

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА ІМЕНІ О.М.БЕКЕТОВА

Методичні вказівки до проведення
практичних занять та самостійної роботи
з дисципліни

«ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ»

*(для студентів усіх форм навчання за напрямками підготовки
6.030504 – Економіка підприємства та 6.030509 – Облік і аудит)*

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2017

Методичні вказівки до проведення практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «Оптимізаційні метод та моделі» (для студентів всіх форм навчання за напрямами підготовки 6.030504 – Економіка підприємства та 6.030509 – Облік і аудит) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. : В. О. Єсіна. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 23 с.

Укладач: В. О. Єсіна

Рецензент: канд. екон. наук, доц. Н. М. Матвєєва

Рекомендовано кафедрою економіки підприємств, бізнес-адміністрування та регіонального розвитку, протокол № 1 від 27. 08. 2016 р.

ЗМІСТ

	Стор.
ВСТУП.....	4
1 Мета та завдання навчальної дисципліни.....	5
2 Інформаційний обсяг навчальної дисципліни.....	6
3 Структура навчальної дисципліни.....	8
4 Перелік питань, що охоплюють практичні заняття та самостійну роботу.....	10
5 Завдання для практичних занять та самостійної роботи.....	11
Перелік рекомендованої літератури.....	21

ВСТУП

Сучасний етап розвитку нашої держави зумовлює високі вимоги до оцінки ефективності функціонування економічних систем різних рівнів. Але основна увага приділяється саме підприємству як первинній, основній, самостійній ланці народного господарства, що створює конкретні економічні блага, а отже, є першоосновою національного багатства України.

До економічних завдань оптимізаційного типу відносяться завдання, в яких потрібно знайти найкраще або оптимальне рішення при заданих умовах виробництва. Такі завдання називаються завданнями на максимум або мінімум. Особливістю завдань оптимізаційного типу є багатоваріантність їх рішень, обумовлена наступними причинами: взаємозамінністю ресурсів; взаємозамінністю готових видів продукції; існуванням альтернативних технологій виробництва; неоднаковістю техніко-економічних показників навіть однотипних господарських суб'єктів.

Основним методом розрахунку та моделювання економічних систем та розв'язання задач із великою кількістю невідомих є лінійне програмування.

Лінійне програмування – це назва, дана комбінації інструментів використовуваних у науці про управління. Цей метод вирішує проблему розподілу обмежених ресурсів між конкуруючими видами діяльності з тим, щоб максимізувати або мінімізувати деякі чисельні величини, такі як маржинальний прибуток або витрати. У бізнесі він може використовуватися в таких областях як планування виробництва для максимального збільшення прибутку, підбір комплектуючих для мінімізації витрат, вибір портфеля інвестицій для максимізації прибутковості, оптимізація перевезень товарів з метою скорочення відстаней, розподіл персоналу з метою максимально збільшити ефективність роботи і складання графіка робіт у цілях економії часу.

1 МЕТА ТА ЗАВДАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Мета викладання навчальної дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» полягає у оволодінні теоретичними знаннями й набутті практичних навичок використання математичного апарату для побудови оптимізаційних моделей показників діяльності підприємства.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі» є застосовувати теоретико-методологічні основи оптимізаційних моделей; володіти основними аспектами побудови математичних моделей; володіти методикою застосування оптимізаційних методів та розрахунку математичних моделей; набуття вмінь застосовувати методи оптимізації в економічних процесах; вміння застосовувати набуті знання з оптимізаційних методів та моделей у професійній діяльності для розрахунку можливих варіантів розвитку економічних процесів.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти повинні:

знати: сутність, предмет і завдання дисципліни «Оптимізаційні методи і моделі»; роль і місце застосування математичного програмування в економіці; знати методики та методологію побудови оптимізаційних моделей; знати економічну сутність побудови оптимізаційних моделей.

вміти: розраховувати показники поточних планів діяльності підприємства і його підрозділів; обґрунтовувати проекти розвитку підприємства на підставі розроблення бізнес-плану; здійснювати ресурсне обґрунтування розроблених планів діяльності підприємства; проводити різні види контролю за діяльністю виконання запланованих етапів в діяльності підприємства.

мати компетентності: застосовувати методи оптимізації в економічних процесах; застосовувати набуті знання з оптимізаційних методів та моделей у професійній діяльності для розрахунку можливих варіантів розвитку економічних процесів.

2 ІНФОРМАЦІЙНИЙ ОБСЯГ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Змістовий модуль 1* *Поняття та побудова оптимізаційних економіко-математичних моделей

Тема 1. Предмет, завдання та методологічні засади курсу. Задачі економічного вибору.

Коротка характеристика методів математичного програмування. Використання оптимізаційних методів та моделей в економічній діяльності підприємства.

Тема 2. Задачі математичного і лінійного програмування. Моделі лінійного програмування.

Класифікація задач математичного програмування. Загальна задача лінійного програмування. Основні теореми лінійного програмування

Тема 3. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.

Зміст розв'язання ЗЛП графічним методом. Графічний метод розв'язання ЗЛП з двома змінними. Графічний метод розв'язання ЗЛП з n -вимірною простору

Тема 4. Теорія двоїстості та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач.

Економічний зміст двоїстої задачі на задачі про використання ресурсів. Симетричні двоїсті задачі: структура, властивості. Несиметричні двоїсті задачі (на 1-й стандартній формі ЗЛП). Загальні правила складання двоїстих задач. Співвідношення між формами і розв'язками двоїстих задач (основні теореми теорії).

Тема 5. Симплексний метод розв'язання задач лінійного програмування.

Алгоритм симплексного методу. Симплексний метод з використанням штучних невідомих або M -задача.

Тема 6. Симплекс-таблиці для розв'язання задач лінійного програмування.

Методи побудови компромісних планів. Модель оптимального завантаження механізмів. Модель оптимізації виробництва та збереження продукції.

Змістовий модуль 2* *Розрахунок задач лінійного та нелінійного програмування

Тема 7. Економічна і математична постановка транспортної задачі.

Постановка транспортної задачі (економічний зміст та математична модель). Умова розв'язування T -задачі. Ранг транспортної задачі. Методи

знаходження початкового опорного плану Т-задачі: а) діагональний (північно-західного кута); б) найменшого елемента (найменшої вартості).

Тема 8. Цілочислові задачі лінійного програмування. Метод Гоморі.

Постановка задачі цілочислового програмування. Методи розв'язування ЗЦП. Поняття цілої та дробової частин числа. Метод Гоморрі знаходження цілочислового розв'язку задачі лінійного програмування.

Тема 9. Моделі споживчого вибору. Оптимізація функцій корисності.

Теоретична сутність споживчого вибору. Гранична корисність.

Тема 10. Основні характеристики та типи виробничих функцій.

Виробнича функція як особливий вид економіко-статистичних моделей. Двофакторні виробничі функції.

Тема 11. Динамічне програмування.

Економічна сутність динамічного програмування. Основні типи задач та моделі динамічного програмування. Задачі про заміну основного капіталу обладнання підприємства. Багатокроковий процес

Тема 12. Теорія ігор

Основні поняття теорії ігор і класифікація задач. Оптимальний розв'язок в іграх двох осіб з нульовою сумою. Зведення задач теорії ігор до задач лінійного програмування.

3 СТРУКТУРА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Змістові модулі та теми	Кількість годин									
	денна форма					заочна форма				
	усього	у тому числі				усього	у тому числі			
		лек	лаб	пр	срс		лек	лаб	пр	срс
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
МОДУЛЬ 1. Оптимізаційні методи та моделі										
Змістовий модуль 1. Поняття та побудова оптимізаційних економіко-математичних моделей										
Тема 1.	7	1	-	2	4	8	0,5	-	0,5	7
Тема 2.	8	1	-	3	4	8	0,5	-	0,5	7
Тема 3.	8	1	-	3	4	8	0,5	-	0,5	7
Тема 4.	8	1	-	3	4	9	0,5	-	0,5	8
Тема 5.	10	2	-	3	5	9	0,5	-	0,5	8
Тема 6.	10	2	-	3	5	9	0,5	-	0,5	8
Разом за ЗМ 1	51	8	-	17	26	51	3	-	3	45
Змістовий модуль 2. Розрахунок задач лінійного та нелінійного програмування										
Тема 7.	7	1	-	2	4	8	0,5	-	0,5	7
Тема 8.	8	1	-	3	4	8	0,5	-	0,5	7
Тема 9.	8	1	-	3	4	8	0,5	-	0,5	7
Тема 10.	9	2	-	3	4	9	0,5	-	0,5	8
Тема 11.	9	2	-	3	4	9	0,5	-	0,5	8
Тема 12.	10	2	-	3	5	9	0,5	-	0,5	8
Разом за ЗМ 2	51	9	-	17	25	51	3	-	3	45
ІЗ РГЗ «Оптимізаційні методи та моделі»	18	-	-	-	18	18	-	-	-	18
Разом за дисципліною	120	17	-	34	69	120	6	-	6	108

4 ПЕРЕЛІК ПИТАНЬ, ЩО ОХОПЛЮЮТЬ ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ ТА САМОСТІЙНУ РОБОТУ

1. Принципи моделювання соціально-економічних систем і процесів.
2. Сутність економіко-математичної моделі.
3. Необхідність використання математичного моделювання економічних процесів.
4. Етапи математичного моделювання.
5. Сутність адекватності економіко-математичних моделей.
6. Проблеми оцінювання адекватності моделі.
7. Способи перевірки адекватності економіко-математичних моделей.
8. Поняття адаптації та адаптивних систем.
9. Сутність оптимізаційних моделей. Приклади економічних задач математичного програмування.
10. Загальна постановка задачі лінійного програмування. Приклади економічних задач лінійного програмування.
11. Модель задачі лінійного програмування в розгорнутому і скороченому вигляді, а також в матричній і векторній формах.
12. Властивості розв'язків задачі лінійного програмування. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування.
13. Означення планів задачі лінійного програмування (допустимий, опорний, оптимальний).
14. Побудова опорного плану задачі лінійного програмування, перехід до іншого опорного плану.
15. Теорема про оптимальність розв'язку задачі лінійного програмування симплекс-методом.
16. Знаходження розв'язку задачі лінійного програмування. Алгоритм симплексного методу.
17. Симплексний метод із штучним базисом. Ознака оптимальності плану із штучним базисом.
18. Двоїста задача. Правила побудови двоїстої задачі. Симетричні й несиметричні двоїсті задачі.
19. Економічний зміст двоїстої задачі й двоїстих оцінок.
20. Теорема двоїстості, їх економічна інтерпретація.
21. Застосування теорем двоїстості в розв'язуванні задач лінійного програмування.

22. Аналіз рішення лінійних економіко-математичних моделей. Оцінка рентабельності продукції. Доцільність введення нової продукції.
23. Аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів.
24. Аналіз коефіцієнтів цільової функції задач лінійного програмування.
25. Цілочислове програмування. Область застосування цілочислових задач в плануванні й управлінні виробництвом.
26. Геометрична інтерпретація задачі цілочислового програмування.
27. Метод Гоморі.
28. Постановка задачі нелінійного програмування, математична модель. Геометрична інтерпретація.
29. Графічний метод розв'язування задач нелінійного програмування.
30. Метод множників Лагранжа. Теорема Лагранжа. Алгоритм розв'язування задачі на безумовний екстремум.
31. Поняття про опуклі функції. Геометрична інтерпретація задачі опуклого програмування на площині.
32. Сідлова точка та необхідні і достатні умови її існування. Теорема Куна-Таккера.
33. Квадратична функція та її властивості.
34. Постановка задачі квадратичного програмування та її математична модель.
35. Градієнтні методи розв'язання задач нелінійного програмування та їх класифікація.
36. Метод Франка-Вульфа. Алгоритм розв'язування задачі нелінійного програмування.
37. Математична постановка задачі динамічного програмування, її економічний зміст. Принцип оптимальності Беллмана.
38. Основні рекурентні співвідношення розв'язування задач динамічного програмування.
39. Методи розв'язування задач динамічного програмування. Основні кроки алгоритму розв'язування задачі динамічного програмування.
40. Основні поняття теорії ігор. Гра двох гравців з нульовою сумою, правила гри, ціна гри, пара оптимальних стратегій для двох осіб.
41. Платіжна матриця. Основна теорема теорії ігор. Принцип мінімаксу.
42. Гра в чистих стратегіях. Поняття сідлової точки і її знаходження.
43. Гра 2x2 в змішаних стратегіях. Алгоритм розв'язування задачі.
44. Зведення гри двох осіб до задачі лінійного програмування.

5 ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Змістовий модуль 1. Поняття та побудова оптимізаційних економіко-математичних моделей

1. Вирішити систему рівнянь методом Гауса

а)
$$\begin{cases} 3x + 6y + 4z = 5 \\ x + 5y + 3z = 2 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 3 \\ 3x + 2y + 4z = -4 \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 3 \\ 3x + 2y + 4z = -4 \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} 5x + 2y + 4z = -8 \\ 6x + 4y + 5z = -5 \\ 3x + 2y + 4z = -4 \end{cases}$$

д)
$$\begin{cases} 3x + 2y + 3z = -3 \\ 4x + 3y + 2z = -1 \\ 2x + y + 4z = -5 \end{cases}$$

є)
$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

ж)
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 4x_3 = -11 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

з)
$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

2. Вирішити систему рівнянь методом Крамера

$$а) \begin{cases} 4x + 3y + 2z = 11 \\ 2x + 5y + z = -5 \\ 5x + 4y + 2z = 12 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x + 6y + 4z = 5 \\ x + 5y + 3z = 2 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 4x + 3y + 2z = 11 \\ 2x + 5y + z = -5 \\ 5x + 4y + 2z = 12 \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 3 \\ 3x + 2y + 4z = -4 \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} x + 3y + 3z = 4 \\ 2x + 4y + z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 6 \end{cases}$$

3. Побудувати розгорнуту економіко-математичну модель наступного завдання. Найбільш ефективним для господарства є вирощування трьох культур: озимої пшениці, проса, гречки. Очікуваний рівень врожайності цих культур, собівартість центнера продукції, норми внесення добрив і витрати праці в розрахунку на одиницю продукції, наведені у відповідності з очікуваним рівнем урожайності, задані таблицею. Відомі і найбільш ймовірні ціни фактичної реалізації центнера продукції.

Показники	Назва культур		
	Озима пшениця	просо	гречка
Урожайність, ц / га	30,0	18,0	15,0
Витрати праці, люд.-год / га	40	50	45
Витрати добрив, ц д.р. / га	0,8	0,6	1,0
Собівартість, грн / ц	6,0	7,0	11,0
Ціна реалізації, грн / ц	11,6	8,0	30,0

Критерій оптимальності – максимум прибутку від реалізації даних видів продукції.

4. На виготовлення двох видів продукції (P_1 і P_2) витрачаються три види ресурсів A_1, A_2, A_3 . Наявність ресурсів дорівнює відповідно: 361, 520, 248.

Витрати ресурсів на одиницю продукції P_1 становлять відповідно: 13, 7, 17; на одиницю продукції P_2 - 16, 4, 9. Ціна за одиницю продукції дорівнює відповідно: 11, 8. Побудувати модель лінійного програмування початкової й двоїстої задач. Знайти такий план виробництва, який би забезпечував найбільшу виручку.

5. Побудувати розгорнуту економіко-математичну модель наступного завдання. У господарстві найбільш ефективним є вирощування трьох озимих зернових культур: озимої пшениці, жита і ячменю. Для їх виробництва виділено 1200 га ріллі, 2000 ц д.р. добрив і 102000 люд.-год трудових ресурсів. Вся вихідна інформація представлена в таблиці. Знайти оптимальний розподіл ресурсів під культури для досягнення максимального обсягу їх валового виробництва. Причому ячменю слід виконувати не менше 1000 ц.

Показники	Назва культур		
	Озима пшениця	Озима пшениця	Ячмень
Урожайність, ц / га	30,0	20,0	20,0
Витрати праці, люд.-год / га	40	50	50
Витрати добрив, ц д.р. / га	1,0	1,0	1,0
Собівартість, грн / ц	11,6	13,0	11,6
Ціна реалізації, грн / ц			

6. Компанія спеціалізується на випуску хокейних ключок і наборів шахів. Кожна ключка приносить компанії прибуток в розмірі \$ 2, а кожен шаховий набір - в розмірі \$ 4. На виготовлення однієї ключки потрібно чотири години роботи на ділянці А і дві години роботи на ділянці Б. Шаховий набір виготовляється з витратами шести годин на ділянці А, шести годин на ділянці В і однієї години на ділянці С. Доступна виробнича потужність ділянки А становить 120 н-години в день, ділянки В – 72 н-години і ділянки С – 10 н-годин. Скільки ключок і шахових наборів повинна випускати компанія щодня, щоб отримувати максимальний прибуток? Необхідно розробити економіко-правову модель задачі. Вся вихідна інформація надана в таблиці.

Виробнича дільниця	Витрати часу на одиницю продукції, н-години		Доступний фонд часу, н-години
	ключки	Набори шахів	
А	4	6	120
В	2	6	72
С	-	1	10
Прибуток на одиницю продукції, \$	2	4	

7. Побудувати розгорнуту економіко-математичну модель для розрахунку оптимального раціону для дійної корови живою масою 450 кг, середньодобовим удоєм кг 8,0, жирністю молока 3,95%.

У господарстві є горох, овес, ячмінь, сіно природних і багаторічних трав, трав'яна мука багаторічних трав. Солома, сінаж однорічних трав, силос кукурудзяний, кормовий буряк. Характеристика кормів (вміст поживних речовин і їх собівартість) задані таблицею.

Оптимальний раціон корови повинен бути збалансований по кормових одиницях, перетравного протеїну і каротину. Добова потреба корови в кормових одиницях – 8,61 кг корм. одиниць, одиниць, перетравного протеїну – 929,31 г, каротин – 358,3 мг.

Вид корма	Кормові одиниці, кг	Перетравний протеїн, г	Каротин, мг	Собівартість, грн
Горох	1,14	159	1	8,9
Овес	1,00	83	-	7,9
Ячмінь	1,09	89	1	7,8
Сіно природних трав	0,37	37	16	2,9
Сіно багаторічних трав	0,46	83	45	2,86
Трав'яна мука	0,65	118	128	9,2
Солома	0,10	10	3	0,7
Сінаж однорічних трав	0,3	42	34	2,17
Силос кукурудзяний	0,16	12	10	1,53
Кормовий буряк	0,11	8	-	2,3

8. Розв'язати задачу лінійного програмування за допомогою графічного методу:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$a) \quad \Omega: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 13, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$y(\bar{x}) = x_1 + x_2 \rightarrow \max_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$b) \quad \Omega: \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$y(\bar{x}) = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max_{\bar{x} \in \Omega},$$

$$в) \quad \Omega: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 19, \\ 4x_1 + x_2 \leq 22, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$г) Z = x_1 - 2x_2 \quad (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 0, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$д) Z = x_1 + 3x_2 \quad (\max)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

9. Знайти розв'язок наступних задач лінійного програмування шляхом графічного розв'язування двоїстої задачі й застосування теорем двоїстості:

$$а) Z = 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 16 (\max)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16 \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 4.$$

$$б) Z = 3x_1 + x_2 + x_3 (\max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}$$

10. Для плану $\bar{X} = (3, 0, 1, 3)$ визначити, чи він є оптимальним для наступних задач (застосовуючи теорему двоїстості й не розв'язуючи задачі симплексним методом):

$$а) Z = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 (\max)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$$

$$\text{б) } Z = 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4 \text{ (max)}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 \leq 15 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \geq -4 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$$

11. Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс-методом:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\text{а) } \Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - 2x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

б)

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max_{\bar{x} \in \Omega}$$

$$\Omega: \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

в)

12. Скласти двоїсту задачу, та розв'язати цю проблему симплекс-методом, за рішенням двоїстої задачу знайти рішення вихідного завдання.

$$\text{max: } Z(X) = x_1 + 2x_2,$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 12,$$

$$x_1 + x_2 \leq 14,$$

$$-3x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$x_1 - x_2 \geq 2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

13. Розв'язати задачу графічним методом та визначити двоїсту оцінку для ресурсу – час роботи шліфувального верстату.

Фірма спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема випускає дві моделі збірних книжкових полиць: A та B . Полиці обох моделей обробляють на двох верстатах: шліфувальному та полірувальному. Тривалість обробки у хвилинах однієї полиці кожної моделі відома:

Тип верстату	Тривалість обробки однієї полиці, хв.	
	A	B
Шліфувальний	15	40
Полірувальний	50	30

Час роботи обох верстатів обмежений і становить: для шліфувального 600 хв., для полірувального – 900 хв. на тиждень. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на книжкові полиці обох типів не перевищує 20 одиниць. Прибуток фірми від реалізації однієї полиці моделі A становить 300 грн., а моделі B – 400 грн. Визначити обсяги виробництва книжкових полиць різних моделей, що максимізують прибуток фірми.

14. Знайти розв'язок наступних задач лінійного програмування шляхом графічного розв'язування двоїстої задачі й застосування теорем двоїстості:

а) $Z = 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 16(\max)$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16 \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}.$$

б) $Z = 3x_1 + x_2 + x_3 (\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}.$$

Змістовий модуль 2 Розрахунок задач лінійного та нелінійного програмування

1. Знайти мінімум функції $y(\bar{x})$ за допомогою методу Лагранжа:

$$y(\bar{x}) = x_2^2 + 2x_1x_3 - x_1 \rightarrow \min_{\bar{x} \in \Omega},$$

а) $\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 8 = 0; \\ f_2 = x_2 - x_3 - 4 = 0. \end{cases}$

б) $y(\bar{x}) = \frac{3}{x_1^2} + \frac{3}{x_2^2} + 6x_3 \rightarrow \min_{\bar{x} \in \Omega},$

$\Omega: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0.$

в) $y(\bar{x}) = x_1x_2x_3 \rightarrow \min_{\bar{x} \in \Omega},$

$\Omega: f_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0.$

2. Розв'язати наступну задачу: компанія контролює три фабрики A_1, A_2, A_3 , здатні виготовляти 150, 60 та 80 тис. од. продукції щотижня. Компанія уклала договір з чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, B_4 , яким потрібно щотижня відповідно 110, 40, 60 та 80 тис. од. продукції. Вартість виробництва та транспортування 1000 од. продукції замовниками з кожної фабрики наведено в таблиці.

Фабрика	Вартість виробництва і транспортування 1000 од. продукції за замовниками			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити для кожної фабрики оптимальний план перевезення продукції до замовників, що мінімізує загальну вартість виробництва і транспортних послуг.

3. На основі умовно-оптимального плану цілочисельної задачі побудувати допоміжне обмеження Гоморі, приєднати його до умовно-оптимального плану, показаного у наведеній нижче таблиці, і знайти цілі значення змінних задачі лінійного програмування.

а)

I	Базис	C_b	A_0	-4	1	2	0	3
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	X_1	-4	$7/2$	1	$-5/2$	0	$5/2$	$-3/2$
2	X_3	2	$5/2$	0	$1/2$	1	$31/2$	$11/2$
$Z_j - C_j \geq 0$			-9	0	10	0	21	14

б)

I	Базис	C _б	A ₀	1	-1	3	4	2
				A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
1	X ₁	1	14/3	1	-2/3	0	5/3	1/3
2	X ₃	3	11/3	0	1/3	1	7/3	1
Z _j - C _j ≥ 0			47/3	0	4/3	0	14/3	11/3

4. Користуючись теоремою Куна-Таккера, скласти функцію Лагранжа та записати необхідні і достатні умови існування сідлової точки наступної задачі нелінійного програмування:

$$Z = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$2x_1 - x_2 \leq 12$$

$$x_{1,2} \geq 0$$

5. Розв'язати градієнтним методом наступну задачу нелінійного програмування, почавши процес з точки $x^0(2,3)$:

$$Z = 10 - 2x_1 + x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \text{ (max)}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 18 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

6. Розв'язати графічним методом наступну задачу дробово-лінійного програмування:

$$Z = \frac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \rightarrow \max(\min)$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16; \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ x_1 + 3x_2 \geq 9; \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

7. В приведеній нижче таблиці (табл.1) містяться величини можливого збільшення продукції чотирьох нафтопереробних заводів при здійсненні додаткових капіталовкладень на їх реконструкцію та модернізацію.

Таблиця 1

Капіталовкладення, тис. грн	Збільшення виробництва $R_j(s)$ продукції, млн. грн. заводи			
	1	2	3	4
s				
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

У таблиці 2 рамкою виділені умовні оптимальні розв'язки усіх кроків розв'язування наведеної динамічної задачі. Запишіть одержаний план інвестування заводів. На скільки він збільшує виробництво продукції?

Таблиця 2

s	$j=4$		$j=3$		$j=2$		$j=1$	
	$x_4(s)$	$F_4(s)$	$x_3(s)$	$F_3(s)$	$x_2(s)$	$F_2(s)$	$x_1(s)$	$F_1(s)$
50	50	28	50	36	0	36		
100	100	56	50	64	100	70		
150	150	110	0	110	0	110		
200	200	142	50	146	0	146	0	146

8. Дві конкуруючі фірми (гравці) реалізують на ринку продукцію, котра швидко псується. Кожний з гравців прагне зайняти по два сегмента ринку (має дві стратегії). Відомі прибуток (виграш) або збиток (програш) для кожного гравця і кожного сегмента ринку, які наведені в платіжній матриці C . Розв'язати гру, знайти пару оптимальних стратегій і ціну гри.

$$\text{а) } C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{б) } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{в) } C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{г) } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Абрамов Л. М. Математическое программирование / Л. М. Абрамов, В. Ф. Капустин. – Л. : Изд-во Ленинград. ун-та, 1976. – 184 с.
2. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. – М. : Высш. шк., 1985. – 172 с.
3. Линейное программирование / С. А. Ашманов. – М. : Наука, 1981. – 150 с.
4. Белман Р. Динамическое программирование / Р. Белман. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1960. – 160 с.
5. Белман Р. Прикладные задачи динамического программирования / Р. Белман, С. Дрейфус. – М. : Наука, 1965. – 160 с.
6. Економіко-математичне моделювання: навч. посібник / [В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний та ін.]. – Київ : КНЕУ, 2008. – 536 с.
7. Вітлінський В. В. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком: навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / В. В. Вітлінський, П. І. Верченко. – Київ : КНЕУ, 2000. – 292 с.
8. Гольштейн Е. Г. Задачи линейного программирования транспортного типа. / Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин. – М. : Наука, 1969. – 98 с.
9. Дзюбан І. Ю. Методи дослідження операцій. / І. Ю. Дзюбан, О. Л. Жиров, М. Г. Охріменко. – Київ : «Політехніка», 2005. – 160 с.
10. Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов / [Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман] ; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
11. Назаренко О. М. Основы эконометрики: підручник / О. М. Назаренко. – Київ : «Центр навчальної літератури», 2004. – 392 с.
12. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: підручник. – 4-те вид., перероб. і допов. / Ю. П. Зайченко. – Київ : «Центр навчальної літератури», 2000. – 688 с.
13. Калихман И. Л. Динамическое программирование в примерах и задачах. / И. Л. Калихман, М. А. Войтенко. – М. : Высш. шк., 1973. – 86 с.
14. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – М. : Высш. школа, 1980. – 300 с.
15. Калихман И. Л. Динамическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Калихман, М. А. Войтенко. – М. : Высш. шк., 1973. – 120 с.

16. Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов : Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. / [Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман]. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 407 с.

17. Наконечний С. І. Збірник задач з курсу «Математичне програмування». Частина 1.: навч. посібник / С. І. Наконечний, Л. В. Гвоздецька. – Київ : ІСОД, 1996. – 128 с.

18. Математичне програмування: навч. посібник / Т. П. Романюк, Т. О. Терещенко, Г. В. Присенко, І. М. Городкова. – Київ : ІЗМН, 1996. – 312 с.

19. Сакович В. А. Исследование операций / В. А. Сакович. – Минск : Высшая школа, 1985. – 188 с.

20. Турунтаев Л. П. Теория принятия решений: учеб. пособие / Л. П. Турунтаев. – Томск : ТУСУР, 2002. – 206 с.

21. Яворский В. В. Оптимизация и математические методы принятия решений: учебное пособие для вузов / В. В. Яворський. – Томск : ТУСУР, 2006. – 234 с.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до проведення практичних занять та самостійної роботи
з дисципліни

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

*(для студентів усіх форм навчання за напрямками підготовки
6.030504 – Економіка підприємства та 6.030509 – Облік і аудит)*

Укладач: ЄСІНА Валерія Олександрівна

Відповідальний за випуск : *О. В. Димченко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання: *І. В. Волосожарова*

План 2013, поз. 273М

Підп. до друку 30. 10. 2013
Друк на ризографі.
Зам. №

Формат 60x84/16
Ум. друк. арк. 0,6
Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.