

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять
з дисципліни

«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ»

за змістовими модулями

«Лінійні електричні кола періодичного змінного струму»,
«Розрахунок перехідних процесів в лінійних електричних колах»,
«Сталі процеси в нелінійних колах і методи їх розрахунку»

(для студентів усіх форм навчання напрямів
6.050701 – Електротехніка та електротехнології,
6.050702 – Електромеханіка та спеціальності
141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2016

Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» за змістовими модулями «Лінійні електричні кола періодичного змінного струму», «Розрахунок перехідних процесів в лінійних електричних колах», «Сталі процеси в нелінійних колах і методи їх розрахунку» (для студентів усіх форм навчання напрямів 6.050701 – Електротехніка та електротехнології», 6.050702 – Електромеханіка та спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : Я. Б. Форкун, М. Л. Глебова, Н. О. Сабалаєва. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 72 с.

Укладачі: канд. техн. наук, доц. Я. Б. Форкун,
канд. техн. наук, доц. М. Л. Глебова,
канд. техн. наук, доц. Н. О. Сабалаєва

Рецензент д-р техн. наук, проф. А. Г. Сосков

*Рекомендовано кафедрою теоретичної та загальної електротехніки,
протокол № 11 від 26.04.2016 р.*

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО ЗМІННОГО СТРУМУ	5
1.1 Трифазні кола змінного синусоїдного струму.....	5
1.2 Аналіз кіл з несинусоїдними періодичними струмами та напругами.	12
1.3 Несинусоїдні струми у трифазних колах.....	30
РОЗДІЛ 2 РОЗРАХУНОК ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ.....	39
РОЗДІЛ 3 СТАЛІ ПРОЦЕСИ В НЕЛІНІЙНИХ КОЛАХ І МЕТОДИ ЇХ РОЗРАХУНКУ.....	55
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	71

ВСТУП

Електротехнікою називають область техніки, що пов'язана з отриманням, розподілом, перетворенням і використанням електричної енергії, або, іншими словами – це широка галузь практичного застосування електромагнітних явищ. «Теоретичні основи електротехніки» – дисципліна, яка є теоретичною базою для всіх електротехнічних спеціальностей.

Метою дисципліни є оволодіння фундаментальними поняттями, теорією та методологією сучасної теоретичної електротехніки, засвоєння фундаментальних знань, які є необхідною базою для подальшого вивчення електротехнічних дисциплін.

Предметом вивчення дисципліни є основні закони теорії електричних кіл, теорії електромагнітного поля та оволодіння навичками їх практичного застосування для дослідження і розрахунків сучасних електротехнічних пристроїв.

Дисципліна «Теоретичні основи електротехніки» складається з трьох частин, при чому першу та другу частину вивчають всі спеціальності напрямів 6.050701 – Електротехніка та електротехнології, 6.050702 – Електромеханіка (за переліком 2015 р. – єдина спеціальність «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»).

Видами аудиторних занять дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» є лекції, лабораторні й практичні заняття. Практичні заняття є дуже важливими для засвоєння теоретичного матеріалу, що розглядається на лекціях. Крім того, на практичних заняттях мають бути отримані знання, що стануть студенту в нагоді при виконанні самостійної роботи, зокрема розрахунково-графічних робіт.

Ці методичні вказівки (МВ) складені відповідно до програми курсу «Теоретичні основи електротехніки» і призначені для студентів усіх форм навчання напрямів 6.050701 – Електротехніка та електротехнології, 6.050702 – Електромеханіка та охоплюють матеріал другої частини дисципліни ТОЕ, тобто теорію лінійних електричних кіл періодичного змінного струму, теорію розрахунку перехідних процесів в лінійних електричних колах. Для напрямку «Електромеханіка» додатково наведено розділ, пов'язаний з теорією нелінійних електричних кіл і методів їх розрахунку у зв'язку з наявністю для вказаного напрямку третього змістового модуля «Сталі процеси в нелінійних електричних колах і методи їх розрахунку».

Назви розділів цих методичних вказівок відповідають назвам змістових модулів другої частини дисципліни ТОЕ. В кожному розділі коротко наведено теоретичні положення за темами змістового модуля і розглянуті приклади розв'язку найпоширеніших типових задач.

РОЗДІЛ 1 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО ЗМІННОГО СТРУМУ

1.1 Трифазні кола змінного синусоїдного струму

Трифазна симетрична система електрорушійних сил (ЕРС) – сукупність трьох синусоїдних ЕРС однієї частоти, що мають однакові амплітуди й зсунуті між собою на 120° .

Чергування фаз – послідовність проходження ЕРС через однакові значення (наприклад, через нуль). Таке чергування фаз, коли початкова фаза ЕРС e_A дорівнює нулю, початкова фаза ЕРС e_B дорівнює « -120° », а початкова фаза ЕРС e_C дорівнює « $+120^\circ$ », називається *прямим*; миттєві значення фазних ЕРС при цьому:

$$e_A = E_m \cdot \sin \omega t; e_B = E_m \cdot \sin\left(\omega t - 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right); e_C = E_m \cdot \sin\left(\omega t + 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right). \quad (1.1)$$

Трифазне коло – сукупність трифазної система ЕРС, трифазного навантаження чи навантажень і з'єднуючих проводів.

Фаза – ділянка трифазного кола, по якій тече один і той же струм.

Виводам фазних обмоток генераторів надають найменування «початок» і «кінець». Початки позначають буквами А, В, С, а кінці – х, у, z (якщо їх поєднують в одну точку, то її позначають на схемах «О»).

Напруги між початком і кінцем обмотки генератора ($\underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$, $\underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$, $\underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$) або на фазних навантаженнях (\underline{U}_{aO_1} , \underline{U}_{bO_1} , \underline{U}_{cO_1} – рис. 1.1) – це фазні напруги.

Лінійні напруги дорівнюють різниці потенціалів між точками А, В, С або різниці фазних напруг: $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AO} - \underline{U}_{BO}$; $\underline{U}_{BC} = \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{CO}$; $\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{AO}$. (1.2)

При прямому чергуванні фаз лінійні напруги в $\sqrt{3}$ більші ніж фазні й випереджають їх на 30° , тобто співвідношення між комплексами лінійних і фазних напруг мають вигляд:

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{AO} \cdot e^{j \cdot 30^\circ}; \underline{U}_{BC} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{BO} \cdot e^{j \cdot 30^\circ}; \underline{U}_{CA} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{CO} \cdot e^{j \cdot 30^\circ}. \quad (1.3)$$

Основні схеми з'єднання у трифазних колах – це схеми з'єднання *зіркою* і *трикутником*. Трифазне електричне коло є різновидом кіл синусоїдного струму, тому його розрахунок здійснюють за допомогою усіх відомих методів з застосуванням комплексних чисел.

Розглянемо коротко розрахунок найбільш розповсюдженого електричного кола «зірка – зірка». Докладний розгляд інших питань розрахунку трифазних кіл наведено в [1].

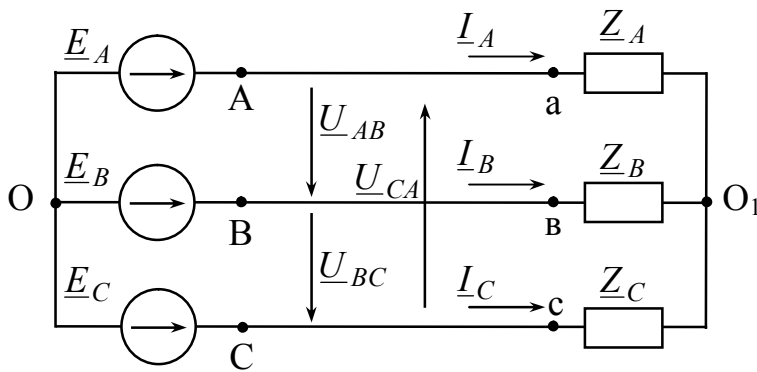


Рисунок 1.1 – Трипровідна трифазна система

Розрахунок трипровідного трифазного кола «зірка – зірка» (рис. 1.1) заснований на методі двох вузлів. Основні етапи цього розрахунку для несиметричного навантаження ($Z_A \neq Z_B \neq Z_C$):

- визначають напругу зміщення нейтралі \underline{U}_{O_1O} :

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}, \quad (1.4)$$

де $\underline{Y}_A = \frac{1}{Z_A}$, $\underline{Y}_B = \frac{1}{Z_B}$, $\underline{Y}_C = \frac{1}{Z_C}$;

- визначають фазні напруги на навантаженні за виразами:

$$\underline{U}_{aO_1} = \underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}; \quad \underline{U}_{bO_1} = \underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}; \quad \underline{U}_{cO_1} = \underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}; \quad (1.5)$$

- визначають фазні струми: $\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{aO_1}}{Z_A}$; $\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{bO_1}}{Z_B}$; $\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{cO_1}}{Z_C}$. (1.6)

Якщо навантаження симетричне ($Z_A = Z_B = Z_C$), то фазні струми визначають за виразами (1.6) з урахуванням того, що $\underline{U}_{aO_1} = \underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$; $\underline{U}_{bO_1} = \underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$; $\underline{U}_{cO_1} = \underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$. Вони однакові за модулем і зсунуті за фазою на кут 120° .

Розрахунок чотиріпровідного кола трифазного кола «зірка – зірка»

(рис. 1.2) заснований на законі Ома та першому законі Кірхгофа:

- визначають за законом Ома струми:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{Z_A}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B}{Z_B}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C}{Z_C}; \quad (1.7)$$

- визначають за першим законом Кірхгофа струм нульового проводу:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C. \quad (1.8)$$

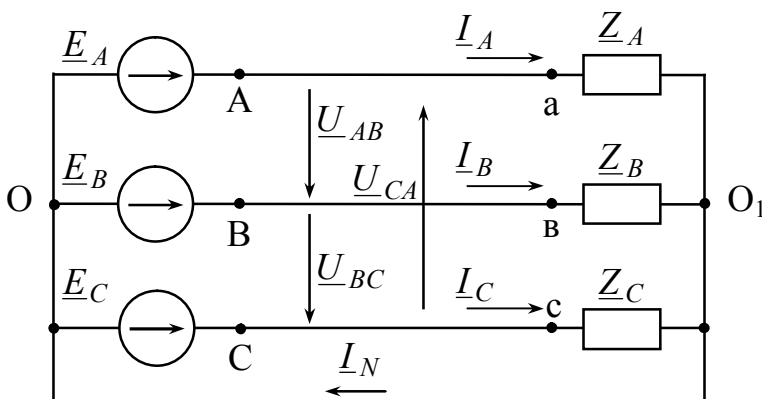


Рисунок 1.2 – Чотиріпровідна трифазна система

Для симетричного навантаження \underline{I}_N дорівнює нулю.

ЗАДАЧА 1

Розрахунок несиметричних режимів трифазного електричного кола при з'єднанні навантаження зіркою

Трифазне електричне коло «зірка – зірка» з нульовим проводом, зображене на рисунку 1.2, працює у несиметричному режимі. Фазні ЕРС – $\underline{E}_A = 155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}$ В, $\underline{E}_B = 155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ}$ В, $\underline{E}_C = 155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ}$ В. Параметри навантаження: $\underline{Z}_A = 100 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}$ Ом, $\underline{Z}_B = 100 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}$ Ом, $\underline{Z}_C = 141 \cdot e^{j \cdot 45^\circ}$ Ом.

Визначити:

- лінійні напруги кола;
- фазні струми кола.

Провести баланс потужностей.

Побудувати векторно-топографічну діаграму струмів і напруг.

Повторити розрахунки кола у випадку обриву нульового проводу.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати методи розрахунку трифазних кіл;
- вміти будувати векторно-топографічні діаграми струмів і напруг.

Розв'язання

Схема «зірка – зірка» з нульовим проводом – рисунок 1.2.

1. Лінійні напруги кола.

$$\begin{aligned}\underline{U}_{AB} &= \underline{U}_{AO} - \underline{U}_{BO} = \underline{E}_A - \underline{E}_B = 155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ} - 155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} = \\ &= 155 + 77,5 + j \cdot 134,2 = 232,5 + j \cdot 134,2 = 268,5 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} \text{ В,}\end{aligned}$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{CO} = \underline{E}_B - \underline{E}_C = 155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} - 155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} = 268,5 e^{-j \cdot 90^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{AO} = \underline{E}_C - \underline{E}_A = 155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} - 155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ} = 268,5 e^{j \cdot 150^\circ} \text{ В.}$$

2. Фазні струми.

Завдяки нульовому проводу напруга $\underline{U}_{O_1O} = 0$ В. Тоді:

$$\underline{U}_{aO_1} = \underline{U}_{AO} = \underline{E}_A; \quad \underline{U}_{bO_1} = \underline{U}_{BO} = \underline{E}_B; \quad \underline{U}_{cO_1} = \underline{U}_{CO} = \underline{E}_C.$$

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{aO_1}}{\underline{Z}_A} = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}}{100 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}} = 1,55 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} = j \cdot 1,55 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{bO_1}}{\underline{Z}_B} = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ}}{100 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}} = 1,55 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} = -0,77 - j \cdot 1,34 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_C = \frac{U_{CO1}}{\underline{Z}_C} = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ}}{141 \cdot e^{j \cdot 45^\circ}} = 1,1 \cdot e^{j \cdot 75^\circ} = 0,28 + j \cdot 1,06 \text{ А.}$$

3. Струм у нульовому проводі:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = j \cdot 1,55 - 0,77 - j \cdot 1,34 + 0,28 + j \cdot 1,06 = -0,49 + j \cdot 1,27 = 1,36 \cdot e^{j \cdot 111,1^\circ} \text{ А.}$$

4. Баланс потужностей у трифазному колі.

Потужність, що віддається джерелами живлення:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{дж} &= \underline{E}_A \cdot \underline{I}_A^* + \underline{E}_B \cdot \underline{I}_B^* + \underline{E}_C \cdot \underline{I}_C^* = 155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ} \cdot 1,55 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ} + 155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 1,55 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} + \\ &+ 155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 1,1 \cdot e^{-j \cdot 75^\circ} = -j \cdot 240,25 + 240,25 + 120,56 + j \cdot 120,56 = \\ &= 360,81 - j \cdot 119,69 \text{ ВА} \Rightarrow P_{дж} = 360,81 \text{ Вт}, Q_{дж} = -119,69 \text{ ВАр.} \end{aligned}$$

Потужність, що споживає навантаження:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_H &= I_A^2 \cdot \underline{Z}_A + I_B^2 \cdot \underline{Z}_B + I_C^2 \cdot \underline{Z}_C = 1,55^2 \cdot (-j \cdot 100) + 1,55^2 \cdot 100 + \\ &+ 1,1^2 \cdot (99,7 + j \cdot 99,7) = 360,89 - j \cdot 119,61 \text{ Вт} \Rightarrow P_H = 360,89 \text{ Вт}, \\ Q_H &= -119,69 \text{ ВАр.} \end{aligned}$$

$\tilde{S}_{дж} \approx \tilde{S}_H$, тобто баланс потужностей виконується.

5. Векторно-топографічна діаграма струмів і напруг.

Спочатку задаємося масштабами за напругою і струмом $m_U = 50 \text{ В/см}$, $m_I = 0,5 \text{ А/см}$. У вибраному масштабі за напругою будемо симетричну систему фазних напруг. З'єднуємо кінці векторів фазних напруг – точки A, B, C , – і отримуємо трикутник лінійних напруг (рис. 1.3,а). У вибраному масштабі за струмом будемо вектори фазних струмів.

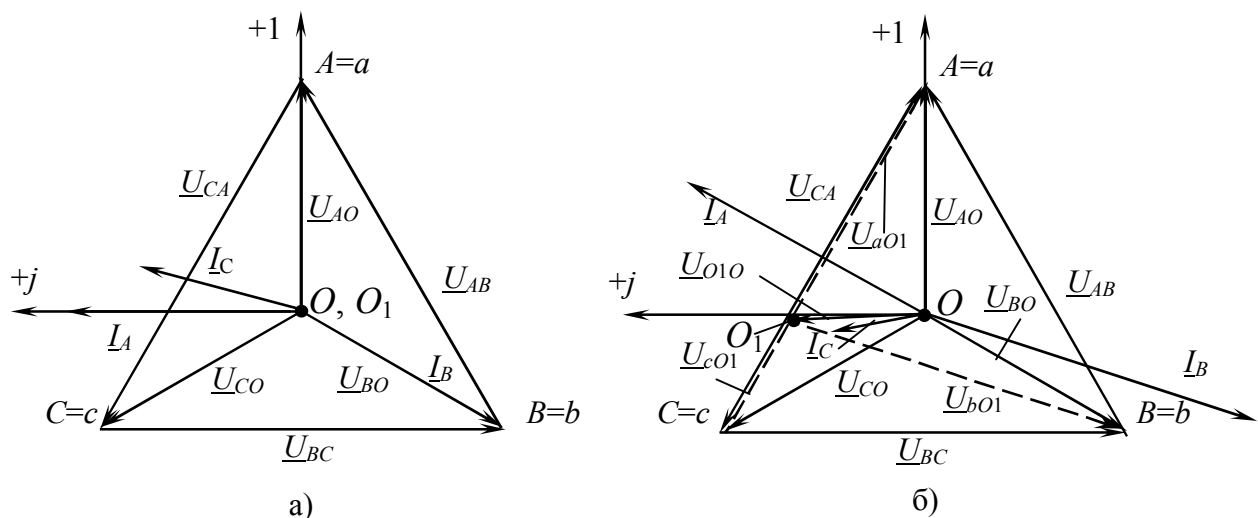


Рисунок 1.3 – Векторно-топографічні діаграми для трипровідної та чотирпровідної системи

Схема «зірка – зірка» без нульового проводу – рисунок 1.1.

1. У несиметричному режимі за відсутності нульового проводу (рис. 1.1) напруга $\underline{U}_{O_1O} \neq 0$:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{\frac{155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}}{100 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}} + \frac{155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ}}{100 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}} + \frac{155 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}}{141 \cdot e^{j \cdot 45^\circ}}}{\frac{1}{100 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}} + \frac{1}{100 \cdot e^{j \cdot 0^\circ}} + \frac{1}{141 \cdot e^{j \cdot 45^\circ}}} =$$

$$= \frac{j \cdot 1,55 - 0,775 - j \cdot 1,342 + 0,284 + j \cdot 1,061}{j \cdot 0,01 + 0,01 + 0,005 - j \cdot 0,005} = 86,12 \cdot e^{j \cdot 92,7^\circ} = -4,06 + j \cdot 86,62 \text{ В.}$$

2. Фазні струми за законом Ома:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{aO_1}}{\underline{Z}_A} = \frac{\underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}}{\underline{Z}_A} = \frac{155 + 4,06 - j \cdot 86,62}{-j \cdot 100} = 1,8 \cdot e^{j \cdot 61,6^\circ} = 0,856 + j \cdot 1,583 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{bO_1}}{\underline{Z}_B} = \frac{\underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}}{\underline{Z}_B} = \frac{-77,5 - j \cdot 134,2 + 4,06 - j \cdot 86,62}{100} = 2,32 \cdot e^{-j \cdot 108,4^\circ} =$$

$$= -0,732 - j \cdot 2,2 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{cO_1}}{\underline{Z}_C} = \frac{\underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}}{\underline{Z}_C} = \frac{-77,5 + j \cdot 134,2 + 4,06 - j \cdot 86,62}{100 + j \cdot 100} = 0,623 \cdot e^{j \cdot 101,7^\circ} =$$

$$= -0,126 + j \cdot 0,61 \text{ А.}$$

3. Перевірка розрахунку за першим законом Кірхгофа:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0,856 + j \cdot 1,583 - 0,732 - j \cdot 2,2 - 0,126 + j \cdot 0,61 \approx 0 \text{ – перший закон Кірхгофа виконується.}$$

4. Баланс потужностей у трифазному колі.

Потужність, що віддається джерелами живлення:

$$\tilde{S}_{дж} = \underline{E}_A^* \cdot \underline{I}_A + \underline{E}_B^* \cdot \underline{I}_B + \underline{E}_C^* \cdot \underline{I}_C = 155 \cdot e^{j \cdot 0^\circ} \cdot 1,8 \cdot e^{-j \cdot 61,6^\circ} +$$

$$+ 155 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 2,32 \cdot e^{j \cdot 108,4^\circ} + 155 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 0,623 \cdot e^{-j \cdot 101,7^\circ} = 132,7 - j \cdot 245,42 +$$

$$+ 352,55 - j \cdot 72,37 + 91,67 + j \cdot 30,31 = 576,92 - j \cdot 287,47 \text{ ВА} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{дж} = 576,92 \text{ Вт, } Q_{дж} = -287,47 \text{ ВАр.}$$

Потужність, що споживає навантаження:

$$\tilde{S}_H = I_A^2 \cdot \underline{Z}_A + I_B^2 \cdot \underline{Z}_B + I_C^2 \cdot \underline{Z}_C = 1,8^2 \cdot (-j \cdot 100) + 3,32^2 \cdot 100 +$$

$$+ 0,632^2 \cdot (99,7 + j \cdot 99,7) = 577,2 - j \cdot 289,3 \text{ ВА} \Rightarrow P_H = 577,2 \text{ Вт, } Q_H = -287,47 \text{ ВАр.}$$

$$\tilde{S}_{дж} \approx \tilde{S}_H, \text{ тобто баланс потужностей виконується.}$$

5. Векторно-топографічну діаграму струмів і напруг будемо, користуючись методикою, наведеною вище (рис. 1.3,б). У порівнянні з рисунком 1.3,а на діаграмі рисунку 1.3,б додатково з'являються вектори напруг \underline{U}_{O_1O} , \underline{U}_{aO_1} , \underline{U}_{bO_1} , \underline{U}_{cO_1} .

ЗАДАЧА 2

Розрахунок несиметричних режимів трифазного електричного кола при з'єднанні навантаження трикутником

Трифазна система «зірка – трикутник», зображена на рисунку 1.4, працює у симетричному режимі. Діюче значення лінійної напруги $U_L = 100$ В.

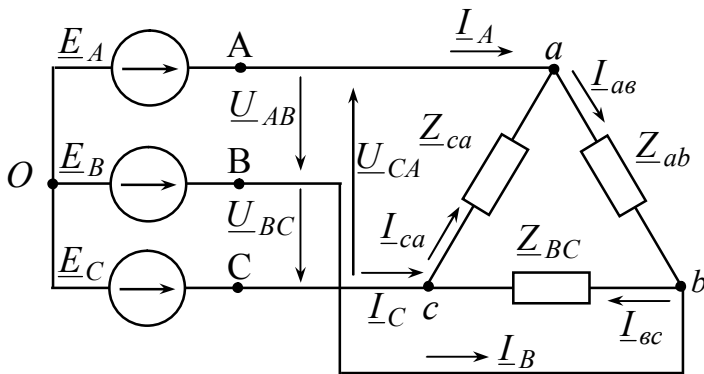
Параметри навантаження $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{b\tilde{n}} = \underline{Z}_{\tilde{n}a} = 10 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} = 8,66 + j \cdot 5$ Ом.

Визначити:

- фазні напруги і струми кола $\underline{U}_{ab}, \underline{U}_{bc}, \underline{U}_{ca}, \underline{I}_{ab}, \underline{I}_{bc}, \underline{I}_{ca}$;
- лінійні струми кола $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$.

Провести баланс потужностей. Побудувати векторно-топографічну діаграму струмів і напруг.

Розв'язання



Рисунки 1.4 – Трифазне коло «зірка – трикутник»

1. Фазні напруги

кола:

$$\underline{U}_{AO} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = \frac{100}{\sqrt{3}} = 57,73 \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{BO} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} =$$

$$= 57,73 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} \text{ В,}$$

$$\underline{U}_{CO} = \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot e^{j \cdot 120^\circ} =$$

$$= 57,73 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} \text{ В.}$$

2. Лінійні напруги кола: $\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{ab} = U_{\tilde{e}} \cdot e^{j \cdot 30^\circ} = 100 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}$,

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_{bc} = U_{\tilde{e}} \cdot e^{-j \cdot 90^\circ} = 100 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ} \text{ В, } \underline{U}_{CA} = \underline{U}_{ca} = U_{\tilde{e}} \cdot e^{j \cdot 150^\circ} = 100 \cdot e^{j \cdot 150^\circ} \text{ В.}$$

3. Фазні струми:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{U_{a\tilde{e}}}{Z_{a\tilde{e}}} = \frac{100 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}}{10 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}} = 10 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{U_{b\tilde{n}}}{Z_{b\tilde{n}}} = \frac{100 \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}}{10 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}} = 10 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} = -5 - j \cdot 8,66 \text{ А,}$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{U_{c\tilde{a}}}{Z_{\tilde{n}a}} = \frac{100 \cdot e^{j \cdot 150^\circ}}{10 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}} = 10 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} = -5 + j \cdot 8,66 \text{ А.}$$

4. Лінійні струми кола за першим законом Кірхгофа:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{\tilde{n}a} = 10 - (-5 + j \cdot 8,66) = 15 - j \cdot 8,66 = 17,32 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \text{ А,}$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{b\tilde{n}} - \underline{I}_{\tilde{a}b} = -5 - j \cdot 8,66 - 10 = -15 - j \cdot 8,66 = 17,32 \cdot e^{-j \cdot 150^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{\tilde{n}\tilde{a}} - \underline{I}_{b\tilde{n}} = -5 + j \cdot 8,66 + 5 + j \cdot 8,66 = j \cdot 17,32 = 17,32 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} \text{ А}.$$

5. Середня повна потужність, що віддається джерелами живлення:

$$S_{\text{джс}} = 3 \cdot U_\phi \cdot I_L = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L = \sqrt{3} \cdot 100 \cdot 17,32 = 3000 \text{ ВА}.$$

$$\text{Активна потужність } P_{\text{джс}} = S_{\text{джс}} \cdot \cos \varphi = 3000 \cdot \cos 30^\circ = 2598,07 \text{ Вт}.$$

$$\text{Реактивна потужність } Q_{\text{джс}} = S_{\text{джс}} \cdot \sin \varphi = 3000 \cdot \sin 30^\circ = 1500 \text{ ВАр}.$$

6. Потужність, що споживає навантаження

$$\tilde{S}_H = 3 \cdot I_{ab}^2 \cdot Z_{ab} = 3 \cdot 10^2 \cdot (8,66 + j \cdot 5) = 2598 + j \cdot 1500 \text{ ВА} \Rightarrow P_H = 2598 \text{ Вт},$$

$$Q_H = 1500 \text{ ВАр}. \tilde{S}_{\text{джс}} \approx \tilde{S}_H, \text{ тобто баланс потужностей виконується.}$$

7. Векторно-топографічна діаграма струмів і напруг.

У вибраному масштабі за напругою $m_U = 20 \text{ В/см}$ будуюмо симетричну систему фазних напруг (рис. 1.5). З'єднуємо кінці векторів фазних напруг, точки A, B, C , і отримуємо трикутник лінійних напруг (рис. 1.5). У вибраному масштабі струму $m_I = 3 \text{ А/см}$ відносно точки A будуюмо вектор лінійного струму \underline{I}_A як векторну суму векторів \underline{I}_{ab} та $-\underline{I}_{ca}$. (рис. 1.5). Так само будуюмо вектори струмів \underline{I}_B і \underline{I}_C відносно точок B і C відповідно.

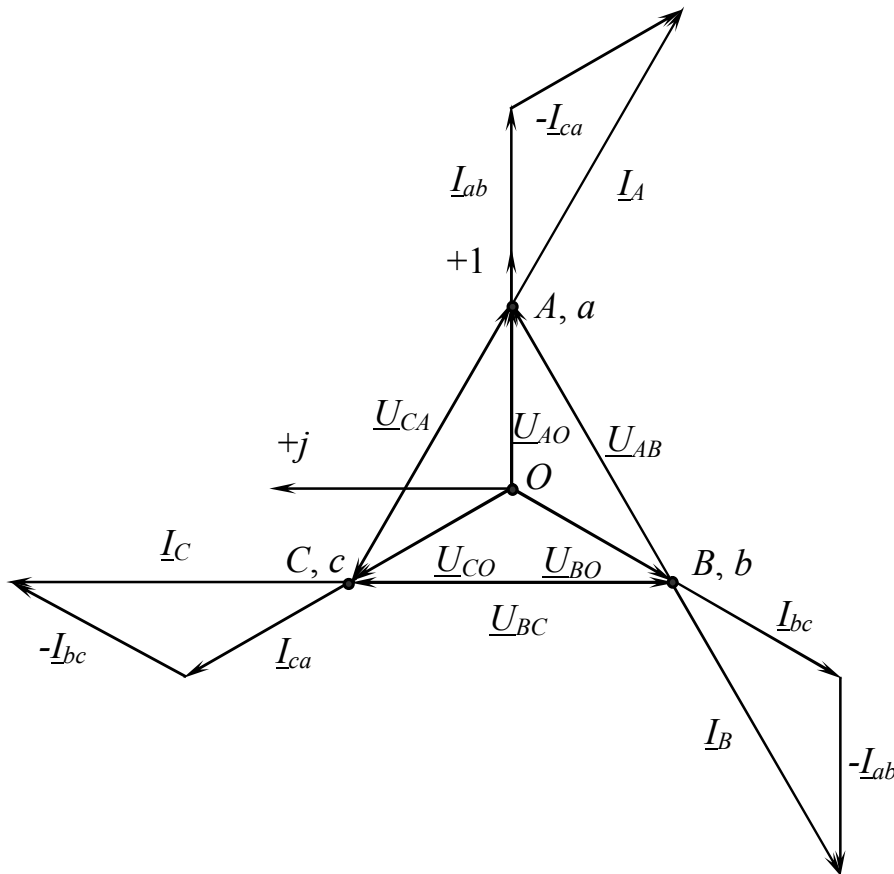


Рисунок 1.5 – Векторно-топографічна діаграма струмів та напруг схеми «зірка – трикутник»

1.2 Аналіз кіл з несинусоїдними періодичними струмами та напругами

В електротехніці з різних причин можуть виникнути несинусоїдні періодичні струми і напруги (наявність в колі джерела, що виробляє несинусоїдну напругу; наявність в колі з джерелами синусоїдної напруги нелінійних елементів та ін.).

Основою розрахунку таких кіл є розкладання функцій напруги і струму в тригонометричні ряди Фур'є, а саме:

$$f(\omega t) = A^{(0)} + A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(1)''} \cdot \cos(\omega t) + A_m^{(2)'} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + A_m^{(2)''} \cdot \cos(2 \cdot \omega t) + \dots + A_m^{(k)'} \cdot \sin(k \cdot \omega t) + A_m^{(k)''} \cdot \cos(k \cdot \omega t) + \dots, \quad (1.9)$$

$$\text{де } A^{(0)} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) d\omega t \quad - \text{ нульова гармоніка (постійна складова);} \quad (1.10)$$

$$A_1' = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \sin \omega t d\omega t \quad - \text{ амплітуда синусної складової першої гармоніки;} \quad (1.11)$$

$$A_1'' = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \cos \omega t d\omega t \quad - \text{ амплітуда косинусної складової першої гармоніки;} \quad (1.12)$$

$$A_m^{(k)'} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \sin(k \omega t) d\omega t \quad - \text{ амплітуда синусної складової гармоніки з номером } k; \quad (1.13)$$

$$A_m^{(k)''} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(\omega t) \cdot \cos(k \omega t) d\omega t \quad - \text{ амплітуда косинусної складової гармоніки з номером } k. \quad (1.14)$$

Ряд Фур'є можна також записати у вигляді суми нульової гармоніки синусних складових з ненульовими початковими фазами:

$$f(\omega t) = A^{(0)} + \sum_{k=1}^n A_m^{(k)} \cdot \sin(k \omega t + \varphi^{(k)}), \quad (1.15)$$

$$\text{де } A_m^{(k)} = \sqrt{A_m^{(k)'}^2 + A_m^{(k)''^2}} - \text{ амплітуда } k\text{-ї гармоніки.} \quad (1.16)$$

$$\varphi^{(k)} = \arctg \frac{A_m^{(k)''}}{A_m^{(k)'}}. \quad \text{початкова фаза } k\text{-ї гармоніки.} \quad (1.17)$$

Діюче значення несинусоїдної періодичної функції:

$$F = \sqrt{A^{(0)2} + \frac{A_m^{(1)'}^2}{2} + \frac{A_m^{(2)'}^2}{2} + \frac{A_m^{(3)'}^2}{2} + \dots + \frac{A_m^{(k)'}^2}{2}}. \quad (1.18)$$

Середнє за модулем значення несинусоїдної періодичної функції:

$$F_{cp} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} |f(\omega t)| d\omega t. \quad (1.19)$$

Несинусоїдні періодичні криві характеризуються коефіцієнтами:

- коефіцієнтом форми кривої (відношення діючого значення до середнього за модулем значення) – $K_\phi = \frac{F}{F_{cp}}$;
- коефіцієнтом амплітуди (відношення амплітудного значення до діючого значення) – $K_a = \frac{F_m}{F}$;
- коефіцієнт викривлення (відношення діючого значення першої гармоніки до діючого значення всієї кривої) – $K_\epsilon = \frac{F^{(1)}}{F}$, де $F_1 = \frac{A_m^{(1)}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{A_m^{(1)/2} + A_m^{(1)/2}}}{\sqrt{2}}$.

Усі несинусоїдні періодичні криві, з якими мають справу в електротехніці, поділяються на дві групи: криві геометрично правильної форми й криві неправильної форми. Ряди Фур'є для несинусоїдних періодичних кривих геометрично правильної форми наведені в довідковій літературі (або в підручниках).

Наведемо приклад рядів Фур'є для кривих геометрично правильної форми, а саме для форми у вигляді прямокутника та трикутника (рис. 1.6):

- ряд Фур'є для кривої $e(\omega t)$, що має прямокутну форму –

$$e(\omega t) = \frac{4 \cdot E_m}{\pi} \cdot \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right], \text{ В};$$

- ряд Фур'є для кривої $e(\omega t)$, що має форму трикутника –

$$e(\omega t) = \frac{8 \cdot E_m}{\pi^2} \cdot \left[\sin(\omega t) - \frac{1}{9} \sin(3\omega t) + \frac{1}{25} \sin(5\omega t) - \dots \right], \text{ В}.$$

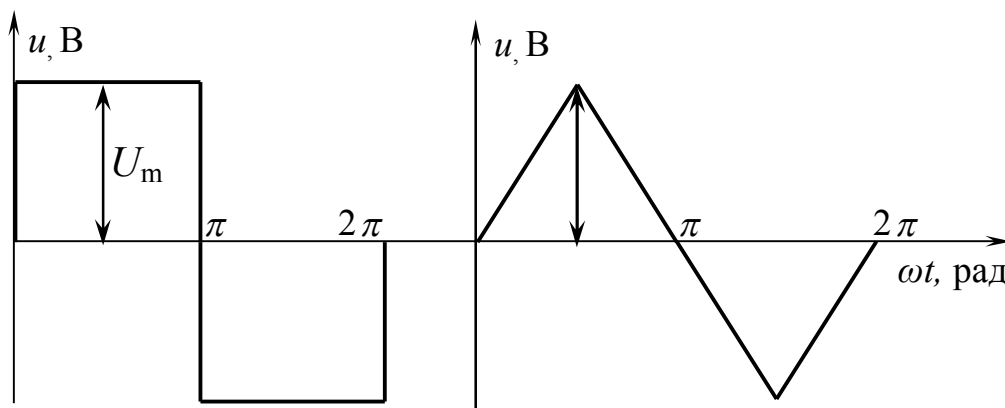


Рисунок 1.6 – Несинусоїдні криві геометрично правильної форми

Несинусоїдні періодичні криві неправильної форми розкладаються в ряд Фур'є графоаналітичним методом. Останній полягає в заміні інтегралів (1.10), (1.13), (1.14) сумою кінцевого числа доданків. Для цього період функції 2π поділяють на n рівних інтервалів, кожен інтервал – $\Delta\omega t = \frac{2\pi}{n}$ (звичайно $n=24$).

Таким чином, амплітуда нульової гармоніки дорівнює:

$$A^{(0)} \approx \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \Delta\omega t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} \left(f_p(\omega t) \cdot \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t), \quad (1.20)$$

де p – поточний індекс; $p=1 \div n$;

$f_p(\omega t)$ – значення функції $f(\omega t)$ у середині інтервалу з номером p , тобто коли $\omega t = (p - 0,5) \cdot \Delta\omega t$.

Амплітуди синусної та косинусної складових k -ї гармоніки відповідно:

$$A_m^{(k)/} \approx \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k\omega t) \cdot \Delta\omega t = \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k\omega t); \quad (1.21)$$

$$A_m^{(k)//} \approx \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k\omega t) \cdot \Delta\omega t) = \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^{p=n} (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k\omega t)), \quad (1.22)$$

де $\sin_p(k\omega t)$ і $\cos_p(k\omega t)$ – значення функцій $\sin(k\omega t)$, $\cos(k\omega t)$ у середині p -го інтервалу, тобто коли $\omega t = (p - 0,5) \cdot \Delta\omega t$.

Періодичні несинусоїдні криві можуть мати ті чи інші види симетрії, що спрощує їх розкладання в ряд Фур'є, бо ті чи інші гармоніки виключаються з ряду (табл. 1).

Таблиця 1.1 – Види симетрії несинусоїдних періодичних кривих

№ з/п	Симетрія відносно	Математична умова	Особливості розкладання (гармоніки, що відсутні)
1	Осі ординат	$f(\omega t) = f(-\omega t)$	$A_m^{(k)/}$
2	Початку координат	$f(\omega t) = -f(-\omega t)$	$A^{(0)} = A_m^{(k)//}$
3	Осі абсцис	$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$	$A^{(0)} = A_m^{(2k)/} = A_m^{(2k)//}$
4	Одночасно випадок 2 і 3	$f(\omega t) = -f(-\omega t)$ $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$	$A^{(0)} = A_m^{(2k)/} = A_m^{(k)//}$
5	Одночасно випадок 1 і 3	$f(\omega t) = f(-\omega t)$ $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$	$A^{(0)} = A_m^{(2k)//} = A_m^{(k)/}$

Слід відзначити, що кола з несинусоїдними джерелами енергії розраховують *методом накладання*.

Порядок розрахунку наступний.

- Представити несинусоїдні напругу чи струм джерела рядом Фур'є.
- Розрахувати комплекси віток для окремих гармонік. Для гармоніки з

$$\text{номером } k: \underline{Z}^{(k)} = R + j \cdot \left(k \cdot \omega L - \frac{1}{k \cdot \omega C} \right) = R + j \cdot \left(k \cdot X_L^{(1)} - \frac{X_C^{(1)}}{k} \right), \quad (1.23)$$

де $X_L^{(1)}$, $X_C^{(1)}$ – індуктивний і ємнісний опори для першої гармоніки.

- Розрахувати струми і напруги на ділянках кола від дії нульової гармоніки джерела, враховуючи, що фізичний сенс нульової гармоніки, скажімо, напруги – це постійна напруга. Тому падіння напруги на індуктивності від дії нульової гармоніки струму дорівнює нулю ($U_L^{(0)} = 0, X_L^{(0)} = 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot L = 0$), а струм вітки з ємністю нульової гармоніки відсутній ($I_C^{(0)} = 0, X_C^{(0)} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot C} = \infty$).

- Розрахувати комплекси струмів і напруг на ділянках кола від дії першої гармоніки джерела, після цього – від дії другої гармоніки джерела та інших.

- Записати миттєві значення струмів і напруг на ділянках кола для окремих гармонік.

- Записати ряди Фур'є для струмів і напруг на ділянках кола у вигляді сум окремих гармонік.

Потужності в колах несинусоїдного струму поділяють на:

- активну потужність – дорівнює сумі активних потужностей окремих гармонік $P = U^{(0)} \cdot I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)} \cdot I^{(k)} \cdot \cos \varphi^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)} = I^2 \cdot R$ (Вт); (1.24)

- реактивна потужність дорівнює сумі реактивних потужностей окремих гармонік $Q = \sum_{k=1}^{\infty} U^{(k)} \cdot I^{(k)} \cdot \sin \varphi^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} I^{(k)2} \cdot X^{(k)}$ (ВАр); (1.25)

- повну потужність $S = U \cdot I$ ВА; (1.26)

- потужність спотворення $T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$ (ВА). (1.27)

ЗАДАЧА 1

Побудова несинусоїдної кривої,
що задана аналітично у вигляді ряду Фур'є

Побудувати криву струму, рівняння якої:

$$i(\omega t) = 40 \cdot \sin(\omega t - 15^\circ) + 14,2 \cdot \sin(3\omega t + 60^\circ), \text{ А.}$$

Визначити діюче і максимальне значення струму.

Для вирішення задачі необхідно

- знати основні величини, що характеризують негармонійний струм і напругу; дві форми запису ряду Фур'є;
- вміти будувати за рядом Фур'є криву несинусоїдної функції, визначати графічно максимальне значення негармонійної функції.

Розв'язання

Довільно вибираємо масштаб струму, наприклад $m_i = N \frac{A}{\text{см}}$. Будуємо першу гармоніку струму, для чого довільно вибираємо масштаб по осі абсцис, наприклад $m_{\omega t}^{(1)} = N_1 \frac{\text{рад}}{\text{см}}$. Оскільки початкова фаза першої гармоніки струму $\psi^{(1)} = -15^\circ$, то синусоїда першої гармоніки зсунута на $15^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ} \cdot 15^\circ, \text{рад} \right)$ вправо від початку координат відповідно до обраного масштабу.

Потім будуємо третю гармоніку струму. Частота третьої гармоніки в три рази більше, ніж частота першої гармоніки, тобто для третьої гармоніки масштаб по осі абсцис – $m_{\omega t}^{(3)} = \frac{m_{\omega t}^{(1)}}{3} = \frac{N_1}{3}$. Оскільки початкова фаза третьої гармоніки струму $\psi^{(3)} = 60^\circ$, то синусоїда третьої гармоніки зсунута на 60° вліво відповідно до масштабу $m_{\omega t}^{(3)} = \frac{N_1}{3}$.

Таким чином у масштабі $m_i = N \frac{A}{\text{см}}$ і $m_{\omega t}^{(1)} = N_1 \frac{\text{рад}}{\text{см}}$ будуємо першу гармоніку струму; у $m_i = N \frac{A}{\text{см}}$ і $m_{\omega t}^{(3)} = \frac{N_1}{3}$ будуємо третю гармоніку струму.

Графічно складаємо ординати гармонік струму й отримуємо результуючу форму кривої несинусоїдного струму – рисунок 1.7.

З графіка знаходимо максимальне значення струму $i_{\max} = |OK| = 51,8 \text{ А}$.

Діюче значення несинусоїдного струму

$$I = \sqrt{\frac{I_m^{(1)2}}{2} + \frac{I_m^{(3)2}}{2}} = \sqrt{\frac{40^2}{2} + \frac{14.2^2}{2}} = 42,4 \text{ A.}$$

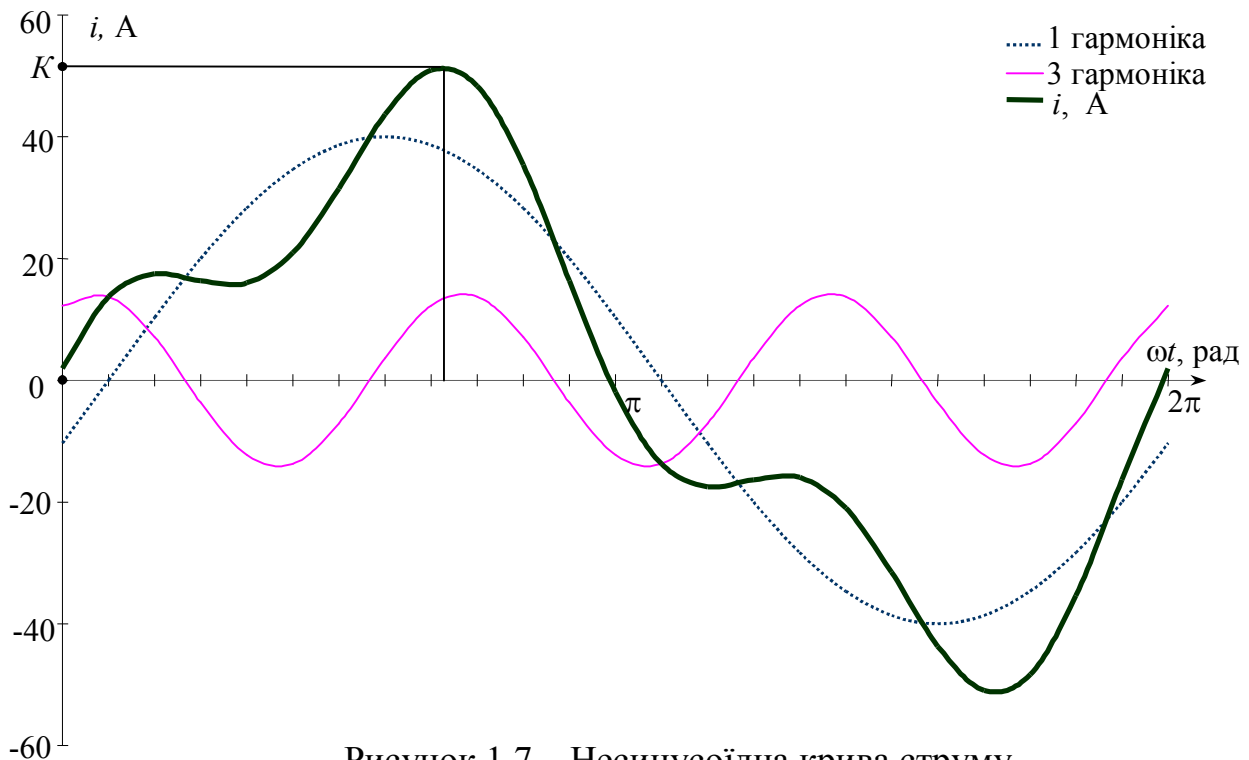


Рисунок 1.7 – Несинусоїдна крива струму

Слід відзначити, що максимальне значення струму може бути знайдено і аналітичним шляхом, що буде розглянуто в наступній задачі.

ЗАДАЧА 2

Побудова несинусоїдної кривої напруги $u(\omega t)$ і визначення діючого й максимального значення несинусоїдної напруги.

Крива напруги задана аналітично у вигляді ряду Фур'є –
 $u(\omega t) = 120 + 40 \cdot \sin \omega t + 14 \cdot \sin 3\omega t$, В.

Побудувати криву напруги $u(\omega t)$, В.

Знайти:

- діюче значення напруги $u(\omega t)$;
- максимальне значення напруги $u(\omega t)$.

Для вирішення задачі необхідно:

- вміти будувати за рядом Фур'є криву несинусоїдної функції, визначати графічно максимальне значення негармонійної функції;
- вміти знаходити аналітично діюче значення несинусоїдної функції.

Розв'язання

1. Графік несинусоїдної напруги $u(\omega t)$ – рисунок 1.8.

2. Діюче значення напруги:

$$U = \sqrt{U^{(0)2} + \frac{U_m^{(1)2}}{2} + \frac{U_m^{(3)2}}{2}} = \sqrt{120^2 + \frac{40^2}{2} + \frac{14^2}{2}} = 123,68 \text{ В.}$$

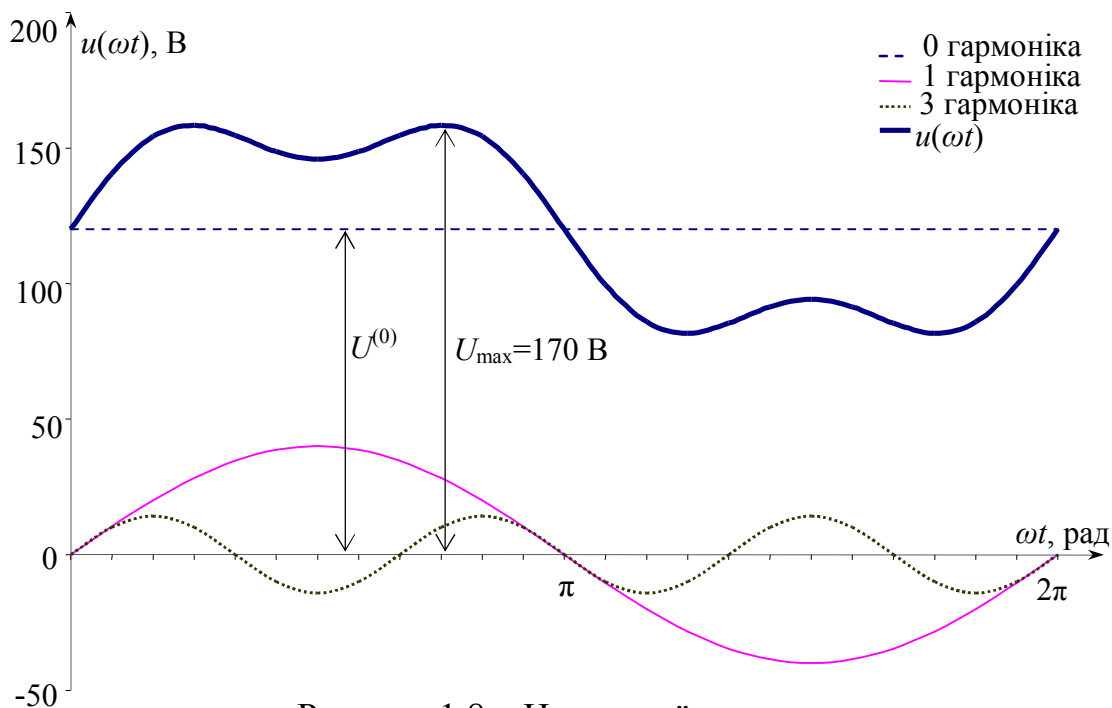


Рисунок 1.8 – Несинусоїдна крива напруги

ЗАДАЧА 3

Визначення коефіцієнтів, що характеризують форму несинусоїдної кривої напруги

Задана крива напруги у вигляді ряду –

Фур'є: $u(\omega t) = 100 \cdot \sin \omega t + 30 \cdot \sin 2\omega t$, В.

Побудувати криву напруги $u(\omega t)$, В.

Визначити:

- діюче значення напруги $u(\omega t)$;
- середнє значення напруги $u(\omega t)$;
- максимальне значення напруги $u(\omega t)$;
- коефіцієнт форми кривої напруги K_Φ ,
- коефіцієнт амплітуди K_A ;
- коефіцієнт викривлення K_U за напругою.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основні величини й коефіцієнти негармонійних струму і напруги;
- вміти визначати аналітично максимальне та середнє значення несинусоїдної функції; будувати за рядом Фур'є криву несинусоїдної функції.

Розв'язання

1. Графік несинусоїдної напруги $u(\omega t)$ – рисунок 1.9

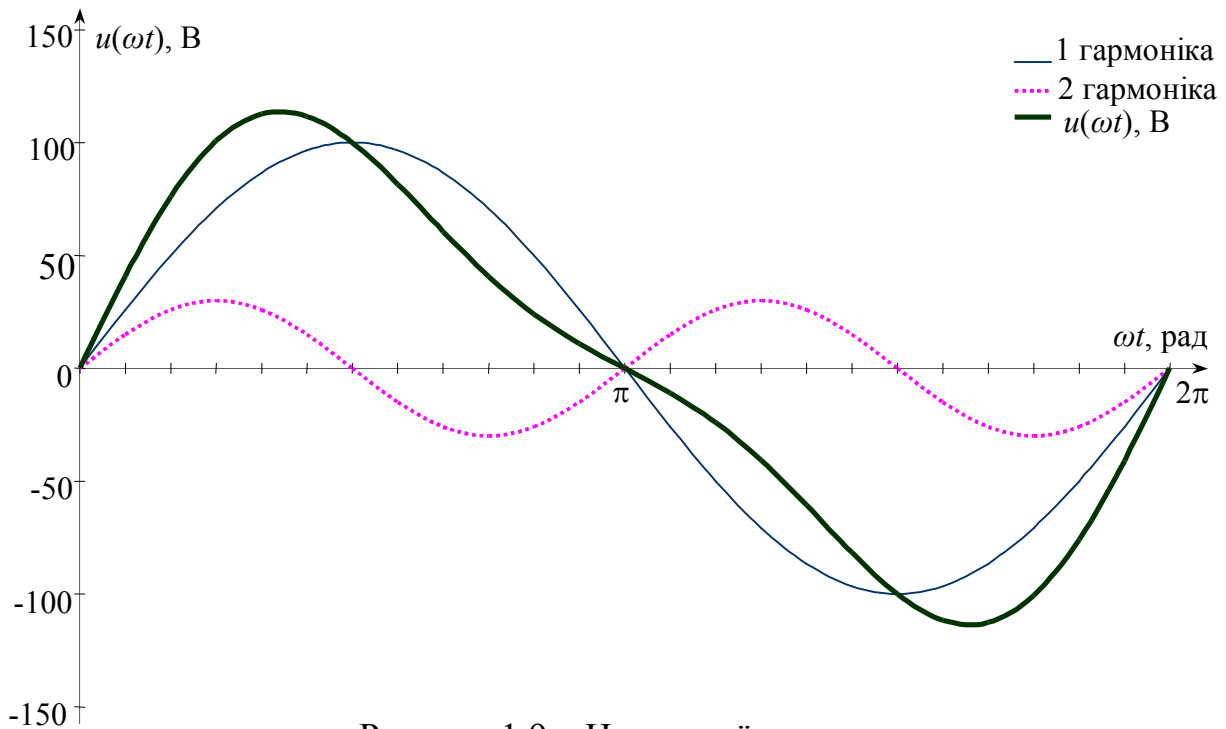


Рисунок 1.9 – Несинусоїдна крива напруги

2. Діюче значення напруги: $U = \sqrt{\frac{U_m^{(1)2}}{2} + \frac{U_m^{(2)2}}{2}} = \sqrt{\frac{100^2}{2} + \frac{30^2}{2}} = 73,8 \text{ В.}$

3. Середнє за модулем значення напруги $u(\omega t)$.

Як бачимо з рисунку 2, крива напруги $u(\omega t)$ має один вид симетрії – відносно початку координат, тому її середнє значення знаходимо за $\frac{1}{2} \cdot T$ (T – період функції за часом):

$$U_{cp} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (100 \cdot \sin \omega t + 30 \cdot \sin 2\omega t) d\omega t = \frac{1}{\pi} \cdot \left[100 \cdot (-\cos \omega t) \Big|_0^{\pi} + 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2\omega t) \Big|_0^{\pi} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[100 \cdot (-1) \cdot (-1 - 1) + 60 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1 - 1) \right] = \frac{2 \cdot 100}{\pi} = 63,7 \text{ В.}$$

4. Максимальне значення напруги $u(\omega t)$.

Беремо першу похідну функції $u(\omega t)$, прирівнюємо її до нуля та знаходимо значення ωt , при якому значення функції $u(\omega t)$ матиме екстремум:

$$\frac{du}{d\omega t} = (100 \cdot \cos \omega t + 30 \cdot 2 \cdot \cos 2\omega t) = 0 \Rightarrow 100 \cdot \cos \omega t + 60 \cdot \cos 2\omega t = 0.$$

Використаємо тригонометричну формулу $\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \Rightarrow$

$$\cos 2\omega t = 2 \cdot \cos^2 \omega t - 1 \Rightarrow 100 \cdot \cos \omega t + 60 \cdot (2 \cdot \cos^2 \omega t - 1) = 0.$$

Таким чином, отримуємо квадратне рівняння відносно $x = \cos \omega t$:

$$6 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 3 = 0. \text{ Корені цього рівняння: } x_1 = 0,404; x_2 = -1,237.$$

Враховуємо, що $x = \cos \omega t$, тому відкидаємо другий корінь.

$$\cos \omega t = 0,404 \Rightarrow \omega t = \arccos 0,404 = \frac{\pi}{180} \cdot 66,17 = 1,1549 \text{ рад.}$$

Підставимо знайдене значення ωt в рівняння функції $u(\omega t)$, отримаємо:

$$U_{\max} = 100 \cdot \sin 1,1549 + 30 \cdot \sin(2 \cdot 1,1549) = 113,65 \text{ В.}$$

5. Коефіцієнт форми кривої напруги: $K_{\Phi} = \frac{U}{U_{cp}} = \frac{73,8}{63,7} = 1,16.$

6. Коефіцієнт амплітуди: $K_A = \frac{U_{\max}}{U} = \frac{113,65}{73,8} = 1,54.$

7. Коефіцієнт викривлення за напругою: $K_U = \frac{U^{(1)}}{U} = \frac{100/\sqrt{2}}{73,8} = 0,96.$

ЗАДАЧА 4

Представлення несинусоїдної кривої EPC геометрично правильної форми у вигляді ряду Фур'є та складання схеми заміщення джерела

Крива напруги $e(\omega t)$ задана графічно на рисунку 1.10 ($E_m = 6 \text{ В}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$).

Представити криву напруги $e(\omega t)$ у вигляді ряду Фур'є, що містить три перших члени ряду.

Скласти схему заміщення джерела.

Визначити діюче значення напруги $e(\omega t)$.

Для вирішення задачі треба скористатися довідковою літературою, в якій представлено розкладання в ряду Фур'є кривих геометрично правильної форми.

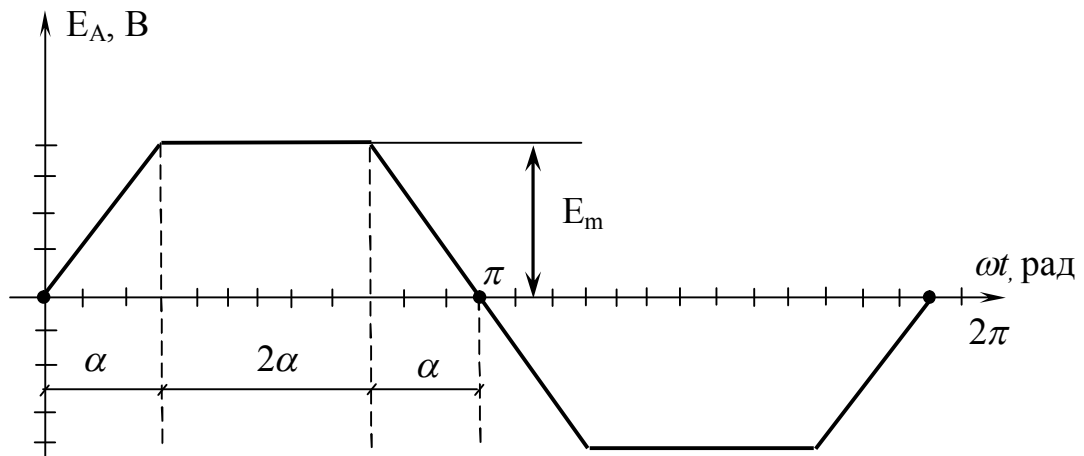


Рисунок 1.10 – Несинусоїдна крива EPC

Розв'язання

Крива $e(\omega t)$ має трапецієподібну форму, тому її ряд Фур'є має вигляд:

$$e(\omega t) = \frac{4 \cdot E_m}{\alpha \cdot \pi} \cdot \left[\sin \alpha \cdot \sin(\omega t) + \frac{1}{9} \cdot \sin(3\alpha) \cdot \sin(3\omega t) + \frac{1}{25} \cdot \sin(5\alpha) \cdot \sin(5\omega t) + \dots \right] \text{ В.}$$

Після підстановки значень $E_m = 6 \text{ В}$ і $\alpha = \frac{\pi}{4}$ отримуємо:

$$\begin{aligned} e(\omega t) &= e^{(1)} + e^{(3)} + e^{(5)} = \\ &= \frac{4 \cdot 6}{\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \pi} \cdot \left[\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin(\omega t) + \frac{1}{9} \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(3\omega t) + \frac{1}{25} \cdot \sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(5\omega t) \right] = \\ &= 6,878 \cdot \sin(\omega t) + 0,540 \cdot \sin(3\omega t) - 0,194 \cdot \sin(5\omega t) = \\ &= 6,878 \cdot \sin(\omega t) + 0,540 \cdot \sin(3\omega t) + 0,194 \cdot \sin(5\omega t + 180^\circ), \text{ В.} \end{aligned}$$

Схема заміщення джерела $e(\omega t)$ – рисунок 1.11.

Діюче значення:

$$E = \sqrt{\frac{E_m^{(1)2}}{2} + \frac{E_m^{(3)2}}{2} + \frac{E_m^{(5)2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{6,878^2}{2} + \frac{0,540^2}{2} + \frac{0,194^2}{2}} = 4,88 \text{ В.}$$

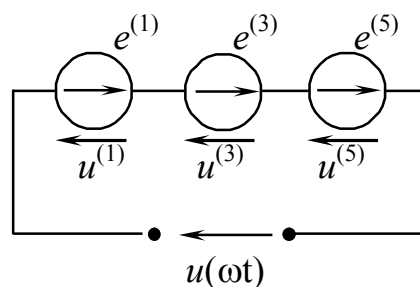


Рисунок 1.11 – Схема заміщення джерела $e(\omega t)$

ЗАДАЧА 5

Представлення несинусоїдної кривої джерела струму, що задана графічно у вигляді ряду Фур'є і складання схеми заміщення

Крива джерела струму $i(\omega t)$ задана графічно – рисунок 1.12.

Представити криву джерела струму $i(\omega t)$ у вигляді ряду Фур'є, що містить три перших члени розкладання.

Скласти схему заміщення джерела струму.

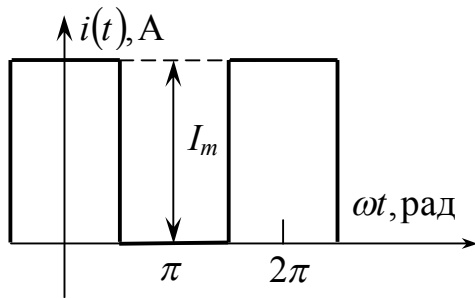


Рисунок 1.12 –
Крива джерела
струму $i(\omega t)$

Визначити діюче значення напруги $e(\omega t)$.

Для вирішення задачі необхідно вміти привести задану криву до стандартного вигляду кривої геометрично правильної форми.

Розв'язання

Задана крива (рис. 1.12) має постійну складову $\frac{I_m}{2}$ і початок її зсунуто відносно

осі ординат на чверть періоду $\pi/4$. Для приведення заданої кривої до стандартного вигляду $f(\omega t) = \frac{4 \cdot I_m}{\pi} \cdot \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]$ (рис. 1.13) треба ось абсцис (ωt) підняти вгору на величину $I_m/2$ й зсунути криву вліво на чвертьперіоду $\pi/4$.

Таким чином, ряд Фур'є для кривої на рисунку 1.12, має вигляд (маємо на увазі, що $T = \frac{2\pi}{\omega}$):

$$\begin{aligned}
 i(\omega t) &= \frac{I_m}{2} + \frac{4 \cdot I_m/2}{\pi} \cdot \left[\sin\left(\omega \cdot \left(t + \frac{T}{4}\right)\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3\omega \cdot \left(t + \frac{T}{4}\right)\right) + \frac{1}{5} \sin\left(5\omega \cdot \left(t + \frac{T}{4}\right)\right) \right] = \\
 &= \frac{I_m}{2} + \frac{2 \cdot I_m}{\pi} \cdot \left[\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3\omega t + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(5\omega t + \frac{5 \cdot \pi}{2}\right) \right] = \\
 &= \frac{I_m}{2} + \frac{2 \cdot I_m}{\pi} \cdot \left[\cos \omega t - \frac{1}{3} \cdot \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cdot \cos 5\omega t \right] = \\
 &= 60 + 76,39 \cdot \cos \omega t - 25,46 \cdot \cos 3\omega t + 15,28 \cdot \cos 5\omega t, \text{ А.}
 \end{aligned}$$

Схема заміщення подана на рисунку 1.14

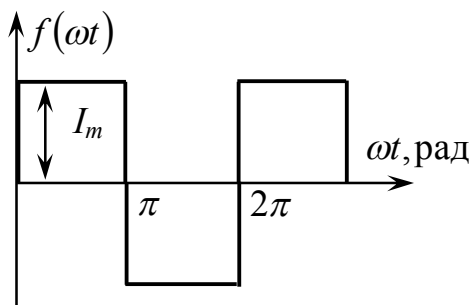


Рисунок 1.13 – Стандартний вигляд кривої прямокутної форми

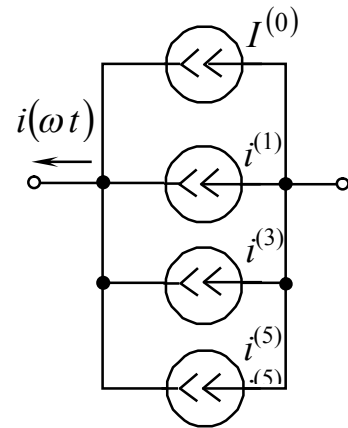


Рисунок 1.14 – Схема заміщення джерела струму $i(\omega t)$

ЗАДАЧА 6

Графоаналітичне розкладання в ряд Фур'є несинусоїдної періодичної кривої геометрично неправильної форми, що задана графічно

Задана крива напруги $u(\omega t)$ – рисунок 1.15.

Розкласти криву напруги в ряд Фур'є, обмежувачись трьома першими членами ряду.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати порядок графоаналітичного розкладання в ряд Фур'є;
- вміти враховувати види симетрії несинусоїдної функції, що пов'язано з гармонічним складом ряду Фур'є.

Розв'язання

Слід врахувати, що крива має два види симетрії (відносно початку координат та осі абсцис), отже можна обмежитися розкладанням чверті періоду. Такий ряд Фур'є повинен містити тільки непарні синусні складові, а саме:

$$u(\omega t) = U_m^{(1)} \cdot \sin \omega t + U_m^{(3)} \cdot \sin 3\omega t + U_m^{(5)} \cdot \sin 5\omega t + \dots$$

Розділимо чверть періоду функції $u(\omega t)$ на шість рівних частин і виміряємо ординати функції $u(\omega t)$ посередині кожної ділянки. При розкладанні кривої $u(\omega t)$ в ряд Фур'є доцільно використовувати відповідні комп'ютерні програми (MathCad Professional, MS Excel та ін.).

Результати розкладання наведені в таблиці 1.2 (обмежуємося трьома членами ряду).

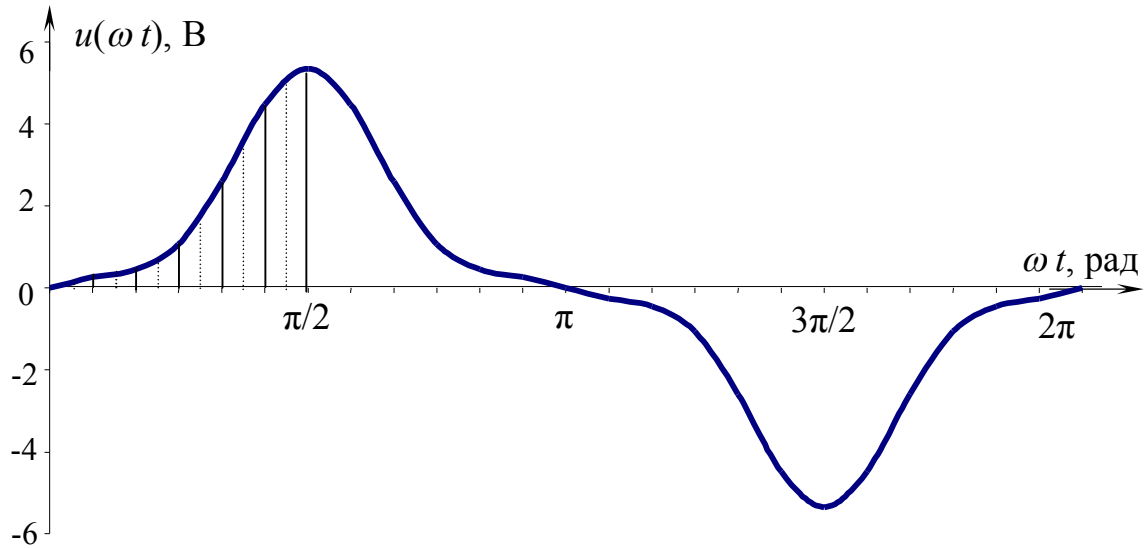


Рисунок 1.15 – Крива напруги $u(\omega t)$

Таблиця 1.2 – Розкладання в ряд Фур'є функції $u(\omega t)$

P	$u(\omega t)$	$\kappa=1$			$\kappa=3$			$\kappa=5$		
		ωt	$\sin \omega t$	$u \cdot \sin \omega t$	$3\omega t$	$\sin 3\omega t$	$u \cdot \sin 3\omega t$	$5 \cdot \omega t$	$\sin \cdot 5\omega t$	$u \cdot \sin 5\omega t$
1	0,2	7,5	0,131	0,026	22,5	0,383	0,077	37,5	0,609	0,122
2	0,4	22,5	0,383	0,153	67,5	0,924	0,370	112,5	0,924	0,370
3	0,7	37,5	0,609	0,426	112,5	0,924	0,647	187,5	-0,131	-0,091
4	1,3	52,5	0,793	1,031	157,5	0,383	0,498	262,5	-0,991	-1,289
5	4,2	67,5	0,924	3,880	202,5	-0,383	-1,607	337,5	-0,383	-1,607
6	4,8	82,5	0,991	4,759	247,5	-0,924	-4,434	412,5	0,793	3,808
сума		$\sum_1^6 1 = 10,276$			$\sum_1^6 3 = -4,451$			$\sum_1^6 5 = 1,312$		

Знаходимо $U_m^{(1)}$, $U_m^{(3)}$; $U_m^{(5)}$.

Амплітуди дорівнюватимуть, В: $U_m^{(1)} = \frac{2 \cdot 4}{24} \cdot \sum_1^6 1 = \frac{1}{3} \cdot 10,276 = 3,425$;

$$U_m^{(3)} = \frac{2 \cdot 4}{24} \cdot \sum_1^6 3 = \frac{1}{3} \cdot (-4,451) = -1,484; \quad U_m^{(5)} = \frac{2 \cdot 4}{24} \cdot \sum_1^6 5 = \frac{1}{3} \cdot 1,312 = 0,437.$$

Таким чином, ряд Фур'є має вигляд

$$\underline{u(\omega t) = 3,425 \cdot \sin \omega t - 1,484 \cdot \sin 3\omega t + 0,437 \cdot \sin 5\omega t, \text{ В.}}$$

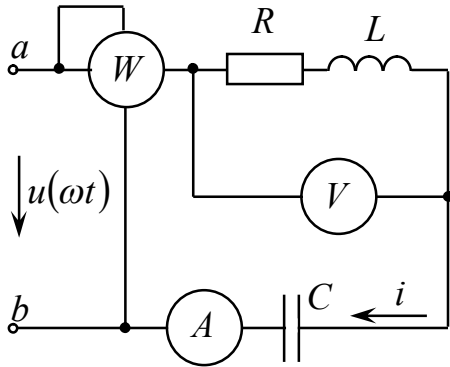
ЗАДАЧА 7

Розрахунок нерозгалуженого $R-L-C$ кола, що живиться несинусоїдним джерелом напруги

Задана крива напруги у вигляді ряду Фур'є:

$$u(\omega t) = 180 \cdot \sin(\omega t - 30^\circ) + 120 \cdot \sin(3\omega t) + 80 \cdot \sin(5\omega t + 30^\circ), \text{ В.}$$

Параметри $R-L-C$ кола (рис. 1.16):



$$R = 6 \text{ Ом}, X_L = \omega \cdot L = 2 \text{ Ом}, X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = 18 \text{ Ом.}$$

Визначити:

- миттєве значення струму $i(\omega t)$;
- миттєве значення напруги u_{ab} ;
- показання приладів електродинамічної системи;
- значення повної, реактивної і потужності викривлення;
- коефіцієнт викривлення K_B за потужністю.

Рисунок 1.16 – Схема досліджуваного кола

Для вирішення задачі необхідно:

- знати порядок розрахунку електричних кіл з періодичними несинусоїдними джерелами енергії;
- вміти визначати потужності в електричних колах з періодичними несинусоїдними джерелами енергії.

Розв'язання

1. Комплексні амплітуди напруги кожної гармоніки окремо, В.

$$\underline{U}_m^{(1)} = 180 \angle -30^\circ, \quad \underline{U}_m^{(3)} = 120, \quad \underline{U}_m^{(5)} = 80 \angle 30^\circ.$$

2. Комплексні опори кола й опори ділянки « ab » для кожної гармоніки, Ом:

$$\underline{Z}^{(1)} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 6 + j \cdot (2 - 18) = 6 - j \cdot 16 = 17 \angle -69,4^\circ,$$

$$\underline{Z}^{(3)} = R + j \cdot \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C} \right) = 6 + j \left(3 \cdot 2 - \frac{18}{3} \right) = 6 + j \cdot (6 - 6) = 6,$$

$$\underline{Z}^{(5)} = R + j \left(5\omega L - \frac{1}{5\omega C} \right) = 6 + j \cdot \left(5 \cdot 2 - \frac{18}{5} \right) = 6 + j \cdot 6,4 = 8,8 \angle 46,8^\circ,$$

$$\underline{Z}_{ab}^{(1)} = R + j \cdot \omega \cdot L = 6 + j \cdot 2 = 6,3 \angle 18,4^\circ, \quad \underline{Z}_{ab}^{(3)} = R + j \cdot 3 \cdot \omega L = 6 + j \cdot 3 \cdot 2 = 8,5 \angle 45^\circ,$$

$$\underline{Z}_{ab}^{(5)} = R + j \cdot 5 \cdot \omega L = 6 + j \cdot 5 \cdot 2 = 11,7 \angle 59^\circ.$$

3. Комплекси амплітудних значень струму для окремих гармонік, А:

$$\underline{I}_m^{(1)} = \frac{U_m^{(1)}}{Z^{(1)}} = \frac{180 \angle -30^\circ}{17 \angle -69,4^\circ} = 10,6 \angle 39,4^\circ, \quad \underline{I}_m^{(3)} = \frac{U_m^{(3)}}{Z^{(3)}} = \frac{120}{6} = 20,$$

$$\underline{I}_m^{(5)} = \frac{U_m^{(5)}}{Z^{(5)}} = \frac{80 \angle 30^\circ}{8,8 \angle 46,8^\circ} = 9,1 \angle -16,8^\circ.$$

4. Миттєве значення струму кола для окремих гармонік, А:

$$i^{(1)} = 10,6 \cdot \sin(\omega t + 39,4^\circ); \quad i^{(3)} = 20 \cdot \sin(3\omega t); \quad i^{(5)} = 9,1 \cdot \sin(5\omega t - 16,8^\circ).$$

За методом накладання:

$$i(\omega t) = i^{(1)} + i^{(3)} + i^{(5)} = \left[10,6 \sin(\omega t + 39,4^\circ) + 20 \sin(3\omega t) + 9,1 \sin(5\omega t - 16,8^\circ) \right] \text{ А.}$$

5. Комплекси амплітудних значень напруги на ділянці «ab» для кожної гармоніки, В: $\underline{U}_{mab}^{(1)} = \underline{I}_m^{(1)} Z_{ab}^{(1)} = 10,6 \angle 39,4^\circ \cdot 6,3 \angle 18,4^\circ = 66,8 \angle 57,8^\circ$;

$$\underline{U}_{mab}^{(3)} = \underline{I}_m^{(3)} Z_{ab}^{(3)} = ; \underline{U}_{mab}^{(3)} = \underline{I}_m^{(3)} Z_{ab}^{(3)} = 20 \cdot 8,5 \angle 45^\circ = 170 \angle 45^\circ ;$$

$$\underline{U}_{mab}^{(5)} = \underline{I}_m^{(5)} Z_{ab}^{(5)} = 9,1 \angle -16,8^\circ \cdot 11,7 \angle 59^\circ = 106,5 \angle 42,2^\circ .$$

6. Миттєве значення напруги на ділянці кола «ab»

Миттєві значення напруги для окремих гармонік, В:

$$u_{ab}^{(1)} = 66,8 \cdot \sin(\omega t + 57,8^\circ); \quad u_{ab}^{(3)} = 170 \cdot \sin(3\omega t + 45^\circ); \quad u_{ab}^{(5)} = 106,5 \cdot \sin(5\omega t + 42,2^\circ).$$

За методом накладання:

$$u_{ab}(\omega t) = u_{ab}^{(1)} + u_{ab}^{(3)} + u_{ab}^{(5)} = 66,8 \cdot \sin(\omega t + 57,8^\circ) + 170 \cdot \sin(3\omega t + 45^\circ) + 106,5 \cdot \sin(5\omega t + 42,2^\circ), \text{ В.}$$

7. Показання приладів електродинамічної системи дорівнює діючим значенням відповідних величин:

$$I = \sqrt{\frac{I_m^{(1)2}}{2} + \frac{I_m^{(3)2}}{2} + \frac{I_m^{(5)2}}{2}} = \sqrt{\frac{10,6^2}{2} + \frac{20^2}{2} + \frac{9,1^2}{2}} = 17,2 \text{ А.}$$

$$U_{ab} = \sqrt{\frac{U_{mab}^{(1)2}}{2} + \frac{U_{mab}^{(3)2}}{2} + \frac{U_{mab}^{(5)2}}{2}} = \sqrt{\frac{66,8^2}{2} + \frac{170^2}{2} + \frac{106,5^2}{2}} = 149,5 \text{ В.}$$

Показання ватметра відповідає активній потужності всього кола:

$$P = I^2 \cdot R = 17,2^2 \cdot 6 = 1775 \text{ Вт.}$$

8. Повна, реактивна і потужність викривлення кола.

Повна потужність – $S = U \cdot I$,

де U – діюче значення напруги на вході кола:

$$U = \sqrt{\frac{U_m^{(1)2}}{2} + \frac{U_m^{(3)2}}{2} + \frac{U_m^{(5)2}}{2}} = \sqrt{\frac{180^2}{2} + \frac{120^2}{2} + \frac{80^2}{2}} = 163,1 \text{ В.}$$

$$S = U \cdot I = 163,1 \cdot 17,2 = 2805,3 \text{ ВА.}$$

Реактивна потужність, ВАр:

$$Q = Q^{(1)} + Q^{(3)} + Q^{(5)} = \left(\frac{I_m^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + \left(\frac{I_m^{(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right) + \left(\frac{I_m^{(5)}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \left(5\omega L - \frac{1}{5\omega C}\right) = \frac{10,6^2}{2} \cdot (-16) + \frac{20^2}{2} \cdot 0 + \frac{9,1^2}{2} \cdot 6,4 = -633,9.$$

Потужність викривлення:

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{2805,5^2 - 1775^2 - 633,9^2} = 2078,1 \text{ ВА.}$$

9. Коефіцієнт викривлення за потужністю:

$$K_B = \frac{T}{S} = \frac{2078,1}{2805,5} = 0,74.$$

ЗАДАЧА 8

Розрахунок розгалуженого R–L–C кола, що живиться несинусоїдним джерелом напруги

Задана несинусоїдна напруга у вигляді ряду Фур'є:

$$u(\omega t) = 30 + 15 \cdot \sin \omega t + 20 \cdot \sin 3\omega t, \text{ В.}$$

Параметри кола (рис. 1.17) дорівнюють: $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 0,5 \text{ Ом}$,

$$X_L^{(1)} = 1 \text{ Ом}, X_C^{(1)} = 9 \text{ Ом.}$$

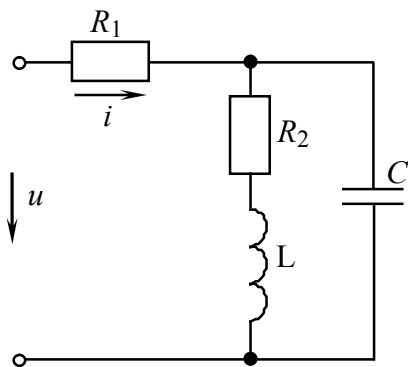


Рисунок 1.17 –
Схема
досліджуваного кола

Визначити:

- миттєві значення струму кола $i(\omega t)$;
- діючі значення вхідної напруги $u(\omega t)$ і струму $i_1(\omega t)$;
- активну, реактивну і повну потужності кола.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати порядок розрахунку складних електричних кіл, де діють періодичні несинусоїдні джерела енергії;
- вміти визначати потужності в електричних колах з періодичними несинусоїдними джерелами енергії.

Розв'язання

1. Визначаємо струм нульової гармоніки (рис. 1.18):

$$X_L^{(0)} = 0 \text{ Ом}; X_C^{(0)} = \infty \text{ Ом};$$

$$I^{(0)} = \frac{U^{(0)}}{R_1 + R_2} = \frac{30}{1,5} = 20 \text{ А.}$$

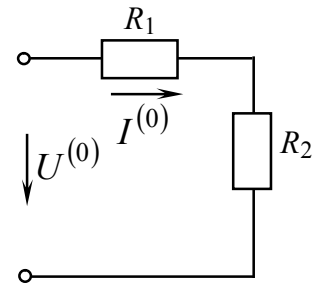


Рисунок 1.18
– Схема кола
для нульової
гармоніки

2. Розрахунок першої гармоніки.

Комплексний опір кола для першої гармоніки:

$$\begin{aligned} \underline{Z}^{(1)} &= R_1 + \frac{(R_2 + j \cdot X_L^{(1)}) \cdot (-j \cdot X_C^{(1)})}{R_2 + j \cdot X_L^{(1)} - j \cdot X_C^{(1)}} = 1 + \frac{(0,5 + j \cdot 1) \cdot (-j \cdot 9)}{0,5 + j \cdot (1 - 9)} = \\ &= 1 + \frac{1,118 \angle 63,43^\circ \cdot 9 \angle -90^\circ}{8,016 \angle -86,42^\circ} = 1 + 1,255 \angle 59,85^\circ = 1 + 0,63 + j \cdot 1,085 = \\ &= 1,63 + j \cdot 1,085 = 1,96 \angle 33,65^\circ \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Комплекс і миттєве значення струму першої гармоніки, А:

$$\underline{I}_m^{(1)} = \frac{U_m^{(1)}}{\underline{Z}^{(1)}} = \frac{15 \angle 0^\circ}{1,96 \angle 33,65^\circ} = 7,65 \angle -33,65^\circ \Rightarrow i^{(1)} = 7,65 \cdot \sin(\omega t - 33,65^\circ).$$

3. Розрахунок третьої гармоніки.

Комплексний опір кола для третьої гармоніки:

$$\begin{aligned} \underline{Z}^{(3)} &= R_1 + \frac{(R_2 + j \cdot X_L^{(3)}) \cdot (-j \cdot X_C^{(3)})}{R_2 + j \cdot X_L^{(3)} - j \cdot X_C^{(3)}} = 1 + \frac{(0,5 + j \cdot 3) \cdot (-j \cdot 3)}{0,5 + j \cdot \left(1 \cdot 3 - \frac{9}{3}\right)} = \\ &= 1 + \frac{3,04 \angle 80,54^\circ \cdot 3 \angle -90^\circ}{0,5} = 1 + 18,24 \angle -9,46^\circ = 1 + 17,99 - j \cdot 3 = \\ &= 18,99 - j \cdot 3 = 19,22 \angle -8,98^\circ \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Комплекс і миттєве значення струму третьої гармоніки, А:

$$\underline{I}_m^{(3)} = \frac{U_m^{(3)}}{\underline{Z}^{(3)}} = \frac{20 \angle 0^\circ}{19,22 \angle -8,98^\circ} = 1,0405 \angle 8,98^\circ \Rightarrow i^{(3)} = 1,0405 \cdot \sin(3 \cdot \omega t - 8,98^\circ).$$

4. Ряд Фур'є для струму $i(\omega t)$:

$$i(\omega t) = I^{(0)} + i^{(1)} + i^{(3)} = 20 + 7,65 \cdot \sin(\omega t - 33,65^\circ) + 1,04 \cdot \sin(3 \cdot \omega t + 8,98^\circ), \text{ А}$$

5. Діючі значення напруги і струму:

$$U = \sqrt{U^{(0)2} + U^{(1)2} + U^{(3)2}} = \sqrt{30^2 + \frac{15^2}{2} + \frac{20^2}{2}} = 34,8 \text{ В.}$$

$$I = \sqrt{I^{(0)2} + \frac{1}{2} \cdot (I_m^{(1)2} + I_m^{(3)2})} = \sqrt{20^2 + \frac{7,65^2}{2} + \frac{1,04^2}{2}} = 20,73 \text{ А.}$$

6. Повна, активна, реактивна і потужність викривлення.

Повна потужність – $S = U \cdot I = 34,8 \cdot 20,73 = 721,46 \text{ ВА.}$

Активна потужність:

$$P = U^{(0)} \cdot I^{(0)} + \frac{1}{2} \cdot (U_m^{(1)} \cdot I_m^{(1)} \cdot \cos \varphi^{(1)} + U_m^{(3)} \cdot I_m^{(3)} \cdot \cos \varphi^{(3)}) =$$

$$= 30 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot (15 \cdot 7,65 \cdot \cos 33,65^\circ + 20 \cdot 1,04 \cdot \cos(-8,98^\circ)) = 658 \text{ Вт.}$$

$$Q = \frac{1}{2} \cdot (U_m^{(1)} \cdot I_m^{(1)} \cdot \sin \varphi^{(1)} + U_m^{(3)} \cdot I_m^{(3)} \cdot \sin \varphi^{(3)}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (15 \cdot 7,6 \cdot \sin 33,65^\circ + 20 \cdot 1,04 \cdot \sin(-8,98^\circ)) = 29,96 \text{ ВАр.}$$

Потужність викривлення:

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{721,46^2 - 658^2 - 29,96^2} = 294,3 \text{ ВА.}$$

Коефіцієнт викривлення потужності:

$$K_T = \frac{T}{S} = \frac{294,3}{721,46} = 0,408.$$

1.3 Несинусоїдні струми у трифазних колах

EPC кожної фази трифазного трансформатора або трифазного генератора часто виявляється несинусоїдною. Кожна EPC (e_A, e_B, e_C) повторює форму іншої із зсувом на одну третину періоду ($T/3$) і може бути розкладена на окремі гармоніки. Постійна складова звичайно відсутня.

Нехай k – номер гармоніки EPC фази A : $e_A^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin(k\omega t + \varphi^{(k)})$. (1.28)

Оскільки EPC фази B відстає від EPC фази A на $T/3$, а EPC фази C випереджає EPC фази A на $T/3$, то гармоніки з номером k EPC фаз B і C відповідно: $e_B^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k\omega\left(t - \frac{T}{3}\right) + \varphi^{(k)}\right) = E_{km} \cdot \sin\left(k\omega t - \frac{2\pi}{3} \cdot k + \varphi^{(k)}\right)$ (1.29)

$$e_C^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k\omega t + \frac{2\pi}{3} \cdot k + \varphi^{(k)}\right); \left(k\omega \frac{T}{3} = k \cdot \frac{2\pi \cdot T}{T \cdot 3} = k \cdot \frac{2\pi}{3} = 120^\circ \cdot k\right). \quad (1.30)$$

Якщо $k=1, 4, 7, 10, \dots$ то гармоніка з номером k EPC фази B відстає на 120° від гармоніки EPC фази A , а EPC фази C випереджає на 120° гармоніку EPC фази A . Отже ці гармоніки утворюють систему прямої послідовності фаз.

Якщо $k=2, 5, 8, 11, \dots$ то гармоніка з номером k EPC фази B випереджає на 120° гармоніку EPC фази A , а EPC фази C відстає на 120° від гармоніки EPC фази A . Отже, ці гармоніки утворюють систему зворотної послідовності фаз.

Гармоніки, які кратні трьом ($k=3, 6, 9, \dots$), утворюють систему нульової послідовності, тобто ці гармоніки EPC усіх трьох фаз співпадають за фазою ($3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$): $e_A^{(3k)} = e_B^{(3k)} = e_C^{(3k)} = E_m^{(3k)} \cdot \sin(3k\omega t + \varphi^{(3k)})$. (1.31)

Векторні діаграми для прямої, зворотної і нульової послідовності чергування фаз – рисунок 1.19

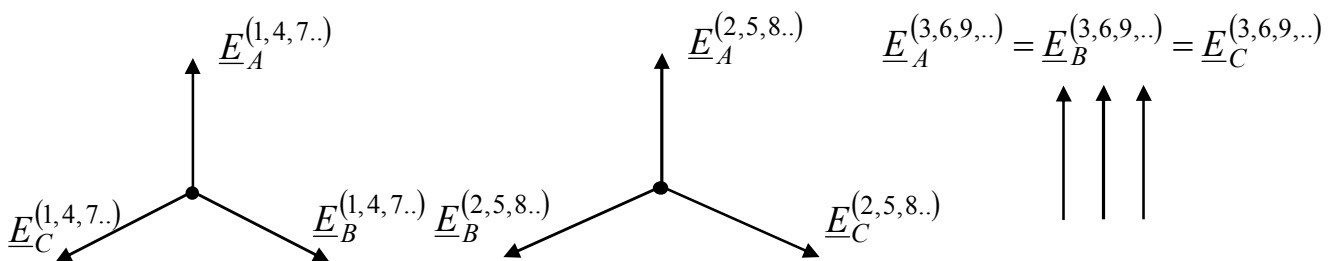


Рисунок 1.19 – Пряма, зворотна і нульова послідовності

Розглянемо деякі особливості роботи трифазних систем, викликані гармоніками, що кратні трьом.

1. Нехай обмотки трифазного генератора з'єднанні відкритим трикутником (рис. 1.20). Якщо у фазних EPC присутні гармоніки, кратні трьом, то на за тискачах « $n - B$ » буде напруга, діюче й миттєве значення якої

$$U_{nB} = 3 \cdot \sqrt{\frac{E_m^{(3)^2}}{2} + \frac{E_m^{(6)^2}}{2} + \frac{E_m^{(9)^2}}{2} \dots}, \quad (1.32)$$

$$u_{nB} = 3 \cdot E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t + \varphi^{(3)}) + 3 \cdot E_m^{(6)} \cdot \sin(6 \cdot \omega t + \varphi^{(6)}) + \dots \quad (1.33)$$

При з'єднанні обмоток генератора в закритий трикутник (рисунок 1.21) них протікатимуть струми кратних трьом гармонік, (за годинниковою

стрілкою):
$$\underline{I}^{(3k)} = \frac{3 \cdot \underline{E}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Z}_0^{(3k)}} = \frac{\underline{E}^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)}}, \quad (1.34)$$

де $\underline{Z}_0^{(3k)}$ – опір обмотки кожної фази для гармоніки, кратної трьом,
 $\underline{E}^{(3k)}$ – комплекс діючого значення гармоніки фазної EPC , кратної трьом.

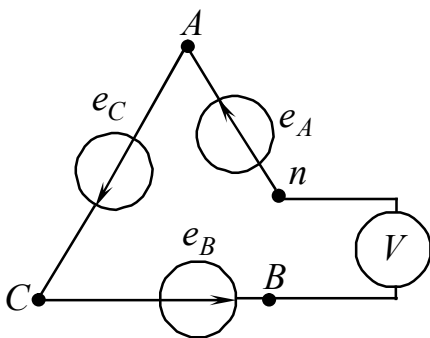


Рисунок 1.20 – Відкритий трикутник

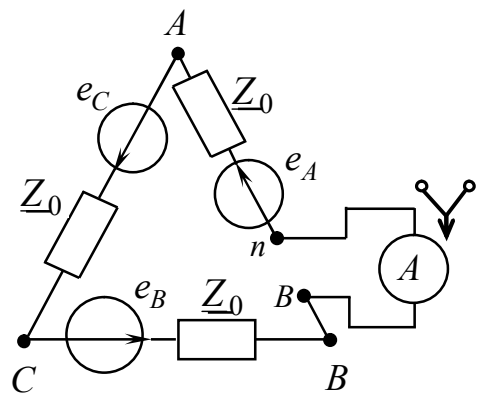


Рисунок 1.21 – Закритий трикутник

Таким чином, діюче значення струму $I = \sqrt{I^{(3)^2} + I^{(6)^2} + I^{(9)^2} + \dots}$ (1.34)

3. Незалежно від того зіркою чи трикутником з'єднанні обмотки генератора або трансформатора, в лінійній напрузі відсутні гармоніки кратні трьом.

Якщо обмотки з'єднанні зіркою:

$$\underline{U}_{AB}^{(3k)} = \underline{E}_A^{(3k)} - \underline{E}_B^{(3k)} = 0 \text{ (аналогічно для } \underline{U}_{BC}^{(3k)} \text{ і } \underline{U}_{CA}^{(3k)} \text{)}.$$

Якщо обмотки з'єднанні трикутником (рис. 2.18):

$$\underline{U}_{AB}^{(3k)} = \underline{E}^{(3k)} - \underline{I}^{(3k)} \cdot \underline{Z}_0^{(3k)} = \underline{E}^{(3k)} - \frac{3 \cdot \underline{E}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Z}_0^{(3k)}} \cdot \underline{Z}_0^{(3k)} = 0.$$

Особливості розрахунку трифазних кіл «зірка – зірка» без нульового про- воду із останнім, що викликані гармоніками кратними трьом розглянуть в [1].

ЗАДАЧА 1

Розрахунок трифазного кола «зірка-зірка» при симетричному навантаженні з опором в нульовому проводі, що живиться негармонійними джерелами напруги

Задана крива напруги фаза «А» у вигляді ряду Фур'є:

$$e_A(\omega t) = 75 \cdot \sin(\omega t + 30^\circ) - 35 \cdot \sin(3\omega t - 30^\circ) + 25 \cdot \sin(5\omega t), \text{ В.}$$

Комплексні опори фаз і нульового проводу для першої гармоніки дорівнюють: $\underline{Z}_\phi^{(1)} = (5 - j \cdot 8), \text{ Ом}; \underline{Z}_0^{(1)} = 8,94 \angle 63,4^\circ \text{ Ом.}$

Розрахункова схема – рисунок 1.22.

Визначити:

- миттєві значення лінійних напруг;
- миттєві значення лінійних (фазних) струмів;
- миттєве значення струму у нульовому проводі;
- показання приладів електромагнітної системи.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати методику розрахунку трифазних кіл, що живляться негармонійними джерелами напруги
- вміти визначати діючі значення несинусоїдних періодичних струмів і напруг.

Розв'язання

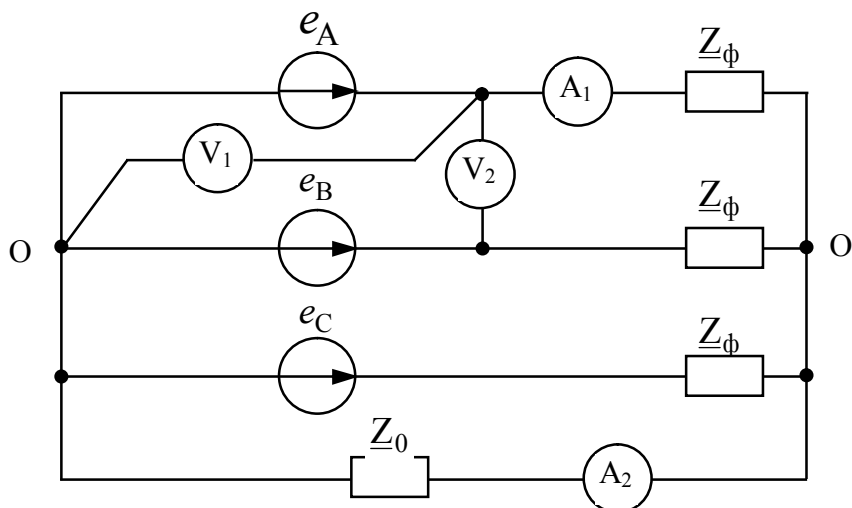


Рисунок 1.22 – Схема досліджуваного кола

1. Комплекси амплітудних значень фазних ЕРС для всіх гармонік, В:

$$\underline{E}_{mA}^{(1)} = 75 \angle 30^\circ, \underline{E}_{mB}^{(1)} = 75 \angle (30^\circ - 120^\circ) = 75 \angle -90^\circ, \underline{E}_{mC}^{(1)} = 75 \angle (30^\circ + 120^\circ) = 75 \angle 150^\circ.$$

$$\underline{E}_{mA}^{(3)} = \underline{E}_{mB}^{(3)} = \underline{E}_{mC}^{(3)} = -35 \angle -30^\circ = 35 \angle 150^\circ.$$

$$\underline{E}_{mA}^{(5)} = 25 \angle 0^\circ, \underline{E}_{mB}^{(5)} = 25 \angle (0^\circ + 120^\circ) = 25 \angle 120^\circ, \underline{E}_{mC}^{(5)} = 25 \angle (0^\circ - 120^\circ) = 25 \angle -120^\circ.$$

2. Комплекси амплітудних значень лінійних напруг для усіх гармонік, В:

$$\underline{U}_{mAB}^{(1)} = \underline{E}_{mA}^{(1)} \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 75 \angle 30^\circ \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 129,9 \angle 60^\circ,$$

$$\underline{U}_{mBC}^{(1)} = \underline{E}_{mB}^{(1)} \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 75 \angle -90^\circ \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 129,9 \angle -60^\circ,$$

$$\underline{U}_{mCA}^{(1)} = \underline{E}_{mC}^{(1)} \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 75 \angle 150^\circ \cdot \sqrt{3} \angle 30^\circ = 129,9 \angle 180^\circ.$$

$$\underline{U}_{mAB}^{(3)} = \underline{U}_{mBC}^{(3)} = \underline{U}_{mCA}^{(3)} = 0.$$

$$\underline{U}_{mAB}^{(5)} = \underline{E}_{mA}^{(5)} \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 25 \angle 0^\circ \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 43,3 \angle -30^\circ.$$

$$\underline{U}_{mBC}^{(5)} = \underline{E}_{mB}^{(5)} \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 25 \angle 120^\circ \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 43,3 \angle 90^\circ.$$

$$\underline{U}_{mCA}^{(5)} = \underline{E}_{mC}^{(5)} \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 25 \angle -120^\circ \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ = 43,3 \angle -150^\circ.$$

3. Розрахунок першої гармоніки.

$$\underline{Z}_\phi^{(1)} = 5 - j \cdot 8 = 9,43 \angle -58^\circ, \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_0^{(1)} = 8,94 \angle 63,4^\circ = 4 + j \cdot 8 \text{ Ом.}$$

Оскільки навантаження симетричне, то $\underline{U}_{m010}^{(1)} = 0$ В.

Струми фаз, А:

$$\underline{I}_{mA}^{(1)} = \frac{\underline{E}_{mA}^{(1)}}{\underline{Z}_\phi^{(1)}} = \frac{75 \angle 30^\circ}{9,43 \angle -58^\circ} = 7,95 \angle 88^\circ = 0,28 + j \cdot 7,945,$$

$$\underline{I}_{mB}^{(1)} = \frac{\underline{E}_{mB}^{(1)}}{\underline{Z}_\phi^{(1)}} = \frac{75 \angle -90^\circ}{9,43 \angle -58^\circ} = 7,95 \angle -32^\circ = 6,74 - j \cdot 4,21,$$

$$\underline{I}_{mC}^{(1)} = \frac{\underline{E}_{mC}^{(1)}}{\underline{Z}_\phi^{(1)}} = \frac{75 \angle 150^\circ}{9,43 \angle -58^\circ} = 7,95 \angle 208^\circ = 7,95 \angle -152^\circ = -7,02 - j \cdot 3,73.$$

Струм в нульовому проводі (за першим законом Кірхгофа):

$$\underline{I}_{mo}^{(1)} = \underline{I}_{mA}^{(1)} + \underline{I}_{mB}^{(1)} + \underline{I}_{mC}^{(1)} = 0,28 + j \cdot 7,945 + 6,74 - j \cdot 4,21 - 7,02 - j \cdot 3,73 \approx 0 \text{ А.}$$

4. Розрахунок третьої гармоніки:

$$\underline{Z}_\phi^{(3)} = 5 - j \cdot \frac{8}{3} = 5 - j \cdot 2,67 = 5,67 \angle -28,1^\circ \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_0^{(3)} = 4 + j \cdot 8 \cdot 3 = 4 + j \cdot 24 = 24,33 \angle 80,5^\circ \text{ Ом.}$$

Напряга зміщення нейтралі при симетричному навантаженні:

$$\underline{U}_{m010}^{(3k)} = \frac{E_{\phi m}^{(3k)} \cdot 3 Y_{-\Phi}^{(3k)}}{3 \cdot Y_{-\Phi}^{(3k)} + Y_0^{(3k)}} = \frac{E_{mA}^{(3)} \cdot \underline{Z}_0^{(3)}}{\underline{Z}_0^{(3)} + \frac{\underline{Z}_{\phi}^{(3)}}{3}}.$$

Струм у нульовому проводі, А:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{m0}^{(3)} &= \frac{\underline{U}_{m010}^{(3)}}{\underline{Z}_0^{(3)}} = \frac{E_{mA}^{(3)}}{\underline{Z}_0^{(3)} + \frac{\underline{Z}_{\phi}^{(3)}}{3}} = \frac{35 \angle 150^\circ}{4 + j \cdot 24 + \frac{(5 - j \cdot 2,67)}{3}} = \frac{35 \angle 150^\circ}{4 + j \cdot 24 + 1,67 - j \cdot 0,89} = \\ &= \frac{35 \angle 150^\circ}{5,67 + j \cdot 23,11} = \frac{35 \angle 150^\circ}{23,8 \angle 76,2^\circ} = 1,47 \angle 73,8^\circ = 0,41 + j \cdot 1,41. \end{aligned}$$

Струми фаз, А:

$$\underline{I}_{mA}^{(3)} = \underline{I}_{mB}^{(3)} = \underline{I}_{mC}^{(3)} = \frac{\underline{I}_{m0}^{(3)}}{3} = \frac{1,47 \angle 73,8^\circ}{3} = 0,49 \angle 73,8^\circ.$$

5. Розрахунок п'ятої гармоніки:

$$\underline{Z}_{\phi}^{(5)} = 5 - j \cdot \frac{8}{5} = 5 - j \cdot 1,6 = 5,25 \angle -17,7^\circ \text{ Ом,}$$

$$\underline{Z}_0^{(5)} = 4 + j \cdot 8 \cdot 5 = 4 + j \cdot 40 = 40,2 \angle 84,3^\circ \text{ Ом.}$$

Навантаження симетричне, то $\underline{U}_{m010}^{(5)} = 0 \text{ В.}$

Струми фаз, А:

$$\underline{I}_{mA}^{(5)} = \frac{E_{mA}^{(5)}}{\underline{Z}_{\phi}^{(5)}} = \frac{25 \angle 0^\circ}{5,25 \angle -17,7^\circ} = 4,76 \angle 17,7^\circ = 4,53 + j \cdot 1,45,$$

$$\underline{I}_{mB}^{(5)} = \frac{E_{mB}^{(5)}}{\underline{Z}_{\phi}^{(5)}} = \frac{25 \angle 120^\circ}{5,25 \angle -17,7^\circ} = 4,76 \angle 137,7^\circ = -3,52 + j \cdot 3,2,$$

$$\underline{I}_{mC}^{(5)} = \frac{E_{mC}^{(5)}}{\underline{Z}_{\phi}^{(5)}} = \frac{25 \angle -120^\circ}{5,25 \angle -17,7^\circ} = 4,76 \angle -102,3^\circ = -1,01 - j \cdot 4,65.$$

Струм в нульовому проводі (за першим законом Кірхгофа):

$$\underline{I}_{m0}^{(5)} = \underline{I}_{mA}^{(5)} + \underline{I}_{mB}^{(5)} + \underline{I}_{mC}^{(5)} = 4,53 + j \cdot 1,45 - 3,52 + j \cdot 3,2 - 1,01 - j \cdot 4,65 \approx 0 \text{ А.}$$

6. Миттєві значення струмів, А:

$$i_A = i_A^{(1)} + i_A^{(3)} + i_A^{(5)} = 7,95 \cdot \sin(\omega t + 88^\circ) + 0,49 \cdot \sin(3\omega t + 73,8^\circ) + 4,76 \cdot \sin(5\omega t + 17,7^\circ);$$

$$i_B = i_B^{(1)} + i_B^{(3)} + i_B^{(5)} = 7,95 \cdot \sin(\omega t - 32^\circ) + 0,49 \cdot \sin(3\omega t + 73,8^\circ) + 4,76 \cdot \sin(5\omega t + 137,7^\circ);$$

$$i_C = i_C^{(1)} + i_C^{(3)} + i_C^{(5)} = 7,95 \cdot \sin(\omega t - 152^\circ) + 0,49 \cdot \sin(3\omega t + 73,8^\circ) + 4,76 \cdot \sin(5\omega t - 102,3^\circ); \quad i_0 = i_0^{(3)} = 1,47 \cdot \sin(3\omega t + 73,8^\circ).$$

7. Миттєві значення фазних та лінійних напруг, В.

$$e_B(\omega t) = 75 \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) + 35 \cdot \sin(3\omega t + 150^\circ) + 25 \cdot \sin(5\omega t + 120^\circ),$$

$$e_C(\omega t) = 75 \cdot \sin(\omega t + 150^\circ) + 35 \cdot \sin(3\omega t + 150^\circ) + 25 \cdot \sin(5\omega t - 120^\circ),$$

$$u_{AB} = u_{AB}^{(1)} + u_{AB}^{(5)} = 129,9 \cdot \sin(\omega t + 60^\circ) + 43,3 \cdot \sin(5\omega t - 30^\circ),$$

$$u_{BC} = u_{BC}^{(1)} + u_{BC}^{(5)} = 129,9 \cdot \sin(\omega t - 60^\circ) + 43,3 \cdot \sin(5\omega t + 90^\circ),$$

$$u_{CA} = u_{CA}^{(1)} + u_{CA}^{(5)} = 129,9 \cdot \sin(\omega t + 180^\circ) + 43,3 \cdot \sin(5\omega t - 150^\circ).$$

8. Діючі значення струмів (та відповідно показники амперметрів).

Показання амперметра A_1 дорівнює діючому значенню фазного струму:

$$I_A = I_B = I_C = \sqrt{\left(\frac{I_{mA}^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{mA}^{(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{I_{mA}^{(5)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7,95}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0,49}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4,76}{\sqrt{2}}\right)^2} = 6,56 \text{ А.}$$

Показання амперметра A_2 дорівнює діючому значенню струму в

нульовому проводі: $I_0 = \sqrt{\left(\frac{I_{m0}^{(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{I_{m0}^{(3)}}{\sqrt{2}} = \frac{1,47}{\sqrt{2}} = 1,04 \text{ А.}$

9. Діючі значення напруг (та відповідно показники вольтметрів).

Показання вольтметра V_1 дорівнює діючому значенню фазної напруги:

$$E_A = E_B = E_C = \sqrt{\left(\frac{E_{mC}^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{E_{mC}^{(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{E_{mC}^{(5)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{75}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{35}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{25}{\sqrt{2}}\right)^2} = 61,1 \text{ В.}$$

Показання вольтметра V_2 дорівнює діючому значенню лінійної напруги:

$$U_{AB} = \sqrt{\left(\frac{U_{mAB}^{(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{mAB}^{(5)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{129,9}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{43,3}{\sqrt{2}}\right)^2} = 96,8 \text{ В.}$$

ЗАДАЧА 1

Розрахунок трифазного кола «зірка-зірка»,
що живиться негармонійними джерелами напруги, при несиметричному
навантаженні за відсутності нульового проводу

Крива напруги фази «А» задана у вигляді ряду Фур'є:

$$e_A = 220 \cdot \sin \omega t + 80 \cdot \sin(3\omega t - 30^\circ), \text{ В.}$$

Опори фаз дорівнюють: $\underline{Z}_A = 40 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_B^{(1)} = -j \cdot 40, \text{ Ом}$; $\underline{Z}_C^{(1)} = j \cdot 40 \text{ Ом}$.

Розрахункова схема має вигляд – рисунок 1.23.

Визначити:

- миттєві значення лінійних (фазних) струмів;
- покази приладів електромагнітної системи.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати методику розрахунку трифазних кіл, що живляться негармонійними джерелами напруги;
- вміти визначати діючі значення несинусоїдних періодичних струмів і напруг.

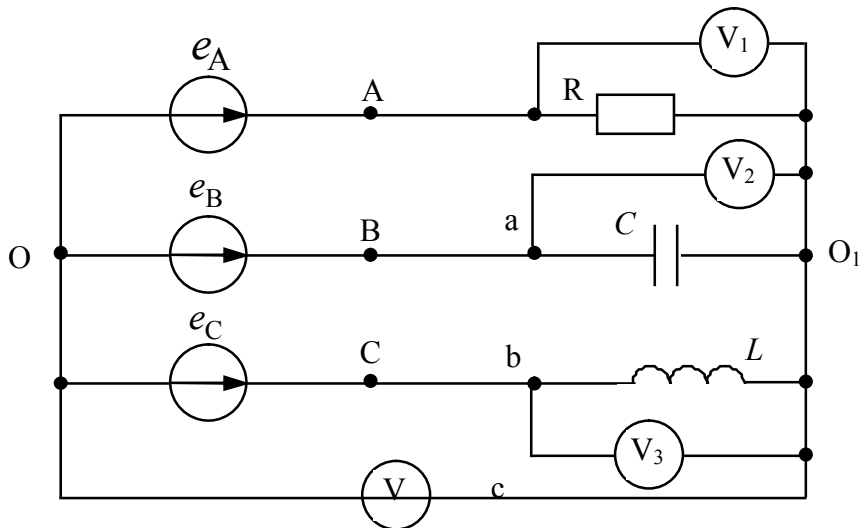


Рисунок 1.23 – Схема досліджуваного кола

Розв'язання

1. Розрахунок для першої гармоніки.

Комплексні амплітуди фазних E_{PC} , В:

$$\underline{E}_{mA}^{(1)} = 220 \angle 0^\circ; \underline{E}_{mB}^{(1)} = 220 \angle -120^\circ; \underline{E}_{mC}^{(1)} = 220 \angle 120^\circ.$$

Провідності фаз, См:

$$\underline{Y}_A^{(1)} = \frac{1}{R} = 0,025; \underline{Y}_B^{(1)} = \frac{1}{-j \cdot x_C^{(1)}} = j \cdot 0,025; \underline{Y}_C^{(1)} = \frac{1}{j \cdot x_L^{(1)}} = -j \cdot 0,025.$$

$$\begin{aligned} \text{Напруга зміщення нейтралі} - \underline{U}_{m0_10}^{(1)} &= \frac{\underline{E}_{mA}^{(1)} \cdot \underline{Y}_A^{(1)} + \underline{E}_{mB}^{(1)} \cdot \underline{Y}_B^{(1)} + \underline{E}_{mC}^{(1)} \cdot \underline{Y}_C^{(1)}}{\underline{Y}_A^{(1)} + \underline{Y}_B^{(1)} + \underline{Y}_C^{(1)}} = \\ &= \frac{220 \cdot 0,025 + 220 \angle -120^\circ \cdot 0,025 \angle 90^\circ + 220 \angle 120^\circ \cdot 0,025 \angle -90^\circ}{0,025 + j \cdot 0,025 - j \cdot 0,025} = 600 \text{ В.} \end{aligned}$$

Напруги на фазних навантаженнях, В:

$$\underline{U}_{ma0_1}^{(1)} = \underline{E}_{mA}^{(1)} - \underline{U}_{m0_10}^{(1)} = 220 - 600 = -380 = 380 \angle 180^\circ,$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{mb0_1}^{(1)} &= \underline{E}_{mB}^{(1)} - \underline{U}_{m0_10}^{(1)} = 220 \angle -120^\circ - 600 = -110 - j \cdot 190 - 600 = -710 - j \cdot 190 = \\ &= 735 \angle -165^\circ, \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{mc0_1}^{(1)} = \underline{E}_{mC}^{(1)} - \underline{U}_{m0_10}^{(1)} = 220 \angle 120^\circ - 600 = -710 + j \cdot 190 = 735 \angle 165^\circ.$$

Лінійні (фазні) струми, А:

$$\underline{I}_{mA}^{(1)} = \underline{U}_{ma0_1}^{(1)} \cdot \underline{Y}_A^{(1)} = 380 \angle 180^\circ \cdot 0,025 = 9,5 \angle 180^\circ,$$

$$\underline{I}_{mB}^{(1)} = \underline{U}_{mb0_1}^{(1)} \cdot \underline{Y}_B^{(1)} = 795 \angle -165^\circ \cdot 0,025 \angle 90^\circ = 18,35 \angle -75^\circ,$$

$$\underline{I}_{mC}^{(1)} = \underline{U}_{mc0_1}^{(1)} \cdot \underline{Y}_C^{(1)} = 734 \angle 165^\circ \cdot 0,025 \angle -90^\circ = 18,35 \angle 75^\circ.$$

2. Розрахунок для третьої гармоніки.

При з'єднанні генератора й симетричного навантаження зіркою за відсутності нульового проводу струми третіх та інших гармонік нульової послідовності не можуть протікати по лінійних проводах ($\underline{I}_{mA}^{(3)} = \underline{U}_{ma0_1}^{(3)} \cdot \underline{Y}_A^{(3)} = 0$, так як $\underline{U}_{m0_10}^{(3)} = \underline{E}_{mA}^{(3)}$; $\underline{U}_{ma0_1}^{(3)} = \underline{E}_{mA}^{(3)} - \underline{U}_{m0_10}^{(3)} = 0$).

Між точками О і О₁ буде напруга зміщення нейтралі, В:

$$\underline{U}_{m00_1}^{(3)} = \frac{\underline{E}_{mA}^{(3)} \cdot (\underline{Y}_A^{(3)} + \underline{Y}_B^{(3)} + \underline{Y}_C^{(3)})}{\underline{Y}_A^{(3)} + \underline{Y}_B^{(3)} + \underline{Y}_C^{(3)}} = \underline{E}_{mA}^{(3)} = 80 \angle -30^\circ.$$

3. Миттєві значення струмів, А:

$$i_A = i_A^{(1)} = 9,5 \cdot \sin(\omega t + 180^\circ), \quad i_B = i_B^{(1)} = 18,35 \cdot \sin(\omega t - 75^\circ),$$

$$i_C = i_C^{(1)} = 18,35 \cdot \sin(\omega t + 75^\circ).$$

4. Миттєві значення напруг, В:

$$u_{a0_1} = u_{a0_1}^{(1)} = 380 \cdot \sin(\omega t + 180^\circ), \quad u_{b0_1} = u_{b0_1}^{(1)} = 735 \cdot \sin(\omega t - 165^\circ),$$
$$u_{c0_1} = u_{c0_1}^{(1)} = 735 \cdot \sin(\omega t + 165^\circ),$$
$$u_{0_10} = u_{0_10}^{(1)} + u_{0_10}^{(3)} = 600 \cdot \sin(\omega t) + 80 \cdot \sin(3\omega t - 30^\circ).$$

5. Показання амперметрів і вольтметрів електромагнітної системи й відповідно діючі значення струмів і напруг.

Показання амперметра A_1 дорівнює діючому значенню струму у фазі A –

$$I_A = \frac{9,5}{\sqrt{2}} = 6,74 \text{ А.}$$

Показання амперметра A_2 дорівнює діючому значенню струму у фазі B –

$$I_B = \frac{18,35}{\sqrt{2}} = 13 \text{ А.}$$

Показання амперметра A_3 дорівнює діючому значенню струму у фазі C –

$$I_C = \frac{18,35}{\sqrt{2}} = 13 \text{ А.}$$

Показання вольтметра V_1 дорівнює діючому значенню напруги на

навантаженні у фазі A – $I_A^{(1)} \cdot R = U_{a0_1} = \frac{380}{\sqrt{2}} = 268,7 \text{ В.}$

Показання вольтметра V_2 дорівнює діючому значенню напруги на

навантаженні у фазі B – $I_B^{(1)} \cdot X_C^{(1)} = U_{b0_1} = \frac{735}{\sqrt{2}} = 519,72 \text{ В.}$

Показання вольтметра V_3 дорівнює діючому значенню напруги на

навантаженні у фазі C – $I_C^{(1)} \cdot X_L^{(1)} = U_{c0_1} = \frac{735}{\sqrt{2}} = 519,72 \text{ В.}$

Показання вольтметра V дорівнює діючому значенню напруги зміщення

нейтралі – $U_{0_10} = \sqrt{\left(\frac{U_{m0_10}^{(1)}}{2}\right)^2 + \left(\frac{U_{m0_10}^{(3)}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{600^2}{2} + \frac{80^2}{2}} = 428 \text{ В.}$

РОЗДІЛ 2 РОЗРАХУНОК ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Перехідний процес – це процес переходу від одного до іншого режиму роботи кола, який будь-чим відрізняється від попереднього (амплітудою, фазою, частотою діючих у колі *ЕРС*, значеннями параметрів схеми). Перехідні процеси виникають в результаті різних комутацій.

Комутація – це розмикання або замикання ключів. На схемах ключі що працюють на замикання і розмикання позначають так як показано на рисунку 2.1.



Рисунок 2.1 – Умовні позначення ключів на електричних схемах

Якщо в колі є котушки індуктивності та (або) ємності, то такий перехід не може відбутися миттєво, оскільки миттєво не може змінитися енергія електричного і магнітного полів.

Вирішити задачу з перехідного процесу – це знайти закон зміни $i(t)$ або $u(t)$ на окремих ділянках кола. Так для схем рисунку 2.2 та рисунку 2.3 другий закон Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі при замиканні ключа має вигляд відповідно:

$$L \cdot \frac{d i(t)}{d t} + i(t) \cdot R = E. \quad (2.1)$$

$$R \cdot C \cdot \frac{d u_C(t)}{d t} + u_C(t) = E \quad (2.2)$$

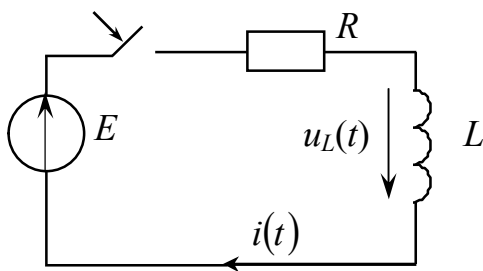


Рисунок 2.2 – Підключення постійної *ЕРС* до *R-L* кола

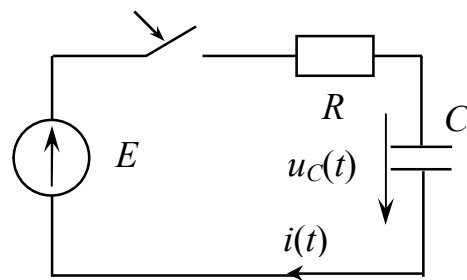


Рисунок 2.3 – Підключення постійної *ЕРС* до *R-C* кола

Способи вирішення цих рівнянь, тобто знаходження таких функцій, які задовольняють рівнянням (2.1) й (2.2), є наступними:

- класичний;
- операторний;
- за допомогою інтеграла Дюамеля.

Теоретично перехідний процес вважається нескінченним; момент комутації – це момент « $t = 0$ ».

Електричні схеми під час перехідного процесу підпорядковуються двом законам комутації.

Перший закон комутації: в індуктивному елементі струм (і магнітний потік) безпосередньо після комутації, тобто у момент « $t = 0+$ », зберігає значення, яке він мав безпосередньо перед комутацією, тобто у момент « $t = 0-$ », а далі починає змінюватися саме з цього значення:

Другий закон комутації: на ємнісному елементі напруга (і заряд) зберігає у момент комутації те значення, яким воно було безпосередньо перед комутацією і надалі починає змінюватися саме з цього значення:

З енергетичної точки зору неможливість миттєвої зміни струму $i_L(t)$ і напруги $u_C(t)$ пояснюється неможливістю стрибкоподібної зміни накопиченої енергії магнітного поля $\frac{L \cdot i^2}{2}$ в індуктивному елементі й енергії електричного поля $\frac{C \cdot u_C^2}{2}$ в ємності.

Класичний метод розрахунку перехідних процесів

Відповідно до цього методу закон зміни струму (або напруги) розглядають як суму примусового (i_{np}) і вільного (i_g) струму (або напруги), тобто

$$i(t) = i_{np} + i_g; \quad u(t) = u_{np} + u_g. \quad (2.3)$$

Примусова складова – це часткове вирішення неоднорідного диференціального рівняння, або це значення струму чи напруги в сталому режимі, тобто в припущенні, що перехідний процес повністю закінчився ($t \rightarrow \infty$) і його можна не приймати до уваги.

Вільна складова – загальне вирішення однорідного рівняння (термін «вільна» означає, що ця складова є вирішенням рівняння, «вільного» від примусової сили). Її вигляд залежить від коренів характеристичного рівняння.

Повний струм – це той струм, який насправді тече у вітці при перехідному процесі, а примусова і вільна складові дають дійсну величину струму.

Порядок розрахунку перехідних процесів класичним методом

1. Довільно вибирають напрями струмів (напруг) у вітках кола.
2. Записують рішення для струмів і напруг у загальному вигляді, тобто у вигляді суми примусових і вільних складових.
3. Визначають незалежні і залежні початкові умови.

Незалежні початкові умови (Н.П.У.) – це значення перехідних струмів в індуктивних елементах і напруг на ємнісних елементах, які відомі з режиму до комутації і стрибком змінюватися не можуть відповідно до законів комутації. Н.П.У. знаходять шляхом розрахунку схеми до комутації. Для схеми рисунку 2.2 Н.П.У. – $i(0)=0$, для схеми рисунку 2.3 Н.П.У. – $u_C(0)=0$.

Значення інших струмів і напруг в момент $t=0$ називають *залежними початковими умовами* (З.П.У.). Їх знаходять шляхом складання рівнянь за законами Кірхгофа для кола після комутації в момент часу $t=0$.

$$\text{Для схеми рисунку 2.3} - u_C(0) + i(0) \cdot R = E \Rightarrow i(0) = \frac{E - u_C(0)}{R} = \frac{E}{R}.$$

4. Вважаючи, що перехідний процес повністю закінчився, для схеми після комутації визначають примусові складові струмів і напруг.

$$\text{Для схеми рисунку 2.3} \quad u_{Cnp} = E, \quad i_{np} = 0.$$

5. Для визначення вигляду вільних складових струмів і напруг складають характеристичне рівняння і знаходять його корені.

Для схеми рисунку 2.3 характеристичне рівняння складене за методом вхідного опору має вигляд: $Z_{\text{вх}}(p) = R + \frac{1}{p \cdot C} = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{R \cdot C}$. Тоді вільна

$$\text{складова} - u_{C\hat{a}} = A \cdot e^{pt} = A \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}.$$

6. За допомогою незалежних і залежних початкових умов визначають постійні інтегрування. Для схеми рисунку 2.3 $u_C = E + A \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$, а для $t=0 - 0 = E + A \Rightarrow A = -E$.

7. Остаточно записують закони струмів $i(t)$ і напруг $u(t)$ при перехідному процесі.

$$\text{Для схеми рисунку 2.3: } u_C = E - E \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}; \quad i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Операторний метод розрахунку перехідних процесів заснований на використанні поняття про зображення функцій часу. В операторному методі кожній функції часу t ($f(t)$) відповідає функція нової змінної p ($F(p)$) і навпаки. Перехід від функції часу t до функції змінної p здійснюють за допомогою прямого перетворення Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt, \quad (2.4)$$

де p – комплексне число вигляду $p = a + j \cdot b$.

Таким чином, операторний метод розрахунку перехідних процесів є методом розрахунку, заснованим на перетворенні Лапласа. Він дозволяє звести операцію диференціювання до множення, а операцію інтегрування – до ділення на p .

Відповідність між функціями $F(p)$ і $f(t)$ записують так: $F(p) \doteq f(t)$. Знак « \doteq » називають знаком відповідності.

Послідовність розрахунків операторним методом

1. Складають рівняння для кола після комутації за законами Кірхгофа в інтегрально-диференціальній формі.

Для схеми рисунку 2.3: $i \cdot R + u_C(t) = E$, або $i \cdot R + u_C(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt = E$.

2. Здійснюють заміну оригіналів відповідними зображеннями ($I(p) \doteq i(t)$).

Для схеми рисунку 2.3: $I(p) \cdot R + I(p) \cdot \frac{1}{p \cdot C} + \frac{u_C(0)}{p} = \frac{E}{p}$. З урахуванням того, що $u_C(0) = 0$ маємо $I(p) \cdot \left(R + \frac{1}{p \cdot C} \right) = \frac{E}{p}$.

3. Складають операторну схему заміщення – рисунок 2.4.

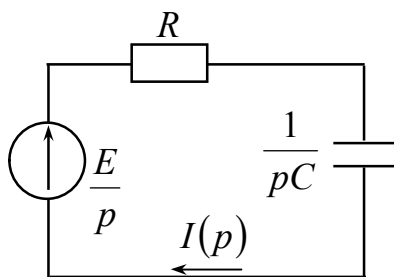


Рисунок 2.4 – Операторна схема заміщення для схеми рисунку 2.3.

4. Використовують будь-який метод розрахунку і визначають операторні струми і напруги.

Для схеми рисунку 2.4 за законом Ома:

$$I(p) = \frac{E}{p \cdot \left(R + \frac{1}{p \cdot C} \right)} = \frac{E \cdot C}{R \cdot C \cdot p + 1} = \frac{E/R}{p + \frac{1}{R \cdot C}}$$

5. Здійснюють перехід від операторних струмів і напруг до струмів і напруг функції часу (перехід від зображень до оригіналів) за допомогою формул відповідності або за допомогою формули розкладання.

Якщо $e^{\alpha \cdot t} \doteq \frac{1}{p - \alpha}$, то випадку маємо оригінал струму $i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$, А.

ЗАДАЧА 1

Розрахунок перехідних процесів в нерозгалуженому електричному колі постійного струму з індуктивністю класичним методом

В електричній схемі з джерелом постійної напруги, зображеній на рисунку 2.2, при замиканні ключа K відбувається перехідний процес. Параметри схеми: $R = 10$ Ом, $L = 100$ мГн, $E = 110$ В.

Визначити:

- струм $i(t)$ в перехідному процесі, й побудувати його криву;
- енергію магнітного поля для моменту часу $t = 0,01$ с після замикання ключа.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи класичного методу розрахунку перехідних процесів;
- вміти складати рівняння стану електричного кола після комутації;
- вміти складати характеристичні рівняння.

Розв'язання

1. Складаємо рівняння електричного стану кола після замикання ключа:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + i(t) \cdot R = E.$$

2. Розв'язок рівняння знаходимо як суму примусової та вільної складових: $i(t) = i_{np} + i_v$.

3. Н.П.У.: $i(0) = 0$ А.

4. Значення примусової складової струму визначаємо при розрахунку схеми після комутації ($t \rightarrow \infty$): $i_{np} = \frac{E}{R} = \frac{110}{10} = 11$ А.

5. Складаємо характеристичне рівняння методом вхідного опору:

$$Z(p) = R + p \cdot L = 0.$$

З характеристичного рівняння виразимо корінь p :

$$p = -\frac{R}{L} = -\frac{10}{100 \cdot 10^{-3}} = -100 \text{ с}^{-1}. \text{ Тоді характер вільного струму: } i_v = A \cdot e^{-100 \cdot t}.$$

6. Визначимо постійну інтегрування A :

$$i(t) = 11 + A \cdot e^{-100 \cdot t}. \text{ При } t = 0: i(0) = 0 = 11 + A \Rightarrow A = -11.$$

7. Струм в колі $i(t) = 11 - 11 \cdot e^{-100 \cdot t} = 11 \cdot (1 - e^{-100 \cdot t})$, А.

8. Напруга на індуктивності $u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 110 \cdot e^{-100 \cdot t}$, В.

9. Для побудови графіка струму складаємо таблицю

Таблиця 2.1 – Дані для побудови графіку $i(t)$

$t, \text{с}$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06
$i, \text{А}$	0	6,95	9,5	10,5	10,8	10,9

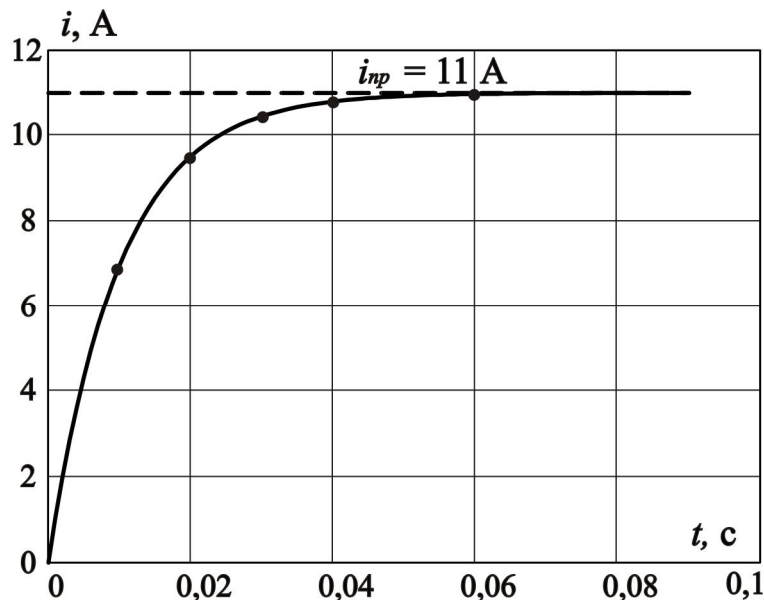


Рисунок 2.5 – Графік струму кола рисунку 2.2.

10. Енергія магнітного поля котушки в момент часу $t = 0,01 \text{ с}$:

$$W_M(t) = \frac{L \cdot [i(t)]^2}{2} \Rightarrow W_M(0,01) = \frac{L \cdot i(0,01)^2}{2} = \frac{0,1 \cdot 6,95^2}{2} = 2,41 \text{ Дж.}$$

ЗАДАЧА 2

Розрахунок перехідних процесів в нерозгалуженому електричному колі постійного струму з індуктивністю операторним методом

В електричній схемі з джерелом постійної напруги, зображеній на рисунку 2.6,а при замиканні ключа K відбувається перехідний процес. Параметри елементів кола: $E = 220 \text{ В}$, $L = 0,6 \text{ Гн}$, $R_1 = 8 \text{ Ом}$, $R_2 = 12 \text{ Ом}$.

Визначити операторним методом при перехідному процесі:

- струм $i(t)$;
- напругу на індуктивності $u_L(t)$.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати порядок розрахунку перехідних процесів операторним методом в колах постійного струму;
- вміти складати операторну схему заміщення;
- вміти застосовувати формулу розкладання для знаходження оригіналів.

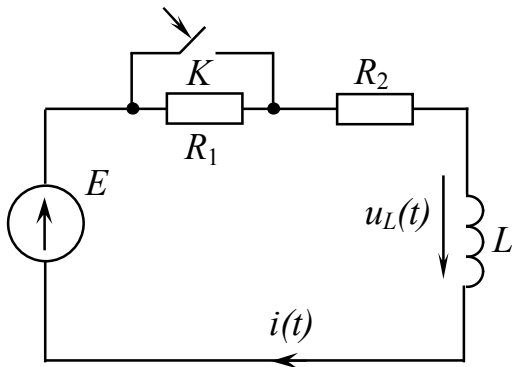


Рисунок 2.6 – Схема досліджуваного кола

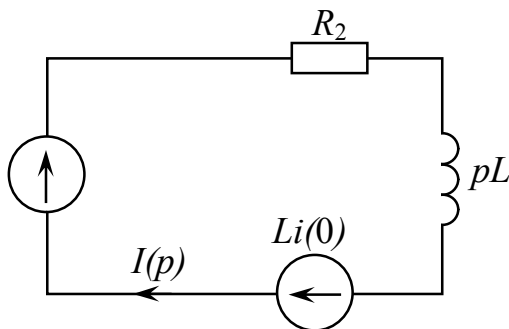


Рисунок 2.7 – Операторна схема заміщення

Розв'язання

1. Для схеми, що розглядається, початкові умови не є нульовими, а саме:

$$i(0) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{220}{8 + 12} = 11 \text{ А.}$$

Складаємо операторну схему заміщення (для ненульових початкових умов) – рисунок 2.7. На схемі внутрішня ЕРС – $L \cdot i(0) = 0,6 \cdot 11 = 6,6 \text{ В.}$

2. За законом Ома для цієї схеми:

$$I(p) = \frac{E/p + L \cdot i(0)}{R_2 + p \cdot L} = \frac{220/p + 6,6}{12 + 0,6 \cdot p} =$$

$$= \frac{220 + 6,6 \cdot p}{p \cdot (12 + 0,6 \cdot p)} = \frac{N(p)}{M(p)} \Rightarrow \text{з формули}$$

розкладення: $i(t) = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t}.$

3. Знайдемо корені рівняння $M(p) = 0$ та підставляємо їх у вираз $N(p) = 0$: $p \cdot (12 + 0,6 \cdot p) = 0 \Rightarrow p_1 = 0, p_2 = -20.$

Таким чином, $N(0) = 220$; $N(-20) = 88.$

4. Знайдемо похідну знаменника та підставимо в отриману формулу корені рівняння $p_1 = 0, p_2 = -20$:

$$M'(p) = 2 \cdot 0,6 \cdot p + 12, \quad M'(0) = 12; \quad M'(-20) = -12.$$

5. Тоді $\underline{i(t)} = \frac{220}{12} \cdot e^{0 \cdot t} - \frac{88}{12} \cdot e^{-20 \cdot t} = \underline{18,3333 - 7,3333 \cdot e^{-20 \cdot t}}, \text{ А.}$

6. Визначимо операторну напругу на індуктивності:

$$U_L(p) = I(p) \cdot p \cdot L - L \cdot i(0) = \frac{220 + 6,6 \cdot p}{p \cdot (0,6 \cdot p + 12)} \cdot p \cdot L - 6,6 = \frac{132 + 3,96 \cdot p - 3,96 \cdot p - 79,2}{0,6 \cdot p + 12} =$$

$$= \frac{52,8}{0,6 \cdot p + 12} = \frac{88}{p + 20}.$$

Скористаємося формулою відповідності $\frac{1}{p+a} \doteq e^{-a \cdot t}$, де $a = 20 \Rightarrow$

$u_L(t) = 88 \cdot e^{-20 \cdot t}, \text{ В.}$

ЗАДАЧА 3

Розрахунок перехідних процесів у нерозгалуженому електричному колі постійного струму з ємністю

У нерозгалуженому електричному колі, зображеному на рисунку 2.3, з параметрами $R = 10^5$ Ом, $C = 100$ мкФ, $E = 110$ В, при замиканні ключа K відбувається перехідний процес.

Визначити при перехідному процесі:

- струм $i(t)$;
- напругу на ємності $u_C(t)$.

Для вирішення задачі треба знати основи класичного методу розрахунку перехідних процесів в колах постійного струму.

Розв'язання

Задачу можна вирішити двома способами: через напругу на ємності $u_C(t)$ та через струм $i(t)$.

Перший спосіб

1. Загальне рівняння напруги на ємності:

$$u_C(t) = u_{Cnp} + u_{Cв}.$$

2. Незалежна початкова умова (Н.П.У.): $u_C(0) = 0$ В.

3. Примусова складова напруги буде дорівнювати напрузі джерела живлення $u_{Cnp} = E = 110$ В.

4. Складаємо характеристичне рівняння і знаходимо його корінь p :

$$Z(p) = R + \frac{1}{p \cdot C} = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{R \cdot C} = -\frac{1}{10^5 \cdot 100 \cdot 10^6} = -0,1 \text{ с}^{-1}.$$

Тоді вільна складова напруги має вигляд: $u_{Cв} = A \cdot e^{-0,1 \cdot t}$.

5. Визначаємо постійну інтегрування A .

$$u_C(t) = 110 + A \cdot e^{-100 \cdot t}, \text{ при } t = 0: u_C(0) = 0 = 110 + A \Rightarrow A = -110.$$

6. Напруга на ємності $u_C(t) = 110 - 110 \cdot e^{-0,1 \cdot t} = \underline{110 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot t})}$, В.

7. Визначаємо струм кола в момент комутації:

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = \underline{11 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-0,1 \cdot t}}, \text{ А.}$$

Другий спосіб

1. Рівняння струму кола як сума примусової та вільної складових:

$$i(t) = i_{np} + i_{в}.$$

2. Знаходимо залежну початкову умову, тобто значення $i(0)$.

Якщо $u_C(0) = 0$, то за другим законом Кірхгофа –

$$i(0) = \frac{E - u_C(0)}{R} = \frac{110 - 0}{10^5} = 11 \cdot 10^{-4} \text{ А.}$$

3. Примусова складова струму – $i_{np} = 0$.

4. Характеристичне рівняння і загальне співвідношення для вільної складової струму має такий самий вигляд, як і у першому способі, тобто $i_g = B \cdot e^{-0,1 \cdot t}$.

5. Визначаємо постійну інтегрування B :

$$i(t) = B \cdot e^{-0,1 \cdot t} \Rightarrow B = i(0) = 11 \cdot 10^{-4}.$$

6. Струм кола: $i(t) = 11 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-0,1 \cdot t}$, А.

7. Визначаємо напругу на ємності в момент комутації:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t) dt = \frac{11 \cdot 10^{-4}}{100 \cdot 10^{-6}} \cdot \int_0^t e^{-0,1 \cdot t} dt = -110 \cdot e^{-0,1 \cdot t} \Big|_0^t = \underline{110 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot t})}, \text{ В.}$$

ЗАДАЧА 4

Розрахунок перехідних процесів в нерозгалуженому електричному колі синусоїдного струму з індуктивністю

В електричній схемі з джерелом синусоїдної напруги, зображеній на рисунку 2.8, при замиканні ключа K відбувається перехідний процес. Параметри елементів кола: $e(t) = 100 \cdot \sin(314 \cdot t + 91,3^\circ)$, В; $R = 30$ Ом, $L = 0,1$ Гн.

Визначити при перехідному процесі:

- струм кола $i(t)$;
- напругу на індуктивності $u_L(t)$.

Для вирішення задачі необхідно знати основи класичного методу розрахунку перехідних процесів у колах синусоїдного струму.

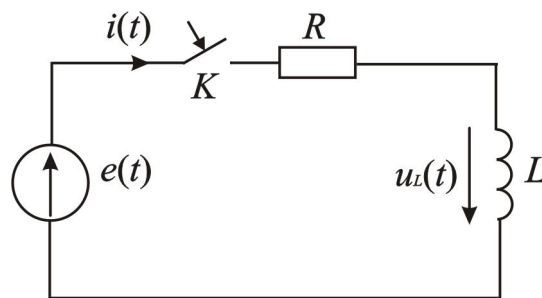


Рисунок 2.8 – Схема досліджуваного кола

Розв'язання

1. Загальне рішення: $i(t) = i_{np} + i_g$.
2. Н.П.У. $i(0) = 0$.
3. Знаходимо примусову складову струму.

Спочатку розрахуємо комплексну амплітуду примусової складової струму:

$$\underline{I}_{npm} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} = \frac{100 \cdot e^{j \cdot 91,3^\circ}}{30 + j \cdot 31,4} = \frac{100 \cdot e^{j \cdot 91,3^\circ}}{43,42 \cdot e^{j \cdot 46,3^\circ}} = 2,3 \cdot e^{j \cdot 45^\circ} \text{ А.}$$

Миттєве значення примусового струму – $i_{np} = 2,3 \cdot \sin(314 \cdot t + 45^\circ)$, А.

4. Складаємо характеристичне рівняння і визначимо його корінь:

$$p \cdot L + R = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L} = -\frac{30}{0,1} = -300 \text{ с}^{-1}. \text{ Таким чином вільна складова струму –}$$

$$i_g = A \cdot e^{-300 \cdot t}.$$

5. Визначаємо постійну інтегрування A :

$$i(t) = 2,3 \cdot \sin(314 \cdot t + 45^\circ) + A \cdot e^{-300 \cdot t}.$$

$$\text{При } t = 0: i_{np}(0) = 0 \Rightarrow 0 = 2,3 \cdot \sin 45^\circ + A \Rightarrow A = -2,3 \cdot \sin 45^\circ = -1,6 \text{ А.}$$

6. Струм кола при перехідному процесі:

$$\underline{i(t) = 2,3 \cdot \sin(314 \cdot t + 45^\circ) - 1,6 \cdot e^{-300 \cdot t}, \text{ А.}}$$

7. Визначаємо напругу на індуктивності в перехідному процесі:

$$\begin{aligned} \underline{u_L(t)} &= L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 72,2 \cdot \cos(314 \cdot t + 45^\circ) + 48 \cdot e^{-300 \cdot t} = \\ &= \underline{72,2 \cdot \sin(314 \cdot t + 135^\circ) + 48 \cdot e^{-300 \cdot t}, \text{ В.}} \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 5

Розрахунок перехідних процесів у розгалуженому електричному колі постійного струму з індуктивністю класичним і операторним методами

В розгалуженому електричному колі, зображеному на рисунку 2.9, з параметрами $R_1 = R_2 = R_3 = 4 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$, $E = 12 \text{ В}$, при замиканні ключа K відбувається перехідний процес.

Визначити:

- струми $i(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$ класичним методом;
- струм $i(t)$ операторним методом.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи класичного й операторного методів розрахунку перехідних процесів в колах постійного струму;

- знати метод контурних струмів.

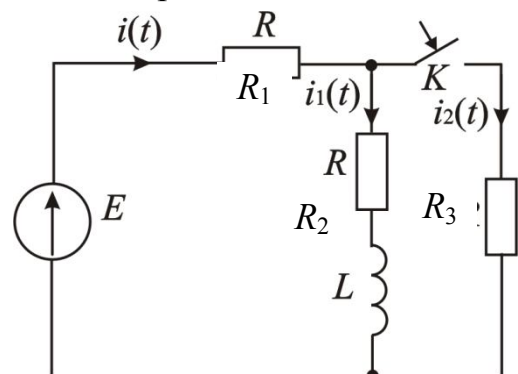


Рисунок 2.9 – Схема досліджуваного кола

Розв'язання

1. Знаходимо струми кола класичним методом.

1.1 Загальні рішення струмів кола при перехідному процесі:

$$\begin{cases} i = i_{np} + i_e \\ i_1 = i_{np1} + i_{e1} \\ i_2 = i_{np2} + i_{e2} \end{cases}$$

1.2 Визначаємо початкові умови:

$$\text{Н.П.У.: } i_1(0) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{12}{8} = 1,5 \text{ А.}$$

Залежні початкові умови (З.П.У.) знаходимо з системи рівнянь за законами Кірхгофа для $t = 0$:

$$\begin{cases} i(0) = i_1(0) + i_2(0) \\ i(0) \cdot R_1 + i_2(0) \cdot R_3 = E \\ i(0) \cdot R_1 + i_1(0) \cdot R_2 + u_L(0) = E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i(0) = 2,25 \text{ А} \\ i_2(0) = 0,75 \text{ А} \\ u_L(0) = -3 \text{ В} \end{cases}$$

1.3 Визначаємо примусові складові струмів кола:

$$i_{np} = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{12}{4 + 2} = 2 \text{ А, } i_{np1} = i_{np} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 1 \text{ А,}$$

$$i_{np2} = i_{np} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 1 \text{ А.}$$

1.4 Складаємо й розв'язуємо характеристичне рівняння методом вхідного опору: $Z(p) = R_1 + \frac{(R_2 + p \cdot L) \cdot R_3}{R_2 + p \cdot L + R_3} = 0$.

$$\text{Корінь характеристичного рівняння: } p = -\frac{\left(R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}\right)}{L} = -60 \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{Таким чином, вільні складові струмів: } \begin{cases} i_e = A \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_{e1} = A_1 \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_{e2} = A_2 \cdot e^{-60 \cdot t} \end{cases}$$

1.5 Визначаємо постійні інтегрування A , A_1 , A_2 за допомогою Н.П.У.:

$$\begin{cases} i(t) = 2 + A \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_1(t) = 1 + A_1 \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_2(t) = 1 + A_2 \cdot e^{-60 \cdot t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2,25 = 2 + A \\ 1,5 = 1 + A_1 \\ 0,75 = 1 + A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0,25 \\ A_1 = 0,5 \\ A_2 = -0,25 \end{cases}$$

1.6 Струми кола, А:

$$\begin{cases} i(t) = 2 + 0,25 \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_1(t) = 1 + 0,5 \cdot e^{-60 \cdot t} \\ i_2(t) = 1 - 0,25 \cdot e^{-60 \cdot t} \end{cases} .$$

1.7 Визначаємо напругу на індуктивності при перехідному процесі:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_1(t)}{dt} = 0,1 \cdot 0,5 \cdot (-60) \cdot e^{-60 \cdot t} = \underline{-3 \cdot e^{-60 \cdot t}}, \text{ В.}$$

2. Знаходимо струм $i(t)$ операторним методом.

2.1 Складаємо операторну схему заміщення (рис. 2.10), де внутрішня $EPC - L \cdot i_1(0) = 0,1 \cdot 1,5 = 0,15 \text{ В.}$

2.2 Операторні струми визначаємо методом контурних струмів.

У загальному вигляді система рівнянь за методом має вигляд:

$$\begin{cases} I_{11}(p) \cdot Z_{11}(p) + I_{22}(p) \cdot Z_{12}(p) = E_{11}(p) \\ I_{11}(p) \cdot Z_{21}(p) + I_{22}(p) \cdot Z_{22}(p) = E_{22}(p) \end{cases}'$$

де $Z_{11}(p) = R_1 + R_2 + pL$ – власний опір першого контуру;

$Z_{22}(p) = R_2 + R_3 + pL$ – власний опір другого контуру;

$Z_{12}(p) = Z_{21}(p) = -(R_2 + p \cdot L)$ – взаємний опір першого та другого

контурів;

$E_{11}(p) = \frac{E}{p} + L \cdot i_1(0)$ – власна EPC першого контуру;

$E_{22}(p) = -L \cdot i_1(0)$ – власна EPC другого контуру.

Після підстановки система рівнянь набуває вигляду

$$\begin{cases} I_{11}(p) \cdot (R_1 + R_2 + p \cdot L) - I_{22}(p) \cdot (R_2 + p \cdot L) = \frac{E}{p} + L \cdot i_1(0) \\ -I_{11}(p) \cdot (R_2 + p \cdot L) + I_{22}(p) \cdot (R_2 + R_3 + p \cdot L) = -L \cdot i_1(0) \end{cases} .$$

Визначаємо струм $I_{11}(p)$ за методом Крамера: $I_{11}(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta}$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R_1 + R_2 + p \cdot L) & -(R_2 + p \cdot L) \\ -(R_2 + p \cdot L) & (R_2 + R_3 + p \cdot L) \end{vmatrix} = (R_1 + R_2 + p \cdot L) \cdot (R_2 + R_3 + p \cdot L) - (R_2 + p \cdot L)^2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \left(\frac{E}{p} + L \cdot i_1(0) \right) & -(R_2 + p \cdot L) \\ -L \cdot i_1(0) & (R_2 + R_3 + p \cdot L) \end{vmatrix} = \left(\frac{E}{p} + L \cdot i_1(0) \right) \cdot (R_2 + R_3 + p \cdot L) - (R_2 + p \cdot L) \cdot L \cdot i_1(0).$$

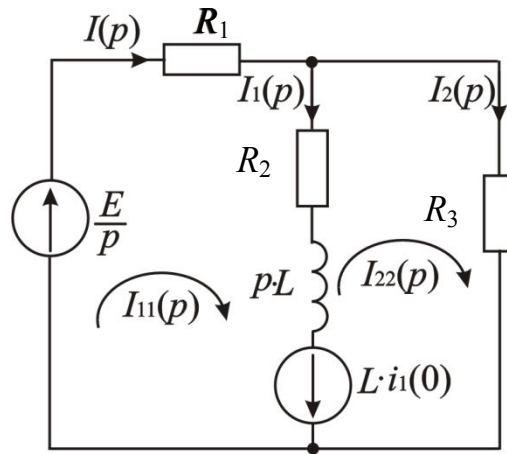


Рисунок 2.10 – Операторна схема заміщення

2.3 Для заданих вихідних даних операторний струм:

$$I(p) = I_{11}(p) = \frac{1,8 \cdot p + 96}{p \cdot (0,8 \cdot p + 48)} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

2.4 Для переходу від операторного струму $I(p)$ до струму функції часу $i(t)$ скористаємося формулою розкладання.

Знаходимо корені рівняння $M(p)=0$: $p \cdot (0,8 \cdot p + 48) = 0 \Rightarrow p_1 = 0$; $p_2 = -60$.

При отриманих коренях формула розкладання буде мати вигляд:

$$i(t) = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} \cdot e^{p_1 \cdot t} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} \cdot e^{p_2 \cdot t}.$$

Знаходимо похідну: $M'(p) = 1,6 \cdot p + 48$.

Знаходимо значення $N(p)$ і значення похідної $M'(p)$ при p_1 та p_2 :

$$N(p_1) = 96, N(p_2) = -12; M'(p_1) = 48, M'(p_2) = -48.$$

2.5 Отримані значення підставимо до формули розкладання:

$$\underline{i(t)} = \frac{96}{48} \cdot e^{0 \cdot t} + \frac{-12}{-48} \cdot e^{-60 \cdot t} = \underline{2 + 0,25 \cdot e^{-60 \cdot t}}, \text{ А.}$$

ЗАДАЧА 6

Розрахунок перехідних процесів у розгалуженому електричному колі з джерелом постійного струму

В електричній схемі з джерелом постійного струму J , зображеній на рисунку 2.11, при розмиканні ключа K відбувається перехідний процес.

Визначити струм в індуктивності після ввімкнення джерела постійного струму J .

Для вирішення задачі необхідно знати основи класичного методу розрахунку перехідних процесів.

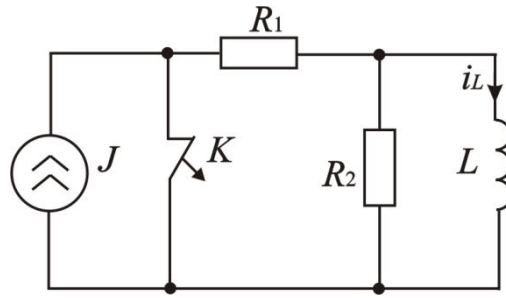


Рисунок 2.11 – Схема досліджуваного кола

Розв'язання

1. Струм $i_L(t)$ записуємо у вигляді суми примусової та вільної складових струму: $i_L(t) = i_{L_{np}} + i_{L_e}$.

2. Знаходимо Н.П.У. $i_L(0) = 0$ А.

3. З наведеної схеми в примусовому режимі – струм $i_{L_{np}} = J$.

4. Для визначення вигляду вільної складової струму складаємо характеристичне рівняння методом вхідного опору відносно вітки з індуктивністю, при цьому вітка з джерелом струму має бути розімкнена (рис. 2.12):

$$Z(p) = R_2 + p \cdot L = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_2}{L}.$$

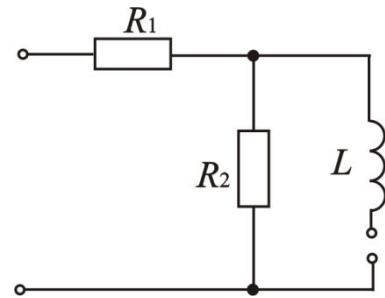


Рисунок 2.12 – Схема для характеристичного рівня

Таким чином, вільна складова струму має вигляд $i_{L_e} = A \cdot e^{p \cdot t} = A \cdot e^{-\frac{R_2}{L} \cdot t}$.

5. Струм індуктивності має вигляд:

$$i_L(t) = J + A \cdot e^{-\frac{R_2}{L} \cdot t}, \text{ А.}$$

6. Постійну інтегрування A знаходимо з початкової умови $i_L(0) = 0 \Rightarrow 0 = J + A \Rightarrow A = -J$.

7. Остаточного отримаємо: $i_L(t) = J - J \cdot e^{-\frac{R_2}{L} \cdot t} = J \cdot \left(1 - e^{-\frac{R_2}{L} \cdot t} \right), \text{ А.}$

ЗАДАЧА 7

Розрахунок перехідних процесів у розгалуженому електричному колі з джерелом постійного струму та взаємною індуктивністю

В електричній схемі з джерелом постійного струму J , зображеній на рисунку 2.13, при розмиканні ключа K відбувається перехідний процес. Параметри кола: $J = 10$ мА, $R = 1000$ Ом, $L_1 = L_2 = 10$ мГн, $M = 0,5$ мГн.

Визначити:

- струм через опір $i_R(t)$ в перехідному режимі;
- струм через індуктивність L_1 в перехідному режимі $i_{L1}(t)$;
- напругу на індуктивності L_2 в перехідному режимі $u_2(t)$.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи класичного методу розрахунку перехідних процесів;
- вміти складати рівняння за законами Кірхгофа для кіл зі взаємною індуктивністю;
- вміти складати рівняння стану електричного кола після комутації.

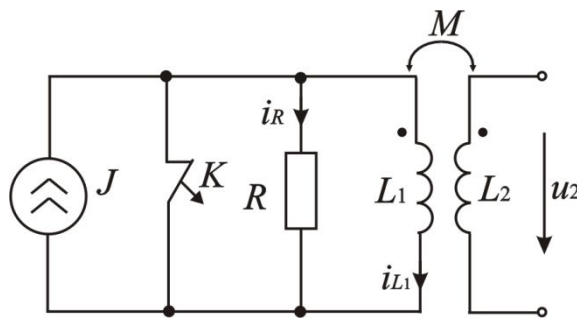


Рисунок 2.13 – Схема досліджуваного кола

Розв'язання

1. Загальні рішення струмів кола при перехідному процесі:

$$i_R(t) = i_{R_{np}} + i_{R_e}; \quad i_{L1}(t) = i_{L1_{np}} + i_{L1_e}.$$

2. Системи рівнянь за законами Кірхгофа для кола після комутації:

$$\begin{cases} i_R(t) + i_{L1}(t) = J \\ i_R(t) \cdot R - L_1 \cdot \frac{di_{L1}(t)}{dt} - M \cdot \frac{di_{L2}(t)}{dt} = 0 \end{cases}$$

Вторинна обмотка розімкнена, тому $i_{L2}(t) = 0 \Rightarrow M \cdot \frac{di_{L2}(t)}{dt} = 0$.

3. Знаходимо початкові умови.

$$\text{Н.П.У.: } i_{L1}(0) = 0 \text{ А.}$$

3.П.У. знаходимо з системи рівнянь за законами Кірхгофа для $t = 0$:

$$\begin{cases} i_R(0) + i_{L1}(0) = J \\ R \cdot i_R(0) - L_1 \cdot \frac{di_{L1}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_R(0) = J = 10^{-2} \text{ А} \\ u_L(0) = R \cdot i_R(0) = 10 \text{ В} \end{cases}$$

4. Визначаємо примусові складові струмів: $i_{R_{np}} = 0$; $i_{L1_{np}} = J = 10^{-2} \text{ А}$.

5. Складаємо й розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$Z(p) = R + p \cdot L_1 = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L_1} = -\frac{1000}{10 \cdot 10^{-3}} = -10^5 \text{ с}^{-1}.$$

Таким чином, вільні складові струмів мають вигляд:

$$i_{R_g} = A \cdot e^{-10^5 \cdot t}; \quad i_{L1_g} = B \cdot e^{-10^5 \cdot t}.$$

6. Постійні інтегрування A і B знаходимо з початкових умов.

$$i_R(t) = A \cdot e^{-10^5 t}; \quad i_{L1}(t) = 10^{-2} + B \cdot e^{-10^5 t}.$$

$$\text{При } t=0 - i_R(0) = 10^{-2} = A \Rightarrow \underline{i_R(t) = 10^{-2} \cdot e^{-10^5 \cdot t}}, \text{ А.}$$

$$\text{При } t=0 - \underline{i_{L1}(t) = 10^{-2} - 10^{-2} \cdot e^{-10^5 \cdot t}}, \text{ А.}$$

7. Визначаємо напругу на індуктивності L_2 :

$$u_{L2}(t) = M \cdot \frac{di_{L1}(t)}{dt} = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 \cdot 10^{-2} \cdot e^{-10^5 \cdot t} = 0,5 \cdot e^{-10^5 \cdot t} \text{ В.}$$

Таким чином, $u_{L2}(0) = 0,5 \text{ В}$. Перевіримо це.

Продиференціюємо рівняння $i_R(t) + i_{L1}(t) = J$ та помножимо праву та ліву частину отриманого результату на M :

$$M \cdot \frac{di_R(t)}{dt} + M \cdot \frac{di_{L1}(t)}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{L2}(0) = M \cdot \frac{di_{L1}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = -M \cdot \frac{di_R(t)}{dt} \Big|_{t=0} = -0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} \cdot (-10^5) = 0,5 \text{ В.}$$

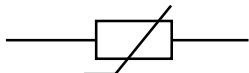
РОЗДІЛ 3 СТАЛІ ПРОЦЕСИ В НЕЛІНІЙНИХ КОЛАХ І МЕТОДИ ЇХ РОЗРАХУНКУ

Нелінійні електричні кола – це такі кола, що містять хоча б один нелінійний елемент (*HE*), який не може бути описаний за допомогою постійних коефіцієнтів. У цьому випадку залежності між напругами, струмами, зарядами, магнітними потоками (потокочепленнями) мають вигляд:

$$u = f\left(i, \frac{di}{dt}\right), \quad \psi = f\left(i, \frac{di}{dt}\right), \quad q = f\left(u, \frac{du}{dt}\right), \quad (3.1)$$

тобто в загальному випадку спостерігається залежність не тільки від змінної, але й від швидкості її зміни. Якщо ж ми розглядаємо кола постійного струму, то залежності (3.1) – це нелінійні вольт-амперна характеристика (*ВАХ*) – $u = f(i)$, вебер-амперна характеристика – $\psi = f(i)$ і кулон-вольтна характеристика – $q = f(u)$.

Нелінійні елементи поділяють на нелінійні опори, нелінійні індуктивності і ємності. При постійних струмах як нелінійні можуть розглядатися лише кола з резистивними елементами, *ВАХ* яких не є прямою.

Узагальнене позначення нелінійного елемента на схемах – 

Для розрахунку нелінійних кіл постійного струму застосовують:

- метод двох вузлів;
- заміну декількох паралельно з'єднаних віток однією еквівалентною;
- метод еквівалентного генератора.

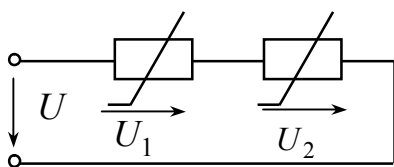


Рисунок 3.1 – Послідовне з'єднання *HE*

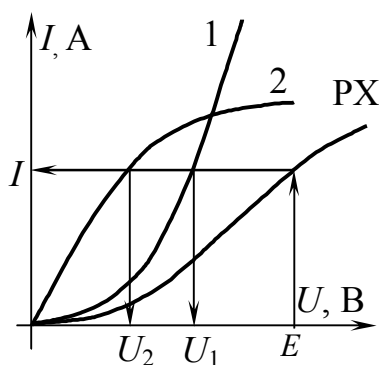


Рисунок 3.2 – Побудова *PX* для послідовно з'єднаних *HE*

Для проведення розрахунку, як правило, графічного, повинні бути відомі *ВАХ* нелінійних елементів, що входять у схему.

Графічний метод вимагає великої точності виконання побудов.

При послідовному з'єднанні (схема на рис. 3.1) розрахунок базується на другому законі Кірхгофа: $U = U_1 + U_2$. Один з параметрів, а саме напруга на вході кола U або струм I , повинен бути заданим для визначення струму (або напруги U), а також напруг на елементах U_1 і U_2 . Оскільки з'єднання послідовне, то загальним параметром є струм. Довільно задаємося різними значеннями струму і додаємо напруги на нелінійних елементах при кожному конк-

ретному значенні струму, тобто будуюмо результуючу ВАХ (РХ) – рисунок 3.2.

При паралельному з'єднанні елементів (рис. 3.3) загальним параметром є напруга. Тому результуючу ВАХ будують за першим законом Кірхгофа: $I = I_1 + I_2$ (рис. 3.4).

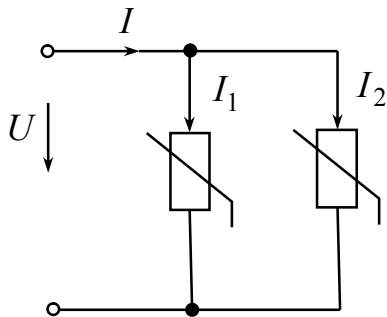


Рисунок 3.3 – Паралельне з'єднання НЕ

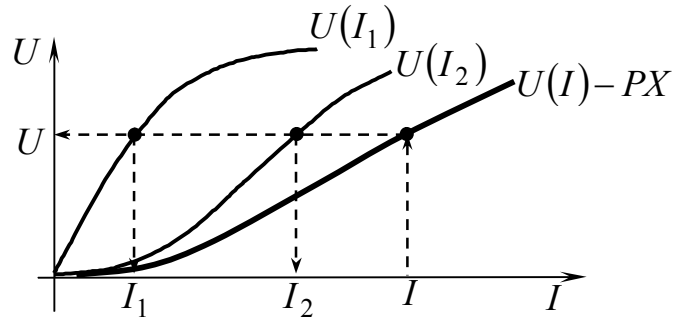


Рисунок 3.4 – Побудова РХ для паралельно з'єднаних НЕ

Якщо була задана напруга U , а струми в паралельних вітках невідомі, то за напругою на вході кола U за ВАХ нелінійних елементів визначають струми I_1 , I_2 , а потім за першим законом Кірхгофа – загальний струм $I = I_1 + I_2$. Якщо був заданий струм I , то необхідно будувати результуючу характеристику $U = f(I_1 + I_2)$.

Розрахунок змішаного з'єднання нелінійних елементів містить етапи розрахунку кіл з паралельним і послідовним з'єднанням елементів. Для схеми рисунку 3.5, а після заміни двох паралельно з'єднаних нелінійних елементів «2» і «3» одним еквівалентним нелінійним опором «2-3» одержуємо послідовне з'єднання елементів «1» і «2-3» – схема на рисунку 3.5, б. При цьому треба побудувати результуючу ВАХ умовного нелінійного елемента «2-3».

Подальший розрахунок схеми на рисунку 3.5,б (припустимо, що задана напруга U), проводять так:

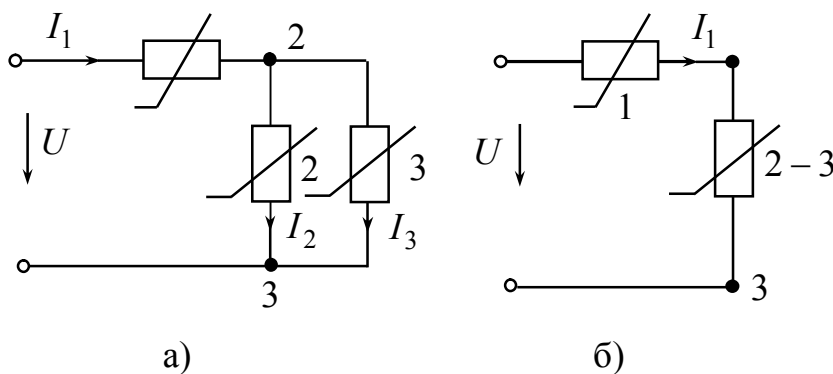


Рисунок 3.5 – Схеми для розрахунку при змішаному з'єднанні НЕ

- будують результуючу ВАХ послідовно з'єднаних елементів «1» і «2-3»;
- визначають струм I_1 , а також напруги на першому нелінійному елементі U_1 і на паралельних вітках U_{23} ;
- за напругою U_{23} і

заданим вольт-амперними характеристиками елементів «2» і «3» визначають струми в паралельних вітках I_2 і I_3 .

Якщо в складному електричному колі (рис. 3.6) є тільки одна вітка, що містить HE з відомою ВАХ, то визначення струму в ній зручно виконувати методом еквівалентного генератора. З цією метою решта схеми відносно вітки з HE розглядається як активний двополюсник (рис. 3.6,б, рис. 3.6,в). Для еквівалентної схеми рисунку 3.6 знаходимо напругу неробочого ходу:

$$U_{ab\text{нх}} = E_1 - I_{\text{нх}} \cdot R_1, \quad (3.2)$$

$$\text{де } I_{\text{нх}} = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2} \text{ – струм неробочого ходу, якщо в схемі рисунку 3.6, а} \quad (3.3)$$

розімкнуті вітку з $R_{\text{не}}$.

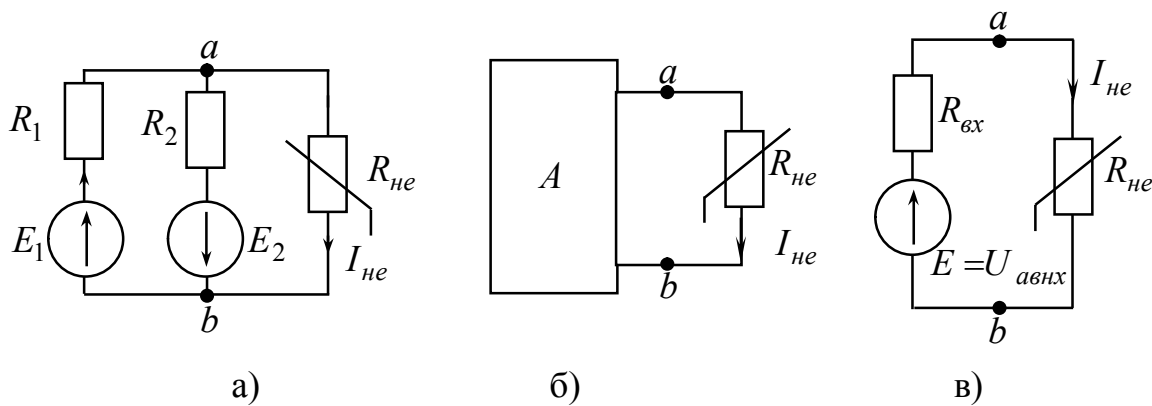


Рисунок 3.6 – Розрахунок схеми з HE методом еквівалентного генератора

Далі знаходимо $R_{\text{вх}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ – так званий вхідний опір двополюсника.

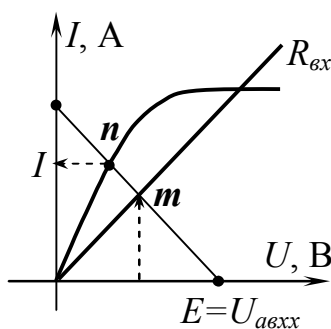


Рисунок 3.7 – Визначення струму вітки з нелінійним HE

За значенням $R_{\text{вх}}$ будемо лінійну характеристику цього опору, а струм HE визначаємо графічним способом – рисунок 3.7.

Властивості HE характеризуються його ВАХ, а також статичним й диференціальним опором.

Під *статичним* опором нелінійного елемента розуміють відношення напруги на нелінійному елементі до струму в ньому в

будь-якій точці ВАХ цього елемента (рис. 3.8):

$$R_{\text{ст}} = \frac{U}{I} = m_R \cdot \text{tg } \alpha. \quad (3.4)$$

де $m_R = \frac{m_U}{m_I}$ – масштаб за опором,

m_U, m_I – відповідно масштаби за опором, напругою, струмом.

Статичний опір (R_{cm}) характеризує поведінку HE в режимі постійного струму. При переході від однієї точки ВАХ до іншої величина R_{cm} змінюється.

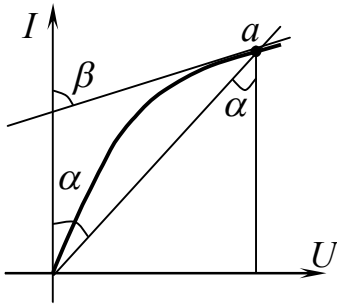


Рисунок 3.8 – Визначення R_{cm} та R_D за ВАХ HE

Під диференціальним опором (R_D) розуміють величину, яка характеризує нелінійний елемент при малих відхиленнях від даної точки нелінійної характеристики (рис. 3.8):

$$R_D = \frac{dU}{dI} = m_R \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (3.5)$$

Таким чином, величина R_D пропорційна тангенсу кута, який утворений дотичною

до ВАХ в даній точці й віссю струму I .

При послідовному з'єднанні декількох HE диференціальний опір результуючої характеристики при будь-якому струмі дорівнює сумі диференціальних опорів нелінійних елементів при цьому ж струмі.

Розглянемо властивості нелінійних елементів при змінному струмі.

1. При переході від однієї ділянки ВАХ до іншої статичні й диференціальні опори не залишаються постійними і в загальному випадку не дорівнюють один одному, але можуть співпадати в окремих точках і на окремих ділянках ВАХ.

2. Нелінійний елемент може мати несиметричну ВАХ, отже, опір нелінійного елемента залежить від знака прикладеної напруги (нелінійний елемент має вентильні властивості).

3. Нелінійні елементи бувають інерційними і безінерційними.

Якщо залежність між миттєвими значеннями напруги і

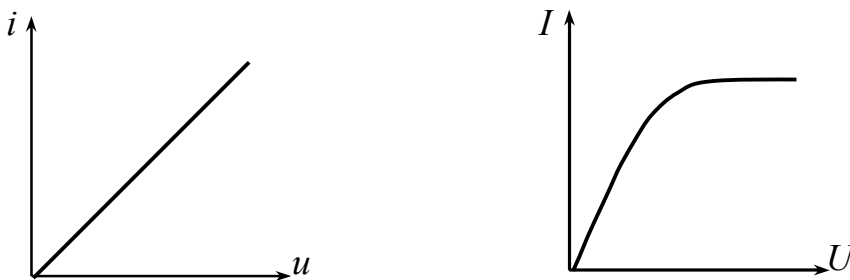


Рисунок 3.9 – ВАХ для миттєвих та діючих значень струму та напруги інерційних HE

струму лінійна, а залежність між діючими струмом і напругою нелінійна, то це – інерційний нелінійний елемент (лампа розжарювання, баретер, напівпровідникові термоопори). Теплові процеси, як відомо, інерційні, тому залежність $i(u)$ лінійна, а нелінійність характеристик $I(U)$ деяких нелінійних опорів обумовлена зміною їх опору внаслідок нагріву струмом (рис. 3.9).

Якщо обидві залежності $i(u)$ і $I(U)$ нелінійні – то це *безінерційний* елемент. Безінерційний *НЕ* має здатність перетворювати спектр коливань, що впливають на нього. Тобто, якщо до *НЕ* підвести синусоїдну напругу, то струм через нього буде несинусоїдний, і навпаки, при проходженні через *НЕ* синусоїдного струму напруга на ньому буде несинусоїдною.

При розрахунку нелінійних кіл при змінному струмі (напрузі) застосовують методи апроксимації нелінійних вольт-амперних характеристик.

Апроксимація, як відомо, це заміна заданої нелінійної характеристики аналітичною функцією, яка з певною точністю виражає задану залежність. Ця процедура дозволяє досліджувати процеси у нелінійному елементі аналітично. Оскільки нелінійні елементи не є абсолютно стабільними і залежать від різних зовнішніх чинників, то на практиці не прагнуть до особливо точної апроксимації характеристик. Існують наступні види апроксимації:

- апроксимація ступеневим поліномом;
- апроксимація графоаналітичним методом трьох ординат;
- кусково-лінійна апроксимація.

ЗАДАЧА 1

Розрахунок диференціального опору нелінійного елемента в колі постійного струму

Нелінійний елемент має вольт-амперну характеристику, що задана аналітично $I = 0,25 \cdot U + 0,5 \cdot U^3$.

Визначити диференціальний опір елемента при $U = 0$ В.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати визначення нелінійного елемента і диференціального опору;
- вміти знаходити диференціальний опір нелінійного елемента.

Розв'язання

1. Запишемо співвідношення для розрахунку диференціального опору нелінійного елемента: $R_D = \frac{dU}{dI}$.

2. Визначимо похідну $\frac{dI}{dU}$:

$$\frac{dI}{dU} = \frac{d}{dU} \cdot (0,25 \cdot U + 0,5 \cdot U^3) = 0,25 + 3 \cdot 0,5 \cdot U^2 = 0,25 + 1,5 \cdot U^2.$$

$$3. R_A = \frac{dU}{dI} = \frac{1}{0,25 + 1,5 \cdot U^2} \Rightarrow \text{при } U = 0 \quad R_A = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ Ом.}$$

ЗАДАЧА 2

Розрахунок струмів і напруг у схемі з нелінійним елементом за допомогою аналітичного і графічного методів

Нелінійний елемент R_1 , з'єднаний послідовно з лінійним опором $R_2 = 12$ Ом (рис.3.10). На вхід кола подається постійна напруга $U = 4$ В. ВАХ нелінійного елемента задана законом $I = f(U_1): I = a \cdot U_1^2$, де $a = 0,02 \frac{1}{\text{В} \cdot \text{Ом}}$.

Визначити значення струму кола I , а також напруг на елементах U_1 , U_2 аналітично і за допомогою графічного методу.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати графічний метод розрахунку електричних кіл з нелінійними елементами;
- вміти користуватися основними законами електричного кола для знаходження струму і напруг.

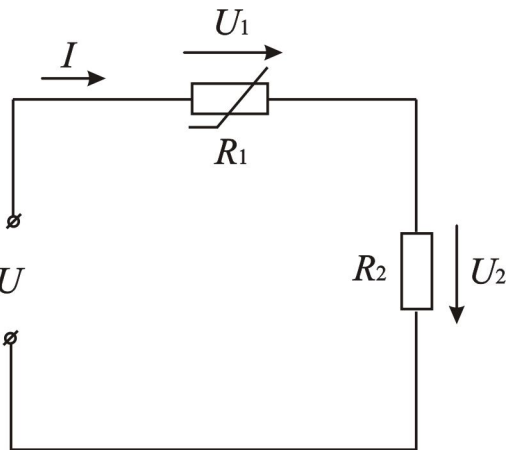


Рисунок 3.10 – Схема досліджуваного кола

Розв'язання

Аналітичний метод

1. За другим законом Кірхгофа напруга на вході схеми: $U = U_1 + U_2$, де U_1 – напруга на нелінійному елементі, U_2 – напруга на лінійному елементі кола. За законом Ома напруга на лінійному елементі $U_2 = I \cdot R_2$. При послідовному з'єднанні елементів струм через усі елементи однаковий:

$$U = U_1 + U_2 = U_1 + I \cdot R_2 = U_1 + a \cdot U_1^2 \cdot R_2.$$

2. Маємо квадратне рівняння: $a \cdot R_2 \cdot U_1^2 + U_1 - U = 0$.

Підставивши відомі коефіцієнти отримаємо: $0,24 \cdot U_1^2 + U_1 - 4 = 0$.

3. Знаходимо корені квадратного рівняння:

$$U_{1(1)} = \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4 \cdot 0,24 \cdot (-4)}}{2 \cdot 0,24} = 2,5 \text{ В}, \quad U_{1(2)} = \frac{-1 - \sqrt{1^2 - 4 \cdot 0,24 \cdot (-4)}}{2 \cdot 0,24} = -6,67 \text{ В}.$$

Другий від'ємний корінь відкидаємо, так як він не відповідає напрямку, вказаному на рисунку 3.10. Таким чином, $U_1 = 2,5 \text{ В}$.

4. Знаходимо струм кола і напругу на лінійному елементі:

$$I = a \cdot U_1^2 = 0,02 \cdot 2,5^2 = 0,125 \text{ А}; \quad U_2 = I \cdot R_2 = 0,125 \cdot 12 = 1,5 \text{ В}.$$

Графічний метод

1. Складаємо таблицю ВАХ нелінійного елемента $I = a \cdot U_1^2 = 0,02 \cdot U_1^2$:

Таблиця 3.1 – Вольт-амперна характеристика нелінійного елемента R_1

$U_1, \text{В}$	0	1	2	3	4	5
$I, \text{А}$	0	0,02	0,08	0,18	0,32	0,5

За таблицею будуюмо ВАХ нелінійного елемента, яка є віткою параболи (рис. 3.11).

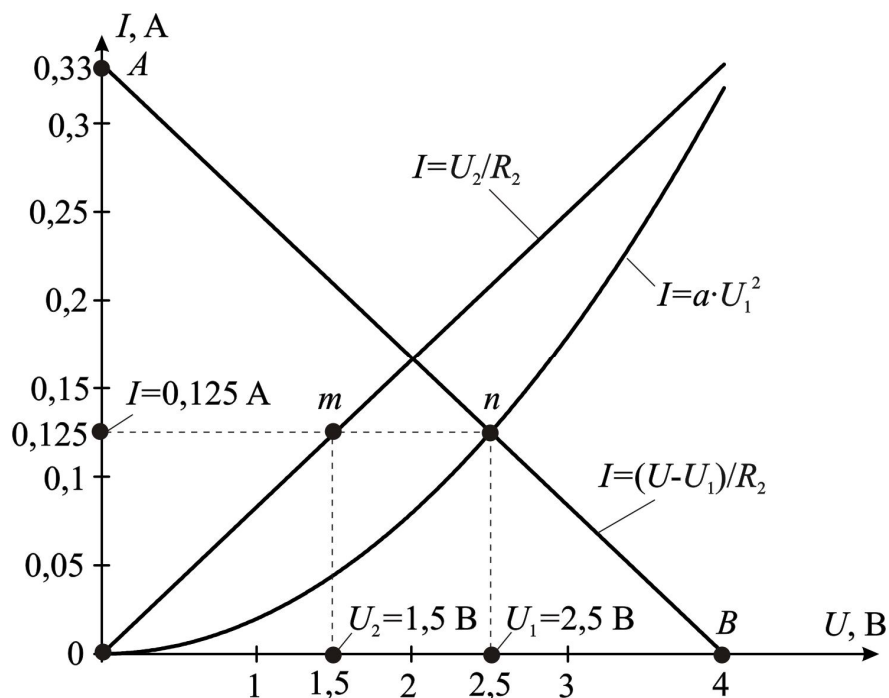


Рисунок 3.11 – Графічне визначення струму кола I та напруг U_1, U_2

2. За двома точками $U_2 = 0, I = 0$; $U_2 = 3, I = 0,25$ будемо ВАХ лінійного елемента $I = \frac{U_2}{R_2} = \frac{1}{12} \cdot U_2$.

3. За другим законом Кірхгофа: $U = U_1 + U_2 = U_1 + I \cdot R_2 \Rightarrow I = \frac{U - U_1}{R_2} = \frac{4 - U_1}{12}$. Отримане рівняння є допоміжною прямою. Будемо відрізок допоміжної прямої $[AB]$ за двома точками $U_1 = 0, I = 0,333$; $U_1 = 4, I = 0$.

4. Відрізок $[AB]$ перетне криву $I = a \cdot U_1^2$ у точці n .

Координати точки n визначають струм і напругу на нелінійному елементі – $I = 0,125$ А, $U_1 = 2,5$ В.

5. У зв'язку з тим, що елементи кола з'єднані послідовно, у колі протікає один струм. Тому значенню струму $I = 0,125$ А відповідає напруга лінійного елемента $U_2 = 2,5$ В (точка m на рисунку 3.11).

Результати аналітичного і графічного вирішення задачі співпадають.

ЗАДАЧА 3

Розрахунок електричного кола постійного струму з нелінійними елементами графічним методом

Електричне коло постійного струму, що зображене на рисунку 3.12,а, містить два нелінійних елемента R_1 і R_2 , вольт-амперні характеристики яких задані в таблицях 2.2 і 2.3 відповідно. Параметри інших елементів кола: $E_1 = 7$ В, $E_3 = 13$ В, $R_3 = 10$ Ом (лінійний елемент).

Таблиця 3.2 – Вольт-амперна характеристика нелінійного елемента $R_1(I_1)$

$U_1, \text{В}$	0	2	4	6	8	10	12	14
$I_1, \text{А}$	0	0,26	0,37	0,41	0,43	0,435	0,435	0,44

Таблиця 3.3 – Вольт-амперна характеристика елемента $R_2(I_2)$

$U_2, \text{В}$	0	2	4	6	8	10	12	14
$I_2, \text{А}$	0	0,21	0,26	0,3	0,34	0,37	0,4	0,43

Визначити:

- струми у вітках електричного кола;
- напругу між вузлами U_{ab} .

Для вирішення задачі необхідно:

- знати визначення нелінійного елемента і динамічного опору;
- знати, які методи використовуються для розрахунку нелінійних кіл;
- вміти розраховувати нелінійні кола графічним методом.

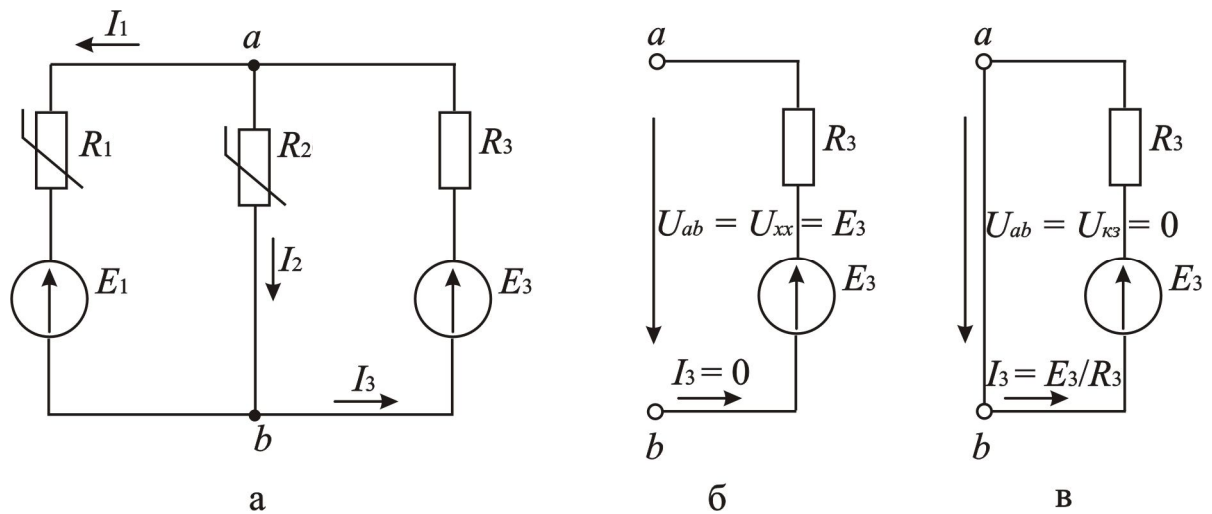


Рисунок 3.12 – Схеми для графічного визначення струмів у вітках кола

Розв'язання

1. Довільно вибираємо додатні напрямки струмів у вітках (рис. 3.12,а).

Система рівнянь за законами Кірхгофа:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ U_2 - U_1 = U_{ab} - U_1 = E_1, \\ U_3 + U_2 = U_3 + U_{ab} = E_3 \end{cases}$$

де $U_{ab} = U_2$,

$U_3 = I_3 \cdot R_3$ – лінійна функція.

2. Виразимо струми I_1, I_2, I_3 в функції однієї змінної, а саме – напруги U_{ab} .

$$E_1 + U_1 = U_{ab} = E_1 + I_1(U_{ab}) \cdot R_1(I_1) \Rightarrow I_1(U_{ab}) = \frac{U_{ab} - E_1}{R_1(I_1)} = \frac{U_{ab} - 7}{R_1(I_1)};$$

$$U_2 = U_{ab} \Rightarrow I_2(U_{ab}) = I_2(U_2);$$

$$E_3 - U_3 = U_{ab} = E_3 - I_3(U_{ab}) \cdot R_3 \Rightarrow I_3(U_{ab}) = \frac{E_3 - U_{ab}}{R_3} = \frac{13 - U_{ab}}{10}.$$

3. Будуємо криві залежностей струмів I_1, I_2, I_3 відповідно від напруг U_1, U_2, U_3 (див. рис. 3.13). Будуючи залежність $I_3(U_3)$ вважаємо, що напруга на опорі R_3 може змінюватись від нуля до напруги джерела $E_3 = 13$ В.

Будуємо криві залежностей струмів I_1, I_2, I_3 від напруги U_{ab} (рис. 3.13) за одержаними вище співвідношеннями.

За рахунок джерела E_1 крива $I_1(U_1)$ зміщується праворуч від початку координат на 7 вольт, утворюючи криву $I_1(U_{ab}) = \frac{U_{ab} - 7}{R_1(I_1)}$. Напруга U_{ab} при цьому може змінюватись від 7 до 13 вольт, що відповідає додатним значенням струму I_1 .

Пряму $I_3(U_{ab}) = \frac{13 - U_{ab}}{10}$ будуємо за двома точками $U_{ab} = 13$ В ($I_3 = 0$); $U_{ab} = 0$ ($I_3 = 1,3$ А), що відповідає режимам неробочого ходу і короткого замикання нелінійного навантаження відносно вітки з ЕРС E_3 і опором R_3 (див. рисунки 3.12,б і 3.12,в).

Будуємо допоміжну залежність $I_{12}(U_{ab}) = I_1(U_{ab}) + I_2(U_{ab})$.

Точка M перетину кривої $I_{12}(U_{ab})$ і прямої $I_3(U_{ab})$ є робочою точкою і для неї виконується перший закон Кірхгофа.

Ордината точки M дає чисельне значення струму $I_3 = 0,49$ А, а абсциса точки M – чисельне значення напруги $U_{ab} = 8,1$ В.

Для одержання чисельних значень струмів I_1 і I_2 опускаємо з точки M перпендикуляр на вісь абсцис, тоді ордината точки L дає значення струму I_1 , а ордината точки K – значення струму I_2 : $I_1 = 0,15$ А; $I_2 = 0,34$ А.

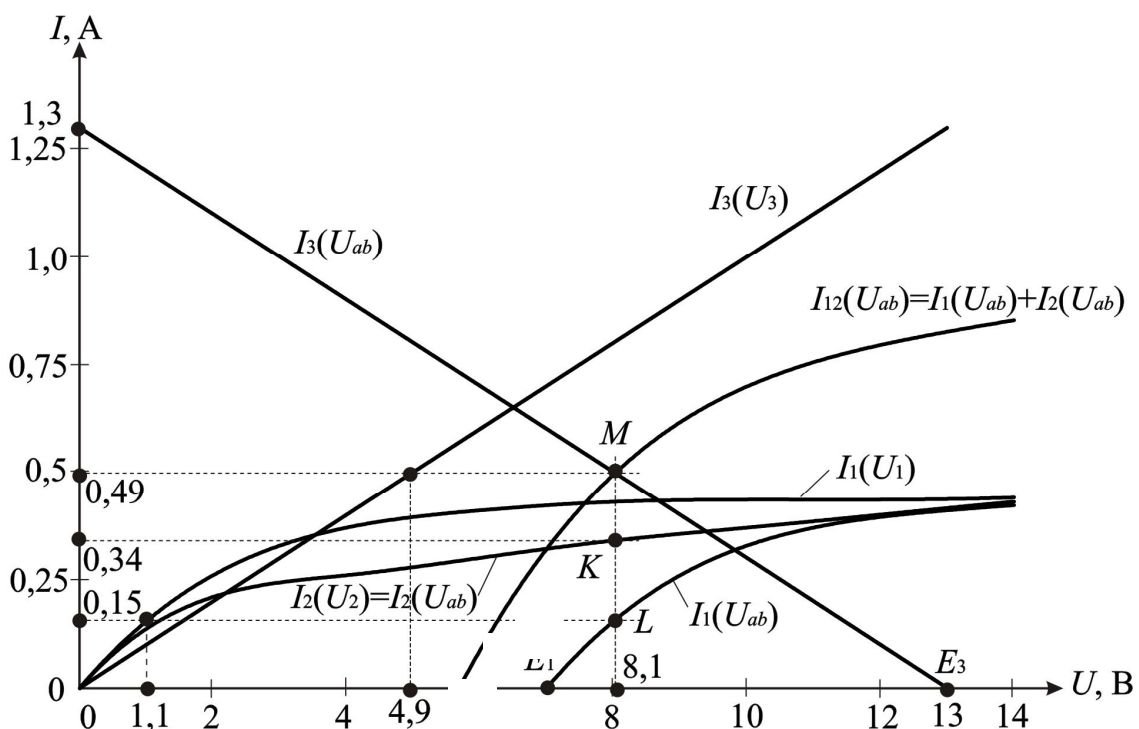


Рисунок 3.13 – Графічне визначення струмів віток дослідженого кола

Визначаємо падіння напруги на нелінійному опорі U_1 а також лінійному опорі U_3 , використовуючи вольт-амперні характеристики $I_1(U_1)$ і $I_3(U_3)$:
 $U_1 = 1,1$ В; $U_3 = 4,9$ В.

ЗАДАЧА 4

Розрахунок електричного кола постійного струму з нелінійним елементом методом еквівалентного генератора

Електричне коло з джерелом постійної напруги (рис. 3.14), містить нелінійний опір R_5 , вольт-амперна характеристика якого задана таблицею 3.4. Параметри інших елементів схеми: $E_1 = 5$ В, $R_1 = R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 15$ Ом.

Таблиця 3.4 – Вольт-амперна характеристика нелінійного елемента R_5

$U_5, \text{В}$	0	0,5	1,0	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$I_5, \text{А}$	0	0,25	0,39	0,47	0,52	0,55	0,57	0,6	0,62	0,635

Визначити струм в нелінійному опорі R_5 .

Для вирішення задачі необхідно:

- знати основи методу еквівалентного генератора;
- вміти розраховувати нелінійні кола графічним методом.

Розв'язання

1. Представимо задану схему у вигляді еквівалентного генератора, що приєднаний до вітки з нелінійним опором R_5 (рис. 3.15).

За методом еквівалентного генератора необхідно визначити значення вхідного опору активного двополіусника відносно затискачів $a-b$ і напругу $U_{ab\text{вх}}$ між точками « a » та « b » при відключеному нелінійному опорі.

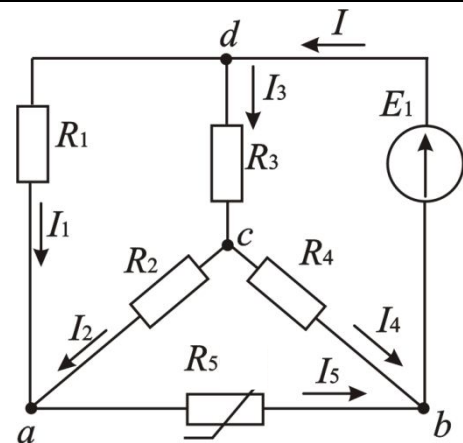


Рисунок 3.14 – Досліджуване нелінійне коло

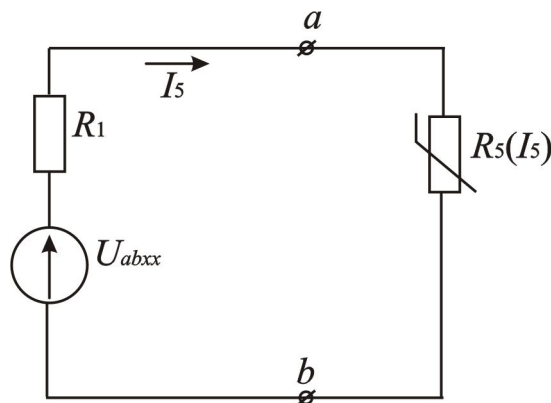


Рисунок 3.15 – Схема у вигляді еквівалентного генератора та нелінійного опору R_5

2. Визначимо вхідний опір (схема на рис. 3.16).

$$R_{\text{ex}} = \frac{R_1 \cdot \left(R_2 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} \right)}{R_1 + R_2 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}} = \frac{5 \cdot \left(5 + \frac{10 \cdot 15}{10 + 15} \right)}{5 + 5 + \frac{10 \cdot 15}{10 + 15}} = 3,43 \text{ Ом.}$$

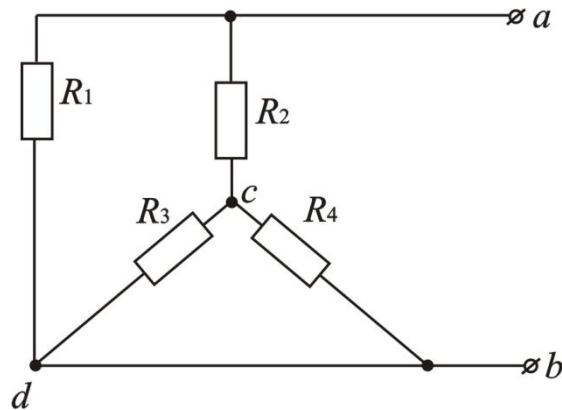


Рисунок 3.16 – Схема для визначення вхідного опору

3. Розрахуємо струми при відключені нелінійного опору (рис. 3.17), для чого розрахуємо еквівалентний опір відносно затискачів «d», «b»:

$$R_{db} = R_4 + \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_3 + R_1 + R_2} = 15 + \frac{10 \cdot (5 + 5)}{10 + 5 + 5} = 20 \text{ Ом.}$$

За законом Ома: $I'_4 = \frac{E}{R_{db}} = \frac{5}{20} = 0,25 \text{ А.}$

Струми в паралельних вітках, так як $R_1 + R_2 = R_3$:

$$I'_1 = I'_2 = I'_4 \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 0,25 \cdot \frac{10}{5 + 5 + 10} = 0,125 \text{ А.}$$

4. За другим законом Кірхгофа знаходимо напругу неробочого ходу:

$$U_{abnx} = R_4 \cdot I'_4 + R_2 \cdot I'_2 = 15 \cdot 0,25 + 5 \cdot 0,125 = 4,37 \text{ В.}$$

5. Подальший розрахунок схеми здійснюємо за нелінійним рівнянням $U_{abnx} = I_5 \cdot R_{\text{ex}} + U_5$.

Наведене рівняння можна розв'язати графічно двома способами: або побудувавши сумарну вольт-амперну характеристику вхідного опору та нелінійного опору R_5 , або так (рис. 3.18):

• розглядаємо рівняння

$$U_5 = U_{abnx} - I_5 \cdot R_{\text{ex}} \text{ в режимі короткого}$$

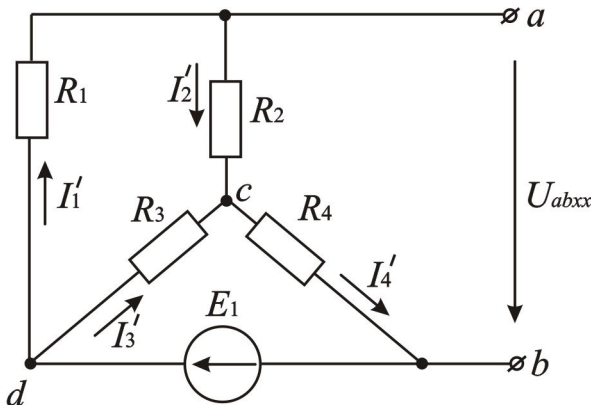


Рисунок 3.17 – Схема при відключені нелінійного опору

замикання $U_5 = 0$, $I_5 = \frac{U_{abxx}}{R_{ex}} = 1,27 \text{ A}$;

- розглянемо рівняння $U_5 = U_{abnx} - I_5 \cdot R_{ex}$ в режимі неробочого ходу $\Rightarrow I_5 = 0$, $U_5 = U_{abnx} = 4,37 \text{ В}$;

- відкладемо точки з координатами $(4,37; 0)$, $(0; 1,26)$ та отримуємо відрізок $[KN]$ прямої $I_5 = \frac{U_{abnx} - U_5}{R_{ex}}$;

- побудуємо вольт-амперну характеристику нелінійного опору R_5 за даними таблиці 2.4;

- точка M перетину вольт-амперної характеристики нелінійного опору R_5 з відрізком $[KN]$ дає струм та напругу на R_5 : $I_5 = 0,55 \text{ А}$, $U_5 = 2,5 \text{ В}$.

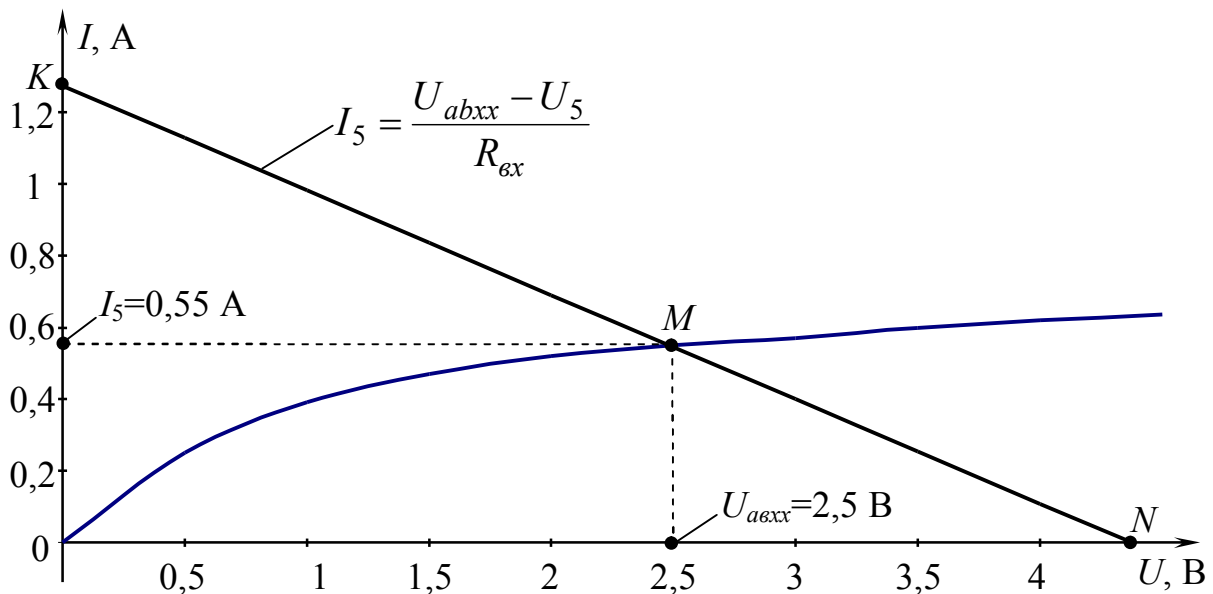


Рисунок 3.18 – Графічне визначення струму I_5

ЗАДАЧА 5

Розрахунок кола синусоїдного струму з ідеальним діодом

Напруга на вході кола, що складається з резистора $R = 1 \text{ кОм}$ і ідеального діода VD (рис. 3.19), дорівнює $u(t) = 200 \cdot \sin(\omega t) \text{ В}$.

Визначити:

- середнє значення струму в колі I_0 ;
- діюче значення струму в колі I .

Для вирішення задачі необхідно:

- знати визначення ідеального діода;
- вміти розраховувати середнє і діюче значення струму.

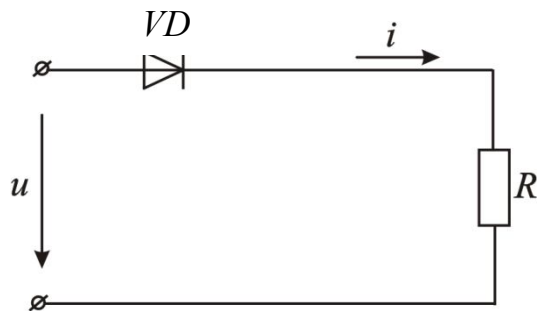


Рисунок 3.19 – Досліджуване коло

Розв'язання

1. Ідеальним діодом називається діод, в якого опір у провідному стані дорівнює нулю, а в закритому стані нескінченості. Тому такий діод буде пропускати лише додатну півхвилю струму.

2. Визначимо амплітудне значення струму: $I_m = \frac{U_m}{R} = \frac{200}{1000} = 0,2 \text{ А.}$

3. Знайдемо постійну складову струму: $I_0 = \frac{I_m}{\pi} = \frac{0,2}{3,14} = 0,0638 \text{ А.}$

4. Розрахуємо діюче значення струму: $I = \frac{I_m}{2} = \frac{0,2}{2} = 0,1 \text{ А.}$

5. Визначимо потужність втрат в резисторі: $P_H = \frac{U_m \cdot I_m}{4} = \frac{200 \cdot 0,2}{4} = 10 \text{ Вт.}$

ЗАДАЧА 6

Розрахунок електричного кола синусоїдного струму з нелінійним елементом

Резистор з опором $R = 1 \text{ кОм}$ підключений до джерела синусоїдної ЕРС $e(t) = 150 \cdot \sin(\omega t)$ через діод VD (рис. 3.20,а), вольт-амперна характеристика якого показана на рисунку 3.20,б.

Визначити:

- середнє значення струму в колі I_0 ;
- діюче значення струму в колі I ;
- потужність джерела P ;
- потужність втрат в резисторі P_H .

Побудувати графік струму $i(t)$.

Для вирішення задачі необхідно:

- знати які методи використовують для розрахунку нелінійних кіл синусоїдного струму;

- знати визначення середнього і діючого струму;
- вміти проводити заміну діода еквівалентним нелінійним резистором.

Розв'язання

1. Замінімо діод у схемі рисунку 3.20,а нелінійним резистором, еквівалентний опір R_E якого є різним при прямому і зворотному напрямках струму (рис. 3.21,а).

2. Визначимо еквівалентний опір діода з характеристики рисунку 3.20,б:

- в прямому напрямі $R_{E,np} = 1,2/0,3 = 4 \text{ Ом}$;
- у зворотному напрямі $R_{E,зв} = 200/(0,05 \cdot 10^{-6}) = 4 \cdot 10^9 \text{ Ом}$.

Струм у колі при прямому i_1 й зворотному i_2 напрямках являє собою півхвилі синусоїди, амплітуди яких:

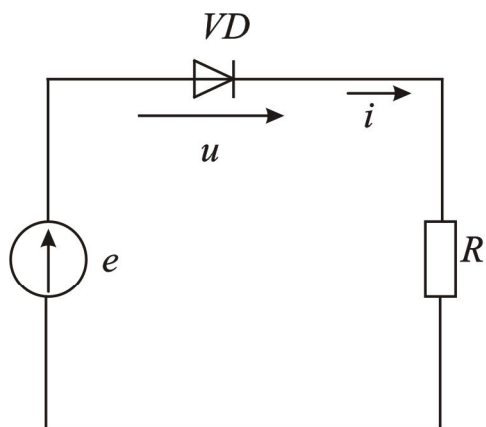
$$I_{mnp} = \frac{E_m}{R + R_{E,np}} = \frac{150}{1000 + 4} = 0,149 \text{ А},$$

$$I_{mзв} = \frac{E_m}{R + R_{E,зв}} = \frac{150}{1000 + 4 \cdot 10^9} = 0,0375 \cdot 10^{-6} \text{ А}.$$

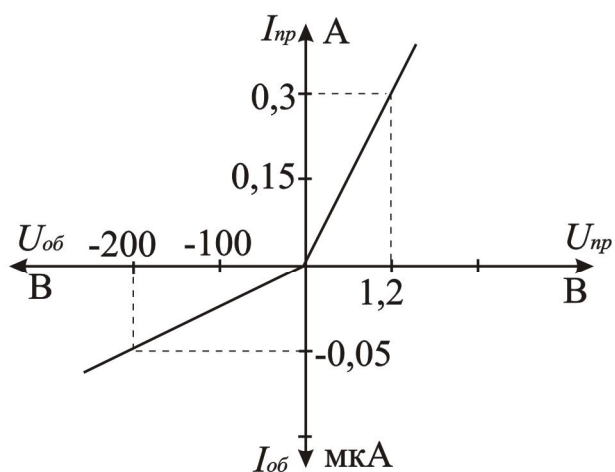
3. Будуємо залежність $i(\omega t)$ (рис. 3.21,б).

4. Середнє значення постійної складової струму:

$$I_0 = I_{0np} - I_{0зв} = \frac{I_{mnp}}{\pi} - \frac{I_{mзв}}{\pi} = \frac{0,149 - 0,0375 \cdot 10^{-6}}{3,14} = 0,047 \text{ А}.$$



а



б

Рисунок 3.20 – Досліджуване коло та ВАХ діода VD

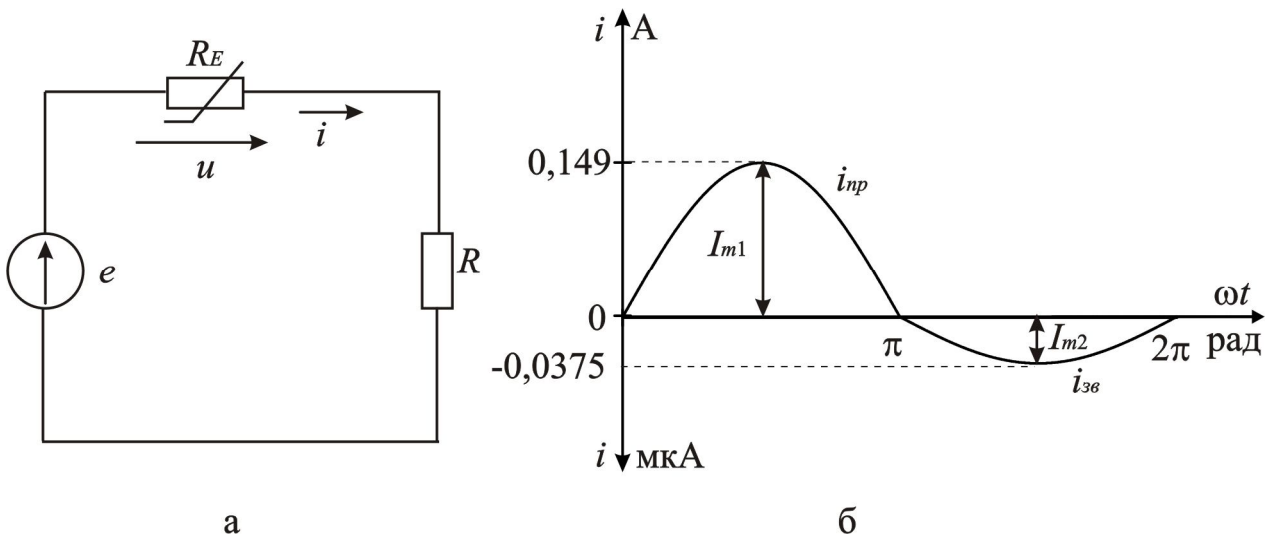


Рисунок 3.21 – Схема заміщення досліджуваного кола та залежність $i(\omega t)$

5. Визначаємо діюче значення струму:

$$I = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} I_{mnp}^2 \cdot (\sin \omega t)^2 d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} I_{mзв}^2 \cdot (\sin \omega t)^2 d\omega t \right)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{I_{mnp}^2 + I_{mзв}^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0,149^2 + (0,0375 \cdot 10^{-6})^2} = 0,075 \text{ А.}$$

6. Потужність джерела:

$$P = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} (e(t) \cdot i(t)) d\omega t = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} (e(t) \cdot i_{np}(t)) d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} (e(t) \cdot i_{зв}(t)) d\omega t \right) =$$

$$= \frac{E_m}{4} \cdot (I_{mзв} + I_{mnp}) = \frac{150}{4} \cdot (0,149 + 0,0375 \cdot 10^{-6}) = 5,6 \text{ Вт.}$$

7. Знайдемо потужність втрат в резисторі:

$$P_H = I^2 \cdot R = 0,075^2 \cdot 1000 = 5,6 \text{ Вт.}$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Форкун Я. Б. Конспект лекцій з дисципліни «Теоретичні основи електротехніки», частина II для студентів усіх форм навчання напрямів 6.050701 – Електротехніка та електротехнології, 6.050702 – Електромеханіка та спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка / Я. Б. Форкун, М. Л. Глєбова, Н. О. Сабалаєва ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 102 с.
2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учебник / Л. А. Бессонов. – Москва : Гардарики, 2002. – 640 с.
3. Основы теории цепей : учеб. для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, Н. Н. Нетушил, П. И. Страхов. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
4. Рибалко М. П. Теоретичні основи електротехніки. Лінійні електричні кола : підручник / М. П. Рибалко, В. О. Есауленко, В. І. Костенко. – Донецьк : Новий світ, 2003. – 513 с.
5. Воробкевіч А. Ю. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки : навч. посібник. / А. Ю. Воробкевіч, О. І. Шегедін. – Київ : Магнолія плюс, 2004. – ч. 1. – 224 с.
6. Перхач В. С. Теоретична електротехніка. Лінійні кола : підручник / В. С. Перхач. – Київ : Вища школа, 1992. – 439 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки
до практичних робіт
з дисципліни

«ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ»

за змістовими модулями

«Лінійні електричні кола періодичного змінного струму»,
«Розрахунок перехідних процесів в лінійних електричних колах»,
«Сталі процеси в нелінійних колах і методи їх розрахунку»

*(для студентів усіх форм навчання напрямів
6.050701 – Електротехніка та електротехнології,
6.050702 – Електромеханіка та спеціальності,
141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка)*

Укладачі: **ФОРКУН** Яна Борисівна,
ГЛЄБОВА Марина Леонідівна,
САБАЛАЄВА Наталія Олегівна

Відповідальний за випуск *Я. Б. Форкун*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2016, поз. 239 М

Підп. до друку 20. 04. 2016

Друк на ризографі

Зам. №

Формат 60x84/16

Ум. друк. арк. 4,2

Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002

Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 4705 від 28.03.2014 р.