2yz - x + 5y + 4z - 3$; б) $z = (x-y-2)e^{x^2+y^2}$.

□ а) Для знаходження стаціонарних точок складаємо і розв'язуємо систему необхідних умов екстремуму:

$$\begin{cases} \partial u/\partial x = 0 \\ \partial u/\partial y = 0 \\ \partial u/\partial z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial u/\partial x = 3x^2 + y - 1 \\ \partial u/\partial y = x + 2z + 5 \\ \partial u/\partial z = 2y + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 + y - 1 = 0 \\ x + 2z + 5 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ 3x^2 - 2 - 1 = 0 \\ x + 2z + 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \quad z = -(5+x)/2; \\ &z_1 = -(5+1)/2 = -3; \;\; z_2 = -(5-1)/2 = -2; \\ &M_1(1,-2,-3), \;\; M_2(-1,-2,-2) \end{aligned}$$

– стаціонарні точки.

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь: $M_0(1/2,-1/2)$ ■

2.2.2 Достатні умови екстремуму

Аналогічно функції однієї змінної, наявність і характер екстремуму функції двох змінних у стаціонарній точці визначається знаком другого диференціала

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 .$$

Нехай у деякому околі стаціонарної точки $M_0(x_0, y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Знайдемо значення других частинних похідних у цій точці:

$$\boxed{A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} ; \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} ; \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}}$$

і обчислимо визначник $\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2}$.

Теорема (***достатні умови гладкого екстремуму***). 1) *Якщо визначник* Δ *додатний, то* M_0 *– точка екстремуму, причому* а) M_0 *– точка мінімуму, якщо* $A > 0$; б) M_0 *– точка максимуму, якщо* $A < 0$. 2) *Якщо визначник* Δ *від'ємний, то у точці* M_0 *екстремум відсутній* (M_0 – сідлова точка функції $z = f(x, y)$). 3) *Якщо визначник* Δ *дорівнює нулю, то у точці* M_0 *екстремум може бути, а може і не бути.* (Сумнівний випадок. Потрібні додаткові дослідження.) (Без доведення).

Приклад. Дослідити функції на екстремум:

а) $z = x^3 + y^3 - 6xy - 2$; б) $z = x^2 - 4xy + 8y^2 + 10x - 28y + 1$;

в) $z = (x + 2y)^3/3 - x^2/2 - 3y^2 - 2xy - 2y + 2$; г) $z = xe^{-x-y^2}$.

□ а) Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\partial z/\partial x = 3x^2 - 6y ; \quad \partial z/\partial y = 3y^2 - 6x .$$

Використовуючи необхідні умови екстремуму, знаходимо стаціонарні точки функції:

$$\begin{cases}\partial z/\partial x=0\\ \partial z/\partial y=0\end{cases}\ \begin{cases}3x^2-6y=0\\ 3y^2-6x=0\end{cases}\ \begin{cases}x^2-2y=0\\ y^2-2x=0\end{cases}\ \begin{matrix}y=x^2/2;\\ \left(x^2/2\right)^2-2x=0;\end{matrix}$$

$$\frac{x^4}{4}-2x=0;\ \ x^4-8x=0;\ \left[\begin{matrix}x=0\\ x^3-8=0\end{matrix}\right.\ \left[\begin{matrix}x_1=0 & y_1=0;\\ x_2=2 & y_2=2^2/2=2.\end{matrix}\right.$$

Отже, стаціонарні точки $M_1(0,0)$; $M_2(2,2)$.

Для перевірки достатніх умов екстремуму знаходимо частинні похідні другого порядку

$$\partial^2 z/\partial x^2=6x;\quad \partial^2 z/\partial y^2=6y;\quad \partial^2 z/\partial x\partial y=-6.$$

Дослідимо на екстремум точку $M_1(0,0)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці $M_1(0,0)$ і значення визначника Δ:

$$A=\partial^2 z/\partial x^2\Big|_{M_1}=6\cdot 0=0;\ \ C=\partial^2 z/\partial y^2\Big|_{M_1}=6\cdot 0=0;$$

$$B=\partial^2 z/\partial x\partial y\Big|_{M_1}=-6;\quad \Delta=AC-B^2=0\cdot 0-(-6)^2=-36<0.$$

Оскільки $\Delta<0$, то у точці M_1 екстремуму немає.

Дослідимо на екстремум точку $M_2(2,2)$.

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці $M_2(2,2)$ і значення визначника Δ:

$$A=\partial^2 z/\partial x^2\Big|_{M_2}=6\cdot 2=12;\quad C=\partial^2 z/\partial y^2\Big|_{M_2}=6\cdot 2=12;$$

$$B=\partial^2 z/\partial x\partial y\Big|_{M_2}=-6;\quad \Delta=AC-B^2=12\cdot 12-(-6)^2=108>0.$$

З нерівності $\Delta>0$ випливає, що M_2 – точка екстремуму.

Оскільки $A=12>0$, то M_2 – точка мінімуму. Знайдемо мінімальне значення функції у цій точці:

$$z_{\min}=z(M_2)=2^3+2^3-6\cdot 2\cdot 2-2=-10.$$

Пункти б), в) і г) розв’язати самостійно. ■

2.2.3 Знаходження найменшого та найбільшого значень функції в замкненій області

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна і диференційована в замкненій області D. Тоді вона досягає найменшого (найбільшого) значення на множині D або в одній із стаціонарних точок, що належать цій області D, або в одній із точок межі області D.

Правило знаходження найменшого та найбільшого значень функції $z = f(x, y)$ у замкненій області D:

1) *Побудувати область D в прямокутній системі координат Oxy. Знайти всі кутові точки – точки, що сполучають сусідні ділянки межі області D;*

2) *Знайти стаціонарні точки функції $z = f(x, y)$. Виділити з них ті, що лежать в області D. Обчислити значення функції у виділених точках;*

3) *Знайти значення функції в усіх кутових точках межі області D;*

4) *На кожній ділянці межі області D перейти до функції однієї змінної, що одержується з початкової функції $z = f(x, y)$ врахуванням рівняння цієї ділянки. Знайти стаціонарні точки одержаної функції однієї змінної. Виділити з них ті, що лежать на даній ділянці. Обчислити значення функції у виділених точках і на кінцях відрізка зміни аргументу;*

5) *Порівняти всі одержані значення функції між собою і вибрати серед них найменше – глобальний мінімум $\min\limits_{(x,y)\in D} z$ – і найбільше – глобальний максимум $\max\limits_{(x,y)\in D} z$.*

Приклад 1. Знайти найменше та найбільше значення заданої функції в замкненій області D, що обмежена вказаними лініями:

а) $z = 3x^2 + y^2 - 4xy - x$; D: $x = 2$; $y = 1$; $x + y + 1 = 0$;

б) $z = x^2 + 4y^2 - 2xy - 4x + 10y$; D: $x = 0$; $y = -2$; $y = -x$.

□ а) У декартовій системі координат Oxy побудуємо вказані лінії межі області D: $x = 2$; $y = 1$; $x + y + 1 = 0$ і позначимо штриховкою саму область D (рис. 2.19). Кутові точки визначаються як точки попарного перетину цих ліній:

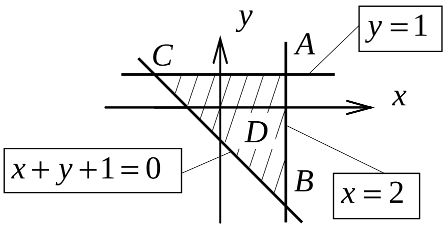

Рисунок 2.19

$$\begin{cases} x = 2; \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2; \\ x + y + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1; \\ x + y + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці системи, дістаємо $A(2;1)$, $B(2;-3)$, $C(-2;1)$.

Для визначення стаціонарних точок складаємо і розв'язуємо систему необхідних умов екстремуму:

$$\begin{cases} \partial z/\partial x = 6x - 4y - 1 = 0 \\ \partial z/\partial y = 2y - 4x = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 2x \\ 6x - 4\cdot 2x - 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} x = -1/2; \\ y = -1. \end{matrix}$$

Оскільки стаціонарна точка $M(-1/2;\,-1) \in D$, то обчислимо відповідне значення функції:

$$z\big|_M = 3(-1/2)^2 + (-1)^2 - 4(-1/2)(-1) - (-1/2) = 1/4\,.$$

Досліджуємо функцію на межі області D, яка складається з ділянок $AB,\ BC,\ AC$, що сполучаються в кутових точках $A(2;1)$, $B(2;\,-3)$, $C(-2;\,1)$.

Обчислюємо значення функції в кутових точках:

$$z\big|_A = 3\cdot 2^2 + 1^2 - 4\cdot 2\cdot 1 - 2 = 3;\quad z\big|_B = 3\cdot 2^2 + (-3)^2 -$$

$$- 4\cdot 2\cdot(-3) - 2 = 43;\quad z\big|_C = 3\cdot(-2)^2 + 1^2 - 4\cdot(-2)\cdot 1 - (-2) = 23\,.$$

На кожній ділянці межі, використовуючи її рівняння, перейдемо до функції однієї змінної і знайдемо значення одержаної функції в її стаціонарних точках, що належать відповідній ділянці. (Кінці відрізків зміни аргументу співпадають з кутовими точками, де значення функції вже обчислені).

На відрізку AB: $x = 2,\ y \in [-3,\,1]$ маємо:

$$z_1 = f_1(y) = 3\cdot 2^2 + y^2 - 4\cdot 2\cdot y - 2 = y^2 - 8y + 10\,;$$

$$z_1' = 2y - 8;\quad z_1' = 0;\quad 2y - 8 = 0;\quad y = 4 \notin [-3,\,1]\,.$$

На відрізку BC: $y=-x-1,\ x\in[-2,\,2]$ маємо:

$$z_2 = f_2(x) = 3x^2 + (-x-1)^2 - 4x(-x-1) - x = 8x^2 + 5x + 1;$$

$$z_2' = 16x+5;\quad z_2' = 0;\quad 16x+5=0;\quad x = -5/16 \in [-2,\,2];$$

$$y = -(-5/16) - 1 = -11/16;\quad N(-5/16, -11/16);$$

$$z\big|_N = f_2(-5/16) = 8\cdot(-5/16)^2 + 5\cdot(-5/16) + 1 = -7/32.$$

На відрізку AC: $y=1,\ x\in[-2,\,2]$ маємо:

$$z_3 = f_3(x) = 3x^2 + 1^2 - 4x\cdot 1 - x = 3x^2 - 5x + 1;$$

$$z_3' = 6x-5;\ z_3' = 0;\ 6x-5=0;\ x = 5/6 \in [-2,\,2];\ y=1;$$

$$P(5/6,\,1);\ z\big|_P = f_3(5/6) = 3\cdot(5/6)^2 - 5\cdot(5/6) + 1 = -13/12.$$

Порівняємо між собою всі знайдені значення функції:

$$z\big|_M = \frac{1}{4};\ z\big|_A = 3;\ z\big|_B = 43;\ z\big|_C = 23;\ z\big|_N = -7/32;\ z\big|_P = -1\frac{1}{12}.$$

Отже, найменше та найбільше значення функції відповідно

$$\min_{(x,y)\in D} z = z\big|_{P(5/6,\,1)} = -1\frac{1}{12};\quad \max_{(x,y)\in D} z = z\big|_{B(2,-3)} = 43.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

Приклад 2. (Задача дослідження попиту: оптимізація функції корисності при обмеженнях на бюджет покупця). Знайти об'єми попиту (у кількісному вимірі) x і y на дві різновидності X і Y деякого товару при цінах на них, відповідно, $p_x = 6$ грош. од. і $p_y = 4$ грош. од., якщо покупець намагається при своєму бюджеті $K = 168$ грош. од. максимізувати функцію корисності вигляду $z = f(x,y) = 30x + 20y - 30x^{2/3}y^{1/2}$.

□ З економічного змісту задачі очевидно, що $x \ge 0$ і $y \ge 0$. На покупку загальною вартістю $p_x x + p_y y = 6x + 4y$ покупець може витратити суму, що не перевищує $K = 168$:

$$6x+4y\le 168$$

або $3x+2y\le 84$.

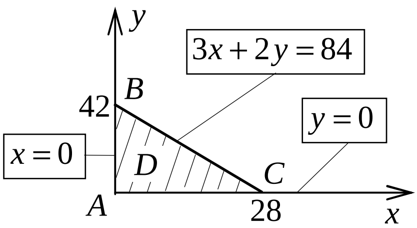

Рисунок 2.20

Указані обмеження задають на координатній площині Oxy замкнену область D у вигляді заштрихованого трикутника ABC (рис. 2.20), вершини якого визначаються як розв'язки систем:

$$\begin{cases} x=0; \\ y=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0; \\ 3x+2y=84; \end{cases} \quad \begin{cases} y=0; \\ 3x+2y=84. \end{cases}$$

Звідси дістаємо $A(0;0)$, $B(0;42)$, $C(28;0)$.

Обчислюємо значення функції в кутових точках області D:

$$z\big|_A=0\,;\quad z\big|_B=30\cdot 0+20\cdot 42-30\cdot 0^{2/3}\cdot 42^{1/2}=840\,;$$

$$z\big|_C=30\cdot 28+20\cdot 0-30\cdot 24^{2/3}\cdot 0^{1/2}=840\,.$$

Для визначення стаціонарних точок складаємо і розв'язуємо систему необхідних умов екстремуму:

$$\begin{cases} \partial z/\partial x=30-20x^{-1/3}y^{1/2}=0; \\ \partial z/\partial y=20-15x^{2/3}y^{-1/2}=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^{1/3}-2y^{1/2}=0; \\ 4y^{1/2}-3x^{2/3}=0; \end{cases}$$

$$y^{1/2}=(3/2)x^{1/3}\,;\;\; 4\cdot(3/2)x^{1/3}-3x^{2/3}=0\,;\;\; x^{1/3}(2-x^{1/3})=0\,;$$

$$x^{1/3}=0 \;\text{ або }\; 2-x^{1/3}=0\,;\;\; x_1=0\,;\;\; x_2=2^3=8\,;\;\; y=(3/2)^2x^{2/3}\,;$$

$$y_1=0\,;\;\; y_2=(9/4)\cdot 8^{2/3}=9\,.$$

Одна стаціонарна точка $(0;0)$ співпала з кутовою A і вже врахована. Друга стаціонарна точка $M(8;\,9)$ також належить області D, тому обчислимо відповідне значення функції корисності:

$$z\big|_M=30\cdot 8+20\cdot 9-30\cdot 8^{2/3}\cdot 9^{1/2}=60\,.$$

Досліджуємо функцію на межі області D, яка складається з ділянок $AB,\ BC,\ AC$, що сполучаються в кутових точках $A(0;0)$, $B(0;42)$, $C(28;0)$.

На кожній ділянці межі, використовуючи її рівняння, перейдемо до функції однієї змінної і знайдемо значення одержаної функції в її стаціонарних точках, що належать відповідній ділянці. (Кінці відрізків зміни аргументу співпадають з кутовими точками, де значення функції корисності вже обчислені).

На відрізку AB: $x = 0,\ y \in [0,\ 42]$ маємо:

$$z_1 = f_1(y) = 30 \cdot 0 + 20y - 30 \cdot 0^{2/3} y^{1/2} = 20y;$$

$$z_1' = 20 \neq 0$$ – стаціонарних точок немає.

На відрізку BC: $y = 42 - (3/2)x,\quad x \in [0,\ 28]$ маємо:

$$z_2 = f_2(x) = 30x + 20\bigl(42 - (3/2)x\bigr) - 30x^{2/3}\bigl(42 - (3/2)x\bigr)^{1/2} =$$

$$= 840 - 30x^{2/3}\bigl(42 - (3/2)x\bigr)^{1/2};$$

$$z_2' = -20x^{-1/3}\bigl(42 - (3/2)x\bigr)^{1/2} - 15x^{2/3}\bigl(42 - (3/2)x\bigr)^{-1/2}(-3/2) =$$

$$= -20x^{-1/3}\bigl(42 - (3/2)x\bigr)^{1/2} + (45/2)x^{2/3}\bigl(42 - (3/2)x\bigr)^{-1/2} = 0;$$

$$-20\bigl(42 - (3/2)x\bigr) + (45/2)x = 0; \qquad -336 + 12x + 9x = 0;$$

$$x = 16 \in [0, 28]; \quad y = 42 - (3/2) \cdot 16 = 18; \quad N(16,\ 18);$$

$$z\big|_N = 30 \cdot 16 + 20 \cdot 18 - 30 \cdot 16^{2/3} \cdot 18^{1/2} = 840 - 720 \cdot 2^{1/6} \approx 31{,}8.$$

На відрізку AC: $y = 0,\ x \in [0,\ 28]$ маємо:

$$z_3 = f_3(x) = 30x + 20 \cdot 0 - 30x^{2/3} \cdot 0^{1/2} = 30x;$$

$$z_3' = 30 \neq 0$$ – стаціонарних точок немає.

Порівняємо між собою всі знайдені значення функції корисності. Одержимо $\max\limits_{(x,\,y) \in D} z = z\big|_B = z\big|_C = 840$. Таким чином, оптимальний попит на обидві різновидності товару досягається в кутових точках області обмежень, при цьому покупець повинен витратити весь бюджет на купівлю будь-якої однієї різновидності. ■

2.3 Числові ряди

Ряди є основним обчислювальним засобом. Зокрема, у калькуляторах при обчисленні значень функцій використовуються ряди.

В економічних дослідженнях для опису динаміки процесів широко використовують числові послідовності і відповідні числові ряди, що відповідають бігу часу – часові послідовності та ряди (ряди динаміки). Моделі, в яких застосовуються ряди динаміки, можуть будуватися як на основі окремого ізольованого динамічного ряду (наприклад, за даними про чисельність зайнятих на виробництві синтезується модель динаміки чисельності зайнятих), так і на базі системи взаємозв'язаних часових рядів (один з рядів відповідає залежній величині, а інші – окремим факторам, що на нього впливають: наприклад, складається модель прибутку як функція обсягів реалізації товару, чисельності працівників, фондоозброєності і т.п.)

2.3.1 Числові ряди. Основні поняття. Необхідна ознака збіжності

Нехай $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – нескінченна числова послідовність.

Нескінченна сума $\boxed{u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n}$ називається ***числовим рядом***, а її доданки $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – відповідними (за номером) ***членами ряду***, причому n-й член u_n також має назву ***загального члена***.

Скінченна сума $\boxed{S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k}$ всіх перших членів ряду до u_n включно називається n***-ю частковою сумою ряду*** ($n = 1, 2, ...$).

Ряд називається ***збіжним***, якщо існує скінченна границя при $n \to \infty$ послідовності $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ його часткових сум: $\boxed{\lim_{n \to \infty} S_n = S}$. При цьому число S називають ***сумою ряду*** і пишуть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. Якщо вказана границя нескінченна чи взагалі не існує, то ряд називається ***розбіжним***.

Ряд $u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+k}+\ldots$, який утворюється з початкового ряду $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ відкиданням перших n членів називається ***n-м залишком ряду*** ($n=1,2,\ldots$).

Розглянемо ***геометричний ряд*** (***ряд геометричної прогресії***)

$$\boxed{a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}}$$

з ***першим членом*** $a\neq 0$ і ***знаменником*** q.

Ряд геометричної прогресії збігається при $|q|<1$ *і розбігається при* $|q|\geq 1$.

Під час розгляду числових рядів розв’язують дві основні задачі: 1) дослідити ряд на збіжність; 2) знайти суму збіжного ряду.

Приклад 1. Користуючись означенням, дослідити ряд на збіжність. Для збіжного ряду вказати його суму:

$$\textbf{а)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\ln(1-1/n)\,; \qquad \textbf{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-1)(5n+4)}\,.$$

□ а) Перетворимо загальний член ряду

$$u_n=\ln(1-1/n)=\ln\big((n-1)/n\big)=\ln(n-1)-\ln n\,.$$

Тоді часткову суму S_n можна подати у замкненій формі

$$S_n=\ln 1-\ln 2+\ln 2-\ln 3+\ldots+\ln(n-1)-\ln n=\ln 1-\ln n=\ln n,$$

вигляд якої не залежить від числа n. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln n=+\infty\,.$$

Отже, ряд розбігається.

б) Розкладемо загальний член ряду на найпростіші дроби:

$$u_n=\frac{1}{(5n-1)(5n+4)}=\frac{A}{5n-1}+\frac{B}{5n+4}=$$

$$=\left|A(5n+4)+B(5n-1)=1;\quad \begin{matrix} n=1/5: \\ n=-4/5: \end{matrix}\ \begin{cases} 5A=1; & A=1/5; \\ -5B=1; & B=-1/5 \end{cases}\right|=$$

$$= \frac{1/5}{5n-1} + \frac{-1/5}{5n+4} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-1} - \frac{1}{5n+4}\right).$$

Тоді часткову суму S_n можна подати у замкненій формі, де кількість доданків не залежить від числа n:

$$S_n = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{19} + \ldots + \frac{1}{5n-6} - \frac{1}{5n-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5n-1} - \frac{1}{5n+4}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5n+4}\right).$$

Знайдемо границю: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5n+4}\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.

Отже, ряд збігається і його сума $S = 1/20$. ■

Властивості числових рядів:

1) *Збіжність або розбіжність ряду не порушиться, якщо змінити, відкинути чи добавити скінченне число членів*. (Для збіжного ряду значення суми при цьому, в загальному випадку, змінюється).

Зокрема, *ряд і будь-який його залишок збігаються чи розбігаються одночасно*.

2) *Для збіжного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ *його* n*-й залишок* $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} = R_n$ *служить похибкою наближення* $\boxed{S \approx S_n}$ *суми ряду* S *його* n*-ю частковою сумою* S_n. *При цьому* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0}$.

3) *Якщо члени ряду помножити на один і той самий відмінний від нуля сталий множник* $C = const \neq 0$, *то його збіжність не порушиться. У випадку збіжного ряду його сума буде помножена на* C:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n = C\sum_{n=1}^{\infty} u_n};$$

4) *Два збіжні ряди* $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *можна почленно додавати і*

віднімати. Одержані ряди також збігаються і при цьому:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=(u_1+v_1)+\ldots+(u_n+v_n)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n+\sum_{n=1}^{\infty}v_n};$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)=(u_1-v_1)+\ldots+(u_n-v_n)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n-\sum_{n=1}^{\infty}v_n}.$$

5) *Сума (різниця) збіжного і розбіжного рядів є розбіжним рядом.*

6) *Якщо ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *збігається, то довільний ряд, отриманий з даного групуванням його членів, що не змінює порядку їх розташування, також збігається і має ту саму суму.*

Зауваження 1. Про суму (різницю) розбіжних рядів нічого певного стверджувати не можна: результуючий ряд може як збігатися, так і розбігатися.

На практиці часто досить знати лише відповідь на принципове питання про збіжність ряду. Для цього використовуються ***ознаки збіжності***, що ґрунтуються на властивостях загального члена ряду.

Теорема (***необхідна ознака збіжності***). *Якщо ряд збігається, то його загальний член* u_n *прямує до нуля при* $n\to\infty$: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0}$.

□ Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ збігається, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, де S – сума ряду (стала величина). Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=S$, бо при $n\to\infty$ і $n-1\to\infty$. Віднімаючи з першої рівності другу, дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=0 \quad \text{або} \quad \lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0.$$

Але $S_n-S_{n-1}=u_n$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. ■

Зауваження 2. Розглянута ознака є тільки необхідною, але не є достатньою. Тобто, з того що загальний член u_n при $n\to\infty$ прямує до нуля, ще не випливає, що ряд збігається.

Наслідок (***достатня ознака розбіжності***). *Якщо границя загального члена* u_n *при* $n\to\infty$ *відмінна від нуля, тобто*

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0}$, *то ряд розбігається.*

Приклад 2. Дослідити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+8}$ на збіжність.

□ Знайдемо границю n-го члена u_n при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+8} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+8/n} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

За достатньою ознакою розбіжності ряд розбігається. ■

Приклад 3. Дослідити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^n$ на збіжність.

(Розв'язати самостійно. Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e^{-1} \neq 0$ – ряд розбігається.)

2.3.2 Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів

Числовий ряд $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається ***знакододатним***, якщо всі його члени – невід'ємні числа:

$$u_n \geq 0, \quad n = 1, 2, ...$$

Послідовність часткових сум знакододатного ряду є зростаючою. Згадуючи, що обмежена монотонна змінна має границю, дістаємо ***необхідну і достатню умову збіжності знакододатного ряду***:

знакододатний ряд збігається, якщо послідовність його часткових сум обмежена зверху, і розбігається в противному разі.

Зауваження 1. При вивченні знакосталих рядів можна обмежитися розглядом тільки знакододатних, оскільки з них множенням на –1 одержуються ряди з недодатними членами.

Далі розглянемо найпоширеніші достатні ознаки збіжності знакододатних рядів.

Інтегральна ознака Коші. Ця ознака ґрунтується на порівнянні числового ряду з невласним інтегралом.

Теорема 1 (***інтегральна ознака Коші***). *Якщо члени знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ *утворюють спадну послідовність (*$u_{n+1} \leq u_n$, $n = 1, 2, \ldots$*) і на проміжку* $[1; +\infty]$ *існує спадна неперервна невід'ємна функція* $f(x)$ *така, що при натуральних значеннях аргументу співпадає з членами ряду (* $f(n) = u_n$, $n = 1, 2, \ldots$*), тоді вказаний ряд і невласний інтеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *ведуть себе однаково: збігаються чи розбігаються одночасно.*

□ Зобразимо даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ геометрично точками на координатній площині Oxy, відкладаючи на осі Ox номери $1, 2$, ..., n, ..., а на осі Oy – відповідні значення його членів $u_1 = f(1)$, $u_2 = f(2), \ldots, u_n = f(n), \ldots$ (рис. 2.21).

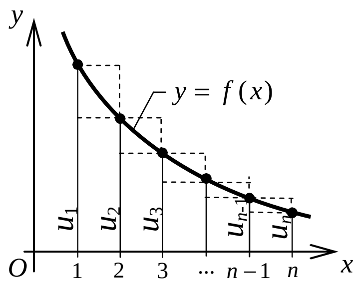

Рисунок 2.21

Побудуємо на цьому рисунку також графік указаної функції $f(x)$. Площа відповідної криволінійної трапеції, що спирається на відрізок $[1; n]$, дорівнює визначеному інтегралу

$$I_n = \int_1^n f(x)dx .$$

Впишемо в цю трапецію і опишемо навколо неї ступінчасті фігури, утворені з прямокутників, основами яких є проміжки $[1; 2]$, $[2; 3]$, а висоти дорівнюють $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Порівнюючи площі цих об'єктів, дістанемо:

$$u_2 + u_3 + \ldots + u_n < I_n < u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

або $S_n - u_1 < I_n < S_n - u_n$, де $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ – часткова сума ряду. Звідси $S_n < u_1 + I_n$ і $S_n > u_n + I_n$. Нехай інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ є збіжним. Його значення $I = \lim\limits_{n \to \infty} I_n$. Тоді $S_n < u_1 + I$

Отже, зростаюча послідовність часткових сум S_n обмежена зверху і тому має границю. Тобто, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається.

Нехай тепер інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ є розбіжним. У даному випадку це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = +\infty$. Тоді, переходячи до нерівності $S_n > u_n + I_n$ до границі при $n \to \infty$, отримаємо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Отже, послідовність часткових сум S_n необмежена і має нескінченну границю. Тобто, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається. ■

Зауваження 2. Інтегральна ознака справедлива, коли послідовність членів ряду задовольняє відповідним умовам, починаючи хоча б з деякого номеру.

Зауваження 3. На практиці функцію $f(x)$ отримують за допомогою заміни у виразі загального члена u_n ряду дискретної змінної n на неперервну x.

З наведеного доведення випливає

наслідок. Для суми S *і* n*-го залишку* R_n *збіжного знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *справедливі оцінки*:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx < S < u_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx; \quad R_n < \int_n^{+\infty} f(x)dx,$$

остання з яких дозволяє визначити, скільки потрібно взяти перших n членів, щоб при заміні суми S ряду частковою сумою S_n отримати задану похибку.

Приклад 1. За допомогою інтегральної ознаки дослідити на збіжність ***узагальнений гармонічний ряд*** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p}$.

□ Вважатимемо $f(x) = 1/x^p$. Ця функція задовольняє умовам інтегральної ознаки. Розглянемо невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} (1/x^p)\, dx$.

При $p=1$ маємо ***гармонічний ряд*** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} 1/n}$. Для нього $\int_1^{+\infty}(1/x)\,dx = \lim\limits_{N\to\infty} \ln|x|\Big\|_1^N = +\infty$. Інтеграл і ряд розбіжні. Нехай $p\neq 1$. Тоді

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{N\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^N = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{N^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right).$$

Коли $p>1$, то $\int_1^{+\infty}(1/x^p)\,dx = 1/(p-1)$. Інтеграл і ряд збіжні. Коли $p<1$, то $\int_1^{+\infty}(1/x^p)\,dx = +\infty$. Інтеграл і ряд розбіжні.

Остаточно маємо:

узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ *збігається при* $p>1$ *і розбігається при* $p\leq 1$. ■

Приклад 2. За допомогою інтегральної ознаки Коші дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

а) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^3 n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n-2)\sqrt[3]{\ln(5n-2)}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$.

□ а) Розглянемо функцію $f(x) = 1/(x\ln^3 x)$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[4;+\infty)$, причому $f(n)=u_n$. Дослідимо невласний інтеграл:

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{N\to+\infty}\int_2^N\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{N\to+\infty}\int_2^N\frac{d\ln x}{\ln^3 x} =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\int_2^N \ln^{-3} x\,d(\ln x) = \lim_{N\to+\infty}\frac{\ln^{-2} x}{-2}\Bigg|_x^N = -\frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{\ln^2 x}\Bigg|_2^N =$$

$$= -(1/2)\lim_{N\to+\infty}\left(1/\ln^2 N - 1/\ln^2 2\right) = 1/(2\ln^2 2)\neq\infty.$$

Отже, цей невласний інтеграл збігається, а тому заданий ряд теж збігається.

б) Введемо функцію $f(x)=\dfrac{1}{(5x-2)x\sqrt[3]{\ln(5x-2)}}$, що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[1;+\infty)$, причому $f(n)=u_n$. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(5x-2)\sqrt[3]{\ln(5x-2)}}=\lim_{N\to+\infty}\int_1^N\frac{dx}{(5x-2)\sqrt[3]{\ln(5x-2)}}=$$

$$\left|\begin{array}{ll} u=\ln(5x-2);\ du=5dx/(5x-2) \\ u_1=\ln 3; \qquad u_2=\ln(5N-2)\end{array}\right|=\frac{1}{5}\lim_{N\to+\infty}\int_{\ln 3}^{\ln(5N-2)} u^{-1/3}du \ =$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{N\to+\infty}\frac{u^{2/3}}{2/3}\Bigg|_{\ln 3}^{\ln(5N-2)}=\frac{3}{10}\lim_{N\to+\infty}(\ln^{2/3}(5N-2)-\ln^{2/3}3)=+\infty.$$

Оскільки цей невласний інтеграл розбігається, то даний ряд теж розбігається.

в) (Розв’язати самостійно). ■

Ознаки порівняння.

Під час застосування ознак порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, що досліджується на збіжність, порівнюється з ***еталонним рядом*** $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, про який відомо збігається він чи розбігається.

За еталонні ряди часто приймають нижче наведені узагальнений гармонічний або геометричний ряди:

а) ***узагальнений гармонічний ряд*** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}1/n^p}$, що збігається, коли $p>1$, і розбігається при $p\le 1$;

б) ***геометричний ряд*** (ряд геометричної прогресії) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}aq^n}$, що збігається при $q<1$ і розбігається при $q\ge 1$.

Теорема 2 (***перша*** (***основна***) ***ознака порівняння***).

а) *Нехай маємо збіжний еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, *при цьому* $u_n\le v_n$, $n=1,2,\ldots$. *Тоді ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *теж збігається.*

(Якщо $u_n > v_n$, то жодних висновків робити не можна).

б) *Нехай маємо розбіжний еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *, при цьому* $u_n \ge v_n$, $n = 1, 2, \ldots$. *Тоді ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *теж розбігається.*

(Якщо $u_n < v_n$, то ніяких висновків робити не можна).

Таким чином, з розбіжним рядом порівнюємо «у бік більше»; а зі збіжним рядом – «у бік менше».

□ Нехай S_n і σ_n відповідні n-і часткові суми рядів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

а) З нерівності $u_n \le v_n$ випливає, що $S_n \le \sigma_n$. Оскільки «більший» знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, то існує границя його часткових сум $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, при цьому $\sigma_n \le \sigma$. Тоді $S_n \le \sigma$. Тобто, часткові суми S_n обмежені.

З того, що послідовність S_n зростаюча і обмежена, випливає існування скінченної границі $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, при цьому $S \le \sigma$. Отже, «менший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ теж збіжний.

б) З нерівності $u_n \ge v_n$ випливає, що $S_n \ge \sigma_n$. Оскільки «менший» знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ розбігається, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$. Отже, «більший» ряд теж розбіжний. ■

Зауваження 4. Основна ознака порівняння виконується, коли члени рядів задовольняють відповідні нерівності, починаючи хоча б з деякого номера.

Наслідок. *Якщо всі члени збіжного знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *не перевищують відповідних членів іншого знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *, тобто* $u_n \le v_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *тоді* n*-й залишок* *першого ряду* $R_n^{(u)}=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k$ *не перевищує* n*-го залишку* $R_n^{(v)}=\sum_{k=n+1}^{\infty}v_k$ *другого*: $R_n^{(u)}=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k \le \sum_{k=n+1}^{\infty}v_k = R_n^{(v)}$.

Приклад 3. За допомогою основної ознаки порівняння дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n\ln(3n)}; \quad \text{б) } \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{n^2-2n-1}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}.$$

□ а) Застосуємо основну ознаку порівняння з “більшим” збіжним рядом геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(1/5)^n$ зі знаменником $q=1/5<1$:

$$u_n=1/(5^n\ln(3n))<1/5^n=(1/5)^n=v_n,\ n=1,2,\dots.$$

Оскільки $u_n\le v_n$, то «менший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n\ln(3n)}$ також збігається.

б) Оскільки $u_n=\frac{\sqrt{n^3}}{n^2-2n-1}\ge\frac{\sqrt{n^3}}{n^2}=\frac{1}{\sqrt{n}}=v_n$ при всіх $n\ge 3$ і «менший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}1\big/n^{1/2}$ є розбіжним узагальненим гармонічним рядом з $p=1/2\le 1$, то за основною ознакою порівняння «більший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{n^2-2n-1}$ також розбігається.

в) Оскільки при $n\ge 2$ справджується нерівність $u_n=1/n^n\le$ $\le 1/2^n=v_n$ і «більший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}1/2^n$ є збіжним геометричним рядом з $q=1/2<1$, то за основною ознакою порівняння «менший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^n$ теж збігається. ■

Теорема 3 (***друга*** (***гранична***) ***ознака порівняння***). *Якщо існує скінченна, відмінна від нуля границя* $\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=c\,,\ (0<c<+\infty)}$ *відношення загальних членів двох знакододатних рядів* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ *, то обидва ряди поводять себе однаково щодо збіжності: одночасно збігаються чи розбігаються.*

□ Оскільки існує границя $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=c$, то для довільного $\varepsilon>0$ можна знайти такий номер N, що для всіх $n\ge N$ буде виконуватися нерівність $|u_n/v_n-c|<\varepsilon$. Звідки $c-\varepsilon<u_n/v_n<c+\varepsilon$.

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ збігається. З нерівності $u_n/v_n<c+\varepsilon$ маємо $u_n<(c+\varepsilon)v_n$, $n\ge N$. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ збігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(c+\varepsilon)v_n$ також збігається. Звідси за основною ознакою порівняння випливає збіжність «меншого» ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ розбігається. З нерівності $u_n/v_n>c-\varepsilon$ маємо $u_n>(c-\varepsilon)v_n$, $n\ge N$. З розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(c-\varepsilon)v_n$. Тоді згідно з основною ознакою порівняння «більший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ також розбігається. ■

Зауваження 5. Існування вказаної границі говорить про те, що загальні члени u_n і v_n цих рядів при $n\to\infty$ є нескінченно малими одного порядку $u_n=O^*(v_n)$ (зокрема, можуть бути еквівалентними $u_n\sim v_n$). Таким чином, *для порівняння треба підбирати еталонний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ *, загальний член якого* v_n *є нескінченно малою того ж порядку, що і загальний член* u_n *ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *, який до-*

сліджується.

Приклад 4. За допомогою граничної ознаки порівняння дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+4/n); \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5}+4}{6n^4-n^2+3}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} arctg \frac{5n}{n^3+8}.$$

□ а) Відомо, що $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$. Звідси при $n \to \infty$ маємо: $4/n \to 0$; $\ln(1+4/n) \sim 4/n = O^*(1/n)$. Тому для даного ряду застосуємо граничну ознаку порівняння з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, що розбігається:

$$u_n = \ln(1+4/n),\ v_n = 1/n; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+4/n)}{1/n} =$$

$$= 4 \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+4/n)}{1/n} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left| \alpha = 4/n \to 0 \ \textit{при} \ n \to \infty \right| =$$

$$= 4 \lim_{\alpha\to 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 4 \ (\neq 0, \neq \infty).$$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+4/n)$ розбігається.

б) Оскільки $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^5}+4}{6n^4-n^2+3} \sim \dfrac{\sqrt[3]{n^5}}{6n^4} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{n^{7/3}} = O^*(1/n^{7/3})$, то застосуємо граничну ознаку порівняння з узагальненим гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{7/3}$, $p = 7/3 > 1$, що збігається:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{7/3}(n^{5/3}+4)}{6n^4-n^2+3} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1+4/n^{5/3}}{6-1/n^2+3/n^4} =$$

$$= 1/6 \quad (\neq 0, \neq \infty).$$ Даний ряд теж збігається.

в) (Розв'язати самостійно). ■

Зауваження 6. Застосування ознак порівняння часто викликає труднощі, пов'язані з необхідністю підбирати еталонний ряд. Тож, нижче наведені більш зручні для користування ознаки, де фігурує тільки ряд, що досліджується.

Ознака Даламбера.

Теорема 4 (***ознака Даламбера***). *Якщо для знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *існує границя* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l}$ *відношення наступного члена до попереднього, то*

а) *при* $l < 1$ *ряд збігається*; б) *при* $l > 1$ *ряд розбігається*;

в) *при* $l = 1$ *не можна зробити висновок, збігається ряд чи розбігається.*

□ а) Нехай $l < 1$. Візьмемо число q, що задовольняє нерівності $l < q < 1$. Для відношення u_{n+1}/u_n з означення границі випливає, що існує такий номер N, що для всіх $n \geq N$ буде виконуватися умова $u_{n+1}/u_n < q$. Таким чином, для $n \geq N$ маємо:

$$u_{N+1} < qu_N, \qquad u_{N+2} < qu_{N+1} < q^2 u_N,$$
$$u_{N+3} < qu_{N+2} < q^2 u_{N+1} < q^3 u_N, \; \dots .$$

Розглянемо два ряди $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots$ і $u_N + qu_N + q^2 u_N + q^3 u_N + \dots$, де другий збігається як геометричний ряд зі знаменником $q < 1$.

Члени першого ряду не перевищують відповідних членів другого ряду. Тому за основною ознакою порівняння перший ряд теж збігається.

б) Нехай $l > 1$. Тоді для відношення u_{n+1}/u_n з означення границі випливає, що існує такий номер N, що для всіх $n \geq N$ буде виконуватися нерівність $u_{n+1}/u_n > 1$. Звідси $u_{n+1} > u_n$ для всіх $n \geq N$. Це означає, що члени ряду зростають, починаючи з номера $N+1$. Тому загальний член ряду не прямує до нуля $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. За достатньою ознакою розбіжності даний ряд розбігається. ■

Якщо $l = +\infty$, то ряд також розбігається, оскільки існує такий номер N, що для всіх $n \geq N$ буде виконуватися нерівність $u_{n+1}/u_n > 1$. Звідки $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. ■

Зауваження 7. На практиці при дослідженні на збіжність найчастіше використовується саме ознака Даламбера. *Щоб не натрапити на випадок невизначеності* $l=1$, *її застосовують до таких рядів, загальний член яких містить у своєму складі факторіал і/або показникову функцію від* n.

Приклад 5. За допомогою ознаки Даламбера дослідити на збіжність дані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-4}{\sqrt[3]{n^2 \cdot 10^{2n}}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^2+2n}.$$

□ а) До складу загального члена входить показникова функція $10^{(2/3)n}$. Тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$u_{n+1} = \frac{7(n+1)-4}{10^{(2/3)(n+1)}\sqrt[3]{(n+1)^2}} = \frac{7n+3}{10^{(2/3)n+2/3}\sqrt[3]{(n+1)^2}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(7n+3)10^{(2/3)n}\sqrt[3]{n^2}}{10^{(2/3)n+2/3}\sqrt[3]{(n+1)^2}\,(7n-4)} = \frac{1}{10^{2/3}}\lim_{n\to\infty}\frac{7n+3}{7n-4}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2}{(n+1)^2}} = 10^{-2/3}\lim_{n\to\infty}\frac{7+3/n}{7-4/n}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{(1+1/n)^2}} =$$

$$=10^{-2/3}\cdot 1\cdot\sqrt[3]{1} = 10^{-2/3} < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

б) Загальний член цього ряду $u_n = (n-1)!/(n^2+2n)$ містить факторіал $(n+3)!$, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_{n+1} = \frac{(n+1-1)!}{(n+1)^2+2(n+1)} = \frac{n!}{n^2+4n+3} = \frac{(n-1)!n}{n^2+4n+3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n(n^2+2n)}{(n^2+4n+3)(n-1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n^2}{n^2+4n+3} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n}{1/n+4/n^2+3/n^3} = \left|\frac{1}{0}\right| = +\infty > 1. \text{ Ряд розбігається. } ■$$

Радикальна ознака Коші.

Теорема 5 (***радикальна ознака Коші***). *Якщо для знакододатного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *існує границя* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l}$, *то*

а) *при* $l < 1$ *ряд збігається*; б) *при* $l > 1$ *ряд розбігається*;

в) *при* $l = 1$ *не можна зробити висновок щодо збіжності чи розбіжності ряду*.

Ця ознака базується, як і ознака Даламбера, на порівнянні даного числового ряду з відповідним узагальненим геометричним рядом. Доведення аналогічне.

Зауваження 8. Радикальну ознаку зручно застосовувати, коли загальний член ряду має в своєму складі показникові функції від n, *з яких досить просто добувається корінь* n*-го степеня.*

Приклад 6. За допомогою радикальної ознаки Коші дослідити на збіжність задані знакододатні ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \left(n^2/(n^3+1)\right); \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln^{2n} \left(n^4/(n+1)\right).$$

□ а) Загальний член ряду є степенем з показником n виразу $\sin\left(n^2/(n^3+1)\right)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin^n \left(n^2/(n^3+1)\right)} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(n^2/(n^3+1)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin\left((1/n)/(1+1/n^3)\right) = \sin 0 = 0 < 1. \quad \text{Ряд збігається.}$$

б) Загальний член ряду є степенем з показником $2n$ виразу $\ln\left(n^4/(n+1)\right)$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln^{2n} \frac{n^4}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \ln^2 \frac{n^4}{n+1} = \ln^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/n^3 + 1/n^4} =$$

$$= \left| \ln(1/+0) = \ln(+\infty) = +\infty \right| = +\infty > 1. \quad \text{Ряд розбігається.} \ \blacksquare$$

Зауваження 9. У випадку невизначеності $l = 1$, радикальна ознака, як і «рівносильна» їй ознака Даламбера, відповіді не дає. Потрібні додаткові дослідження на основі інших більш «сильних» ознак, до яких відносяться всі наведені вище.

2.3.3 Знакозмінні ряди. Знакопочергові ряди. Ознака Лейбниця. Абсолютна й умовна збіжність

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що містить нескінченну кількість членів обох знаків + і -, називається ***знакозмінним***.

Знакозмінний ряд, два довільні сусідні члени якого мають різні знаки, називається ***знакопочерговим*** або ***рядом Лейбниця***. Його вигляд

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots, \text{ де } a_n = |u_n| \geq 0}.$$

Теорема 1 (***достатня ознака Лейбниця***). *Якщо для знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $a_n \geq 0$ *виконуються дві умови*:

1) $\boxed{a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots}$; 2) $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$, *тобто послідовність, складена з модулів членів ряду, є монотонно спадною і прямує до нуля, тоді цей ряд є збіжним, при цьому його сума* S *додатна і не перевищує модуля першого члена*: $0 < S \leq a_1$.

□ Розглянемо часткову суму з парним числом членів:

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Кожна різниця в дужках додатна, оскільки $a_n > a_{n+1}$. Тому $S_{2n} > 0$ і послідовність $\{S_{2n}\}$ – зростаюча.

Крім того,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1,$$

оскільки кожна дужка знову-таки додатна. Тобто послідовність $\{S_{2n}\}$ обмежена зверху.

Отже, послідовність $\{S_{2n}\}$ монотонно зростає і обмежена, тому має границю. Нехай $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$, тоді $0 < S \leq a_1$.

Обчислимо границю сум з непарними номерами:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = S + 0 = S .$$

Таким чином, часткові суми як з парними, так і з непарними номерами мають спільну границю: $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$.

Звідси випливає, що вся послідовність часткових сум $\{S_n\}$ також має, причому ту ж саму границю: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, Тобто ряд збігається. При цьому $0 < S \le a_1$. ■

Наслідок. Абсолютна похибка Δ_n *від заміни суми* S *збіжного знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *будь-якою його частковою сумою* S_n *не перевищує модуля першого з відкинутих членів*. Іншими словами, *модуль залишку* R_n *збіжного знакопочергового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ *не перевищує модуля першого з відкинутих членів*. Тобто $\boxed{\Delta_n = | S - S_n | = | R_n | \le a_{n+1}}$.

Дійсно, даний залишок $R_n = (-1)^{n+2} a_{n+1} + (-1)^{n+3} a_{n+2} + ...$ – це також збіжний ряд Лейбниця. Модуль суми цього ряду не перевищує абсолютної величини його першого члена, тобто $| R_n | \le a_{n+1}$.

Цей наслідок широко використовується при наближених обчисленнях.

Зауваження 1. Ознака Лейбниця справедлива, якщо послідовність членів ряду є спадною хоча б з деякого номера N .

Зауваження 2. Друга умова ознаки Лейбниця $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, як розглянуто раніше, є необхідною для збіжності. Тому спочатку перевіряють саме її.

Приклад 1. За допомогою ознаки Лейбниця дослідити на збіжність дані знакопочергові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{4n^3 - 1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 5^n}{n^2}$.

□ а) Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{4n^3-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/n^2}{4-1/n^3}=0$;

1) $|u_n|=\dfrac{n}{4n^3-1}>\dfrac{n+1}{4(n+1)^3-1}=|u_{n+1}|,\quad n=1,2,...$ (доведіть самостійно, безпосередньо переконавшись, що $|u_n|-|u_{n+1}|>0$).

Отже, умови виконуються. Даний ряд збігається.

б) Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Двічі скористаємося правилом Лопіталя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x}{x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{(5^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\ln 5}{2x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\frac{\ln 5}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{(5^x)'}{x'}=\frac{\ln 5}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\ln 5}{1}=+\infty.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=+\infty\neq 0$. Оскільки друга умова ознаки Лейбниця не виконується, то даний ряд розбігається. ■

Теорема 2 (***достатня ознака збіжності знакозмінного ряду***). *Якщо для знакозмінного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *збігається ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, *складений з модулів його членів, то даний ряд також збігається.*

□ Нехай $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$ і $S_n^{(m)}=\sum_{k=1}^{n}|u_k|$ – часткові суми відповідно даного ряду і ряду з абсолютних величин його членів.

Позначимо через $S_n^{(+)}$ і $S_n^{(-)}$ суми модулів відповідно всіх невід'ємних і всіх від'ємних членів серед перших n членів даного ряду. Тоді $S_n=S_n^{(+)}-S_n^{(-)}$ і $S_n^{(m)}=S_n^{(+)}+S_n^{(-)}$.

За умовою ряд з модулів збігається, тобто існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}S_n^{(m)}=S^{(m)},\ S^{(m)}>0$.

$S_n^{(+)}$ і $S_n^{(-)}$ – додатні зростаючі величини, що менші $S^{(m)}$. Отже, вони мають границі: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(+)} = S^{(+)}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(-)} = S^{(-)}$. Тоді існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n^{(+)} - S_n^{(-)}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n^{(+)} - \lim_{n\to\infty} S_n^{(-)} = S^{(+)} - S^{(-)}.$$

Таким чином, даний знакозмінний ряд збігається. ■

Зауваження 3. Наведена ознака є лише достатньою, але не необхідною: існують збіжні знакозмінні ряди, яким відповідають розбіжні ряди, утворені з модулів їх членів. Наприклад, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ збіжний за ознакою Лейбниця, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ з модулів його членів, розбіжний як гармонічний ряд.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, складений з модулів його членів, збігається, та ***умовно збіжним***, коли сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ з модулів його членів розбігається.

З попередньої ознаки випливає, що *довільний абсолютно збіжний ряд є збіжним*.

Зауваження 4. Дослідження знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ на збіжність доцільно розпочинати з виявлення абсолютної збіжності як більш «сильної», застосовуючи відомі ознаки збіжності знакододатних рядів до ряду з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Якщо ряд з модулів збігається, то сам знакозмінний ряд абсолютно збіжний і дослідження завершене. Якщо ж ряд з модулів розбігається, то інколи можна відразу зробити висновок про розбіжність і самого знакозмінного ряду (наприклад, при невиконанні необхідної ознаки збіжності). Але частіше далі треба провести більш «тонке» дослідження безпосередньо самого знакозмінного ряду на умовну збіжність.

Приклад 2. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність дані знакозмінні ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^4}$;   б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$;   в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+1/n)^{3n^2}$.

□ а) До ряду з модулів членів даного ряду застосуємо основну ознаку порівняння:

$$|u_n|=\left|\frac{\sin n}{n^4}\right|=\frac{|\sin n|}{n^4}\le\frac{1}{n^4}=v_n .$$

Оскільки більший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^4$ є збіжним узагальненим гармонічним рядом з $p=4>1$, то менший ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ теж збіжний. Отже, даний ряд абсолютно збіжний.

б) Ряд з модулів членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^{1/2}$ є розбіжним узагальненим гармонічним рядом з $p=1/2\le 1$.

Сам даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n^{1/2}$ є знакопочерговим. Він задовольняє обидві умови ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0;\;\;|u_n|=\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}=|u_{n+1}|,\; n=1,2,...$$

і тому є збіжним. Отже, даний ряд умовно збіжний.

в) Модуль загального члена даного ряду $|u_n|=(1+1/n)^{3n^2}$ є степенем з показником $3n^2$ виразу $(1+1/n)$, тому до ряду з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+1/n)^{3n^2}}=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{3n}=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n\right)^3=e^3>1.$$ Ряд з модулів розбігається.

З розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ за радикальною ознакою випливає $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\ne 0$. Звідси $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\ne 0$.

Таким чином, для даного ряду не виконується необхідна ознака збіжності, тому він розбігається. ■

2.4 Степеневі та тригонометричні ряди

2.4.1 Функціональні ряди. Область збіжності функціонального ряду. Рівномірна збіжність

Функціональним називається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, членами якого є функції $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, визначені на деякій непорожній множині D зміни аргументу x.

Якщо аргументу x надати деякого значення x_0 з ***області визначення*** D ряду, то дістанемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, що може збігатися чи розбігатися. Відповідно x_0 називається ***точкою збіжності*** чи ***точкою розбіжності*** функціонального ряду.

Множина D_s всіх точок збіжності називається ***областю збіжності*** функціонального ряду. Очевидно, що D_s є деякою підмножиною області визначення D: $D_s \subseteq D$.

В області збіжності ряду його сума S є функцією x: $S = S(x)$. Записують $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ і кажуть, що ***функція*** $S(x)$ **розвивається** (***розкладається***) ***в ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Для залишку $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ збіжного функціонального ряду виконується умова $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається ***абсолютно збіжним*** в деякій області D_a, якщо в довільній точці x_0 цієї області абсолютно збігається відповідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені та неперервні на деякому відрізку $[a;b]$.

Рівномірною нормою функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число $\boxed{\| f \|_1 = \max\limits_{a\le x\le b} | f(x)|}$.

Рівномірною відстанню між функціями $f(x)$ і $g(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається рівномірна норма їх різниці:

$$\boxed{\rho_1(f,g) = \| f - g \|_1 = \max_{a\le x\le b} | f(x) - g(x)|}.$$

Нехай відрізок $[a;b]$ міститься в області визначення D функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Цей ряд називається ***рівномірно збіжним*** на відрізку $[a;b]$ до суми $S(x)$, якщо виконується умова

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \rho_1(S, S_n) = 0}.$$

Теорема Вейєрштрасса (***достатня ознака рівномірної збіжності функціонального ряду***). Якщо *для всіх значень* x *з деякого відрізка* $[a;b]$ *члени функціонального ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *за абсолютною величиною не перевищують відповідних членів збіжного знакододатного числового ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *, то функціональний ряд збігається абсолютно і рівномірно на цьому відрізку* $[a;b]$.

□ а) За умовою $|u_n(x)| \le a_n$, $\forall x \in [a;b]$, $n = 1, 2, \ldots$ і “більший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тому за основною ознакою порівняння “менший” ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ також збігається. Тобто функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ абсолютно збіжний на $[a;b]$.

Оцінимо рівномірну відстань між сумою $S(x)$ і частковою сумою $S_n(x)$ цього ряду на відрізку $[a;b]$:

$$\rho_1(S, S_n) = \max_{a\le x\le b} | S(x) - S_n(x)| = \max_{a\le x\le b} | R_n(x)| =$$

$$= \max_{a\le x\le b} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \le \max_{a\le x\le b} \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = R_n^{(a)}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(a)} = 0$ як залишок збіжного ряду, то, переходячи в нерівності $0 \le \rho_1(S, S_n) \le R_n^{(a)}$ до границі при $n \to \infty$, дістанемо $0 \le \lim\limits_{n\to\infty} \rho_1(S, S_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(a)} = 0$.

Звідси $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_1(S, S_n) = 0$. ■

Наведемо без доведення *основні властивості* рівномірно збіжних функціональних рядів.

1) (***Неперервність***). *Якщо члени рівномірно збіжного ряду* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *неперервні на деякому відрізку* $[a;b]$, *то його сума* $S(x)$ *також неперервна на цьому відрізку*.

2) (***Граничний перехід***). *Рівномірно збіжний на деякому відрізку* $[a;b]$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *допускає всередині цього відрізка почленний граничний перехід*:

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x), \quad x_0 \in (a;b).$$

3) (***Інтегрування***). *Якщо на деякому відрізку* $[a;b]$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *рівномірно збіжний, а його члени неперервні на* $[a;b]$, *то на цьому відрізку ряд можна почленно інтегрувати*:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx.$$

4) (***Диференціювання***). *Збіжний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *з диференційовних на деякому відрізку* $[a;b]$ *функцій можна почленно диференціювати на цьому відрізку за умови, що продиференційований ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *рівномірно збіжний*:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad x \in [a;b].$$

5) (***Множення на обмежену функцію***). *Якщо рівномірно збіжний на деякому відрізку* $[a;b]$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *почленно помножити на обмежену на цьому проміжку функцію* $\varphi(x)$, *то одержаний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x) u_n(x)$ *також рівномірно збіжний на відрізку* $[a;b]$.

2.4.2 Степеневі ряди. Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду. Область збіжності. Основні властивості степеневих рядів

Найбільш важливим для прикладних задач окремим випадком функціональних рядів є степеневі ряди.

Степеневим рядом за степенями двочлена $x - x_0$ називається функціональний ряд вигляду:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots},$$

де x – дійсна змінна (***аргумент***); x_0 – дійсне фіксоване число (***центр розвинення*** або ***опорна точка***); $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – дійсні сталі (***коефіцієнти***).

При $\boxed{x_0 = 0}$ одержується більш зручний за формою степеневий ряд $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$ за степенями x. До цього спрощеного вигляду довільний степеневий ряд зводиться лінійною заміною $x - x_0 = t$.

Очевидно, що довільний степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ збіжний в точці $x = x_0$ до суми $S = a_0$. Тому область збіжності степеневого ряду завжди містить принаймні одну точку $x = x_0$ – центр розвинення. Детальніші відомості про збіжність дає наступна

теорема Абеля. а) *Якщо степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *збігається при деякому* $x = x_1 \neq 0$, *то він абсолютно збігається при всіх значеннях* x, *для яких* $|x| < |x_1|$. *б) Якщо степеневий ряд*

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *розбігається при деякому* $x = x_2$, *то він розбігається при всіх значеннях* x, *для яких* $|x| > |x_2|$.

□ а) Оскільки за умовою ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збіжний в точці $x = x_1 \neq 0$, то збіжним є числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$. За необхідною ознакою $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. Звідси випливає, що послідовність $\{a_n x_1^n\}$ обмежена, тобто існує таке додатне число M, що

$$|a_n x_1^n| \leq M, \; n = 0, 1, 2, \dots .$$

Враховуючи, що для $|x| < |x_1|$ величина $q = |x / x_1| < 1$, маємо:

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot |x / x_1|^n \leq Mq^n, \; n = 0, 1, 2, \dots .$$

Тобто модуль кожного члена степеневого ряду не перевищує відповідного члена збіжного геометричного ряду $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ зі знаменником $|q| < 1$. Тоді за основною ознакою порівняння при $|x| < |x_1|$ цей ряд абсолютно збіжний.

б) Нехай тепер існує таке значення $x = x_2$, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбіжний. Доведемо методом від супротивного, що тоді цей ряд буде розбіжним і для всіх x, що задовольняють нерівність $|x| > |x_2|$. Справді, припускаючи, що ряд збіжний в якій-небудь точці x_*, яка задовольняє цю нерівність, за доведеним в пункті а) дістанемо, що він повинен бути збіжним і в точці x_2, бо $|x_2| < |x_*|$. Але це суперечить умові, що в точці x_2 ряд розбігається. ■

Теорема Абеля дозволяє розділити множини точок збіжності та розбіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Якщо x_1 – точка збіжності ряду, то весь інтервал $(-|x_1|; |x_1|)$ заповнено точками абсолютної збіжності цього ряду (рис. 39). Якщо x_2 – точка розбіжності ряду, то півпряма $(-\infty;|x_2|)$ зліва від точки $-|x_2|$ і півпряма $(|x_1|;+\infty)$ справа від точки $|x_2|$ (рис. 2.22) складаються з точок розбіжності цього ряду. Зближуючи $|x_1|$ і $|x_2|$ простим перебором значень x між ними, звужуватимемо зону невизначеності $(-|x_2|;-|x_1|)\cup(|x_1|;|x_2|)$ і дістанемо:

існує таке невід'ємне число R, яке називається ***радіусом збіжності*** степеневого ряду, що при $|x|<R$ ряд абсолютно збіжний, а при $|x|>R$ – розбіжний (рис. 2.23). Симетричний інтервал $(-R;R)$ називається ***інтервалом збіжності*** степеневого ряду. Його довжина дорівнює подвоєному радіусу.

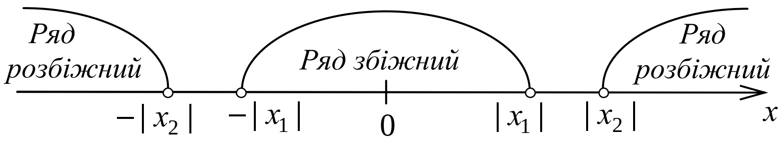

Рисунок 2.22

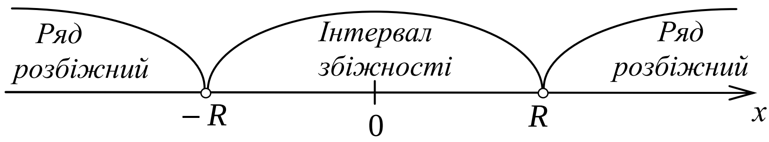

Рисунок 2.23

Зауваження 1. На кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x=\pm R$, питання про збіжність розв'язується окремо для кожного конкретного ряду. Таким чином, область збіжності степеневого ряду може відрізнятись від інтервалу $(-R;R)$ не більше ніж двома точками $x=\pm R$.

Зауваження 2. У деяких рядів інтервал збіжності вироджується в точку ($R=0$), у інших – інтервалом збіжності є вся числова пряма $(-\infty;+\infty)$ ($R=+\infty$).

Зауваження 3. Інтервал збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ за степенями двочлена $x-x_0$ знаходять з нерівності $|x-x_0|<R$, тобто він має вигляд $(x_0-R;x_0+R)$ і є симетричним відносно центру розвинення x_0.

Зауваження 4. Інтервал збіжності степеневого ряду можна знайти безпосередньо за ознакою Даламбера або за радикальною ознакою Коші, застосовуючи їх до ряду, складеного з модулів членів даного ряду. Для дослідження кінців інтервалу використовуються більш “сильні” ознаки.

Приклад 1. Знайти інтервал і область збіжності даного степеневого ряду:

$$\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}; \qquad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n^{6n}};$$

$$\text{в) } \sum_{n=6}^{\infty}\frac{(-1)^n n!\,(x-2)^{n+5}}{3^n}; \qquad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n\sqrt{\ln(4n)}}.$$

□ а) Для даного ряду скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n=\frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n};\quad u_{n+1}=\frac{(x-1)^{3(n+1)}}{(4(n+1)+5)8^{n+1}}=\frac{(x-1)^{3n+3}}{(4n+9)8^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{3n+3}}{(4n+9)8^{n+1}}:\frac{(x-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}\right|=\frac{|x-1|^3}{8}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{4n+9}=\frac{|x-1|^3}{8}\lim_{n\to\infty}\frac{4+5/n}{4+9/n}=\frac{|x-1|^3}{8};\quad \frac{|x-1|^3}{8}<1;$$

$$|x-1|^3<8;\ |x-1|<2;\ -2<x-1<2;\ -1<x<3.$$

Таким чином, $(-1;3)$ – інтервал збіжності даного ряду і $R=(3-(-1))/2=2$ – його радіус збіжності.

Дослідимо збіжність цього ряду на кінцях одержаного інтервалу. При $x=-1$ маємо знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1-1)^{3n}}{(4n+5)8^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{4n+5},$$

який є умовно збіжним за ознакою Лейбниця. (Переконайтеся в цьому самостійно).

При $x = 3$ дістаємо знакододатний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-1)^{3n}}{(4n+5)8^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n+5},$$

який розбігається за граничною ознакою порівняння з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. (Переконайтеся в цьому самостійно).

Отже, областю збіжності даного ряду є півінтервал $[-1;3)$.

б) Для даного ряду скористаємося радикальною ознакою:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(x+4)^n \big/ n^{6n}\right|} = |x+4| \lim_{n\to\infty} 1/n^6 = 0$$

Оскільки $0 < 1$ при всіх дійсних значеннях x, то інтервалом і областю збіжності ряду є вся числова пряма $(-\infty; +\infty)$ і його радіус збіжності $R = +\infty$.

в) До даного ряду застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_n = (-1)^n n!\,(x-2)^{n+5} \big/ 3^n; \quad u_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+1)! \times$$

$$\times (x-2)^{n+1+5} \big/ 3^{n+1} = (-1)^{n+1} n!\,(n+1)(x-2)^{n+6} \big/ 3^{n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1} n!\,(n+1)(x-2)^{n+6} \big/ 3^{n+1}}{(-1)^n n!\,(x-2)^{n+5} \big/ 3^n}\right| =$$

$$= \frac{|x-2|}{3} \lim_{n\to\infty}(n+1) = \begin{cases} 0 \ \ при \ x = 2; \\ +\infty \ \ при \ x \neq 2. \end{cases}$$

Отже, інтервалом і областю збіжності ряду є тільки одна точка $x = 2$ і його радіус збіжності $R = 0$.

г) (Розв'язати самостійно. До ряду з модулів застосувати ознаку Даламбера. Кінці інтервалу збіжності дослідити за інтегральною ознакою. Відповідь: $(-1;1)$ – інтервал і область збіжності). ■

Зауваження 5. У випадку степеневого ряду стандартного вигляду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ чи $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ для радіуса збіжності одержуються формули: $\boxed{R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n/a_{n+1}\right|}$ – за ознакою Даламбера;

$\boxed{R=1\Big/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ – за радикальною ознакою.

Враховуючи властивості рівномірно збіжних рядів і теорему Абеля, сформулюємо *основні властивості* степеневих рядів.

1) *Степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізку* $[a;b]$, *який цілком міститься в інтервалі збіжності* $(-R;R)$.

2) *Сума степеневого ряду* $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *неперервна на інтервалі збіжності* $(-R;R)$.

3) *Степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку* $[a;b]$, *який належить інтервалу збіжності* $(-R;R)$. *Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності*.

$$\int_a^b\left(\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_nx^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

$$[a;b]\subset(-R;R).$$

4) *Степеневий ряд* $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *можна почленно диференціювати в інтервалі збіжності* $(-R;R)$. *Одержаний ряд має той самий інтервал збіжності*.

$$\left(\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad x\in(-R;R).$$

Зауваження 6. При диференціюванні чи інтегруванні степеневого ряду інтервал збіжності не змінюється, але може змінитися збіжність ряду на кінцях цього інтервалу.

Зауваження 7. Збіжні степеневі ряди можна перемножувати за звичайними правилами:

якщо $S_a(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$ *для* $|x|<R_a$

$$i \quad S_b(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots \quad \text{для} \quad |x| < R_b, \ \text{тоді}$$

$$S_a(x) \cdot S_b(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \ldots + \sum\nolimits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n + \ldots$$

$$\text{для } |x| < \min\{R_a, R_b\}.$$

Аналогічно виконується ділення збіжних степеневих рядів.

Зазначені властивості степеневих рядів широко використовуються в теоретичних дослідженнях і наближених обчисленнях.

Приклад 2. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, інтервал збіжності якого $(-1;1)$.

□ Нехай $S(x)$ – сума даного ряду. Тоді

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \big/ (2n+1)\right)(x^{2n+1})' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n.$$

Одержаний ряд геометричної прогресії з першим членом $a = 1$ і знаменником $q = -x^2$ при $x \in (-1;1)$ є збіжним, оскільки $|q| < 1$. Знайдемо його суму: $S'(x) = 1 \big/ (1 + x^2)$.

Інтегруючи цю рівність на відрізку $[0; x] \subset (-1;1)$, дістанемо:

$$S(x) = \int_0^x S'(x)\,dx = \int_0^x dx/(1 + x^2) = arctg\, x, \ |x| < 1. \quad ■$$

2.4.3 Ряди Тейлора і Маклорена. Розкладання функцій у степеневі ряди

В області збіжності сумою степеневого ряду є деяка функція. Вище висвітлені основні властивості та на прикладах розглянуті деякі способи знаходження цієї функції в скінченному вигляді.

Вважатимемо тепер, що функція задана, і з’ясуємо, за яких умов цю функцію можна подати у вигляді степеневого ряду і як знайти його коефіцієнти.

Нехай функція $f(x)$ визначена в околі деякої точки x_0 і в цій точці нескінченне число разів диференційовна. Припустимо, що в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ функцію $f(x)$ можна подати у вигляді степеневого ряду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots,$$

У цьому разі кажуть, що ***функція*** $f(x)$ ***розвинена*** (***розкладена***) ***в степеневий ряд*** в околі точки x_0 (за степенями двочлена $x - x_0$).

Знайдемо коефіцієнти цього ряду через значення самої функції $f(x)$ та її похідних у центрі розвинення x_0. Для цього послідовно диференціюватимемо ряд і підставлятимемо в ліву та праву частини одержаних розкладів значення $x = x_0$, а потім розв'язуватимемо знайдені вирази відносно шуканих коефіцієнтів:

$$f(x_0) = a_0 = 1 \cdot a_0 = 0!a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(x_0)/0!;$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots + n\,a_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots;$$

$$f'(x_0) = a_1 = 1 \cdot a_1 = 1!\,a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = f'(x_0)/1!;$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots;$$

$$f''(x_0) = 2a_2 = 1 \cdot 2a_2 = 2!a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = f''(x_0)/2!;$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3} + \ldots;$$

$$f'''(x_0) = 3 \cdot 2a_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 = 3!\,a_3 \quad \Rightarrow \quad a_3 = f'''(x_0)/3!;$$

… … … … … … ... … … … … … … … … … …

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2a_n + (n+1)n\ldots 2a_{n+1}(x - x_0) + \ldots;$$

$$f^{(n)}(x_0) = n(n-1)(n-2)\ldots 2a_n = n!a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = f^{(n)}(x_0)/n!;$$

… … … … … … ... … … … … … … … … … …

Підставляючи одержані значення коефіцієнтів, дістанемо ***ряд Тейлора*** для даної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) +}$$

$$\boxed{+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+...}.$$

Якщо в ряді Тейлора покласти $x_0=0$, то отримаємо ***ряд Маклорена*** для даної функції $f(x)$:

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...}.$$

Зауваження. Після побудови для даної функції $f(x)$ її ряду Тейлора треба знайти його область збіжності та встановити, чи збігається він саме до цієї функції $f(x)$.

Наведемо без доведення декілька важливих теорем про єдиність, збіжність і умови існування ряду Тейлора.

Теорема 1. Якщо функцію $f(x)$ *в інтервалі* $(x_0-R;x_0+R)$ *можна подати у вигляді ряду* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ *за степенями двочлена* $x-x_0$, *то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора даної функції, тобто* $a_n=f^{(n)}(x_0)/n!$, $n=0,1,2,...$.

Теорема 2. Для того, щоб ряд Тейлора $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ *збігався до самої функції* $f(x)$ *в інтервалі* $(x_0-R;x_0+R)$, *тобто* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x)$, *необхідно і достатньо, щоб ця функція мала похідні всіх порядків на цьому інтервалі і залишковий член* $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $0<\theta<1$ *її формули Тейлора прямував до нуля при* $n\to\infty$ *для всіх* x *з цього інтервалу, тобто* $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ *в інтервалі* $(x_0-R;x_0+R)$ *має похідні всіх порядків та існує число* $M>0$ *таке, що*

$|f^{(n)}(x)| \le M$, $n = 0,1,2,\ldots$ *для всіх* $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$, *то цю функцію можна розкласти в ряд Тейлора* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

Розвинення функцій у степеневі ряди в загальному випадку ґрунтується на використанні рядів Тейлора чи Маклорена.

За ***способом безпосередньої побудови*** для даної функції $f(x)$ здійснюють наступне:

а) знаходять похідні $f'(x)$, $f''(x)$ ..., $f^{(n)}(x)$, ...;

б) обчислюють значення похідних у заданій точці $x = x_0$;

в) записують шуканий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(f^{(n)}(x_0) / n! \right) (x - x_0)^n$;

г) знаходять інтервал і область його збіжності;

д) визначають проміжок, в якому виконуються умови теореми 2 чи теореми 3 з попереднього пункту 1.5.3. Якщо такий проміжок існує, то в ньому дана функція $f(x)$ і сума її ряду Тейлора співпадають, тобто $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(f^{(n)}(x_0) / n! \right) (x - x_0)^n$.

Згідно теореми 1 про єдиність розвинення (попередній пункт 1.5.3), ряд Тейлора чи ряд Маклорена для даної функції $f(x)$ не залежить від способу його побудови. Тому на практиці частіше застосовують ***спосіб формальних перетворень*** – без знаходження виразів для похідних довільного n-го порядку, а за допомогою формальних перетворень уже відомих (стандартних) розвинень. Тоді залишається обґрунтувати збіжність і саме до даної функції отриманого розкладу на певному проміжку. Зокрема, корисно використовувати почленне диференціювання чи інтегрування відомих рядів, оскільки в інтервалах збіжності одержані ряди збігаються до відповідних функцій.

У наступній таблиці подані ряди Маклорена і області їх збіжності для деяких елементарних функцій. Вони використовуються як ***стандартні розвинення*** при знаходженні степеневих рядів для інших функцій. (Виведення цих співвідношень здійсніть самостійно).

Таблиця 2.1 – Стандартні розвинення в степеневі ряди

№ п/п	*Функція та її розвинення в ряд Маклорена*
1	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in R$
2	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \; x \in R$
3	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \; x \in R$
4	$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots =$ $= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! \; x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}, \; x \in [-1;1]$, де $\begin{cases} (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \\ (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) \end{cases}$
5	$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \; x \in [-1;1]$
6	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \; x \in (-1;1]$
7	$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \; x \in (-1;1)$
8	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots =$ $= 1 + \alpha x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \; x \in (-1;1)$
8а	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \; x \in (-1;1)$
9	$sh\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \; x \in R$
10	$ch\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \; x \in R$

Приклад 1. Розкласти в ряд Маклорена дані функції та знайти області збіжності отриманих рядів:

а) $f(x)=\cos^2 x$; б) $f(x)=\dfrac{12}{x^2-2x-3}$.

□ а) *Спосіб I* – безпосередня побудова. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n=0,1,2,...$ та їх значення $f^{(n)}(0)$, $n=0,1,2,...$, що входять у ряд Маклорена $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$, безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f(x)=\cos^2 x; \qquad f(0)=1;$$

$$f'(x)=-2\sin x\cos x=-\sin 2x=\sin(2x+(\pi/2)\cdot 2);\ f'(0)=0;$$

$$f''(x)=-2\cos 2x=2\sin(2x+(\pi/2)\cdot 3); \quad f''(0)=-2;$$

$$f'''(x)=2^2\sin 2x=2^2\sin(2x+(\pi/2)\cdot 4); \quad f'''(0)=0;$$

$$f^{(4)}(x)=2^3\cos 2x=2^3\sin(2x+(\pi/2)\cdot 5); \quad f^{(4)}(0)=2^3;$$

… …

$$f^{(n)}(x)=2^{n-1}\sin(2x+\frac{\pi}{2}(n+1));\ f^{(n)}(0)=2^{n-1}\sin(\frac{\pi}{2}(n+1));$$

… …

Підставимо отримані значення похідних у формулу ряду Маклорена і дістанемо

$$\cos^2 x=\underbrace{1}_{u_0}+\underbrace{0}_{u_1}-\underbrace{(2/2!)x^2}_{u_2}+\underbrace{0}_{u_3}+\underbrace{(2^3/4!)x^4}_{u_4}+...+$$

$$+\underbrace{\frac{2^{n-1}\sin((\pi/2)\cdot(n+1))}{n!}x^n}_{u_n}+...=\left|\begin{array}{l} u_n=\dfrac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m)!}x^{2m},\ n=2m; \\ u_n=0,\ n=2m+1,\ \ m=0,1,2,... \end{array}\right|=$$

$$=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+...+\frac{(-1)^m 2^{2m-1}}{(2m)!}x^{2m}+...=$$

$$=|\,n=m\,|=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n 2^{2n-1}\big/(2n)!\right)x^{2n}.$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду, використовуючи ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{(-1)^n 2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}\right| = 4x^2 \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}\big(1/((2n+1)(2n+2))\big) = 0 < 1, \quad x \in R.$$

Отже, інтервал і область збіжності ряду $(-\infty;+\infty)$.

Спосіб 2 – формальні перетворення. Скористаємося відомими тотожностями для перетворення даної функції, основними властивостями збіжних степеневих рядів і стандартними розвиненнями.

Подамо функцію $f(x)=\cos^2 x$ у вигляді:

$$f(x)=\cos^2 x=(1+\cos 2x)/2=1/2+(1/2)\cos 2x$$

і використаємо відомий розклад

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots, \quad x\in(-\infty;+\infty),$$

замінюючи x на $2x$. Дістанемо:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=1-$$

$$-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+\ldots+\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}.$$

Як бачимо, обидва способи дають однакове розвинення. Його область збіжності $(-\infty;+\infty)$ знайдена вище.

б) *Спосіб 1* – безпосередня побудова. (Розв’яжіть самостійно).

Спосіб 2 – формальні перетворення. Подамо дану раціональну функцію $f(x)=\dfrac{12}{x^2-2x-3}$ у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{12}{x^2-2x-3}=\frac{12}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}=$$

$$=\left|\; A(x-3)+B(x+1)=12; \quad \begin{matrix} x=-1: \\ x=3: \end{matrix}\begin{cases} -4A=12, & A=-3 \\ 4B=12; & B=3 \end{cases} \right| =$$

$$=\frac{-3}{x+1}+\frac{3}{x-3}=-3\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+(-x/3)} .$$

Застосуємо відоме розвинення

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n , \quad x\in(-1;1) ,$$

де для другого дробу замінимо x на $-x/3$ і отримаємо:

$$\frac{1}{1+(-x/3)}=1-(-x/3)+(-x/3)^2-(-x/3)^3+\ldots+(-1)^n(-x/3)^n+\ldots=$$

$$=1+(1/3)x+(1/3^2)x^2+(1/3^3)x^3+\ldots+(1/3^n)x^n+\ldots=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(1/3^n)\,x^n ;$$

$$(-x/3)\in(-1;1) ; \qquad x\in(-3;3) .$$

Враховуючи, що ряд для першого дробу збігається при $x\in(-1;1)$ а ряд для другого дробу – при $x\in(-3;3)$, маємо, що обидва ряди одночасно збігаються при $x\in(-1;1)$. Тоді в інтервалі $(-1;1)$ їх можна почленно додавати зі сталими множниками:

$$\frac{12}{x^2-2x-3}=-3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}{3^n}x^n .$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду, використовуючи ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{((-1)^{n+2}3^{n+2}-1)\,x^{n+1}}{3^{n+1}}:\frac{((-1)^{n+1}3^{n+1}-1)\,x^n}{3^n}\right|=$$

$$=\frac{|\,x\,|}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}3^{n+2}-1}{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}\right|=\frac{|\,x\,|}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}-1/3^{n+2}}{(-1)^{n+1}/3-1/3^{n+2}}\right|=$$

$$=\left(|\,x\,|/3\right)\cdot 3=|\,x\,|; \quad |\,x\,|<1; \quad x\in(-1;1) .$$

Дослідимо кінці інтервалу збіжності. При $x=-1$ маємо знакозмінний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}{3^n}(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}-3^{n+1}}{3^n},$$

що розбігається, бо для нього не виконується необхідна ознака збіжності:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}-3^{n+1}}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left((-1)^{n+1}/3^n - 3\right) = -3 \neq 0.$$

При $x=1$ маємо знакозмінний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}{3^n}1^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}{3^n},$$

що також розбігається, оскільки:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}-1}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(3(-1)^{n+1} - 1/3^n\right) \text{ не існує.}$$

Отже, $(-1;1)$ – область збіжності одержаного ряду. ■

Приклад 2. Розкласти в ряд Тейлора дані функції та знайти області збіжності отриманих рядів:

а) $f(x) = 1/(4x-5)$ за степенями двочлена $x-3$;

б) $f(x) = \cos(\pi x/4)$ за степенями двочлена $x+2$.

□ а) *Спосіб I* – безпосередня побудова. Знайдемо похідні $f^{(n)}(x)$, $n = 0,1,2,...$ та їх значення $f^{(n)}(3)$, $n = 0,1,2,...$, що входять у ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n = f(3) + \frac{f'(3)}{1!}(x-3) +$$

$$+ \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n + ...$$

безпосередньо повторним диференціюванням:

$$f(x) = 1/(4x-5); \qquad f(3) = 1/7;$$

$$f'(x) = -1\cdot 4/(4x-5)^2; \qquad f'(3) = -1\cdot 4/7^2;$$

$$f''(x)=1\cdot 2\cdot 4^2/(4x-5)^3; \quad f''(3)=1\cdot 2\cdot 4^2/7^3;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\,4^n/(4x-5)^{n+1}; \quad f^{(n)}(3)=(-1)^n n!\,4^n/7^{n+1};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Підставимо знайдені значення похідних в ряд Тейлора і дістанемо:

$$\frac{1}{x-5}=\frac{1}{7}-\frac{1\cdot 4/7^2}{1!}(x-3)+\frac{1\cdot 2\cdot 4^2/7^3}{2!}(x-3)^2+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^n n!\cdot 4^n/7^{n+1}}{n!}(x-3)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}}.$$

Звернемося до ознаки Даламбера для дослідження отриманого ряду на збіжність:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}4^{n+1}(x-3)^{n+1}}{7^{n+2}}:\frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}}\right|=$$

$$=(4/7)|x-3|<1; \; -7/4<x-3<7/4; \; 5/4<x<19/4.$$

На кінцях інтервалу збіжності $(5/4;19/4)$ маємо ряди $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(5/4)=(1/7)\sum_{n=0}^{\infty}1$ і $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(19/4)=(1/7)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, що розбігаються, оскільки для них не виконується необхідна ознака збіжності. Отже, $(5/4;19/4)$ – область збіжності одержаного ряду.

Спосіб 2 – формальні перетворення. Спочатку подамо функцію $f(x)=1/(4x-5)$ через нову змінну $z=x-3$ – відхилення від центру розвинення $x=x_0=3$:

$$x=z+3; \quad f(x)=\frac{1}{4(z+3)-5}=\frac{1}{4z+7}=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1+4z/7}.$$

Скористаємося рядом

$$1/(1+x)=1-x+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad x\in(-1;1),$$

в який замість x підставимо $4z/7$. Отримаємо:

$$f(x)=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1+4z/7}=\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4z/7)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n z^n}{7^{n+1}}.$$

Поклавши $z=x-3$, повернемося до початкової змінної x і дістанемо шукане розвинення $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n (x-3)^n}{7^{n+1}}$.

Його область збіжності $(5/4;19/4)$ знайдена вище.

б) *Спосіб I* – безпосередня побудова. (Розв'яжіть самостійно).

Спосіб 2 – формальні перетворення. Введемо нову змінну $z=x+2$ – відхилення від центру розвинення $x=x_0=-2$. Дістанемо:

$$x=z-2;\ f(x)=\cos\frac{\pi x}{4}=\cos\frac{\pi(z-2)}{4}=\cos\left(\frac{\pi z}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi z}{4}.$$

Потім скористаємося відомим розвиненням

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in R,$$

в яке замість x підставимо $\pi z/4$. Отримаємо:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\pi z/4)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}z^{2n+1}}{(2n+1)!\,4^{2n+1}}.$$

Далі повернемося до початкової змінної x і дістанемо шуканий розклад $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}(x+2)^{2n+1}}{(2n+1)!\,4^{2n+1}}$.

Область збіжності ряду $(-\infty;+\infty)$. (Переконайтеся в цьому самостійно, застосовуючи ознаку Даламбера). ■

2.4.4 Застосування степеневих рядів до наближених обчислень

У наближених обчисленнях степеневі ряди застосовують, зокрема, для: обчислення значень функцій; обчислення інтегралів; розв'язування диференціальних рівнянь.

Наближене обчислення значень функцій. Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ при $x = x_0$. Якщо функцію $f(x)$ можна розвинути в степеневий ряд в деякому інтервалі $(a;b)$, що містить точку x_0, то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при $x = x_0$, а наближене – частковій сумі $S_n(x_0)$: $f(x_0) \approx S_n(x_0)$. Абсолютна похибка $\Delta = \left| f(x_0) - S_n(x_0) \right|$ характеризує точність наближення. Вона дорівнює модулю залишку ряду $\Delta = \left| R_n(x_0) \right|$.

Треба також враховувати похибки округлення при обчисленні самих залишених в $S_n(x_0)$ членів ряду.

Приклад 1. Обчислити наближено значення $\sin 12^\circ$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}0001$.

□ Скористаємося розвиненням функції $\sin x$ в ряд Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in R,$$

де покладемо $x = 12^\circ = \pi/15 = 0{,}2094393$ і дістанемо знакопочерговий ряд

$$\sin 12^\circ = \sin\frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{15} - \frac{\pi^3}{15^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{15^5 \cdot 5!} + \ldots + \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{15^{2n+1} \cdot (2n+1)!} + \ldots.$$

Для заданої точності $\varepsilon = 0{,}0001$ наближення маємо

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2 = 0{,}0001/2 = 0{,}00005.$$

Знайдемо спочатку, скільки потрібно взяти перших n членів, щоб при заміні суми $f(x_0)$ ряду частковою сумою $S_n(x_0)$ отримати граничну абсолютну похибку $\varepsilon_1 = 0{,}00005$ залишку.

За наслідком з ознаки Лейбниця $|R_n| \le |u_{n+1}|$. Тоді

$$|R_n| \le |u_{n+1}| = \frac{(\pi/15)^{2n+3}}{(2n+3)!} \le \varepsilon_1 = 0{,}00005;\ \frac{(\pi/15)^{2n+3}}{(2n+3)!} \le 0{,}00005.$$

Розв'яжемо цю нерівність методом підбору:

$$n = 0:\quad |u_1| = (\pi/15)^3/3! = 0{,}0015312 > \varepsilon_1 = 0{,}00005;$$

$$n = 1:\quad |u_2| = (\pi/15)^5/5! = 0{,}000003 \le \varepsilon_1 = 0{,}00005.$$

Отже, досить взяти два перших члени ряду u_0 і u_1.

Тепер визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0{,}5\cdot 10^{-k}\cdot 2 \le \varepsilon_2 = 0{,}00005;\ 10^{-k} \le 0{,}00005;\ k \ge \lg 20000;\ k = 5.$$

Таким чином

$$\sin 12^\circ \approx S_1 = \pi/15 - (\pi/15)^3/3! = 0{,}20944 - 0{,}00153 = 0{,}20791.$$

Остаточно $\sin 12^\circ \approx 0{,}2079$. ■

Наближене обчислення визначених інтегралів. Нехай потрібно знайти інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, який не береться в елементарних функціях або складний і незручний для безпосередніх обчислень. Розглянемо випадок, коли підінтегральну функцію $f(x)$ можна розкласти в степеневий ряд, інтервал збіжності якого охоплює відрізок інтегрування $[a;b]$. Тоді на цьому відрізку ряд можна почленно проінтегрувати, використавши відповідну властивість степеневих рядів. Одержаний ряд дає точне значення інтеграла. Наближене значення дорівнює частковій сумі. Похибка обчислень визначається так само, як і при знаходженні значень функцій.

Приклад 2. Обчислити наближено визначений інтеграл $I = \int_0^{1/2} x^4(e^{x^2} - 1)\,dx$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}0001$.

□ Формула Ньютона – Лейбниця тут не застосовна, тому що первісна від $f(x) = x^4(e^{x^2} - 1)$ не виражається в елементарних функціях. Розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, використовуючи стандартний розклад для експоненти e^x, де замість

x підставимо x^2, потім віднімемо 1 і почленно помножимо на x^4:

$$x^4(e^{x^2}-1)=x^4\Big((1+x^2/1!+x^4/2!+\ldots+x^{2n}/n!+\ldots)-1\Big)=$$

$$=x^6/1!+x^8/2!+\ldots+x^{2n+4}/n!+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty).$$

Оскільки $[0;1/2]\subseteq(-\infty;+\infty)$, то цей степеневий ряд можна проінтегрувати почленно на $[0;1/2]$. Дістанемо:

$$I=\int_0^{1/2}\Big(x^6/1!+x^8/2!+x^{10}/3!+\ldots+x^{2n+4}/n!+\ldots\Big)\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^7}{1!\cdot 7}+\frac{x^9}{2!\cdot 9}+\frac{x^{11}}{3!\cdot 11}+\ldots+\frac{x^{2n+5}}{n!\cdot(2n+5)}+\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2}=\frac{1}{1!\cdot 7\cdot 2^7}+$$

$$+1\big/(2!\cdot 9\cdot 2^9)+1\big/(3!\cdot 11\cdot 2^{11})+\ldots+1\big/\big(n!\cdot(2n+5)\cdot 2^{2n+5}\big)+\ldots.$$

Шуканий інтеграл дорівнює сумі збіжного знакододатного ряду. З'ясуємо, скільки перших членів отриманого ряду треба взяти, щоб виконувалася задана точність $\varepsilon=0{,}0001$.

Для заданої точності $\varepsilon=0{,}0001$ наближення маємо

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon/2=0{,}0001/2=0{,}00005.$$

Спочатку оцінимо n-й залишок:

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!\cdot(2n+7)\cdot 2^{2n+7}}+\frac{1}{(n+2)!\cdot(2n+9)\cdot 2^{2n+9}}+$$

$$+\frac{1}{(n+3)!\cdot(2n+11)\cdot 2^{2n+11}}+\ldots=\frac{1}{(n+1)!\cdot 2^{2n+7}}\left(\frac{1}{2n+7}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2(n+2)(2n+9)}+\frac{1}{2^2(n+2)(n+3)(2n+11)}+\ldots\right)<$$

$$<\frac{1}{2^{2n+7}(n+1)!\cdot(2n+7)}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)$$

Тут добутки $(n+2)(2n+9)$, $(n+2)(n+3)(2n+11)$, …, що стоять у знаменниках другого, третього, … дробів, замінено на менший вираз $2n+7)$, від чого кожний дріб збільшився. У дужках записана нескінченно спадна геометрична прогресія зі знаменником $q=1/2$. Її сума $S=1/(1-1/2)=2$. Тоді

$$R_n<1\Big/\Big(2^{2n+7}(n+1)!\cdot(2n+7)\Big)\cdot 2<1\Big/\Big(2^{2n+6}(n+1)!\cdot(2n+7)\Big).$$

Підберемо n так, щоб виконувалася умова

$$R_n<1\Big/\Big(2^{2n+6}(n+1)!\cdot(2n+7)\Big)\le\varepsilon_1=0{,}00005:$$

$$n=1:\quad R_1<1\Big/\Big(2^8\,2!\cdot 9\Big)=0{,}000217>\varepsilon_1=0{,}00005;$$

$$n=2:\quad R_2<1\Big/\Big(2^{10}\,3!\cdot 11\Big)=0{,}000015<\varepsilon_1=0{,}00005.$$

Отже, досить взяти два перших члени ряду.

Тепер визначимо кількість k вірних десяткових знаків, які повинні мати залишені члени ряду після округлення:

$$0{,}5\cdot 10^{-k}\cdot 2\le\varepsilon_2=0{,}00005;\ 10^{-k}\le 0{,}00005;\ k\ge\lg 20000;\ k=5.$$

Таким чином

$$I\approx S_2=\frac{1}{1!\cdot 7\cdot 2^7}+\frac{1}{2!\cdot 9\cdot 2^9}=0{,}00112+0{,}00011=0{,}00123.$$

Остаточно $I\approx 0{,}0012$. ■

Наближене розв'язування диференціальних рівнянь. Коли точно проінтегрувати диференціальне рівняння за допомогою елементарних функцій не вдається або досить складно, його розв'язок $y=y(x)$ можна шукати у вигляді ряду Тейлора або Маклорена.

Зокрема, при розв'язуванні задачі Коші:

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

використовується ряд Тейлора з центром розвинення у початковій точці x_0:

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

де $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=f(x_0,y_0)$, а решта похідних $y^{(n)}(x_0)$, $n=2,3,\ldots$ знаходиться ***методом послідовного диференціювання*** чи ***методом невизначених коефіцієнтів***. Суть цих методів розглянемо на прикладах.

Зауваження 1. Питання про те, за яких умов розв'язок диференціального рівняння можна шукати у вигляді степеневого ряду, а також яка похибка цього розв'язку, тут не розглядаються.

Приклад 3. Знайти у вигляді степеневого ряду до перших чотирьох членів включно частинний розв’язок диференціального рівняння $y' = y^2 - x^3$, що задовольняє початковій умові $y(1) = 2$.

□ Застосовуємо метод послідовного диференціювання.

Шукаємо розв’язок $y = y(x)$ у вигляді ряду Тейлора з центром розвинення $x = 1$:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots,$$

де згідно умови задачі явно виписані перші чотири члени.

За умовою $y(1) = 2$. Підставляючи $x = 1$ і $y = y(1) = 2$ у диференціальне рівняння $y' = y^2 - x^3$, знаходимо $y'(1) = 2^2 - 1^3 = 3$.

Далі диференціюємо послідовно диференціальне рівняння по x і в отримані вирази підставляємо відомі на даному кроці величини. Одержуємо похідні $y''(1)$ і $y'''(1)$:

$$y'' = 2y\,y' - 3x^2; \quad y''(1) = 2\cdot y(1)\cdot y'(1) - 3\cdot 1^2 = 2\cdot 2\cdot 3 - 3 = 9;$$

$$y''' = 2(y'\,y' + y\,y'') - 6x = 2(y')^2 + 2y\,y'' - 6x;$$

$$y'''(1) = 2(y'(1))^2 + 2y(1)\cdot y''(1) - 6\cdot 1 = 2\cdot 3^2 + 2\cdot 2\cdot 9 - 6 = 42.$$

Отже, $y(x) = 2 + (3/1!)(x-1) + (9/2!)(x-1)^2 + (42/3!)\times$

$$\times(x-1)^3 + \ldots = 2 + 3(x-1) + (9/2)(x-1)^2 + 7(x-1)^3 + \ldots. \quad ■$$

Приклад 4. Знайти у вигляді степеневого ряду до перших трьох членів включно частинний розв’язок диференціального рівняння $y' = y^2 - 64\ln(1 + x/2)$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 4$.

□ Застосовуємо метод невизначених коефіцієнтів.

Шукаємо розв’язок $y = y(x)$ у вигляді степеневого ряду $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ з центром розвинення у початковій точці $x=0$. Тут згідно умови задачі явно виписані перші три члени з невідомими коефіцієнтами a_n, $n=0,1,2$.

З початкової умови $y(0)=4$ дістаємо $a_0=y(0)=4$. Тоді розв'язок $y=y(x)$ набуває вигляду: $y(x)=4+a_1x+a_2x^2+\dots$.

Далі диференціюємо цей розв'язок: $y'(x)=a_1+2a_2x+\dots$.

Використовуючи стандартне розвинення для $\ln(1+x)$, в якому замінюємо x на $x/2$, дістаємо степеневий ряд з центром в тій же початковій точці $x=0$ для функції $\ln(1+x/2)$ в правій частині:

$$\ln(1+x/2)=x/2-x^2/(2^2\cdot 2)+\dots=x/2-x^2/8+\dots,$$

де відповідно до умови задачі явно виписані тільки перші члени до степеня x^2 включно.

Отримані вирази підставляємо в диференціальне рівняння:

$$a_1+2a_2x+\dots=\left(4+a_1x+a_2x^2+\dots\right)^2-64\cdot\left((1/2)x-(1/8)x^2+\dots\right);$$

$$a_1+2a_2x+\dots=16+a_1^2x^2+a_2^2x^4+8a_1x+8a_2x^2+$$

$$+2a_1a_2x^3+\dots-32x+8x^2-\dots.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x зліва та справа у цій тотожності:

$$\begin{array}{c|l} x^0 & a_1=16; \\ x & 2a_2=8a_1-32; \\ \dots & \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \end{array}$$

Звідси знаходимо: $a_1=16$; $a_2=4a_1-16=4\cdot 16-16=48$.

Підставляємо отримані значення коефіцієнтів у степеневий ряд і дістаємо: $y(x)=4+16x+48x^2+\dots$. ■

Зауваження 2. Цими ж методами можна наближено розв'язувати диференціальні рівняння вищих порядків.

Приклад 5. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розвинення в степеневий ряд в околі початкової точки частинного розв'язку диференціального рівняння $y''=xy'-3e^y$, що задовольняє початковим умовам $y(3)=0$, $y'(3)=1$.

□ Скористаємося методом послідовного диференціювання. Шукаємо розв'язок $y(x)$ у вигляді ряду:

$$y(x)=y(3)+\frac{y'(3)}{1!}(x-3)+\ldots+\frac{y^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n+\ldots.$$

Тут

$$y(3)=0;\ y'(3)=1\neq 0;\ y''(3)=3y'(3)-3e^{y(3)}=3\cdot 1-3e^0=0.$$

Послідовно диференціюючи дане рівняння, отримаємо:

$$y'''=y'+x\,y''-3e^y y';\quad y'''(3)=y'(3)+3\,y''(3)-3e^{y(3)}y'(3)=$$

$$=1+3\cdot 0-3e^0\cdot 1=-2\neq 0;\quad y^{(4)}=y''+y''+xy'''-$$

$$-3(e^y y'y'+e^y y'')=2y''+xy'''-3e^y(y')^2-3e^y y'';$$

$$y^{(4)}(3)=2y''(3)+3y'''(3)-3e^{y(3)}(y'(3))^2-3e^{y(3)}y''(3)=$$

$$=2\cdot 0+3\cdot(-2)-3e^0\cdot 1^2-3e^0\cdot 0=-9\neq 0.$$

Підставляючи знайдені похідні в шуканий ряд, дістанемо:

$$y(x)=0+(1/1!)(x-3)+(0/2!)(x-3)^2+(-2/3!)(x-3)^3+$$

$$+(-9/4!)(x-3)^4+\ldots=(x-3)-(1/3)(x-3)^3-(3/8)(x-3)^4+\ldots. \ ■$$

2.4.5 Тригонометричні ряди. Ортогональність функцій

Функціональні ряди використовуються для подання довільної функції $f(x)$ у вигляді:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x),$$

де $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, … – система відомих (***базисних***) функцій; a_n $(n=0,1,\ldots)$ – сталі коефіцієнти.

Розглянуті вище степеневі ряди (ряди Тейлора чи Маклорена) дозволяють подавати функції, що безліч разів диференційовні, тобто дуже гладкі. Крім того, у загальному випадку:

а) швидкість збіжності (кількість членів, які треба залишити для досягнення заданої точності наближення) значно зростає при віддалені від центру розвинення;

б) n-а часткова сума S_n ряду Тейлора чи Маклорена не є найкращим середньо квадратичним наближенням функції $f(x)$ серед поліномів n-го степеня.

Для розвинення розривних функцій чи функцій з розривами похідних потрібні інші функціональні ряди. Необхідність усунення зазначених та інших недоліків обумовлює переважне використання рядів з ортогональними базисними функціями.

Як і при розгляді степеневих рядів, виникають питання: а) за яких умов на задану функцію $f(x)$ можливе відповідне розвинення? б) як обчислити його коефіцієнти? в) який характер збіжності?

Далі дано відповіді для найбільш поширеної тригонометричної системи ортогональних базисних функцій.

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені та неперервні на деякому відрізку $[a;b]$. Їх можна розглядати як нескінченновимірні вектори і ввести відповідні означення.

Скалярним добутком функцій $f(x)$ і $g(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число $\boxed{(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx}$.

Евклідовою нормою функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається квадратний корінь зі скалярного квадрату (f,f), тобто

$$\boxed{\|f\|_2=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}}.$$

Функція $f(x)$ ***нормована*** на $[a;b]$, якщо $\|f\|_2=1$.

Середньо квадратичною відстанню між функціями $f(x)$ і $g(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається евклідова норма їх різниці:

$$\boxed{\rho_2(f,g)=\|f-g\|_2=\sqrt{\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)^2 dx}}\ .$$

Функції $f(x)$ і $g(x)$ називаються ***ортогональними*** на відрізку $[a;b]$, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0\,.$$

Скінченна або нескінченна система функцій $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$, …, які неперервні на відрізку $[a;b]$ і не дорівнюють тотожно нулю, називається ***ортогональною*** на цьому відрізку, якщо всі ці функції попарно ортогональні, тобто

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ A_n\neq 0, & m=n\end{cases} \quad (m=0,1,\ldots;\ n=0,1,\ldots)\,.$$

Якщо при цьому $A_n=1\ (n=0,1,\ldots)$, то система називається ***ортонормованою***. (Кожна функція є нормованою: $\|\varphi_n(x)\|_2=\sqrt{A_n}=1$).

Теорема. Система тригонометричних функцій

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ldots$$

ортогональна на відрізку $[-\pi;\pi]$, довжина якого дорівнює їх спільному періоду $T=2\pi$.

□ Враховуючи співвідношення $\sin nx=0$ і $\cos nx=(-1)^n$ ($n\in Z$), безпосереднім обчисленням можна показати (зробіть це самостійно), що

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx=2\pi\,;\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx=\pi\,;\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx=\pi\,;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,dx=0\,;\ \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx=0\,;\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx=0\,;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0\ (m\neq n);\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0\ (m\neq n).\ \blacksquare$$

Зауваження 1. Розглянута тригонометрична система ортогональна, але не нормована. Діленням кожної функції на відповідну норму її можна звести до ортонормованого вигляду.

Зауваження 2. Тригонометрична система має значне практичне застосування, оскільки описує поширені у різних сферах коливальні процеси. Однак існує багато інших ортогональних систем функцій. Зокрема, часто використовуються системи ортогональних многочленів Лежандра, Чебишова, Ерміта, Лагерра.

2.4.6 Розкладання періодичних функцій у тригонометричний ряд Фур'є. Умови збіжності ряду Фур'є

За наведеною раніше ортогональною тригонометричною системою складемо відповідний ***тригонометричний ряд***:

$$a_0/2 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots +$$

$$+ a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

де a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ – сталі коефіцієнти.

Примітка. Для скорочення запису, за знаком підсумовування $\sum$ зовнішні дужки часто опускають.

Оскільки базисні тригонометричні функції мають спільний період $T = 2\pi$, то сума ряду теж періодична з періодом $T = 2\pi$.

Нехай $f(x)$ – задана 2π-періодична функція. Знайдемо такі конкретні значення коефіцієнтів a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$, щоб справджувалося розвинення:

$$\boxed{f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)}\,. \qquad (1)$$

Будемо припускати, що цей розклад і одержані з нього далі ряди можна почленно інтегрувати на відрізку $[-\pi;\pi]$ довжиною в період $T = 2\pi$. При обчисленнях використаємо значення інтегралів, записаних при доведенні теореми з попереднього пункту 1.6.1.

Інтегруючи ряд для $f(x)$ на відрізку $[-\pi;\pi]$ дістанемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = (a_0/2)\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\,.$$

Звідси

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = (a_0/2)\int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0\pi;\ \boxed{a_0 = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}\,. \ (2)$$

Помноживши обидві частини (1) на $\cos mx$ і проінтегрувавши почленно на відрізку $[-\pi;\pi]$, отримаємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = (a_0/2)\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\,dx\,.$$

Звідси при $m = n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = a_n\pi;$$

$$\boxed{a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\,,\quad n = 1, 2, ...}\,. \tag{3}$$

Аналогічно, помноживши ряд (1) на $\sin mx$ і проінтегрувавши в межах від $-\pi$ до π, знайдемо

$$\boxed{b_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\,,\quad n = 1, 2, ...}\,. \tag{4}$$

Числа a_0, a_n, b_n ($n = 1, 2, ...$), які обчислюються за формулами (2) – (4), називаються ***коефіцієнтами Фур'є*** функції $f(x)$.

Тригонометричний ряд (1), коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, називають ***рядом Фур'є*** цієї функції.

Зауваження 1. Інтеграли у формулах для коефіцієнтів Фур'є можна обчислювати на довільному проміжку $[a; a + 2\pi]$, довжина якого дорівнює періоду $T = 2\pi$ функції $f(x)$.

Знайдено декілька *достатніх ознак збіжності ряду Фур'є* до функції $f(x)$. Зазначимо без доведення одну з них.

Теорема Діріхле (***достатня ознака розвинення функції в ряд Фур'є***). *Якщо функція $f(x)$ має період $T = 2\pi$ і на відрізку $[-\pi;\pi]$ неперервна або має скінченне число точок розриву першого роду і відрізок $[-\pi;\pi]$ можна розбити на скінченне число частин так, що всередині кожної з них функція монотонна, то її ряд Фур'є збігається на всій числовій осі, причому сума ряду $S(x)$ в точках неперервності функції $f(x)$ дорівнює їй самій $S(x) = f(x)$, а у кожній точці розриву x_0 функції $f(x)$ – середньому арифметичному односторонніх границь при $x \to x_0$ зліва та справа*

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) + \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)\right).$$

При цьому збіжність ряду Фур'є рівномірна на будь-якому відрізку, що належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.

Функція $f(x)$, що задовольняє умови теореми Діріхле, називається ***кусково-монотонною*** на відрізку $[-\pi;\pi]$.

Отже, у ряд Фур'є можна розвивати функції достатньо загального вигляду. Графік суми ряду $S(x)$ є сукупністю дуг кривих та ізольованих точок. Він майже всюди співпадає з графіком самої функції $f(x)$, за винятком її точок розриву першого роду, де сума ряду приймає згладжене значення, що дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь. Як приклад, на рис. 2.24 зображено графік деякої кусково-монотонної 2π-періодичної функції $f(x)$, а на рис. 2.25 – графік суми $S(x)$ її ряду Фур'є.

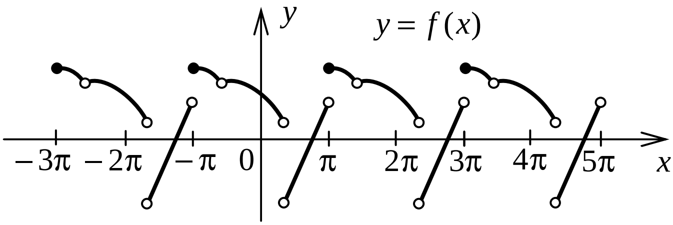

Рисунок 2.24

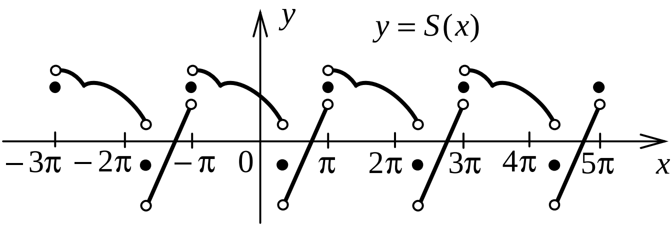

Рисунок 2.25

Зауваження 2. Швидкість збіжності ряду Фур'є тим більша, чим гладкіша функція $f(x)$.

Зауваження 3. Часткова сума S_n ряду Фур'є є найкращим середньо квадратичним наближенням функції $f(x)$ серед тригонометричних многочленів відповідного вигляду.

Зауваження 4. Ряди Фур'є можна використовувати для знаходження сум числових рядів. Якщо x_0 – точка неперервності функції $f(x)$, то за теоремою Діріхле

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) = f(x_0) - a_0/2 .$$

Приклад. Розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичні функції:

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0; \\ x^2/\pi, & 0 \le x \le \pi; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} x+\pi, & -\pi < x < 0; \\ -\pi, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

У випадку а), користуючись одержаним розвиненням, обчислити суму числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n^2$.

□ а) Задана функція кусково-монотонна на проміжку $[-\pi;\pi]$ (рис. 2.26), тому її можна розкласти в ряд Фур'є. Отже, задача зводиться до знаходження коефіцієнтів Фур'є:

$$a_0 = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = (1/\pi)\left(\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(x^2/\pi)\,dx\right) =$$

$$= (1/\pi^2)(x^3/3)\Big|_0^{\pi} = \pi/3;\;\; a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx =$$

$$= (1/\pi)\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi}(x^2/\pi)\cos nx\,dx\right) = (1/\pi^2)\times$$

$$\times\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^2; & du = 2xdx; \\ dv = \cos nx\,dx; & v = (1/n)\sin nx \end{matrix} \right| = \frac{1}{\pi^2}\times$$

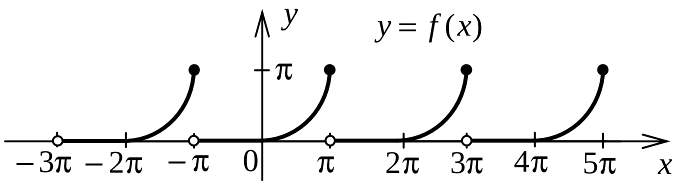

Рисунок 2.26

$$\times\left(\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx\right)=-\frac{2}{\pi^2 n}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=$$

$$=\left|u=x;\quad du=dx;\ dv=\sin nx\,dx;\ v=-(1/n)\cos nx\right|=$$

$$=-\frac{2}{\pi^2 n}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=-\frac{2}{\pi^2 n}\Big(-\pi(-1)^n/n+$$

$$+(1/n^2)\sin nx\Big|_0^{\pi}\Big)=2(-1)^n/(\pi n^2);\quad b_n=(1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=$$

$$=(1/\pi)\left(\int_{-\pi}^{0}0\cdot\sin nx\,dx+\int_0^{\pi}(x^2/\pi)\sin nx\,dx\right)=(1/\pi^2)\times$$

$$\times\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,dx=\begin{vmatrix}u=x^2;\quad du=2xdx;\\ dv=\sin nx\,dx;\ v=-(1/n)\cos nx\end{vmatrix}=\frac{1}{\pi^2}\times$$

$$\times\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx\right)=-\frac{(-1)^n}{n}+\frac{2}{\pi^2 n}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=$$

$$=\left|u=x;\ du=dx;\ dv=\cos nx\,dx;\ v=(1/n)\sin nx\right|=(-1)^{n+1}/n+$$

$$+\frac{2}{\pi^2 n}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{\pi^2 n^2}\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{\pi^2 n^3}((-1)^n-1)=\frac{(-1)^{n+1}\pi^2 n^2+2((-1)^n-1)}{\pi^2 n^3}.$$

Розвинення заданої функції має вигляд

$$f(x)=\frac{\pi}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}\pi^2 n^2+2((-1)^n-1)}{\pi^2 n^3}\sin nx\right).$$

Знайдений ряд збіжний до функції $f(x)$ при всіх $x\neq(2n+1)\pi$, $n\in Z$. У точках $x=(2n+1)\pi$, $n\in Z$ функція $f(x)$ терпить розриви першого роду (скінченні стрибки висотою π). У цих точках сума ряду

$$S((2n+1)\pi)=\frac{1}{2}\left(f((2n+1)\pi-0)+ f((2n+1)\pi+0)\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Зазначимо, що сума $S(x)$ є розривною функцією, хоча всі члени ряду неперервні (у точках розриву $x=(2n+1)\pi$, $n\in Z$ порушена рівномірна збіжність ряду).

При $x=0$ функція $f(x)$ неперервна. У цій точці одержимо:

$$f(0)=\frac{\pi}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{\pi n^2}\cos 0+\frac{(-1)^{n+1}\pi^2 n^2+2((-1)^n-1)}{\pi^2 n^3}\sin 0\right);$$

$$0=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}. \qquad \text{Звідси} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}.$$

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^n-\pi-1}{\pi n}\sin nx\right). \quad \blacksquare$$

2.4.7 Розкладання в ряд Фур'є непарної та парної функцій

Для парних і непарних функцій справедливі наступні твердження (доведіть їх самостійно):

1) *Добуток двох парних чи двох непарних функцій є парною функцією.*

2) *Добуток парної функції на непарну є непарною функцією.*

3) *Інтеграл по симетричному відрізку* $[-a;a]$, $a>0$ *від парної функції* $f(x)$ *дорівнює подвоєному інтегралу по правій половині цього проміжку* $[0;a]$: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

4) *Інтеграл по симетричному відрізку* $[-a;a]$, $a>0$ *від непарної функції* $f(x)$ *дорівнює нулю*: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$.

Нехай треба розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичну парну функцію $f(x)$. Оскільки $\cos nx$ і $\sin nx$ – відповідно парна ч непарна функції, то добутки $f(x)\cos nx$ і $f(x)\sin nx$ також відповідно є парною і непарною функціями. Інтегруючи їх на симетричному проміжку $[-\pi;\pi]$, дістанемо:

$$\boxed{a_0 = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = (2/\pi)\int_0^{\pi} f(x)\,dx}\;; \qquad (1)$$

$$\boxed{a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = (2/\pi)\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx}; \qquad (2)$$

$$\boxed{b_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0}\,.$$

Тоді ряд Фур'є для парної функції набуває вигляду

$$\boxed{f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx}\,. \qquad (3)$$

Нехай треба розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичну непарну функцію $f(x)$. Тоді добутки $f(x)\cos nx$ і $f(x)\sin nx$ відповідно є непарною і парною функціями. Інтегруючи їх на симетричному проміжку $[-\pi;\pi]$, дістанемо:

$$\boxed{a_0 = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0}\;; \quad \boxed{a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0};$$

$$\boxed{b_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = (2/\pi)\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx}\,. \qquad (4)$$

Ряд Фур'є для непарної функції набуває вигляду

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx}\,. \qquad (5)$$

Зазначимо, що ряди (1) – (3) і (4), (5) відображають характер функції $f(x)$. *Ряд Фур'є для парної функції містить лише косинуси* (парні функції), а *ряд Фур'є для непарної функції містить лише синуси* (непарні функції).

Приклад. Розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичні функції:

а) $f(x) = |x|, -\pi \le x \le \pi$; б) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x < 0; \\ -1, & 0 \le x < \pi; \end{cases}$

в) $f(x) = x^3, -\pi < x < \pi$.

Користуючись одержаними розвиненнями, обчислити суми числових рядів відповідно а) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n-1)^2$ і б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/(2n-1)$.

□ Задані функції є кусково-монотонні, тому можуть бути розвинені в ряди Фур'є.

а) Оскільки функція $f(x)$ парна (рис. 2.27), то, користуючись формулами (1) – (3), дістанемо:

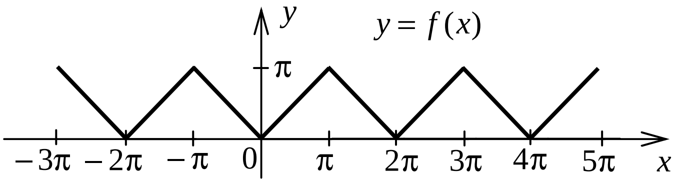

Рисунок 2.27

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \pi; \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin x}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2m,\ m = 1, 2, ...; \\ -\dfrac{4}{\pi(2m-1)^2}, & n = 2m-1,\ m = 1, 2, ...; \end{cases};$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}.$$

Ця рівність виконується на всій числовій осі, тому що задана функція неперервна для всіх дійсних значень x.

У точці неперервності $x = 0$ отримаємо:

$$f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 0}{(2m-1)^2}; \quad 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}.$$

Звідси $\sum_{m=1}^{\infty} 1/(2m-1)^2 = \pi^2/8$.

б) Функція $f(x)$ непарна (рис. 2.28). Згідно з формулами (4) і (5) маємо:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-1)\cdot\sin nx dx = \frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2m,\ m = 1, 2, ...; \\ -\dfrac{4}{\pi(2m-1)}, & n = 2m-1,\ m = 1, 2, ...; \end{cases};$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n}\sin nx = -\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}.$$

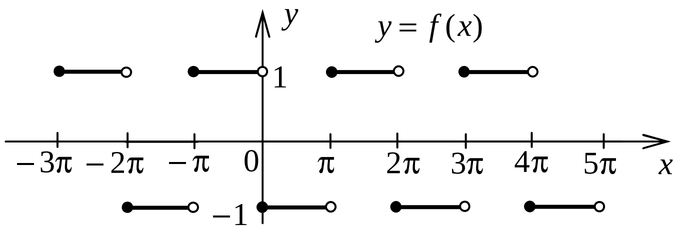

Рисунок 2.28

Ця рівність справедлива на всій числовій осі $x \in (-\infty; +\infty)$, крім точок розриву $x = \pi n$, $n \in Z$. У точках розриву $x = \pi n$, $n \in Z$ сума знайденого ряду синусів, очевидно, дорівнює нулю.

У точці неперервності $x = \pi/2$ дістанемо:

$$f(\pi/2) = -\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)(\pi/2)}{2m-1};\quad -1 = -\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m-1}.$$

Звідси $\quad \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}/(2m-1) = \pi/4$.

в) (Розв’язати самостійно). Відповідь:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(6 - \pi^2 n^2)}{n^3}\sin nx. \quad ■$$

2.5 Контрольні запитання

1. Наведіть означення функції n змінних та її області визначення.
2. Як знайти природну область визначення (область допустимих значень) функції багатьох змінних?
3. Дайте означення функції двох змінних та її області визначення. Який геометричний зміст цих понять? Наведіть приклади графіків функцій двох змінних.
4. Що називається лінією рівня функції двох змінних? Поверхнею рівня функції трьох змінних? Наведіть приклади ліній та поверхонь рівня.
5. Запишіть вирази для повного та частинних приростів функції $u = f(x, y, z)$ в точці M_0.
6. Наведіть означення частинних похідних функції багатьох змінних. У чому полягає геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних?
7. Як за правилами диференціювання функції однієї змінної знаходяться частинні похідні функції багатьох змінних?
8. Що таке частинні та повний диференціали функції змінних?
9. Сформулюйте необхідні та достатні умови диференційованості функції двох змінних.
10. У чому полягає інваріантність форми повного диференціала?
11. Як застосовується повний диференціал у наближених обчисленнях?
12. За якими формулами проводиться диференціювання складених функцій багатьох змінних? Запишіть формулу повної похідної.
13. За якими формулами проводиться диференціювання неявно заданих функцій однієї і двох змінних?
14. Дайте означення похідних вищих порядків.
15. Сформулюйте умови незалежності мішаної частинної похідної від порядку диференціювання.
16. Наведіть означення дотичної площини і нормальної прямої до поверхні.
17. Запишіть загальне рівняння дотичної площини і канонічні рівняння нормальної прямої до поверхні, що задана явно. Який вигляд набувають ці рівняння у випадку неявного задання поверхні?
18. У чому полягає геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних?

19. Дайте означення похідної за напрямом і градієнта функції трьох змінних.
20. Запишіть формули для обчислення похідної за напрямом і градієнта у прямокутних координатах.
21. Як зв'язані похідна за напрямом і градієнт, градієнт і вектор нормалі до поверхні рівня?
22. Запишіть формулу Тейлора для функції n змінних.
23. Наведіть означення точки локального мінімуму (максимуму) функції багатьох змінних.
24. Сформулюйте необхідні умови локального екстремуму.
25. Яка точка називається стаціонарною?
26. Сформулюйте достатні умови локального екстремуму функції двох змінних.
27. Як знаходяться найменше та найбільше значення функції двох змінних у замкненій області?
28. Що називається числовим рядом, частковою сумою, загальним членом, сумою, залишком ряду?
29. У чому полягає необхідна ознака збіжності та відповідна достатня ознака розбіжності ряду?
30. Сформулюйте властивості дій з рядами.
31. Який числовий ряд називається знакододатним?
32. У чому полягає інтегральна ознака Коші? Як оцінюються сума і залишок збіжного знакододатного ряду, спираючись на інтегральну ознаку?
33. При яких умовах збігаються і розбігаються найпоширеніші еталонні ряди – узагальнений гармонічний ряд і ряд геометричної прогресії?
34. Сформулюйте основну ознаку порівняння.
35. У чому полягає гранична ознака порівняння? Як треба підбирати відповідний еталонний ряд?
36. Сформулюйте ознаку Даламбера.
37. Коли краще застосовувати ознаку Даламбера, щоб не натрапити на випадок невизначеності?
38. У чому полягає радикальна ознака Коші?
39. Коли краще застосовувати радикальну ознаку, щоб не натрапити на випадок невизначеності?
40. Який числовий ряд називається знакозмінним?
41. Що таке знакопочерговий ряд (ряд Лейбниця)?
42. У чому полягає ознака Лейбниця збіжності знакопочергового

ряду?
43. Як оцінюються сума і залишок збіжного знакопочергового ряду, спираючись на ознаку Лейбниця?
44. Який знакозмінний ряд називається абсолютно збіжним? Умовно збіжним?
45. Сформулюйте достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду.
46. В якому порядку краще досліджувати знакозмінний ряд на абсолютну й умовну збіжність?
47. Що називається функціональним рядом? Що таке його точка збіжності і точка розбіжності? Область збіжності?
48. Який функціональний ряд називається абсолютно збіжним?
49. Що називається рівномірною нормою функції, яка неперервна на відрізку?
50. Що називається рівномірною відстанню між функціями, які неперервні на відрізку?
51. Який функціональний ряд називається рівномірно збіжним?
52. У чому полягає ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду?
53. Сформулюйте властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.
54. Який функціональний ряд називається степеневим?
55. У чому полягає теорема Абеля про збіжність степеневого ряду?
56. Що таке інтервал збіжності степеневого ряду? Чим область збіжності може відрізнятися від інтервалу збіжності?
57. Яким може бути радіус збіжності степеневого ряду?
58. Як досліджується збіжність степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності?
59. Сформулюйте властивості степеневих рядів.
60. Який вигляд мають ряди Тейлора і Маклорена?
61. У чому полягає теорема про єдиність розвинення функції в ряд Тейлора?
62. Сформулюйте теореми про умови існування й збіжності ряду Тейлора.
63. Які основні способи побудови розкладу функцій у ряди Тейлора і Маклорена?
64. Наведіть приклади застосування степеневих рядів до наближених обчислень значень функцій, визначених інтегралів і розв'язування диференціальних рівнянь.
65. Які недоліки розвинення функцій у степеневі ряди?

66. Що називається скалярним добутком функцій, які неперервні на відрізку?
67. Що називається евклідовою нормою функції, що неперервна на відрізку?
68. Що називається середньо квадратичною відстанню між функціями, які неперервні на відрізку?
69. Яка пара функцій називається ортогональною на відрізку?
70. Яка система функцій називається ортогональною на відрізку? Ортонормованою на ньому?
71. Що називається рядом Фур'є за тригонометричною системою функцій?
72. Як обчислюються коефіцієнти Фур'є для 2π-періодичної функції?
73. Сформулюйте теорему Діріхле, що виражає достатню ознаку розвинення функції в ряд Фур'є.
74. Яка функція називається кусково-монотонною на відрізку?
75. Як записується неповний ряд Фур'є для 2π-періодичної парної функції? Для 2π-періодичної непарної функції? За якими формулами обчислюються коефіцієнти Фур'є в цих випадках?

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов / А. М. Ахтямов. – М. : Физматлит, 2004. – 464 с.

2. Баврин И. И. Высшая математика / И. И. Баврин.– М. : Академия, 2005. – 616 с.

3. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2006. – 736 с.

4. Валєєв К. Г. Вища математика : у 2 ч. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – Київ : КНЕУ, 2001. –
Ч.1. – Київ : КНЕУ, 2001. – 546 с. Ч.2. – Київ : КНЕУ, 2002. – 451 с.

5. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – М. : АСТ : Астрель, 2010. – 703 с.

6. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : Ігнатекс – Україна, 2013. – 648 с.

7. Жильцов О. Б. Вища математика з елементами інформаційних технологій / О. Б. Жильцов, Г. М. Торбін. – Київ : МАУП, 2002. – 408 с.

8. Крицков Л. В. Высшая математика в вопросах и ответах : учебное пособие / Л. В. Крицков ; под ред. В. А. Ильин. – М. : Проспект,

2013. – 176 с.

9. Ильин В. А. Высшая математика / В. А. Ильин, А. В. Куркина. – М. : Проспект, 2012. – 608 с.

10. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1984. – 832 с.

11. Кулініч Г. Л. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. У 2 кн.; підручник / Г. Л. Кулініч, Л. О. Максименко, Є. Ю. Таран та ін.; Кулініч Г. Л., ред. –
Кн.1. Основні розділи / Г. Л. Кулініч, Л. О. Максименко, В. В. Плахотник, Г. Й. Призва. – Київ : Либідь, 1994. – 312 с.
Кн.2. Спеціальні розділи / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим, Л. Д. Гординський. – Київ: Либідь, 2003. – 368 с.

12. Лиман Ф. М. Вища математика / Ф. М. Лиман, В. Ф. Власенко, С. В. Петренко. – Суми : Університетська книга, 2012. – 614 с.

13. Міхайленко В. М. Збірник прикладних задач з вищої математики / В. М. Міхайленко, Н. Д. Федоренко. – Київ : Вид-во Європ. ун-ту, 2004. – 121 с.

14. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецьк : Сталкер, 2003. – 495 с.

15. Пантаев М. Ю. Матанализ с человеческим лицом, или как выжить после предельного перехода. Полный курс математического анализа: в 2 т. / М. Ю. Пантаев. – М. : Либроком, 2014 –
Т.2: Интеграл обыкновенный. Ряды и несобственные интегралы. Функции нескольких переменных. Функции комплексного переменного. Дифференциальные уравнения. – 2014. – 415 с.

16. Пастушенко С. М. Вища математика : довідник / С. М. Пастушенко, Ю. П. Підченко. – Київ : Діал, 2003. – 461 с.

17. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 2011. Т.1. − 430 с.; Т.2. − 580 с.

18. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський. – Харків : ХНАМГ, 2005. – 270 с.

19. Травкін Ю. І. Математика для економістів / Ю. І. Травкін, Л. М. Малярець. – Харків : ВД «ІНЖЕК», 2005. – 816 с.

20. Черняк А. А. Высшая математика на базе Mathcad / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк, Ю. А. Доманова. – СПб. : БХВ–Петербург, 2004. – 593 с.

21. Щипачев В. С. Высшая математика. Полный курс / В. С. Щипачев ; под ред. А. Н. Тихонова. – М. : Юрайт, 2013. – 607 с.

Навчальне видання

КОЛОСОВ Анатолій Іванович,
ЯКУНІН Анатолій Вікторович

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

у двох модулях

Модуль 2

Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Функції багатьох змінних. Ряди

(*для студентів денної форми навчання освітнього рівня бакалавр спеціальності 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології*)

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *А. В. Якунін*

План 2017, поз. 109 Л

Підп. до друку 29.05.2017 р.	Формат 60×84 1/16
Друк на ризографі	Ум. друк. арк. 13,5
Зам. №	Тираж 100 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017 р.