МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

В. В. Бізюк

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

МОДУЛЬ 2

(для студентів першого курсу денної та заочної форм навчання за спеціальністю 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка; освітня програма «Електромеханіка та електротехнології»)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2016

Бізюк В. В. Вища математика. Модуль 2 : конспект лекцій для студентів першого курсу денної та заочної форм навчання за спеціальністю 141 електроенергетика, електротехніка та електромеханіка; освітня програма «Електромеханіка та електротехнології» / В. В. Бізюк ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 108 с.

Автор В. В. Бізюк

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доц. Л. Б. Коваленко

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 1від 31.08.2016 р.

ЗМІСТ

ЛЕКЦІЯ 1 ПЕРВІСНА ФУНКЦІЯ І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ. ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ. БЕЗПОСЕРЕДНЄ ІНТЕГРУВАННЯ

Основною задачею диференціального числення є знаходження похідної відомої функції :

$$\left(-cos^2 x\right)' = -2\,cos\,x\left(-\,sin\,x\right) = sin\,2x\,.$$

В загальному вигляді

$$F'(x) = f(x)\,.$$

Основною для інтегрального числення є обернена задача – знаходження функції $F(x)$ за відомою її похідною:

$$\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)' -\frac{1}{2}\left(-\sin 2x\right)2 = \sin 2x\,,\ \text{тоді для}\ \ f(x) = \sin 2x\ \ F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x\,.$$

Ще приклад:

$$\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x\ \ \text{тоді для}\ \ f(x) = \sin 2x\ \ F(x) = \sin^2 x\,.$$

Означення. Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на $[a;b]$, якщо в усіх точках цього проміжку виконується рівність

$$F'(x) = f(x)\,.$$

Як бачимо, для однієї й тієї ж функції $f(x)$ можуть бути різні первісні $F(x)$.

Теорема. Якщо $F_1(x)$ та $F_2(x)$ являються первісними на $[a;b]$ для $f(x)$, то ці функції відрізняються на сталу величину.

Доведення. Позначимо $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Тоді

$$\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0\ \text{на}\ [a;b].$$

Візьмемо на $[a;b]$ довільну точку x і запишемо теорему Лагранжа для функції $f(x)$ на відрізку $[a;x]$:

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(c)(x-a)\ \ \text{де}\ \ x < c < a\,.$$

Але $\varphi'(c) = 0$ отже $\varphi(x) - \varphi(a) = 0$, або $\varphi(x) = \varphi(a)$ для всіх $x \in [a;b]$, тобто $\varphi(x) = const$.

Означення. Множину всіх первісних функції $f(x)$ на проміжку $[a;b]$

називають невизначеним інтегралом функції $f(x)$ і позначають символом $\int f(x)\,dx$.

При цьому $f(x)$ називають підінтегральною функцією, $f(x)\,dx$ – підінтегральним виразом, $\int$ – знаком інтеграла, x – змінною інтегрування.

Якщо функція $F(x)$ є деякою первісною для $f(x)$, тоді

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$, де C – довільна стала.

Основні властивості невизначеного інтеграла.

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$(\int f(x)dx)' = (F(x)+C)' = f(x).$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.$$

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної функції окремо:

$$\int \left(f(x) + g(x) - h(x)\right)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx.$$

5. Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити з-під знака інтеграла:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \quad a = const \neq 0.$$

6. Якщо $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – будь-яка неперервно диференційовна функція, то

$$\int f(u)\,du = F(u) + C.$$

Тобто, змінною інтегрування може бути як незалежна змінна, так і довільна неперервно диференційовна функція іншої змінної.

Таблиця 1 – Невизначені інтеграли

Основні невизначені інтеграли			
№ з/п	Формули	№ з/п	Формули
1	$\int 0\,du = C$	5	$\int \sin u\,du = -\cos u + C$
2	$\int u^{\alpha}\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ $(\alpha \neq -1)$	6	$\int \cos u\,du = \sin u + C$
2а	$\int du = u + C$	7	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\ u + C$
2б	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	8	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctg\ u + C$
2в	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	9	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$ $(a > 0)$
3	$\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C$	10	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+b}} = \ln\left\|u+\sqrt{u^2+b}\right\| + C$ $(b \neq 0)$
4	$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ $(a > 0;\ a \neq 1)$	11	$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\,arctg\frac{u}{a} + C$ $(a \neq 0)$
4а	$\int e^u\,du = e^u + C$	12	$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$ $(a > 0)$
Додаткові невизначені інтеграли			
№ з/п	Формули	№ з/п	Формули
1	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\|tg\frac{u}{2}\right\| + C$	2	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\|tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
3	$\int tg\,u\,du = -\ln\|\cos u\| + C$	4	$\int ctg\,u\,du = \ln\|\sin u\| + C$
5	$\int sh\,u\,du = ch\,u + C$	6	$\int ch\,u\,du = sh\,u + C$
7	$\int \frac{du}{ch^2 u} = th\ u + C$	8	$\int \frac{du}{sh^2 u} = -cth\ u + C$
9	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm$ $\pm \frac{1}{2}a^2 \ln\left\|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$ $(a \neq 0)$	10	$\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{a}\sqrt{a^2-u^2} +$ $+ \frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{u}{a} + C$ $(a > 0)$
11	$\int e^{au}\sin bu\,du = \left(-b\,e^{au}\cos bu +\right.$ $\left.+ a\,e^{au}\sin bu\right)/\left(a^2+b^2\right) + C$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$	12	$\int e^{au}\cos bu\,du = \left(a\,e^{au}\cos bu +\right.$ $\left.+ b\,e^{au}\sin bu\right)/\left(a^2+b^2\right) + C$ $(a \neq 0;\ b \neq 0)$

Приклади:

1) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \sqrt{x} + C$,

2) $\int (x-1)^2 dx = \int (x^2 - 2x + 1)dx = \int x^2 dx - 2\int xdx + \int dx == \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x + C$,

3) $\int (x-1)^2 dx = \int (x-1)^2 d(x-1) = \frac{(x-1)^3}{3} + C$.

Правило 1. При обчисленні невизначеного інтегралу під знаком диференціалу до незалежної змінної можна додати будь-яке число:

$$\int \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx = \int \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)d\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Правило 2. При обчисленні невизначеного інтегралу під знаком диференціалу незалежну змінну можна помножити на будь-яке число, помноживши при цьому весь інтеграл на це ж саме число:

1) $\int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\int \cos 2xd2x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$,

2) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\frac{x^2}{a^2} + 1} = \frac{a}{a^2}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$.

ЛЕКЦІЯ 2 МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ: ІНТЕГРУВАННЯ ШЛЯХОМ ЗАМІНИ ЗМІННОЇ; ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ. ІНТЕГРУВАННЯ ВИРАЗІВ, ЯКІ МІСТЯТЬ КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН

Методи інтегрування: заміна змінної та інтегрування частинами

1. Метод заміни змінної. Нехай треба обчислити інтеграл $\int f(x)dx$, але безпосередньо підібрати первісну не можна, хоча відомо, що вона існує.

Заміну змінної можна здійснити двома способами.

Перший спосіб. Зробимо заміну змінної у підінтегральному виразі, поклавши $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна функція з неперервною похідною, яка має обернену функцію $t=\varphi^{-1}(x)$. Тоді

$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int g(t)\,dt=$$

$$=G(t)+C=G(\varphi^{-1}(x))+C.$$

Після інтегрування у правій частині рівності замість t підставлено його вираз через стару змінну x.

Приклад. Знайти інтеграл $\int\sqrt{sin\,x}\,cos\,xdx$. Зробимо підстановку $t=sin\,x$. Тоді $dt=\cos xdx$ і

$$\int\sqrt{\sin x}\cos xdx=\int\sqrt{t}dt=2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}+C=\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x}+C.$$

Приклад. Знайти інтеграл $\int\sin(x^3+2)x^2dx$. Зробимо підстановку $u=x^3+2$ Тоді $du=3x^2dx$, $x^2dx=(1/3)\,du$ і, отже,

$$\int\sin(x^3+2)\,x^2dx=(1/3)\int\sin u\,du=(-1/3)\cos u+C=$$

$$=(-1/3)\cos(x^3+2)+C.$$

Другий спосіб. Запишемо інтеграл $\int f(x)\,dx$ у вигляді $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$, тобто виділимо диференціал деякої функції $\varphi(x)$, і застосовуючи підстановку $u=\varphi(x)$, перейдемо в інтегралі $\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ до нової змінної:

$$\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int g(u)\,du.$$

Після цього знайдемо одержаний інтеграл і повернемося до старої змінної x, поклавши $u=\varphi(x)$:

$$\int g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int g(u)\,du=G(u)+C=G(\varphi(x))+C.$$

Приклад. Знайти інтеграл: $\int\frac{x}{1+x^2}dx$. Зробимо підстановку $u=1+x^2$. Тоді $x=\sqrt{u-1};\quad dx=\frac{1}{2\sqrt{u-1}}du$.

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx=\int\frac{\sqrt{u-1}}{u\cdot 2\sqrt{u-1}}du=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C.$$

2. Метод інтегрування частинами. Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – дві неперервні функції, які мають неперервні похідні. Візьмемо диференціал добутку цих функцій

$$d(uv) = v\,du + u\,dv,$$

а тепер проінтегруємо

$$\int d(uv) = \int v\,du + \int u\,dv, \text{ але } \int d(uv) = uv + C.$$

Маємо формулу інтегрування частинами $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

а) $\int x5^x dx$; б) $\int (x^2+4)\cos x\,dx$; в) $\int \ln(x+3)\,dx$; г) $\int e^x \sin 7x\,dx$.

а) Нехай $x = u$, $5^x dx = dv$. Тоді $v = \int 5^x dx = 5^x / \ln 5$. Інтегруємо частинами:

$$\int x5^x dx = x5^x / \ln 5 - (1/\ln 5)\int 5^x dx = x5^x / \ln 5 + 5^x / \ln^2 5 + C.$$

б) Припустимо, що $u = x^2 + 4$; $dv = \cos x\,dx$. Тоді $du = 2x\,dx$, $v = \sin x$. Інтегруємо частинами:

$$\int (x^2+4)\cos x\,dx = (x^2+4)\sin x - 2\int x\sin x\,dx.$$

Застосувавши до інтеграла, який стоїть праворуч, ще раз інтегрування частинами $u = x$, $dv = \sin x\,dx$, $du = dx$, $v = -\cos x$, остаточно дістанемо:

$$\int (x^2+4)\cos x\,dx = (x^2+4)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

в) Приймемо, що $u = \ln(x+3)$, $dv = dx$. Тоді $du = dx/(x+3)$, $v = x$. Маємо:

$$\int \ln(x+3)\,dx = x\ln(x+3) - \int x\,dx/(x+3) = x\ln(x+3) -$$

$$-\int \frac{x+3-3}{x+3}dx = x\ln(x+3) - \int dx + 3\int \frac{dx}{x+3} = x\ln(x+3) -$$

$$-x + 3\ln(x+3) + C.$$

г) Покладемо $u = \sin 7x$, $dv = e^x dx$. Спираючись на це, знаходимо $du = 7\cos 7x\,dx$ та $v = e^x$. Використавши формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$I = \int e^x \sin 7x\,dx = e^x \sin 7x - \int e^x 7\cos 7x dx =$$

$$= e^x \sin 7x - 7\int e^x \cos 7x\,dx\ .$$

До інтегралу, що залишився, знову застосовуємо інтегрування частинами, причому $u = \cos 7x$, $dv = e^x dx$; $du = -7\sin 7x\,dx$, $v = e^x$. Маємо:

$$I = e^x \sin 7x - 7\left(e^x \cos 7x - \int e^x(-7\sin 7x)\,dx\right) =$$

$$= e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49\int e^x \sin 7x\,dx.$$

Далі прирівнюємо початковий вираз до останнього отриманого. Одержану рівність можна розглядати як рівняння, в якому невідомим є шуканий інтеграл I. Розв'язавши це рівняння, маємо:

$I = e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x - 49I$; $50I = e^x \sin x - 7e^x \cos 7x$;

$I = \int e^x \sin 7x\, dx = (1/50)\left(e^x \sin 7x - 7e^x \cos 7x\right) + C$.

Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен

Розглянемо окремі випадки:

$$\text{I. } \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

Для обчислення інтегралу такого виду виділимо у знаменнику повний квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right].$$

Тоді заданий інтеграл зведеться до одного з табличних інтегралів:

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} \text{ або } \int \frac{du}{u^2 - a^2}.$$

Приклад. Обчислимо

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 10} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 10} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} arctg \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$$

Для обчислення інтегралу такого виду спочатку виділимо у чисельнику похідну знаменника $\left(ax^2 + bx + c\right)' = 2ax + b$:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+\frac{B}{A}2a+b-b}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \frac{A}{2a}\int \frac{\frac{2Ba}{A}-b}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{\left(ax^2+bx+c\right)'}{ax^2+bx+c}dx + \frac{2Ba-Ab}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

В одержаному виразі перший з інтегралів має вид $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$, тобто обчислюється так: $\int \frac{\left(ax^2+bx+c\right)'}{ax^2+bx+c}dx = \ln\left|ax^2+bx+c\right|+C$, а другий інтеграл відноситься до попередньо розглянутого випадку.

Приклад. Обчислимо

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6-2+2}{x^2-2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+5}dx + 4\int \frac{dx}{x^2-2x+5} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-2x+1+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2+2^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+5\right| + \frac{1}{2}arctg\frac{x-1}{2}+C.$$

$$\text{III. } \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Для обчислення інтегралу такого виду виділимо повний квадрат у підкореневому тричлені аналогічно першому випадку.

Приклад. Обчислимо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2\cdot 2x+4-4+10}} =$$

$$= \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}} = \ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right|+C.$$

$$\text{IV. } \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Для обчислення інтегралу такого виду виділимо у чисельнику похідну підкореневого виразу аналогічно другому випадку.

Приклад. Обчислимо

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+6-2+2}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx + 4\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+2^2}} =$$

$$= \sqrt{x^2-2x+5} + 4\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2+4}\right| + C =$$

$$= \sqrt{x^2-2x+5} + 4\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right| + C .$$

ЛЕКЦІЯ 3 МНОГОЧЛЕНИ ТА ЇХ КОРЕНІ. ОСНОВНА ТЕОРЕМА АЛГЕБРИ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ. ІНТЕГРУВАННЯ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ ЛІНІЙНУ ІРРАЦІОНАЛЬНІСТЬ

Інтегрування раціональних дробів

1. Розкладання многочлена з дійсними коефіцієнтами на прості дійсні множники.

Розглянемо многочлен $P_n(x)$ стандартного вигляду з дійсними коефіцієнтами

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n ;\ a_i \in R;\ i = \overline{0,n} .$$

На множині комплексних чисел C будь-який многочлен $P_n(x)$ n-го степеня за основною теоремою алгебри має рівно n коренів, а тому єдиним способом (з точністю до порядку співмножників) розкладається у добуток

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_m)^{k_m} ,$$

де a_0 – старший коефіцієнт; $x_1, x_2, \ldots, x_m$ – різні (дійсні чи комплексні) корені; $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – відповідні кратності цих коренів, причому $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Таким чином, будь-який многочлен $P_n(x)$ з дійсними коефіцієнтами можна подати, і причому єдиним способом (з точністю до порядку), у вигляді добутку різних простих (лінійних і квадратичних) дійсних множників у відповідних степенях:

$$P_n(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_s)^{k_s} \times$$

$$\times (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{l_2} \dots (x^2 + p_t x + q_t)^{l_t},$$

де лінійні двочлени $x - a$ відповідають його різним дійсним кореням $x_1, x_2, \dots, x_s$; квадратні тричлени $x^2 + px + q$ з від’єним дискримінантом – різним парам спряжених комплексних коренів; $k_1, k_2, \dots, k_s$ і $l_1, l_2, \dots, l_t$ – кратності цих коренів, причому $k_1 + \dots + k_s + 2(l_1 + \dots + l_t) = n$.

2. Раціональні дроби.

Розглянемо два многочлена $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ степеня m і n відповідно:

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m;$$

$$Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_{n-1} x + b_n.$$

Раціональним дробом (дробово-раціональною функцією) називається відношення двох многочленів $P_m(x)/Q_n(x)$.

Якщо степінь m чисельника нижче степеня n знаменника, то дріб називається правильним, якщо, навпаки, $m > n$ або $m = n$, то дріб – неправильний.

Будь-який неправильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ можна зобразити у вигляді суми многочлена і правильного дробу

$$P_m(x)/Q_n(x) = G_{m-n}(x) + R_k(x)/Q_n(x),$$

причому цей розклад єдиний.

Тут $G_{m-n}(x)$ – многочлен, який називають цілою частиною раціонального дробу, а $R_k(x)/Q_n(x)$ – правильний дріб, тобто $k < n$. Многочлени $G_{m-n}(x)$ і $R_k(x)$ – відповідно частка й залишок від ділення $P_m(x)$ на $Q_n(x)$.

Приклад. Обчислимо

$$\int \frac{x^3 - 2}{x + 1} dx$$

Підінтегральна функція являє собою неправильний дріб, тож виділимо цілу частину раціонального дробу поділивши чисельник на знаменник:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^3-2 & x+1 \\ \cline{2-2}
x^3+x^2 & x^2-x+1 \\ \cline{1-1}
-\;-x^2-2 & \\
-x^2-x & \\ \cline{1-1}
-\;x-2 & \\
x+1 & \\ \cline{1-1}
-3 &
\end{array}
$$

Отже, $\frac{x^3-2}{x+1}=x^2-x+1-\frac{3}{x+1}$.

Таким чином,

$\int\frac{x^3-2}{x+1}dx=\int\left(x^2-x+1-\frac{3}{x+1}\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-3\ln|x+1|+C$.

Інтегрування правильного раціонального дробу

Нехай треба обчислити інтеграл

$$\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx\quad(n<m).$$

Розглянемо підінтегральну функцію

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_m}.$$

Розкладемо знаменник дробу на прості множники відповідно кореням многочлена $Q_m(x)$. Такими множниками будуть:

$(x-a)$, якщо a – простий дійсний корінь,

$(x-a)^k$, якщо a – кратний (кратності k) дійсний корінь,

(x^2+px+q), якщо корені прості комплексні $\alpha\pm\beta i$,

$(x^2+px+q)^k$, якщо корені кратні (кратності k) комплексні.

Цим множникам відповідають найпростіші раціональні дроби наступних чотирьох типів

1) $\frac{A}{x-a}$; 2) $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k\geq 2$; 3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $D=p^2-4q<0$;

4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $k\geq 2$, $D=p^2-4q<0$.

Тут A, B, a, p, q – дійсні числа, $k\in N$. Підкреслимо, що квадратний тричлен x^2+px+q має тільки комплексні корені.

Кожний правильний раціональний дріб $P_m(x)/Q_n(x)$ можна розкласти на суму скінченного числа найпростіших дробів вказаних чотирьох типів, причому цей розклад єдиний.

Розглянемо кожен з випадків.

1) Корені знаменника прості та дійсні. В цьому випадку кожному простому множнику відповідає простий дріб виду:

$$(x-a) \Leftrightarrow \frac{A}{x-a}.$$

Приклад.

$$\int \frac{2x}{x^2+2x-3}dx.$$

Обчислимо корені знаменника:

$$x^2+2x-3=0.$$

За теоремою Вієта $x_1=-3, \quad x_2=1$.

Тоді знаменник розкладається на прості множники:

$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1).$$

Відповідно підінтегральний раціональний дріб розкладається на прості дроби за вказаним правилом:

$$\frac{2x}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1},$$

де A та B визначаються за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього в правій частині рівності приведемо до загального спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

$$2x=A(x-1)+B(x+3).$$

Ця рівність справедлива при будь-яких значеннях змінної x, зокрема, якщо ці значення є корені рівняння. Підставимо ці значення в рівність:

$$\begin{array}{r|l} x=1 & 2=4B \quad \Rightarrow \quad B=\dfrac{1}{2} \\ x=-3 & -6=-4A \quad \Rightarrow \quad A=\dfrac{3}{2} \end{array}.$$

Тоді $\int \frac{2x}{x^2+2x-3}dx=\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=\frac{3}{2}\ln|x+3|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$.

2) Корені знаменника дійсні та кратні. В цьому випадку кожному простому множнику $(x-a)^k$ відповідає сума простих дробів:

$$(x-a)^k \Leftrightarrow \quad \frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{C}{(x-a)^k}.$$

Приклад.

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1}dx.$$

Оскільки $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$, то за правилом

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}.$$

Далі прирівнюємо чисельники:

$$x^2+1=A(x-1)^2+B(x-1)+C.$$

Як у попередньому випадку підставимо в рівність корінь знаменника

$$x=1\Big| \quad 2=C.$$

Коефіцієнти A та B , які залишились, обчислимо користуючись наступним принципом: будемо розглядати дану рівність як рівність двох многочленів, а значить рівність коефіцієнтів при невідомому x в однакових степенях:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & 1=A \\ x & 0=-2A+B \quad \Rightarrow \quad B=2 \end{array}.$$

Отже, $\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x-1)^3}$.

Тоді обчислюємо заданий інтеграл:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1}dx=\int \frac{dx}{x-1}+2\int \frac{dx}{(x-1)^2}+2\int \frac{dx}{(x-1)^3}=$$

$$=\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\frac{4}{(x-1)^2}+C.$$

3) Корені знаменника комплексно-спряжені та прості. В цьому випадку

$$\left(x^2+px+q\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}.$$

Приклад.

$$\int \frac{2x-1}{x^4+x^3+x^2}dx .$$

Розкладемо підінтегральний дріб за правилами:

$$\frac{2x-1}{x^2\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Далі прирівнюємо чисельники

$$2x-1=Ax\left(x^2+x+1\right)+B\left(x^2+x+1\right)+Cx^3+Dx^2$$

і обчислюємо невизначені коефіцієнти

$$\begin{array}{r|c} x=0 & -1=B \quad\Rightarrow\quad B=-1 \\ x^3 & 0=A+C\Rightarrow C=-3 \\ x^2 & 0=A+B+D\Rightarrow D=-2 \\ x & 2=A+B\Rightarrow A=3 \end{array}.$$

Таким чином

$$\int \frac{2x-1}{x^4+x^3+x^2}dx=3\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{-3x-2}{x^2+x+1}dx .$$

Останній інтеграл, який містить квадратний тричлен, обчислимо окремо:

$$\int\frac{-3x-2}{x^2+x+1}dx=\frac{-3}{2}\int\frac{2x+\frac{2}{3}\cdot 2+1-1}{x^2+x+1}dx=$$

$$=-\frac{3}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1}dx=$$

$$=-\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{1\cdot 2}{2\cdot\sqrt{3}}arctg\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}+C .$$

Повернемось до заданого інтегралу:

$$\int\frac{2x-1}{x^4+x^3+x^2}dx=3\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{2\sqrt{3}}+C .$$

4) Корені знаменника комплексно-спряжені та кратні. Цей випадок залишимо на самостійне вивчення.

Приклад. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x^3+4x^2+5x+8}{(x+2)^3(x-1)}dx$.

$$I=\int\frac{A\,dx}{(x+2)^3}+\int\frac{B\,dx}{(x+2)^2}+\int\frac{C\,dx}{x+2}+\int\frac{D\,dx}{x-1}.$$

Маємо тотожність $x^3+4x^2+5x+8=A(x-1)+$

$+B(x+2)(x-1)+C(x+2)^2(x-1)+D(x-1)^3$.

Застосувавши метод невизначених коефіцієнтів, отримаємо: $A=-2, B=-1$, $C=1/3, D=2/3$.

Тоді $I=\int\frac{-2\,dx}{(x+2)^3}+\int\frac{-1dx}{(x+2)^2}+\int\frac{(1/3)\,dx}{x+2}+\int\frac{(2/3)\,dx}{x-1}=$

$=\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{3}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+C$.

Приклад. Знайти інтеграл $I=\int\frac{-x^2+x-8}{(x^2+2x+2)(x-2)}dx$.

$$I=\int\frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+2x+2}+\int\frac{C\,dx}{x-2}.$$

Тут $-x^2+x-8=(Ax+B)(x-2)+C(x^2+2x+2)$.

Використаємо комбінацію методу окремих значень і методу невизначених коефіцієнтів. Нехай $x=2$ (дійсний корінь), маємо $10C=-10$, $C=-1$; нехай $x=0$ (довільно взяте значення), тоді $-2B+2C=-8$; $B=4+C=3$. Прирівнявши коефіцієнти при x^2, маємо $A+C=-1$; $A=-1-C=0$. Отже,

$$I=\int\frac{3\,dx}{x^2+2x+2}-\int\frac{dx}{x-2}=3\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}-\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=3arctg\,(x+1)-\ln|x-2|+C.$$

Справедливе твердження: інтеграл від будь-якої раціональної функції може бути визначений через елементарні функції у скінченному вигляді.

Інтегрування виразів, що містять лінійну ірраціональність

Інтеграл від виразу, який містить корені різного степеня з одного лінійного виразу *ax*+*b* в цілих додатних степенях, зводиться заміною $ax+b=t^n$ до інтеграла від раціонального дробу, де *n* – найменше спільне кратне показників коренів.

Приклад. Обчислити $\int \frac{x+2\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x+5}}dx$.

Розв’язання.

$$\int \frac{x+2\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x+5}}dx = \begin{vmatrix} x+5=t^6; & x=t^6-5 \\ dx=6t^5dt; & t=\sqrt[6]{x+5} \end{vmatrix} = \int \frac{(t^6-5+2t^3)6t^5dt}{t^2} =$$

$$= 6\int\left(t^6+2t^3-5\right)\cdot t^3dt = 6\int\left(t^9+2t^6-5t^3\right)dt = 6\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{2t^7}{7}-\frac{5t^4}{4}\right)+C =$$

$$= 6\left(\frac{\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^5}{10}+\frac{2\left(\sqrt[6]{x+5}\right)^7}{7}-\frac{5\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^2}{4}\right)+C \ .$$

Приклад. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2} = \begin{vmatrix} x=t^2; & dx=2tdt \\ t=\sqrt{x} & \end{vmatrix} = \int \frac{2tdt}{t+2} = 2\int \frac{t+2-2}{t+2}dt = 2\int dt - 4\int \frac{dt}{t+2} =$$

$$= 2t - 4\ln\left|t+2\right| + C = 2\sqrt{x} - 4\ln(\sqrt{x}+2) + C \ .$$

ЛЕКЦІЯ 4 ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ВИРАЗІВ. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПІДСТАНОВКИ

Інтегрування тригонометричних виразів

Інтегрування виразів вигляду $\sin^p x\cos^q x$, де p та q – цілі числа.

а) якщо p або q – непарне число, ми відділяємо від непарного степеня один множник та приєднуємо його до диференціала. Потім увесь підінтегральний вираз виражаємо через одну функцію:

Приклад. Знайти $\int \sin^2 x\cos^3 xdx$.

Розв’язання.

$$\int \sin^2 x\cos^3 xdx = \int \sin^2 x\cos^2 x\cos xdx = \int \sin^2 x\cos^2 xd(\sin x) =$$

$$= \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)d(\sin x) = \int \sin^2 d(\sin x) - \int \sin^4 xd(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C;$$

б) якщо p та q – парні невід'ємні, знижуємо степені, користуючись формулами:

$$cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos\,2x),\ sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos\,2x).$$

Приклад. Знайти $\int \sin^2 3x dx$.

Розв'язання.

$$\int sin^2 3x dx = \int \frac{1}{2}(1 - cos\,6x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int cos\,6x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}sin\,6x + C.$$

Інтегрування виразів, які раціонально залежать від $sin\,x$ та $cos\,x$.

Для інтегрування таких виразів застосовується підстановка $tg\frac{x}{2} = t$. Тоді: $sin\,x = \frac{2t}{1+t^2}$, $cos\,x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$., $x = 2arctgt$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Приклад. Знайти $\int \frac{dx}{2 + cos\,x}$.

Розв'язання. $t = tg\frac{x}{2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $cos\,x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Тоді

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Інтегрування виразів, які містять ірраціональності від двочленів другого степеня

Для виразу $\sqrt{x^2 + a^2}$, робимо заміну $x = a\,tg\,t$, тоді $\sqrt{x^2 + a^2} = a\sec t$, $dx = a\sec^2 t\,dt$, $t = arctg\frac{x}{a}$.

Для виразу $\sqrt{a^2 - x^2}$ робимо заміну $x = a\sin t$, тоді $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$, $dx = a\cos t\,dt$, $t = \arcsin\frac{x}{a}$.

Для виразу $\sqrt{x^2 - a^2}$ робимо заміну $x = a\sec t$, тоді $\sqrt{x^2 - a^2} = a\,tg\,t$, $dx = a\sec t \cdot tgt\,dt$, $t = \arccos\frac{a}{x}$.

Приклад. Знайти інтеграл $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

Розв'язання. Зробимо заміну $x=a\sin t$, тоді

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int a\cos t\, a\cos t dt = a^2\int\cos^2 t dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{4}2\sin t\cdot\cos t+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

При обчисленні останнього доданка враховано, що

$$\sin t=\frac{x}{a},\ \cos t=\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$$

ЛЕКЦІЯ 5 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ЯК ГРАНИЦЯ ІНТЕГРАЛЬНОЇ СУМИ. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА. ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНІЦА

Задача обчислення маси стержня

Нехай необхідно обчислити масу стержня довжиною l, щільність якого ρ, та будемо вважати, що площа його поперечного перерізу $S = 1$. Помістимо стержень в систему координат. Розіб'ємо стержень перерізами, які проходять через *n* точок: $x_0=0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_{n=}=l$.

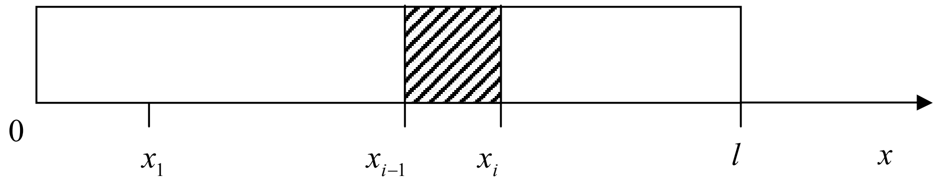

Рисунок 1 – Стержень з *i*-м перерізом.

Розглянемо довільний елемент, маса якого m_i, а розміщений між точками $[x_{i-1}, x_i]$. Будемо вважати, що довжина цього елемента Δx_i настільки мала, що щільність його стала і дорівнює значенню в деякій внутрішній точці $\bar{x}_i$ інтервалу $x_{i-1} < \bar{x}_i < x_i$. Тоді маса цього елементу $m_i = \rho(\bar{x}_i) \cdot \Delta x_i$. Склавши маси всіх елементів, одержимо суму

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\bar{x}_i) \Delta x_i .$$

Ця сума відображає масу стержня, причому, чим більше число точок поділу n, тим точніше, тож точна маса буде, якщо перейти до границі при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(\bar{x}_i) \Delta x_i .$$

Перейдемо до математичного викладу.

Інтегральна сума. Її геометричний зміст

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ визначена, невід’ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Фігура, обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$, знизу віссю Ox і вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ (рис.2), називається криволінійною трапецією. Знайдемо її площу S.

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n довільних (не обов’язково рівних) елементарних частин точками поділу x_i, $i = \overline{0,n}$ такими, що $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. На кожному частинному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ візьмемо по одній довільній точці c_i, $i = \overline{1,n}$. Обчислимо значення функції $f(c_i)$ і помножимо його на довжину відповідного частинного відрізка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Одержимо площу i-го частинного стовпчика $\Delta S_i = f(c_i) \Delta x_i$. Складемо їх суму

$$S_n(f) = f(c_1)\Delta x_1 + \ldots + f(c_i)\Delta x_i + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Цей вираз називається інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, яка наближено відображає площу S криволінійної трапеції.

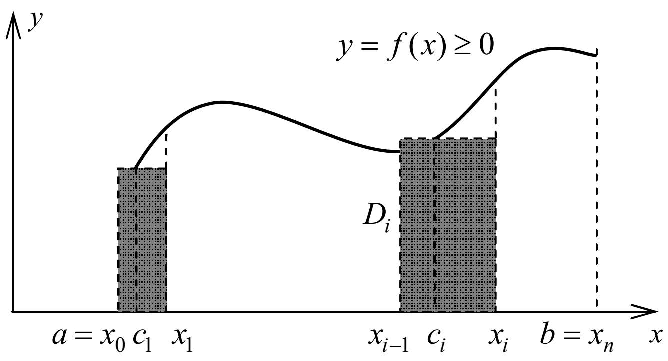

Рисунок 2 – Геометричний зміст інтегральної суми.

Поняття визначеного інтеграла

Визначений інтеграл відіграє значну роль як у суто теоретичних дослідженнях, так і в практичних застосуваннях. До його обчислення зводяться задачі знаходження площі фігури, об’єму тіла, центру ваги плоскої кривої, моменту інерції та інші.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, $S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ – її інтегральна сума на $[a;b]$. Позначимо через $\max \Delta x_i$ найбільшу з довжин відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1,n}$. Розглянемо довільну послідовність інтегральних сум при умові $\max \Delta x_i \to 0$. Очевидно, що при цьому число n у розбитті прямує до нескінченності.

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ називається границя послідовності інтегральних сум при необмеженому здрібненні розбиття відрізка $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i ,$$

де a і b – відповідно нижня і верхня межі інтегрування; $[a; b]$ – відрізок інтегрування.

Підкреслимо, що границя розглядається при будь-яких розбиттях відрізка $[a; b]$ таких, що $\max \Delta x_i \to 0$, і при будь-якому виборі точок c_i на елементарних відрізках $[x_{i-1}; x_i]$, $i=\overline{1,n}$.

Повертаючись до задачі про масу стержня, зазначимо, що сума $\sum_{i=1}^{n} \rho(\bar{x}_i)\Delta x_i$ є інтегральною по побудові, а її границя є визначеним інтегралом, який і відображає масу стержня:

$$M = \int_0^l \rho(x) dx .$$

Геометричний зміст визначеного інтегралу.

Нехай функція $f(x)$ визначена, невід'ємна і неперервна на відрізку $[a; b]$. Тоді визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ чисельно дорівнює площі S відповідної криволінійної трапеції:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Властивості визначеного інтеграла

1. Визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt .$$

2. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 .$$

3. Якщо переставити місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл тільки змінить знак:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx .$$

4. Для будь-яких трьох чисел a, b і c справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx ,$$

якщо тільки всі ці інтеграли існують.

Доведення спирається на властивість інтегральної суми, яку можна розділити на окремі частини, що відповідають частинам всього відрізка інтегрування.

5. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx \text{, де } A = const \,.$$

6. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми декількох функцій дорівнює такій же алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з цих функцій окремо. Так, у разі трьох функцій:

$$\int_a^b (f(x) + g(x) - h(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx \,.$$

Доведення спирається на відповідну властивість границі суми.

7. Якщо підінтегральна функція неперервна і невід'ємна на відрізку [a; b], $f(x) \ge 0, x \in [a;b]$, а верхня межа інтегрування більша або дорівнює нижній $b \ge a$, то визначений інтеграл на цьому відрізку також невід'ємний:

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \,.$$

Наслідок. Якщо на відрізку [a; b], де $a < b$, функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ задовольняють нерівності

$$f(x) \le \varphi(x) \text{, то } \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx \,.$$

Іншими словами, нерівність між неперервними функціями можна інтегрувати почленно при умові, що верхня межа інтегрування більша нижньої.

8. Нехай M та m відповідно найбільше та найменше значення $f(x)$ на [a; b], тоді

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a).$$

9. Абсолютна величина визначеного інтеграла не перевищує визначеного інтеграла від абсолютної величини підінтегральної функції при умові, що верхня межа інтегрування не менша за нижню $b \ge a$:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |\, f(x)\,|\,dx \,.$$

Теорема про середнє значення інтегралу

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a;b]$, то в середині інтервалу знайдеться така точка c , в якій виконується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Доведення. Позначимо M та m відповідно найбільше та найменше значення $f(x)$ на $[a;b]$. Тоді за властивістю інтеграла

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a), \text{ або}$$

$$m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx < M$$

Позначимо $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. В силу неперервності на $[a;b]$ знайдеться точка c, в якій $\mu = f(c)$, тобто $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, звідки $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Вираз $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ зветься середнім значенням інтегралу.

Геометричний зміст теореми про середнє значення полягає в тому, що на $[a; b]$ знайдеться точка c, в якій значення функції $\mu = f(c)$ є висота прямокутника, рівновеликого за площею криволінійній трапеції.

Обчислення визначеного інтегралу

Розглянемо функцію $y = f(x)$, неперервну на відрізку $[a; b]$. Розглянемо $\int_a^b f(x)dx$. Будемо змінювати верхню границю b, тоді, очевидно, буде змінюватись і значення інтеграла. Позначимо верхню границю буквою x, тоді інтеграл $\int_a^x f(x)dx$ буде функцією, залежною від верхньої границі. Позначимо цю функцію через $\Phi(x)$, тобто

$$\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx$$

Теорема. Якщо $f(x)$ є неперервна функція, а $\Phi(x)=\int_a^x f(x)dx$, то $\Phi'(x)=f(x)$.

Доведення. Дамо незалежній змінній x приріст Δx. Тоді, очевидно, $\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx$. Обчислимо приріст

$$\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx-\int_a^x f(x)dx=$$

$$=\int_a^x f(x)dx+\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx-\int_a^x f(x)dx=\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx$$

Отже, $\Delta\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx$. За теоремою про середнє значення в середині інтервалу знайдеться така точка c, в якій виконується рівність

$$\Delta\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx=f(c)(x+\Delta x-x)=f(c)\Delta x.$$

Звідки $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(c)$. Спрямуємо $\Delta x\to 0$, тоді $x+\Delta x\to x$, а також $c\to x$.,

тоді $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{c\to x} f(c)=f(x)$, звідки $\Phi'(x)=f(x)$, тобто $\Phi(x)$ є первісною для $f(x)$.

Формула Ньютона – Лейбниця

Визначений інтеграл фактично відкрито понад 2000 років тому. Але широкого застосування він довго не мав, оскільки безпосередньо знаходити границі інтегральних сум важко навіть у найпростіших випадках. Невизначений інтеграл відкрито значно пізніше (у XXVII столітті) і для нього розроблено досить ефективні методи обчислення. Тоді ж був встановлений зв’язок між цими типами інтегралів, що дозволило розширити сфери застосування інтегрального числення.

Визначений інтеграл відіграє значну роль як у суто теоретичних дослідженнях, так і в практичних застосуваннях. До його обчислення зводяться задачі знаходження площі фігури, об'єму тіла, центру ваги плоскої кривої, моменту інерції та інші.

Теорема Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і $F(x)$ – яка-небудь її первісна на цьому відрізку. Тоді визначений інтеграл від функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ дорівнює приросту первісної $F(x)$ на цьому відрізку.

Доведення. За умовою $F(x)$ є первісною для $f(x)$. За попередньою теоремою $\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx$ теж є первісною, тобто $\int_a^x f(x)dx = F(x)+C$. Знайдемо C. Нехай $x = a$. $\int_a^a f(x)dx = 0 = F(x) + C$ звідки $C = -F(a)$. Отже, $\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$. Тепер нехай $x = b$, тоді $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$. Таким чином маємо формулу Ньютона – Лейбниця: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Приклад. Знайти інтеграл $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$.

Використовуючи таблицю первісних та формулу Ньютона – Лейбниця, одержимо:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1.$$

Зауваження. Формула Ньютона – Лейбниця залишається справедливою для будь-якої інтегровної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$, що має неперервну первісну $F(x)$, яка задовольняє умову $F'(x) = f(x)$ на всьому відрізку $[a; b]$ за винятком хіба що скінченного числа точок.

ЛЕКЦІЯ. 6 ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ І ЗАМІНА ЗМІННОЇ У ВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ

Заміна змінної у визначеному інтегралі

Теорема. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\, b]$, а функція $x = \varphi(t)$ неперервна разом зі своєю похідною $x' = \varphi'(t)$ і монотонна на відрізку $[\alpha;\beta]$, причому $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$. Тоді справедлива формула заміни змінної у визначеному інтегралі

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t);\ dx = \varphi'(t)\,dt;\ t = \varphi^{-1}(x); \\ \alpha = \varphi^{-1}(a);\ \beta = \varphi^{-1}(b) \end{matrix} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

де $t = \varphi^{-1}(x)$ – обернена функція.

Зауваження 1. При заміні змінної значення функції $\varphi(t)$ не повинні виходити за межі відрізка $[a;\, b]$, коли аргумент t змінюється на проміжку $[\alpha;\beta]$, причому $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$. Монотонна на $[\alpha;\beta]$ функція $x = \varphi(t)$ ці умови задовольняє.

Зауваження 2. Аналогічно випадку невизначеного інтеграла, формула заміни змінної може використовуватись як в прямому, так і в зворотному напрямку.

Зауваження 3. Виконуючи заміну змінної у визначеному інтегралі, немає потреби повертатися до початкової змінної: якщо обчислено один з визначених інтегралів формули заміни, то маємо деяке число; цьому числу дорівнює також інший інтеграл.

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_1^e \frac{dx}{x\left(1 + \ln^2 x\right)}$.

$$I = \left| \begin{matrix} t = \ln x & dt = \dfrac{dx}{x} \\ x = 1 & x = e \\ t = 0 & t = \ln e = 1 \end{matrix} \right| = \int\limits_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = arctgt\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_3^8 \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1}}\,dx$.

$$I=\left|\begin{matrix} x+1=t^2;\ \ x=t^2-1;\ dx=2t\,dt; \\ t=\sqrt{x+1};\ t_1=\sqrt{3+1}=2;\ t_2=\sqrt{8+1}=3 \end{matrix}\right|=$$

$$=\int_2^3\frac{t^2-1-3}{t}2tdt=2\int_2^3(t^2-4)\,dt=2\int_2^3 t^2dt-8\int_2^3 dt=$$

$$=(2/3)t^3\Big|_2^3-8t\Big|_2^3=(2/3)\cdot(3^3-2^3)-8\cdot(3-2)=14/3.$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Нехай $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – диференційовні функції від x на відрізку $[a;\, b]$. Тоді $(uv)'=u'v+v'u$. Інтегруємо обидві частини рівності у межах від a до b, маємо

$$\int_a^b(u\,v)'\,dx=\int_a^b u'v\,dx+\int_a^b u\,v'\,dx.$$

Оскільки $\int(u\,v)'\,dx=u\,v+C$, тому $\int_a^b(u\,v)'\,dx=u\,v\Big|_a^b$.

Отже $u\,v\Big|_a^b=\int_a^b v\,du+\int_a^b u\,dv$. Звідси остаточно маємо формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі

$$\int_a^b u\,dv=u\,v\Big|_a^b-\int_a^b v\,du,$$

що відрізняється від аналогічної формули для невизначеного інтеграла тільки наявністю меж інтегрування.

Приклад Обчислити інтеграл $I=\int_1^2 xe^x dx$.

Нехай $u=x, dv=e^x dx$. Тоді $du=dx$, $v=e^x$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла, маємо:

$$I=xe^x\Big|_1^2-\int_1^2 e^x dx=2e^2-e-e^x\Big|_1^2=2e^2-e-e^2+e=e^2.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{\pi} x\cos xdx$.

$$\int\limits_0^{\pi} x\cos xdx=\left|\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos xdx & v=\sin x\end{matrix}\right|=x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}\sin xdx=\cos x\Big|_0^{\pi}=\cos\pi-\cos 0=-2.$$

ЛЕКЦІЯ 7 НЕВЛАСНИЙ ІНТЕГРАЛ ПО НЕСКІНЧЕННОМУ ПРОМІЖКУ (ПЕРШОГО РОДУ). НЕВЛАСНИЙ ІНТЕГРАЛ ВІД РОЗРИВНОЇ ФУНКЦІЇ (ДРУГОГО РОДУ). ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ НЕВЛАСНИХ ІНТЕГРАЛІВ

7.1 Невласні інтеграли по нескінченному проміжку (першого роду)

При вивченні визначеного інтеграла виходили з двох умов: а) скінченність проміжку інтегрування; б) неперервність (або хоча б обмеженість) підінтегральної функції.

Якщо хоча б одна з цих умов порушується, то наведене вище означення визначеного інтеграла стає неприйнятним.

Узагальнюючи поняття визначеного інтеграла, приходимо до невласного інтеграла – інтеграла на необмеженому проміжку або від необмеженої функції.

Інтеграл по нескінченному проміжку від обмеженої функції також називають невласним інтегралом першого роду.

Нехай функція $f(x)$ визначена на нескінченному проміжку $[a;+\infty)$ й інтегрована на будь-якому відрізку $[a; b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді границю $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ називають невласним інтегралом з нескінченною верхньою межею і позначають $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Таким чином,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx .$$

Якщо вказана границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називають збіжним, а підінтегральну функцію $f(x)$ – інтегровною на нескінченному проміжку $[a;+\infty)$. Сама границя приймається за значення цього інтеграла.

Якщо ж вказана границя нескінченна або взагалі не існує, то невласний інтеграл називається розбіжним, а функція $f(x)$ – неінтегровною на $[a;+\infty)$.

Невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею визначається аналогічно (на вліво нескінченному проміжку $(-\infty;b]$):

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \quad .$$

Невласний інтеграл з обома нескінченними межами визначається рівністю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \ ,$$

де c – довільне фіксоване дійсне число. Інтеграл ліворуч у цій формулі існує (є збіжним) лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли праворуч. Можна довести, що інтеграл, визначений цією рівністю, не залежить від вибору числа c.

Збіжні невласні інтеграли мають усі основні властивості звичайних визначених інтегралів. Тому при розгляді невласного інтеграла перш за все виникає питання про його збіжність, яке вирішується або його безпосереднім обчисленням, або за допомогою спеціальних ознак збіжності.

Геометричний зміст. Нехай функція $f(x)$ неперервна і невід'ємна на проміжку $[a;+\infty)$, а відповідний невласний інтеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ збігається. Тоді природно вважати, що він визначає площу необмеженої області – трапеції з нескінченною основою, що на рис. 3 позначена похилими та перехресними штрихами. Починаючи з деякого значення b, ця площа приблизно дорівнює площі обмеженої області, яка позначена на рис. 3 перехресними штрихами. Тобто, при $x \to +\infty$ функція $f(x)$ прямує до нуля настільки швидко, що площа відповідної нескінченної криволінійної трапеції виявляється скінченною.

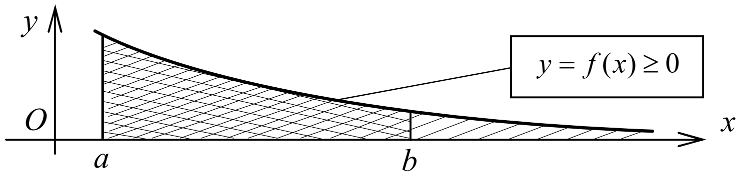

Рисунок 3 – Площа нескінченної криволінійної трапеції.

Приклад. Обчислити дані невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\text{а) } \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}; \text{ б) } \int\limits_{3}^{+\infty} \frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10}; \text{ в) } \int\limits_{-\infty}^{2} \frac{x^2dx}{x^6+64}.$$

$$\text{а) } I = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{2}^{b} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_2^b = \frac{1}{2}\times$$

$$\times \lim_{b\to+\infty} \Big(\ln\left|(b-1)/(b+1)\right| - \ln(1/3)\Big) = (1/2)(\ln 1 + \ln 3) = (1/2)\ln 3 \,.$$

Невласний інтеграл збігається. Його значення $I = (1/2)\ln 3$.

б) $$I=\int_3^{+\infty}\frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x-10}=\lim_{b\to+\infty}\int_3^b\frac{2x+3}{x^2+3x-10}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{c} t=x^2+3x-10;\quad dt=2x+3; \\ t_1=3^2+3\cdot 3-10=8;\ t_2=b^2+3b-10\end{array}\right|=\lim_{b\to+\infty}\int_8^{b^2+3b-10}\frac{dt}{t}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\ln|t|\Big\|_8^{b^2+3b-10}=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|b^2+3b-10|-\ln|8|\right)=+\infty .$$

Невласний інтеграл розбігається.

в) $$I=\int_{-\infty}^{2}\frac{x^2dx}{x^6+64}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^2\frac{x^2dx}{x^6+64}=\left|\begin{array}{l} t=x^3;\ \ dt=3x^2dx; \\ t_1=a^3;\ t_2=2^3=8\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\int_{a^3}^{8}\frac{dt}{t^2+8^2}=\frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{8}arctg\,\frac{t}{8}\bigg|_{a^3}^{8}=\frac{1}{24}\lim_{a\to-\infty}\left(arctg\,1-\right.$$

$$\left.-\,arctg\,(a^3/8)\right)=(1/24)\ (\pi/4+\pi/2)=\pi/32 .$$

Невласний інтеграл збігається. Його значення $I=\pi/32$.

Приклад. Встановити, при яких значеннях α інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ збігається і при яких розбігається.

1) Нехай $\alpha\neq 1$. Тоді $\int_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\bigg|_1^b=\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}}-1\right)$;

$$\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}}-1\right)=\begin{cases}1/(\alpha-1),\ якщо\ \ \alpha>1;\\ +\infty,\ якщо\ \ \alpha<1.\end{cases}$$

2) Нехай $\alpha=1$. Тоді $\int_1^b\frac{dx}{x}=\ln x|_1^b=\ln b$; $\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=+\infty$.

Отже, інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ збігається при $\alpha>1$ і розбігається при $\alpha\le 1$.

Зауваження 1. При обчисленні невласних інтегралів для скорочення іноді застосовують запис, аналогічний формулі Ньютона – Лейбниця. Наприклад,

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a),\ \text{де}\ F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x).$$

Аналогічно узагальнюється формула інтегрування частинами:

$$\int_a^{+\infty}u\,dv=u\,v\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}v\,du .$$

Приклад. Обчислити невласний інтеграл $I=\int_{-\infty}^{0}x\,e^{x/4}dx$ або встановити його розбіжність.

$$I=\int_{-\infty}^{0} x\,e^{x/4}dx=\left|u=x;\ dv=e^{x/4}dx; du=dx;\ v=4e^{x/4}\right|=$$

$$=\left(x\cdot 4e^{x/4}\right)\Big|_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}4\,e^{x/4}dx=-4e^{-\infty}-4\cdot 4e^{x/4}\Big|_{-\infty}^{0}=\left|e^{-\infty}=0\right|=$$

$=0-16\ (e^{0}-e^{-\infty})=-16$. Інтеграл збігається і дорівнює -16.

Зауваження 2. Застосування заміни змінної може звести невласний інтеграл до звичайного визначеного інтеграла.

Приклад. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^{5/2}}$ або встановити його розбіжність.

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^{5/2}}=\left|x=\text{tg }t;\ dx=\frac{dt}{\cos^2 t};\ (x^2+1)^{5/2}=\right.$$

$$=(tg^2t+1)^{5/2}=1/\cos^5 t;\ t=arctg\,x;\ t_1=arctg0=0;$$

$$\left.t_2=arctg(+\infty)=\frac{\pi}{2}\right|=\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{tg^2t}{1/\cos^5 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt=\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^2 t\cos t\,dt=$$

$$=\left|u=\sin t;\ du=\cos t\,dt;\ u_1=\sin 0=0;\ u_2=\sin(\pi/2)=1\right|=$$

$=(u^3/3)\Big|_{0}^{1}=1/3$. Інтеграл збігається і дорівнює $1/3$.

При розв’язуванні деяких задач потрібно лише дослідити чи збігається невласний інтеграл чи розбігається. Тому приведемо без доведення три теореми з допомогою яких можна дослідити збіжність деяких невласних інтегралів першого роду.

Теорема 1 (ознака порівняння). Якщо на проміжку $[a;\infty)$ визначені дві невід’ємні функції $f(x)$ та $g(x)$, інтегровані на кожному скінченому відрізку $[a;\ b]$, причому виконується нерівність $0\le f(x)\le g(x)$ для $\forall x\ge a$, тоді із збіжності невласного інтегралу $\int\limits_{a}^{\infty}g(x)dx$ випливає збіжність невласного інтегралу $\int\limits_{a}^{\infty}f(x)dx$, а з розбіжності невласного інтегралу $\int_{a}^{+\infty}f(x)\,dx$ випливає розбіжність невласного інтегралу $\int_{a}^{+\infty}g(x)\,dx$.

Теорема 2 (гранична ознака порівняння). Якщо на проміжку $[a;\infty)$ визначені дві невід’ємні функції $f(x)$ та $g(x)$, інтегровані на кожному скінченому відрізку$[a;b]$ і існує скінчена границя $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=A>0$, то невласні інтеграли

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ та $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Теорема 3. Якщо функція $y = f(x)$ на проміжку $[a;\infty)$ змінює знак і невласний інтеграл $\int\limits_a^{\infty} |f(x)| dx$ збігається, то невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ також збігається.

При виконанні умов теореми 3 невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називають абсолютно збіжним.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{x+7}{\sqrt[3]{x^5}} dx$.

Скористаємось теоремою 1.

Легко бачити, що при $x \in [1;+\infty)$ $\frac{x+7}{\sqrt[3]{x^5}} > \frac{x}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Але $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim\limits_{b \to \infty} 3\sqrt[3]{x}\Big|_1^b = +\infty$. Отже, даний інтеграл розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+5}}$.

Скористаємось теоремою 2. Так як $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^3+5}} = 1$, а невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ є збіжним, так як $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, отже, і невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+5}}$ також збіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\cos^3 x}{x^4} dx$. Легко бачити, що підінтегральна функція на $x \in [1;+\infty)$ змінює знак. Але $\left|\frac{\cos^3 x}{x^4}\right| \le \left|\frac{1}{x^4}\right|$, і невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$ збіжний, тому що $\alpha = 4 > 1$. Отже, за теоремою 3 невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\cos^3 x}{x^4} dx$ також збіжний.

Невласні інтеграли від необмежених функцій (другого роду)

Розглянемо інтеграл $\int_{-1}^{1} dx/x^2$. За формулою Ньютона – Лейбниця маємо $\int_{-1}^{1} dx/x^2 = -(1/x)\big|_{-1}^{1} = -1-1 = -2$. Отримали хибний результат – від'ємне значення інтеграла від додатної функції. Це пояснюється неправомірним застосуванням формули до розривної функції.

Використаємо наступний підхід: 1) ізолюємо точку розриву разом з невеликим околом; 2) обчислимо інтеграл по частинах відрізка, що залишились; 3) зробимо граничний перехід при стягуванні околу ізоляції в точку розриву. Якщо існує скінченна границя, то візьмемо її за значення інтеграла.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на всьому відрізку $[a;b]$ за винятком скінченного числа точок, у яких функція необмежена. Точка $c \in [a;b]$ називається особливою точкою функції $f(x)$, якщо функція необмежена в ній, тобто $f(x) \to \infty$ при $x \to c$.

Нехай $x = b$ – єдина особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, тобто $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a;b)$ і $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$ (рис. 6).

Тоді функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b-\varepsilon]$ при довільному $\varepsilon > 0$ такому, що $b-\varepsilon > a$. Невласним інтегралом від необмеженої функції називається границя

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx .$$

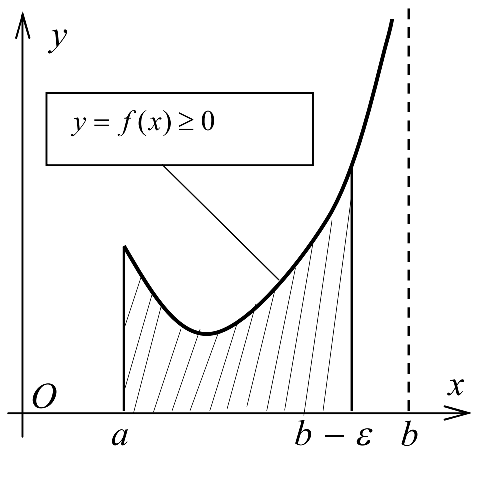

Рисунок 4 – Геометричний зміст невласного інтегралу.

Якщо вказана границя існує і скінченна, то невласний інтеграл називають збіжним, а підінтегральну функцію $f(x)$ – інтегрованою на відрізку $[a;b]$. Сама границя приймається за значення цього інтеграла. Якщо ж ця границя нескінченна або взагалі не існує, то інтеграл називають розбіжним.

Геометричний зміст. Невласний інтеграл

$\int_a^b f(x)\,dx = \ = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, якщо він збігається, у випадку невід'ємної функції $f(x)$ визначає площу необмеженої області – відповідної трапеції з нескінченною висотою. Починаючи з деякого значення $\varepsilon > 0$, ця площа приблизно дорівнює площі обмеженої області, що заштрихована на рис. 4.

Аналогічно, якщо $x = a$ – єдина особлива точка, то невласний інтеграл визначається так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \ .$$

Якщо $f(x)$ необмежена в околі якої-небудь однієї внутрішньої точки $c \in (a;b)$, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^c f(x)\,dx$ і $\int_c^b f(x)\,dx$ за означенням покладають:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \ .$$

Нарешті, якщо a та b – особливі точки, то за умови існування обох невласних інтегралів $\int_a^d f(x)\,dx$ і $\int_d^b f(x)\,dx$ за означенням покладають

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx \ ,$$

де d – довільна фіксована точка інтервалу (a; b).

Зауваження. Невласний інтеграл другого роду за своїм записом нічим не відрізняється від звичайного визначеного інтеграла. Тому треба перевіряти, чи не містить проміжок інтегрування особливих точок.

Приклад. Обчислити $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}$.

Так як в середині відрізка $[-1;1]$ існує точка $x = 0$, де підінтегральна функція $\frac{1}{x^3}$ має розрив другого роду, то

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3} = \int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^3} + \int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^3} = \lim_{c_1\to-0}\int\limits_{-1}^{c_1}\frac{dx}{x^3} + \lim_{c_2\to+0}\int\limits_{c_2}^{1}\frac{dx}{x_3}.$$

Обчислимо окремо кожен інтеграл:

$$\lim_{c_1\to-0}\int\limits_{-1}^{c_1}\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}\lim_{c_1\to-0}\frac{1}{x^2}\Bigg|_{-1}^{c_1} = -\frac{1}{2}\lim_{c_1\to-0}\left(\frac{1}{c_1^2} - 1\right) = \infty\,.$$

Отже, перший інтеграл на відрізку $[-1;0]$ розбігається.

$$\lim_{c_2\to+0}\int_{c_2}^{1}\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}\lim_{c_2\to+0}\frac{1}{x^2}\Bigg|_{c_2}^{1}=-\frac{1}{2}\lim_{c_2\to+0}\left(1-\frac{1}{c_2^2}\right)=\infty\,.$$

Звідси випливає, що другий інтеграл на відрізку $[0;1]$ також розбігається. Отже, інтеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}$ розбігається на відрізку $[-1;1]$.

Для визначення збіжності невласних інтегралів від функцій, які мають розриви другого роду, використовують теореми, аналогічні теоремам для визначення збіжності невласних інтегралів першого роду.

Теорема 1. Якщо на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ та $g(x)$ в точці b мають розрив другого роду, причому в усіх точках цього відрізка виконуються нерівності $0\le f(x)\le g(x)$ і $\int_a^b g(x)dx$ збігається, то і $\int_a^b f(x)dx$ також збігається.

Теорема 2. Якщо на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ та $g(x)$ в точці b мають розрив другого роду, причому в усіх точках цього відрізку виконуються нерівності

$$0\le g(x)\le f(x)$$

і $\int_a^b g(x)dx$ розбігається, то і $\int_a^b f(x)dx$ також розбігається.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ є знакозмінною на відрізку $[a;b]$, має розрив другого роду в точці b, і невласний інтеграл другого роду $\int_a^b |f(x)|dx$ збігається, то збігається також невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$.

При виконанні умов теореми 3 невласний інтеграл другого роду $\int_a^b f(x)dx$ називається абсолютно збіжним.

Слід відзначити, що аналогічні теореми мають місце і для невласних інтегралів другого роду

Приклад. Дослідити на збіжність невласний інтеграл другого роду

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}, \text{ де } \alpha \in R.$$

а) $\alpha \neq 1$ $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} = \lim_{\beta \to b-0} \int_a^{\beta} \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} = -\lim_{\beta \to b-0} \int_a^{\beta} \frac{d(b-x)}{(b-x)^{\alpha}} =$

$$= \lim_{\beta \to b-0} \left. \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_a^{\beta} = \lim_{\beta \to b-0} \left\{ \frac{(b-\beta)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} - \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \right\} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & при \quad \alpha < 1 \\ \infty & при \quad \alpha > 1 \end{cases}.$$

в) $\alpha = 1$ $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{b-x} = -\lim_{\beta \to b-0} \int_a^{\beta} \frac{d(b-x)}{b-x} = -\lim_{\beta \to b-0} \ln|b-x| \Big|_a^{\beta} = \infty$.

Отже, $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$ збігається при $\alpha < 1$ і розбігається при $\alpha \geq 1$.

Приклад. Обчислити дані невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

а) $\displaystyle\int_0^1 \ln x \, dx$; б) $\displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$; в) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x^2 - 4x}$.

а) $\int_0^1 \ln x \, dx = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int_{0+\varepsilon}^1 \ln x \, dx = \left| u = \ln x;\ dv = dx;\ du = dx/x; \right.$

$v = x \left| = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \left(x \ln x \,|_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 x \cdot dx/x \right) = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \left(\ln 1 - \varepsilon \ln \varepsilon - x \,|_{\varepsilon}^1 \right) = \right.$

$= \lim\limits_{\varepsilon \to +0} (-\varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon) = -\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \ln \varepsilon - 1 = |0 \cdot \infty| =$

$$= -\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\ln \varepsilon}{1/\varepsilon} - 1 = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = -\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{(\ln \varepsilon)'}{(1/\varepsilon)'} - 1 = -\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1/\varepsilon}{-(1/\varepsilon)^2} - 1 =$$

$= \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \varepsilon - 1 = -1$. Інтеграл збігається і дорівнює -1.

б) $\displaystyle\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \left| \sqrt[3]{(x-1)^4} = 0;\ x = 1 \in [0;9] \right| =$

$$= \int_0^1 (x-1)^{-4/3} dx + \int_1^9 (x-1)^{-4/3} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} (x-1)^{-4/3} dx +$$

$$+ \lim_{\delta \to +0} \int_{1+\delta}^9 (x-1)^{-4/3} dx = \left| \int (x-1)^{-4/3} dx = -3(x-1)^{-1/3} + C = \right.$$

$$\left. = -3/\sqrt[3]{x-1} + C \right| = -3 \lim_{\varepsilon \to +0} \left(1/\sqrt[3]{x-1} \right) \Big|_0^{1-\varepsilon} - 3 \lim_{\delta \to +0} \left(1/\sqrt[3]{x-1} \right) \Big|_{1+\delta}^9 =$$

$$= -3 \lim_{\varepsilon \to +0} \left(1/\sqrt[3]{-\varepsilon} - 1/\sqrt[3]{-1} \right) - 3 \lim_{\delta \to +0} \left(1/\sqrt[3]{8} - 1/\sqrt[3]{\delta} \right) = +\infty.$$

Невласний інтеграл розбігається.

в) $\int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{x^2-4x} = \left| \begin{array}{l} x^2-4x=0; \quad x(x-4)=0; \\ x_1 = 0 \notin [2;4];\ x_2 = 4 \in [2;4] \end{array} \right| =$

$= \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{2}^{4-\varepsilon} \frac{dx}{x^2-4x} = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{2}^{4-\varepsilon} \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} \right) dx = \left| \begin{array}{l} A(x-4)+Bx=1 \\ x=0 \\ x=4 \end{array} \left| \begin{cases} -4A=1 \\ 4B=1 \end{cases} \right. \right.$

$\left. \begin{array}{r} A=-1/4 \\ B=1/4 \end{array} \right| = -\frac{1}{4} \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_{2}^{4-\varepsilon} \frac{dx}{x} - \int\limits_{2}^{4-\varepsilon} \frac{dx}{x-4} \right) = -\frac{1}{4} \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \Big(\ln|x| \Big|_2^{4-\varepsilon} -$

$- \ln|x-4| \Big|_2^{4-\varepsilon} \Big) = -(1/4) \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \big(\ln|4-\varepsilon| - \ln|2| - \ln|-\varepsilon| +$

$+ \ln|-2| \big) = -(1/4) \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \big(\ln|4-\varepsilon| - \ln|\varepsilon| \big) = -\infty .$

Невласний інтеграл розбігається.

ЛЕКЦІЯ 8 ГЕОМЕТРИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА: ПЛОЩА ПЛОСКОЇ ФІГУРИ. ДОВЖИНА ДУГИ КРИВОЇ. ОБ'ЄМ ТІЛА ОБЕРТАННЯ. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ. ФІЗИЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Обчислення площі плоскої фігури

З геометричного змісту визначеного інтегралу безпосередньо слідує, що площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю Ox обчислюється інтегралом

$$S = \int\limits_{a}^{b} f(x) dx .$$

Площа фігури, обмеженої двома неперервними кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ та двома прямими *x=a, x=b (a<b)*, причому $f_2(x) > f_1(x)$ на інтервалі $(a;b)$,обчислюється за формулою

$$S = \int\limits_{a}^{b} (f_2(x) - f_1(x)) dx .$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2$ та прямими $y = 0$ та $x = 1$.

$$S=\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{1}{3}\text{(кв. од.)}.$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y=x^2-3x+2$ та прямою $y=x+2$.

Спочатку знайдемо точки перетину двох даних ліній. Для цього треба розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y=x^2-3x+2, \\ y=x+2. \end{cases}.$$

Її розв'язок: $x_1=0$; $y_1=2$; $x_2=4$; $y_2=6$.

Тоді *a*=0; *b*=4; $f_2(x)=x+2;$ $f_1(x)=x^2-3x+2$;

Нижче на рисунку наведено фігуру, площу якої треба знайти.

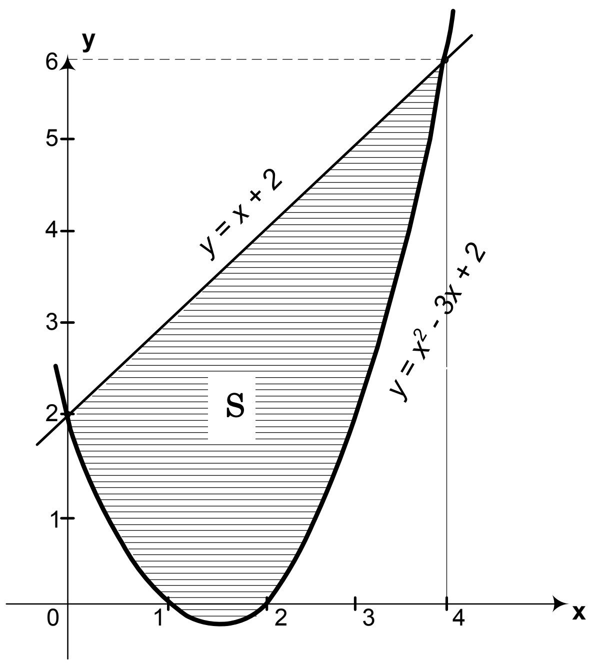

Рисунок 5 – Пошук площі фігури.

$$S=\int_0^4\Big((x+2)-(x^2-3x+2)\Big)dx=10\frac{2}{3}\ \text{(кв. од.)}.$$

Площа плоскої фігури в параметричних координатах.

Нехай площа обмежена лінією в параметричних координатах:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta .$$

Обчислимо $dx = x'(t)dt$ і підставивши в формулу $S = \int_a^b f(x)dx$ одержимо

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt .$$

Приклад. Обчислити площу еліпса $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$. Знайдемо $dx = -a\sin t dt$, тоді шукана площа

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = -4ab\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \pi ab \text{ (кв. од.).}$$

Площа плоскої фігури в полярних координатах.

Розглянемо в полярних координатах криволінійний сектор, обмежений прямими $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ та кривою $\rho = \rho(\varphi)$.

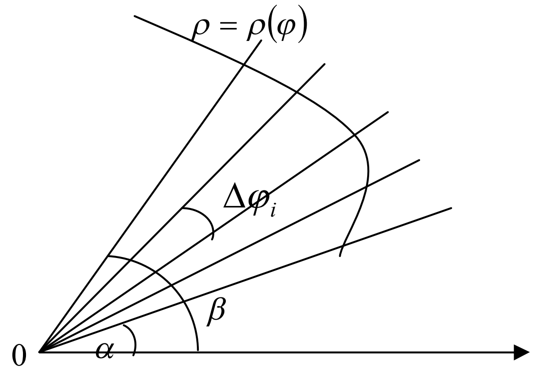

Рисунок 6 – Криволінійний сектор в полярних координатах.

Розіб’ємо площу на n секторів променями, які проходять під кутами $\varphi_0 = \alpha, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{i-1}, \varphi_i, ..., \varphi_n = \beta$ і розглянемо $i-й$ сектор з кутом $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$. Нехай $\Delta\varphi_i$ настільки малий, що дугу лінії $\rho = \rho(\varphi)$ можна замінити дугою кола, радіус якого $\rho(\overline{\varphi}_i)$, де $\varphi_{i-1} < \overline{\varphi}_i < \varphi_i$. Тоді площа i-го сектора

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}\rho^2(\overline{\varphi}_i)\cdot\Delta\varphi_i .$$

Склавши площі всіх секторів, одержимо суму

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \rho^2(\overline{\varphi}_i)\Delta\varphi_i .$$

Ця сума є інтегральною, а її границя при необмеженому збільшенні $n \to \infty$ є визначним інтегралом:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi .$$

Приклад. Обчислити площу, обмежену лемніскатою Бернуллі $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$

Розв'язок.

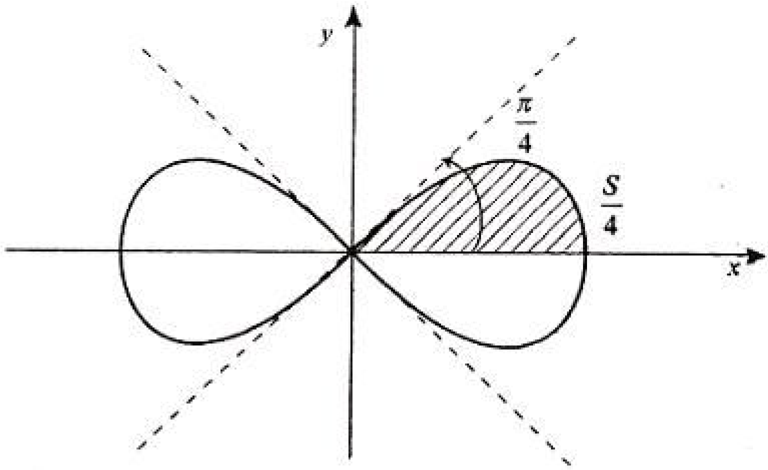

Рисунок 7 – Лемніската Бернуллі.

Площа плоскої фігури в полярних координатах $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$.

В силу симетрії кривої обчислюємо одну четверту шуканої площі:

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

Тож, вся площа дорівнює $S = a^2$(кв. од.).

Обчислення довжини дуги плоскої кривої

Якщо крива задана в параметричній формі

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \; t_1 \le t \le t_2 ,$$

то довжина її дуги обчислюється за формулою

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\, dt .$$

Приклад. Обчислити довжину дуги кривої

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \; 0 \le t \le 2\pi .$$

Розв'язання. $x_t' = 2(1 - \cos t); \;\; y_t' = 2\sin t;$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + 4\sin^2 t}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt = 4\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt = 16 .$$

Якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$, то довжина її дуги визначається за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx .$$

Приклад. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln(\cos x)$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. $f'(x) = -tgx; \;\; 1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{\cos^2 x};$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} .$$

Скористаємось формулою:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C . \text{ Отже: } L = \ln\left| tg\frac{3}{8}\pi \right| .$$

Якщо крива задана у полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$,де $(\alpha \le \varphi \le \beta)$, то довжина її дуги визначається так:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi .$$

Приклад. Обчислити довжину дуги кривої $\rho = \sin^3\frac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання. $\rho' = \sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3};$

$$L=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3}+\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}d\varphi=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1-\cos\frac{2\varphi}{3}}{2}d\varphi=\frac{1}{2}\varphi\Bigg|_0^{\frac{3\pi}{2}}-\frac{3}{4}\sin\frac{2\varphi}{3}\Bigg|_0^{\frac{3\pi}{2}}=\frac{3\pi}{4}.$$

Об'єм тіла з відомими площами паралельних перерізів.

Нехай маємо деяке тіло *T*. Припустимо, що відома площа будь-якого перерізу цього тіла площиною, що перпендикулярна до осі *Ox* (рис. 8). Ця площа залежить від положення січної площини, тобто є функцією від *x*: $S=S(x)$. Знайдемо об'єм *V* тіла *T*.

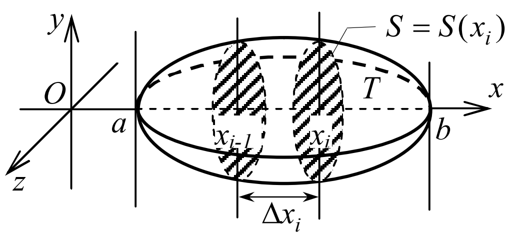

Рисунок 8 – Обчислення об’єму тіла

Припустимо, що функція $S(x)$ – неперервна на відрізку $[a;b]$, що служить проекцією тіла T на вісь Ox. Проведемо довільно площини $x=x_0$, $x=x_1$, ..., $x=x_i$, ..., $x=x_n$, де $a=x_0<x_1<x_2<...<x_i<...<x_n=b$. Тим самим тіло розбивається на елементарні шари між сусідніми площинами $x=x_{i-1}$ і $x=x_i$. На кожному частинному проміжку $[x_{i-1};x_i]$ візьмемо довільну точку c_i і для кожного i-го шару побудуємо елементарний циліндр, твірна якого паралельна осі Ox і має довжину $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, а напрямною служить контур перерізу тіла T площиною $x=c_i$. Тоді об'єм шару ΔV_i наближено дорівнює об'єму такого циліндра з площею основи $S(c_i)$ і висотою Δx_i: $\Delta V_i\approx S(c_i)\Delta x_i$. Об'єм V тіла T наближено дорівнює сумі V_n об'ємів усіх частинних циліндрів: $V\approx V_n=\sum_{i=1}^{n}S(c_i)\Delta x_i$. Точність цього наближення підвищується зі зменшенням кроків Δx_i розбиття.

Границя цієї суми (якщо вона існує) при необмеженому здрібненні розбиття (коли $\max \Delta x_i \to 0$ і при цьому, очевидно, $n \to \infty$) визначає об'єм V даного тіла T:

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(c_i)\,\Delta x_i \,.$$

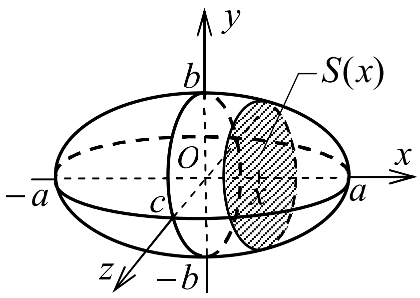

Рисунок 9 – Переріз тіла $S(x)$.

Таким чином, об'єм V є границею інтегральної суми V_n для неперервної функції $S(x)$ на відрізку $[a;b]$, тому вказана границя існує і дорівнює визначеному інтегралу:

$$V = \int_a^b S(x)\,dx \;.$$

Приклад. Знайти об’єм еліпсоїда

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 .$$

У перерізі еліпсоїда площиною, паралельною площині Oyz на відстані x від неї, утворюється еліпс

$$\begin{cases} y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 - x^2/a^2; \\ x = const \end{cases}$$

або $y^2 \big/ \left(b^2(1 - x^2/a^2)\right) + z^2 \big/ \left(c^2(1 - x^2/a^2)\right) = 1$

з півосями $b_1 = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $\quad c_1 = c\sqrt{1 - x^2/a^2}$.

Площа такого еліпса

$$S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi bc\left(1 - x^2/a^2\right).$$

Обчислимо об’єм еліпсоїда, враховуючи його симетрію відносно площини Oyz:

$$V = \pi bc\int_{-a}^{a}(1 - x^2/a^2)\,dx =$$

$$= 2\pi bc\int_0^a (1 - x^2/a^2)\,dx = \; = 2\pi bc\left(x - x^3/(3a^2)\right)\Big|_0^a = (4/3)\pi abc \text{ (куб.од.).}$$

Обчислення об'єму тіла обертання

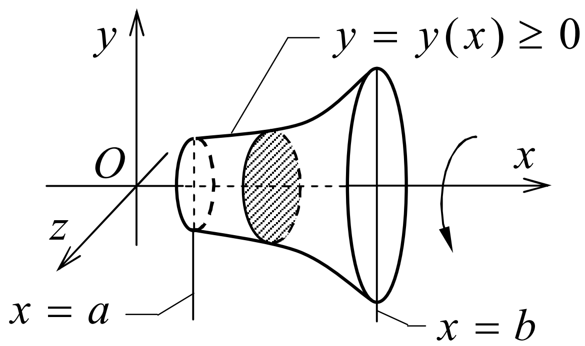

Рисунок 10 – Переріз тіла обертання

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену графіком неперервної невід’ємної функції $y = y(x) \ge 0$, віссю Ox і двома прямими $x = a$ та $x = b$, де $a \le b$. Якщо обертати цю фігуру навколо осі Ox, то утвориться тіло обертання T (рис. 10).

Переріз цього тіла площиною, паралельною площині Oyz на відстані x від неї, – круг з площею $S(x) = \pi R^2 = \pi(y(x))^2$. Тоді об'єм тіла обертання можна обчислити за формулою

$$V = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx .$$

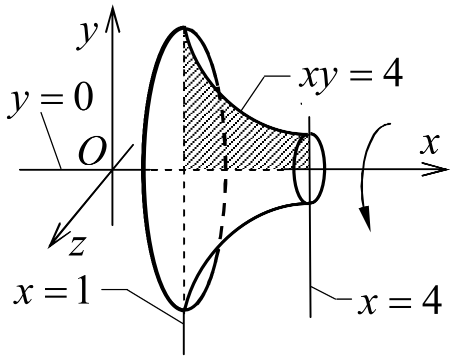

Рисунок 11 – Тіло, утворене обертанням трапеції.

Приклад. Знайти об’єм тіла, що утворене обертанням плоскої фігури, обмеженої лініями $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$, навколо осі Ox.

Тіло, об’єм якого треба знайти, зображене на рис. 11. Фігура (криволінійна трапеція), що обертається, показана штриховою.

Проведемо обчислення:

$$V = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx =$$

$$= \pi\int_1^4 (4/x)^2\,dx = 16\pi\int_1^4 \frac{dx}{x^2} =$$

$$= 16\pi(-1/x)\,\Big|_1^4 = -16\pi\cdot(1/4-1) = 12\pi \text{ (куб.од.).}$$

Зауваження. Об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осу Oy криволінійної трапеції, обмеженої лініями $x = x(y) \ge 0$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$, де $c \le d$, $x = x(y)$ − неперервна невід’ємна на $[c;d]$ функція, обчислюється аналогічно

$$V = \pi\int_c^d x^2(y)\,dy \ .$$

Приклад. Знайти об’єм частини параболоїда, утвореної обертанням дуги параболи $y = x^2$, $x \in [0;2]$ навколо осі Oy.

З рівняння параболи $x = x(y) = \sqrt{y}$, $y \in [0;4]$. Тоді

$$V = \pi\int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi(y^2/2)\Big|_0^4 = 8\pi \text{ (куб.од.).}$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої параболою $y = 3x - x^2$ та прямою $y = 3 - x$.

Розв'язання. Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 3x - x^2 \\ y = 3 - x \end{cases},$$

отримаємо дві точки перетину параболи та прямої: $M_1(1;2)$, $M_2(3;0)$.

Спочатку знайдемо V_1 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої параболою $y = 3x - x^2$, прямими x=1 та x=3 та віссю абсцис

$$V_1 = \pi\int_1^3 \left(3x - x^2\right)^2 dx = 6{,}4\pi \ .$$

Далі знаходимо V_2 – об'єм тіла, отриманого при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої прямою $y = 3 - x$, прямими x=1, x=3 та віссю абсцис

$$V_2 = \pi\int_1^3 (3 - x)^2 dx = \frac{8}{3}\pi \ .$$

Тоді шуканий об'єм $V = V_1 - V_2 = 6{,}4\pi - \frac{8}{3}\pi = \frac{56}{15}\pi$ (куб.од.).

Обчислення площі поверхні тіла обертання

Площа поверхні S , яка утворення обертанням кривої $y = f(x)$,
де x є [a, $в$], навколо осі Ox, обчислюється за формулою

$$s = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \ .$$

Функція $y = f(x)$ повинна бути на відрізку [a, $в$] неперервною разом із своєю похідною.

Приклад. Знайти площу поверхні, утвореною обертанням петлі кривої $x = at^2$, $y = at\left(t^2 - 3\right)/3$ навколо осі Ox.

Розв'язання. З рівняння $y = 0$ обчислюємо значення параметра t, де петля перетинає вісь Ox.

Отже: t є $[0, \sqrt{3}\,]$.

$$S = \left|\frac{2\pi a^2}{3}\int_0^{\sqrt{3}} t\left(t^2 - 3\right)\sqrt{4t^2 + (t^2 - 1)^2}\, dt\right| = \left|\frac{2\pi a^2}{3}\int_0^{\sqrt{3}} t\left(t^2 - 3\right)\left(t^2 + 1\right) dt\right| =$$

$$= \left|\frac{2\pi}{3}a^2\left(\frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{2} - \frac{3t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{2\pi a^2}{3}\left(\frac{27}{6} - \frac{9}{2} - \frac{9}{2}\right)\right| = 3\pi a^2 \ \textbf{(кв. од.).}$$

ЛЕКЦІЯ 9 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ. ЗАГАЛЬНИЙ ТА ЧАСТИННИЙ РОЗВ'ЯЗОК ТА ЇХ ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ. ЗАДАЧА КОШІ. РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ. ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛІ

Диференціальним рівнянням називається рівняння, що зв'язує невідому функцію, її похідні та незалежні змінні.

Якщо функція, яка входить у рівняння, залежить від однієї незалежної змінної, то рівняння називається звичайним диференціальним рівнянням. Порядок старшої похідної, що входить у дане рівняння, називається порядком рівняння. Звичайне диференціальне рівняння *n*-го порядку має вигляд

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 .$$

Будь-яка функція , що задовольняє диференціальне рівняння, тобто перетворює його в тотожність, називається розв'язком цього рівняння. Співвідношення $\Phi(x, y) = 0$, що задає неявно розв'язок рівняння, називається інтегралом цього рівняння. Графік розв'язку диференціального рівняння називається його інтегральною кривою. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням його.

Диференціальні рівняння першого порядку

Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку:

$$F(x, y, y') = 0 .$$

Припустимо, що рівняння можна розв'язати відносно похідної. Тоді воно приймає вигляд

$$y' = f(x, y) .$$

Задача знаходження розв'язку рівняння $y' = f(x, y)$, що задовольняє початкову умову $y\big|_{x=x_0} = y_0$, називається задачею Коші.

Розв'язок задачі Коші називається частинним розв'язком диференціального рівняння.

Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші: якщо права частина $f(x,y)$ рівняння $y' = f(x,y)$ та її частинна похідна за y $f'_y(x,y)$ визначені та неперервні в області D змінних x та y, то якою б не була внутрішня точка $(x_{0,}y_0)$ цієї області, дане рівняння має єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$, який приймає при $x = x_0$ задане значення $y = y_0$ і визначений в деякому околі точки $x = x_0$.

Геометрично це означає, що через кожну точку області D проходить лише одна інтегральна крива.

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція $y = \varphi(x,C)$, яка залежить від однієї довільної сталої C і задовольняє дві умови:

1. функція $y = \varphi(x,C)$ є розв'язком рівняння при будь-яких припустимих значеннях довільної сталої C;

2. вибором довільної сталої C можна задовольнити будь-яку початкову умову $y|_{x=x_0} = y_0$.

Співвідношення $\Phi(x,y,C) = 0$, що визначає загальний розв'язок у неявному вигляді, називається загальним інтегралом рівняння і являє собою одно параметричну сім'ю інтегральних кривих.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок, одержаний з загального розв'язку пр. певному значенні довільної сталої C . Розв'язок задачі Коші , тобто розв'язок, що задовольняє початкові умови, є частинним розв'язком.

Розглянемо методи інтегрування диференціального рівняння для окремих випадків правої частини $f(x,y)$.

Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціального рівняння називається рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо його права частина $f(x,y)$ може бути виражена як добуток двох функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної:

$$f(x,y)=\varphi(x)\psi(y).$$

Тоді рівняння $y' = f(x,y)$ можна переписати у вигляді

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x)\psi(y).$$

Поділимо обидві частини на $\psi(y)\neq 0$:

$$\frac{dy}{\psi(y)}=\varphi(x)dx .$$

В останньому рівнянні змінні відокремлені. Вважаючи, що $y=y(x)$ – це розв’язок рівняння, одержимо тотожність. Інтегруючи її, знайдемо загальний інтеграл рівняння:

$$\int\frac{dy}{\psi(y)}=\int\varphi(x)dx+C .$$

Приклад. $y'=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}}$.

Розв’язання. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Припускаючи, що $y\neq 0$, відокремимо змінні:

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} .$$

Після інтегрування одержимо:

$$\ln|y|=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+\ln|C| .$$

Звідси

$$y=C\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Розв’язок $y=0$ міститься в загальному розв’язку при $C=0$.

Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння називається однорідним, якщо $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового степеня.

Функція $f(x,y)$ називається однорідною функцією k-го степеня, якщо виконується тотожність $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$.

Наприклад, $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ – однорідна функція з показником однорідності $k=-1$, бо $f(tx,ty)=\dfrac{tx+ty}{t^2x^2+t^2y^2}=\dfrac{1}{t}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}=t^{-1}f(x,y)$.

Функція $f(x,y)=x^2y+3xy^2+8y^3$ однорідна 3-го степеня.

Функція $f(x,y)=\dfrac{y}{x}\sin\dfrac{y}{x}$ – однорідна нульового степеня.

Якщо функція $f(x,y)$ є однорідною нульового степеня, то вона задовольняє тотожність $f(tx,ty)=f(x,y)$ і її завжди можна подати як функцію відношення $\dfrac{y}{x}$. Справді, поклавши в тотожності $t=\dfrac{1}{x}$, одержимо:

$$f\left(1,\frac{y}{x}\right)=f(x,y).$$

Ліва частина одержаної рівності залежить лише від $\dfrac{y}{x}$, отже

$$f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Рівняння приймає вигляд: $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

За допомогою заміни змінної останнє рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{y}{x}=z(x)\Rightarrow y=xz,\quad y'=z+xz'.$$

Підставивши одержані вирази до рівняння, знайдемо:

$$z+xz'=\varphi(z) \text{ або } xz'=\varphi(z)-z.$$

Відокремлюючи змінні й інтегруючи, одержимо загальний інтеграл рівняння:

$$\int\frac{dz}{\varphi(z)-z}=\ln|x|+\ln|C|.$$

При відокремлюванні змінних ділимо рівняння на $\varphi(z)-z$, припускаючи, що цей вираз відмінний від нуля. Якщо ж існує таке значення z_0, при якому $\varphi(z_0)-z_0=0$, то маємо ще розв'язок: $z=z_0$ або $y=xz_0$.

Приклад. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.

Розв'язання. Це однорідне диференціальне рівняння, бо $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ – однорідна функція нульового степеня. Для його розв'язання вводимо нову функцію: $z(x) = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = xz, \quad y' = z + xz'$ ю У нових змінних рівняння має вигляд

$$\frac{1 - z^2}{z\left(1 + z^2\right)} dz = \frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування знайдемо:

$$\ln|z| - \ln\left|1 + z^2\right| = \ln|x| + \ln|C| \text{ або } \frac{z}{1 + z^2} = Cx.$$

Підставивши значення $z = \frac{y}{x}$, одержимо загальний інтеграл рівняння: $x^2 + y^2 = Cy$. Крім того, розв'язком є $z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$.

Лінійні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння першого порядку називається лінійним, якщо має вигляд

$$y' + p(x)y = q(x),$$

де $p(x)$ та $q(x)$ – відомі функції від x.

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння називається однорідним лінійним рівнянням. Якщо $f(x) \neq 0$, то маємо неоднорідне лінійне рівняння.

Однорідне лінійне рівняння являє собою рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' + p(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Після інтегрування одержимо загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Для розв'язку неоднорідного лінійного рівняння застосуємо метод варіації довільної сталої Розв'язок шукаємо в тому самому вигляді, що і розв'язок однорідного рівняння, але вважаємо невідомою функцією x, тобто

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx},$$

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x).$$

Підставимо в рівняння:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx}p(x) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x).$$

Після спрощення одержимо: $C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}$. Інтегруючи, знаходимо $C(x)$:

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1.$$

Загальний розв’язок неоднорідного лінійного рівняння має вигляд:

$$y(x) = C_1(x)e^{-\int p(x)dx} + (\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx)e^{-\int p(x)dx} = u(x) + V(x),$$

де $u(x)$ – загальний розв’язок однорідного рівняння, $V(x)$ – частинний розв’язок неоднорідного рівняння $(C_1 = 0)$.

Лінійне рівняння зводиться до двох рівнянь з відокремлюваними змінними за допомогою заміни $y = uv$, де u і v – допоміжні шукані функції від змінної x.

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $x^2y' + 2xy = e^{-x}$.

Розв'язання. Для зведення його до стандартного вигляду поділимо ліву та праву частини на x^2. Тут $x \neq 0$:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^{-x}}{x^2} \text{ (тобто } p(x) = \frac{2}{x};\ q(x) = \frac{e^{-x}}{x^2}\text{).}$$

Отже, маємо лінійне диференціальне рівняння, яке розв’язуємо наступним чином:

$$y = uv;\ \ y' = u'v + uv';\ \ u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = \frac{e^{-x}}{x^2}.$$

Далі у другому та третьому доданках виносимо за дужки u, а те, що залишається у дужках, прирівнюємо до нуля:

$$u'v + u\left(v' + \frac{2v}{x}\right) = \frac{e^{-x}}{x^2};$$

$$v' + \frac{2v}{x} = 0.$$

Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Знаходимо який-небудь його розв'язок.

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2v}{x}; \ \frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x}; \ \ln v = -2\ln x; \ v = \frac{1}{x^2}.$$

Отже, ми знайшли один із співмножників у розв'язку, який ми шукаємо у вигляді $y = uv$.

Для знаходження u підставляємо знайдене v у рівняння $u'v = \frac{e^{-x}}{x^2}$.

Тоді отримуємо $u'\frac{1}{x^2} = \frac{e^{-x}}{x^2}$; $u' = e^{-x}$.

Звідки отримуємо другий співмножник $u = -e^{-x} + C$.

Знайдені функції дають загальний розв'язок: $y = \frac{-e^{-x} + C}{x^2}$.

Рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$y' + p(x)y = f(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$$

називається рівнянням Бернуллі.

Рівняння Бернуллі розв’язуються аналогічно методу розв’язування лінійних рівнянь. Розглянемо на прикладі.

Приклад. Розв’язати рівняння:

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Зробимо в рівнянні заміну функції:

$$y = u \cdot v, \quad y' = u'v + uv'$$

підставимо в рівняння:

$$x(u'v + uv') + uv = u^2 v^2 \ln x, \text{ або}$$

$$(xu' + u)v + xuv' = u^2 v^2 \ln x.$$

Вираз в дужках прирівнюємо до нуля:

$$xu' + u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{x}.$$

Для визначення y одержимо рівняння

$$xuv' = u^2 v^2 \ln x \text{ або } v' = \frac{1}{x^2} v^2 \ln x.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{1}{x^2} \ln x dx .$$

Після інтегрування одержимо:

$$-\frac{1}{v} = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} - C \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x}{Cx + \ln x + 1} .$$

Отже, $y = uv = \dfrac{1}{Cx + \ln x + 1}$.

ЛЕКЦІЯ 10 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ШЛЯХОМ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З НУЛЬОВОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ (ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ). СТРУКТУРА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ. ХАРАКТЕРИСТИЧНЕ РІВНЯННЯ. ПОБУДОВА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ У ВИПАДКУ ДІЙСНИХ РІЗНИХ, ДІЙСНИХ КРАТНИХ І КОМПЛЕКСНО-СПРЯЖЕНИХ КОРЕНІВ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО РІВНЯННЯ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ

$F(x, y, y', y'') = 0$ – загальний вигляд диференціального рівняння другого порядку. Загальний розв'язок такого рівняння має вигляд $y = y(x, C_1, C_2)$, тобто залежить від двох довільних сталих.

Для визначення цих сталих використовуємо початкові умови, тобто відомі значення шуканої функції y та її похідної y' при даному значенні аргументу $x = x_0$.

Нижче розглянемо два види найпростіших диференціальних рівнянь другого порядку, які розв'язуються методом зниження порядку.

1. У рівнянні відсутня шукана функція, тобто рівняння має вигляд

$$F(x, y', y'') = 0 .$$

Порядок рівняння знижується шляхом заміни $y' = z$, $y'' = z'$, де $z = z(x)$– допоміжна шукана функція.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' + 2y' = 8$.

Розв'язання**.** Нехай $y' = z$, $y'' = z'$. Тоді $z' + 2z = 8$. Відокремивши змінні, отримуємо

$$\frac{dz}{z-4}=-2dz\,;\ ln(z-4)=-2x+ln\,C_1\,.$$

Тоді $z=C_1e^{-2x}+4$ або $y'=C_1e^{2x}+4$ і $y=-\frac{1}{2}C_1e^{2x}+4x+C_2$ – загальний розв'язок рівняння.

2. У рівнянні відсутня незалежна змінна:

$$F(y,y',y'')=0\,.$$

Порядок рівняння знижується шляхом заміни $y'=p(y)$ – нова шукана функція від незалежної змінної y, яка в свою чергу є функція від x.

Для y'' отримуємо співвідношення $y''=\frac{dp}{dy}\cdot p$.

Приклад. Розв'язати рівняння $yy''+(y')^2=1$.

Розв'язання**.** Нехай $y'=p$; $y''=\frac{dp}{dy}\cdot p$.

Тоді $y\frac{dp}{dy}p+p^2=1$.

Відокремивши змінні, одержимо

$$\frac{pdp}{1-p^2}=\frac{dy}{y}\,.$$

Після його інтегрування маємо: $ln(1-p^2)=-2\,ln\,y+ln\,C_1$.

Або $1-p^2=\frac{C_1}{y^2}$, звідки $p=\sqrt{1-\frac{C_1}{y^2}}$,але $y'=p(y)$. Отже $\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-\frac{C_1}{y^2}}$.

Відокремивши змінні та інтегруючи його, одержимо загальний розв'язок вихідного рівняння $\sqrt{y^2-C_1}=x+C_2$

ЛЕКЦІЯ 11 ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ З НЕНУЛЬОВОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ (НЕОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ). СТРУКТУРА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ. ВІДШУКАННЯ ЧАСТИННОГО РОЗВ'ЯЗКУ, ЩО ВІДПОВІДАЄ ВИДУ ПРАВОЇ ЧАСТИНИ

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Рівняння вигляду $y'' + py' + qy = f(x)$ називається диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо p та q – відомі числа, а $f(x)$ – відома функція.

Якщо $f(x)$=0, рівняння називається однорідним, у протилежному разі – неоднорідним.

Структура загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку

Теорема. Якщо функції $y_1(x), y_2(x)$ утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків ЛОДР другого порядку, то їх лінійна комбінація

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 \ ,$$

де C_1 і C_2 − довільні сталі, служить загальним розв'язком цього рівняння.

Дві функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ будемо вважати лінійно-незалежними, якщо їх відношення не дорівнює сталому числу: $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const.$

Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ − два лінійно-незалежних частинних розв'язків ЛОДР другого порядку

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 .$$

Перевіримо, що їх лінійна комбінація $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ також є розв'язком (задовольняє ЛОДР). Для цього підставимо функцію $\bar{y}$ та її похідні у рівняння:

$$\bar{y}' = C_1 y_1' + C_2 y_2'; \quad \bar{y}'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'';$$

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1(y_1'' +$$

$$+ p y_1' + q y_1) + C_2(y_2'' + p y_2' + q y_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Висновок: для знаходження загального розв’язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку необхідно знайти два лінійно-незалежні частинні розв’язки цього рівняння і взяти їх лінійну комбінацію.

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + py' + qy = 0$$

Частинні розв'язки шукаємо у вигляді експоненти $y = e^{kx}$, де k − невідомий сталий коефіцієнт. Підставимо цю функцію $y = e^{kx}$ та її похідні $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ у рівняння і дістанемо $(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0$. Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то для визначення k отримуємо співвідношення

$$k^2 + pk + q = 0 ,$$

яке називають характеристичним рівнянням даного ЛОДР.

Характеристичне рівняння є квадратним відносно k і на множині комплексних чисел завжди має два розв’язки k_1 і k_2. При цьому можливі три випадки, в залежності від знака дискримінанта $D = p^2 - 4q$.

Випадок 1. $D > 0$. Обидва корені k_1 і k_2 − дійсні різні числа $k_1 \neq k_2$: $k_{1,2} = \left(-p \pm \sqrt{D}\right)/2$. Тоді $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$ − лінійно незалежні розв’язки. Загальний розв’язок має вигляд $\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Приклад. Знайти загальний розв’язок $y'' + 3y' + 2y = 0$.

$$k^2 + 3k + 2 = 0; \; D = 9 - 8 = 1 > 0;$$

$$k_1 = -1, \; k_2 = -2; \; \bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Випадок 2. $D = 0$. Корені k_1 і k_2 − дійсні рівні числа $k_1 = k_2 = k = -p/2$. Тобто, $k = -p/2$ − один корінь кратності $r = 2$. Тоді $y_1 = e^{kx}$ − частинний розв’язок. Знайдемо другий лінійно незалежний з ним розв’язок y_2.

Перевіримо, що одержана функція $y_2 = x\,e^{kx}$ служить розв’язком:

$$y_2' = e^{kx} + kxe^{kx}; \quad y_2'' = ke^{kx} + ke^{kx} + k^2xe^{kx} = 2ke^{kx} + k^2xe^{kx};$$

$$2ke^{kx} + k^2xe^{kx} + p(e^{kx} + kxe^{kx}) + qxe^{kx} = e^{kx}(k^2x + 2k +$$

$$+ p + pkx + qx) = |k = -p/2| = e^{kx}((-p/2)^2x + 2(-p/2) +$$

$$+ p + p(-p/2)x + qx) = -(1/4)e^{kx}(p^2 - 4q)x =$$

$$= \left|p^2 - 4q = D = 0\right| = -xe^{kx} \cdot 0 = 0.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок $y'' - y' + 0{,}25y = 0$.

$$D = 1 - 1 = 0, \quad k_1 = k_2 = k = 1/2;$$

$$\bar{y} = e^{x/2}(C_1 + C_2x).$$

Випадок 3. $D < 0$. Характеристичне рівняння має два комплексні спряжені корені $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, де $\alpha = -p/2$, $\beta = \sqrt{-D}/2$, $D = p^2 - 4q < 0$, $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Тоді $y_{1к} = e^{k_1x} = e^{(\alpha + \beta i)x}$, $y_{2к} = e^{k_2x} = e^{(\alpha - \beta i)x}$ – комплексні лінійно незалежні розв'язки. Їх лінійна комбінація $\bar{y}_к = C_1e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2e^{(\alpha - \beta i)x}$ служить комплексним загальним розв'язком.

Але диференціальне рівняння має дійсні коефіцієнти, тому бажано мати розв'язки в дійсній формі. На основі формули Ейлера маємо:

$$y_{1к} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x); \quad y_{2к} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Можна показати, що для комплекснозначної функції, яка є розв'язком диференціального рівняння, її уявна та дійсна частини також будуть його розв'язками.

Таким чином, дістаємо лінійно незалежні дійсні частинні розв'язки $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, що утворюють фундаментальну систему. Дійсним загальним розв'язком служить їх лінійна комбінація

$$\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x =$$

$$= e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок $y'' + 4y' + 13y = 0$.

$k^2 + 4k + 13 = 0$; $D = 16 - 52 = -36 < 0$;

$k_{1,2} = (-4 \pm \sqrt{-36})/2 = (-4 \pm 6\sqrt{-1})/2 = (-4 \pm 6i)/2 = -2 \pm 3i$;

$\alpha = -2;\ \beta = 3$,

$$\bar{y} = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

Теорема. Загальний розв'язок ЛНДР другого порядку

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \ ,$$

можна зобразити у вигляді суми загального розв'язку $\bar{y}$ відповідного ЛОДР

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

і якого-небудь частинного розв'язку y_* ЛНДР: $y=\bar{y}+y_*$.

Перевіримо, що функція $y=\bar{y}+y_*$ є розв'язком ЛНДР:

$$y'=\bar{y}'+y_*'; \ y''=\bar{y}''+y_*''; \ \bar{y}''+y_*''+p(\bar{y}'+y_*')+q(\bar{y}+y_*)=$$
$$=(\bar{y}''+p\bar{y}'+q\bar{y})+(y_*''+py_*'+qy_*)=0+f(x)=f(x).$$

Оскільки $\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2$, де $y_1(x),y_2(x)$ – фундаментальна система частинних розв'язків ЛОДР, то розв'язок $y=\bar{y}+y_*=C_1y_1+C_2y_2+y_*$ містить дві довільні сталі C_1 і C_2.

Розглянемо деякі функції $f(x)$ у правій частини рівняння.

1. $f(x)$ – многочлен степеня $n-$ $P_n(x)$. Тоді y_* шукаємо у вигляді многочлена того ж степеня n з невідомими коефіцієнтами – $Q_n(x)$, якщо $k_1\neq 0$, $k_2\neq 0$. Якщо один з коренів характеристичного рівняння дорівнює нулю, то $y_*=xQ_n(x)$.

Приклад. Знайти розв'язок рівняння $y''+y'=x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2+k=0$ має два дійсні корені: $k_1=0$, $k_2=-1$. Отже, $\bar{y}=C_1+C_2e^{-x}$.

y_* шукаємо у вигляді $y_*=x(Ax+B)$, де A і B – невідомі, оскільки один з коренів характеристичного рівняння дорівнює нулю, а права частина – многочлен першого степеня.

Отже, $y_* = Ax^2 + Bx$. Тоді $y_*' = 2Ax + B;\ \ y_*'' = 2A$.

Підставляємо y_*' та y_*'' у рівняння: $2A + 2Ax + B = x$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій та правій частинах рівняння, одержуємо систему відносно невідомих A та B:

$$\begin{matrix} x^1 \\ x^0 \end{matrix} \quad \begin{cases} 2A = 1, \\ 2A + B = 0. \end{cases} \quad A = \frac{1}{2},\ B = -1.$$

Маємо частинний розв'язок $y_* = \dfrac{x^2}{2} - x$ і загальний розв'язок початкового рівняння : $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \dfrac{x^2}{2} - x$.

2. $f(x) = ae^{mx}$. Тоді $y_* = Ae^{mx} \cdot x^r$, де r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють m.

Приклад . Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - y' - 2y = 2e^{2x}$.

Розв'язання. Корені характеристичного рівняння $k_1 = -1$, $k_2 = 2$.

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x};\ \ y_* = Ae^{2x} \cdot x\ .$$

Знаходимо y_*' та y_*'': $y_*' = 2Ae^{2x}x + Ae^{2x};\ y_*'' = 4Ae^{2x}x + 4Ae^{2x}$.

Підставляємо y_*, y_*' та y_*'' у початкове рівняння:

$$4Ae^{2x}x + 4Ae^{2x} - 2Ae^{2x}x - Ae^{2x} - 2Ae^{2x}x = 2e^{2x};$$

$2Ae^{2x} = 2e^{2x}$. Звідки $A = 1$, $y_* = e^{2x}x$.

Загальний розв'язок рівняння: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + e^{2x}x$.

3. $f(x) = M\cos bx + N\sin bx$. Тоді $y_* = A\cos bx + B\sin bx$, якщо корені характеристичного рівняння не дорівнюють $\pm bi$, і $y_* = (A\cos bx + B\sin bx)x$ – в протилежному разі.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 2x$.

Розв'язання. Корені характеристичного рівняння $k_1 = 3$, $k_2 = 2$. Отже $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$; y_* шукаємо у вигляді $y_* = A\cos 2x + B\sin 2x$.

Тоді $y_*' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x;\ \ y_*'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$.

Підставляємо y_*, y_*' та y_*'' у початкове рівняння:

$-4A\,cos\,2x - 4B\,sin\,2x + 10A\,sin\,2x - 10B\,cos\,2x + 6A\,cos\,2x + 6B\,sin\,2x = 13\,sin\,2x;$

$(2A - 10B)\,cos\,2x + (10A + 2B)\,sin\,2x = 13\,sin\,2x$.

Прирівнюючи коефіцієнти при sin2x та cos2x, одержуємо систему:

$$\begin{cases} 2A - 10B = 0, \\ 10A + 2B = 13. \end{cases}$$

Відкіля $B = \frac{1}{4}$, $A = \frac{5}{4}$. Отже, $y_* = \frac{5}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$ – частинний

розв'язок, а $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{5}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$ – загальний розв'язок початкового рівняння.

Задача Коші

Знаходження частинного розв'язку диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам, називається задачею Коші.

Приклад. Розв'язати рівняння $y'' - y = x + 1$, якщо у(0)=0, $y'(0) = 2$.

Розв'язання. Спочатку знаходимо загальний розв'язок рівняння:

$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$; $y_* = Ax + B$. Тоді $y_*' = A$, $y_*'' = 0$. Отже, $-Ax - B = x + 1$. Тоді $A = -1$, $B = -1$. Загальний розв'язок рівняння

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x - 1.$$

Для знаходження C_1 і C_2 використовуємо спочатку умову у(0)=0:

$$C_1 + C_2 - 1 = 0.$$

Далі знаходимо y': $y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - 1$.

Використовуємо умову $y'(0) = 2$:

$$C_1 + C_2 - 1 = 2.$$

Одержуємо систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 0, \\ C_1 - C_2 = 3; \end{cases} \quad C_1 = 2;\ C_2 = -1.$$

Частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початковим умовам, має вигляд: $y = 2e^x - e^{-x} - x - 1$. Тобто задачу Коші розв’язано.

ЛЕКЦІЯ 12 МЕТОД ВАРІАЦІЇ ДОВІЛЬНИХ СТАЛИХ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ. РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ЗВЕДЕННЯ ДО ОДНОГО РІВНЯННЯ ВИЩОГО ПОРЯДКУ

Метод варіації довільних сталих

Як відомо, для знаходження загального розв'язку рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

потрібно знайти який-небудь його частинний розв'язок, а також загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння. Обидві ці задачі є складними. Проте, якщо відомий загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y'' + py' + qy = 0,$$

то розв'язок неоднорідного рівняння можна знайти, скориставшись так званим методом варіації довільних сталих, який належить Лагранжу.

Нехай $\bar{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ – загальний розв'язок однорідного рівняння ня (1). Замінімо у формулі (3) сталі C_1, C_2 невідомими функціями $C_1(x), C_2(x)$ і підберемо ці функції так, щоб функція

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

була розв'язком рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$. Знайдемо похідну

$$y' = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Накладемо на $C_1(x), C_2(x)$ умову, щоб

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0.$$

Тоді

$$y' = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Знайдемо другу похідну

$$y'' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Підставивши значення y, y', y'' в вихідне рівняння , дістанемо

$$C_1(x)\left[y_1''(x)+a_1(x)y_1'(x)+a_2(x)y_1(x)\right]+$$
$$+C_2(x)\left[y_2''(x)+a_1(x)y_2'(x)+a_2(x)y_2(x)\right]+$$
$$+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x).$$

Оскільки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – розв'язки однорідного рівняння, то вирази в квадратних дужках дорівнюють нулю, а тому

$$C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x).$$

Таким чином, функції $C_1(x), C_2(x)$ задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0; \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи $C_1=C_1\left(x,\overline{C}_1\right)$, $C_2=C_2\left(x,\overline{C}_2\right)$, де $\overline{C}_1,\overline{C}_2$ - довільні сталі, підставимо в розв'язок

$$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x).$$

Приклад. Розв'яжемо рівняння

$$y''-\frac{y'}{x}=x.$$

Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y''-\frac{y'}{x}=0:$$

$$y''=\frac{y'}{x},$$

$$\int\frac{y''}{y'}dx=\int\frac{dx}{x},$$

$$ln|y'|=ln|x|+ln\,C_1,$$

$$y'=C_1\cdot x.$$

$y=C_1\cdot\frac{x^2}{2}+C_2$ - загальний розв'язок однорідного рівняння, тобто

$y=C_1y_1+C_2y_2$. Тоді

$$y_1=\frac{x^2}{2}\quad y_1'=x$$
$$y_2=1\quad y_2'=0.$$

Підставимо вирази в систему

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0; \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \end{cases}$$

Одержимо

$$\begin{cases} C_1'\cdot\dfrac{x^2}{2}+C_2'=0 \\ C_1'\cdot x+0=x. \end{cases}$$

Звідки

$$C_1'=1\,,\qquad C_1=x+\overline{C}_1$$
$$C_2'=-\frac{x^2}{2},\quad C_2=-\frac{x^3}{6}+\overline{C}_2.$$

Таким чином, розв’язок рівняння набуде вигляду

$$y=\left(x+\overline{C}_1\right)\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\overline{C}_2\,.$$

Системи диференціальних рівнянь

Лінійна система має нормальний вигляд, якщо вона розв’язана відносно похідних.

Приклад. Розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x-y. \end{cases}$$

Розв'язання. Продиференціюємо перше рівняння по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}.$$

Додамо перше і друге рівняння системи:

$$\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=2x\,.$$

Одержимо $\frac{dy}{dt}=2x-\frac{dx}{dt}$. Підставимо його у диференціальне рівняння другого порядку розв'язку. Маємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx}{dt}+2x-\frac{dx}{dt};\ \ \frac{d^2x}{dt^2}=2x.$$

Це рівняння зі сталими коефіцієнтами. Складаємо характеристичне рівняння $k^2 - 2 = 0$. Корені $k = \pm\sqrt{2}$. Тоді загальний розв'язок:

$$x = C_1 e^{t\sqrt{2}} + C_2 e^{-t\sqrt{2}}.$$

З першого рівняння

$$y = \frac{dx}{dt} - x = C_1\sqrt{2}e^{t\sqrt{2}} - C_2\sqrt{2}e^{-t\sqrt{2}} -$$
$$- C_1 e^{t\sqrt{2}} - C_2 e^{-t\sqrt{2}} = C_1(\sqrt{2}-1)e^{t\sqrt{2}} - C_2(\sqrt{2}+1)e^{-t\sqrt{2}}.$$

Таким чином загальний розв'язок системи рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{t\sqrt{2}} + C_2 e^{-t\sqrt{2}}; \\ y = C_1(\sqrt{2}-1)e^{t\sqrt{2}} - C_2(\sqrt{2}+1)e^{-t\sqrt{2}}. \end{cases}$$

ЛЕКЦІЯ 13 ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА. ОРИГІНАЛ І ЗОБРАЖЕННЯ. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА. ЗОБРАЖЕННЯ НАЙПРОСТІШИХ ОРИГІНАЛІВ. ТАБЛИЦІ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Оригіналом називається довільна функція $f(t)$, що розглядається на півінтервалі $[0;+\infty)$ і має такі властивості:

1) $f(t)$ кусково-неперервна на півінтервалі $[0;+\infty)$, тобто на будь-якому скінченному інтервалі має скінченне число точок розриву першого роду (скінченних стрибків);

2) існують додатні сталі $a > 0,\ M > 0$ такі, що $|f(t)| < M e^{at}$ при довільному значенні t із півінтервалу $[0;+\infty)$.

Оператор Лапласа кожному оригіналу $f(t)$ ставить у відповідність єдину функцію

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt ,$$

яка називається зображенням. Позначається

$$L[f(t)] = F(p) \text{ або } f(t) \div F(p) .$$

Властивості перетворення Лапласа:

1. $L[cf(t)] = cL[f(t)] \quad c = const.$,

2. $L[f(t) + g(t)] = L[f(t)] + L[g(t)]$.

Теорема (про поведінку зображень на нескінченності). Нехай $f(t)$ – довільний оригінал, $F(p)$ – його зображення. Тоді $\lim\limits_{p\to+\infty} F(p)=0$.

Доведення.

$$|f(t)|<Me^{at};\ a>0,\ \ M>0;\quad p>a;$$

$$|F(p)|=\left|\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt\right|\le\int\limits_0^{+\infty}\left|e^{-pt}f(t)\right|dt=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}|f(t)|dt<$$

$$<\int\limits_0^{+\infty}e^{-at}Me^{dt}\,dt=M\int\limits_0^{+\infty}e^{-(p-a)t}\,dt=M\lim_{N\to+\infty}\int\limits_0^{N}e^{-(p-a)t}\,dt=\ M\lim_{N\to+\infty}\left.\left(\frac{e^{-(p-a)t}}{-(p-a)}\right)\right|_0^N=M/(p-a),$$

бо $e^{-(p-a)N}\to 0$ при $N\to+\infty$ $(p>a)$.

Якщо $p\to+\infty$, то $M/(p-a)\to 0$. Отже, $F(p)\to 0$ при $p\to+\infty$.

Зображення основних елементарних функцій

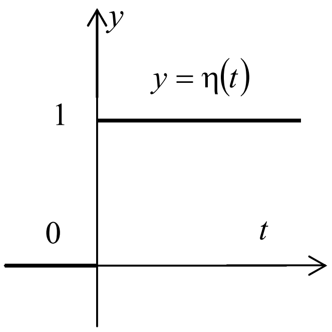

Рисунок 12 – Функція Хевісайда.

Одинична ступінчаста функція Хевісайда $\eta(t)$, яка задається формулою

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0;\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

$$L[\eta(t)]=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\eta(t)dt=\lim_{N\to+\infty}\int\limits_0^{N}e^{-pt}dt=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left.\left(-\frac{e^{-pt}}{p}\right)\right|_0^N=\lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{e^{-pN}}{p}+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p},$$

бо $\lim\limits_{N\to+\infty}e^{-pN}=0$ $(p>0)$. Отже, $\eta(t)\div\dfrac{1}{p}$ або $1\div\dfrac{1}{p}$.

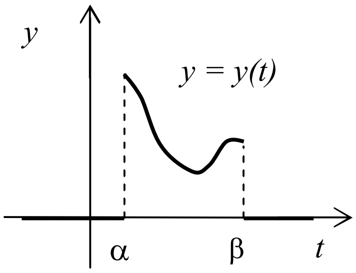

Рисунок 13 – Імпульсна функція

Зауваження Довільну імпульсну функцію $y=y(t)$, яка скрізь дорівнює нулю, за винятком скінченного інтервалу $(\alpha;\beta)$ (рис.13)

$$y=y(t)=\begin{cases}0, & t<\alpha;\\ f(t), & t\in(\alpha;\beta);\\ 0, & t>\beta,\end{cases}$$

можна подати однією формулою

$$y = f(t)(\eta(t-\alpha) - \eta(t-\beta)) ,$$

де $\eta(t-b)$ – одинична функція Хевісайда з запізнюванням

$$\eta(t-b) = \begin{cases} 1, & t > b; \\ 0, & t < b . \end{cases}$$

Зображення функції $f(t) = t$.

$$L[t] = \int_0^\infty te^{-pt}dt = \lim_{N\to\infty}\int_0^N te^{-pt}dt = \begin{vmatrix} u = t & du = dt \\ dv = e^{-pt}dt & v = -\dfrac{1}{p}e^{-pt} \end{vmatrix} =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{te^{-pt}}{p}\Bigg|_0^N + \frac{1}{p}\int_0^N e^{-pt}dt\right] = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{N}{pe^{Np}} - \frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^N\right] = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{e^{Np}} + \frac{1}{p^2}\right] = \frac{1}{p^2}$$

Отже, $t \div \dfrac{1}{p^2}$

Зображення функції $f(t) = e^{-\alpha t}$.

$$L\left[e^{-\alpha t}\right] = \int e^{-\alpha t}e^{-pt}dt = \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-(p+\alpha)t}dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{p+\alpha}\right)\int_0^N e^{-(p+\alpha)t}d(-(p+\alpha)t) = -\frac{1}{p+\alpha}\lim_{N\to\infty}e^{-(p+\alpha)t}\Big|_0^N =$$

$$= -\frac{1}{p+\alpha}\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{e^{(p+\alpha)N}} - 1\right] = \frac{1}{p+\alpha} .$$

Отже: $e^{-\alpha t} \div \dfrac{1}{p+\alpha}$ $\quad e^{\alpha t} \div \dfrac{1}{p-\alpha}$.

Зображення функції $f(t) = ch\alpha t$.

$$ch\alpha t = \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} = \frac{1}{2}e^{\alpha t} + \frac{1}{2}e^{-\alpha t} \div \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-\alpha} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+\alpha} = \frac{p}{p^2-\alpha^2} .$$

Отже: $ch\alpha t \div \dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$ $\quad sh\alpha t \div \dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$.

Зображення функції $f(t) = cos\,t$.

$$cos\,t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} \div \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-i} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+i} = \frac{p}{p^2+1} .$$

Отже: $\quad cos\,t \div \dfrac{p}{p^2+1}$ $\quad sin\,t \div \dfrac{1}{p^2+1}$.

Таблиця 2 – Основні оригінали та їх зображення

№ п/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	$\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0;\\ 0, & t<0,\end{cases}$	$\dfrac{1}{p}$
2	$\eta(t-b)=\begin{cases}1, & t>b\\ 0, & t<b\end{cases}$	$e^{-bp}\cdot\dfrac{1}{p}$
3	e^{-at}	$\dfrac{1}{p+a}$
4	$\sin bt$	$\dfrac{b}{p^2+b^2}$
5	$\cos bt$	$\dfrac{p}{p^2+b^2}$
6	$e^{-at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(p+a)^2+b^2}$
7	$e^{-at}\cos bt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
8	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
8а	t	$\dfrac{1}{p^2}$
8б	t^2	$\dfrac{2}{p^3}$
9	$t\,\eta(t-b)$	$e^{-bp}\left(b\cdot\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^2}\right)$
10	$t^n e^{-at}$	$\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
10а	te^{-at}	$\dfrac{1}{(p+a)^2}$
11	$t\sin bt$	$\dfrac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
12	$t\cos bt$	$\dfrac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
13	$\dfrac{1}{2b^3}(\sin bt-bt\cos bt)$	$\dfrac{1}{\left(p^2+b^2\right)^2}$
14	$\delta(t)$	1
15	$\delta(t-b)$	e^{-bp}
16	$\delta'(t)$	p

ЛЕКЦІЯ 14 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Теорема подібності (зміни масштабу)

Теорема. Якщо функція $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, тоді функція $(1/a)F(p/a)$ служить зображенням функції $f(at)$, де $a>0$:

$$f(t) \div F(p) \;\Rightarrow\; f(at) \div \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right), \quad a>0 \;.$$

$$L[f(at)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at)dt = \frac{1}{a}\int f(at)e^{-\frac{p}{a}at}d(at) =$$

$$= \frac{1}{a}L[f(at)] \div \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Приклад. Знайти зображення функції $f(t)=\cos at$.

$$\cos t \div \frac{p}{p^2+1} \quad \Rightarrow \quad \cos at \div \frac{1}{a}\frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1} = \frac{p}{p^2+a^2}\,.$$

Отже, $\cos at \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+a^2}$ $\sin at \risingdotseq \dfrac{a}{p^2+a^2}$

Теорема зміщення (затухання)

Теорема. Якщо функція $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, тоді функція $F(p+a)$ служить зображенням функції $e^{-at}f(t)$:

$$f(t) \div F(p) \;\Rightarrow\; e^{-at}f(t) \div F(p+a)\;.$$

$$L\left[e^{-at}f(t)\right] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,e^{-at}f(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}f(t)dt = F(p+a).$$

Користуючись теоремою, одержимо:

$$\sin bt \risingdotseq \frac{b}{p^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad e^{-at}\sin bt \risingdotseq \frac{b}{(p+a)^2+b^2}\,;$$

$$\cos bt \doteq \frac{p}{p^2+b^2} \;\Rightarrow\; e^{-at}\cos bt \doteq \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}.$$

Приклад .Знайти зображення функції

а) $f(t)=2+6\cos 3t-5\sin 3t$; б) $f(t)=3e^t\cos 4t+2e^t\sin 4t$.

$$\text{а) } F(p)=2L(1)+6L(\cos 3t)-5L(\sin 3t)=$$

$$=2\cdot\frac{1}{p}+6\cdot\frac{p}{p^2+3^2}-5\cdot\frac{3}{p^2+3^2}=\frac{8p^2-15p+18}{p(p^2+9)};$$

$$\text{б) } f(t)=3e^t\cos 4t+2e^t\sin 4t \doteq 3\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+4^2}+$$

$$+2\cdot\frac{4}{(p-1)^2+4^2}=\frac{3p+5}{p^2-2p+17}.$$

Теорема запізнювання (зсув аргументу в оригіналі)

Теорема Нехай функція $f(t)$ тотожно дорівнює нулю при $t<0$. Якщо $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, то функція $e^{-bp}F(p)$ служить зображенням функції $f(t-b)$, де $b>0$ (рис. 60), тобто

$$\text{якщо } f(t)\div F(p), \text{ то } f(t-b)\div e^{-bp}F(p), \quad b>0.$$

$$L(f(t-b))=\int_0^{+\infty}e^{-pt}f(t-b)dt=\int_0^{b}e^{-pt}f(t-b)dt+$$

$$+\int_b^{+\infty}e^{-pt}f(t-b)dt=\left|\begin{matrix}\left.\begin{matrix}f(t-b)=0\\ при\ \ t<b\end{matrix}\right\}\Rightarrow\int_0^b e^{-pt}f(t-b)dt=0\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_b^{+\infty}e^{-pt}f(t-b)dt=\left|\begin{matrix}u=t-b; & t=u+b;\\ du=dt; & u_н=0;\ u_в=+\infty\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-p(u+b)}f(u)du=e^{-bp}\int_0^{+\infty}e^{-pu}f(u)du=e^{-bp}F(p).$$

Диференціювання зображення

Теорема Якщо $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, тоді функція $(-1)^n\dfrac{d^n}{dp^n}F(p)$

служить зображенням функції $t^n f(t)$:

$$f(t) \doteqdot F(p) \Rightarrow t^n f(t) \doteqdot (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p) .$$

Диференціюючи ліву і праву частини формули

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

по параметру p, дістанемо

$$F'(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{d}{dp} e^{-pt} \right) f(t) dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} (-t) e^{-pt} f(t) dt = -\int_0^{+\infty} e^{-pt} t f(t) dt .$$

Отже, $F'(p) \div -t\, f(t)$ або $t\, f(t) \div -F'(p)$.

Аналогічно знаходимо другу похідну зображення

$$F''(p) = \frac{d}{dp} \left(-\int_0^{+\infty} e^{-pt} t f(t) dt \right) = -\int_0^{+\infty} \left(\frac{d}{dp} e^{-pt} \right) t f(t) dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^2 f(t) dt .$$

Отже, $t^2 f(t) \doteqdot F''(p)$.

Продовжуючи цей процес, на основі методу математичної індукції для довільної n-ої похідної зображення маємо співвідношення

$$t^n f(t) \doteqdot (-1)^n F^{(n)}(p) .$$

Зображення функцій t, t^n, $t\,\eta(t-b)$,

$$te^{-at}, \; t^n e^{-at}, \; t \sin bt, \; t \cos bt$$

Використовуючи формули для зображення одиничної функції Хевісайда і похідної зображення, одержимо

$1 \div 1/p \Rightarrow t = t \times 1 \div -(1/p)' = -\left(-1/p^2\right) = 1/p^2$.

Отже, $t \div \dfrac{1}{p^2}$.

Тоді $t^2 = t \times t \div -\left(1/p^2\right)' = \dfrac{2}{p^3} = \dfrac{1\cdot 2}{p^3}$;

$$t^3 = t \times t^2 \div -\left(2/p^3\right)' = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{p^4}.$$

Продовжуючи цей процес, на основі методу математичної індукції для довільного n маємо співвідношення

$$t^n \div \frac{n!}{p^{n+1}} .$$

Використовуючи зображення функцій $t,\ t^n$ і теорему зміщення (затухання), одержимо зображення функцій te^{-at} і $t^n e^{-at}$:

$$te^{-at} \risingdotseq \frac{1}{(p+a)^2}\ ;\ t^n e^{-at} \risingdotseq \frac{n!}{(p+a)^{n+1}} .$$

Використовуючи формули для зображення функцій $\sin bt,\ \cos bt$ і похідної зображення, дістанемо:

$$\sin bt \risingdotseq \frac{b}{p^2+b^2} \Rightarrow \quad t\sin bt \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left(\frac{b}{p^2+b^2}\right) =$$

$$= -b\cdot\frac{-2p}{\left(p^2+b^2\right)^2} = \frac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2};\ \cos bt \risingdotseq \frac{p}{p^2+b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ t\cos bt \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+b^2}\right) = -\frac{p^2+b^2-2p\cdot p}{\left(p^2+b^2\right)^2} = \frac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}.$$

Отже, $t\sin bt \risingdotseq \dfrac{2pb}{\left(p^2+b^2\right)^2}$; $t\cos bt \risingdotseq \dfrac{p^2-b^2}{\left(p^2+b^2\right)^2}$.

Приклад 1.Знайти оригінал функції

$$F(p) = \frac{5p}{\left(p^2+16\right)^2}.$$

$$F(p) = \frac{5p}{\left(p^2+16\right)^2} = 5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2p\cdot 4}{\left(p^2+16\right)^2} \risingdotseq \frac{5}{8}\cdot t\sin 4t .$$

Зображення похідних оригіналу

Теорема Якщо $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, тоді функція $pF(p) - f(0)$

служить зображенням похідної $f'(t)$:

$$f(t) \div F(p) \;\Rightarrow\; f'(t) \div p\,F(p) - f(0) \;.$$

Використовуючи означення перетворення Лапласа і формулу інтегрування частинами, одержимо

$$L[f'(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)dt = \left| u = e^{-pt};\, du = -pe^{-pt}dt;\, dv = f'(t)dt;\right.$$

$$\left. v = \int f'(t)dt = f(t) \right| = e^{-pt} f(t)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t) \times \left(-pe^{-pt}\right)dt =$$

$$= \left| \lim_{t\to+\infty} e^{-pt} f(t) = 0 \right| = -f(0) + p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = p\,F(p) - f(0).$$

Отже, $f'(t) \risingdotseq p\,F(p) - f(0)$.

Застосовуючи цю формулу повторно, одержимо

$$L[f''(t)] = L\left[\left(f'(t)\right)'\right] = p\,L[f'(t)] - f'(0) =$$

$$= p\left(p\,F(p) - f(0)\right) - f'(0) = p^2F(p) - p\,f(0) - f'(0).$$

Отже, $f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - p\,f(0) - f'(0)$.

На основі методу математичної індукції для довільної n-ої похідної оригіналу маємо співвідношення

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots -$$

$$- pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Зауваження. Формули для зображення похідних спрощуються, якщо всі початкові умови нульові: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, ... Тоді

$$f(t) \div F(p); \quad f'(t) \div pF(p); \quad f^{(n)}(t) \div p^nF(p).$$

Зображення інтеграла від оригіналу

Теорема. Якщо $F(p)$ є зображення функції $f(t)$, тоді функція $(1/p)F(p)$ служить зображенням інтеграла $\int_0^t f(u)du$:

$$f(t) \div F(p) \;\Rightarrow\; \int_0^t f(u)du \div \frac{1}{p}F(p) \; .$$

Нехай $f(t) \div F(p)$; $\varphi(t) = \int_0^t f(u)du \div \Phi(p)$. Знайдемо похідну інтеграла зі змінною верхньою межею

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(u)du = f(t) \; .$$

Використаємо формулу для зображення похідної оригіналу

$$\varphi'(t) \div p\Phi(p) - \varphi(0) \; .$$

Але $\varphi(0) = \int_0^0 f(u)du = 0$, тому $\varphi'(t) \div p\Phi(p)$.

Таким чином

$$\left.\begin{matrix} f(t) = \varphi'(t) \div p\Phi(p) \\ f(t) \div F(p) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad F(p) = p\Phi(p).$$

Отже, $\Phi(p) = \frac{1}{p}F(p)$.

Приклад. Користуючись теоремою про зображення інтеграла від оригіналу і формулою $sin\,t \div \frac{1}{p^2+1}$, знайти зображення функції $cos\,t$.

$$cos\,t = 1 - \int_0^t sin\,u\,du \div \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2+1} = \frac{p}{p^2+1} \; .$$

Приклад. Користуючись теоремою про зображення інтеграла від оригіналу, знайти оригінал $f(t)$ за його зображенням:

$$F(p) = 1/(p^3 - 6p^2 + 13p) \, .$$

$$F(p) = \frac{1}{p^3 - 6p^2 + 13p} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2 - 6p + 13} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{2}{(p-3)^2 + 2^2} = \left| \frac{2}{(p-3)^2 + 2^2} \div e^{3t}\sin 2t \right| \div$$

$$\div \frac{1}{2}\int_0^t e^{3u}\sin 2u\,du = \left| \int e^{at}\sin bt\,dt = (-be^{at}\cos bt + ae^{at}\sin bt) : \right.$$

$$: (a^2 + b^2) + C \Big| = \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{-2e^{3u} \cos 2u + 3e^{3u} \sin 2u}{3^2 + 2^2} \right|_0^t =$$

$$= (1/26) \cdot (-2e^{3t} \cos 2t + 3e^{3t} \sin 2t + 2) = f(t) \ .$$

ЛЕКЦІЯ 15 ОБЕРНЕННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА. ВІДШУКАННЯ ОРИГІНАЛУ ЗОБРАЖЕННЯ, ЩО МАЄ ВИГЛЯД РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ ЗГОРТКА ФУНКЦІЙ

Відшукання оригіналу зображення, що має вигляд раціонального дробу.

Правило. Нехай необхідно знайти оригінал $f(t)$ для зображення $F(p)$ у вигляді раціонального дробу $F(p) = P_m(p)/Q_n(p)$, де $P_m(p)$ і $Q_n(p)$ – многочлени відповідно степеня m і n.

Тоді:

1) Якщо дріб неправильний $(m \ge n)$, то з нього треба виділити цілу частину.

2) Правильний дріб $(m < n)$ треба розкласти на суму елементарних дробів виду

$$\frac{A}{(p-a)^k} \ ; \ \frac{Bp + C}{(p^2 + a_1 p + a_2)^k} \ ; \ k \ge 1 \ ; \ D = a_1^2 - 4a_2 < 0 \ .$$

3) Знайти оригінали для цілої частини і кожного елементарного дробу, скористатися властивістю лінійності перетворення Лапласа і знайти оригінал початкового дробу.

4) Спростити одержаний вираз.

Приклад Знайти оригінал за його зображенням:

$$F(p) = \frac{7p - 1}{(p^2 - 4)(p^2 + 2p + 5)} \ .$$

$$F(p) = \frac{7p - 1}{(p-2)(p+2)(p^2 + 2p + 5)} = \frac{A}{p-2} + \frac{B}{p+2} +$$

$$+ \frac{Cp + D}{p^2 + 2p + 5} = \Big| \ A(p+2)(p^2 + 2p + 5) + B(p-2) \times$$

$$\times(p^2+2p+5)+(Cp+D)(p-2)(p+2)=7p-1;$$

$$\begin{array}{l} p=2: \\ p=-2: \\ p^3: \\ p^0: \end{array} \begin{cases} 4\cdot 13A=13; \\ -4\cdot 5B=-15; \\ A+B+C=0; \\ 10A-10B-4D=-1; \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{c} A=1/4;\ \ B=3/4; \\ 1/4+3/4+C=0;\quad C=-1; \\ 5/2-15/2-4D=-1;\ D=-1 \end{array}\right| =\frac{1/4}{p-2}+\frac{3/4}{p+2}+$$

$$+\frac{-1p-1}{p^2+2p+5}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p+2}-$$

$$-\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}\ \div\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{3}{4}e^{-2t}-e^{-t}\cos 2t=f(t).$$

Приклад . Знайти оригінал за його зображенням:

$$F(p)=\frac{3p^2-8}{p^3-4p^2+8p}.$$

$$F(p)=\frac{3p^2-8}{p(p^2-4p+8)}=\frac{3p^2-8}{p\left((p-2)^2+4\right)}=$$

$$=\frac{A}{p}+\frac{B(p-2)+C}{(p-2)^2+4}=$$

$$=\Big|\ A\left((p-2)^2+4\right)+\left(B(p-2)+C\right))p=3p^2-8;$$

$$\left.\begin{array}{l} p=0: \\ p=2: \\ p^2: \end{array} \begin{cases} 8A=-8; & A=-1; \\ 4A+2C=4; & C=2-2A=4; \\ A+B=3; & B=3-A=4 \end{cases}\right| =$$

$$=\frac{-1}{p}+\frac{4(p-2)+4}{(p-2)^2+4}=-\frac{1}{p}+4\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+4}+$$

$$+2\cdot\frac{2}{(p-2)^2+4}\ \div -1+4e^{2t}\cos 2t+2e^{2t}\sin 2t=f(t).$$

Згортка функцій.

Згорткою двох функцій $f_1(t)$ та $f_2(t)$ називається функція $f(t)$, яка задається рівністю

$$f(t)=\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du.$$

Позначається $f(t)=f_1*f_2$.

Справедливо

$$f_1*f_2=\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du=\int f_2(u)f_1(t-u)du=f_2*f_1.$$

Теорема Якщо $F_1(p)$ і $F_2(p)$ – зображення відповідно функцій $f_1(t)$ та $f_2(t)$, то добуток $F_1(p)\cdot F_2(p)$ служить зображенням функції $f(t)=\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du$, тобто якщо $f_1(t)\div F_1(p);\quad f_2(t)\div F_2(p)$, то

$$\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du=F_1(p)\cdot F_2(p).$$

Зауваження. На основі теореми згортання можна одержати зображення інтеграла від оригіналу.

$$f_1(t)=f(t);\quad f_2(t)=1\quad\Rightarrow\quad F_1(p)=F(p);\quad F_2(p)=\frac{1}{p};$$

$$\int_0^t f(u)du=\int_0^t f(u)f_2(t-u)du\div F(p)\times\frac{1}{p}.$$

Отже,

$$\int_0^t f(u)du\div\frac{F(p)}{p}.$$

Приклад. Користуючись теоремою згортання оригіналів, знайти оригінал за його зображенням

$$F(p)=\frac{1}{\left(p^2+b^2\right)^2}.$$

Розв’язання.

$$F(p)=\frac{1}{\left(p^2+b^2\right)^2}=\frac{1}{p^2+b^2}\times\frac{1}{p^2+b^2}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}F(p)=F_1(p)\times F_2(p);\quad F_1(p)=\dfrac{1}{p^2+b^2}\div\dfrac{1}{b}sin\,bt;\\ F_2(p)=\dfrac{1}{p^2+b^2}\div\dfrac{1}{b}sin\,bt;\quad f(t)=\int f_1(u)f_2(t-u)du\end{array}\right|\div$$

$$\div \int_0^t \frac{1}{b}\sin bu \times \frac{1}{b}\sin b(t-u)du =$$

$$= \frac{1}{2b^2}\int_0^t (\cos(bu - b(t-u)) - \cos(bu + b(t-u)))du =$$

$$= \frac{1}{2b^2}\left(\int_0^t \cos(2bu - bt)du - \cos bt\int_0^t du\right) =$$

$$= \frac{1}{2b^2}\left(\frac{1}{2b}\sin(2bu - bt)\Big|_0^t - \cos bt \times u\Big|_0^t\right) =$$

$$= \frac{1}{2b^2}\left(\frac{1}{2b}\sin bt - \frac{1}{2b}\sin(-bt) - t\cos bt\right) =$$

$$= \frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt\cos bt) = f(t)$$ - шуканий оригінал.

ЛЕКЦІЯ 16 ОПЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА ЇХ СИСТЕМ. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНОГО ЗМІСТУ

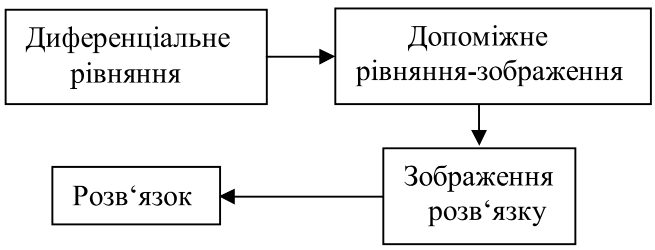

Рисунок 14 – Загальна схема методу.

Застосування цієї схеми докладно розберемо на прикладах.

Приклад. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку:

$$y' - 4y = 12t;\ y(0) = 0.$$

Нехай $y(t) \div Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p) \ ; \ t \div \frac{1}{p^2} \ .$$

Одержимо операторну форму диференціального рівняння

$$pY(p) - 4Y(p) = 12 \cdot 1/p^2$$

Розв’яжемо його:

$$Y(p)(p-4) = \frac{12}{p^2}; \quad Y(p) = \frac{12}{p^2(p-4)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p) = \frac{12}{p^2(p-4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-4} =$$

$$= \Big| 12 = Ap(p-4) + B(p-4) + Cp^2 ;$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=0: & \left\{\begin{array}{ll} -4B = 12; & B = -3; \\ 16C = 12; & C = 3/4; \\ A + C = 0; & A = -C = -3/4 \end{array}\right. \\ p=4: & \\ p^2: & \end{array}\right| =$$

$$= \frac{-3/4}{p} + \frac{-3}{p^2} + \frac{3/4}{p-4} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p} - 3 \cdot \frac{1}{p^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p-4} \ \div$$

$$\div -\frac{3}{4} \cdot 1 - 3t + \frac{3}{4} e^{4t} = \frac{3}{4} e^{4t} - 3t - \frac{3}{4} = y(t)$$

– шуканий розв‘язок.

Приклад Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' - 4y' + 4y = 10 e^t \sin 3t; \quad y(0) = 1; \ y'(0) = 0 .$$

Нехай $y(t) \div Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p) - 1; \ y''(t) \div p^2 Y(p) - py(0) -$$

$$- y'(0) = p^2 Y(p) - p; \ e^t \sin 3t \div \frac{3}{(p-1)^2 + 3^2} = \frac{3}{p^2 - 2p + 10} .$$

Одержимо

$$p^2Y(p)-p-4\big(pY(p)-1\big)+4Y(p)=10\cdot 3/(p^2-2p+10)$$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння:

$$Y(p)\cdot\left(p^2-4p+4\right)=p-4+\frac{30}{p^2-2p+10};$$

$$Y(p)\cdot(p-2)^2=\frac{p^3-2p^2+10p-4p^2+8p-40+30}{p^2-2p+10};$$

$$Y(p)=\frac{p^3-6p^2+18p-10}{(p-2)^2(p^2-2p+10)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p)=\frac{p^3-6p^2+18p-10}{(p-2)^2(p^2-2p+10)}=\frac{A}{(p-2)^2}+\frac{B}{p-2}+$$

$$+\frac{Cp+D}{p^2-2p+10}=\Big|\,A(p^2-2p+10)+B(p-2)(p^2-2p+10)+$$

$$+(Cp+D)(p-2)^2=p^3-6p^2+18p-10;$$

$$\begin{array}{l} p=2: \\ p=0: \\ p=1: \\ p^3: \end{array}\begin{cases}10A=10;\\ 10A-20B+4D=-10;\\ 9A-9B+C+D=3;\\ B+C=1;\end{cases}\qquad \begin{array}{c} A=1; \\ \begin{cases}-20B+4D=-20;\\ -9B+C+D=-6;\\ C=1-B;\end{cases}\end{array}$$

$$\begin{array}{c} -\begin{cases}-5B+D=-5;\\ -9B+1-B+D=-6;\end{cases} \\ 5B-1=1\ ; \end{array}\qquad \left.\begin{array}{c} B=2/5; \\ D=5B-5=-3; \\ C=1-B=3/5 \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{2/5}{p-2}+\frac{(3/5)p-3}{p^2-2p+10}=\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p-2}+$$

$$+\frac{3}{5}\cdot\frac{p-5}{(p-1)^2+9}=\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{p-1-4}{(p-1)^2+9}=$$

$$=\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+9}-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{(p-1)^2+9}\doteqdot$$

$$\div\, t\,e^{2t}+\frac{2}{5}e^{2t}+\frac{3}{5}e^{t}\cos 3t-\frac{4}{5}e^{t}\sin 3t=y(t)$$

– шуканий розв‘язок.

Приклад. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y''+9y=2\sin 3t \\ y(0)=2;\ y'(0)=-1 \end{cases}$$

Нехай $y(t) \div Y(p)$ – відповідно шуканий розв'язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y''(t) \div p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p + 1\ ;$$

$$\sin 3t \div \frac{3}{p^2+3^2} = \frac{3}{p^2+9}\ .$$

Одержимо $p^2Y(p) - 2p + 1 + 9Y(p) = 2\cdot 3/(p^2+9)$ – допоміжне рівняння-зображення. Розв'яжемо його:

$$Y(p)\cdot(p^2+9) = 2p - 1 + \frac{6}{p^2+9};$$

$$Y(p) = \frac{2p^3+18p-p^2-9+6}{(p^2+9)^2} = \frac{2p^3-p^2+18p-3}{(p^2+9)^2}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p) = \frac{Ap+B}{(p^2+9)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+9} = \Big|\ Ap+B+(Cp+D)(p^2+9) =$$

$$= 2p^3 - p^2 + 18p - 3\,;$$

$$Ap + B + Cp^3 + 9Cp + Dp^2 + 9D = 2p^3 - p^2 + 18p - 3\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} p^3: \\ p^2: \\ p^1: \\ p^0: \end{array} \begin{cases} C=2; & \\ D=-1; & \\ A+9C=18; & A=18-9C=0; \\ B+9D=-3; & B=-3-9D=6 \end{cases}\right| =$$

$$= \frac{0\cdot p+6}{(p^2+9)^2} + \frac{2p-1}{p^2+9} = 6\cdot\frac{1}{(p^2+9)^2} + 2\cdot\frac{p}{p^2+9} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9} \div$$

$$\div 6\cdot\frac{1}{2\cdot 3^3}\cdot(\sin 3t - 3t\cos 3t) + 2\cos 3t - \frac{1}{3}\cdot\sin 3t =$$

$$= -\frac{2}{9}\sin 3t - \frac{1}{3}t\cos 3t + 2\cos 3t = y(t)$$ – шуканий розв‘язок.

Приклад. Розв‘язати задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y''+2y'=4\sin 2t-3\delta(t);\quad y(0)=1;\ y'(0)=0\ .$$

Нехай $y(t)\div Y(p)$ – відповідно шуканий розв’язок (оригінал) і його зображення. Перейдемо в обох частинах диференціального рівняння до зображень:

$$y'(t)\div pY(p)-y(0)=pY(p)-1;\ y''(t)\div p^2Y(p)-py(0)-$$

$$-y'(0)=p^2Y(p)-p;\ \sin 2t\div\frac{2}{p^2+4};\ \delta(t)\div 1.$$

Одержимо $p^2Y(p)-p+2\left(pY(p)-1\right)=4\cdot\dfrac{2}{p^2+4}-3\cdot 1$

– допоміжне рівняння-зображення. Розв’яжемо це рівняння:

$$Y(p)\cdot(p^2+2p)=p+2+\frac{8}{p^2+4}-3;\ Y(p)=\frac{p^3-p^2+4p+4}{(p^2+2p)(p^2+4)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$Y(p)=\frac{p^3-p^2+4p+4}{p(p+2)(p^2+4)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+2}+\frac{Cp+D}{p^2+4}=$$

$$=\Big|\,A(p+2)(p^2+4)+Bp(p^2+4)+(Cp+D)\,p(p+2)=$$

$$=p^3-p^2+4p+4;$$

$$\left.\begin{array}{ll}p=0: & \\ p=-2: & \\ p^3: & \\ p=-1: & \end{array}\begin{cases}8A=4;\\ -16B=-16;\\ A+B+C=1;\\ 5A-5B+C-D=-2;\end{cases}\quad\begin{array}{r}A=1/2;\\ B=1;\\ C=-1/2;\\ D=-1\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1/2}{p}+\frac{1}{p+2}+\frac{(-1/2)p-1}{p^2+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+2^2}-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{p^2+2^2}\doteqdot\frac{1}{2}+e^{-2t}-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t=y(t)$$

– шуканий розв‘язок.

Приклад. Розв‘язати задачу Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = x + 4y - 2e^{t} \\ y' = y - x + 5, \end{cases} \quad x(0) = 0\,; \quad y(0) = -2\,.$$

Нехай $x(t) \div X(p)$; $y(t) \div Y(p)$ – відповідно оригінали та зображення шуканого розв'язку. Перейдемо в диференціальній системі до зображень:

$$x'(t) \div pX(p) - x(0) = pX(p)\,;$$

$$y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p) + 2\,;\; e^{t} \div \frac{1}{p-1}\,;\; 1 \div \frac{1}{p}\,.$$

Дістанемо операторну форму диференціальної системи

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + 4Y(p) - 2/(p-1) \\ pY(p) + 2 = Y(p) - X(p) + 5/p \end{cases}$$

– допоміжна система-зображення. Розв'яжемо цю лінійну алгебраїчну систему, наприклад, за формулами Крамера:

$$\begin{cases} (p-1)\cdot X(p) - 4Y(p) = -2/(p-1) \\ X(p) + (p-1)\cdot Y(p) = (-2p+5)/p \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -4 \\ 1 & p-1 \end{vmatrix} = (p-1)^2 + 4\,;\; \Delta_1 = \begin{vmatrix} -2/(p-1) & -4 \\ (-2p+5)/p & p-1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 + \frac{-8p+20}{p} = \frac{-10p+20}{p};\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} p-1 & -2/(p-1) \\ 1 & (-2p+5)/p \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(p-1)(-2p+5)}{p} + \frac{2}{p-1} = \frac{-2p^3 + 9p^2 - 12p + 5}{p(p-1)}\,;$$

$$X(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-10p+20}{p\left((p-1)^2+4\right)}\,;$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2p^3 + 9p^2 - 12p + 5}{p(p-1)\left((p-1)^2+4\right)}$$

– зображення шуканого розв‘язку. Знайдемо відповідний оригінал:

$$X(p) = \frac{-10p+20}{p\left((p-1)^2+4\right)} = \frac{A}{p} + \frac{B(p-1)+C}{(p-1)^2+4} =$$

$$= \Big|\, A\left((p-1)^2+4\right) + (B(p-1)+C)\,p = -10p + 20\,;$$

$$\begin{array}{l} p=0: \\ p=1: \\ p^2: \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} 5A = 20; & A = 4; \\ 4A + C = 10; & C = 10 - 4A = -6; \\ A + B = 0; & B = -A = -4 \end{array} \right| =$$

$$=\frac{4}{p}+\frac{-4(p-1)-6}{(p-1)^2+4}=4\cdot\frac{1}{p}-4\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+4}-$$

$$-3\cdot\frac{2}{(p-1)^2+4}\doteqdot 4\cdot 1-4e^t\cos 2t-3e^t\sin 2t=x(t);$$

$$Y(p)=\frac{-2p^3+9p^2-12p+5}{p(p-1)\left((p-1)^2+4\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{C(p-1)+D}{(p-1)^2+4}=$$

$$=\Big|\,A(p-1)\left((p-1)^2+4\right)+Bp\left((p-1)^2+4\right)+$$

$$+(C(p-1)+D)\,p(p-1)=-2p^3+9p^2-12p+5\;;$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=0: & \left\{\begin{array}{ll} -5A=5; & A=-1;\,B=0;\\ 4B=0; & C=-2-A-B=-1;\\ A+B+C=-2; & -5-2+2D=-17;\\ 5A+10B+2C+2D=-17; & D=-5\end{array}\right.\\ p=1: & \\ p^3: & \\ p=2: & \end{array}\right|=$$

$$=\frac{-1}{p}+\frac{0}{p-1}+\frac{-(p-1)-5}{(p-1)^2+4}=-\frac{1}{p}-\frac{p-1}{(p-1)^2+4}-$$

$$-\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{(p-1)^2+4}\doteqdot -1-e^t\cos 2t-\frac{5}{2}\,e^t\sin 2t=y(t)\,.$$

Отже, $\begin{cases} x(t)=4-4e^t\cos 2t-3e^t\sin 2t\;; \\ y(t)=-1-e^t\cos 2t-(5/2)e^t\sin 2t \end{cases}$

– шуканий розв‘язок.

ЛЕКЦІЯ 17 ПОНЯТТЯ ФУНКЦІОНАЛУ. КЛАСИЧНІ ЗАДАЧІ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ. ВАРІАЦІЯ ФУНКЦІЇ ТА ПРИРІСТ ФУНКЦІОНАЛУ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ. ЛІНІЙНИЙ ФУНКЦІОНАЛ. ПЕРША ТА ДРУГА ВАРІАЦІЇ ФУНКЦІОНАЛУ

Класичні задачі варіаційного числення

Задача про максимальну швидкодію (задача про брахістохрону). Знайти криву, розміщену у вертикальній площині, що сполучає дві задані точки $A(a;y_a)$ і $B(b;y_b)$, які не лежать на одній вертикальній прямій, і таку, що матеріальна точка, рухаючись по цій кривій під дією сили тяжіння з точки A без початкової швидкості досягне точки B за найменший проміжок часу (рис.15).

Аналітичне формулювання цієї задачі: серед неперервно диференційовних функцій $y(x)$ знайти таку, яка доставляє мінімум функціоналу

$$I[y] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

при крайових умовах $y(a) = y_a;\ y(b) = y_b$.

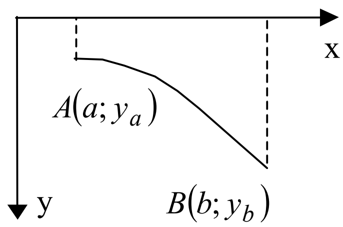

Рисунок 15 – Задача про брахістохрону.

Задача про геодезичні лінії. Нехай на поверхні $\varphi(x,y,z) = 0$ задано дві точки $A(x_1;y_1;z_1)$ і $B(x_2;y_2;z_2)$. Серед всіх ліній, які лежать на даній поверхні і з'єднують точки A і B, вибрати ту, дуга $A\ B$ якої має найменшу довжину.

Аналітичне формулювання цієї задачі: серед неперервно диференційовних функцій $x(t), y(t), z(t)$ параметра t знайти такі, які задовольняють рівняння зв'язку $\varphi(x(t), y(t), z(t)) = 0$ і доставляють мінімум функціоналу

$$I[y,y,z] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$$

при крайових умовах

$$x(t_1) = x_1;\ y(t_1) = y_1;\ z(t_1) = z_1;$$
$$x(t_2) = x_2;\ y(t_2) = y_2;\ z(t_2) = z_2.$$

Ізопериметрична задача (задача Дідони). Нехай на осі Ox задано дві точки $A(a;0)$ і $B(b;0)$. Серед всіх ліній заданої довжини l, які з'єднують на площині Oxy ці точки A і B, вибрати таку, що разом з відрізком АВ обмежує найбільшу площу.

Аналітичне формулювання цієї задачі: серед неперервно диференційовних функцій $y(x)$ вибрати таку, яка задовольняє рівняння зв'язку $\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = l$ і доставляє максимум функціоналу $I[y]=\int_a^b y(x)dx$ при крайових умовах $y(a)=0;\ y(b)=0.$

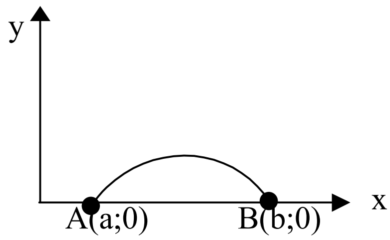

Рисунок 16 – Задача Дідони.

Висновок: в наведених задачах мова йде про функції, значення яких залежать від вибору інших функцій. Така залежність зветься функціоналом.

Отже, нехай задано деякий клас *D* функцій $y(x)$. Якщо кожній функції $y(x)$ із класу *D* за деяким законом ставиться у відповідність певне числове значення змінної *I*, то ця змінна *I* називається функціоналом від однієї функціональної змінної $y(x)$ і позначається $I = I[y] = I[y(x)]$.

Клас *D* функцій $y(x)$, на яких визначений функціонал, називається областю визначення функціоналу. При цьому функція $y(x)$ служить незалежною змінною (аргументом) функціоналу. Функції із області визначення *D* даного функціоналу *I* називаються функціями порівняння або допустимими функціями.

Функціонал – це відображення, при якому значеннями незалежної змінної $y(x)$ є точки функціонального простору, а значеннями залежної змінної I – числа.

Приклади функціоналів: значення функції в точці, границя функції, визначений інтеграл від функції.

Приклад. Обчислити заданий функціонал при вказаних значеннях аргументу:

а) $I[y]=\int\limits_0^2 y^2(x)dx;\quad y=\sin\pi x;$

б) $I[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx;\; y_1=x;\; y_2=\ln\cos x.$

Зауваження. Надалі будемо розглядати, в основному, функціонал у вигляді визначеного інтеграла $I[y]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$, допустимими для якого служать функції класу $C_1[a;b]$, що визначені та неперервні разом з першою похідною на відрізку $[a;b]$, тобто, гладкі на відрізку $[a;b]$.

Екстремум функціоналу

Відстанню нульового порядку між функціями (лініями) $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число $\rho_0=\rho_0(y_1,y_2)=\max\limits_{a\le x\le b}|y_1(x)-y_2(x)|$. При цьому вважається, що розглядувані функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$.

Відстанню першого порядку між функціями (лініями) $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається невід'ємне число

$$\rho_1=\rho_1(y_1,y_2)=\max_{a\le x\le b}|y_1(x)-y_2(x)|+\max_{a\le x\le b}|y'_1(x)-y'_2(x)|\;.$$

При цьому вважається, що функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні разом зі своїми першими похідними на відрізку $[a;b]$.

Приклад. Знайти відстань першого порядку між кривими $y=y_1(x)=x^2/2$ і $y=y_2(x)=x^3/3$ на відрізку $[0;2]$.

$$\rho_1=\max_{0\le x\le 2}|y_1(x)-y_2(x)|+\max_{0\le x\le 2}|y'_1(x)-y'_2(x)|.$$

Розглянемо функції $z_0(x)=y_1(x)-y_2(x)=x^2/2-x^3/3$ і $z_1(x)=y'_1(x)-y'_2(x)=x-x^2$. Знайдемо їх найбільші та найменші значення на відрізку $[0;2]$:

$$z'_0(x)=x-x^2=0;\; x_1=0;\, x_2=1;\; z_0(0)=0;\, z_0(1)=1/6;$$

$$z_0(2) = -2/3; \ \max_{0 \le x \le 2} z_0(x) = 1/6; \ \min_{0 \le x \le 2} z_0(x) = -2/3;$$

$$z'_1(x) = 1 - 2x = 0; \ x_1 = 1/2; \ z_1(1/2) = 1/4; \ z_1(0) = 0;$$

$$z_1(2) = -2; \ \max_{0 \le x \le 2} z_1(x) = 1/4; \ \min_{0 \le x \le 2} z_1(x) = -2.$$

Тоді $\max\limits_{0 \le x \le 2} |y_1(x) - y_2(x)| = \max\limits_{0 \le x \le 2} |z_0(x)| = 2/3;$

$$\max_{0 \le x \le 2} |y'_1(x) - y'_2(x)| = \max_{0 \le x \le 2} |z_1(x)| = 2; \ \rho_1 = \frac{2}{3} + 2 = 2\frac{2}{3}.$$

Нехай D_1 – деякий клас функцій порівняння (підмножина області визначення D) функціоналу $I = I[y]$. Функціонал $I = I[y]$ має в цьому класі D_1 абсолютний мінімум (максимум), який реалізується функцією $\overline{y}(x)$, якщо для довільної функції $y(x) \in D_1$ виконується нерівність

$$I[y(x)] \ge I[\overline{y}(x)] \quad \left(I[y(x)] \le I[\overline{y}(x)]\right).$$

Функціонал $I = I[y]$ має в класі D_1 локальний або відносний мінімум (максимум), який реалізується функцією $y_0(x)$, якщо для довільної функції $y(x) \in D_1$, яка близька до функції $y_0(x)$, виконується нерівність

$$I[y(x)] \ge I[y_0(x)] \quad (I[y(x)] \le I[y_0(x)]).$$

Максимуми і мінімуми називаються екстремумами.

Якщо близькість функцій розуміється в сенсі відстані нульового порядку, тобто $\rho_0(y(x), y_0(x)) < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – досить мале число, то такий відносний екстремум називається сильним.

Якщо близькість функцій розуміється в сенсі відстані першого порядку, тобто $\rho_1(y(x), y_0(x)) < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – досить мале число, то такий відносний екстремум називається слабким.

На рис. 17 а) зображені лінії, близькі в сенсі відстані нульового порядку (координати їх близькі, а напрямки дотичних можуть суттєво відрізнятись), а на рис. 17 б) наведені криві, близькі в сенсі відстані першого порядку (близькі не тільки їх координати, а і напрямки дотичних).

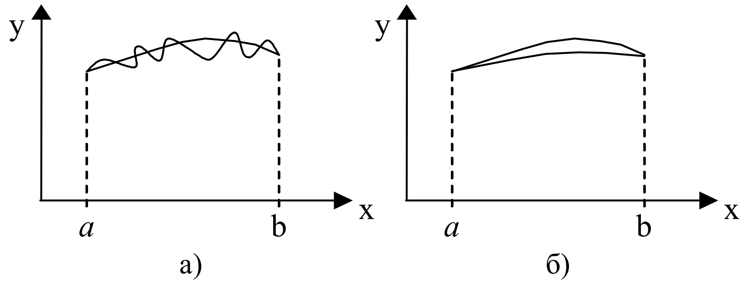

Рисунок 17 – Близькі лінії.

Абсолютний екстремум тим паче є відносним екстремумом. Обернене твердження, в загальному випадку, невірне.

Сильний відносний екстремум тим паче є слабким екстремумом. Обернене твердження, в загальному випадку, невірне.

Надалі, як правило, будемо розглядати слабкий відносний екстремум і слова "слабкий", "відносний" будемо опускати.

Основною задачею варіаційного числення є дослідження функціоналу на екстремум.

Варіація функції та приріст функціоналу.

Неперервність. Лінійний функціонал

Нехай функціонал $I = I[y]$ визначений на класі функцій D, $y(x)$ і $\overline{y}(x)$ – довільні функції даного класу D. Функція, яка дорівнює різниці функцій $\overline{y}(x)$ і $y(x)$, називається приростом або варіацією аргументу y функціоналу $I[y]$ і позначається δy: $\delta y = \delta y(x) = \overline{y}(x) - y(x)$. Тоді $\overline{y}(x) = y + \delta y$.

Різниця $\Delta I = \Delta I[y, \delta y] = I[y + \delta y] - I[y]$ називається приростом функціоналу $I[y]$, який відповідає варіації δy аргументу.

Зазначимо, що похідна варіації функції дорівнює варіації похідної: $(\delta y)' = \delta y'$.

Дійсно, $(\delta y)' = \left(\overline{y}(x) - y(x)\right)' = \overline{y'}(x) - y'(x) = \delta y'$.

Якщо нескінченно малому приросту функції δy відповідає нескінченно малий приріст функціоналу ΔI, то такий функціонал $I[y]$ називається неперервним.

Інакше кажучи, функціонал $I[y]$ називається неперервним, якщо $\left|I[y_1(x)]-I[y_2(x)]\right|<\varepsilon$ як тільки $\left|y_1(x)-y_2(x)\right|<\delta$.

Функціонал $I[y]$ називається лінійним, якщо виконуються умови:

1) Функціонал від алгебраїчної суми функцій дорівнює відповідній алгебраїчній сумі функціоналів: $I[y_1+y_2]=I[y_1]+I[y_2]$;

2) Сталий множник можна виносити за знак функціоналу: $I[Cy]=CI[y],\ C=const$.

Перша та друга варіації функціоналу

Нехай для довільної малої варіації аргументу δy відповідний приріст функціоналу ΔI можна подати у вигляді суми головної частини $L[y,\delta y]$, лінійної відносно δy, та нескінченно малої $\beta[y,\Delta y]$ вищого порядку порівняно з δy: $\Delta I=L[y,\delta y]+\beta[y,\delta y]$; $\beta[y,\delta y]=\gamma[y,\delta y]\cdot\max|\delta y|$, де $\lim\limits_{\max|\delta y|\to 0}\gamma[y,\delta y]=0$. Тоді функціонал $I[y]$ називається варійовним, а головна лінійна відносно δy частина його приросту $L[y,\delta y]$ називається варіацією (диференціалом) функціоналу і позначається δI: $\delta I=L[y,\delta y]$, $\Delta I=\delta I+\beta[y,\delta y]$.

Приклад. Знайти приріст та варіацію функціоналу

$$I[y]=\int_a^b y^2(x)dx;$$

Знайдемо приріст функціоналу ΔI:

$$\Delta I=\int_a^b (y(x)+\delta y)^2dx-\int_a^b y^2(x)dx=$$

$$=\int_a^b\left(y^2(x)+2y(x)\delta y+(\delta y)^2\right)dx-\int_a^b y^2(x)dx=\int_a^b y^2(x)dx+$$

$$+2\int_a^b y(x)\delta y dx+\int_a^b(\delta y)^2dx-\int_a^b y^2(x)dx=2\int_a^b y(x)\delta y dx+\int_a^b(\delta y)^2dx.$$

За означенням $\delta I=2\int_a^b y(x)\delta y dx.$

Приклад. Знайти приріст та варіацію функціоналу

$$I[y] = \int_a^b y(y + \cos x)\,dx .$$

Знайдемо приріст функціоналу ΔI:

$$\Delta I = \int_a^b (y + \delta y)(y + \delta y + \cos x)dx - \int_a^b y(y + \cos x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \left(y^2 + 2y\delta y + y\cos x + (\delta y)^2 + \cos x \cdot \delta y - y^2 - y\cos x\right)dx =$$

$$= \int_a^b (2y + \cos x)\delta y\;dx + \int_a^b (\delta y)^2 dx .$$

За означенням $\delta I = \int_a^b (2y + \cos x)\delta y\,dx$.

Зауваження. Роль варіації δI при дослідженні функціоналів аналогічна тій, яку виконує при дослідженні функцій диференціал. У таблиці 1 наведено відповідність понять диференціального та варіаційного числень для випадку одного аргументу.

Таблиця 3 – Порівняння диференціального та варіаційного числень

№ п/п	Диференціальне числення	Варіаційне числення
1	Аргумент – числова змінна x	Аргумент – числова функція $y(x)$
2	Залежна змінна – числова y	Залежна змінна – числова I
3	Приріст аргументу Δx	Варіація аргументу δy
4	Приріст функції Δy	Приріст функціоналу ΔI
5	Диференціал функції dy	Варіація функціоналу δI
6	Другий диференціал функції $d^2 y$	Друга варіація функціоналу $\delta^2 I$
7	Необхідна умова екстремуму $dy = 0$	Необхідна умова екстремуму $\delta I = 0$
8	Стаціонарна точка функції	Стаціонарна функція (допустима екстремаль) функціоналу
9	Достатня умова екстремуму: $d^2 y > 0$ – min, $d^2 y < 0$ – max	Достатня умова екстремуму: $\delta^2 I > 0$ – min, $\delta^2 I < 0$ – max

Варіацію δI називають також варіацією першого порядку або першою варіацією функціоналу $I[y]$. Варіацію другого порядку введемо аналогічно тому, як це робиться для диференціала другого порядку функції.

Візьмемо довільну допустиму функцію $y = y(x)$ і довільну її варіацію $\delta y = \delta y(x)$ таку, що функція $y + \delta y$ є допустимою. Зафіксуємо y та δy і розглянемо однопараметричну сім'ю функцій $\overline{y} = y + \alpha\delta y$, де α – деяке число (параметр). Функціонал $I[y]$ на вказаній сім'ї є функцією параметра α: $I[y + \alpha\delta y] = \Phi(\alpha)$.

Припустимо, що цю функцію можна розкласти за формулою Тейлора до квадратичного члена включно в околі точки $\alpha = 0$:

$$I[y + \alpha\delta y] = I[y] + \left\{\frac{d}{d\alpha} I[y + \alpha\delta y]\right\}\Bigg|_{\alpha=0} \cdot \alpha +$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{d^2}{d\alpha^2} I[y + \alpha\delta y]\right\}\Bigg|_{\alpha=0} \cdot \alpha^2 + R_2(y, \delta y, \alpha),$$

де залишковий член $R_2(y, \delta y, \alpha)$ є нескінченно малою вищого порядку порівняно з α^2: $R_2(y, \delta y, \alpha) = o(\alpha^2)$.

Тоді варіаціям першого та другого порядку можна дати такі означення.

Варіацією або першою варіацією функціоналу δI називається значення першої похідної функції $\Phi(\alpha) = I[y + \alpha\delta y]$ при $\alpha = 0$:

$$\delta I = \delta I[y, \delta y] = \frac{d}{d\alpha} I[y + \alpha\delta y]\Bigg|_{\alpha=0}.$$

(Друге означення варіації функціоналу).

Можна показати, що це означення першої варіації рівносильне наведеному раніше. На практиці зручніше користуватись останнім означенням.

Другою варіацією функціоналу або варіацією другого порядку $\delta^2 I$ називається значення другої похідної функції $\Phi(\alpha) = I[y + \alpha\delta y]$ при $\alpha = 0$:

$$\delta^2 I = \frac{d^2}{d\alpha^2} I[y + \alpha\delta y]\Bigg|_{\alpha=0}.$$

Приклад. Знайти варіацію функціоналу δI, користуючись другим означенням як похідної по параметру:

$$I[y] = \int_a^b x(y')^2 \sin y\, dx .$$

У відповідності з другим означенням варіації функціоналу маємо:

$$\delta I = \frac{d}{d\alpha}\int_a^b x\left((y+\alpha\delta y)'_x\right)^2 \sin(y+\alpha\delta y)\, dx\Bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{d\alpha} x\left((y+\alpha\delta y)'_x\right)^2 \sin(y+\alpha\delta y)\, dx\Bigg|_{\alpha=0} = \int_a^b x\big(2(y'+\alpha\delta y')\times$$

$$\times\delta y' \sin(y+\alpha\delta y) + (y'+\alpha\delta y')^2 \cos(y+\alpha\delta y)\cdot\delta y\big)\Big|_{\alpha=0} dx =$$

$$= \int_a^b x\left(2y' \sin y\cdot\delta y' + (y')^2 \cos y\cdot\delta y\right) dx\,.$$

ЛЕКЦІЯ 18 НЕОБХІДНА УМОВА ЕКСТРЕМУМУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ЕКСТРЕМАЛЕЙ (РІВНЯННЯ ЕЙЛЕРА). ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ. УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ. ЗАДАЧА ЛАГРАНЖА. ІЗОПЕРИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА. ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ

Необхідна умова екстремуму функціоналу

Як відомо, необхідна умова екстремуму функції полягає в рівності нулю її диференціала. Аналогічно, для функціонала справедлива теорема (необхідна умова екстремуму в варіаційній формі). Якщо функціонал $I[y]$ має варіацію δI і досягає на деякій функції $y_0 = y_0(x)$ екстремуму, то його варіація на цій функції дорівнює нулю: $\delta I[y_0, \delta y] = 0.$

Розглянемо однопараметричну сім'ю функцій $y_0 + \alpha\delta y$, де α – деяке число. На вказаній сім'ї функціонал $I[y]$ є функцією параметра α: $\delta I[y_0, \delta y] = \Phi(\alpha)$, яка згідно з умовою теореми має екстремум при $\alpha = 0$.

У відповідності з необхідною умовою екстремуму функції маємо $\left.\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$, тобто $\left.\frac{d}{d\alpha} I[y_0 + \alpha\delta y]\right|_{\alpha=0} = 0$. За другим означенням указана похідна є варіацією функціоналу $\delta I[y_0, \delta y]$. Отже, $\delta I[y_0, \delta y] = 0.$Функції, на яких варіація функціоналу існує і дорівнює нулю, називаються стаціонарними функціями або допустимими екстремалями.

Задача на екстремум функціоналу з закріпленими кінцями. Рівняння Ейлера

Розглянемо найпростішу задачу варіаційного числення:

знайти мінімум (максимум) функціоналу

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$$

при крайових умовах $y(x_1) = y_1$; $y(x_2) = y_2$

серед неперервно диференційовних на відрізку $[x_1; x_2]$ функцій $y = y(x)$, де x_1, x_2, y_1, y_2 – відомі числа.

Оскільки в даній задачі всі допустимі криві, серед яких шукається та, що доставляє екстремум функціоналу, проходять через дві різні нерухомі точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, то поставлена задача називається варіаційною задачею з закріпленими кінцями.

Теорема. Допустимі екстремалі функціоналу з закріпленими кінцями $I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx$; $y(x_1) = y_1$; $y(x_2) = y_2$, визначаються як розв'язки диференціального рівняння $F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$ при крайових умовах $y(x_1) = y_1$; $y(x_2) = y_2$.

Диференціальне рівняння другого порядку $F'_y - dF'_{y'}/dx = 0$ називається рівнянням Ейлера. Розв'язки рівняння Ейлера називаються екстремалями, а само рівняння Ейлера – диференціальним рівнянням екстремалей.

Таким чином, в даній задачі допустимі екстремалі виділяються зі всіх екстремалей врахуванням крайових умов.

Необхідна умова екстремуму, з якої знаходяться екстремалі, має вигляд $\delta I[y, \delta y] = 0$. Оскільки ця умова повинна виконуватись для будь-якої варіації функції δy, то при закріплених кінцях повинні справджуватись рівності $\delta y(x_1) = 0$, $\delta y(x_2) = 0$.

Виразимо варіацію функціоналу через функцію $F(x, y, y')$ та її похідні:

$$\delta I=\frac{d}{d\alpha}I[y_0+\alpha\,\delta y]\Big|_{\alpha=0}=\frac{d}{d\alpha}\int_{x_1}^{x_2}[F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')dx\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{d\alpha}F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\,dx\Big|_{\alpha=0}=\int_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y\,(x,y+\alpha\delta y,y'+$$

$$+\alpha\delta y')\cdot(y+\alpha\delta y)'_\alpha+F'_{y'}\,(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\times$$

$$\times(y'+\alpha\delta y')'_\alpha\Big]\,dx\Big|_{\alpha=0}=\int_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y\,(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\cdot\delta y+$$

$$+F'_{y'}\,(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\cdot\delta y'\Big]dx\Big|_{\alpha=0}=\int_{x_1}^{x_2}\Big[F'_y\,(x,y,y')\times$$

$$\times\delta y+F'_{y'}\,(x,y,y')\cdot\delta y'\Big]\,dx=\int_{x_1}^{x_2}F'_y\,\delta y\,dx+\int_{x_1}^{x_2}F'_{y'}\,\delta y'\,dx\,,$$

де $F'_y=F'_y\,(x,y,y'),\quad F'_{y'}=F'_{y'}\,(x,y,y')$.

До другого доданка останньої рівності застосуємо інтегрування частинами:

$$\int_{x_1}^{x_2}F'_{y'}\,\delta y'\,dx=\left|\begin{array}{c}u=F'_{y'}\,;\quad du=\dfrac{d}{dx}F'_{y'}\cdot dx\\ dv=\delta y'\cdot dx=(\delta y)'dx;\quad v=\int(\delta y)'dx=\delta y\end{array}\right|=$$

$$=F'_{y'}\cdot\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\delta y\cdot\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot dx=F'_{y'}\cdot\delta y(x_2)-F'_{y'}\cdot\delta y(x_1)-$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot\delta y\cdot dx=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot\delta y\cdot dx,\text{ оскільки }\ \delta y(x_1)=0\ \text{ і }\ \delta y(x_2)=0\,.$$

Тоді варіацію функціоналу можна подати у вигляді

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}F'_y\cdot\delta y\,dx-\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}F'_{y'}\cdot\delta y\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}\right)\delta y\,dx.$$

На екстремалі варіація функціоналу повинна дорівнювати нулю

$$\delta I=\int_{x_1}^{x_2}\left(F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}\right)\delta y\,dx=0,$$

причому для довільної варіації функції δy такої, що $\delta y(x_1)=0$ і $\delta y(x_2)=0$. Це можливо лише за умови, що вираз в дужках під знаком інтеграла дорівнює нулю для всіх x із відрізка $[x_1;x_2]$:

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0.$$

Приклад. Знайти екстремалі функціоналу:

$$I[y] = \int_0^1 \left(12xy - 4xy' + (y')^2\right) dx;.$$

Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = 12xy - 4xy' + (y')^2; \quad F'_y = 12x; \quad F'_{y'} = -4x + 2y';$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'} = \frac{d}{dx}(-4x + 2y') = -4 + 2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0.$ набуває вигляду: $12x - (-4 + 2y'') = 0$; $y'' = 6x + 2$. Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y' = \int (6x + 2)\, dx = 3x^2 + 2x + C_1;$$

$$y = \int \left(3x^2 + 2x + C_1\right) dx = x^3 + x^2 + C_1 x + C_2.$$

Отже, екстремалями служать функції

$$y = x^3 + x^2 + C_1 x + C_2,$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Приклад. Знайти екстремалі функціоналу, що задовольняють вказаним крайовим умовам (допустимі екстремалі):

$$I[y] = \int_0^{\pi} \left(6y \sin 2x + 2y\, y' + (y')^2 - y^2\right) dx; \; y(0) = 0; \; y(\pi) = 0.$$

Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x, y, y') = 6y \sin 2x + 2y\, y' + (y')^2 - y^2;$$

$$F'_y = 6 \sin 2x + 2y' - 2y; \; F'_{y'} = 2y + 2y'; \; \frac{d}{dx}F'_{y'} = 2y' + 2y''.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y - dF'_{y'}/dx = 0$ набуває вигляду:

$$6 \sin 2x + 2y' - 2y - 2y' - 2y'' = 0; \; y'' + y = 3 \sin 2x.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$y''+y=0;\ k^2+1=0;\ k_{1,2}=\pm i;\ \overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x;$$

$$y_*=A\cos 2x+B\sin 2x;\quad y'_*=-2A\sin 2x+2B\cos 2x;$$

$$y''_*=-4A\cos 2x-4B\sin 2x;$$

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x+A\cos 2x+B\sin 2x=3\sin 2x;$$

$$\begin{matrix}\cos 2x: \\ \sin 2x:\end{matrix}\begin{cases}-3A=0; & A=0;\\ -3B=3; & B=-1;\end{cases}\ y_*=-\sin 2x;$$

$$y=\overline{y}+y_*=C_1\cos x+C_2\sin x-\sin 2x$$

– екстремалі, де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Крайові умови дають систему алгебраїчних рівнянь для знаходження C_1 і C_2:

$$\begin{cases}C_1\cos 0+C_2\sin 0-0\cdot\sin 0=0;\\ C_1\cos\pi+C_2\sin\pi-\pi\cdot\sin 2\pi=0;\end{cases}\begin{cases}C_1=0; & C_1=0;\\ C_1+C_2\cdot 0=0; & 0\cdot C_2=0.\end{cases}$$

З останньої рівності випливає, що C_2 може набувати довільних значень. Значить, допустимими екстремалями служать функції $y=C_2\sin x-\sin 2x$, де C_2 – довільна стала. Таким чином, дана варіаційна задача має нескінченну множину розв'язків

Достатні умови екстремуму. Умовний екстремум. Варіаційні принципи

Достатні умови екстремуму

У багатьох варіаційних задачах існування та характер екстремуму очевидні з геометричного чи фізичного змісту. Якщо при цьому допустима екстремаль єдина, то вона і служить розв'язком варіаційної задачі. У загальному випадку для того, щоб встановити наявність і характер екстремуму, треба скористатись достатніми умовами екстремуму.

Нехай функція $y_0(x)$ є допустимою екстремаллю функціоналу $I[y]$ в деякому класі допустимих функцій D_1, тобто на цій кривій виконується необхідна умова екстремуму $\delta I[y_0, \delta y] = 0$. Характер екстремуму (максимум чи мінімум) визначається знаком приросту функціоналу: якщо $\Delta I \geq 0$, то функціонал має мінімум, а якщо $\Delta I \leq 0$, то – максимум. Оскільки на допустимій екстремалі перша варіація дорівнює нулю $\delta I[y_0, \delta y] = 0$, то знак приросту функціоналу ΔI для довільної досить малої варіації аргументу δy визначається знаком другої варіації функціоналу $\delta^2 I$.

Достатня умова екстремуму у варіаційній формі: якщо на деякому класі допустимих функцій D_1 для довільної досить малої варіації функції δy на допустимій екстремалі $y_0(x)$ друга варіація функціоналу додатна $(\delta^2 I > 0)$, то на цій екстремалі функціонал має мінімум, якщо друга варіація функціоналу від'ємна $(\delta^2 I < 0)$, то – максимум, якщо ж друга варіація функціоналу набуває значень обох знаків, то екстремуму немає.

При певних умовах знак другої варіації функціоналу $I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$ визначається знаком другої похідної $F''_{y'y'}$. Звідси випливають достатні умови Лежандра:

1.Посилені достатні умови Лежандра слабкого екстремуму: якщо на допустимій екстремалі $y_0(x)$ виконується нерівність $F''_{y'y'}\big|_{y=y_0(x)} > 0$, то на цій екстремалі функціонал має слабкий мінімум, а якщо нерівність $F''_{y'y'}\big|_{y=y_0(x)} < 0$, то – слабкий максимум.

2.Достатні умови Лежандра сильного екстремуму: якщо в усіх точках $(x; y)$, які близькі до допустимої екстремалі $y_0(x)$, виконується нерівність $F''_{y'y'} \geq 0$ $\left(F''_{y'y'} \leq 0\right)$ при довільних значеннях y', то ця екстремаль реалізує сильний мінімум (сильний максимум).

Приклад. Користуючись достатніми умовами Лежандра, дослідити на екстремум функціонал при заданих крайових умовах:

$$I[y]=\int_1^e\left(x+2y+\frac{(y')^2x}{2}\right)dx;\ y(1)=3;\ y(e)=2e+1.$$

Розв'язання. Знайдемо похідні, що входять в рівняння Ейлера:

$$F(x,y,y')=x+2y+\frac{(y')^2x}{2};\ F'_y=2;\ F'_{y'}=\frac{1}{2}\cdot 2y'x=y'x;$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}=y''x+y'.$$

Тоді рівняння Ейлера $F'_y-\frac{d}{dx}F'_{y'}=0$ набуває вигляду:

$$2-y''x-y'=0;\ y''+\frac{1}{x}y'=\frac{2}{x}.$$

Розв'яжемо останнє рівняння за допомогою зниження порядку:

$$p=y';\ y''=p';\ p'+\frac{1}{x}p=\frac{2}{x};\ p=uv;\ p'=u'v+v'u;\ u'v+v'u+$$

$$+\frac{1}{x}uv=\frac{2}{x};\quad u'v+u\left(v'+\frac{1}{x}v\right)=\frac{2}{x};\quad v'+\frac{1}{x}v=0;$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x};\ \ln|v|=-\ln|x|;\ v=\frac{1}{x};\quad u'\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{x};\ u'=2;\ u=2x+C_1;$$

$$p=(2x+C_1)\cdot\frac{1}{x};\ y'=(2x+C_1)\cdot\frac{1}{x};$$

$y=\int\left(2+C_1\frac{1}{x}\right)dx=2x+C_1\ln|x|+C_2$ — екстремалі.

Значення C_1 і C_2 знайдемо з крайових умов:

$$\begin{cases}3=2+C_2; & C_2=1;\\ 2e+1=2e+C_1+C_2; & C_1=0.\end{cases}$$

Отже, допустима екстремаль: $y=2x+1$

Оскільки на допустимій екстремалі $F''_{y'y'}=x>0$, при $x\in[1;e]$, то функціонал має мінімум. Знайдемо його значення:

$$y'=2;\ F(x,y,y')=x+2(2x+1)+\frac{(2)^2x}{2}=7x+2;$$

$$I_{\min}=I[2x+1]=\int_1^e(7x+2)dx=\left.\frac{7x^2}{2}\right|_1^e+\left.2x\right|_1^e=\frac{7e^2+4e-11}{2}$$

Умовний екстремум. Задача Лагранжа.

Ізопериметрична задача

Варіаційною задачею на умовний екстремум називається задача дослідження на екстремум функціоналу, коли на функції, від вибору яких залежить цей функціонал, крім крайових, накладено інші додаткові умови, що звуться зв'язками.

В залежності від їх характеру зв'язки поділяються на алгебраїчні, диференціальні, інтегральні або ізопериметричні.

За допомогою методу множників Лагранжа задачі на умовний екстремум зводяться до задач на безумовний екстремум.

Задача Лагранжа: знайти функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, які доставляють мінімум (максимум) функціоналу

$$I[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)\, dx$$

і задовольняють рівнянням зв'язку

$$\varphi_j(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0, \quad j = \overline{1, m},\ m < n,$$

а також крайовим умовам $y_i(x_1) = y_{i1}, \quad y_i(x_2) = y_{i2}, \quad i = \overline{1, n}.$

Припускається, що рівняння зв'язку незалежні, а крайові умови їх задовольняють.

Теорема. Якщо функції $y_1(x), \dots, y_n(x)$ є допустимими екстремалями сформульованої задачі Лагранжа, то існують такі функції $\lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$, (множники Лагранжа), що функції $y_1(x), \dots, y_n(x)$ служать безумовними допустимими екстремалями для допоміжного функціоналу

$$\overline{I}[y_1, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} \overline{F}(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)\, dx,$$

де $\overline{F}(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j$ – допоміжна функція (функція Лагранжа)..

Найпростіша ізопериметрична задача: знайти функцію $y(x)$, яка доставляє мінімум (максимум) функціоналу

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx$$

і задовольняє інтегральному зв'язку $I_*[y] = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x, y, y')\, dx = l$,

а також крайовим умовам $y(x_1) = y_1;\ y(x_2) = y_2$.

Теорема. Якщо функція $y(x)$ є допустимою екстремаллю сформульованої ізопериметричної задачі, то існує таке число λ (множник Лагранжа), що функція $y(x)$ служить безумовною допустимою екстремаллю допоміжного функціоналу

$$\overline{I}[y] = \int_{x_1}^{x_2} \overline{F}(x, y, y', \lambda)\, dx,$$

де $\overline{F}(x, y, y', \lambda) = F + \lambda\varphi$ – допоміжна функція (функція Лагранжа).

Зауваження. На відміну від алгебраїчних чи диференціальних, інтегральні зв'язки не накладають жорстких обмежень на шукані функції, бо з них не можна виразити одні з функцій через інші. Тому число ізопериметричних умов не обов'язково повинно бути меншим числа шуканих функцій.

Приклад. Знайти екстремалі функціоналу

$$I[y] = \int_0^2 \left((y')^2 - xy'\right) dx$$

при крайових умовах $y(0) = 1,\quad y(2) = 2$

та ізопериметричному зв'язку $\int_0^2 x^2 y\, dx = 64/15$.

Складемо функцію Лагранжа і допоміжний функціонал:

$$\overline{F} = F + \lambda\varphi;\quad \overline{F} = (y')^2 - xy' + \lambda x^2 y;$$

$$\overline{I} = \int_0^2 \overline{F}\, dx;\ \ \overline{I} = \int_0^2 \left((y')^2 - xy' + \lambda x^2 y\right) dx;\quad \lambda = const.$$

Складемо рівняння Ейлера:

$$\overline{F}'_y = \lambda x^2;\ \ \overline{F}'_{y'} = 2y' - x;\ \ \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = 2y'' - 1;\ \ \overline{F}'_y - \frac{d}{dx}\overline{F}'_{y'} = 0;$$

$$\lambda x^2 - 2y'' + 1 = 0;\ y'' = (\lambda/2)x^2 + 1/2.$$

Звідси $y'=\frac{\lambda x^3}{6}+\frac{1}{2}x+C_1$; $y=\frac{\lambda x^4}{24}+\frac{x^2}{4}+C_1x+C_2$.

Використаємо крайові умови:

$$\begin{matrix} y(0)=1: \\ y(2)=2: \end{matrix} \begin{cases} C_2=1; \\ 2\lambda/3+1+2C_1+C_2=2; \end{cases} \begin{matrix} C_2=1; \\ \lambda=-3C_1; \end{matrix}$$

$$y=-(1/8)C_1x^4+(1/4)x^2+C_1x+1.$$

З інтегрального зв'язку маємо:

$$\int_0^2 x^2\left(-(1/8)C_1x^4+(1/4)x^2+C_1x+1\right)dx=\frac{64}{15};$$

$$\left(-(x^7/56)C_1+x^5/20+(x^4/4)C_1+x^3/3\right)\Big|_0^2=64/15;$$

$$-(16/7)C_1+8/5+4C_1+8/3=64/15;\ C_1=0.$$

Отже, допустима екстремаль

$$y=-(1/8)\cdot 0\cdot x^4+(1/4)x^2+0\cdot x+1=(1/4)x^2+1.$$

Варіаційні принципи

Варіаційні принципи застосовуються до аналізу різноманітних явищ. Суть кожного з них полягає в тому, що зі всіх станів, допустимих для системи, реалізується той, який відповідає екстремуму певного функціоналу (для кожного принципу свого). Розглянемо найбільш відомі принципи.

Принцип Ферма в оптиці: зі всіх можливих шляхів, які сполучають точки A і B, світло вибирає той, що відповідає найменшому часу руху:

$$I=\frac{1}{c}\int_{\cup AB} n\,dt\to\min.$$

Тут c – швидкість світла у вакуумі, n – показник заломлення світла в даному середовищі, t – час.

Форма кривої AB визначається мінімумом вказаного функціоналу. В оптично однорідному середовищі ($n=const$) – це пряма лінія.

Принцип найменшої дії в механіці: дійсний рух системи виділяється зі всіх допустимих рухів тим, що функціонал, який називається дією, $S=\int_{t_1}^{t_2} Ldt$ досягає при цьому мінімуму.

Тут L – функція Лагранжа, що є різницею кінетичної T і потенціальної U енергій: $L=T-U;$ $[t_1;t_2]$– проміжок часу руху.

Зауваження. Принцип найменшої дії – це узагальнення на задачі динаміки принципу мінімуму потенціальної енергії, що застосовується у статиці.

Зауваження. Закони збереження імпульсу та енергії виступають наслідками варіаційного принципу найменшої дії.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бермант А. Ф., Краткий курс математического анализа. / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2003. – 736 с.

2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : в 2 т / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985.

3. Бізюк В. В. Елементи теорії поля : навчально-методичний посібник з курсу вищої математики / В. В. Бізюк. – Харків : ХНАМГ, 2006. – 76 с.

4. Бізюк В. В. Спеціальні розділи вищої математики для електротехніків : навчальний посібник / В. В. Бізюк, А. В. Якунін – Харків : ХНАМГ, 2008. – 300 с.

5. Бізюк В. В. Елементи операційного числення (конспект лекцій з вправами для самостійної роботи). / В. В. Бізюк, А. В. Якунін – Харків : ХНАМГ, 2004. – 88 с.

6. Вища математика для електротехніків: у 3-х модулях / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, В. С. Ситникова та ін.; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків: ХНАМГ, 2009. – Модуль 1: Аналітична геометрія на площині. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Лінійна та векторна алгебра. Площина та пряма у просторі. Комплексні числа та функції / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, В. С. Ситникова. – 2009. – 308 с. – Модуль 2: Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Елементи варіаційного числення / С. О. Станішевський, А. В. Якунін, А. О. Володченко. – 2010. – 350 с. – Модуль 3: Числові та функціональні ряди. Функції декількох змінних. Елементи теорії поля. Криволінійні та поверхневі інтеграли. Рівняння математичної фізики / В. В. Бізюк, А. В. Якунін. – 2011. – 383 с.

7. Методичні вказівки та контрольні завдання з вищої математики (для студентів заочної форми навчання усіх спеціальностей). Частина перша / А. І. Колосов, С. О. Станішевський та ін. – Х.: ХНАМГ, 2006. – 75 с.

8. Методичні вказівки та контрольні завдання з вищої математики (для студентів заочної форми навчання усіх спеціальностей). Частина друга / А. І. Колосов, М. Й. Кадець та ін. – Х.: ХНАМГ, 2006. – 71 с.

Навчальне видання

Бізюк Валерій Васильович

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Модуль 2

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів першого курсу денної та заочної форм навчання за спеціальністю 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка; освітня програма «Електромеханіка та електротехнології»)

Відповідальний за випуск *А. І. Колосов*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *В. В. Бізюк*

План 2016, поз. 87 Л

Підп. до друку 21.11.2016 р. Формат 60 х 84/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 7,0
Зам. № Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.