

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять, самостійної роботи,
виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань
з курсу

«БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА СПЕЦКУРС»

ЧАСТИНА 2

*(для студентів 4 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів
за напрямом 6.060101 - Будівництво)*

Методичні вказівки до практичних занять, самостійної роботи, виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань з курсу «Будівельна механіка. Спецкурс», частина 2 (для студентів 4 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.060101 - Будівництво) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. М. А. Засядько. – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 63 с.

Укладач М. А. Засядько

Рецензент канд. техн. наук, доц. О. О. Чупринін

*Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки,
протокол № 4 від 27.11.16 р.*

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1 ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ ТА САМОСТІЙНА РОБОТА.....	4
1.1 Розрахунок на рухоме навантаження.....	4
1.2 Стійкість стержневих систем.....	16
1.3 Динаміка стержневих систем.....	31
РОЗДІЛ 2 РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ.....	42
2.1 Розрахунок рами на стійкість методом переміщень.....	42
2.2 Розрахунок рами на динамічні навантаження.....	48
РОЗДІЛ 3 МАТЕРІАЛИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ ТА САМОСТІЙНИХ РОБІТ.....	54
3.1 Розрахунок на рухоме навантаження	54
3.2 Стійкість стержневих систем	58
3.3 Динамічний розрахунок рам.....	60
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	62

РОЗДІЛ 1 ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ ТА САМОСТІЙНА РОБОТА

1.1 Розрахунок на рухоме навантаження

Теоретичний матеріал та питання для самоперевірки наведені у розділі 1 [3], гл. 4, 5, 6, 10, п.п 7.2, 8.3 [6] та ін.

Вправи

- 1 Яка різниця між епюрою моментів (рис. 1.1, а) та лінією впливу згинаючого моменту в перерізі 1 (рис. 1.1, б).

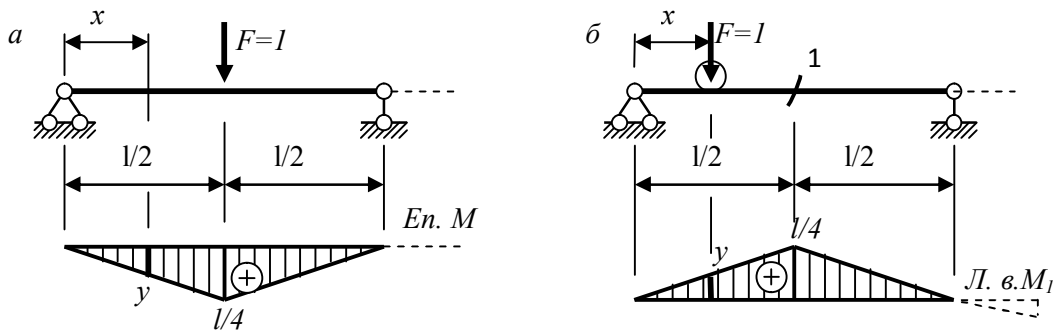


Рисунок 1.1

Розв'язання. За зовнішнім виглядом епюра згинаючих моментів від одиничної сили у середині прогону та лінія впливу згинаючого моменту у перерізі посередині прогону однакові, але різні за суттю. Дійсно, ордината y на епюрі моментів (рис. 1.1, а) являє собою значення згинаючого моменту у перерізі балки на відстані x від дії одиничної сили у середині прогону, в той час як така ордината на лінії впливу (рис. 1.1, б) є значенням згинаючого моменту у перерізі 1 при розташуванні одиничної сили на відстані x . При наявності правої консолі (штрихова лінія на рис. 1.1, а) епюра згинаючих моментів відсутня, а лінія впливу (штрихова лінія на рис. 1.1, б) має ненульові ординати.

2. За допомогою ліній впливу визначити опорні реакції та згинаючий момент і поперечну силу у перерізі 1 (рис. 1.2) від заданого навантаження.

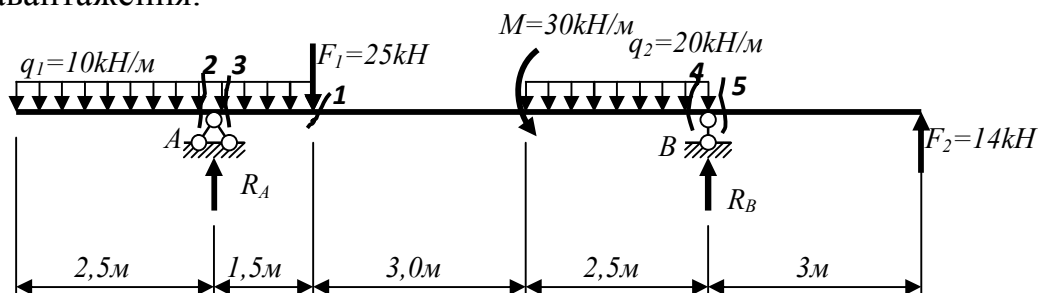


Рисунок 1.2

Розв'язання. Для побудови ліній впливу опорних реакцій скористаємося такими їх властивостями: лінія впливу реакції балки на двох опорах є пряма, що проходить через ординату 1 під тією опорою, де діє ця реакція та нуль під протилежною опорою. Отже, лінією впливу реакції R_A буде пряма, що має ординату 1 під опорою A і проходить через нуль під опорою B (рис. 1.3, *a*). Аналогічно на рисунку 1.3, *б* побудована лінія впливу R_B .

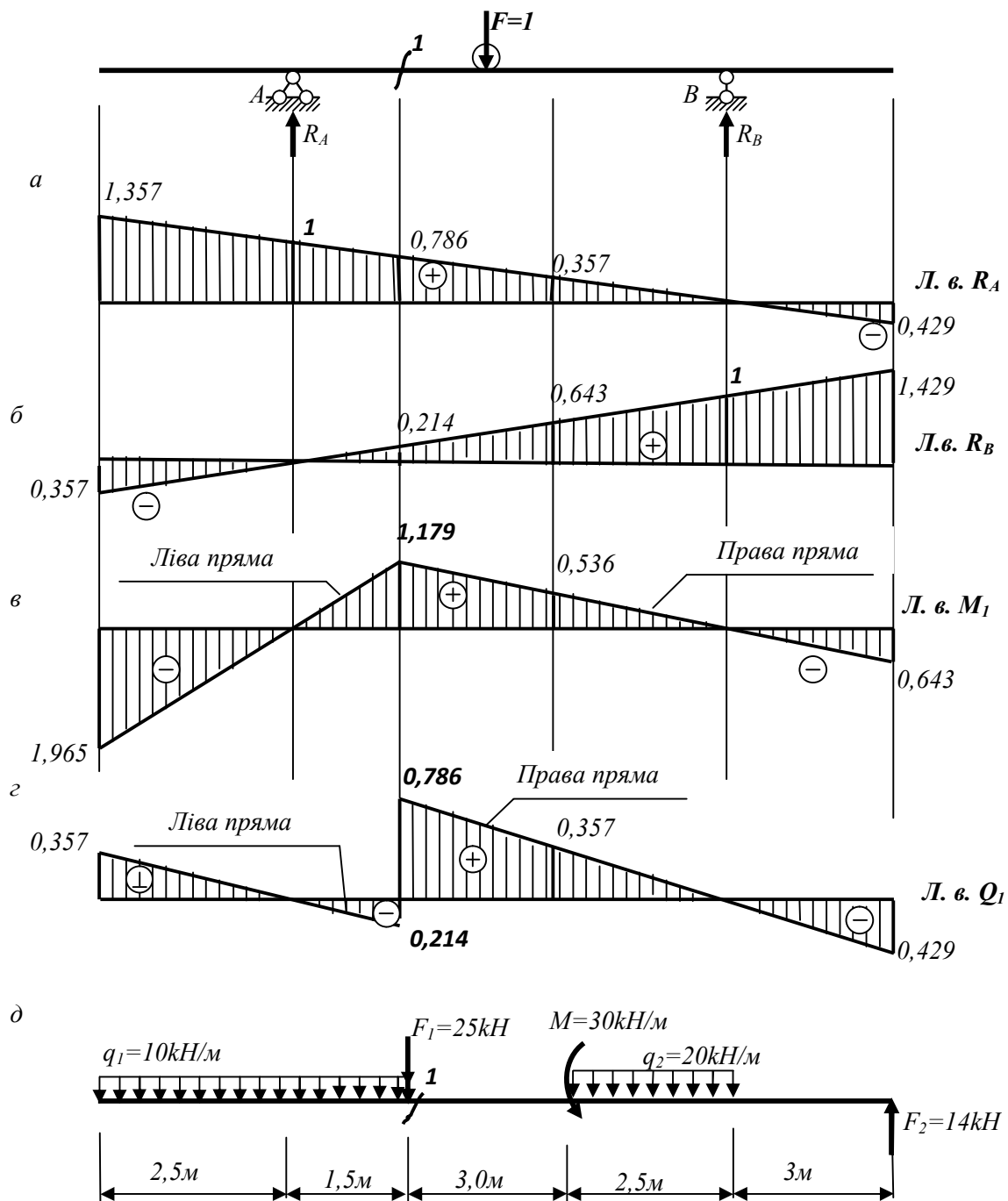


Рисунок 1.3

Як відомо, лінія впливу згинаючого моменту у перерізі, що розташований у прогоні балки на двох опорах складається з двох прямих – лівої та правої, які перетинаються під перерізом, маючи загальну ординату ab/l (a та b – відстані до перерізу відповідно від лівої та правої опор). При цьому кожна з прямих проходить через нуль під відповідною опорою. Для перерізу 1 маємо: $ab/l = 1,5 \cdot 5,5 / 7 = 1,179$. Ця ордината відкладається під перерізом 1 (напівжирне значення на рис. 1.3, в), далі через неї та нуль під опорою A проведено ліву пряму, через нуль під опорою B – праву пряму.

Лінія впливу поперечної сили у перерізі, що розташований у прогоні балки на двох опорах складається з двох паралельних прямих – лівої та правої, кожна з яких проходить через нуль під відповідною опорою. Під перерізом ліва пряма має ординату $-a/l$, права – b/l . Для розглянутої балки $-a/l = -1,5/7 = -0,214$, $b/l = 0,786$ і відповідна лінія впливу показана на рисунку 1.3, з.

Визначення зусиль від заданого навантаження (рис. 1.3, д) виконуємо за виразом $S = F_1 y_1 - F_2 y_2 + q_1 \omega_1 + q_2 y_2 - M \operatorname{tg} \alpha$,

де S – зусилля, що визначається; y_1 та y_2 – ординати відповідної лінії впливу під зосередженими силами F_1 та F_2 ; ω_1 та ω_2 – площі відповідної лінії впливу у межах розподілених навантажень q_1 та q_2 ; α – кут нахилу дотичної до лінії впливу у місті прикладання зосередженого моменту (знак «мінус» перед другою силою відповідає спрямуванню цієї сили доверху, знак «мінус» перед моментом відповідає обертанню проти годинникової стрілки). Потрібні ординати ліній впливу визначаються з подоби трикутників.

Для реакції R_A маємо: $y_1 = 1 / 7 \cdot 5,5 = 0,786$; $y_2 = -1 / 7 \cdot 3 = -0,429$

$\omega_1 = (1,357 + 0,786) / 2 \cdot 4 = 4,286$; $\omega_2 = 0,357 \cdot 2,5 / 2 = 0,446$;

$\operatorname{tg} \alpha = -0,357 / 2,5 = -0,1428$ (тангенс кута нахилу від'ємний за правилами тригонометрії). Отже

$$R_A = 25 \cdot 0,786 - 14 \cdot (-0,429) + 10 \cdot 4,286 + 20 \cdot 0,446 - 30 \cdot (-0,1428) = 81,72 \text{ kH}.$$

Аналогічно для реакції R_B : $y_1 = 1 / 7 \cdot 1,5 = 0,214$; $y_2 = 1 / 7 \cdot 4,5 = 0,643$;
 $\omega_1 = (0,214 - 0,357) / 2 \cdot 4 = -0,286$; $\omega_2 = (0,643 + 1) / 2 \cdot 2,5 = 2,053$; $\operatorname{tg} \alpha = 1 / 7 = 0,1428$;

$$R_B = 25 \cdot 0,214 - 14 \cdot 0,643 + 10 \cdot (-0,286) + 20 \cdot 2,053 - 30 \cdot 0,1428 = 30,26 \text{ kH}.$$

Так само обчислюємо згинаючий момент:

$$M_1 = 25 \cdot 1,179 - 14 \cdot (-0,643) + 10 \cdot \frac{1,179 - 1,965}{2} \cdot 4 + 20 \cdot \frac{0,536 \cdot 2,5}{2} - 30 \cdot \frac{-1,179}{5,5} = 42,59 \text{ kHm}.$$

При обчисленні поперечної сили необхідно врахувати, що переріз 1 розташований праворуч від сили F_1 , отже $y_1 = -0,214$. Розрахунок дає:

$$Q_1 = 26 \cdot (-0,214) - 14 \cdot (-0,429) + 10 \cdot \frac{-0,214 + 0,357}{2} \cdot 4 + 20 \cdot \frac{0,357}{2} \cdot 2,5 - 30 \cdot \frac{-0,786}{5,5} = 16,51 \text{ kH}.$$

3. Для балки, наведеної на рисунку 1.2, обчислити за допомогою ліній впливу зусилля у перерізах 2, 3, 4, 5.

Розв'язання. При побудованні ліній впливу зусиль у перерізі 2 (рис. 1.4, а) необхідно мати на увазі, що він розташований нескінченно близько до лівої опори з боку консолі.

Для побудовання лінії впливу M_2 розташуємо одиничну силу ліворуч від перерізу (опори А) на довільній відстані x . Розглядаючи ліві сили, одержимо $M_2 = -x$. Отже, ліва пряма (рис. 1.4, б) проходить через точки $(x=0, M_2=0)$ та $(x=2,5, M_2=-2,5)$ ($x=2,5, M_2=-2,5$). Неважко зрозуміти, що при розташуванні сили праворуч від перерізу згинаючий момент у перерізі 2 дорівнює нулю (права пряма на рис. 1.4, б). Одразу зазначимо, що у перерізах 2 та 3 (переріз 3 знаходиться нескінченно близько праворуч опори) при будь-якому розташуванні сили буде виникати однаковий згинаючий момент, тобто побудована лінія впливу одночасно є і лінією впливу M_3 .

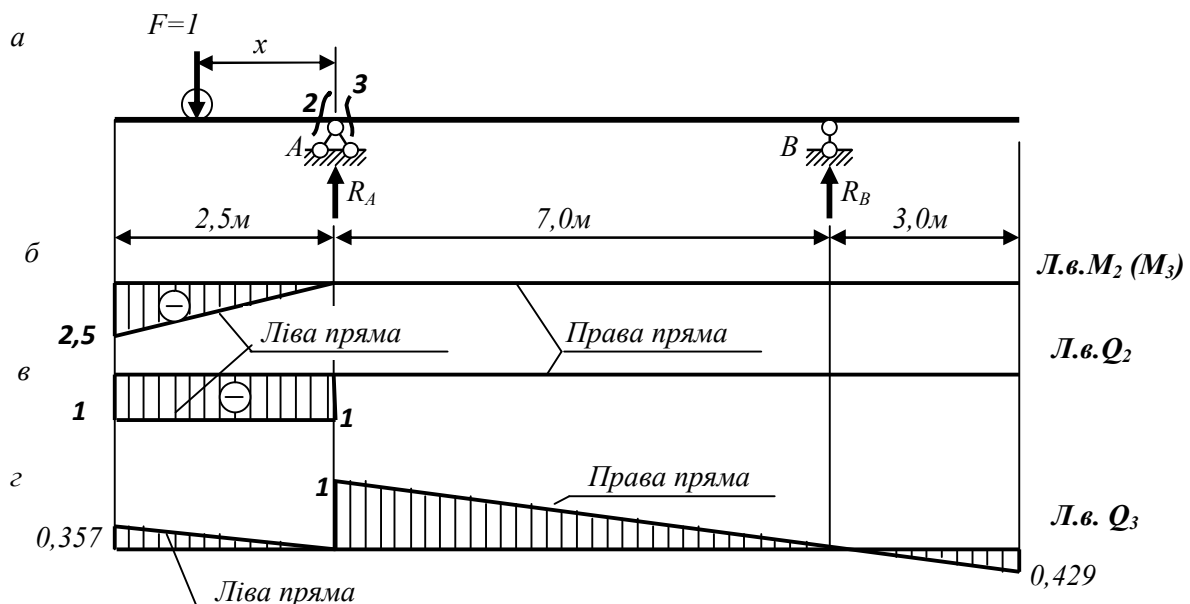


Рисунок 1.4

Поперечна сила в перерізі 2 при розташуванні сили ліворуч постійна і дорівнює 1 (ліва пряма на рис. 1.4, в), права пряма, як і на лінії впливу моменту, -нульова лінія.

На відміну від згинаючих моментів, поперечні сили у перерізах 2 та 3 різняться між собою. Зазначимо, що переріз 3 знаходиться у прольоті балки. При розташуванні одиничної сили праворуч від перерізу (опори A) поперечна сила $Q_3=R_B$, отже права пряма цієї лінії впливу (рис. 1.4, z) співпадає з частиною лінії впливу R_B , розташованої праворуч від опори A . З іншого боку, при розташуванні одиничної сили ліворуч від перерізу 3 маємо $Q_3=-R_A$, отже ліва пряма (рис. 1.4, z) співпадає з оберненою за знаком лівою частиною опорної реакції R_A .

Лінії впливу для інших перерізів та завантаження заданим на рисунку 1.2 навантаженням виконати самостійно.

4. Визначити найбільші та найменші зусилля у перерізі 1 балки, наведеної на рисунку 1.2, від сумісної дії нерухомого та заданої на рисунку 1.5 рухомої системи сил.

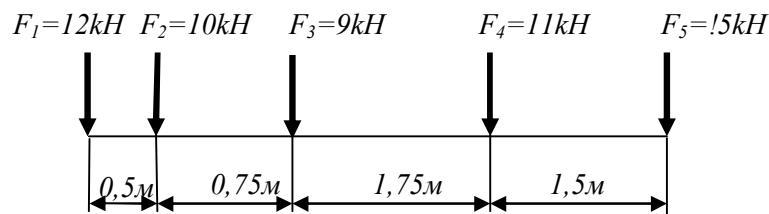


Рисунок 1.5

Розв'язання. Для визначення зусиль скористаємося лініями впливу, побудованими у вправі 1.2 (рис. 1.3, v, z).

Максимальне та мінімальне зусилля від сумісної дії постійного та тимчасового навантаження за принципом суперпозиції дорівнює сумі зусилля від постійного навантаження та відповідно максимального та мінімального зусилля від тимчасового навантаження.

При визначенні максимального моменту $M_{I_{\max}}^T$ виходимо з того, що повна довжина рухомої системи сил (рис. 1.5) становить 4,5 м, що менше, ніж довжина додатної частини лінії впливу M_I . Отже завантаження на максимум можна виконати за правилами завантаження лінії впливу трикутного обрису (рис. 1.6, a).

Спочатку прийmemo критичною, наприклад, третю силу: $F_{кр} = F_3$, і

перевіримо нерівності

$$\left(\sum_{\text{лів}} F + F_{кр} \right) / a \geq \left(\sum_{\text{прав}} F \right) / b$$

$$\left(\sum_{\text{лів}} F \right) / a \leq \left(\sum_{\text{прав}} F + F_{кр} \right) / b$$

де a та b – відстані від вершини лінії впливу відповідно до її лівого та правого кінця. У нашому випадку маємо: сума лівих сил $\sum_{лів} F = F_1 + F_2 = 12 + 10 = 22 kH$, сума правих – $\sum_{прав} F = F_4 + F_5 = 11 + 15 = 26 kH$ і нерівності набувають такого вигляду:

$$(22 + 9) / 1,5 = 20,66 > 26 / 5,5 = 4,72;$$

$$22 / 1,5 = 14,67 > (26 + 9) / 5,5 = 6,36.$$

Оскільки одна з нерівностей не задовольняється, третя сила не є критичною. Тоді оберемо критичною другу силу: $F_{кр} = F_2$ і знову перевіряємо нерівності: $\sum_{ксд} F = F_1 = 12 kH$; $\sum_{пров} F = F_3 + F_4 + F_5 = 35 kH$;

$$(12 + 10) / 1,5 = 13,67 > 35 / 5,5 = 6,36;$$

$$12 / 1,5 = 8 < (35 + 9) / 5,5 = 8,2.$$

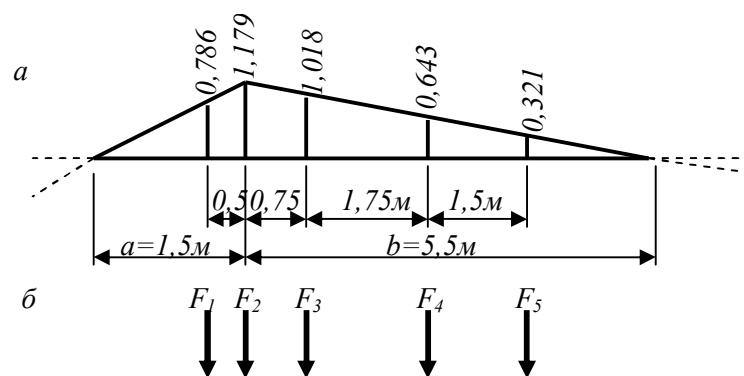


Рисунок 1.6

Обидві нерівності задовольняються, отже друга сила дійсно є критичною, тобто максимум моменту досягається при такому положенні навантаження, коли друга сила розташовується над вершиною трикутника лінії впливу. Розмістимо навантаження у відповідному положенні на лінії впливу (рис. 1.6, б) і, обчисливши необхідні ординати під силами з подоби трикутників, одержимо:

$$\begin{aligned} M_{1max}^T &= F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 + F_4 y_4 + F_5 y_5 = \\ &= 12 \cdot 0,786 + 10 \cdot 1,179 + 9 \cdot 1,018 + 11 \cdot 0,643 + 15 \cdot 0,321 = 42,27 kHm. \end{aligned}$$

При визначенні мінімального значення моменту від тимчасового навантаження логічно більшу частину сил розташувати над від'ємною частиною лінії впливу. Найбільша за ординатами від'ємна частина знаходиться ліворуч від опори A і являє собою прямокутний трикутник. Визначення критичної сили для лінії впливу такого обрису неможливо через те, що в одній з

частин нерівностей з'являється невизначеність. У такому разі залишається лише порівнювати значення зусиль при різному розташуванні системи сил.

По-перше поставимо навантаження так, щоб сила F_5 знаходилась на кінці консолі (рис. 1.7, а). Інші сили при цьому знаходяться поза межами балки.

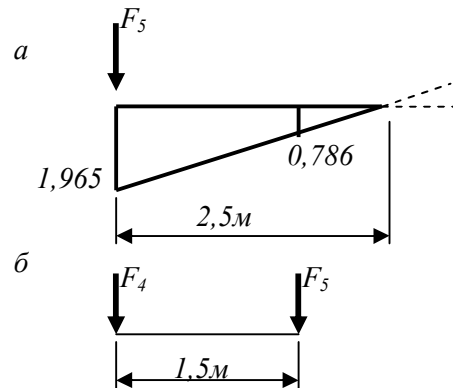


Рисунок 1.7

Обчислення дають таке значення моменту:

$$M'_1 = F_2 y_2 = -15 \cdot 1,965 = -29,48 \text{ кНм.}$$

Далі посунемо систему сил праворуч так, щоб над кінцем консолі розташувалась сила F_4 (рис. 1.7, б).

При такому розташуванні системи сил одержимо:

$$M''_1 = -(11 \cdot 1,965 + 15 \cdot 0,786) = -33,41 \text{ кНм.}$$

Подальше пересування системи сил праворуч приводить до того, що F_5 перейде на додатну частину лінії впливу, а над вершиною буде менша за величиною сила F_3 отже згинаючий момент зменшиться за абсолютною величиною. Порівнюючи значення M'_1 та M''_1 приходимо до висновку, що $M_{1\min}^T = M''_1 = -33,41 \text{ кН}$.

При дії постійного навантаження (див вправу 1.2) $M_1 = 42,59 \text{ кНм}$, отже маємо:

$$M_{1\max} = 42,59 + 42,27 = 84,86 \text{ кНм}; M_{1\min} = 42,59 - 33,41 = 9,18 \text{ кНм}.$$

Зазначимо, що при завантаженні лінії впливу поперечної сили маємо тільки прямокутні частини цієї лінії впливу. Отже при тимчасовому навантаженні необхідно діяти шляхом підбору розташування системи сил та порівнянні відповідних її значень. Бажано обчислити ці значення самостійно.

Для контролю наведемо кінцеві величини:

$$Q_{1\max}^T = 28,12 \text{ кН}; Q_{1\min}^T = -7,15 \text{ кН}; Q_{1\max} = 44,63 \text{ кН}; Q_{1\min} = 9,36 \text{ кН}.$$

5. За допомогою ліній впливу визначити зусилля у стержнях 1, 2, 3, 4 ферми, наведеної на рисунку 1.8, а від заданого навантаження.

Розв'язання. Задана ферма є балочною, оскільки при вертикальному навантаженні реакції опор лише вертикальні. Лінії впливу опорних реакції такої ферми такі самі, як для балки (рис. 1.8, б).

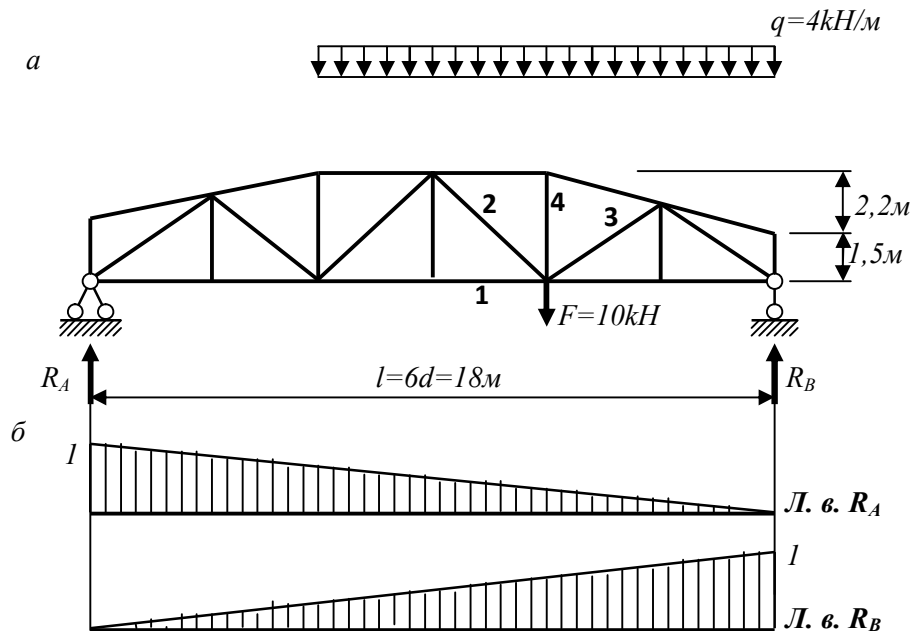


Рисунок 1.8

Для побудовання *лінії впливу зусилля у першому стержні* обираємо найбільш зручний спосіб його визначення – такий, щоб зусилля по можливості визначалось лише через зовнішні сили. Проводимо переріз 1-1 через три стержня (рис. 1.9, а) і з'ясуємо, що N_1 зручно визначати способом моментної точки (m_1 – моментна точка для зусилля N_1).

Спочатку розглянемо випадок розташування одиничної сили ліворуч від перерізу 1-1. Складаємо рівняння рівноваги для правих сил: $\sum M_{m_1} = R_B \cdot 3d - N_1 \cdot 3,7 = 0$, звідки при $d = l/6 = 18/6 = 3$ м одержимо вираз для шуканого зусилля:

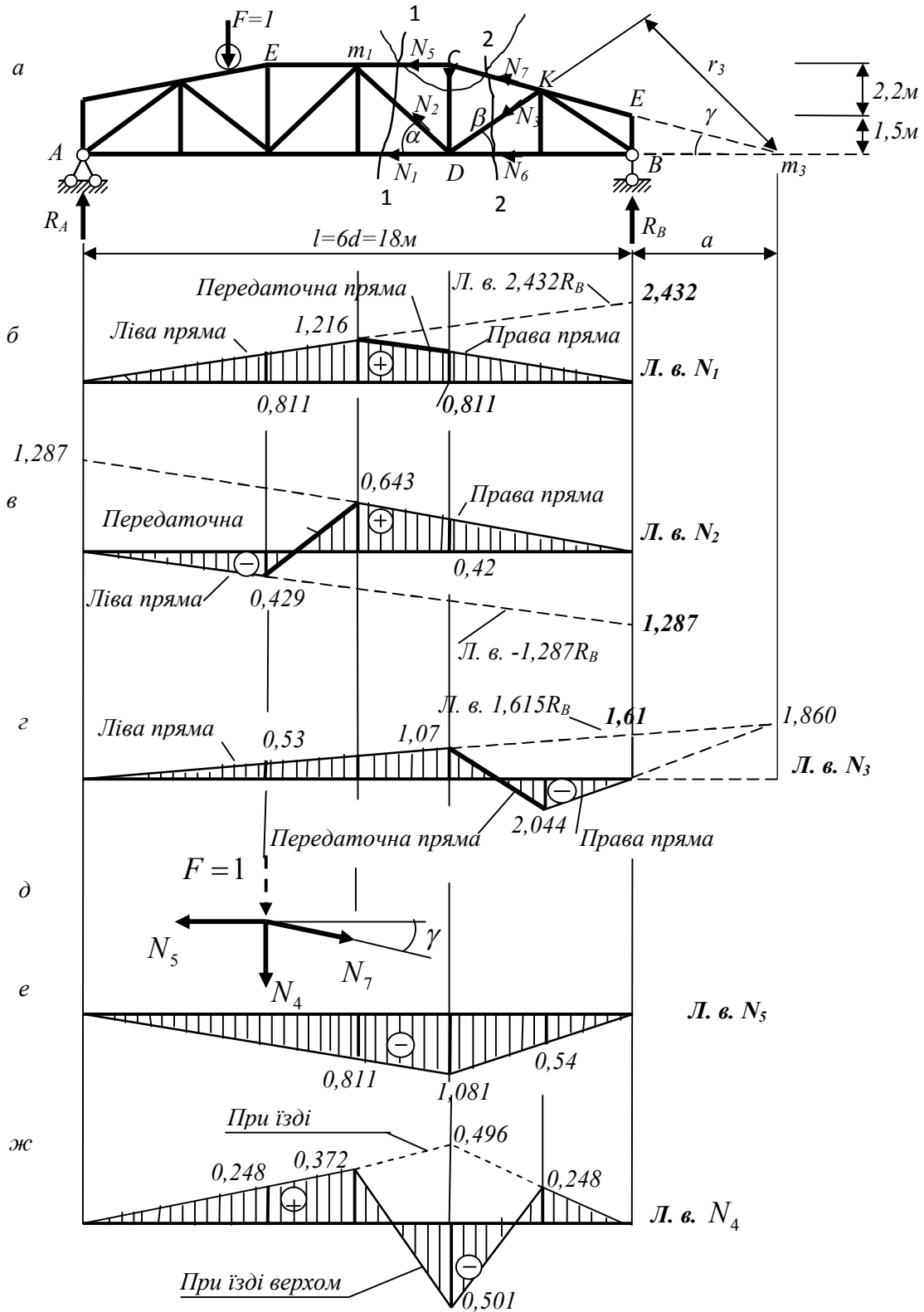
$$N_1 = R_B \frac{3 \cdot 3}{3,7} = 2,432 R_B.$$

Цій залежності відповідає лінія впливу реакції R_B з ординатами, помноженими на 2,432. Побудуємо цю лінію (рис. 1.9, б) та виокремимо ліву пряму – ту частину, що відповідає прийнятому розташуванню сили (ліворуч від перерізу – у межах між точками ферми A та m_1).

Так одержуємо ліву пряму лінії впливу. Далі виходимо з того, що права пряма повинна перетинатися з лівою під моментною точкою. Ординати кінцевої лінії впливу під кінцями перерізанної панелі вантажного поясу ферми необхідно з'єднати передаточною прямою (рис. 1.9, б).

Визначення зусилля від заданого навантаження виконуємо за загальними правилами:

$$N_1 = q \cdot \omega + F \cdot y = 4 \cdot \left(\frac{0,811 \cdot 3}{2} + \frac{1,216 \cdot 9}{2} \right) + 10 \cdot 0,811 = 42,16 \text{ кН.}$$



Зауважимо, що необхідні ординати обчислені з подоби трикутників на лінії впливу виходячи з висхідної ординати 2,432.

Для побудування лінії впливу зусилля N_2 знову використовуємо переріз 1-1, застосовуючи спосіб проєкцій. При розташуванні одиничної сили проєктуємо праві сили на вісь, перпендикулярну поясам ферми:

$$\sum F_y = R_B + N_2 \cdot \sin \alpha = 0,$$

звідки при $\sin \alpha = \frac{3,7}{\sqrt{3^2 + 3,7^2}} = 0,777$ одержимо $N_2 = -\frac{1}{0,777} R_B = R_B \cdot (-1,287)$.

Побудувавши лінію впливу реакції R_B з множником $-1,287$ (рис. 1.9, в), виокремимо ліву пряму – частину, що відповідає розташуванню одиничної сили ліворуч від перерізу (в межах між точками A та m_1 ферми). Праву пряму проводимо з умови її паралельності лівій. Провівши передаточну пряму, одержимо остаточно лінію впливу N_1 (рис. 1.9, в).

При побудуванні лінії впливу N_3 для визначення зусилля раціонально використати переріз 2-2 та спосіб моментної точки. Ця точка m_3 знаходиться на перетині ліній дії зусиль N_5 та N_6 (рис. 1.9, г). Позначивши відстань від опори A до моментної точки a , а плече зусилля відносно моментної точки r_3 , запишемо умову рівноваги правих сил:

$$\sum M_{m_3} = -R_B \cdot a + N_3 \cdot r_3 = 0.$$

З геометрії ферми визначаємо:

$$Bm_3 = \frac{Dm_3}{CD} BE; a = \frac{6+a}{3,7} 1,5; a = \frac{6}{2,2} = 2,73 \text{ м};$$

$$\sin \beta = \frac{(2,2 / 2 + 1,5)}{\sqrt{3^2 + (2,2 / 2 + 1,5)^2}} = 0,655; r_3 = (a + 6) \cdot \sin \beta = 8,73 \cdot 0,655 = 4,41 \text{ м}.$$

З рівняння рівноваги одержимо: $N_3 = \frac{4,41}{2,73} R_B = 1,615 R_B$. Відповідна лінія

та ліва пряма лінії впливу N_3 проведена на рисунку 1.9, г. Подовживши цю лінію до моментної точки m_3 , через одержану ординату та нуль під опорою B проводимо напрямок правої прямої. Передаточна пряма з'єднує ординати лівої та правої прямих під відповідними вузлами на кінцях розрізаної панелі вантажного поясу ферми.

Визначаємо зусилля від заданого навантаження:

$$N_3 = 4 \cdot \left(\frac{0,538 + 1,077}{2} \cdot 6 + \frac{1,077 - 2,044}{2} \cdot 3 - \frac{2,044 \cdot 3}{2} \right) + 10 \cdot 1,077 = 17,89 \text{ кН.}$$

Визначення зусилля N_4 можна виконати з рівноваги вузла C (рис. 1.9, *д*). Спочатку розглянемо випадок, коли одинична сила знаходиться поза межами панелей ферми, суміжних з вузлом C . В цьому випадку вузол не має навантаження і, застосовуючи рівняння рівноваги, одержуємо:

$$\sum F_x = N_7 \cos \gamma - N_5 = 0; \quad \sum F_y = -N_4 - N_7 \sin \gamma = 0.$$

Звідси одержимо $N_4 = -N_5 \operatorname{tg} \gamma = -0,549 N_5$, де $\operatorname{tg} \gamma = 1,5 / 2,73 = 0,549$. Отже, попередньо необхідно побудувати лінію впливу N_5 . Не наводячи подробиць, з використанням перерізу 1-1 та моментної точки D , побудуємо цю лінію впливу (рис. 1.9, *е*).

Помноживши ординати лінії впливу N_5 на $-0,459$, одержимо лінію впливу зусилля N_4 (рис. 1.9, *ж*) при умові, що одинична сила знаходиться поза межами вузла C . Ця умова відповідає випадку їзди низом (по верхньому поясу), а також при знаходженні сили на верхньому поясі (їзді верхом) за межами панелей ферми, суміжних з вузлом C . При розташуванні одиничної сили у вузлі C (на рис. 1.9, *д* сила показана штриховою лінією) рівняння проєкцій на вертикальну вісь має такий вигляд:

$$\sum F_y = -N_4 - N_7 \sin \gamma - F = 0.$$

Звідси з урахуванням рівняння $\sum F_x = N_7 \cos \gamma - N_5 = 0$ одержуємо: $N_4 = -0,459 N_5 - 1$. Враховуючи, що при розташуванні сили над вузлом C $N_5 = -1,081$ (див. лінію впливу на рис. 1.9, *е*), одержимо $N_4 = 0,459 \cdot 1,081 - 1 = -0,504$. Відклавши це значення під вузлом C , з'єднаємо одержану ординату з ординатами під суміжними вузлами передаточними прямими. Результатом цих побудовань є лінія впливу N_4 при їзді верхом (рис. 1.9, *ж*).

Обчислюємо зусилля від заданого навантаження:

$$N_4 = 4 \cdot \left(\frac{0,248 + 0,372}{2} \cdot 3 + \frac{0,372 - 0,501}{2} \cdot 3 + \frac{-0,501 + 0,248}{2} \cdot 3 + \frac{0,248 \cdot 3}{2} \right) + 10 \cdot (-0,501) = -2,12 \text{ кН.}$$

Зауважимо, що площа лінії впливу під розподілим навантаженням береться при їзді верхом, а ордината під зосередженою силою – при їзді низом.

Самостійно побудувати лінії впливу зусиль N_5 , N_6 та лінії впливу зусиль у підвісках 4-ї та 5-ї панелей при їзді верхом і низом.

6. Побудувати лінії впливу зусиль у другому зліва стояку ферми, наведеної на рисунку 1.10, а.

Розв'язання. Проведемо переріз 1-1 в знайдемо моментну точку m_1 на перетині ліній дії зусиль N_2 та N_3 . Відстань до неї обчислюємо з подоби трикутників на схемі ферми: $a = \frac{16}{5-2} \cdot 2 = 10,67 \text{ м}$.

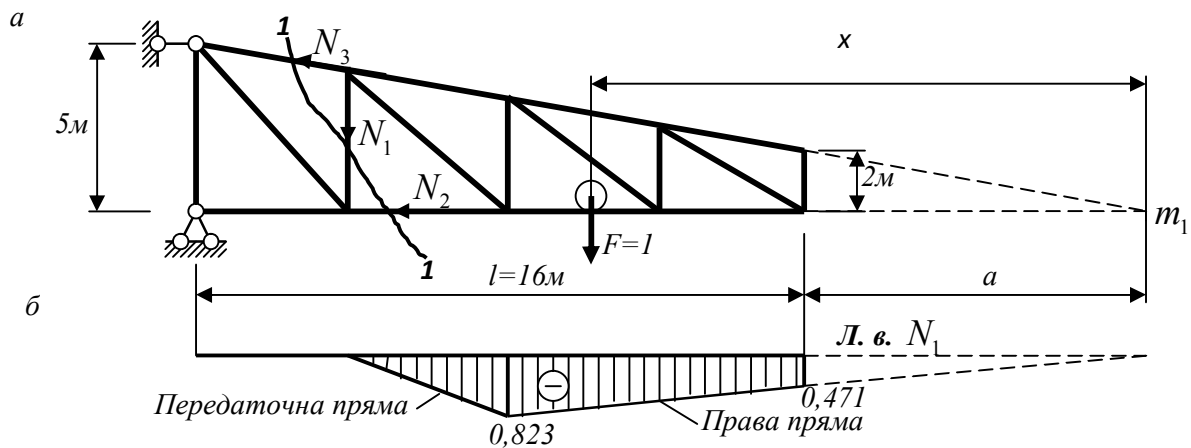


Рисунок 1.10

Оскільки ферма консольна, для визначення зусиль реакції опор можна не визначати, розглядаючи рівновагу завжди вільної від опор – правої частини. Якщо одинична сила знаходиться на лівій частині ферми, праворуч відсутнє навантаження, отже $N_1 = 0$ і ліва пряма (в межах крайньої лівої панелі) – нульова лінія. При розташуванні сили праворуч від перерізу, рівняння рівноваги правої частини ферми набуває такого вигляду:

$$\sum M_{m_1} = -N_1 \cdot (a + 12) - F \cdot x = 0.$$

Звідси одержуємо: $N_1 = -\frac{x}{22,67} = -0,0441x$. Праву пряму проводимо,

обраховуючи характерні ординати: $x = a = 10,67$ $N_1 = -0,0536 \cdot 10,67 = -0,471$; $x = a + 8 = 18,67$ $N_1 = -0,0441 \cdot 18,67 = -0,823$. З'єднуючи ординати лівої та правої прямих передаточною прямою, одержуємо остаточно шукану лінію впливу (рис. 1.10, б).

Зауважимо, що лінія впливу побудована для їзди низом, необхідно самостійно показати її вигляд при їзді верхом.

Самостійно побудувати лінії впливу зусиль в стержнях другої панелі.

7. Побудувати вид ліній впливу зусиль у перерізі 1 нерозрізної балки, наведеної на рисунку 1.11, а.

Розв'язання. Відкинувши в'язь, у якій діє згинаючий момент (поставивши шарнір у перерізі 1), прикладаємо відповідний момент M_1 і побудуємо епюру переміщень від його дії (рис. 1.11, б). Ця епюра – штрихова лінія на рисунку дає модель лінії впливу M_1 .

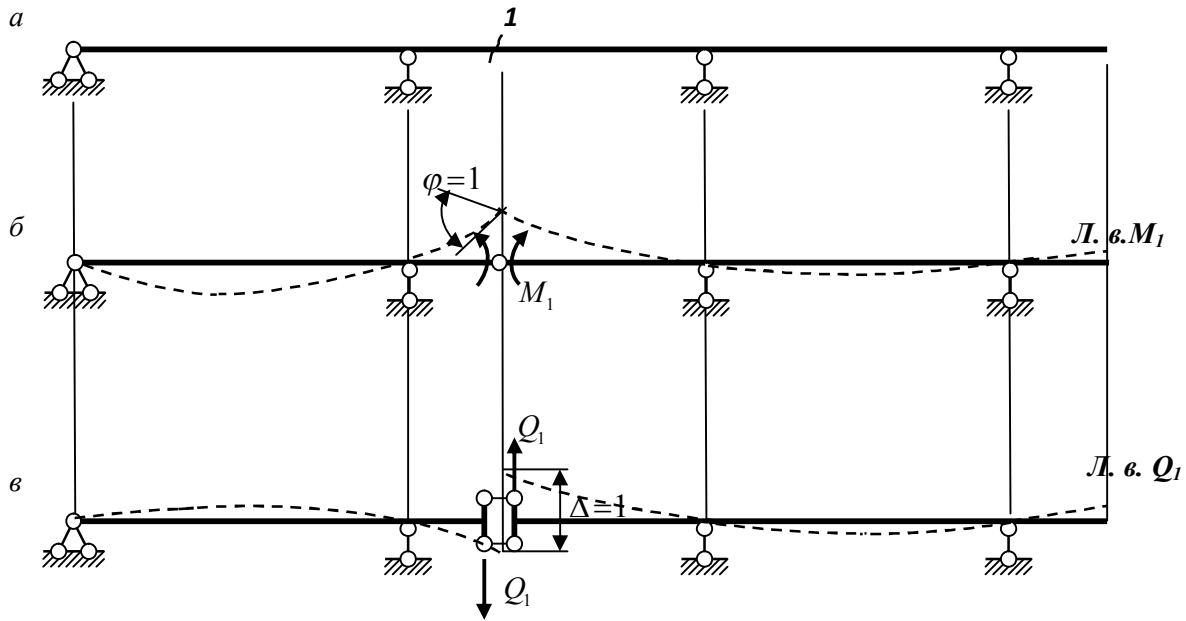


Рисунок 1.11

Аналогічно, поставивши у перерізі шарнірний паралелограм, що відповідає відкиданню в'язі у напрямку дії поперечної сили, будуємо епюру переміщень від дії поперечної сили. Ця епюра – штрихова лінія на рисунку 1.11, в і є модель лінії впливу Q_1 .

1.2 Стійкість стержневих систем

Теоретичний матеріал та питання для самоперевірки наведені у розділі 2 [3], розділі 3 [7] та ін.

Вправи

8. Визначити критичну силу для консольного стержня довжиною 5м, виконаного із двотавра № 20.

Розв'язання. Виходячи з припущення, що стержень втрачає стійкість у пружній стадії роботи матеріалу, скористаємося формулою Ейлера:

$$F_{кр}^E = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 115 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 3)^2} = 63,0 \text{ kH},$$

де $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа}$ – модуль пружності сталі;
 $I_{\min} = 115 \text{ см}^4 = 115 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ – мінімальний момент інерції перерізу швелера №20;
 $\mu = 2$ – коефіцієнт зведення довжини для консольного стержня.

Перевіряємо величину критичних напружень:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{63,0}{26,5} = 2,38 \text{ кН / см}^2 = 23,8 \text{ МПа},$$

де $A = 26,5 \text{ см}^2$ – площа перерізу двотавра № 20.

Оскільки критичні напруження не перевищують межу пропорційності сталі $\sigma_{ну} = 260 \text{ МПа}$, стержень дійсно втрачає стійкість у межах пружної стадії роботи і $F_{кр} = 63 \text{ кН}$.

9. Визначити критичну силу стержня постійного перерізу, наведеного на рисунку 1.12, а.

Розв'язання. При однакових прогонах стержня деформована схема являє собою синусоїду з нульовими точками на опорах, отже кожен прогін при втраті стійкості працює як окремий стержень з шарнірними закріпленнями кінців.

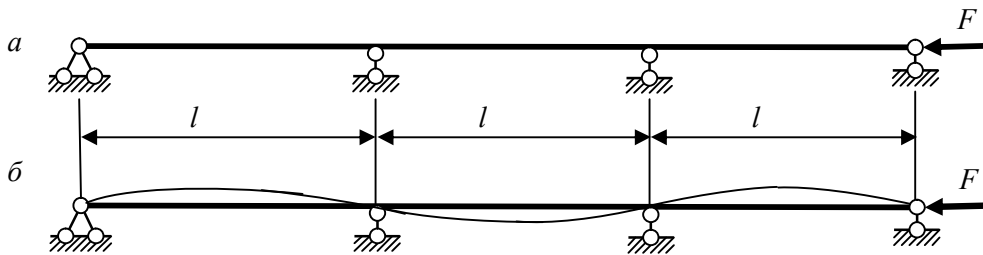


Рисунок 1.12

Отже, критичну силу усього стержня можна обчислити за формулою Ейлера, як для окремого стержня довжиною l :

$$F_{кр} = \frac{\pi^1 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

10. Визначити критичну силу для стержня, наведеного на рисунку 1.13, а, якщо жорсткість стержня EI незмінна за довжиною, жорсткість пружної опори становить c .

Розв'язання. Можлива форма втрати стійкості стержня показана на рисунку 1.13, б.

Згинаючий момент у довільному перерізі стержня $M = -Fu + Rx$. Отже диференціальне рівняння зігнутої осі $EIy'' = M$ буде таким: $EIy'' = -Fu + Rx$.

Перепишемо це рівняння зважаючи на те, що реакція у пружній опорі пропорційна жорсткості опори – $R = cv: EIy'' + Fy = cvx$.

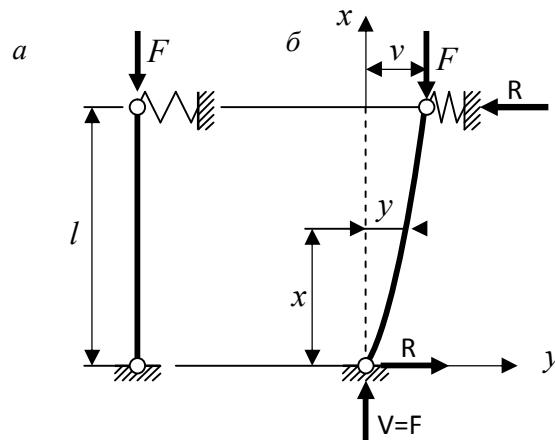


Рисунок 1.13

Поділивши усі члени рівняння на жорсткість EI , введемо позначення $n^2 = \frac{F}{EI}$. В результаті приходимо до такого рівняння:

$$y'' + n^2 = \frac{cvx}{EI}$$

або з урахуванням позначення n^2 :

$$y'' + n^2 = n^2 \frac{cv}{F} x.$$

Розв'язок цього стандартного неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку має такий вигляд:

$$y = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx + \frac{cv}{n^2 EI} x.$$

Записуємо граничні умови:

- 1) на нижній опорі (при $x = 0$) $y = 0$, звідки

$$C_1 = 0 \tag{a}$$

- 2) на верхній опорі (при $x = l$) $y = v$, звідки:

$$C_1 \cos nl + C_2 \sin nl + \left(\frac{cl}{n^2 EI} - 1 \right) v = 0 \tag{б}$$

- 3) на верхній опорі (при $x = l$) $M = EIy'' = 0$, звідки:

$$-C_1 n^2 \cos nl - C_2 n^2 \sin nl = 0 \tag{в}$$

Розв'язок системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь (а), (б), (в) відносно невідомих C_1 , C_2 , ν одержимо з умови рівності нулю визначника, складеного з коефіцієнтів при невідомих:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos nl & \sin nl & \left(\frac{cl}{n^2 EI} - 1\right) \\ n^2 \cos nl & n^2 \sin nl & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник одержимо рівняння стійкості стержня у такому вигляді:

$$\left(\frac{cl}{n^2 EI} - 1\right) n^2 \sin nl = 0.$$

Розв'язок рівняння стійкості дає два значення критичної сили:

1) з умови $\frac{cl}{n^2 EI} - 1 = \frac{cl}{F} - 1 = 0$ $F_{1кр} = cl$, яке відповідає втраті стійкості як абсолютно жорсткого стержня ;

2) з умови $n^2 \sin nl = 0$ $F_{2кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, яке відповідає втраті стійкості стержня без пружної опори.

Залежно від значень жорсткостей стержня та пружної опори дійсною критичною силою стержня буде менша з одержаних сил.

II. Визначити критичну силу для рами, наведеної на рисунку 1.14 з такими даними:

$$\frac{l_2}{l_1} = 0,4; \frac{l_3}{l_1} = 0,8; \frac{l_4}{l_1} = 1; \frac{I_2}{I_1} = 0,2; \frac{I_3}{I_1} = 0,5; \frac{I_4}{I_1} = 2,$$

$$\frac{F_1}{F} = 2.$$

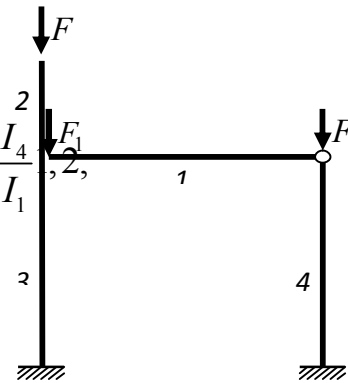


Рисунок 1.14

Розв'язання. Обчислюємо зусилля у висхідному стані. Для цього, по-перше, відрізаємо верхню консоль (рис. 1.15, а). З умов рівноваги одержуємо: $\sum F_y = N_2 - F = 0$, звідки $N_2 = F$.

Далі з рівноваги лівого вузла ригеля (рис. 1.15, б) одержимо:

$$\sum x = -N_2 = 0 \quad N_2 = 0;$$

$$\sum y = -N_2 - F_1 + N_3 = 0;$$

$$N_3 = N_2 + F_1 = F + F_1 = F + 2F = 3F.$$

І нарешті, розглядаємо рівновагу правого вузла (рис. 1.15, в):

$$\sum x = N_1 = 0$$

$$\sum y = N_4 - F = 0 \quad N_4 = F.$$

Далі визначаємо параметри стійкості стержнів за формулою $v_i = l \sqrt{\frac{N_i}{EI_i}}$:

$$v_1 = l_1 \sqrt{\frac{N_1}{EI_1}} = 0; \quad v_2 = l_2 \sqrt{\frac{N_2}{EI_2}} = 0,4 l_1 \sqrt{\frac{F}{0,2 EI_1}} = 0,894 v;$$

$$v = l_1 \sqrt{\frac{F}{EI_1}};$$

$$v_3 = l_3 \sqrt{\frac{N_3}{EI_3}} = 0,8 l_1 \sqrt{\frac{3F}{0,5 EI_3}} = 1,96 v;$$

$$v_4 = l_4 \sqrt{\frac{N_4}{EI_4}} = l_1 \sqrt{\frac{F}{1,2 EI_1}} = 0,913 v.$$

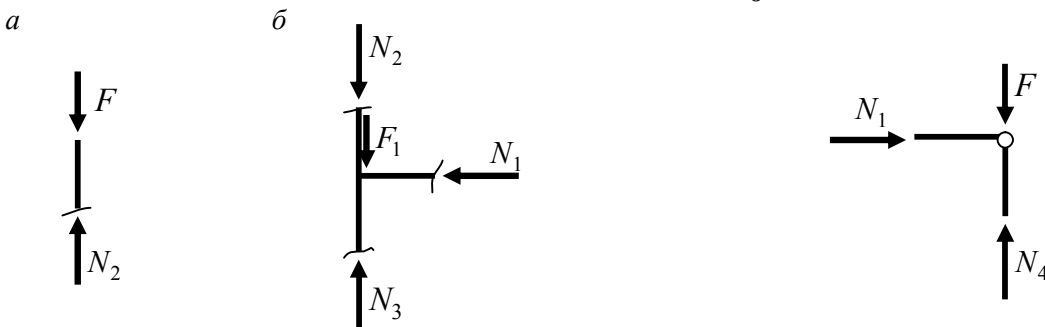


Рисунок 1.15

Ступінь кінематичної невизначуваності рами: $n = n_k + n_d = 1 + 1 = 2$.

Тут $n_k = 1$ – кількість поворотів вузлів, що дорівнює числу її жорстких вузлів, тобто вузлів, у яких стержні з'єднані жорстко.

Кількість лінійних зміщень вузлів n_d визначена за числом незалежних зміщень вузлів шарнірно-стержневої схеми рами (рис. 1.16). При цьому статично визначувані частини рами (наприклад, консоль) відкидаємо. Як бачимо, можливе одне, однакове за величиною переміщення Δ вузлів ригеля вздовж горизонталі.

Отже, рама двічі кінематично невизначувана.

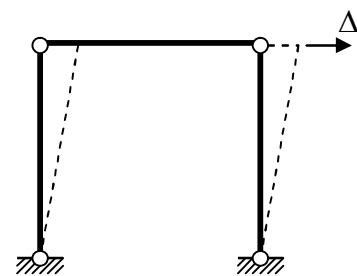
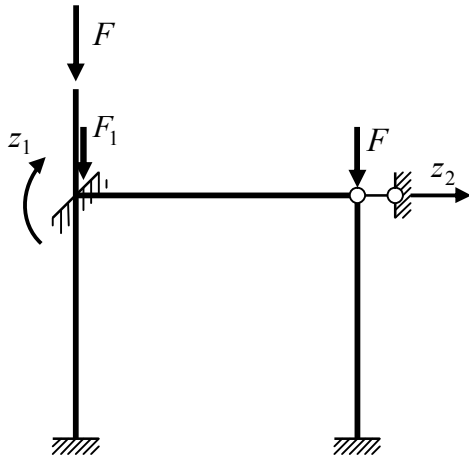


Рисунок 1.16

Обираючи основну систему (рис. 1.17), у напрямку можливих переміщень вузлів ставимо в'язі: у жорсткий вузол ставимо плаваюче затиснення, а у напрямку зміщення ригеля горизонтальний опорний стержень. Поворот вузла (плаваючого затиснення) позначимо Z_1 , а зміщення ригеля – Z_2 .

Канонічні рівняння методу переміщень для системи з двома невідомими при розрахунку на стійкість мають такий вигляд:



$$r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 = 0;$$

$$r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 = 0.$$

Перед побудуванням епюри згинаючих моментів від повороту плаваючого затиснення на кут $Z_1 = 1$ зручно спочатку з'ясувати характер деформацій стержнів (рис. 1.18, а).

Рисунок 1.17

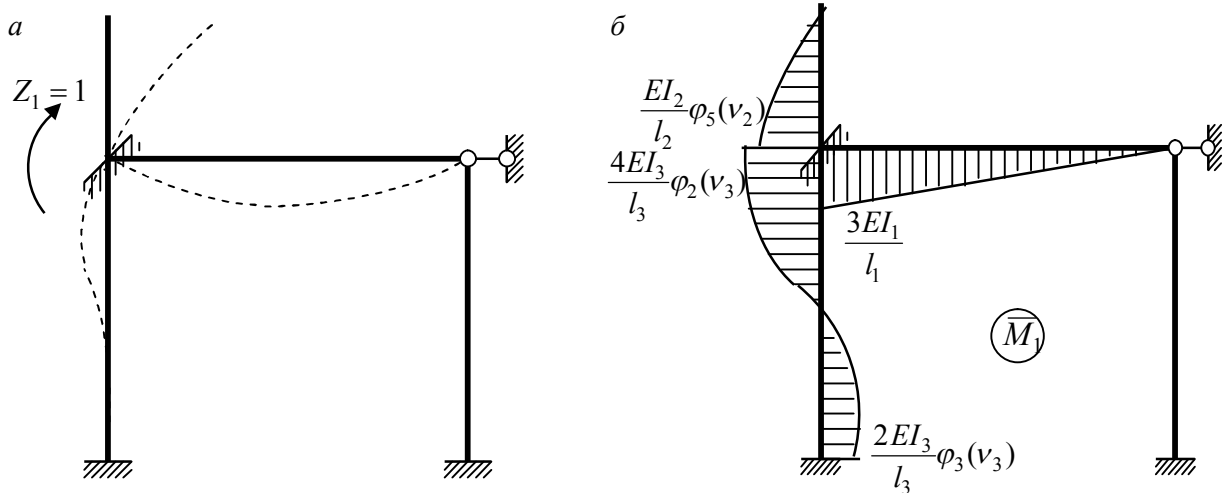


Рисунок 1.18

Тепер, користуючись таблицями розрахунку стиснуто-зігнутих стержнів (табл. 4 [3]), будемо епюри на стержнях 2 та 3 (орієнтація епюр на стержні відповідає деформованій схемі на рисунку 1.18, а – на розтягнутих волокнах).

Епюру на зігнутому стержні 1, який не зазнає стиску, можна взяти з тієї самої таблиці, якщо пам'ятати, що у цьому випадку вона лінійна, а ординати не містять функції параметрів стійкості: у нашому випадку – $\frac{3EI_1}{l_1}$ без функції $\varphi_1(v_1)$.

Аналогічно, зміщуючи опорний стержень на величину $Z_2 = 1$, зображаємо деформовану схему рами (рис. 1.19, а).

Далі за таблицею 4 [3] побудуємо епюру згинаючих моментів \bar{M}_1 (рис. 1.19, б).

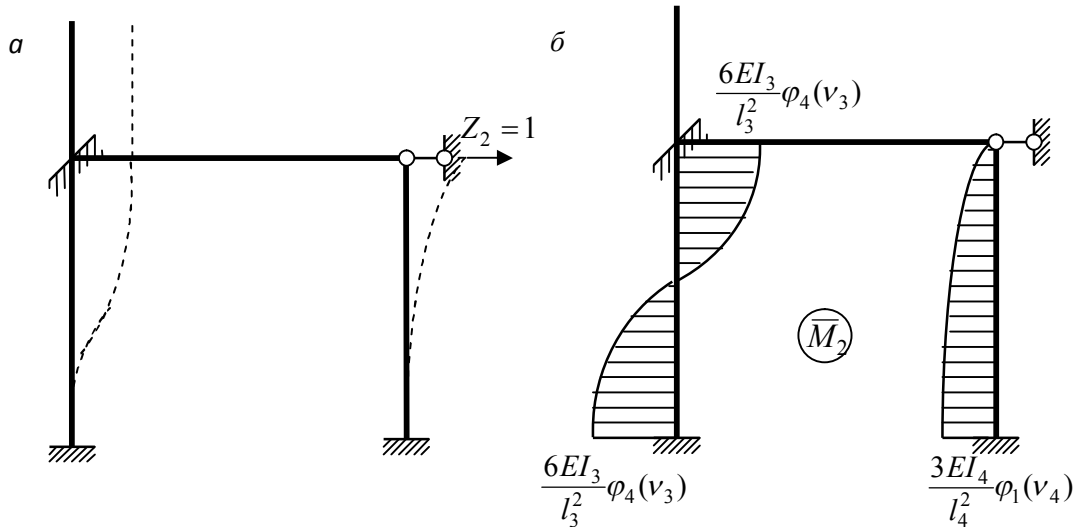


Рисунок 1.19

Коефіцієнти канонічних рівнянь визначаємо з рівноваги частин рами. Зокрема, реакції у плаваючому затисненні визначаємо з рівноваги лівого вузла рами під дією згинаючих моментів (рис. 1.20).

З вузла на першій одиничній епюрі (рис. 1.20, а) одержимо:

$$\begin{aligned} \sum M = 0; \quad r_{11} &= \frac{3EI_1}{l_1} - \frac{EI_2}{l_2} \varphi_5(v_2) + \frac{4EI_3}{l_3} \varphi_2(v_3) = \\ &= \frac{3EI_1}{l_1} - \frac{3 \cdot 0,2EI_1}{0,4l_1} \varphi_5(v_2) + \frac{4 \cdot 0,5EI_1}{0,8l_1} \varphi_2(v_3) = \frac{EI_1}{l_1} \bar{r}_{11}; \\ \bar{r}_{11} &= 3 - 0,5\varphi_5(v_2) + 2,5\varphi_2(v_3). \end{aligned}$$

З вузла на другій епюрі (рис. 1.20, б):

$$\begin{aligned} r_{12} &= -\frac{6EI_3}{l_3^2} \varphi_4(v_3) = -\frac{6 \cdot 0,5EI_1}{(0,8l_1)^2} \varphi_4(v_3) = \frac{EI_1}{l_1^2} \bar{r}_{12}; \\ \bar{r}_{12} &= -4,69\varphi_4(v_3). \end{aligned}$$

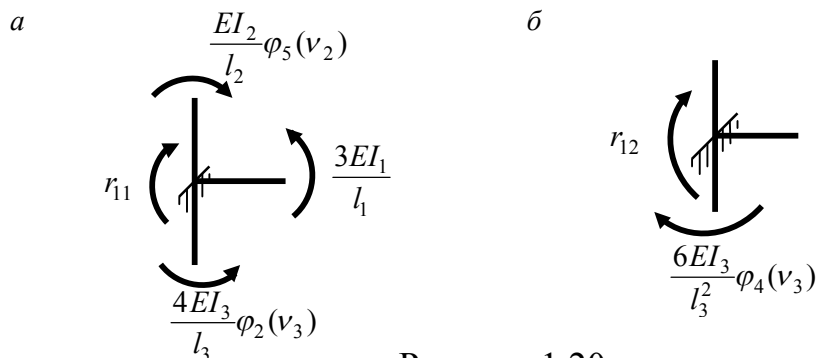


Рисунок 1.20

Зауважимо, що після підстановки заданих співвідношень жорсткостей та довжин стержнів вирази реакцій подані як добуток розмірної частини (в r_{12} – це EI_1 / l_1^2) та безрозмірної функції параметрів стійкості (в r_{12} – це $\bar{r}_{12} = -4,69\varphi_1(v_3)$).

Реакції у другій в'язі (опорному стержні) одержимо розглядаючи рівновагу ригеля під дією поперечних сил у розрізаних стержнях (рис. 1.21). Поперечні сили визначаються через реакції відповідних стержнів у таблиці 4 [3].

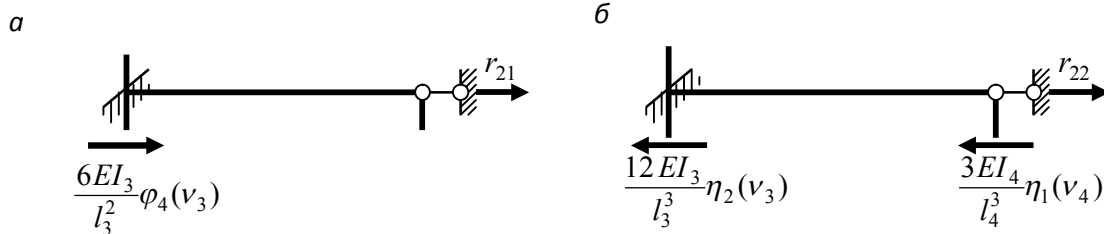


Рисунок 1.21

З рівноваги ригеля на першій одиничній епюрі (рис. 1.21, *a*) маємо:

$$\sum x = 0; \quad r_{21} = -\frac{6EI_3}{l_3^2}\varphi_4(v_3) = r_{21}.$$

З рівноваги ригеля на другій одиничній епюрі (рис. 1.21, *a*):

$$\begin{aligned} \sum x = 0; \quad r_{22} &= \frac{12EI_3}{l_3^3}\eta_2(v_3) + \frac{3EI_4}{l_4^3}\eta_1(v_4) = \\ &= \frac{12 \cdot 0,5EI_1}{(0,8l_1)^3}\eta_2(v_3) + \frac{3 \cdot 1,2EI_1}{l_1^3}\eta_1(v_4) = \frac{EI_1}{l_1^3}\bar{r}_{22}; \\ \bar{r}_{22} &= 11,73\eta_2(v_3) + 3,6\eta_1(v_4). \end{aligned}$$

У цих виразах безрозмірні реакції так само, як і у попередніх, є множниками при розмірних частинах повних виразів реакцій.

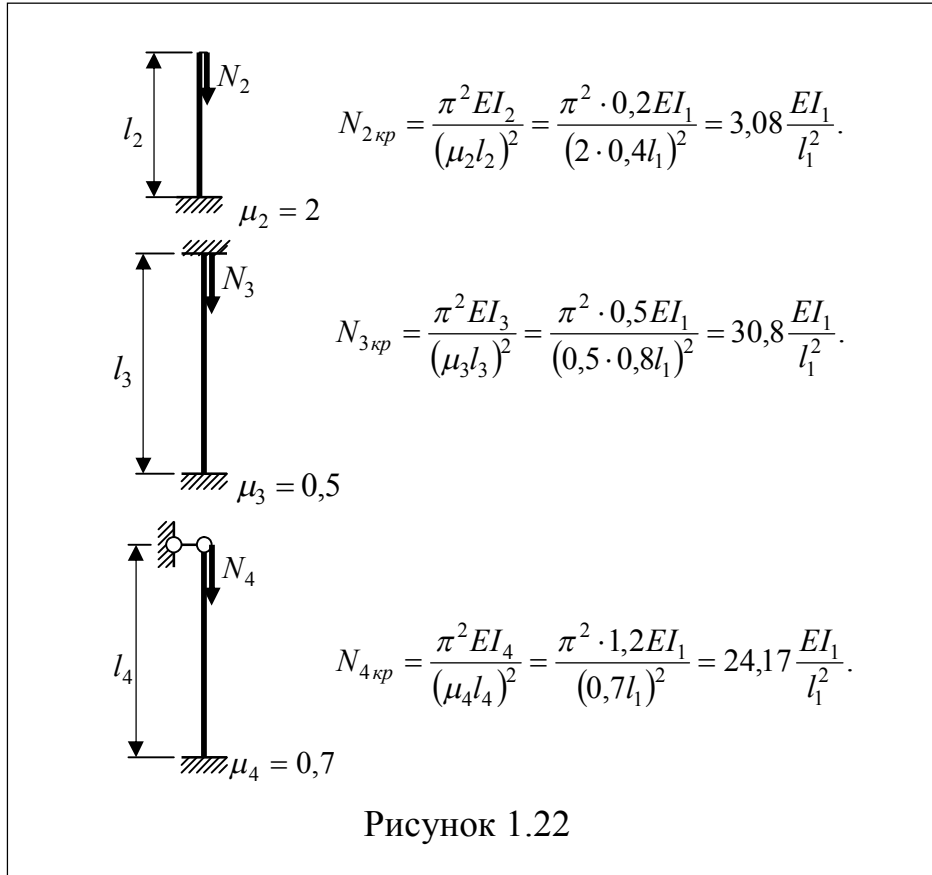
Рівняння стійкості системи одержимо з умови рівності нулю визначника канонічних рівнянь:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0; \\ r_{11}r_{22} - (r_{12})^2 &= \frac{EI_1}{l_1}\bar{r}_{11} \cdot \frac{EI_1}{l_1^3}r_{22} - \left(\frac{EI_1}{l_1^2}r_{12}\right)^2 = \left(\frac{EI_1}{l_1^2}\right)^2 \cdot (\bar{r}_{11}\bar{r}_{22} - \bar{r}_{12}^2) = \left(\frac{EI_1}{l_1^2}\right)^2 \cdot \bar{D} = 0; \\ \bar{D} &= \bar{r}_{11}\bar{r}_{22} - \bar{r}_{12}^2 = 0. \end{aligned}$$

Рівняння стійкості є трансцендентним рівнянням відносно параметрів стійкості стержнів. Оскільки його розв'язок необхідно шукати шляхом підбору, важливо обмежити інтервал пошуку. Для цього знайдемо верхню межу значення параметра стійкості використовуючи той факт, що критична сила

заданої рами не може перевищувати критичну силу її основної системи. Дійсно, в основній системі добавлені в'язі, тобто її жорсткість, а отже і критична сила, буде не меншою, ніж критична сила заданої рами.

Розглядаючи окремі стержні основної системи, знайдемо критичні значення поздовжніх сил (рис. 1.22).



Враховуючи співвідношення між поздовжніми силами, та заданим навантаженням, одержимо критичні сили, що відповідають умовам стійкості окремих стержнів:

$$F_{кр}^{(2)} = N_{2кр} = 3,08 \frac{EI_1}{l_1^2}; \quad F_{кр}^{(3)} = \frac{N_{3кр}}{3} = \frac{30,8}{3} \frac{EI_1}{l_1^2} = 10,27 \frac{EI_1}{l_1^2};$$

$$F_{кр}^{(4)} = N_{4кр} = 24,17 \frac{EI_1}{l_1^2}.$$

Критична сила основної системи буде найменшою з одержаних:

$$F_{кр}^{o.c.} = \min(F_{кр}^{(i)}) = 3,08 \frac{EI_1}{l_1^2}.$$

Підставляючи це значення у вираз параметра стійкості, одержимо критичне значення параметра стійкості для основної системи:

$$v_{кр}^{o.c.} = l_1 \sqrt{\frac{3,08 \frac{EI_1}{l_1^2}}{EI_1}} = 1,75.$$

Отже значення критичного параметру для заданої рами розташовано в інтервалі $0 \leq v_{кр} \leq 1,75$.

Поділяючи інтервал приблизно на 4 частини, обираємо крок пошуку:

$$\Delta v \approx \frac{v_{кр \max}}{4} = \frac{1,75}{4} \approx 0,4.$$

Обчислення виконуємо у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

крок	v	v_2	v_3	v_4	$\varphi_5(v_2)$	$\varphi_2(v_3)$	$\varphi_4(v_3)$	$\eta_2(v_3)$	$\eta_1(v_4)$	\bar{r}_{11}	\bar{r}_{12}	\bar{r}_{22}	\bar{D}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	5,5	4,69	15,33	62,3
2	0,4	0,36	0,78	0,36	0,136	0,981	0,99	0,939	0,936	5,38	4,64	14,4	55,9
3	0,8	0,78	1,57	0,73	0,772	0,915	0,958	0,753	0,757	4,9	4,49	11,56	36,5
4	1,2	1,07	2,35	1,10	1,96	0,800	0,904	0,444	0,513	4,02	4,24	7,05	10,36
5	1,6	1,43	3,14	1,46	10,15	0,617	0,823	0,001	0,137	-0,532	3,86	0,51	-15,2
6	1,36	1,22	2,66	1,24	3,33	0,738	0,876	0,286	0,379	3,18	4,11	4,72	-1,88

Першому кроку відповідає значення $v = v_2 = v_3 = v_4 = 0$. Відповідні значення функцій параметрів стійкості обчислюємо за формулами:

$$\varphi_1(v) = \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}; \quad \varphi_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)};$$

$$\varphi_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}; \quad \varphi_4(v) = \varphi_1\left(\frac{v}{2}\right);$$

$$\varphi_5(v) = v \operatorname{tg} v; \quad \eta_1(v) = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)};$$

$$\eta_2(\eta) = \eta_1(v/2); \quad \eta_3(v) = v^2.$$

Ці значення можна одержати також з таблиць 5,,6 [3]. Отже, при $v^{(1)} = 0$

$$\varphi_5(v_2) = 0, \varphi_2(v_3) = \varphi_4(v_3) = \eta_2(v_3) = \eta_1(v_4) = 1.$$

Обчислюємо безрозмірні реакції:

$$\bar{r}_{11} = 3 - 0,5\varphi_5(v_2) + 2,5\varphi_2(v_3) = 3 - 0,5 \cdot 0 + 2,5 \cdot 1 = 5,5;$$

$$\bar{r}_{12} = -4,69\varphi_4(v_3) = -4,69\bar{r}_{21};$$

$$\bar{r}_{22} = 11,73\eta_2(v_3) + 3,6\eta_1(v_4) = 11,73 + 3,6 = 15,33.$$

Відповідне значення визначника: $\bar{D}(v^{(1)}) = 5,5 \cdot 15,33 + (-4,69)^2 = 62,3$.

На другому кроці прийmemo $v^{(2)} = v^{(1)} + \Delta = 0,4$ і виконуємо аналогічні обчислення, результати яких наведені у другому рядку таблиці 1.1.

Паралельно з обчисленнями будуємо графік залежності $\bar{D}(v)$, наведений на рисунку 1.23.

Після досягнення від'ємного значення визначника $\bar{D}^{(5)} = -15,2$ наступне значення параметра стійкості приймаємо за інтерполяцією між найближчими значеннями, що відповідають додатному та від'ємному значення визначника:

$$v^{(6)} = 1,2 + (1,6 - 1,2) \cdot \frac{10,36}{10,36 + 15,17} = 1,36$$

і перевіряємо його процентне відхилення від найближчого параметра, для якого були виконані обчислення:

$$\varepsilon = \frac{1,36 - 1,2}{1,2} \cdot 100\% = 13,3\%.$$

Це значення перевищує граничне відхилення, яке приймаємо, становить 2,5 %, отже необхідно продовжити обчислення. Відповідне значення визначника за таблицею 1 становить $\bar{D}^{(6)} = -1,88$.

Знову за інтерполяцією знаходимо

$$v^{(7)} = 1,2 + (1,36 - 1,2) \cdot \frac{10,36}{10,36 + 1,88} = 1,34.$$

Процентне відхилення від найближчого параметра, для якого були виконані обчислення:

$$\varepsilon = \frac{1,36 - 1,34}{1,36} \cdot 100\% = 1,5\%.$$

Оскільки відхилення не перевищує 2,5 % значення $v^{(7)}$ можна прийняти як критичне: $v_{кр} = 1,34$.

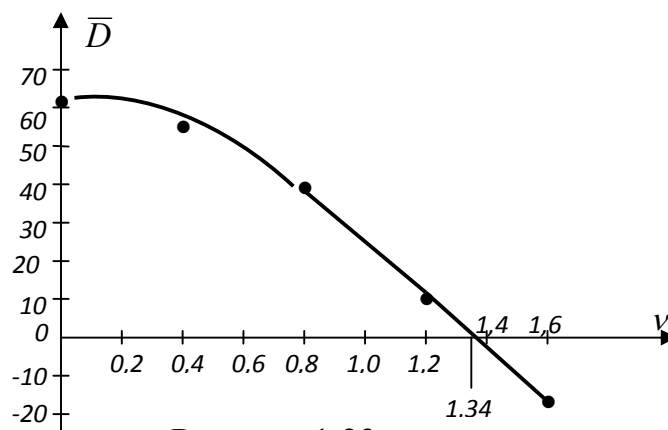


Рисунок 1.23

Тепер з виразу для параметру стійкості $\nu = l_1 \sqrt{\frac{F}{EI_1}}$ одержимо критичну силу для заданої рами:

$$F_{кр} = \frac{\nu^2 EI_1}{l_1^2} = \frac{1,34^2 EI_1}{l_1^2} = 1,8 \frac{EI_1}{l_1^2}.$$

12. Визначити критичну силу для рами, наведеної на рисунку 1.24, а.

Розв'язання. Для визначення зусиль у стержнях у висхідному стані вирізаємо вузол (рис. 1.24, б). З умов рівноваги одержимо: $N_1 = F$; $N_2 = 0$.

Параметри стійкості стержнів: $\nu_1 = l_1 \sqrt{\frac{N_1}{EI_1}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{F}{EI}} = 3\nu$; $\nu_2 = 0$.

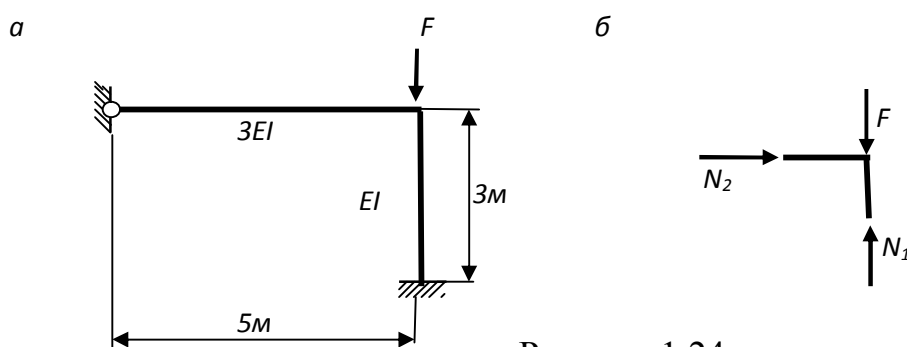


Рисунок 1.24

Ступінь кінематичної невизначуваності рами – один (один жорсткий вузол, лінійні зміщення вузлів відсутні). Основна система наведена на рисунку 1.25, а

Канонічне рівняння методу переміщень буде одне: $r_{11} Z_1 = 0$.

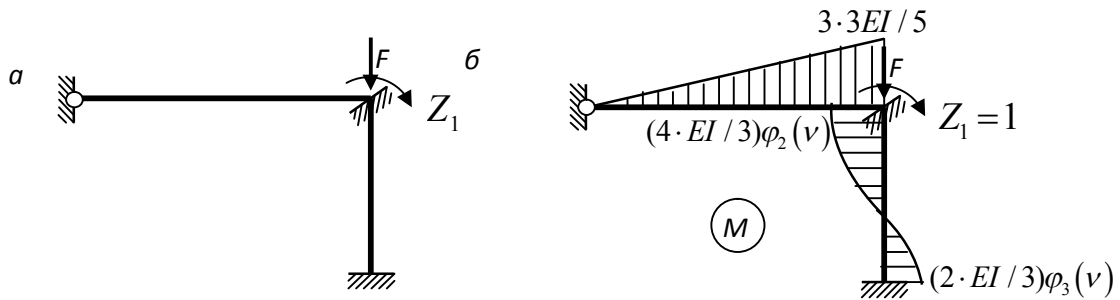


Рисунок 1.25

Вирізаючи вузол (рис. 1.26), знаходимо реакцію у плаваючому затисненні при одиничному зміщенні:

$$\sum M = 1,8EI + 1,333EI\varphi_2(v) - r_{11} = 0,$$

звідки маємо:

$$r_{11} = 1,8EI + 1,333EI\varphi_2(v) = EI[1,8 + 1,333\varphi_2(v)].$$

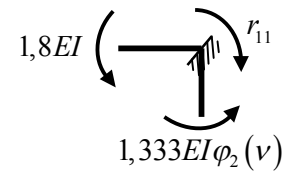


Рисунок 1.26

Рівняння стійкості рами відповідає рівності нулю реакції в плаваючому затисненні:

$$r_{11} = EI[1,8 + 1,333\varphi_2(v)] = 0.$$

З цієї умови одержуємо:

$$\varphi_2(v) = -1,8 / 1,333 = -1,35.$$

Отже величина $v_{кр}$ відповідає значенню $\varphi_2(v) = -1,35$. Цю величину можна одержати з співвідношення $\varphi_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8\operatorname{tg} v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)} = -1,35$ шляхом

підбору або з таблиці 5 [3]: $v_{кр} = 5,48$.

З позначення для v_1 знаходимо:

$$F_{кр} = v_{кр}^2 EI = 5,48^2 EI = 30,03EI.$$

13. Знайти критичне значення інтенсивності розподіленого навантаження для рами, наведеної на рисунку 1.27, а якщо $EI = 250 \text{ кНм}^2$.

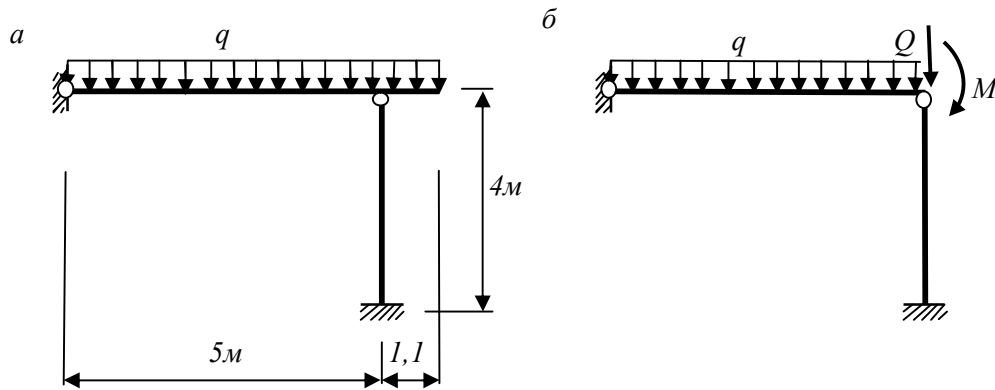


Рисунок 1.27

Розв'язання. Відкидаючи статично визначувану консоль, прикладаємо на правому кінці ригеля відповідні поперечну силу $Q = q \cdot 1,1 = 1,1q$ та момент $M = \frac{q \cdot 1,1^2}{2} = 0,605q$. Як бачимо єдиний вузол одержаної рами шарнірний і не може зміщуватися, отже рама кінематично визначувана, тобто кожен її стержень втрачає стійкість незалежно від іншого. Неважко упевнитись в тому, що ригель рами не зазнає стиску, а отже не може втратити стійкість. У такому випадку необхідно далі за формулою Ейлера знайти критичне значення поздовжньої сили для стояка. При одному жорсткому, а іншому шарнірному кінцях стержня коефіцієнт зведення довжини становить $\mu = 0,7$, отже маємо:

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 250}{(0,7 \cdot 4)^2} = 314,4 \text{ кН}.$$

Розглядаючи ригель як балку на двох шарнірних опорах, знайдемо реакцію у її правій опорі, а отже і поздовжню силу у стояку через розподілене навантаження:

$$R = N = \frac{ql}{2} + \frac{M}{l} + Q = \frac{q \cdot 5}{2} + \frac{0,605q}{5} + 1,1q = 3,721q.$$

Порівнюючи це значення з критичним значенням поздовжньої сили $3,721q = 6288$, одержуємо критичне навантаження для заданої рами:

$$q_{кр} = \frac{314,4}{3,721} = 85 \text{ кН/м}.$$

14. Методом скінченних різниць знайти критичну силу для консольного стиснутого стержня, жорсткість якого змінюється за виразом

$$EI = EI_0 \left(1 + \cos \frac{\pi x}{2l} \right), \text{ де } EI_0 \text{ – жорсткість у затисненні.}$$

Розв'язання. Диференціальне рівняння зігнутої осі консольного стержня (рис. 1,28, а) має такий вигляд:

$$EIy'' = F(v - y).$$

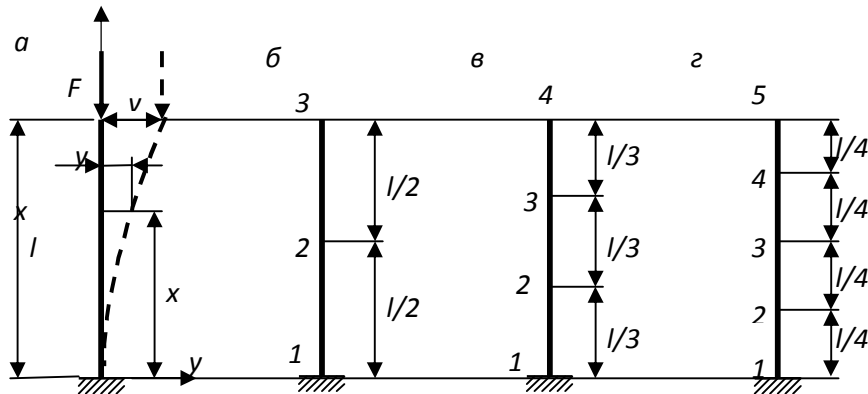


Рисунок 1.28

В скінченних різницях це рівняння для точки з номером i набуває такого вигляду:

$$EI_i \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = F(v - y_i),$$

де h – довжина ділянки стержня.

Розбиваючи стержень на дві ділянки (рис. 1.28, б), складаємо диференціальне рівняння у скінченних різницях для проміжної точки 2:

$$EI_2 \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{(l/2)^2} = F(v - y_2).$$

До одержаного рівняння додаємо граничні умови у скінченних різницях:

$$y_1 = 0; \quad y_3 = v; \quad \theta_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_1 = \frac{y_2 - y_1}{l/2} = 0 \text{ або } y_2 = y_1 = 0.$$

Підставляючи граничні умови, після перетворень диференціальне рівняння у скінченних різницях набуває такого вигляду:

$$\left(\frac{4EI_2}{l^2} - F \right) y_3 = 0.$$

Оскільки $y_3 \neq 0$, звідси одержимо: $F_{кр} = \frac{4EI_2}{l^2}$ або з урахуванням, що для

точки 2 (при $x=l/2$) $EI_2 = EI_0 \left(1 + \cos \frac{\pi(l/2)}{2l} \right) = 2EI_0$, маємо:

$$F_{кр}^{(2)} = \frac{8EI_0}{l^2}.$$

Далі розбиваємо стержень на три ділянки (рис. 1.28, в) і складаємо рівняння у скінченних різницях для проміжних точок 2 та 3:

$$EI_2 \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{(l/3)^2} = F(v - y_2)$$

$$EI_3 \frac{y_2 - 2y_3 + y_4}{(l/3)^2} = F(v - y_3).$$

Граничні умови у цьому випадку мають такий вигляд: $y_1 = 0$; $y_4 = v$; $y_2 = y_1$, а жорсткості перерізів такі:

$$EI_2 = EI_0 \left(1 + \cos \frac{\pi l / 3}{2l} \right) = 1,866 EI_0, \quad EI_3 = EI_0 \left(1 + \cos \frac{\pi \cdot 2l / 3}{2l} \right) = 2,5 EI_0.$$

$$16,79 \frac{EI_0}{l^2} y_3 - F y_4 = 0;$$

$$\left(F - 45 \frac{EI_0}{l^2} \right) y_3 - \left(F - 22,5 \frac{EI_0}{l^2} \right) y_4 = 0.$$

Розв'язок цієї системи лінійних алгебраїчних рівнянь при $y_3 \neq 0$, $y_4 \neq 0$ відповідає рівності нулю визначника

$$\begin{vmatrix} 16,79 \frac{EI_0}{l^2} & -F \\ \left(F - 45 \frac{EI_0}{l^2} \right) & -\left(F - 22,5 \frac{EI_0}{l^2} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник та зводячи подібні, приходимо до рівняння стійкості у такому вигляді:

$$F^2 - 61,79 \frac{EI_0}{l^2} F + 377,8 \left(\frac{EI_0}{l^2} \right)^2 = 0.$$

Розв'язок цього квадратного рівняння

$$F = 30,9 \frac{EI_0}{l^2} \mp \sqrt{\left(30,9 \frac{EI_0}{l^2} \right)^2 - 377,8 \left(\frac{EI_0}{l^2} \right)^2} = (30,9 \mp 24,0) \frac{EI_0}{l^2}$$

дає два кореня: $F_1 = 6,9 \frac{EI_0}{l^2}$; $F_2 = 54,9 \frac{EI_0}{l^2}$, менший з яких є критичною силою:

$$F_{кр}^{(3)} = F_1 = 6,9 \frac{EI_0}{l^2}.$$

Нагадаємо, що одержане значення критичної сили більше дійсного, оскільки застосування скінченних різниць еквівалентне накладанню на систему

деяких в'язей. Як відомо, це приводить до підвищення жорсткості системи, а отже, і збільшення критичної сили.

Бажано самостійно записати рівняння у скінченних різницях при поділенні стержня на чотири частини (рис. 1.28, з).

1.3 Динаміка стержневих систем

Теоретичний матеріал та питання для самоперевірки наведені у розділі 3 [3], розділі 4 [7] та ін.

Вправи

- 15.** Обчислити власну частоту коливань невагомої балки, наведеної на рисунку 1. 29, а, якщо жорсткість її перерізу становить $EI = 200 \text{ кНм}^2$, а сила, що розвивається точковою масою на її кінці $G=6 \text{ кН}$.

Розв'язання. Нехтуючи позовжніми деформаціями балки, маємо систему з одним ступенем вільності: можливими залишаються лише вертикальні коливання маси. У такому разі колова частота власних коливань може бути

обчислена за формулою: $\omega = \sqrt{\frac{g}{G\delta_{11}}}$.

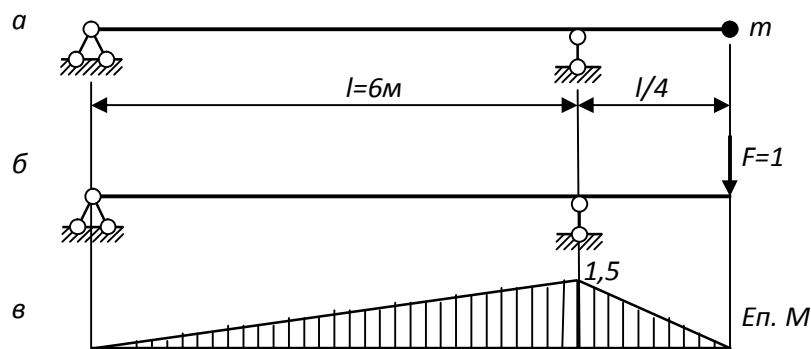


Рисунок 1.29

Прискорення вільного падіння $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, а для визначення переміщення δ_{11} завантажимо балку одиничною силою у напрямку зміщень маси (рис. 1.28, б) і побудуємо епюру згинаючих моментів \bar{M} (рис. 1.29, в). Виконуючи помноження цієї епюри самої з собою за правилом Верещагіна, одержимо:

$$\delta_{11} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}\bar{M}dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{6 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 + \frac{1,5 \cdot 1,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 \right) = \frac{5,625}{200} = 0,0281 \text{ м/кН}.$$

Тепер можна визначити частоту коливань:

$$\omega = \sqrt{\frac{9,81}{6 \cdot 0,0281}} = 7,62 \text{ рад/с.}$$

16. Визначити частоту власних коливань балки, розглянутої у вправі 3.1, якщо права опора є пружною і має жорсткість $c=1 \text{ см/кН}$ (рис. 1.30, а).

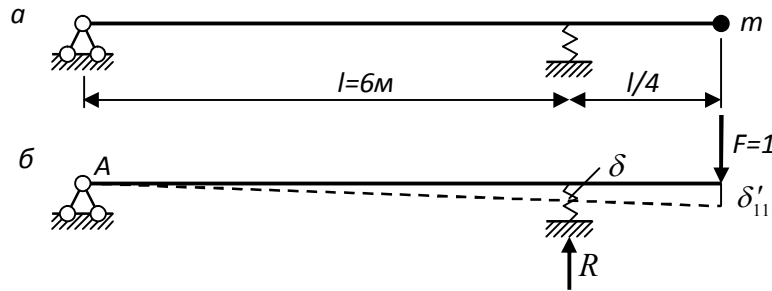


Рисунок 1.30

Розв'язання. Порівняно з попередньою вправою від дії одиничної сили у напрямку зміщення маси з'являється додаткове переміщення δ'_{11} за рахунок осідання пружної опори. Розглядаючи балку, завантажену одиничною силою (рис. 1.30, а), з умови рівноваги визначаємо реакцію R у правій опорі:

$$\sum M_A = R \cdot 6 - F \cdot 7,5 = 0; \quad R = \frac{6}{7,5} = 0,8 \text{ кН.}$$

Отже величина осідання опори становить $\delta = R \cdot \delta = 0,8 \cdot 0,01 = 0,008 \text{ м / кН}$. З подоби трикутників на епюрі переміщень балки визначаємо:

$$\delta'_{11} = \frac{\delta}{6} \cdot 7,5 = 0,008 \cdot 1,25 = 0,01 \text{ м/кН.}$$

Тепер повне переміщення маси від дії одиничної сили становить $\delta_{11} = 0,0281 + 0,01 = 0,0381 \text{ м / кН}$ і частота власних коливань маси:

$$\sqrt{\frac{9,81}{6 \cdot 0,0381}} = 6,55 \text{ рад/с.}$$

Як бачимо, збільшення піддатливості балки привело до зменшення частоти власних коливань.

17. Визначити частоту власних коливань рами, наведеної на рисунку 1.31, а. Стержні рами вважати невагомими, поздовжніми деформаціями нехтувати.

Розв'язання. При неврахуванні поздовжніх деформацій маса може зміщуватися лише вдовж вертикалі, отже маємо систему з одним ступенем вільності. У такому разі частоту вільних коливань можна обчислити за формулою:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}.$$

Для визначення одиничного переміщення δ_{11} прикладаємо одиничну силу у напрямку цього переміщення і, застосовуючи метод переміщень, обираємо основну систему, як показано на рисунку 1.36, б. (Розрахунок рам методом переміщень див. у гл. 5 [2]) Епюри згинаючих моментів в основній системі від одиничного зміщення плаваючого затиснення та від одиничної сили побудовані відповідно на рисунках 1.36, в та 1.36, г.

Канонічне рівняння методу переміщень запишеться так:

$$r_{11}Z_1 + R_{1f} = 0.$$

Одиничну та вантажну реакції у плаваючому затисненні визначаємо вирізаючи вузол, як показано на рисунку 1.37. З умов рівноваги вузла одержимо:

$$r_{11} = 16EI / l + 4EI / l = 20EI / l; R_{1f} = l / 8.$$

З канонічного рівняння знаходимо поворот вузла:

$$Z_1 = -R_{1f} / r_{11} = -\frac{l}{8 \cdot 20EI} = -\frac{l^2}{160EI}.$$

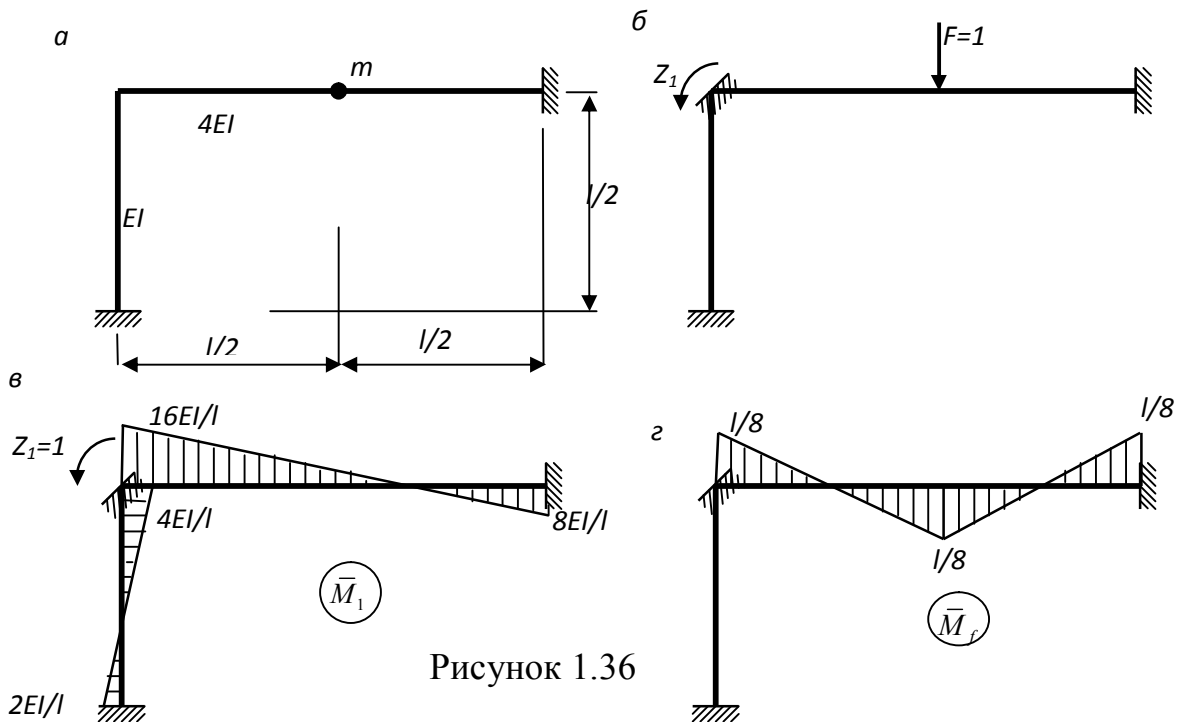


Рисунок 1.36

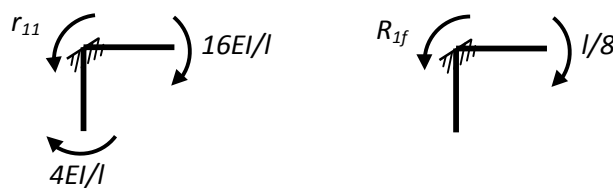


Рисунок 1.37

Далі, обчислюючи моменти за виразом $M = \bar{M}_f + \bar{M}_1 Z_1$, побудуємо остаточну епюру моментів від дії одиничної сили вздовж переміщення маси (рис. 1.38,а). Обравши зручну статично визначувану систему, будуємо в ній епюру \bar{M} від дії одиничної сили (рис. 1,38, б).

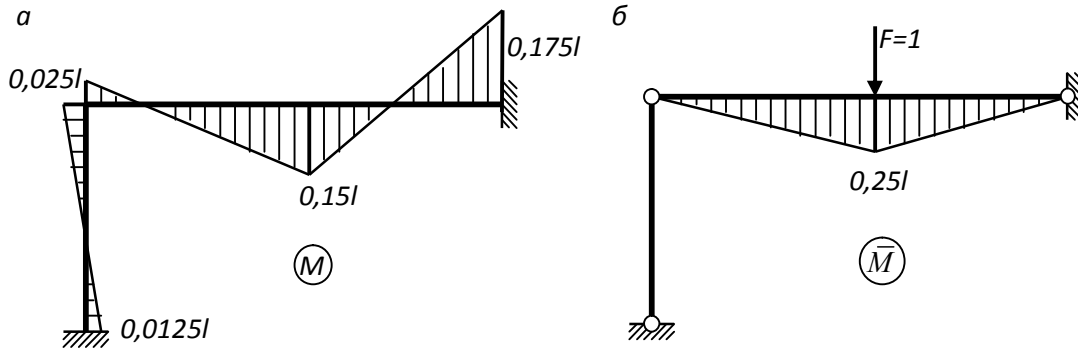


Рисунок 1.38

Тепер за формулою Мора з застосуванням правила Верещагіна та формули Сімпсона визначаємо одиничне переміщення:

$$\delta_{11} = \sum \frac{1}{EI} \int M \bar{M} dx = \frac{1}{4EI} \frac{0,5l \cdot 0,25l}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 0,25l - \frac{1}{3} \cdot 0,15l + \frac{2}{3} \cdot 0,25l - \frac{1}{3} \cdot 0,175l \right) = 0,00351l^3 / EI$$

і далі:

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{m \cdot 0,00351l^3}} = 16,87 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

18. На ригелі рами (рис. 1.39, а) розташований двигун, вага якого $G=6 \text{ кН}$, вага ротора в ньому $G_p=2 \text{ кН}$. Кількість обертів ротора $n=630 \text{ об/хв}$. Ригель рами виготовлено з двотавра № 14, жорсткість стояка у чотири рази менше. Знайти найбільше нормальне напруження у перерізі ригеля, якщо прогін ригеля $l=6 \text{ м}$, а центр ваги ротора зміщений від осі вала на $e=2 \text{ мм}$.

Розв'язання. Для двотавра №14 за сортаментом маємо: $I=572 \text{ см}^4$. Отже жорсткість його перерізу $EI = 2,1 \cdot 10^8 \cdot 572 \cdot 10^{-8} = 1201 \text{ кНм}^2$.

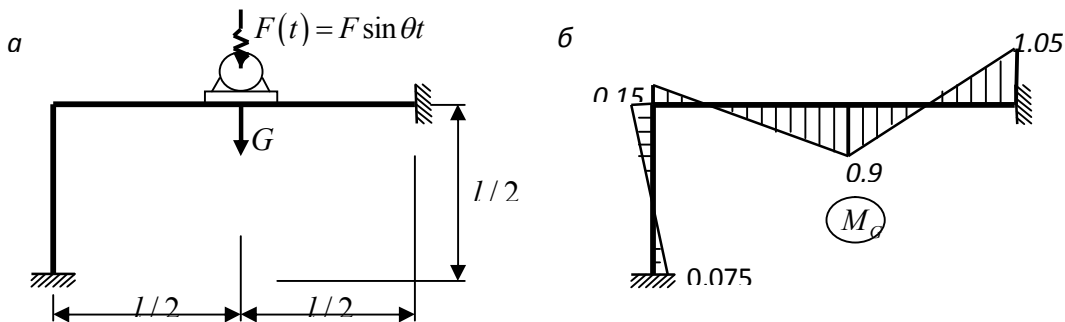


Рисунок 1.39

Вага погонного метра двотавра №14 становить $13,7 \text{ кГс/м} = 0,137 \text{ кН/м}$, тобто вага ригеля становить $0,137 \cdot 6 = 0,82 \text{ кН}$. Ця вага складає приблизно 0,14 від ваги двигуна, отже масою ригеля порівняно з масою двигуна можна нехтувати і вважати його невагомим.

Оскільки співвідношення жорсткостей та довжин ригеля і стояка співпадають з наведеними у вправі 3.3, можна скористатися виконаними там розрахунками. У цьому разі епюру згинаючих моментів від ваги ротора (рис. 1.39, б) одержимо помножуючи ординати епюри (рис. 1.38, а) на $G = 6 \text{ кН}$.

Так само з результатів розрахунку вправі 3.3 одержимо частоту власних коливань системи при $m = G / g = 6 / 9,81 = 0,612 \text{ кНс}^2/\text{м}$:

$$\omega = 16,87 \sqrt{\frac{1201}{0,612 \cdot 6^3}} = 50,8 \text{ рад/с.}$$

19. Визначити частоти вільних коливань рами, наведеної на рисунку 1.40, а, і побудувати епюри згинаючих моментів від дії гармонічної сили $F(t) = F \sin \theta t$, якщо $F = 60 \text{ кН}$; $\theta = 0,75\omega_1$; $m_1 = 3000 \text{ кГ}$; $m_2 = 2000 \text{ кГ}$. Стержень 1 виконаний з двотавра №30, стержень 2 – з двотавра №36, стержень 3 – з двотавра №40.

Розв'язання.

Визначаємо кількість ступенів вільності системи. За сортаментом погонні маси двотаврів: №30 – 0,0365 т/м; №36 – 0,0486 т/м; №40 – 0,057 т/м. Повна маса стержнів рами становить $0,0365 \cdot 3 + 0,0486 \cdot 2,5 + 0,057 \cdot 2 = 0,345 \text{ т}$. Ця величина значно менше за точкові маси, розташовані на рамі, отже стержні рами можна вважати невагомими. Тоді, на основі характеру деформацій рами робимо висновок, що кожна маса може зміщуватися незалежно одна від одної у напрямках v_1, v_2 , показаних на рисунку 1.40, б. Отже система має два ступеня вільності: $n=2$.

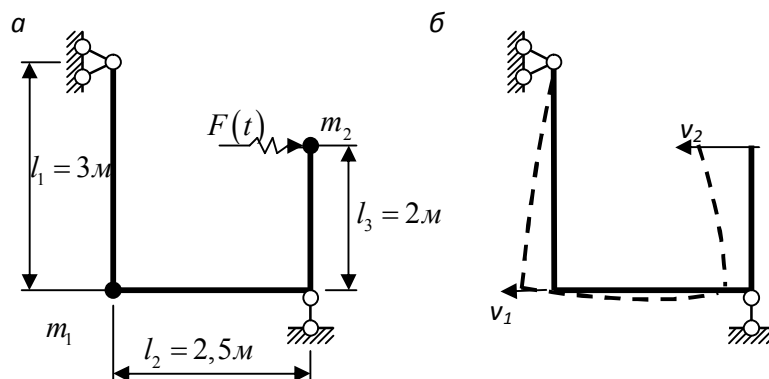


Рисунок 1.40

Обчислюємо одиничні зміщення мас. Для цього побудуємо епюри моментів від одиничних сил, спрямованих вздовж зміщень мас (рис. 1.41).

Перемножуючи епюри за правилом Верещагіна, одержуємо:

$$\delta_{11} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_1 \bar{M}_1 dx = \frac{1}{EI_1} \frac{3 \cdot 3}{2} \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EI_2} \frac{3 \cdot 2,5}{2} \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{9}{EI_1} + \frac{7,5}{EI_2};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_1 \bar{M}_2 dx = \frac{1}{EI_1} \frac{3 \cdot 3}{2} \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EI_2} \frac{3 \cdot 2,5}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \right) = \frac{9}{EI_1} + \frac{10}{EI_2};$$

$$\delta_{22} = \sum \frac{1}{EI} \int \bar{M}_2 \bar{M}_2 dx = \frac{1}{EI_1} \frac{3 \cdot 3}{2} \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EI_2} \frac{2,5}{6} (3^2 + 4 \cdot 2,5^2 + 2^2) + \frac{1}{EI_3} \frac{2 \cdot 2}{2} \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{9}{EI_1} + \frac{15,833}{EI_2} + \frac{2,667}{EI_3}.$$

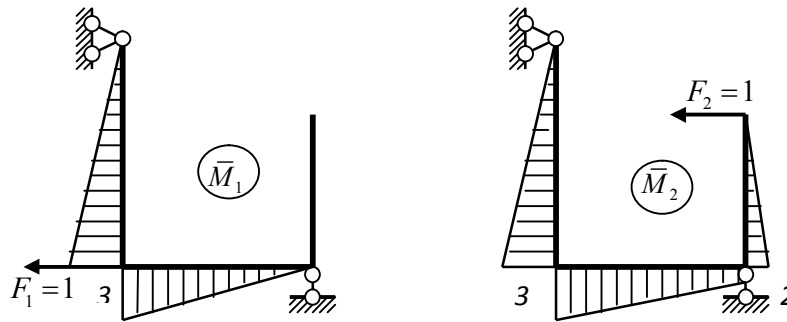


Рисунок 1.41

З урахуванням жорсткостей стержнів $EI_1 = 2 \cdot 10^8 \cdot 7080 \cdot 10^{-8} = 14160 \text{ кПа}$; $EI_2 = 2 \cdot 10^8 \cdot 13380 \cdot 10^{-9} = 26760 \text{ кПа}$; $EI_3 = 2 \cdot 10^8 \cdot 19062 \cdot 10^{-8} = 38124 \text{ кПа}$ маємо:

$$\delta_{11} = \frac{9}{14160} + \frac{7,5}{26760} = 9,159 \cdot 10^{-4}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{9}{14160} + \frac{10}{26760} = 10,093 \cdot 10^{-4};$$

$$\delta_{22} = \frac{9}{14160} + \frac{15,833}{26760} + \frac{2,667}{38124} = 12,972 \cdot 10^{-4}.$$

Складаємо рівняння частот вільних коливань рами. Запишемо рівняння відносно амплітуд коливань системи з двома ступенями вільності:

$$\left(m_1 \delta_{11} - \frac{1}{\omega^2} \right) A_1 + m_2 \delta_{12} A_2 = 0;$$

$$m_1 \delta_{21} A_1 + \left(m_2 \delta_{22} - \frac{1}{\omega^2} \right) A_2 = 0.$$

Розв'язок цієї системи відповідає рівності нулю її визначника:

$$\begin{bmatrix} \left(m_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega^2}\right) & m_2\delta_{12} \\ m_1\delta_{21} & \left(m_2\delta_{22} - \frac{1}{\omega^2}\right) \end{bmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, після перетворень приходимо до рівняння частот у такому вигляді:

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2 - (m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22})\frac{1}{\omega^2} + m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) = 0.$$

Підставляючи значення мас та одиничних переміщень одержуємо рівняння другої степені відносно $\frac{1}{\omega^2}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2 - (3 \cdot 9,159 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 12,972 \cdot 10^{-4})\frac{1}{\omega^2} + \\ + 3 \cdot 2(9,159 \cdot 10^{-4} \cdot 12,972 \cdot 10^{-4} - 10,093^2 \cdot 10^{-8}) = 0 \end{aligned}$$

або
$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2 - 53,42 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\omega^2} + 101,7 \cdot 10^{-8} = 0.$$

Розв'язок рівняння частот дає два кореня:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{53,42 \cdot 10^{-4}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{53,42 \cdot 10^{-4}}{2}\right)^2 - 101,7 \cdot 10^{-8}} = (26,72 \pm 24,73) \cdot 10^{-4};$$

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)_1 = (26,72 + 24,73) \cdot 10^{-4} = 51,44 \cdot 10^{-4};$$

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)_2 = (26,72 - 24,73) \cdot 10^{-4} = 1,98 \cdot 10^{-4}.$$

Тепер можна визначити частоти власних коливань, інакше, власні частоти заданої системи:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{51,44 \cdot 10^{-4}}} = 13,9 \text{ рад/с}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{1,98 \cdot 10^{-4}}} = 71,1 \text{ рад/с}.$$

Знаходимо форми власних коливань. Першій формі відповідає таке співвідношення з першого рівняння відносно амплітуд:

$$\mu_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{m_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega_1^2}}{m_2\delta_{12}} = \frac{3 \cdot 9,159 \cdot 10^{-4} - 51,44 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10,093 \cdot 10^{-4}} = 1,19.$$

Перевірку цього значення виконаємо за другим рівнянням:

$$\mu_{21} = \frac{m_1 \delta_{21}}{m_2 \delta_{22} - \frac{1}{\omega_1^2}} = \frac{3 \cdot 10,093 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 12,972 \cdot 10^{-4} - 51,44 \cdot 10^{-4}} = 1,19.$$

Так само для другої власної форми маємо:

$$\mu_{22} = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{m_1 \delta_{11} - \frac{1}{\omega_2^2}}{m_2 \delta_{12}} = \frac{3 \cdot 9,159 \cdot 10^{-4} - 1,98 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10,093 \cdot 10^{-4}} = -1,26.$$

Перевірка за другим рівнянням амплітуд дає:

$$\mu_{22} = \frac{m_1 \delta_{21}}{m_2 \delta_{22} - \frac{1}{\omega_2^2}} = \frac{3 \cdot 10,093 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 12,972 \cdot 10^{-4} - 1,98 \cdot 10^{-4}} = -1,26.$$

Форми власних коливань схематично відображені на рисунку 1,42.

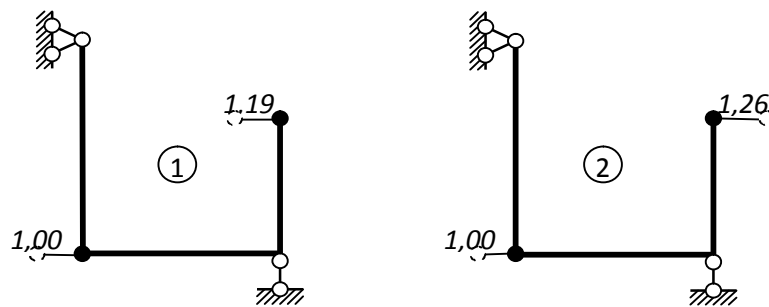


Рисунок 1.42

Перевіряємо ортогональність власних форм коливань:

$$m_1 + m_2 \mu_{21} \mu_{22} = 3 + 2 \cdot 1,19 \cdot (-1,26) = 3 - 2,999 = 0,001 \approx 0.$$

Неточність розрахунку становить $\varepsilon = \frac{0,001}{3} 100\% < 3\%$.

Для обчислення інерційних сил при дії збуджуючого навантаження запишемо рівняння відносно амплітуд інерційних сил:

$$\delta_{11}^* I_1 + \delta_{12} I_2 + \Delta_{1f} = 0;$$

$$\delta_{21} I_1 + \delta_{22}^* I_2 + \Delta_{2f} = 0.$$

За завданням частота збуджуючої сили становить $\theta = 0,75 \omega_1 = 0,75 \cdot 13,9 = 10,4 \text{ рад/с}$, отже головні коефіцієнти цих рівнянь будуть такі:

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2} = 9,159 \cdot 10^{-4} - \frac{1}{3 \cdot 10,4^2} = -2,166 \cdot 10^{-4};$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \cdot \theta^2} = 12,972 \cdot 10^{-4} - \frac{1}{2 \cdot 10,4^2} = -3,326 \cdot 10^{-4}.$$

Збуджуюча сила $F(t)$ діє вздовж переміщення v_2 . У зв'язку з цим епюру моментів від амплітудного значення збуджуючої сили можна одержати через одиничну епюру: $M_f = -M_2 F$ (рис. 1.43).

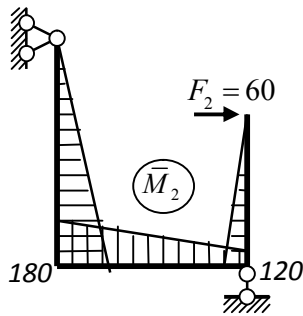


Рисунок 1.43

Так само через одиничні переміщення можна одержати переміщення від амплітудного значення збуджуючої сили:

$$\Delta_{1f} = -\delta_{12} F = -10,093 \cdot 60 = -0,06056;$$

$$\Delta_{2f} = -\delta_{22} F = -12,972 \cdot 60 = -0,07784.$$

Знак мінус у наведених виразах пояснюється тим, що додатні напрямки сили $F(t)$ та переміщення v_2 не співпадають, хоча він введений формально, оскільки сила з часом змінює свій напрямок на протилежний.

Тепер система рівнянь відносно амплітуд інерційних сил набуває такого вигляду:

$$\begin{cases} -2,166 \cdot 10^{-4} I_1 + 10,093 \cdot 10^{-4} I_2 - 0,06056 = 0; \\ 10,093 \cdot 10^{-4} I_1 - 3,326 \cdot 10^{-4} I_2 - 0,07784 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему одержуємо відповідні амплітуди:

$$I_1 = -45,26 \text{ кН}; \quad I_2 = -37,14 \text{ кН}.$$

Помножуючи одиничні епюри \bar{M}_1 та \bar{M}_2 (рис. 1.41) на відповідні значення I_1 та I_2 , одержимо епюри моментів від амплітуд інерційних сил (рис. 1.44, а, б). Підсумовуючи ці моменти з моментами M_f від амплітудного значення збуджуючої сили, одержимо згинаючі моменти від динамічного навантаження. Відповідна епюра наведена на рисунку 1.44, в.

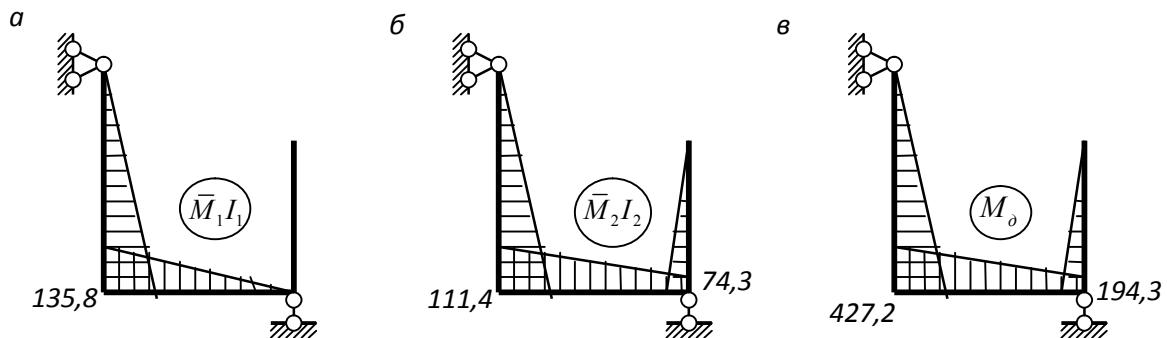


Рисунок 1.44

Обчислимо динамічний коефіцієнт за значеннями найбільшого динамічного моменту та відповідного моменту при статичній дії амплітудного значення збуджуючої сили:

$$\mu_d = \frac{M_d}{M_f} = \frac{427,2}{180} = 2,37.$$

Зазначимо, що це значення буде точним лише для згинаючого моменту у даному перерізі, хоча зазвичай його приймають для усіх зусиль та переміщень цієї рами.

20. Визначити число ступенів вільності та записати загальний вигляд рівняння частот для рами, наведеної на рисунку 1.45, *а*. Стержні рами вважати невагомими.

Розв'язання. Можливі деформації рами і напрямки переміщень маси показані на рисунку 1.45, *б*. Отже рама має два ступеня вільності.

Рівняння частот вільних коливань має такий самий вигляд, як у вправі 3.5:

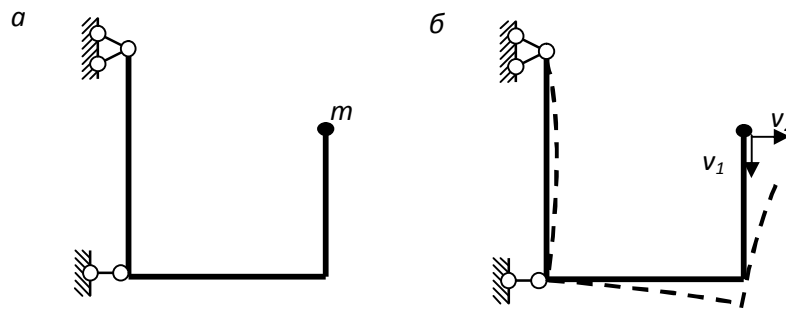


Рисунок 1.45

$$\left(\frac{1}{\omega^2}\right)^2 - (m_1\delta_{11} - m_2\delta_{22})\frac{1}{\omega^2} + m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) = 0.$$

Подальше розв'язання задачі виконується аналогічно попередній вправі.

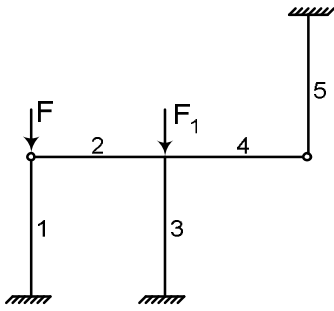
РОЗДІЛ 2 РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ

2.1 Робота № 1 Розрахунок рами на стійкість методом переміщень

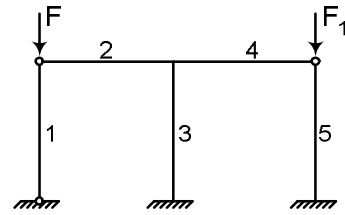
2.1.1 Завдання та вихідні дані

Схему рами та вихідні дані беруть за завданням викладача за рисунком 2.1 і таблицею 2.1

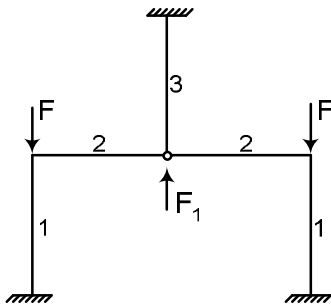
①



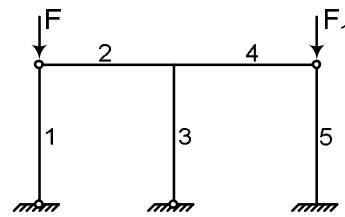
②



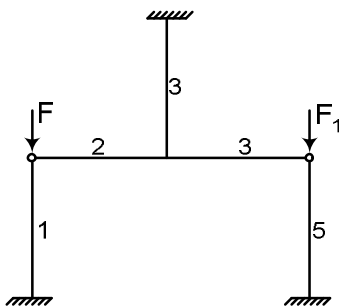
③



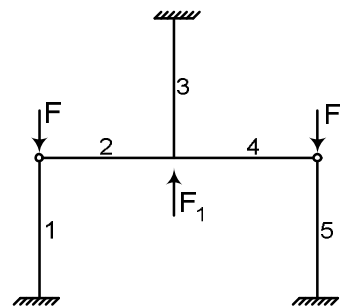
④



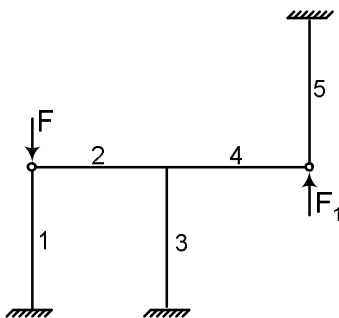
⑤



⑥



⑦



⑧

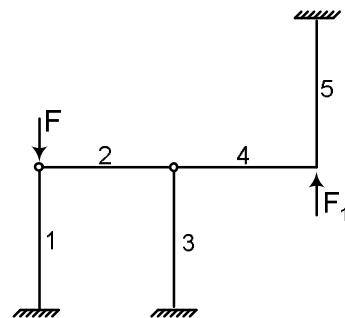
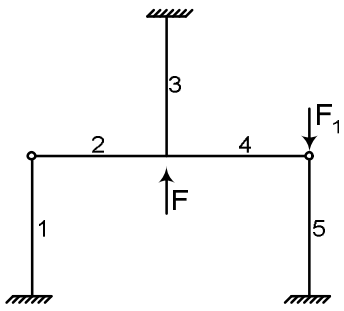
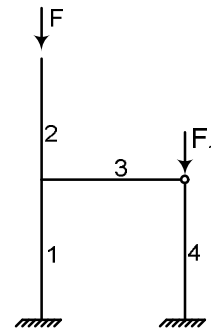


Рисунок 2.1

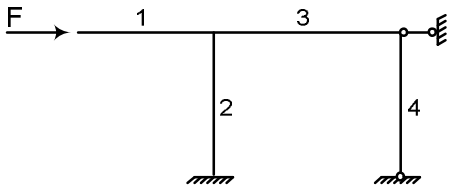
9



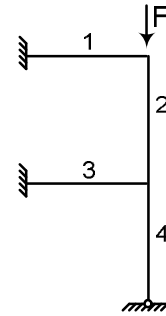
10



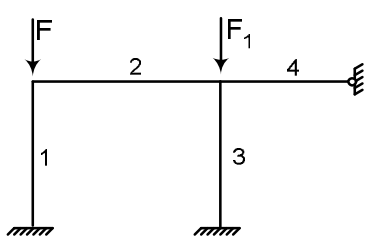
11



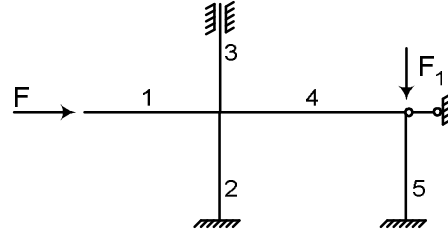
12



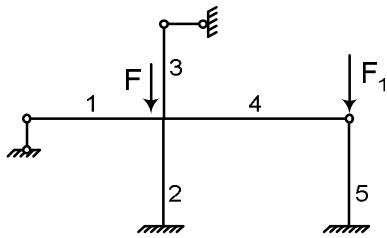
13



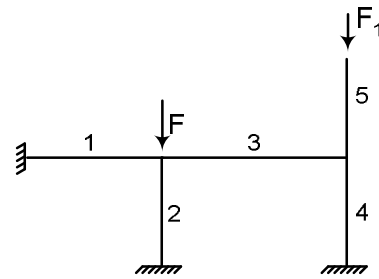
14



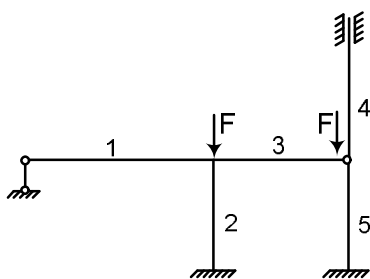
15



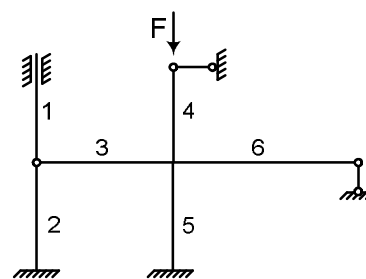
16



17

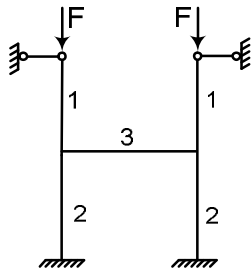


18

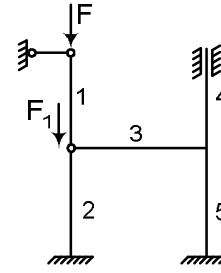


Продовження рисунка 2.1

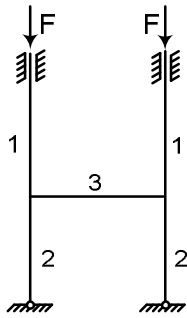
19



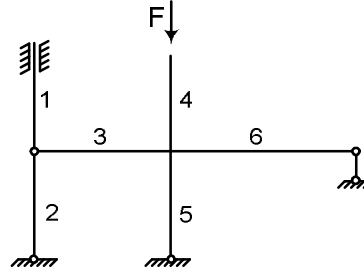
20



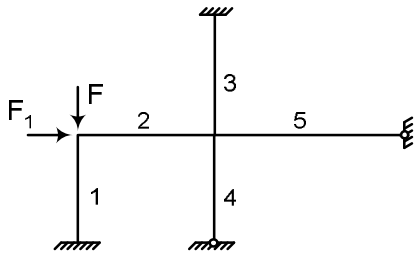
21



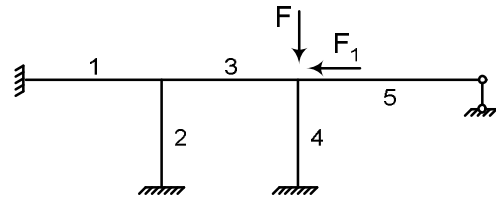
22



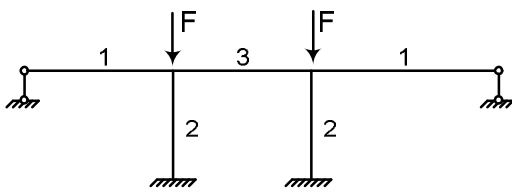
23



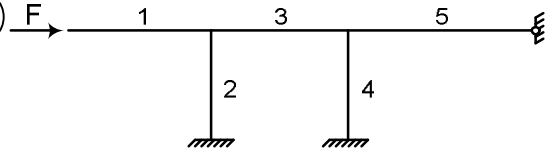
24



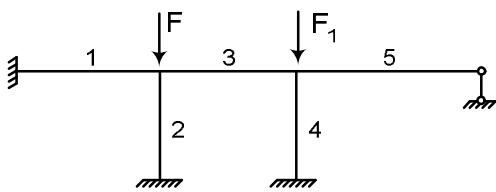
25



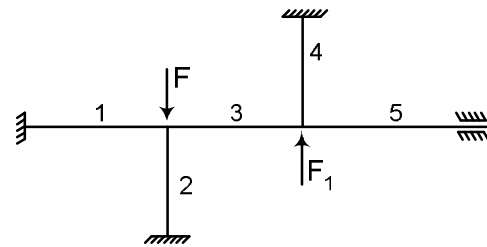
26



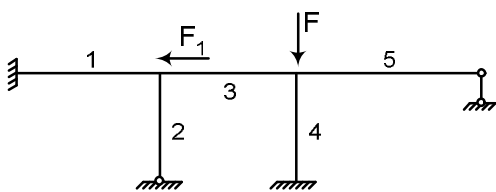
27



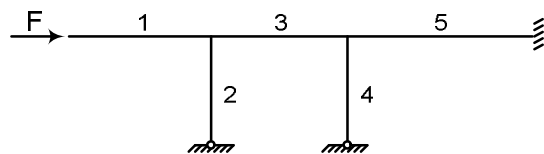
28



29



30



Закінчення рисунка 2.1

Таблица 2.1

№ з/п	$\frac{F_1}{F}$	$\frac{l_2}{l_1}$	$\frac{l_3}{l_1}$	$\frac{l_4}{l_1}$	$\frac{l_5}{l_1}$	$\frac{l_6}{l_1}$	$\frac{I_2}{I_1}$	$\frac{I_3}{I_1}$	$\frac{I_4}{I_1}$	$\frac{I_5}{I_1}$	$\frac{I_6}{I_1}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,5	2	1	0,5	3	2	0,5	1	2	4	0,5
2	1	4	2	4	1	4	2	0,5	2	1	0,5
3	2	1	3	2	2	0,5	1	2	4	2	0,5
4	4	2	1	4	0,5	1	4	1	8	4	0,5
5	8	4	3	0,5	2	4	8	4	0,5	1	1
6	0,5	1	2	1	3	0,5	10	2	1	2	1
7	1	2	1	2	0,5	1	0,5	1	10	4	1
8	2	4	3	4	1	2	1	4	0,5	1	1
9	4	1	2	0,5	3	4	2	0,5	1	2	2
10	8	2	0,5	1	2	0,5	4	8	1	4	2
11	0,5	4	1	2	0,5	1	8	4	2	1	2
12	1	1	2	4	0,5	2	10	2	2	2	2
13	2	2	3	0,5	1	4	0,5	2	4	4	1
14	4	4	2	1	3	0,5	1	1	4	1	1
15	8	1	0,5	2	3	1	2	0,5	8	2	1
16	0,5	2	1	4	0,5	2	4	4	8	1	1
17	1	4	3	0,5	2	4	8	8	1	2	0,5
18	2	1	0,5	1	2	2	10	2	1	2	0,5

Мета роботи – визначення критичної сили. Для заданої рами необхідно:

- визначити поздовжні сили в стержнях рами;
 - знайти параметри стійкості стержнів, виразивши їх через один з цих параметрів;
 - знайти ступінь кінематичної невизначуваності рами і обрати основну систему методом переміщень;
 - записати канонічні рівняння методу переміщень;
 - побудувати епюри згинаючих моментів в основній системі;
 - знайти коефіцієнти канонічних рівнянь;
 - визначити критичне значення параметру стійкості для основної системи та відповідно інтервал, у якому знаходиться значення критичного параметра заданої рами;
 - скласти рівняння стійкості і шляхом підбору з застосуванням комп'ютера визначити його перший корінь $v_{кр}$;
 - визначити критичну силу для заданої рами.

2.1.2 Вказівки до виконання роботи

При визначенні поздовжніх сил в стержнях слід пам'ятати, що стискуючі сили в розрахунках на стійкість вважаються додатними. Поздовжні сили визначають з умов рівноваги вузлів рами у висхідному стані. Згинаючі моменти й поперечні сили при цьому відсутні.

Параметри стійкості v стержнів рами знаходять за формулою

$$v_i = l_i \sqrt{\frac{N_i}{EI_i}}.$$

З урахуванням заданих співвідношень сил, довжин стержнів та моментів інерції всі параметри стійкості виражаються через будь який один:

$$v_i = k_i v.$$

Знаходження ступеня кінематичної невизначуваності рами та вибір основної системи виконують як і при звичайному статичному розрахунку.

Для симетричних рам (схеми 3, 19, 21, 25) необхідно показати симетричну та кососиметричну форми втрати стійкості. До розрахунку прийняти ту форму, для якої з урахуванням групування ненульовими залишаються два невідомі зміщення вузлів.

Канонічні рівняння в розрахунках на стійкість характеризуються відсутністю вільних членів і для рами з двома невідомими мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 &= 0. \end{aligned}$$

Епюри згинаючих моментів \bar{M}_i в основній системі будуються від кожного невідомого $Z_i = 1$ разом із заданим вузловим навантаженням за таблицею 4 [3].

Коефіцієнти канонічних рівнянь визначають з умов рівноваги вузлів та частин рами як при звичайному статичному розрахунку методом переміщень.

Коефіцієнти r_{ik} зручно записати в такому вигляді:

$$r_{ik} = \frac{EI}{l^n} \bar{r}_{ik},$$

де \bar{r}_{ik} – безрозмірна функція параметрів стійкості – масштабована реакція.

Слід пам'ятати, що реакції повинні задовольняти теорему про взаємність:

$$r_{ik} = r_{ki} \text{ або } \bar{r}_{ik} = \bar{r}_{ki}.$$

Для визначення максимально можливих значень параметрів стійкості використовуємо основну систему. Порівняно з заданою рамою основна система підсилена додатковими в'язями. Отже, критична сила для неї і, відповідно, параметр стійкості буде не менше, ніж для заданої рами. Оскільки в основній системі кожен стержень працює незалежно від інших, критичну силу для неї можна знайти як найменшу з критичних сил окремих стержнів. Останні обчислюють за формулою Ейлера:

$$N_{i \text{ кр}} = \frac{EI_i}{(\mu_i l_i)^2}.$$

Коефіцієнт μ – коефіцієнт зведення довжини стержня в розрахунках на стійкість – залежить від закріплення кінців стержня.

Приклад розрахунку дивитись у вправі 11.

Роботу оформити на аркуші формату А-2 на комп'ютері або вручну з додержанням масштабу рисунків. На аркуші, крім рисунків, необхідно навести усі основні розрахунки.

2.2 Робота № 2. Динамічний розрахунок рами

2.2.1 Завдання та вихідні дані

Схему рами та вихідні дані беруть за завданням викладача за рисунком 2.2 і таблицею 2.2.

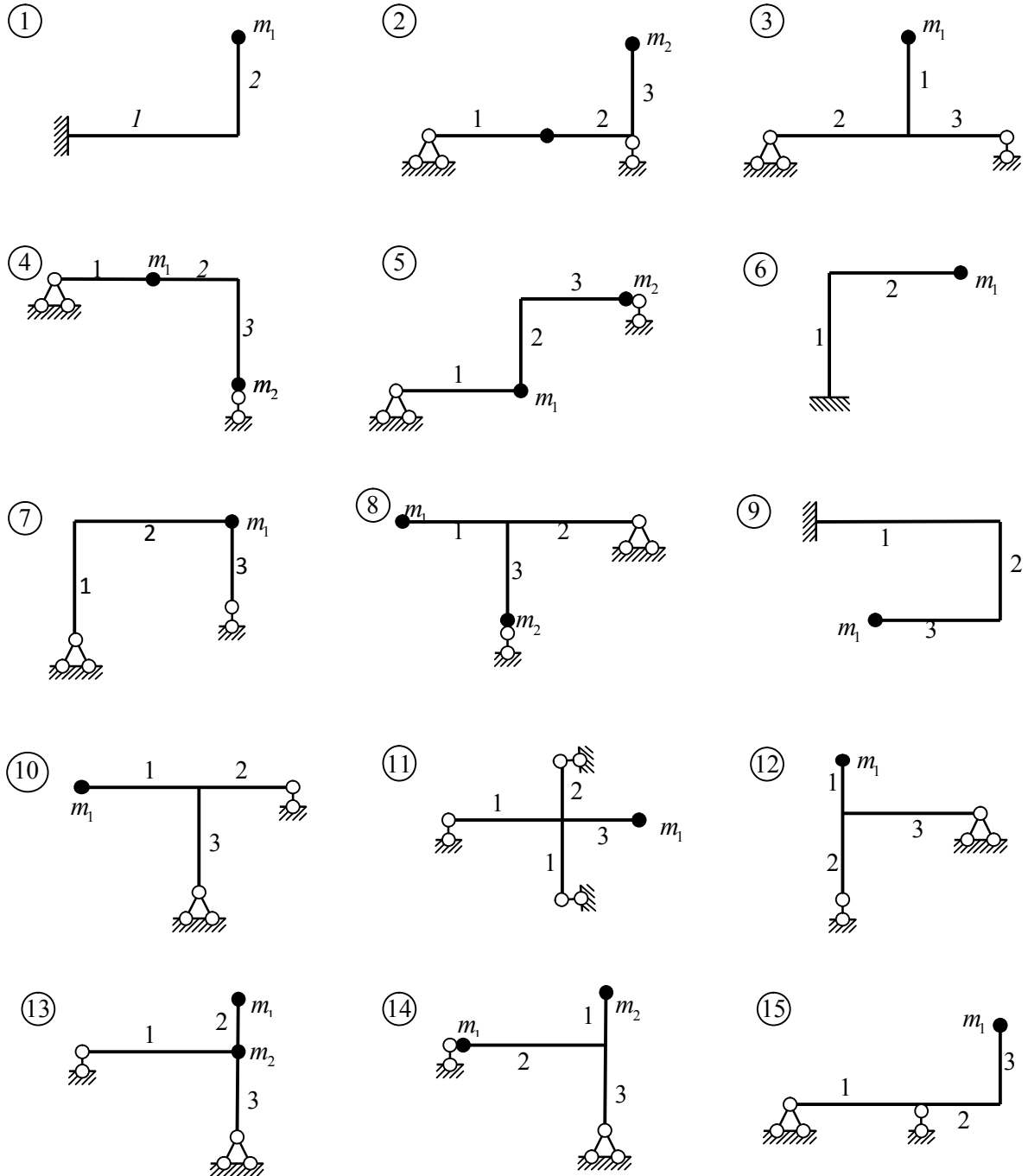
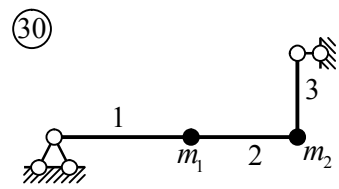
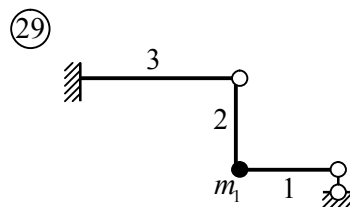
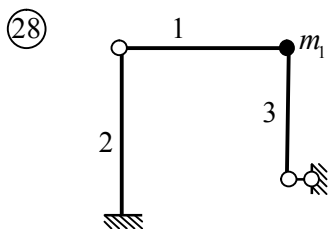
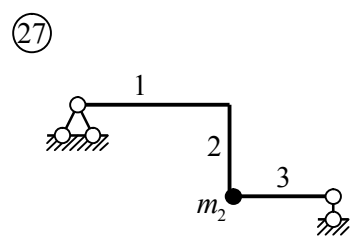
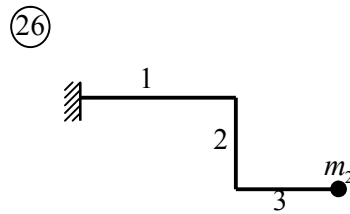
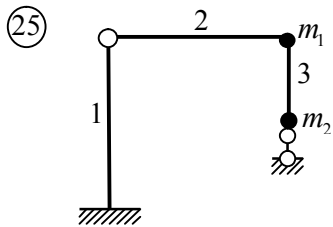
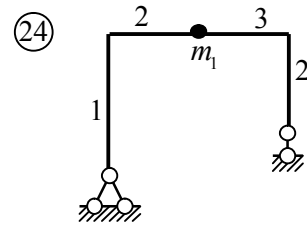
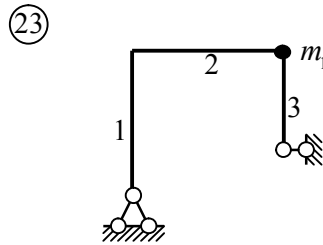
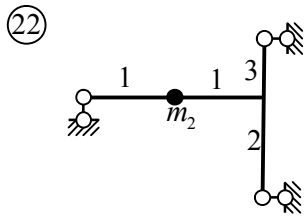
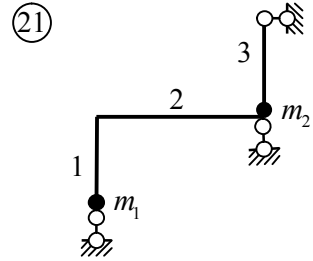
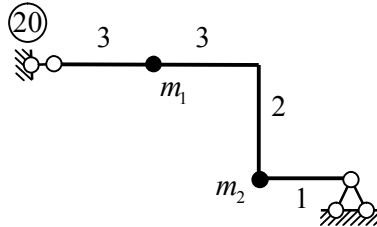
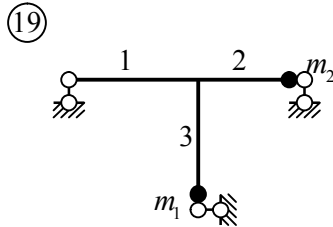
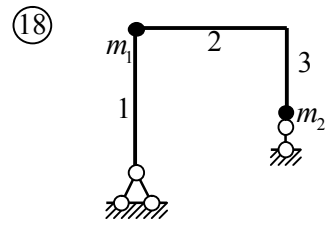
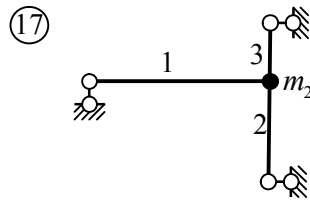
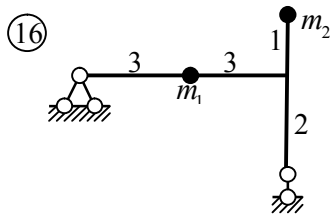


Рисунок 2.2



Закінчення рисунка 2.2

Таблиця 2.2

№ з/п	Довжини стержнів, м			№ двотавра перерізу стержнів			Маси, т		F, кН
	l_1	l_2	l_3	1	2	3	m_1	m_2	
1	2,0	1,1	1,5	30	40	30	1,0	2,0	20
2	1,8	1,0	2,0	30	30	40	1,1	1,9	40
3	1,6	0,9	1,6	33	45	30	1,2	1,8	60
4	1,9	1,0	1,8	36	40	30	1,3	2,0	80
5	1,7	1,1	1,9	36	30	40	1,4	1,9	100
6	2,1	1,2	2,0	40	40	45	1,5	1,8	90
7	1,8	1,1	1,9	40	36	36	1,6	2,0	70
8	1,9	0,8	1,5	50	45	30	1,7	1,5	50
9	2,0	1,2	2,1	45	36	40	1,8	1,4	30
10	1,6	1,0	1,7	45	33	36	1,9	1,3	10
11	2.2	1.2	1.8	20	20	22	2.0	1.5	40
12	2.3	1.4	1.9	22	20	24	1.8	1.7	50
13	2.4	1.6	2.0	24	22	24	1.5	1.6	45
14	2.5	1.8	2.1	27	24	24	2.0	1.2	60
15	2.6	2.0	2.2	30	27	24	2.1	1.8	65
16	2.7	2.4	2.3	40	30	30	1.9	1.2	40
17	2.8	2.6	2.0	45	50	40	1.8	1.3	55
18	2.9	2.8	2.1	50	36	30	2.2	2.0	80

Метою роботи є розрахунок рами на динамічне навантаження.

Для заданої рами необхідно:

- визначити спектр частот вільних коливань;
- знайти форми вільних коливань та перевірити їх ортогональність;
- побудувати епюру динамічних згинаючих моментів від дії збуджуючої сили $F(t) = F \sin \theta t$ при $\theta = 0,8\omega_1$ та обчислити динамічний коефіцієнт.

2.2.2 Вказівки до виконання роботи

Для визначення *числа ступенів вільності* необхідно порівняти масу стержнів рами із заданими на ній точковими масами m_1, m_2 . Оскільки останні значно більше, масою рами можна нехтувати і далі враховувати лише точкові маси. Вивчаючи деформації рами, виявляють можливість переміщень мас. Поздовжніми деформаціями стержнів при цьому нехтують. Кількість можливих

переміщень точкових мас дає число ступенів вільності динамічної системи. Прийняті додатні напрямки переміщень v мас на схемі показують стрілками.

Почергово прикладаючи одиничні сили $F_i=1$ в напрямку додатних переміщень мас, будують епюри згинаючих моментів \overline{M}_i .

Одиничні переміщення мас δ_{ik} визначають методом Мора, перемножуючи за правилом Верещагіна і за формулою Сімпсона одиничні епюри згинаючих моментів:

$$\delta_{ik} = \Sigma \frac{1}{EI} \int \overline{M}_i \overline{M}_k dx.$$

Рівняння частот вільних коливань одержують, прирівнюючи до нуля та розкриваючи далі визначник рівнянь вільних коливань. Зокрема,, для системи з двома ступенями вільності маємо:

$$\begin{vmatrix} (m_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega^2}) & m_2\delta_{12} \\ m_1\delta_{21} & (m_2\delta_{22} - \frac{1}{\omega^2}) \end{vmatrix} = 0$$

або

$$(m_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega^2}) (m_2\delta_{22} - \frac{1}{\omega^2}) - m_1m_2\delta_{12}^2 = 0.$$

Розв'язок цього рівняння дає дві частоти, які нумерують, починаючи з меншої. Такий набір частот

$$\omega_1 \leq \omega_2$$

і є спектр частот рами для $n = 2$.

Оскільки амплітуди вільних коливань залишаються невизначеними, форми вільних коливань визначаються співвідношеннями амплітуд. Ці співвідношення знаходять з рівнянь відносно амплітуд коливань. Зокрема, для системи з двома ступенями вільності при першій частоті з першого рівняння маємо:

$$\mu_{11} = 1; \quad \mu_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}} = -\frac{m_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega_1^2}}{m_2\delta_{12}},$$

при другій частоті:

$$\mu_{12} = 1; \quad \mu_{22} = \frac{A_{22}}{A_{12}} = -\frac{m_1\delta_{11} - \frac{1}{\omega_2^2}}{m_2\delta_{12}}.$$

Перевірку можна виконати за співвідношеннями з другого рівняння:

$$\mu_{21} = -\frac{m_1 \delta_{21}}{m_2 \delta_{22} - \frac{1}{\omega_1^2}}, \quad \mu_{22} = -\frac{m_1 \delta_{21}}{m_2 \delta_{22} - \frac{1}{\omega_2^2}}.$$

Тут A_{ik} – амплітуда i -го переміщення маси, що відповідає k -й формі коливань, тобто коливанням з частотою ω_k .

Форми вільних коливань повинні задовольняти умові ортогональності. Ця умова для системи з двома ступенями вільності має такий вигляд:

$$m_1 + m_2 \mu_{21} \mu_{22} = 0.$$

Похибка не повинна перевищувати 3%.

При розрахунку на вимушені коливання рівняння відносно амплітуд інерційних сил для системи з двома невідомими мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* I_1 + \delta_{12} I_2 + \Delta_{1f} = 0, \\ \delta_{21} I_1 + \delta_{22}^* I_2 + \Delta_{2f} = 0. \end{cases}$$

Головні коефіцієнти цих рівнянь обчислюють за формулою:

$$\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2}$$

Вільні члени Δ_{if} цих рівнянь є переміщення мас від амплітудного значення збуджуючої сили $F(t) = F \sin \theta t$. Для їх визначення необхідно побудувати епюру згинаючих моментів M_f від дії сили F і перемножити її за правилом Верещагіна або за формулою Сімпсона з одиничними епюрами \overline{M}_i .

Якщо збуджуюча сила прикладена в напрямку одного з переміщень мас, епюру M_f і переміщення Δ_{if} можна обчислити помноженням відповідної одиничної епюри \overline{M}_i та відповідних одиничних переміщень на значення F .

Розв'язок рівнянь дає значення амплітуд інерційних сил I_i . Його можна виконати будь-яким відомим методом, бажано за допомогою комп'ютера.

Епюру динамічних моментів одержують підсумовуючи епюри моментів від амплітуд інерційних сил I_i та епюри моментів M_f від амплітуди збуджуючого навантаження:

$$M_\theta = \overline{M}_1 \cdot I_1 + \overline{M}_2 \cdot I_2 + M_f.$$

Порівнюючи значення моментів M_δ та M_f , обчислюють *динамічний коефіцієнт*:

$$\mu = \frac{M_\delta}{M_f},$$

де M_δ – найбільший згинаючий момент на епюрі M_δ ,

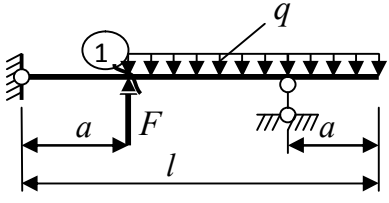
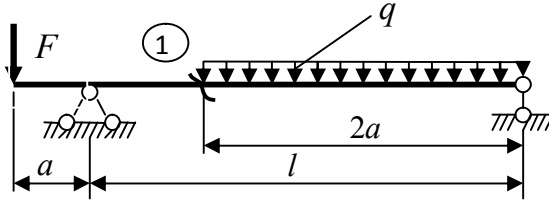
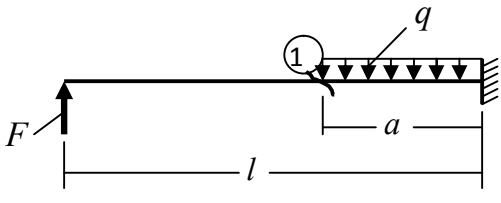
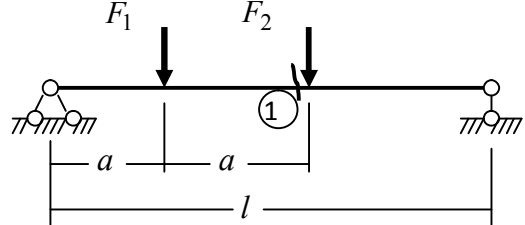
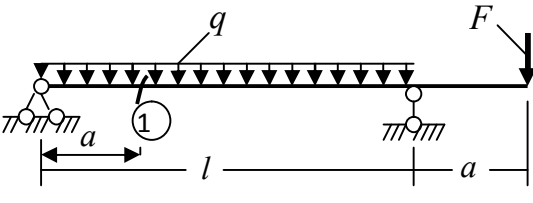
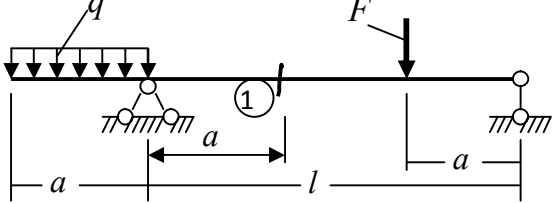
M_f – згинаючий момент у відповідному перерізі на епюрі M_f .

Приклад розрахунку дивитись у праві 19.

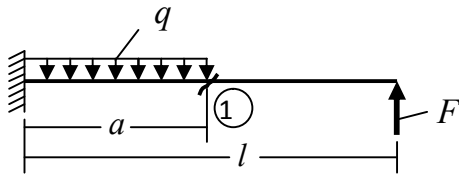
Роботу оформити на аркуші формату А-2 на комп'ютері або вручну з додержанням масштабу рисунків. На аркуші, крім рисунків, необхідно навести усі основні розрахунки.

РОЗДІЛ 3 МАТЕРІАЛИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ ТА САМОСТІЙНИХ РОБІТ

3.1 Розрахунок на рухоме навантаження

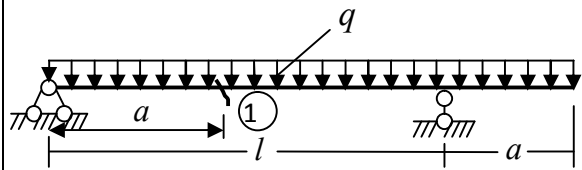
<p>1. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження.</p>  <p>$F = 40\text{кН}; q = 10\text{кН} / \text{м}; l = 7\text{м}; a = 2\text{м}.$</p>	<p>2. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження</p>  <p>$q = 30\text{кН} / \text{м}; F = 15\text{кН}; l = 6\text{м}; a = 1,5\text{м}.$</p>
<p>3. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження</p>  <p>$F = 20\text{кН}; q = 40\text{кН} / \text{м}; l = 3\text{м}; a = 1\text{м}.$</p>	<p>4. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження</p>  <p>$F_1 = 30\text{кН}; F_2 = 20\text{кН}; l = 6\text{м}; a = 1\text{м}.$</p>
<p>5. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження</p>  <p>$F = 40\text{кН}; q = 10\text{кН} / \text{м}; l = 5\text{м}; a = 1,5\text{м}.$</p>	<p>6. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження</p>  <p>$F = 20\text{кН}; q = 30\text{кН} / \text{м}; l = 6\text{м}; a = 2\text{м}.$</p>

7. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



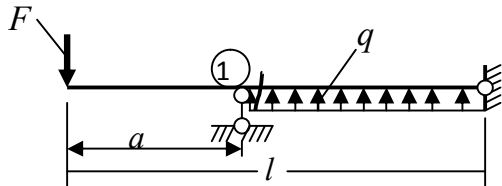
$$F = 50 \text{кН}; q = 40 \text{кН/м}; l = 4 \text{м}; a = 2 \text{м}.$$

8. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



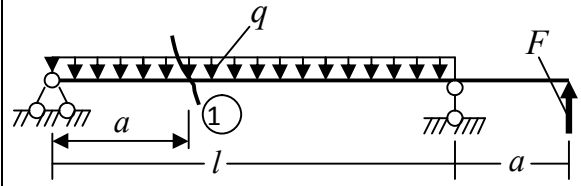
$$q = 30 \text{кН/м}; l = 6 \text{м}; a = 2 \text{м}.$$

9. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



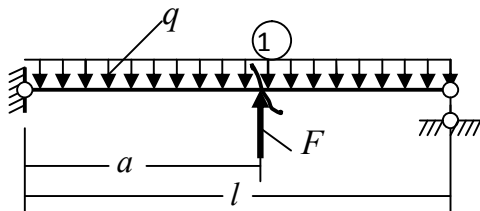
$$F = 30 \text{кН}; q = 20 \text{кН/м}; l = 5 \text{м}; a = 1,5 \text{м}$$

10. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



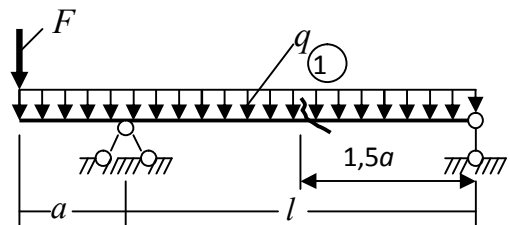
$$F = 60 \text{кН}; q = 10 \text{кН/м}; l = 4 \text{м}; a = 1 \text{м}.$$

11. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



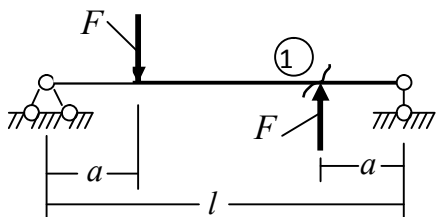
$$F = 40 \text{кН}; q = 14 \text{кН/м}; l = 4 \text{м}; a = 2 \text{м}.$$

12. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



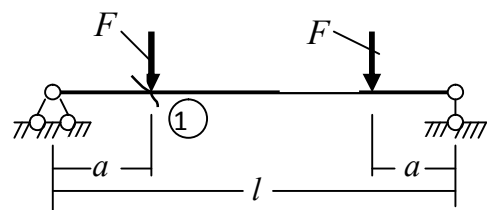
$$F = 20 \text{кН}; q = 10 \text{кН/м}; l = 8 \text{м}; a = 2 \text{м}.$$

13. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



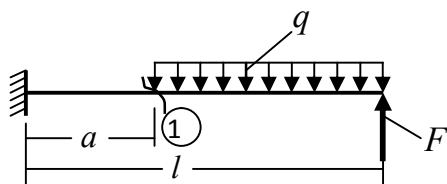
$$F = 50 \text{кН}; l = 6 \text{м}; a = 1,5 \text{м}.$$

14. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



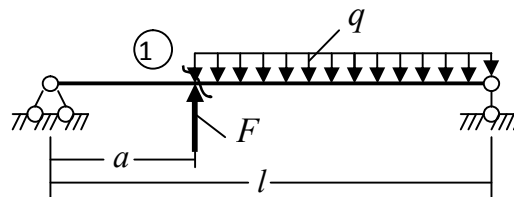
$$F = 30 \text{кН}; l = 4 \text{м}; a = 1,3 \text{м}.$$

15 Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



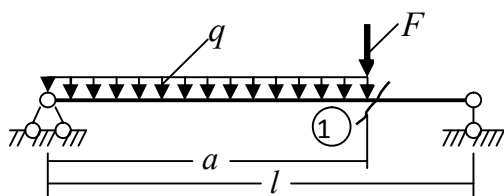
$$F = 40 \text{кН}; q = 20 \text{кН/м}; l = 3 \text{м}; a = 1 \text{м}.$$

16. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



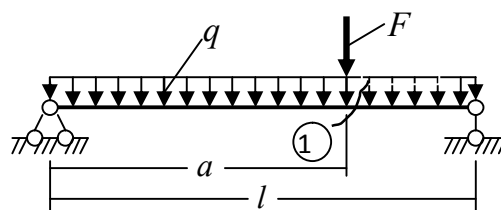
$$F = 20 \text{кН}; q = 20 \text{кН/м}; l = 5 \text{м}; a = 1 \text{м}.$$

17. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



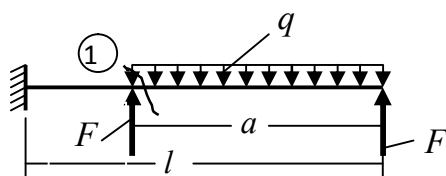
$$F = 60 \text{кН}; q = 20 \text{кН/м}; l = 6 \text{м}; a = 4 \text{м}.$$

18. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



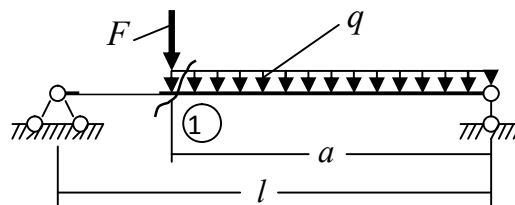
$$F = 20 \text{кН}; q = 10 \text{кН/м}; l = 8 \text{м}; a = 6 \text{м}.$$

19. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



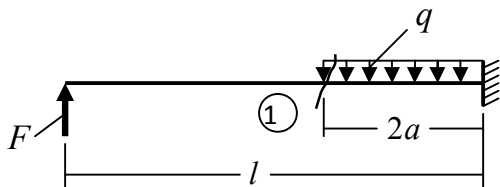
$$F = 10 \text{кН}; q = 20 \text{кН/м}; l = 3 \text{м}; a = 2 \text{м}.$$

20. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



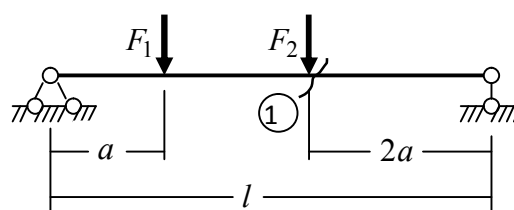
$$F = 20 \text{кН}; q = 30 \text{кН/м}; l = 6 \text{м}; a = 4 \text{м}.$$

21. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



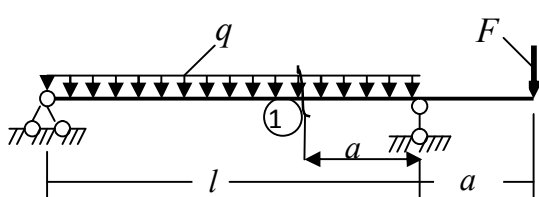
$$F = 40 \text{кН}; q = 30 \text{кН/м}; l = 4 \text{м}; a = 1 \text{м}.$$

22. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



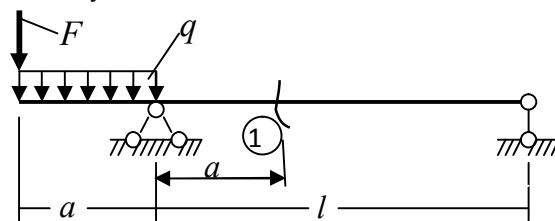
$$F_1 = 50 \text{кН}; F_2 = 30 \text{кН}; l = 6 \text{м}; a = 1 \text{м}.$$

23. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



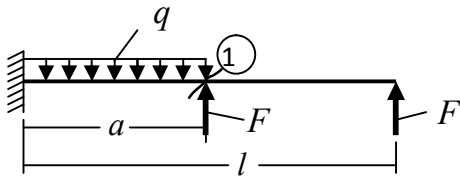
$$F = 40 \text{кН}; q = 12 \text{кН/м}; l = 3 \text{м}; a = 1 \text{м}.$$

24. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



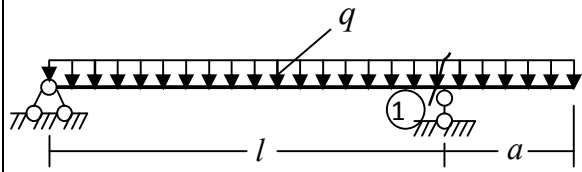
$$F = 20 \text{кН}; q = 30 \text{кН/м}; l = 6 \text{м}; a = 2 \text{м}$$

25. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



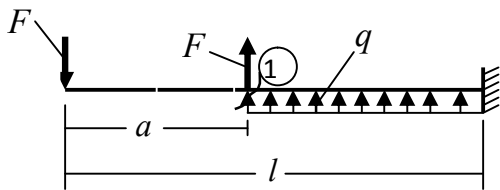
$$F = 20 \text{ кН}; q = 40 \text{ кН/м}; l = 5 \text{ м}; a = 2 \text{ м}.$$

26. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



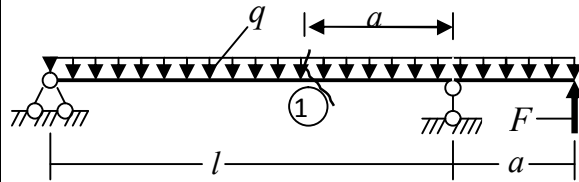
$$q = 30 \text{ кН/м}; l = 5 \text{ м}; a = 2 \text{ м}.$$

27. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



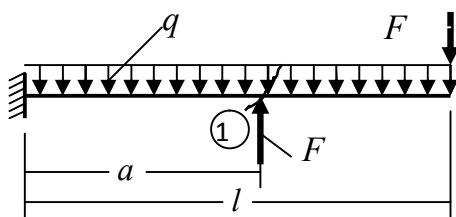
$$F = 30 \text{ кН}; q = 20 \text{ кН/м}; l = 3 \text{ м}; a = 1,5 \text{ м}.$$

28. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



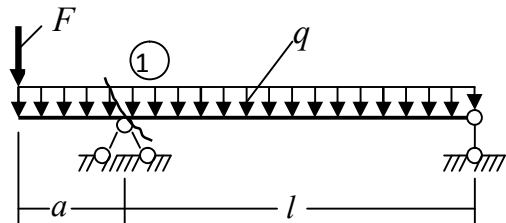
$$F = 10 \text{ кН}; q = 40 \text{ кН/м}; l = 4 \text{ м}; a = 1 \text{ м}.$$

29. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



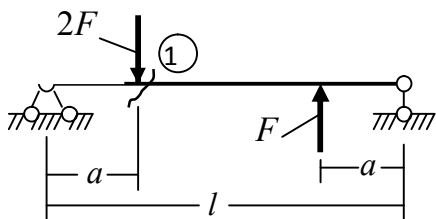
$$F = 40 \text{ кН}; q = 14 \text{ кН/м}; l = 4 \text{ м}; a = 2 \text{ м}.$$

30. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



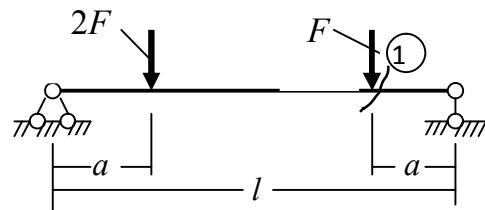
$$F = 40 \text{ кН}; q = 10 \text{ кН/м}; l = 8 \text{ м}; a = 2 \text{ м}.$$

31. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



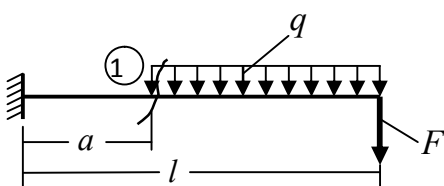
$$F = 50 \text{ кН}; l = 6 \text{ м}; a = 1,5 \text{ м}.$$

32. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



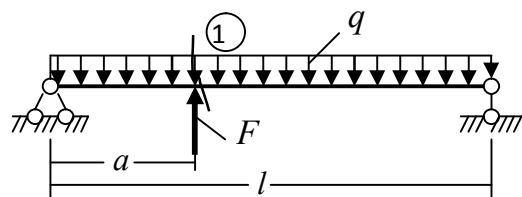
$$F = 30 \text{ кН}; l = 4 \text{ м}; a = 1,3 \text{ м}.$$

33. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження



$$F = 10 \text{ кН}; q = 20 \text{ кН/м}; l = 3 \text{ м}; a = 1 \text{ м}.$$

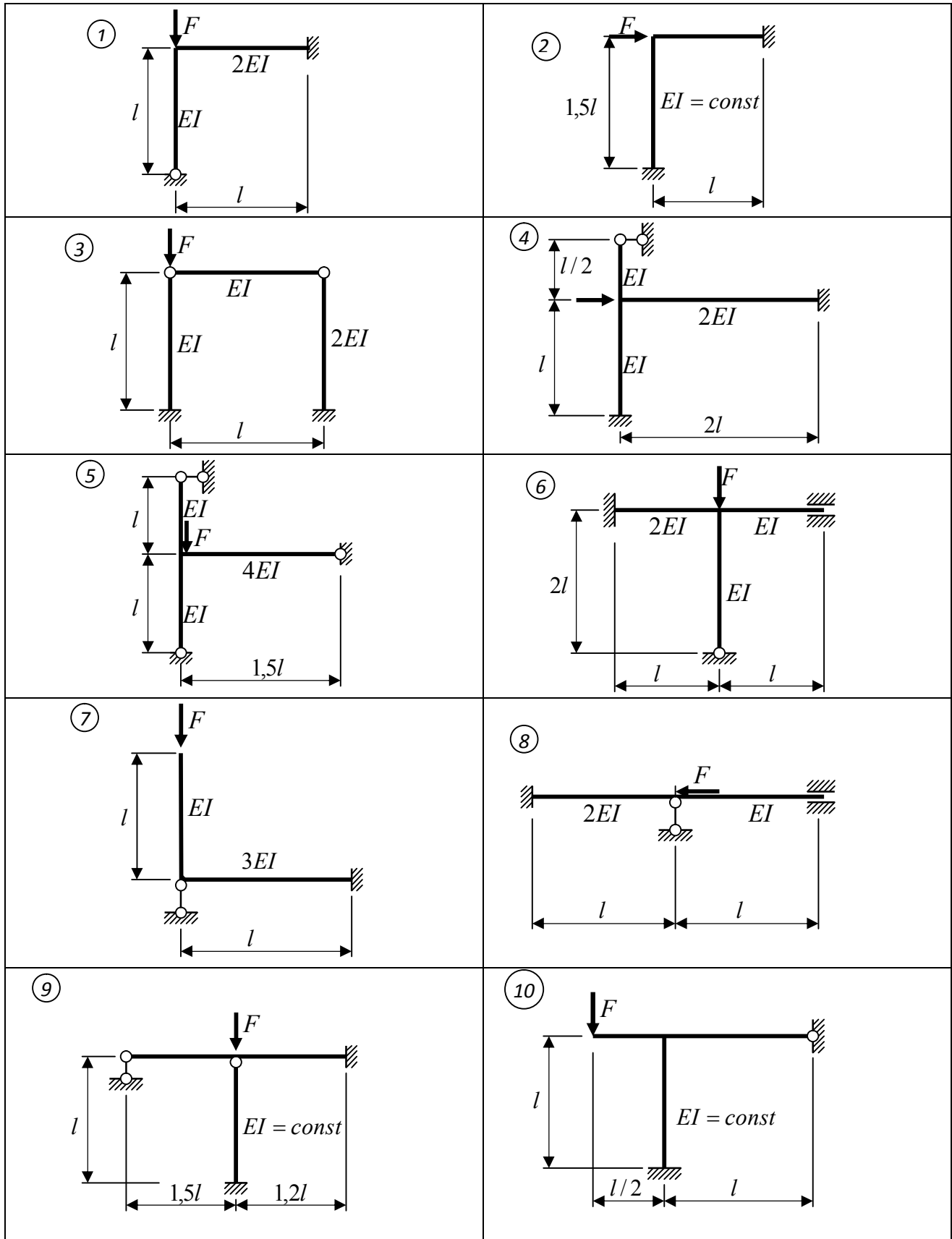
34. Побудувати лінії впливу M_1, Q_1 та обчислити за нею ці зусилля від заданого навантаження

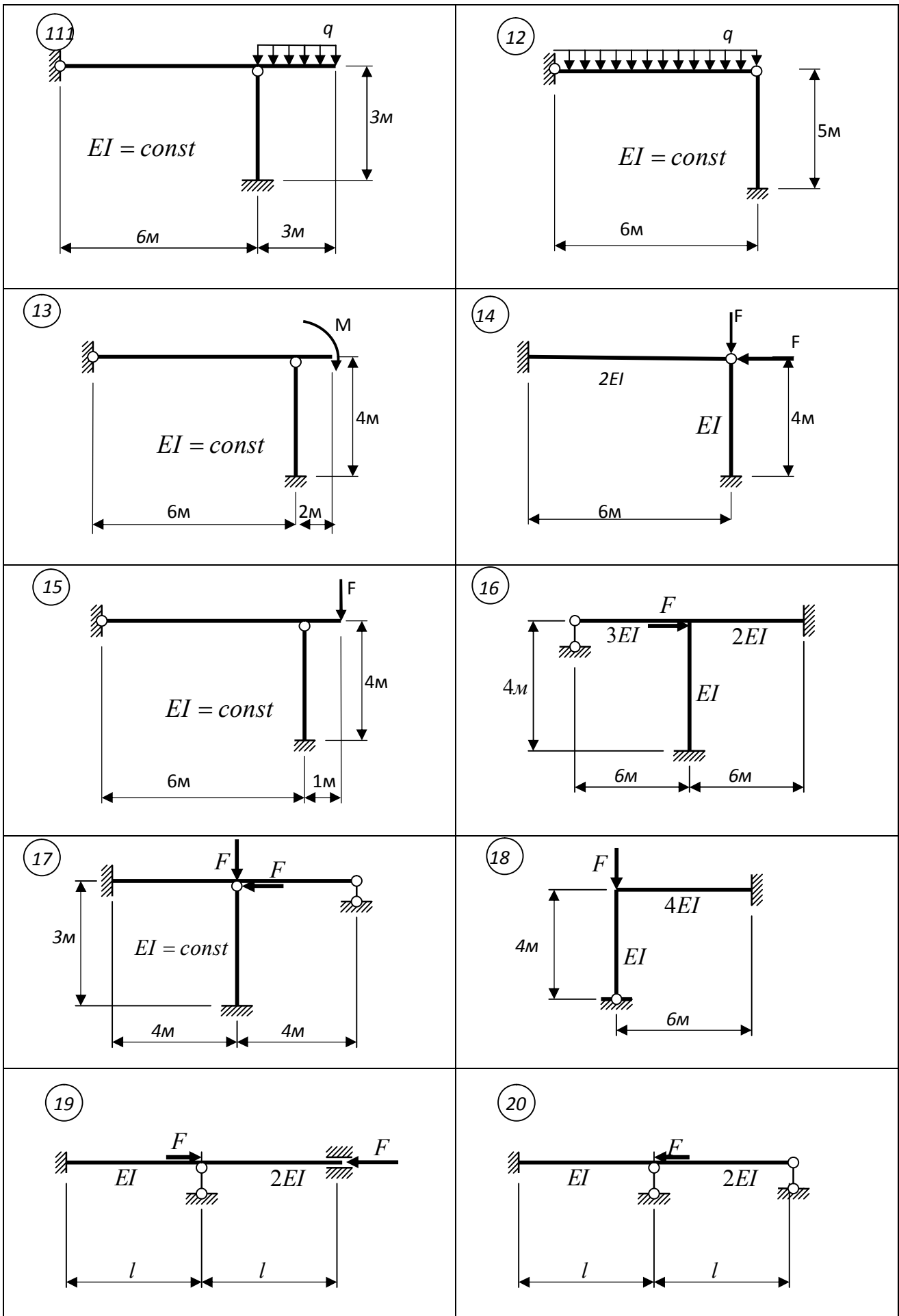


$$F = 40 \text{ кН}; q = 20 \text{ кН/м}; l = 5 \text{ м}; a = 1 \text{ м}.$$

3.3 Стійкість стержневих систем

Визначити критичне навантаження для наведених систем.

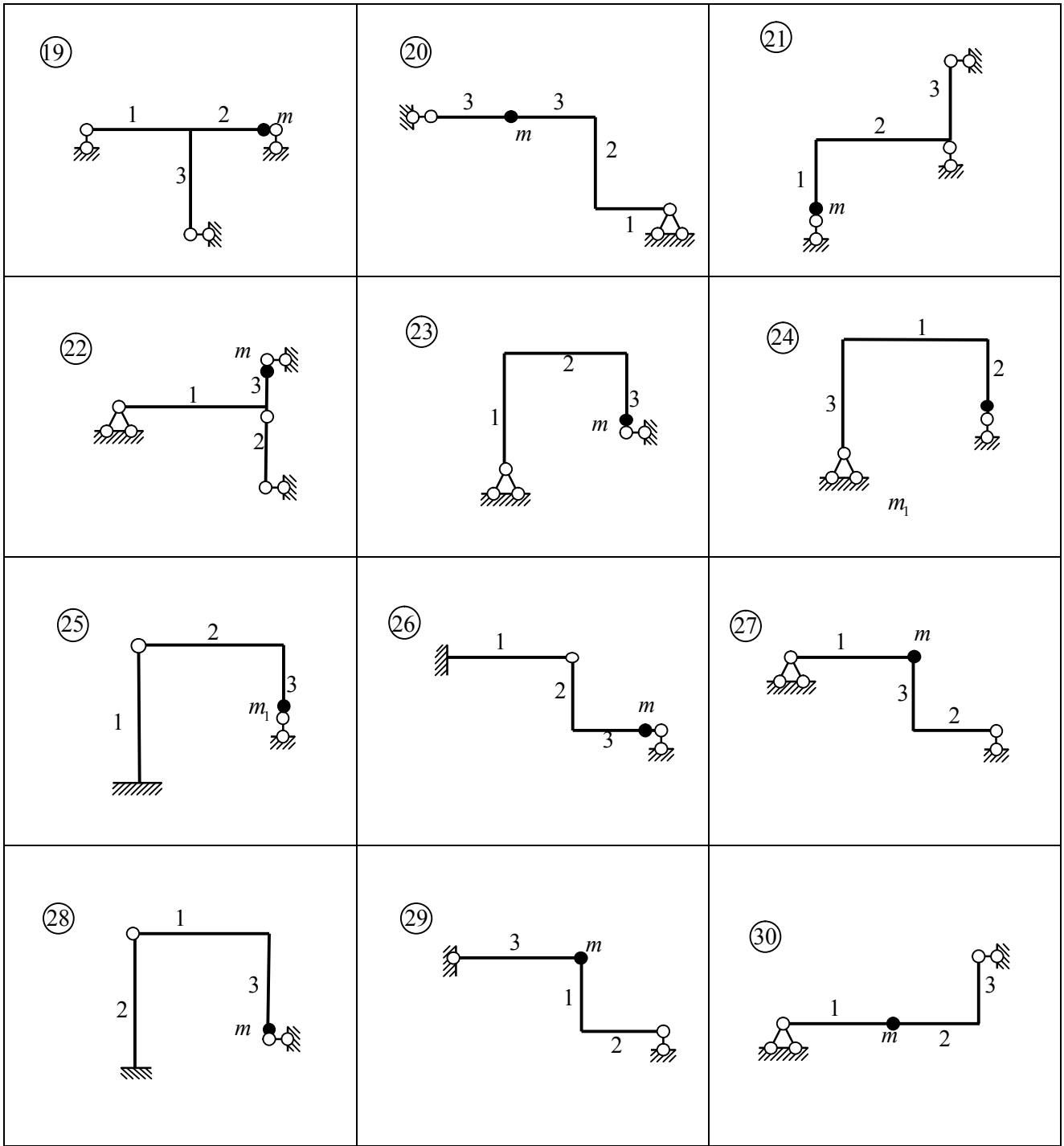




3.2 Динамічний розрахунок рам

Визначити частоту власних коливань

<p>①</p>	<p>②</p>	<p>③</p>
<p>④</p>	<p>⑤</p>	<p>⑥</p>
<p>⑦</p>	<p>⑧</p>	<p>⑨</p>
<p>⑩</p>	<p>⑪</p>	<p>⑫</p>
<p>⑬</p>	<p>⑭</p>	<p>⑮</p>
<p>⑯</p>	<p>⑰</p>	<p>⑱</p>



СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Баженов В. А. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології./ В. А. Баженов, А. В. Перельмутер, О. В. Шишов; за заг. ред. д-ра техн. наук, проф. В. А. Баженова. – Київ : Каравела, 2009. – 696 с.
2. Шпачук В. П. Конспект лекцій з курсу «Будівельна механіка спецкурс». Частина 1 (для студентів 3 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.060101 – Будівництво) / В. П. Шпачук, М. А. Засядько. – Харків : ХНАМГ, 2012. – 64 с.
3. Шпачук В. П. Конспект лекцій з курсу «Будівельна механіка» Спецкурс. Частина 2 (для студентів 4-го курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.060101 – Будівництво) / В. П. Шпачук, М. А. Засядько – Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова. – 2016. – 122 с.
4. Шутенко Л. М. Конспект лекцій з курсу «Будівельна механіка» (для студентів 3-го курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.060101 – Будівництво) /Л. М. Шутенко, В. П. Шпачук., М. А. Засядько. – Харків : ХНАМГ, 2012. – 169 с.
5. Шутенко Л. М. Механіка споруд. Керівництво до практичних занять / Л. М. Шутенко, В. П. Пустовойтов, М. А. Засядько. – Харків : ХДАМГ, 2002. – 239 с.
6. Шутенко Л. Н. Строительная механика: Краткий курс / Раздел1. Статически определимые стержневые системы. /Л. Н. Шутенко, Н. А. Засядько. – Харьков : ХГАГХ, 2003. – 90 с.
7. Шутенко Л. Н. Строительная механика: Краткий курс / Разделы 3,4. Устойчивость и динамика стержневых систем. /Л. Н. Шутенко, Н. А. Засядько. – Харьков : ХГАГХ, 2005. – 116 с.
8. Строительная механика / Под ред. Ю. И. Бутенко. – Київ : Вища школа, 1989. – 479 с.
9. Строительная механика. Стержневые системы: учебник для вузов / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лащеников, Н. Н. Шапошников; Под ред. А. Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1981. – 512 с.
10. Баженов. В. А. Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування : Навч. посібник. – Київ : Каравела, 2010.
11. Чихладзе Э. Д. Строительная механика : Учебник для студентов высших учебных заведений / Э. Д. Чихладзе. – Харьков : УкрГАЗТ, 2004. – 305 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки
до практичних занять, самостійної роботи,
виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань
з курсу

«БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА СПЕЦКУРС»

ЧАСТИНА 2

*(для студентів 4 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів
за напрямом 6.060101 - Будівництво)*

Відповідальний за випуск *А. О. Гарбуз*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2016, поз. 181 М

Підп. до друку 29.11.16
Друк на ризографі
Тираж 50 пр.

Формат 60*84/16
Ум. друк. арк. 3,7
Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.