МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

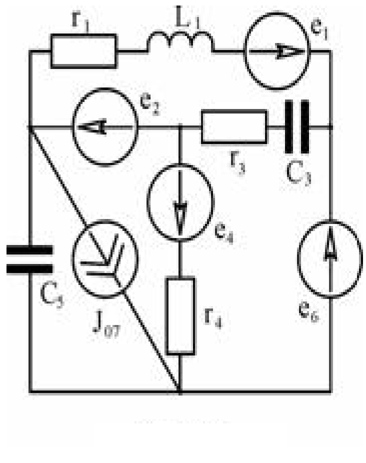
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійного вивчення та виконання контрольної роботи
з навчальної дисципліни

# ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

*(для студентів 4–5 курсів денної і заочної форм навчання
напряму підготовки 6.050701 − Електротехніка та електротехнології
та слухачів другої вищої освіти зі спеціальності
7.05070103 −Електротехнічні системи електропостачання)*




**Харків**
**ХНУМГ ім. О. М. Бекетова**
**2016**

Методичні вказівки до самостійного вивчення дисципліни «Основи наукових досліджень» (для студентів 4 – 5 курсів денної і заочної форм навчання напряму підготовки 6.050701 − Електротехніка та електротехнології та слухачів другої вищої освіти спеціальності 7.05070103 − Електротехнічні системи електроспоживання) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. : В. Ф. Рой. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 115 с.

Укладач д-р фіз.-мат. наук **В. Ф. Рой**

**Рецензенти**:

**В. В. Рудаков**, доктор технічних наук, професор національного технічного університету (ХПІ);

**П. П. Рожков**, кандидат технічних наук, доцент Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Рекомендовано кафедрою енергопостачання та електроспоживання міст, протокол № 3 від 09.03.2016 р.

ЗМІСТ

# ВСТУП

Сфера людської діяльності, метою якої є пошук і систематизація об'єктивних знань про навколишню дійсність, називають *наукою*.

Наукові дослідження характеризуються об'єктивністю, доведеністю і точністю отриманих даних, відтворюваністю результатів. Основними стимулами для дослідження навколишнього світу є потенційна цінність знання корисних властивостей об'єктів дослідження або причинних зв'язків між різними елементами досліджуваної системи. Основним стимулом для проведення дослідження є потенційна корисність для практичної діяльності людства зовнішніх умов, предметів і речей, а також відношень між ними. Необхідність у проведенні досліджень з'являється при виникненні проблеми або проблемної ситуації, що проявляється у невідповідності між «бажаним» і «сучасним» станом справи на поточний момент часу.

Наукові знання поділяються на окремі сфери – гуманітарні, природні і технічні. По напрямку і безпосередньому відношенню до практики науки поділяють на *фундаментальні* і *прикладні.* Якщо задачею фундаментальних наук є пізнання законів поведінки базисних структур природи, суспільства і мислення у «чистому» вигляді безвідносно до їх можливого застосування, то метою прикладних наук є застосування результатів фундаментальних наук для вирішення прикладних задач. При цьому виділяють два взаємопов'язаних рівня досліджень: *емпіричний* і *теоретичний.* На емпіричному рівні за допомогою спостережень і експериментів визначають нові факти, що дають змогу знайти якісні і кількісні характеристики об'єктів дослідження і явищ.

На теоретичному рівні висувають і формулюють загальні для даної галузі закономірності, що дозволяють пояснити знайдені факти і емпіричні закономірності, а також прогнозувати на цій основі подальший розвиток подій – тобто створювати *теорію.* Теорія – це система узагальнених достовірних знань, яка пояснює, описує і дозволяє прогнозувати явища і процеси в заданій сфері діяльності, тобто вона має *прогностичну цінність*. Теорія є найбільш розвинутою формою узагальненого наукового пізнання і містить в собі не тільки знання основних законів , але і пояснює факти на їх основі. Програмою побудови і практичного застосування теорії – є *метод,* як спосіб досягнення мети дослідження. Розрізняють методи: спостереження, порівняння, вимірювання, експеримент, узагальнення, абстрагування, формалізація, аналіз, синтез, індукція, дедукція, аналогія, моделювання та ін.

Правильний вибір методу дослідження значною мірою визначає його успіх.

Усі об'єкти дослідження можна поділити на дві групи. У першій групі дослідження закономірностей здійснюють у такій функціональній залежності, яка дозволяє однозначно визначити ланцюг причинно-наслідкових залежностей. Такі об'єкти називають *детермінованими*.

До другої групи відносять об'єкти, у яких причинно-наслідковий закон явно не спостерігається. Тут необхідно використовувати стохастичні (імовірнісні) підходи до визначення зв'язків між характеристиками досліджуваного об'єкта або системи.

Метою вивчення дисципліни є розвиток та формування системи теоретичних знань з методології проведення наукових досліджень в галузі електроенергетики, аналізу і моделюванні інженерних систем різного рівня, здобуття практичних навичок застосування наукових підходів при вирішенні проблем проектування і експлуатації об'єктів електроенергетики і електроенергетичних систем.

Предметом вивчення дисципліні є основні положення про закони, види і форми пізнання, методи організації наукових досліджень і здобуття знань. Вивчення основних законів формальної логіки, основ теорії випадкових помилок і методів оцінки погрішностей в процесі проведення досліджень та набуття знань; форм та етапів науково-технічної діяльності. Ознайомлення з сучасними методами планування, організації і проведення досліджень. Пошуку, нагромадженню та обробки наукової інформації за допомогою сучасних інформаційно-пошукових системи. Методів аналогового моделювання досліджуваних процесів та систем в науковій та технічній творчості. Знайомство з загальною теорією систем та основними етапами системного підходу до процесу пізнання в наукових дослідженнях. Визначення статистичних залежностей та законів розподілу стохастичних процесів. Рішення задач оптимізації досліджуваних процесів. Визначення динамічних характеристик та статистичних характеристик випадкових процесів по експериментальним даним. Методики обробки, аналізу, синтезу, узагальнення та форм представлення результатів отриманих експериментальних та теоретичних досліджень.

# 1 МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ НАУКОВОГО ПІЗНАННЯ

## 1.1 Поняття наукового знання

*Знання* − це відтворення у мовній або іншій формі узагальнених відомостей про закономірні зв'язки об’єктивного світу. Функціями знань є встановлення і узагальнення розрізнених уявлень про закономірності природи з метою подальшого їх практичного використання. Знання є продуктом суспільної діяльності людей, спрямованої на пізнання законів природи. Наукове знання може бути *відносним* або *абсолютним*.

Абсолютне знання – це повне, вичерпне відтворення відомостей про об'єкт, що забезпечує абсолютний збіг образа з об’єктом. Абсолютне знання не може бути спростоване або змінено в майбутньому, а лише уточнено (приклад – закон Ома при високочастотній напрузі).

Основою процесу пізнання є відбиття об'єктивної дійсності у свідомості людини в процесі його наукової, виробничої і суспільної діяльності, іменованою *практикою.* Потреби практики є основною рушійною силою розвитку пізнання, його метою. Практика є початком і одночасно завершенням усякого процесу пізнання. Завершення пізнання є відносним, оскільки в його процесі з’являються нові проблеми і задачі і, таким чином, цей процес є нескінченим. Істинні знання існують у вигляді законів науки, теоретичних положень і висновків, підтверджених практикою і існуючих об’єктивно.

## 1.2 Види пізнання

Процес руху людської думки від незнання до знання називають *пізнанням*. Розрізняють два рівні пізнання: *почуттєве,* – формуюче емпіричні знання, і *раціональне*, – формуюче теоретичні знання.

Почуттєве пізнання забезпечує безпосереднє сприйняття дослідником навколишньої дійсності : його елементами є *відчуття*, *подання та уява*.

*Відчуття* – це відбиття мозком людини властивостей предметів або явищ, що безпосередньо впливають на його органи почуттів, тобто це первинний почуттєвий образ предмета або явища.

*Подання* – це вторинний образ предмета або явища, тобто образи, які відновлюються по збереженим у мозку слідам минулих впливів.

*Уява* − це сполука і перетворення різних уявлень у цілісну картину нових образів. Раціональне пізнання доповнює і випереджає почуттєве, сприяє усвідомленню сутності процесів, розкриває закономірності їх розвитку. Формою раціонального пізнання є *абстрактне мислення*.

*Мислення* – це процес узагальненого відбиття в мозку людини властивостей, закономірних зв'язків, відносин між об'єктами або явищами, через доступні органам почуттів можливості пізнання дійсності як на основі особистого досвіду, так непрямим шляхом на основі досвіду інших людей. Основним інструментом мислення є логічні міркування, структурними елементами яких є *поняття, судження, умовиводи*.

*Поняття* – це думка, що відбиває істотні ознаки предмета або явища. Вони можуть бути загальними, одиничними, збірними, абстрактними і конкретними, абсолютними і відносними.

Загальні поняття відносять до багатьох предметів (явищ). *Одиничні* поняття відносять тільки до одного предмета. *Збірні* відносять до груп однорідних предметів (ліс, транспортний потік).

Відносні поняття завжди використовуються попарно: «правий» і «лівий».

Абсолютні не мають парних відносин: «будинок», «дерево».

Розкриття змісту поняття називають його *визначенням,* яке повинне вказувати на найближче родове поняття. Визначенням звичайно завершують процес наукового дослідження, закріплюючи досягнуті результати.

*Судження* − це зіставлення понять, що встановлюють об'єктивний зв'язок між предметами і їхніми ознаками або предметом і класом предметів. Розрізняють судження по якості (стверджувальні і негативні), кількості (загальні й частки), відношенню (категоричні і умовні), модальності (проблематичні, аподиктичні і асерторичні). До судження про предмет або явище можна прийти або шляхом безпосереднього спостереження, або за допомогою умовиводу.

## 1.3 Складові процесу пізнання

*Умовиводи (висновки)* – це результат процес мислення, що складається з декількох суджень, на підставі чого виводиться нове судження, що може стати приводом до дії. Умовиводи поділяються на дві категорії: *дедуктивні* й *індуктивні.* Дедуктивні являють собою виведення часткового випадку із загального положення. Індуктивні – на підставі окремих випадків формують загальні висновки.

*Наукова ідея* (принцип) – нове інтуїтивне пояснення явища без проміжної аргументації, усвідомлення сукупності зв'язків. Свою матеріалізацію ідея знаходить у гіпотезі.

*Гіпотеза* – це науково обґрунтоване припущення про причину, що викликає дане явище. Якщо вона погоджується зі експериментальними фактами, то її називають теорією або законом.

*Закон* – це вираження певного стійкого зв'язку між явищами або властивостями матеріальних об'єктів.

*Теорія* – система узагальненого знання відповідних сторін дійсності, е духовним, уявним відбиттям і відтворенням реальної дійсності. Теорія – найбільш розвинена форма наукового пізнання, що включає не тільки знання основних законів, але й пояснення фактів на їхній основі. Теорія виникає в результаті пізнавальної діяльності і практики. Це система узагальнених достовірних знань, яка пояснює, описує і дозволяє прогнозувати явища і процеси в заданій сфері діяльності, тобто вона має *прогностичну цінність*. Теорія є найбільш розвинутою формою узагальненого наукового пізнання і містить в собі не тільки знання основних законів, але і пояснює факти на їх основі.

*Принцип* у науковій теорії – це абстрактне визначення ідеї, правило, що виникло в результаті суб'єктивного осмислення досвіду людей. Вихідні положення наукової теорії називаються *аксіомами* (постулатами).

*Аксіома* – положення, що береться в якості базового, недоведеного в даній теорії, з якого виводяться інші висновки теорії. Аксіоми очевидні без доказів (еквівалентні постулату).

*Парадокс* – це твердження, що різко розходиться із загальноприйнятим твердженням, запереченням «загальновідомого». Наявність парадокса – це свідчення обмеженості існуючої теорії і вимога до її вдосконалення. Рух думки від незнання до знання керується методологією.

*Методологія* – це вчення про методи (алгоритм) пізнання і перетворення дійсності, духовній творчості й практиці. Пізнання – це вічне, нескінченне наближення мислення до розуміння досліджуваних явищ, більш глибокого вивчення їхніх законів.

Запитання для самоконтролю

1 *Наведіть поняття «знання» – відносне та абсолютне.*

*2 Види, способи та структура процесу пізнання?*

*3 З яких елементів складається процес мислення?*

*4 Індуктивний та дедуктивний процеси пізнання.*

*5 Розкрийте поняття гіпотези, закону, теорії в процесі пізнання.*

*6 Що таке: принцип,парадокс, аксіома?*

*7 Дайте визначення поняттям методу та методології.*

# 2 МЕТОДИ ЕМПІРИЧНИХ І ТЕОРЕТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

## 2.1 Поняття методу

Метод – це спосіб досягнення мети дослідження. Він повинен бути об'єктивний, оскільки в розроблюваній теорії дозволяє відбивати дійсність і її взаємозв'язки. Метод є програмою побудови і практичного застосування теорії. Правильний вибір методу дослідження значною мірою визначає його успіх.

Методи умовно розділяють на загальні, загальнонаукові, часткові (для конкретних наук), спеціальні.

До загальнонаукових методів відносять: *спостереження, вимір, експеримент, формалізація, абстрагування, аналіз і синтез, індукцію і дедукцію, аналогію, моделювання, гіпотетичний, історичний і системний.*

*Спостереження* – це спосіб пізнання об'єктивного миру шляхом безпосереднього сприйняття предметів і явищ органами почуттів.

*Вимір* – фізичний процес визначення чисельного значення деякої величини шляхом порівняння її з еталоном.

*Експеримент* – практична дія по перевірці гіпотез або виявлення закономірностей об'єктивного світу в «чистому виді» шляхом усунення побічних факторів.

*Абстрагування* – це заміна досліджуваного об'єкта більш простим (спрощена модель, яка дозволяє виявити головні закономірності, наприклад, ідеальний газ, − де молекули представлені як матеріальні точки, що не мають міжмолекулярної взаємодії).

*Формалізація* – відображення об'єкта або явища в знаковій формі якої-небудь штучної мови і забезпечення можливості дослідження реальних об'єктів і їхніх властивостей шляхом формального дослідження відповідних знаків.

*Аналіз* – метод пізнання за допомогою розчленовування або розкладання предметів на складові частини. *Синтез* – це об'єднання окремих сторін об'єкта в єдине ціле. Аналіз і синтез взаємозалежні і представляють єдність протилежностей.

*Аналогія* – метод наукового пізнання, за допомогою якого досягається знання про предмети і явища на підставі їхньої подібності з іншими предметами (наприклад: електричний струм і вода). Аналогія тісно пов'язана з моделюванням або модельним експериментом.

*Гіпотетичний* метод пізнання полягає в розробці наукової гіпотези на основі вивчення фізичної, хімічної та іншої сутності досліджуваного явища. При цьому використовують *ідеалізацію* – уявне конструювання об'єктів, позбавлених деяких несуттєвих властивостей (приклад: ідеальний газ, абсолютно тверде тіло).

*Історичний* метод пізнання полягає в дослідженні виникнення, формування і розвитку об'єктів у хронологічній послідовності, що дозволяє отримати додаткові відомості про нього в процесі розвитку.

Методи наукового пізнання умовно поділяються: на *емпіричний, експериментально-теоретичний і теоретичний.*

*Методи емпіричного рівня* це : спостереження, порівняння, рахунок, вимір, опитування, тести, метод проб і помилок та ін. Ці методи використовують на етапі формування наукової гіпотези і пов'язані з досліджуваними явищами.

*Методи експериментально-теоретичного рівня*: експеримент, аналіз, синтез, індукція і дедукція, моделювання, гіпотетичний, історичний і логічний методи. Ці методи дозволяють нагромадити безсумнівні факти, систематизувати, класифікувати, осмислити, розкрити існуючі залежності, теоретично обробити результати.

*Методи теоретичного рівня*: абстрагування, формалізація, ідеалізація, аналіз і синтез, індукція і дедукція, аксіоматика та ін. Теоретично досліджуються зібрані факти, робляться умовиводи.

## 2.2 Сутність системного аналізу

При вивченні складних взаємопов'язаних проблем використовують *системний аналіз*. У його основі лежить поняття системи, під якою розуміють безліч об'єктів, що мають певні властивості з фіксованими між ними відносинами. За його допомогою здійснюється облік зв'язків, порівняння усіх варіантів з метою вибору найкращого рішення за певним критерієм. Системний аналіз складається з таких етапів :

− постановка задачі: визначення об'єкта, мети і завдання дослідження;

− критерії для вивчення і керування об′єктом;

− визначення границь досліджуваної системи і її структури.

Об'єкти і процеси поділяються на саму систему і зовнішнє середовище.

Розрізняють *замкнуті* і *відкриті* системи. У замкнутих − впливом зовнішнього середовища нехтують. Виділяють складові частини і елементи системи, взаємодію між ними і зовнішнім середовищем. Важливим етапом системного аналізу е розробка та дослідження математичної моделі досліджуваної системи в цілому, визначення її екстремальних умов з метою оптимізації.

## 2.3 Методи дослідження складних систем

Аналітичні методи застосовують для дослідження лише малих систем. Для опису якісних і кількісних характеристик складних систем використовують дискретні параметри (бали), які приймають цілі значення, а також використовують ймовірнісні методи, оскільки у них переважають стохастичні процеси.

*Оптимізація* полягає у знаходженні оптимуму математичної моделі досліджуваної системи або процесу і визначення оптимальних умов розвитку даної системи. Оцінка оптимізації здійснюється по критеріям, які приймають в таких випадках екстремальні значення (мінімальна витрата палива при максимальній потужності, максимальний вихід продукції з одиниці об’єму апарата).

### Запитання для самоконтролю

*1 Види та класифікація методів пізнання.*

*2 Структура загальнонаукових методів пізнання?*

*3 Поняття аналізу, синтезу та аналогії в процесі пізнання.*

*4 Історичний та гіпотетичний методи пізнання.*

*5 Структура та методи емпіричного рівня.*

*6 Структура та методи теоретичного рівня.*

*7 Сутність та етапи системного аналізу.*

*8 В чому полягає процес оптимізації досліджуваного об’єкта?*

# 3 ТЕОРІЯ І МЕТОДОЛОГІЯ НАУКОВО-ТЕХНІЧНОЇ ТВОРЧОСТІ

## 3.1 Поняття творчості

*Творчість* − це вища форма мислення, що виходить за межі відомого, діяльність, що породжує щось якісно нове. Воно містить у собі постановку і вибір задачі, пошук умов і способів її рішення і в результаті – створення принципово нового. Науково-технічна творчість має прикладні цілі − створення приладів і пристроїв для потреб людей, тобто пошук і вирішення задач в галузі техніки, використовуючи останні досягнення науки. Одним зі *стимулів* творчості є його мотивація (спонукання), обумовлена потребами: біологічними (економія сил), соціальними (пошана, винагорода), ідеальними (пізнавальними).

Раніше при дослідженнях використовувався малопродуктивний метод «проб і помилок», що полягає в безсистемному переборі можливих варіантів рішень технічної проблеми (приклади: Едісон, Амосов). Сучасні вимоги до науково-технічного прогресу вимагають підвищення продуктивності, ефективності і якості творчої праці. Це можливо лише на основі вдосконалення стилю мислення, розробки теорії і методології науково-технічної творчості. Мислення починається там, де створюється проблемна ситуація. Специфічний акт творчості, що полягає в раптовому осяянні *(інсайт*), і складається в усвідомленні чогось, що спливло із глибини підсвідомості і гарантує вирішення задачі. Пошук рішення творчої задачі вченим триває і у підсвідомості, в результаті чого можуть бути вирішені самі складні задачі, причому процес обробки інформації автором при цьому може і не усвідомлюватись.

Найбільш важливим для творчості видом мислення є *уява*. Творчій уяві, фантазії належить вирішальна роль у створенні нового. Розрізняють 3 види уяви: *логічна* (прогнозує майбутнє із сьогодення); *критична* (шукає недосконалості в системі і що потрібно змінити); *творча* (народжує принципово нові ідеї та уявлення).

*Творча особистість характеризується вмінням зосередити увагу і довго втримувати її на даній проблемі, що є найважливішою умовою успіху у будь-якому виді діяльності.*

## 3.2 Прийоми творчої діяльності

Дані елементи теорії пізнання є основними методологічними засобами науково-технічної творчості. До них відносяться і евристичні прийоми та методи активації і організації творчої роботи.

*Прийоми дроблення і об'єднання* частин або операцій: (наприклад, подвійні шини підвищують надійність).

*Прийом винесення* – відділення частини, яка заважає, і виділення – потрібної (наприклад: захист від опромінення всіх частин, крім однієї).

*Прийом інверсії* – замість диктуємої умовами задачі дії – використовують протидію (плавець залишається на місці, а вода рухається назустріч).

*Прийом універсальності* (ручка валізи – одночасно служить еспандером).

*Прийом перетворення шкоди на користь* (отрута змії – ліки).

*Прийом переходу до іншого виміру* (в мікромир).

*Прийом самообслуговування* (підвищення стійкості корпуса бетономішалки за рахунок шару прилиплого бетону).

Ефективним евристичним прийомом творчості є ідеалізація кінцевого рішення, яке виявляє найбільш ефективне із усіх можливих варіантів.

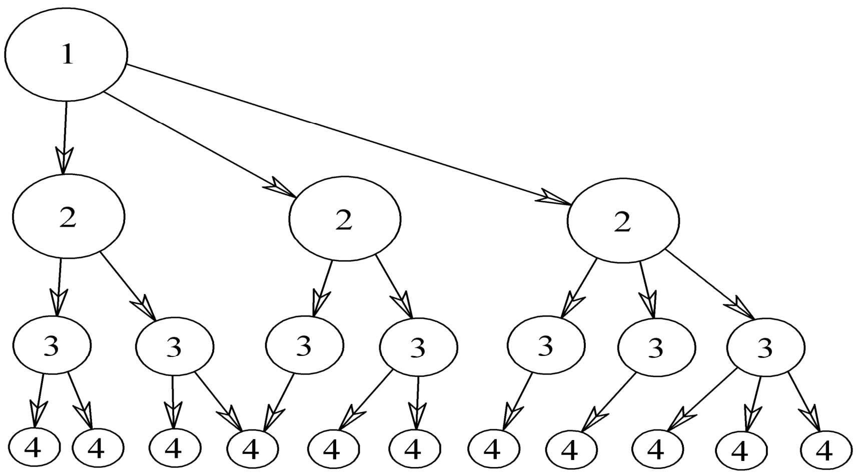



Рисунок 3.1− Ієрархічні рівні технічної системи : 1− система; 2 − складові частини; 3 − складові системи; 4 − деталі

Будь-яка система – це комплекс взаємодій, обумовлених як єдине цілісне.

*Протиріччя* в технічних системах створюють мотиви для вирішення технічної задачі. Внутрішні протиріччя поділяють на основні і головні, технічні і фізичні. Основні – існують між визначальними елементами системи. Головні протиріччя – це ті, від рішення яких залежить подальший розвиток об’єкта.

*Технічні* протиріччя існують між елементами системи і її частинами (наприклад, збільшується потужність машини – збільшується вага).

*Фізичні* протиріччя – це наявність у елементів протилежних властивостей (наприклад: провідник – діелектрик, рішення − діод).

Створення якісно нової технічної системи полягає у виявленні глибоких протиріч та їхньому усуненні. Це − наслідок закону переходу кількості в якість. Існування системи має вигляді кривої, яка характеризує зміну в часі її основних параметрів *N* (продуктивність, надійність та ін.) і має загальні ділянки для всіх існуючих систем. Спочатку система *А* розвивається (ділянка (1), потім удосконалюється і масово застосовується (2), далі – вичерпує свої можливості і йде на спад (3).

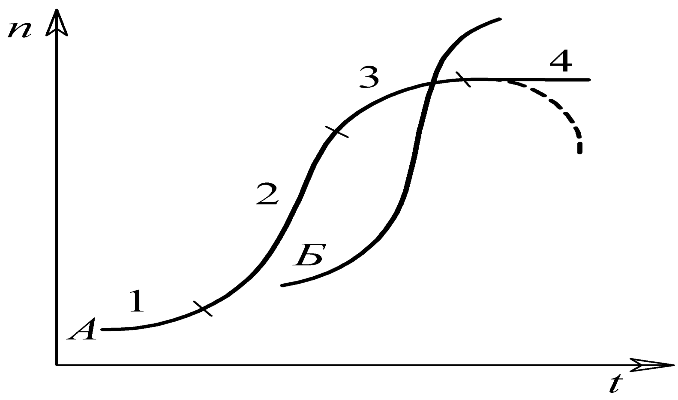



Рисунок 3.2 − Розвиток системи в часі

В подальшому система *А* деградує і замінюється принципово новою – *Б.* Знання особливостей розвитку технічної системи необхідно для з’ясування резервів і визначення доцільності її вдосконалення, або створення принципово нових рішень (приклад – лампа із ртутним вимикачем).

## 3.3 Аналогія як ефективний загальнонауковий метод пізнання

Використовують 4 види аналогії: *пряму* – порівняння з іншої галузі науки (приклад: датчик руху − око жаби і муха). *Символічну* (абстрактну): вимагає формулювання задачі в абстрактній формі: (полум'я − видима теплота; міцність – примусова цілісність і т.п.). *Особиста* аналогія − ототожнення себе із досліджуваним об'єктом. *Фантастична* аналогія − додавання об'єкту фантастичних властивостей (наприклад: чарівна паличка).

Широко використовують також *фізичну* і *математичну* аналогію. Наприклад, подібними є формула сили тяжіння: $F_т = m_1 \cdot m_2 / r^2$ і сила електростатичної взаємодії: $F_е = kq_1 \cdot q_2 / r^2$.

Критерії аналогії дозволяють описувати аналогічними формулами процеси в ланцюгах різної фізичної природи а також зв'язувати ці ланцюги між собою за допомогою відповідних коефіцієнтів.

## 3.4 Морфологічний аналіз

Морфологічний наліз є ефективним методом науково-технічної творчості, вирішення конструкторських задач, розробки компановочних схем, прогнозування розвитку технічних систем. Він полягає у системному дослідженню усіх мислимих варіантів побудови (морфології) удосконаленої системи. Метод передбачає:

– формулювання задачі ; складання списку функціональних елементів (ознак) об'єкта; (приклад, авторучка має такі елементи: перо, балон для чорнила, корпус та ін.);

– складання переліку можливі варіанти рішень для кожного елемента;

– визначення функціональної цінності можливих варіантів. На закінчення вибирають найбільш прийнятний варіант (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Морфологічна таблиця для авторучки

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| А. Речовина, що пише | Чорнила | Паста | Світло | Будь-яка речовина | Безслідна речовина |
| Б. Вузол, що пише | Перо | Кулька | Світловий промінь | Лезо | Без вузла |
| В.Резервуар речовини | Постійний балон | Змінний балон | Окрема емкість | Навколишнє середовище | Без ре-зервура |
| Г.Ввімкнення | Ручне | Автома-тичне | Постійно ввімкнене | - | - |
| Д. Пристрій закріплення | Зачеп | Голівка ріпьяха | Пришито ниткою | Магнітне | Не закріп-лено |
| Е. Форма корпусу | Циліндр | Сфера | Інша форма | По формі руки | Без корпуса |
| Ж.Щотримає авторучку | Пальці | Спец. механ. | Тримаєть-ся сама | | |
| З.На чому пишуть | Папір | Світоло емульс | Дерево | Метал | Будь-яка речовина |
| І.Навколишн. середовище | Повітря | Вода | Вакуум | Будь-яке середовище | |

## 3.5 Асоціативні методи творчості

Ці методи засновані на застосуванні *семантичних* понять (семантика – значення одиниць мови). *Асоціація* − зв'язок, що виникає між двома і більше ідеями, сприйняттями, відчуттями. Джерелами генерування ідей є асоціації, метафори і випадково обрані поняття, ознаки яких переносяться на вдосконалюваний об'єкт. Такими методами є: метод *каталогу, фокальних об'єктів, і гірлянд випадкових асоціацій*.

*Метод фокальних об'єктів* використовують при пошуку нових модифікацій відомих пристроїв. Сутність його складається в перенесенні ознак випадково обраних об'єктів на вдосконалюваний об'єкт. Послідовність його наступна :

– вибір фокального об'єкта (наприклад, годинник).

– вибір 4-х випадкових об'єктів (кіно, змія, каса, полюс).

– складання *ознак* цих об'єктів (кіно: звукове, кольорове, об'ємне, та ін.).

– приєднання до фокального об'єкта випадкових ознак (звукові годинники, широкоекранні, об'ємні та ін).

*Метод гірлянд випадкових асоціацій є* розвитком методу фокальних об'єктів. У відповідність із останнім методом необхідно здійснити наступне:

– визначити *синоніми* об'єкта − *стілець*: стілець крісло – табурет – пуф – ослін;

– скласти другу гірлянду випадкових об'єктів: решітка – кишеня – кільце – квітка – пляж;

– утворити комбінації з елементів двох гірлянд : стілець із лампою, стілець сітчастий, стілець із кишенею, табурет для квітів та ін.;

– скласти ознаки випадкових об'єктів: (лампа матова, колбоподібна, трубчаста);

– формувати пропозиції, приєднуючи до об'єкта ознаки випадкових:
(скляний стілець, прозоре крісло, колбоподібний пуф та ін.)

– скласти гірлянди асоціацій ознак випадкових об'єктів;

– до елементів гірлянди синонімів об'єкта приєднати елементи гірлянд асоціацій (стілець пористий, пуф з піни та ін.);

– вибрати оптимальний варіант.

*Метод контрольних питань* здійснюється шляхом формулювання запитань, які можуть привести до вирішення творчої задачі. Найкращим з цих методів є список запитань Эйлоарта.

1 Перелічити всі якості і визначення розроблювального об'єкта.

2 Сформулювати ясно задачу. Виділити головні і другорядні.

3 Перелічити недоліки існуючих, їхні принципи, нові припущення.

4 Запропонувати фантастичні, біологічні, молекулярні і ін. аналоги.

5 Побудувати математичну, електронну, механічну та ін. моделі.

6 Запропонувати різні види матеріалів і енергії: газ, рідина, тверде тіло, гель, піну, пасту; тепло, світло, магнітну енергію, силу удару, довжину хвиль, ефекти Пелть’є, Джоуля та ін.

7 Встановити варіанти, залежності, зв'язки між елементами.

8 Довідатися думки необізнаних у цієї галузі людей.

9 Здійснити групове обговорення запропонованих варіантів (без критики).

10 Спробувати національне рішення: хитре шотландське, ретельне німецьке, марнотратне американське, складне китайське і т.д.

11 Спати із проблемою, йти гуляти, приймати душ, їхати, пити, грати в теніс – усе з нею!

12 Ходити серед стимулюючої обстановки (смітники лома, технічні музеї, радіоринок та ін.).

13 Скласти таблицю типів, величин, матеріалів, різних рішень проблеми або її частин, нових комбінацій.

14 В уяві залізти усередину механізму.

15 Визначити загальноприйняті граничні умови і причини їхнього встановлення.

16 Визначити ідеальне рішення, розробити можливі варіанти.

*Приклад* : як вирішити проблему лущення волоських горіхів?

Для інтенсифікації творчого процесу в колективі використовують методи психологічної активації, одним з яких є «Мозкова атака» (Осборн).

Перша група (фантазери) висуває варіанти рішення. Друга група (експерти) виносить рішення – це люди з аналітичним і критичним складом мислення. Послідовність етапів рішення науково-технічної проблеми:

– аналіз технічних потреб і виявлення технічної проблеми;
– аналіз систем задач і вибір конкретного завдання;
– аналіз і формулювання умов технічного завдання;
– аналіз і формулювання умов винахідницького завдання;
– пошук ідеї вирішення задачі (принципу дії);
– синтез нового технічного рішення.

Алгоритм рішення винахідницьких завдань (АРИЗ) містить у собі етапи: від аналізу технічної системи − до пошуку ідеї вирішення.

*Кожний фахівець повинен володіти наведеними методами і користуватися ними у своїй творчій роботі.*

Запитання для самоконтролю

*1 Розкрийте поняття «творчості».*

*2 Розкрийте механізм та прийоми творчого процесу.*

*3 Роль протиріччя в знаходженні оптимального рішення.*

*4 Аналогія – як загальнонауковий метод пізнання.*

*5 Сутність методу морфологічного аналізу.*

*6 Метод фокальних об'єктів.*

*7 Метод гірлянд випадкових асоціацій.*

*8 Метод контрольних питань Осборна.*

*9 Методи психологічної активації творчого процесу.*

# 4 ЕТАПИ НАУКОВО-ДОСЛІДНОЇ РОБОТИ

## 4.1 Об'єкт, предмет і види наукових досліджень

Метою наукового дослідження є всебічне вивчення об'єкта, процесу або явища, їхньої структури, зв'язків, одержання і впровадження у виробництво (практику) цих результатів.

*Об'єктом* дослідження є процеси, що відбуваються в системі під дією зовнішніх впливів.

*Предметом* дослідження є структура, властивості, або якості системи.

По цільовому призначенню виділяють 3 види наукових досліджень: *фундаментальної, прикладні і розробки*.

*Фундаментальні* дослідження спрямовані на відкриття та вивчення нових явищ і законів природи, на створення нових принципів дослідження.

*Прикладні дослідження* спрямовані на знаходження способів використання законів природи для створення нових і вдосконалювання існуючих засобів і способів людської діяльності на основі фундаментальних знань. Прикладні дослідження підрозділяються на пошукові, науково-дослідні, дослідно-конструкторські. *Пошукові* спрямовані на знаходження нових технологій і техніки на основі фундаментальних досліджень. *Науково-дослідні* створюють нові технології, дослідні установки, прилади та ін. *Дослідно-конструкторські* розробляють конструкцію приладів і пристроїв в остаточному варіанті. Залежно від джерела фінансування, наукові дослідження поділяються на держбюджетні, госпдоговірні і не фінансовані (договір про співробітництво).

## 4.2 Поняття наукового напряму

*Науковий напрям* – це наука або комплекс наук, в сфері яких проводяться дослідження. Розрізняють: технічні, фізико - технічні, біологічні та ін. наукові напрямки.

*Комплексна проблема* – це структурна одиниця наукового напрямку, являє собою сукупність складних теоретичних і практичних задач, що вимагають вирішення. Теми дослідження повинні бути актуальними, мати наукову новизну і бути економічно ефективними – цьому передує ретельне ознайомлення з літературними джерелами в даній і суміжній галузях.

Важливою характеристикою теми є можливість швидкого впровадження результатів дослідження. Критерієм економічної ефективності розробки є співвідношення: $k_э = Э_п / З_з$ (ефект / витрати). Науково-дослідна робота виконується в такій послідовності. В результаті вивчення проблеми спочатку формулюється тема, потім робиться техніко-економічне обгрунтування (ТЕО), у якому вказують причини розробки, досягнутий рівень досліджень, існуючі проблеми та їхня актуальність. Здійснюється літературний і патентний огляд, визначається сфера використання і передбачуваний економічний ефект за період використання.

## 4.3 Мета теоретичних досліджень

Метою цих досліджень є вивчення фізичної сутності предмета, обґрунтування фізичної і математичної моделі та аналіз отриманих результатів.

*Експериментальні дослідження* містять розробку методики і програми проведення експерименту. Складається робочий план, методи, техніка, строки проведення. Після завершення експериментальних і теоретичних досліджень здійснюється аналіз, зіставлення з гіпотезами, уточнюються теоретичні моделі.

Запитання для самоконтролю

1 *Об'єкт, предмет і види наукових досліджень.*

2 *Фундаментальні і прикладні дослідження.*

3 *Поняття наукового напрямку. Комплексна проблема.*

4 *Етапи науково-дослідної роботи.*

5 *Мета експериментальних і теоретичних досліджень.*

# 5 ПОШУК, ОБРОБКА ТА АНАЛІЗ НАУКОВОЇ ІНФОРМАЦІЇ

## 5.1 Інформатика як наука. Інформаційні системи. Бази даних

*Інформаційні системи* призначені надати науково-технічною інформацію широкому колу споживачів, зацікавлених у її використанні. Сукупність уніфікованих відомостей і послуг, представлених у деякому стандартизованому виді, називають *інформаційним продуктом*. Розрізняють спеціалізовані і універсальні (інтегральні) інформаційні системи. Колишні досягнення необхідно піддавати творчому критичному аналізу з урахуванням сучасних досягнень науки і техніки. При цьому повинні бути розглянуті наступні питання: актуальність і новизна теми, останні досягнення в сфері експериментальних і теоретичних досліджень, теоретичні й експериментальні завдання, технічна доцільність і економічна ефективність цих розробок.

## 5.2 Інформаційні технології

Інформаційні технології застосовуються для створення ефективних інформаційних систем і становлять основу для автоматизації наукових досліджень. Інформаційні технології базуються на пакетах прикладних програм (ППП). Якщо кожному програмному продукту відповідає свій ППП – це *функціональні* ППП. Якщо один ППП дає змогу одержати ряд інформаційних продуктів – це *інтегральний.*

Бази даних розділені на *бібліографічні*, у яких утримуються відомості про публікації, та *фактологічні*, що представляють конкретні публікації.

*Банк даних* – різновид інформаційної системи для нагромадження більших об'ємів однорідної інформації. Банк містить: бази даних, комплекс засобів їх створення і використання (мови, процедури, методики, персонал).

*Інформаційні мережі* – це структура, через яку споживач одержує доступ до будь-яких банків даних, зокрема, наукової документації та нормативно-технічних документів.

*Науковий документ* – це об'єкт, що містить науково-технічну документацію для її використання і зберігання. Спеціальні види технічної документації – це нормативні акти, стандарти, ДСТ та ін.

Автоматизована інформаційно-пошукова система (АИПС) здійснює формування масивів інформації, обробку, зберігання та пошук інформації і являє собою сукупність мовних, логічних, математичних, інформаційних, технічних і трудових ресурсів.

*Патентна інформація* містить дані про відкриття, винаходи, корисні моделі, промислові зразки, товарні знаки. *Корисна модель* – відносно нове рішення технічної задачі, що стосується до пристрою. *Промисловий зразок* – нові, оригінальні особливості зовнішнього вигляду виробу. *Товарний знак* – позначення, відмінне від інших але аналогічного призначення.

## 5.3 Класифікація і структура побудови документів згідно МКІ

Основним засобом організації і пошуку інформації в світовому патентному фонді є єдина система класифікації винаходів МКІ. Класифікація документації здійснюється на основі міжнародної УДК (50 країн), що охоплює усі галузі знань, які поділяються на розділи, класи, підкласи, групи і підгрупи. Перший класифікаційний ряд складається з восьми розділів, позначених латинськими літерами від А до Н. Розділи поділяються на класи, що позначають двозначними числами (наприклад 01). Індекс підкласу складається з індексу класу і латинської літери (наприклад, А 01 В). Далі кожен підклас поділено на групи – основні і підгрупи (наприклад, А 01 В 01/02).

## 5.4 Інформаційно-пошукові системи. Аналіз джерел інформації

Послідовність тематичного пошуку щодо необхідної патентної інформації полягає у ознайомленні з реферативними виданнями НПО «ПОШУК», а також іменних указників патентних видань відповідних держав. Патентно-правовий пошук здійснюється по відповідним розділам офіційних патентних бюлетней і по спискам діючих патентів виключного користування. Основним є *систематичний* каталог, в якому дані оформлені в систему знань на основі універсальної десятинної класифікації (УДК). Ключем до систематичного каталогу є алфавітно-предметний указник, в якому в алфавітному порядку перелічені найменування галузей знань.

Важливим моментом роботи є наукове реферування і складання наукового огляду. Реферування – це коротке викладання первісного документу з основними відомостями і висновками. Науковий огляд – це текст, що містить синтезовану інформацію узагальненого характеру по даному питанню, отримана на основі аналізу достатньої кількості первинних джерел.

### Запитання для самоконтролю

*1 Що таке інформаційні системи і які їх функції?*

*2 Структура та зміст бази даних.*

*3 Банк даних як від інформаційних систем.*

*4 Перелічити види та структуру наукових документів.*

*5 Класифікація наукових документів згідно МКІ і УДК.*

# 6 ТЕОРЕТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ

## 6.1 Завдання теоретичних досліджень

Метою досліджень є узагальнення і пояснення результатів емпіричних досліджень шляхом обробки і інтерпретації експериментальних даних, виявлення загальних закономірностей і їхня формалізація, обгрунтування параметрів і умов спостереження, точності вимірів. *Постановки задачі* − найбільш важлива частина теоретичного дослідження, оскільки правильне формулювання задачі – важливий етап її успішного вирішення. Теоретичні дослідження включають: аналіз фізичної сутності процесів, явищ, формулювання гіпотези дослідження, побудова фізичної моделі, проведення математичного дослідження, аналіз теоретичних рішень, формулювання висновків. При цьому використовують *метод розчленовування,* що полягає у виявленні істотних і несуттєвих елементів та зв'язки між ними, та *метод об'єднання,* пов'язаний з комплексним підходом до вивчення об'єкта, об'єднаним за назвою «загальна теорія систем» (ЗТС).

## 6.2 Математичне моделювання об’єкту дослідження

*Етапи математичного моделювання наступні:*

– математичне формулювання задачі;

– розробка та вибір типу моделі;

– вибір методу проведення дослідження моделі;

– аналіз отриманого математичного результату.

Математичне формулювання задачі представляється у вигляді чисел, геометричних побудов, функцій, систем рівнянь та ін.

*Математична модель* являє собою систему математичних співвідношень, формул, функцій, рівнянь, що описують різні властивості (параметри) досліджуваного об'єкта, явища або процесу. Розробка математичної моделі досліджуваної системи містить такі етапи.

*Перший етап* – параметризація системи, опис виділених елементів і їхніх зв'язків, постановка задачі, визначення об'єкта і цілей дослідження. При цьому аналітичні методи використовують лише для простих систем. А для складних, що мають багато параметрів, − використовують імовірнісні методи оскільки у них переважають стохастичні процеси. В результаті цього етапу формують закінчені математичні моделі, описані формальною (алгоритмічною) мовою.

*Другий етап* – вибір типу математичної моделі, що визначає напрямок усього дослідження. На цьому етапі за даними пошукового експерименту встановлюють: *лінійність* або *нелінійність*, *динамічність* або *статичність*, *стаціонарність* або *нестаціонарність*, а також ступінь *детермінованості* досліджуваного процесу або явища.

Лінійність визначається по виду статичної характеристики досліджуваного об'єкта. *Статична характеристика* показує зв'язок між величиною зовнішнього впливу на об'єкт і максимальною величиною (амплітудою) його реакції на зовнішній вплив. При лінійному характері статичної характеристики моделювання здійснюється за допомогою лінійних функцій, що значно спрощує її аналіз.

*Принцип суперпозицій* стверджує, що якщо на лінійну систему впливають кілька вхідних сигналів, то кожний з них фільтрується системою так, що ніякі інші на неї на впливають. Загальний вихідний сигнал утвориться в результаті підсумовування її реакції на кожний вхідний. Якщо середня арифметична величина вихідного сигналу в різні проміжки часу не виходить за припустимі межі – це свідчення *статичності* об'єкта. У протилежному випадку статичність переходить у динамічність.

Ключовим етапом математичного моделювання є вибір виду математичної моделі. При цьому задається діапазон визначення досліджуваних параметрів об'єкта і встановлюється залежність між ними. Для складних об'єктів можлива розбивка об'єкта на елементи, встановлення ієрархії і опис зв'язків між ними. Розрізняють 4 схеми взаємодії об’єкта з середовищем :

– одномірно-одномірна (один вхідний і один вихідний сигнал);

– одномірно-багатомірна (один вхідний і декілька вихідних сигналів);

– багатомірно-одномірна (багато вхідних і один вихідний сигнал);

– багатомірно-багатомірна (багато вхідних і декілька вихідних сигналів).

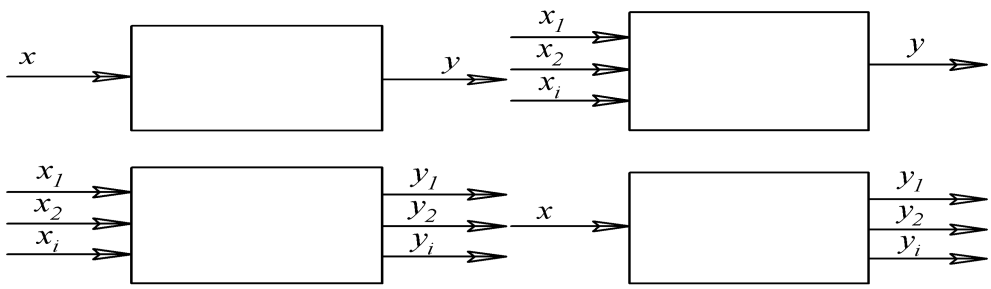



Рисунок 6.1− Схеми взаємодії об'єкта із зовнішнім середовищем

У першому випадку статичного детермінованого об'єкта постійний вхідний вплив зв'язується з постійним вихідним сигналом через постійний коефіцієнт $\kappa$

$$y = \kappa\, x. \tag{6.1}$$

Якщо об'єкт є нестаціонарним, то зв'язок між ними описується різними функціями

$$y = f(x). \tag{6.2}$$

Часто така функція описується поліномом.

При *багатомірно-одномірній* схемі статичний стаціонарний детермінований об'єкт описується наступною моделлю:

– при рівнозначності зовнішніх впливів

$$y = a \sum_{i=1}^{m} x_i\ ; \tag{6.3}$$

– при нерівнозначності зовнішніх впливів

$$y = \sum_{i=1}^{m} a_i\, x_i\ , \tag{6.4}$$

де $a_i$ – постійний коефіцієнт; $m$ – число зовнішніх впливів.

Для статичного нестаціонарного об'єкта використовують модель у вигляді повного ступеневого полінома :

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i\, x_i + \sum_{i=1}^{m1} \sum_{j=1}^{m2} a_{ij}\, x_i\, x_j + \sum_{i=1}^{m1} \sum_{j=1}^{m2} \sum_{v=1}^{m3} a_{i\,jv} x_i\, x_j x_v,\ +\ldots, \tag{6.5}$$

де $m_1$, $m_2$ – число парних і потрійних сполучень факторів ($m_1 = C_m^{\ 2}$, $m_2 = C_m^{\ 3}$).

При *одномірно-багатомірній* схемі статично стаціонарний і нестаціонарний об'єкти описуються аналогічно одномірно-одномірній схемі. При цьому визначаються математичні моделі вхідної взаємодії з кожним вихідним сигналом. Вихідні сигнали вважають незалежними.

*Багатомірно-багатомірна* взаємодія зводиться до багатомірно-одномірної і математична модель приймається аналогічно попередньому випадку.

Для нестаціонарної *одномірно-одномірної* (багатомірної) взаємодії алгебраїчні функції можуть являти собою рішення диференційних рівнянь. При цьому необхідно розглядати похідні математичного очікування по змінному факторі. Так, експонентна залежність може бути рішенням такого диференційного рівняння:

$$d\overline{y}/dx + a\overline{y} = a\overline{y}^{\,\mathrm{m}} \qquad (\overline{y} = 0 \text{ при } x = 0)\,, \tag{6.6}$$

де $\overline{y}$ – максимальне значення математичного очікування.

Вибір моделі *динамічного* об'єкта зводиться до складання диференційних рівнянь, наприклад, у найпростішому виді в класі алгебраїчних функцій. Тому по повноті моделі дається перевага математичним моделям, побудованим у класі диференційних рівнянь. Якщо змінні є функціями тільки часу, то для моделювання використовують звичайні диференційні рівняння. Якщо змінні є також функціями просторових координат, то необхідно користуватися складними диференційними рівняннями в частинних похідних. При одномірно-одномірній і одномірно-багатомірній взаємодії детермінованого об'єкта із середовищем структура диференційне рівняння визначається по виду його вихідної характеристики для типового (східчастого) впливу. Найбільш простою вихідною характеристикою об'єкта є лінійна (рис. 6.2,а). Така зміна виходу визначається рішенням диференційного рівняння:

$$dy/dt = kx, \quad y_o=0, \tag{6.7}$$

де $k \geq 0$ – коефіцієнт розмірності і пропорційності; $y_0$ – початкове значення вихідного сигналу; $t$ – час.

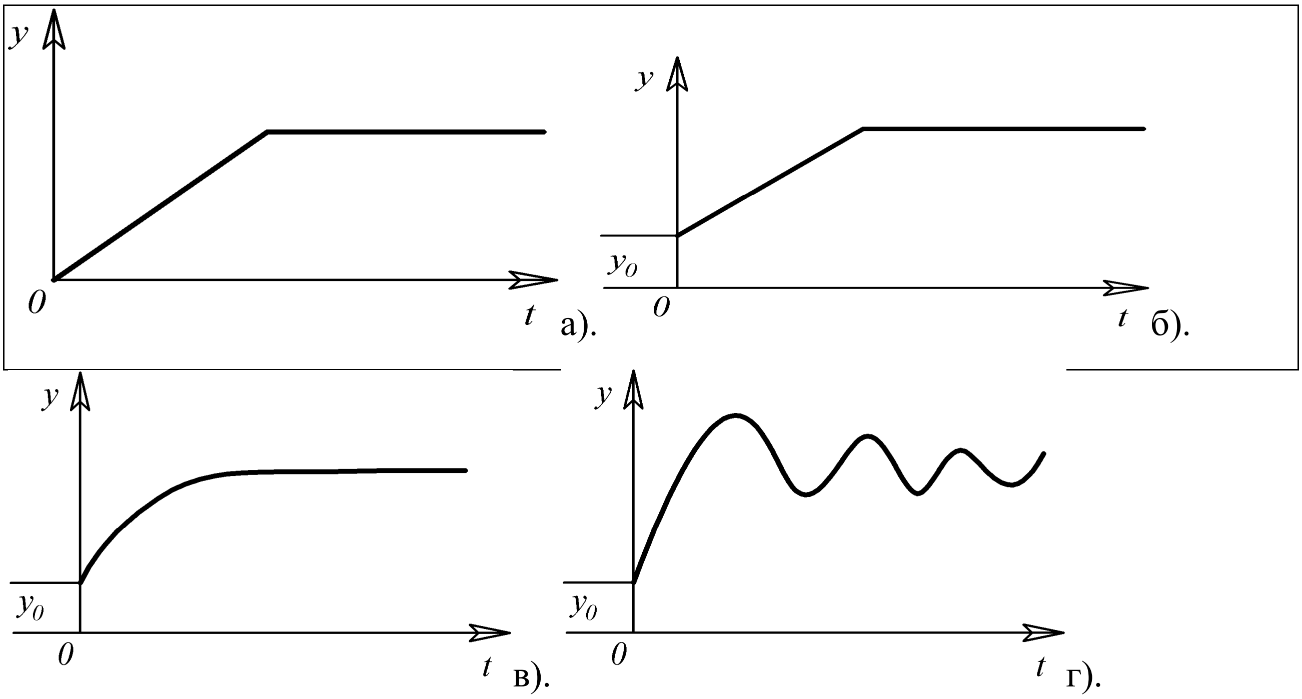



Рисунок 6.2 − Вихідні характеристики детермінованого об’єкта при ступінчастому зовнішньому впливі

Якщо $y_0 \neq 0$, то вихідна характеристика відповідає (рис. 6.2,б), але диференційне рівняння колишнє. Більш складний вид реакції об'єкта (6.2,в) описується повним неоднорідним диференційним рівнянням першого порядку:

$$dy/dt + a_0 y = k\,x, \qquad y(0) = y_0, \qquad (6.8)$$

де $a_0$ – коефіцієнт диференційного рівняння.

Реакція об'єкта (6.2,г) дозволяє використовувати в якості математичної моделі диференційне рівняння другого порядку:

$$d^2y/dt^2 + a_1 dy/dt + a_0 y = k\,x, \qquad y(0) = y_0. \qquad (6.9)$$

Ці види математичних моделей відповідають постійному вхідному впливу ($x = const$).

Якщо вхідний вплив є *функцією часу*, то у диференційних рівняннях змінюються праві частини $x = f(t)$.

При багатомірній взаємодії динамічні моделі також визначають в класі диференційних рівнянь, припускаючи, що вхідні фактори є незалежними і приводяться до суми коефіцієнтами чутливості в правій частині диференційного рівняння. *Диференційне рівняння підбирається по виду вихідної характеристики об'єкта.*

Існують деякі підходи до складання диференційних рівнянь:

– диференційні рівняння в диференціалах;

– диференційні рівняння в похідних;

– найпростіші інтегральні рівняння, перетворювані в диференційні.

*Метод диференціалів* застосовують при складанні рівнянь в диференціалах першого порядку – він полягає в тім, що за умови задачі беруть наближені співвідношення між диференціалами. Для цього малі збільшення величин заміняють їхніми диференціалами, а процеси, що протікають нерівномірно за малий проміжок часу $dt$ – вважають рівномірними. Оскільки відношення диференціалів функції і аргументу є межею відносини їхніх збільшень, то в міру прагнення збільшення до нуля, прийняті допущення виконуються з достатньою точністю.

*Приклад*. Необхідно знайти поверхню обертання(наприклад, дзеркало рефлектора) такої, щоб вихідні з однієї точки промені після відбиття перетиналися в іншій (рис. 6.3) точці.

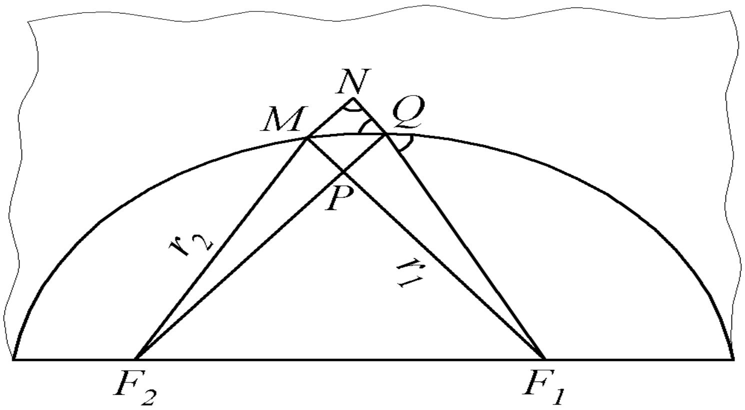



Рисунок 6.3 − Схема розрахунку профілю рефлектора

Задача полягає у знаходженні рівняння перетину шуканої поверхні меридіанною площиною, що проходить через точку $F_2$, у якій міститься джерело світла і точку $F_1$, у якій перетинаються відбиті промені. Малу дугу $MQ$ цього перетину вважаємо прямолінійним відрізком. Із точок $F_1$ і $F_2$ опишемо дуги $MH$ і $MP$ кола радіусами $r_1M = r_1$ і $r_2M = r_2$, які також вважаємо прямолінійними. Трикутники $MQN$ і $MQP$ – прямокутні із загальною гіпотенузою $MQ$. Оскільки кути падіння і відбиття рівні, знаходимо, що $< MQN = < MQP$ і $\Delta MQN = \Delta MQP$. Тоді $QN = QP$. Тому що $QN = \Delta r_1$, а $QP = \Delta r_2$, то заміняючи збільшення радіус-векторів $r_1$ і $r_2$ їхніми диференціалами, одержимо

$$dr_1 + dr_2 = 0. \qquad (6.10)$$

Диференційне рівняння складене. Воно легко інтегрується, переписавши його таким чином

$$d(r_1+r_2) = 0, \qquad (6.11)$$

звідки знаходимо загальний інтеграл $r_1 + r_2 = C$.

Отже, перетин шуканої поверхні меридіанною площиною є − еліпсом.

*Рівняння в похідних.* Суть методу полягає в тім, що з умови задачі складають наближені співвідношення між швидкостями зміни функції і аргументу.

*Приклад*. Досліджуючи ріст числа публікацій виходять із допущення, що швидкість їх росту $dy / dt$ пропорційна досягнутому рівню «$y$» числа публікацій − це означає, що відносна швидкість росту постійна

$$(\frac{1}{y})\cdot\frac{dy}{dt} = const. \qquad (6.12)$$

Це допущення дозволяє скласти диференційне рівняння у формі

$$(\frac{1}{y})\frac{dy}{dt} = k\,y, \qquad (6.13)$$

або

$$(\frac{1}{y})\frac{dy}{dt} = k\,, \qquad (k > 0), \qquad (6.14)$$

де $k = const$ − характеризує відгуки на публікації в різних галузях знання. Рішення цього диференційного рівняння має вигляд:

$$y = a \cdot e^{kt}, \qquad (6.15)$$

де $a$ – початкове число публікацій.

## 6.3 Використання найпростіших інтегральних рівнянь

Роботу сил, об'ємів, площ криволінійних поверхонь можна описати за допомогою певного інтеграла або інтегральних формул. Якщо при цьому невідомі функції попадають під знак інтеграла, то одержаний формальний запис називається *інтегральним рівнянням*. Диференціювання інтегрального рівняння перетворить його в диференційне.

*Приклад.* Знайдемо закон прямолінійного руху матеріальної точки маси $m$, якщо відомо, що робота діючої на неї сили пропорційна часу $t$ від початку руху. Початковий шлях і початкова швидкість дорівнюють $S_0$ і $V_0$.

Якщо напрямок сили і швидкості збігаються, то робота $A$

$$A = \int_{So}^{S} F(u)du, \qquad (6.16)$$

де $F(u)$ – сила, діюча на точку. За умовою задачі: $A = k \cdot t$.

Порівнюючи обоє вираження для $A$, знаходимо

$$\int_{So}^{S} F(u)du = k \cdot t. \qquad (6.17)$$

Диференціюючи по $S$ одержимо

$$F(S) = k(dS/dt). \qquad (6.18)$$

Тому що $dS/dt = V$ – швидкість руху, то: $F(s) = k / V$.

Із другого закону Ньютона витікає, що $F(s) = m\ (dV/dt)$ (перша похідна за часом від імпульсу матеріальної точки дорівнює діючої на неї сили). Порівнюючи обоє вираження для $F(s)$, складаємо диференційне рівняння

$$m(dV/dt) = k / V. \qquad (6.19)$$

Рішення його має вигляд $mV^2/ 2 = k\,t + C_1$.

При початковій умові $V = V_o$ і при $t = 0$ знаходимо: $C_1 = mV_0^2/ 2.$

Отже, $$V = \sqrt{(2k/m)t + V_o^2} \qquad (6.20)$$

Заміняючи $V$ на $dS/dt$ і інтегруючи, знаходимо

$$S = \left(\frac{m}{3k}\right)\{ (2kt/m) + V_0^2 \}^{3/2} + C_2. \qquad (6.21)$$

При $t = 0$, $S = S_o$, отже, $C_2 = S_o - mV_0^3/ 3\,k$ .

Таким чином, закон руху матеріальної точки приймає вид

$$S = m / 3k \{2kt / m + V_0^2\}^{3/2} + S_o - mV_0^3 / 3\,k. \qquad (6.22)$$

При складанні диференційних рівнянь *регульованих об'єктів* необхідно визначити умови одержання рівноважного режиму роботи об'єкта – рівняння статичної рівноваги, − що є загальним для різних об'єктів.

Так, при поступальному русі об'єкт перебуває в стані статичної рівноваги (рух рівномірний), якщо сили рушійні $F_р$ дорівнюють силам опору $F_o$. Рівняння статичної рівноваги має вигляд

$$F_p - F_o = 0. \qquad (6.23)$$

При обертанні валу (ротора) умова статичної рівноваги − це рівність обертового моменту $M_к$ і моменту опору $M_o$

$$M_к - M_o = 0. \qquad (6.24)$$

Для резервуара, де необхідно підтримувати постійний рівень рідини

$$V_{\text{прихід}} - V_{\text{витрата}} = 0. \qquad (6.25)$$

При збільшенні одного із членів рівняння, відбудеться збільшення другого члена рівняння, причому ці збільшення звичайно не рівні, тоді:

$$F + F_o \neq F_o + \Delta F_o; \qquad M_к + \Delta M_к \neq Mo + \Delta M_o \qquad (6.26)$$

Отримані нерівності можна спростити, врахувавши в них умови статичної рівноваги: $\Delta F_p \neq \Delta\, F_o$ і т.д.

## 6.4 Математична модель імовірнісних об'єктів

*Критерій стаціонарності*. При виборі типу моделі імовірнісного об'єкта необхідно встановити його *стаціонарність* по зміні в часі параметрів законів розподілу випадкових величин. Для цього використовують *середнє арифметичне* випадкової величини $M(\tau_i)$ і *середнє квадратичне* відхилення випадкових величин $\sigma_i$ ( $i$ = 1, 2, …, $n$) – від середнього арифметичного і середнього квадратичного відхилення в часі. З ряду середніх арифметичних $M(\tau)$, $M(\tau_2)$,…, $M\ (\tau_i)$ вибирають мінімальне значення $M(\tau_{min})$ і будують інтервали із границями:

$$M(\tau_{min}) + \Delta x, \qquad M(\tau_{min}) - \Delta x, \qquad (6.27)$$

де $\Delta x$ − точність методики виміру.

Якщо значення $M(\tau_i)$ укладається в цей інтервал, то об'єкт є стаціонарним по середньому арифметичному $M(\tau)$. Стаціонарність по середньому квадратичному відхиленню визначається таким чином − граничні значення $\sigma$ визначають за формулами:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{D_1}{n}}, \qquad \sigma_2 = \sqrt{\frac{D_2}{n}}, \tag{6.28}$$

або

$$D_1 = \{\sum_{i=1}^{n} [x_i - M(\tau_{min}) + \Delta x)]^2\} 1/(n-1) \tag{6.29}$$

$$D_2 = \{\sum_{s=1}^{n} [x_i - M(\tau_{min}) - \Delta x)]^2\} 1/(n-1), \tag{6.30}$$

Тут $n$ − число спостережень.

Якщо всі $\sigma$ укладаються в інтервал $\sigma_1 \ldots \sigma_2$, то об'єкт є – *стаціонарним*. У протилежному випадку об'єкт − імовірнісний *нестаціонарний*.

Вибір математичного апарата може здійснюватися у відповідності зі схемою (рис. 6.4).

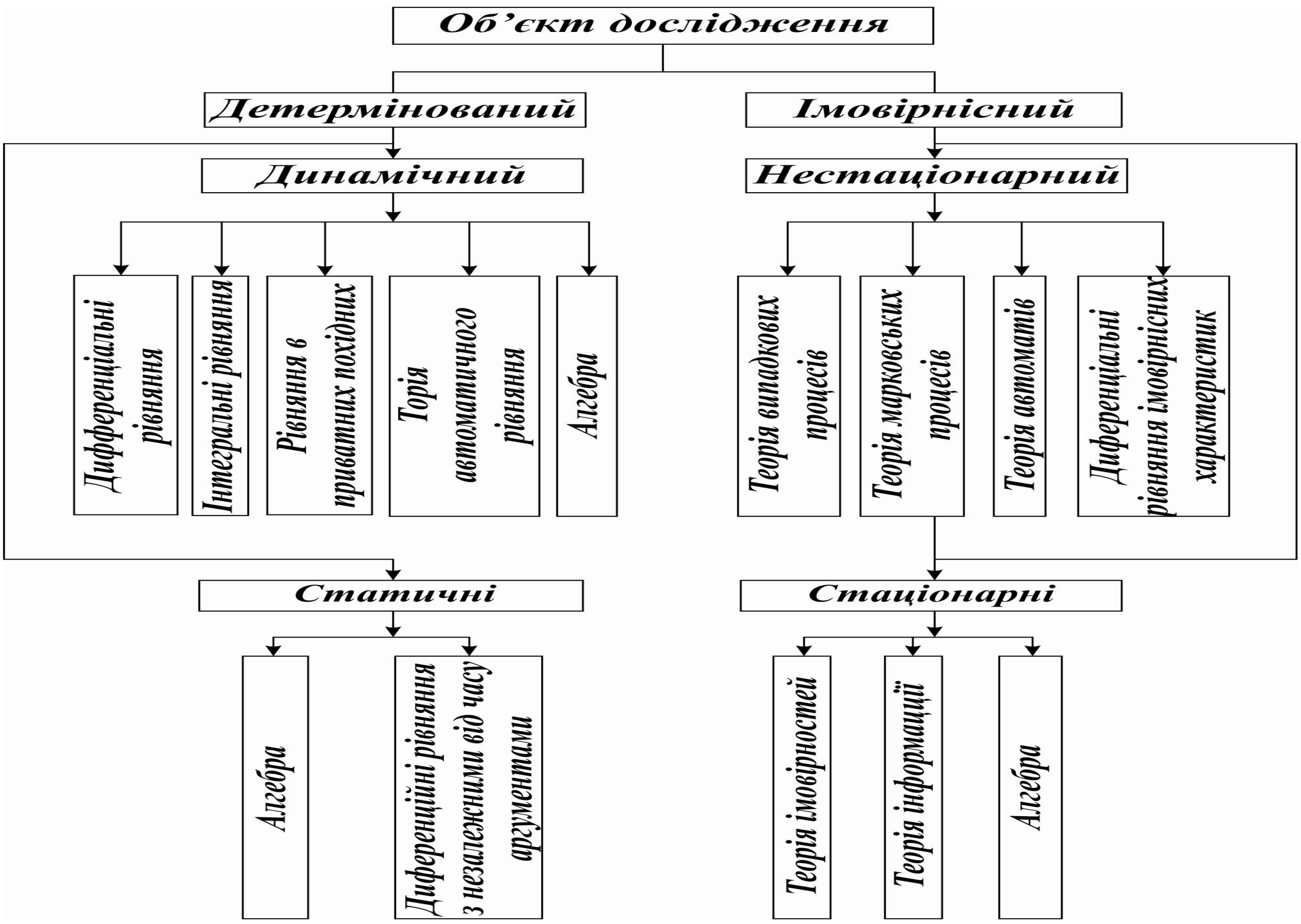



Рисунок 6.4− Математичний апарат для побудови математичної моделі

Для *детермінованих* об'єктів може використовуватися апарат лінійної і нелінійної алгебри, теорії диференціальних і інтегральних рівнянь, теорії автоматичного регулювання.

Встановлення *безперервності* об'єкта дозволяє використовувати для його моделювання диференційні рівняння (у безперервних об'єктах усі сигнали є безперервною функцією часу).

Для *імовірнісних* об'єктів види математичних моделей для одномірно-одномірної схеми вибирають виходячи з характеру сигналу на вході. Якщо він постійний, то в якості математичної моделі статичного імовірнісного об'єкту виступає деякий закон розподілу вихідної величини.

Якщо вхідний сигнал різний, то кожному його значенню відповідає ряд значень вихідної величини. Крім законів розподілу вхідних і вихідних величин важливий також зв'язок між ними, тому до складу моделі включають коефіцієнти взаємної кореляції і функції:

$$H_m = f(x); \quad R = F(x); \quad y_{cp} = F(x); \quad \sigma = F(x), \tag{6.31}$$

де $x$ – вхідний вплив; $H$ – максимальна ентропія вихідних характеристик; $R$ – відносна організація вихідних характеристик; $y_{cp}$ – середнє значення вихідної величини; $\sigma$ − середньоквадратичне відхилення вихідних величин. Максимальна ентропія вихідних характеристик дорівнює

$$H_m = log_2 n, \tag{6.32}$$

де $n$ − число станів об'єкта.

Число станів об'єкта дорівнює $n = (y_{max} - y_{min}) / \Delta y$,

де $y_{max}$, $y_{min}$ − максимальне і мінімальне значення вихідної величини;

$\Delta y$ − точність виміру вихідних величин.

Відносну організацію вихідних характеристик оцінюють за формулою Ферстера:

$$R = 1 - \frac{H}{H_m}, \tag{6.33}$$

де $H = -\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{N} log_2 \frac{m_i}{N}$; $m_i$ – число появ $y_i$ значення вихідний характеристики; $N$ − повне число спостережень вихідних характеристик.

При багатомірно-багатомірній схемі взаємодії статичного імовірнісного об'єкта задача зводиться до одномірно-одномірної схеми для кожного сполучення постійних вхідних сигналів. Оцінка ступеня зв'язку виходу із входами здійснюється шляхом зіставлення статичних параметрів і обчислення коефіцієнта взаємної кореляції.

## 6.5 Моделювання динамічних режимів імовірнісних об'єктів

У випадку одномірно-одномірної схемі взаємодії і багаторазовому впливі на його вхід однієї і тієї ж функції часу $x(t)$ моделювання можливе у двох випадках:

– на виході спостерігається стаціонарний випадковий процес;

– на виході спостерігається нестаціонарний випадковий процес.

У першому випадку в якості математичної моделі вихідного сигналу приймають закон розподілу значень вихідної величини, що має однакові параметри для будь-яких проміжків часу $\Delta t$. Модель доповнюється залежностями, які можуть бути представлені алгебраїчною функцією або диференційними рівняннями:

$$H_m(i, \Delta t) = f(x) \qquad (6.34)$$

$$R(i, \Delta t) = f(x), \quad i = 1, 2, 3, \ldots \qquad (6.35)$$

У другому випадку в якості математичної моделі приймаються функціональні зв'язки

$$m_y(i, \Delta t) = f(x), \qquad (6.36)$$

$$\sigma_y(i, \Delta t) = f(x), \quad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, \qquad (6.37)$$

тут $m_y(i, \Delta t)$ – *математичне очікування* розподілу вихідних величин $y$ по дискретним відрізкам часу $\Delta t$; $\sigma_y(i, \Delta t)$ – *середньоквадратичне відхилення.*

Вибір математичної моделі закінчується контролем розмірностей, порядків, граничних умов, фізичного змісту, математичної замкненості, стійкості моделі.

Запитання для самоконтролю

*1 Мета задачі теоретичного дослідження ?*

*2 Етапи та зміст математичного моделювання ?*

*3 Види, структура та послідовність створення математичної моделі?*

*4 Перелічіть схеми взаємодії об'єкту із зовнішнім середовищем.*

*5 Види вихідних характеристик детермінованого об'єкту?*

*6 Сформулюйте критерії стаціонарності детермінованих об'єктів.*

# 7 АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

## 7.1 Дослідження статичних систем

Вибір методу дослідження математичної моделі заснований на принципі відповідності зовнішньої і внутрішньої правдоподібності, тобто ступінь точності обчислень повинна відповідати ступеню точності вихідних даних. При оціночних дослідженнях відносно малі доданки відкидаються а нелінійні залежності замінюються на лінійні. Статичні системи, представлені алгебраїчними рівняннями, досліджуються за допомогою визначників, *методом ітерацій, методами Крамера і Гаусса*. При складності з аналітичним рішенням використовують наближені методи: *графічний*, *метод хорд*, *метод дотичних*, *метод ітерацій*. При вирішенні диференційних рівнянь використовують *метод поділу змінних*, *метод підстановки*, *метод інтегруючого множника*, *метод якісного аналізу* та ін.

## 7.2 Наближені методи вирішення диференційних рівнянь

Для одержання наближених рішень використовують: *метод послідовних наближень*, *метод функціональних рядів*, *метод Рунге-Кутта*, *чисельні методи інтегрування* та ін. Вивчення моделей динамічних систем у класі диференційних рівнянь здійснюють за допомогою якісної теорії диференційних рівнянь. У її основі лежить поняття фазового портрета системи.

*Приклад.* Якщо система описується диференційним рівнянням

$$d^2y /dt^2 + \omega^2 y = 0 \qquad (7.1)$$

при початкових умовах:

$$y(0) = y_0 , \quad dy(0)/dt = y_0 , \qquad (7.2)$$

то часткове рішення рівняння має вигляд

$$y = y_o \cos \omega t + (y_o / \omega) \sin \omega t. \qquad (7.3)$$

Вважаючи $dy / dt$ новою шуканою функцією, введемо позначення:

$$y = z_1 , \qquad dy / dt = z_2 , \qquad (7.4)$$

і перетворимо вихідне рівняння в систему рівнянь першого порядку:

$$z_1 = z_2; \qquad z_2 = - \omega^2 z_1; \qquad (7.5)$$

при початкових умовах: $z_1(0) = y_o$; $z_2(0) = y_o$.

Часткове рішення має вигляд:

$$z_1 = y_o \cos \omega t + (y_o/ \omega)\sin \omega t; \qquad z_2 = - y_o \sin \omega t + y_o \cos \omega t. \qquad (7.6)$$

Для $z_1, z_2$ з даної системи рівнянь окрім $t$ маємо

$$(z_1^2/p_o^2) + z_2^2/ (\omega\, p_o)^2 = 1, \qquad (7.7)$$

тут

$$p_o = \sqrt{y_0^2 + \frac{y_0^2}{\omega^2}} > 0. \qquad (7.8)$$

Це – рівняння еліпса на площині $z_1 z_2$. Отже, часткове рішення для $z_1$ і $z_2$ виражається залежністю від часу поточних координат точки $M(t)$, що рухається в момент $t = 0$ від точки $M_o(y_o, y_o)$ по еліпсу. Цей рух називають *фазовою траєкторією*, а площину $z_1 z_2$ − *фазовою площиною*.

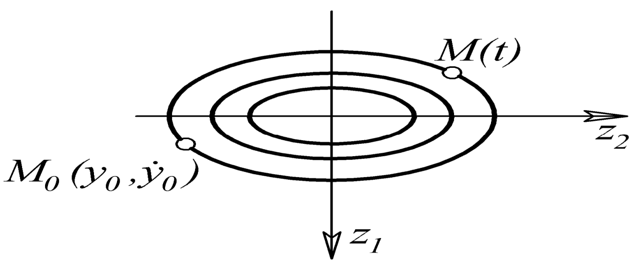



Рисунок 7.1 − Фазовий портрет системи рівнянь

*Чисельні методи* (методи кінцевих різниць або сіток) реалізуються таким чином (рис. 7.2):

– в ділянці $G$, де шукають рішення, будують сіткову ділянку $G_h$, що складається з однакових клітин і наближається до ділянки $G$;

– задане диференційне рівняння заміняють у вузлах побудованої сітки відповідним кінцево-різницевим рівнянням;

– на підставі граничних умов встановлюють значення шуканого рішення в граничних вузлах ділянки $G_h$.

Вирішивши систему кінцево-різницевих рівнянь (алгебраїчну систему з великим числом невідомих), знайдемо значення шуканої функції у вузлах решітки – тобто чисельне рішення задачі.

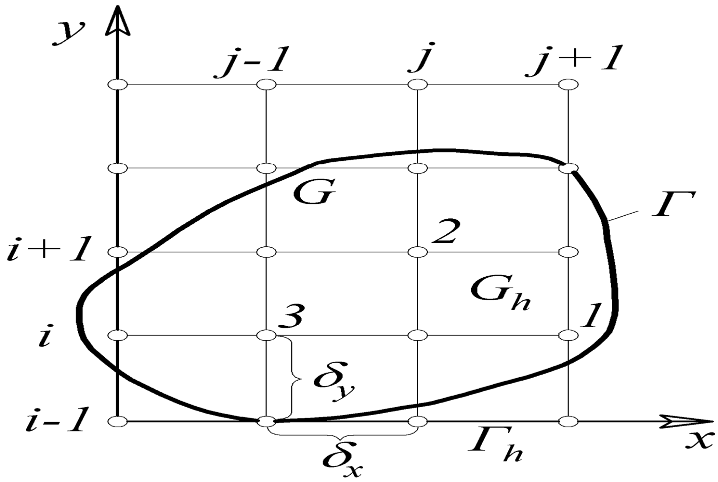



Рисунок 7.2 − Сітчаста ділянка $G_h$ з контуром $Г$

## 7.3 Методи вирішення задач варіаційного обчислення

Щоб сформулювати задачу варіаційного обчислення, вводять поняття *функціонала*. Якщо маємо плоску криву $y = f(x)$ з ділянкою визначення $x_o \leq x \leq x_1$ (рис. 7.3), то довжина кривій $s_1$, площа $p$ криволінійної трапеції, об'єм тіла обертання $V$ − залежать від виду заданої кривої $y = f(x)$:

$$s_1 = \int_{x_o}^{x_1} \sqrt{1 + [y'(x)]^2 dx}\,; \qquad p = \int_{x_o}^{x_1} y(x)dx\,; \qquad V = \pi \int_{x_o}^{x_1} [y(x)]^2 dx\,. \qquad (7.9)$$

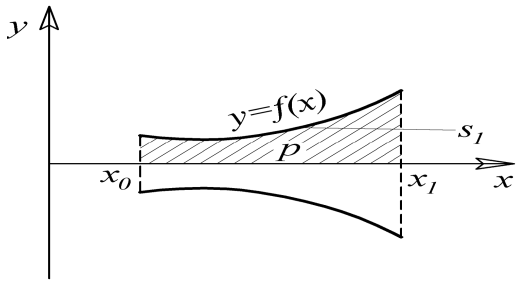



Рисунок 7.3 − Схема пояснення функціоналу

Таким чином, функція $y = f(x)$ однозначно визначає величини $s_1$, $p$, $V$, будучи своєрідним аргументом. Тому вони називаються *функціоналами* щодо функції $y = f(x)$.

Сутність задачі варіаційного обчислення полягає у тому, що при заданому функціоналі $F(y')$ в інтервалі $x_o \leq x \leq x_1$ необхідно знайти таку функцію $y = f(x)$ у заданій ділянці визначення функціоналу $F(y')$, при якій цей функціонал приймає мінімальне або максимальне значення.

Дані аналітичні методи застосовують до рішення лише простих задач.

Аналітичні методи вирішення математичних задач є основним методом сучасного наукового дослідження. У вирішенні практичних задач використовують методи перетворення вихідних рівнянь (логарифмування, перетворення Лапласа, Фур'є та ін.).

*Приклад.* Необхідно одержати рішення простого рівняння, називаного *оригіналом функції* :

$$y = a^{0,2} \tag{7.10}$$

Оскільки зведення числа $a$ в ступінь 0,2 прямими методами є досить складним, то здійснюємо перетворення цього рівняння логарифмуванням – це рівняння називають *зображенням функції* (7.10).

$$\log y = 0{,}2 \log a, \tag{7.11}$$

При логарифмуванні функція переводиться із простору оригіналів у простір зображення і зведення в ступінь зводиться до множення чисел 0,2 і *log* *а*, що достатньо просто. Потім антилогарифмуванням отриманий результат переводиться із простору зображень у простір оригіналів. Це аналог перетворення Лапласа і Фур'є. У перетвореннях Лапласа вихідна функція часу переміщується із простору оригіналів у простір зображень за допомогою інтеграла

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \tag{7.12}$$

тут $p$ – оператор Лапласа ($p = \frac{p}{dt}$).

Переміщення функції із простору зображень у простір оригіналів здійснюється за допомогою інтеграла

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_p e^{pt}dp. \tag{7.13}$$

Значення параметра $c$ вибирають так, щоб забезпечити збіжність інтеграла.

Вирішення диференційних і інтегральних рівнянь методом перетворення Лапласа полегшується наявністю таблиць перетворень функції. У процесі аналізу рішень оперують *передаточними функціями.* Передаточна функція – це відношення перетворення Лапласа вихідної координати лінійної системи до перетворення вхідної координати при нульових початкових умовах:

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)}, \tag{7.14}$$

тут $W(p)$ – передаточна функція; $x(p)$ – перетворення Лапласа вхідного сигналу; $y(p)$ – перетворення Лапласа вихідного сигналу.

Передаточна функція може бути отримана з диференційного рівняння системи керування заміною операції диференціювання за часом оператором Лапласа $p$, а операції інтегрування за часом – заміною $1/p$.

*Приклад.* Якщо система керування описується диференційним рівнянням

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = k(t), \tag{7.15}$$

роблячи заміну $d/dt$ на $p$ і переходячи до зображень, одержимо

$$py(p) + ay(p) = k \cdot x(p). \tag{7.16}$$

Таке представлення диференційного рівняння називається *операційним*.

Передатна функція цієї системи визначається шляхом простих алгебраїчних перетворень

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{k}{p+a}. \tag{7.17}$$

Для аналізу систем керування також використовують метод частотних характеристик. *Частотна характеристика* – це відношення комплексних зображень вихідної і вхідної амплітуд у сталому режимі гармонійних коливань

$$W(j\omega) = \frac{A_2(\omega)}{A_1}\, e^{j\varphi(\omega)}, \tag{7.18}$$

де $A_1$ – амплітуда синусоїдального вхідного сигналу; $\omega$ – колова частота; $A_2(\omega)$ – амплітуда коливань вихідної координати; $\varphi(\omega)$ – зсув по фазі синусоїдальних коливань вихідної координати.

Аналітично $W(j\omega)$ можна отримати з передатної функції шляхом заміни параметра перетворення Лапласа $p$ на $j\omega$ с наступним виділенням модуля комплексного числа і фазового зсуву.

Запитання для самоконтролю

*1 Послідовність вибору математичної моделі для статичних систем.*

*2 Методи рішення диференційних рівнянь статичних систем.*

*3 Що собою являє фазовий портрет системи рівнянь?*

*4 Які існують методи вирішення задач варіаційного обчислення?*

*5 Сформулюйте поняття функціоналу функції $y = f(x)$.*

*6 Особливості рішення інтегральних і диференційних рівнянь методом перетворень Лапласа.*

# 8 ІМОВІРНОСНО-СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

## 8.1 Завдання математичної статистики і теорії імовірності

Експериментально встановлено, що імовірнісні події мають певні закономірності. Теорія імовірності для статистичних законів дозволяє прогнозувати результат не однієї події, а середній результат випадкових подій тим точніше, чим більше число аналізованих явищ.

Імовірністю $p(x)$ події $x$ називають відношення числа випадків $N(x)$, які призводять до появи події $x$, − до загального числа можливих випадків $N$

$$p(x) = N(x)/N. \qquad (8.1)$$

Тобто математична статистика аналізує емпіричні події, а теорія імовірності розглядає теоретичний розподіл випадкових величин.

У *математичній статистиці* розглядають поняття про *частоту події* $y(x)$, − це відношення числа випадків $n(x)$, до загального числа подій:

$$y(x) = n(x) / n \qquad (8.2)$$

При зростанні числа подій $n$ частота $y(x)$ прагне до імовірності $p(x)$. Частота $y_{io} = n(x) / \Sigma n(x)$ характеризує імовірність появи випадкової величини і представляє ряд розподілу, а плавна крива – закон (функцію) розподілу $F(x)$.

## 8.2 Основні теореми теорії імовірності

– Імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі імовірності цих подій

$$P(A+B) = P(A)+P(B) \qquad (8.3)$$

– Сума імовірності *протилежних* подій дорівнює одиниці

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \qquad (8.4)$$

– Імовірність добутку двох *неспільних* подій дорівнює добутку імовірності однієї з них, на умовну імовірність іншої, обчислену за умову, що перша подія відбулася:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(A / B), \qquad (8.5)$$

тут $P(A/B)$ – *умовна* імовірність події $A$ – це імовірність події $A$, визначена за умову, що відбулась інша подія $B$.

Подія $A$ є *незалежною* від події $B$, якщо імовірність події $A$ не залежить від того, чи відбулась подія $B$, – чи ні.

Подія $A$ є *залежною* від події $B$, якщо імовірність події $A$ змінюється в залежності від того, відбулась подія $B$, – чи ні.

*Приклад* 1. У лотереї 1000 білетів. Один − на 500 гр., 10 білетів – по 100 гр., 50 білетів – по 20 гр. і 100 білетів – по 5 гр. Визначити імовірність виграти не менш 20 гр.

*Рішення*. $A$ − імовірність виграти не менш 20 гр.

$A1$ – виграти 20 гр.

$A2$ – виграти 100 гр., тоді: $A = A1 + A2 + A3$

$A3$ – виграти 500 гр.

$$P(A) = P(A1) + P(A2) + P(A3) = 0{,}05+0{,}01+0{,}001 = 0{,}061$$

*Приклад* 2. В електричний ланцюг ввімкнено послідовно три блоки. При відмові одного з них – ланцюг втрачає працездатність. Визначити цю імовірність, якщо імовірність виходу з ладу першого – 0,01, другого – 0,008, третього – 0,025.

*Рішення.* $A$ – вихід з ладу електричного ланцюга.

$A1, A2, A3$ – вихід з ладу відповідних блоків.

Тоді: $A = A1 + A2 + A3$

$$P(A) = P(A1) + P(A2) + P(A3) = 0{,}01 + 0{,}008 + 0{,}025 = 0{,}043$$

*Приклад* 3. Мішень має три зони: 1, 2 і 3. Імовірність влучення в першу зону – 0,15, у другу – 0,23, у третю – 0,17. Знайти імовірність промаху.

*Рішення* $A$ – промах, $\bar{A}$ – влучення.

Тоді: $\bar{A} = \bar{A}1 + \bar{A}2 + \bar{A}3$

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}1) + P(\bar{A}2) + P(\bar{A}3) = 0{,}15 + 0{,}23 + 0{,}17 = 0{,}55,$$

звідки: $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0{,}45$

Додавання імовірностей для спільних подій $A$ і $B$ визначається за формулою

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (8.6)$$

Це витікає з геометричної інтерпретації, якщо дві зони імовірностей А і В частково перекриваються, утворюючі деяку сумісну зону $\Delta AB$.
Аналогічно імовірність суми 3-х сумісних подій визначається так

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \quad (8.7)$$

Аналогічно для добутку подій

$$P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A+B) \quad (8.8)$$

$$P(ABC) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A+B) - P(A+C) - P(B+C) + (A+B+C).$$

*Приклад* 4. Пристрій містить три агрегати: два – першого типу *A1*, *A2* і один агрегат іншого типу – *B*. Агрегати А1, А2 дублюючі, а агрегат *B* – не дубльований. Відмова пристрою буде при відмові одночасно А1, А2 і *B*. Відмова пристрою – подія *C* буде:

$$P(C) = A1 \cdot A2 + B\ , \quad (8.9)$$

тут *A1*– відмова агрегату *A1; A2* – відмова агрегату *A*2; *B* – відмова агрегату *B*. Необхідно позначити імовірність випадку *C* через імовірність випадків, що містять лише суми, а не добутки елементарних подій *A1*, *A2* і *B*.

*Рішення.* $B(C) = P(A1A2) + P(B) - P(A1A2B)$.

$$P(A1A2) = P(A1)m + P(A2) - P(A1+A2.)$$

$$P(A1A2B) = P(A1) + P(A2) + P(B) - P(A1+A2) - P(A1+B) - P(A2+B) + (A1+A2+B).$$

Підставляючи ці вирази у формулу (8.9) отримаємо

$$P(C) = P(A1+B) = P(A2+B) - P(A1+A2+B). \quad (8.10)$$

Приклади на добутки.

*Приклад* 1. Відбувається дуель між двома об’єктами *A* і *B*.

*A* робить два постріли, а *B* – один. *A* робить постріл і вражає *B* з імовірністю 0,2. Якщо *B* не вражений – він робить постріл з імовірністю враження 0,3. Якщо *A* не вражений – він робить наступний постріл з імовірністю 0,4. Знайти імовірність враження *A* і *B*.

*Рішення*. *A* – враження об’єкта *A*.

*B* – враження об’єкта *B*.

Для виконання події $A$ необхідно суміщення (добуток) двох подій:

1. $A$ не вразив $B$ першим пострілом ; 2. $B$ вразив $A$ пострілом у відповідь

$$P(A) = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24.$$

Подія $B$ складається з двох *несумісних* варіантів: $B = B1 + B2$, де $B1$ – враження об'єкта $B$ першим пострілом $A$, $B2$ – враження об'єкта $B$ іншим пострілом $A$. За теоремою складання імовірностей

$$P(B) = P(B1) + P(B2). \qquad (8.11)$$

Згідно умови $P(B1) = 0,2$. Відносно події $B2$, − то вона складається з суміщення (добутку) трьох подій :

– перший постріл $A$ не вразив $B$;

– постріл у відповідь $B$ не повинний вразити $A$;

– останній (другий) постріл $A$ не повинний вразити $B$.

По теоремі множення ймовірностей $P(B2) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,4 = 0,224$,

звідки : $$P(B) = 0,2 + 0,224 = 0,424.$$

*Приклад* 2. Об'єкт містить три елементи. Для його знищення достатньо одного влучення в перший елемент, двох влучень – у другий і трьох – у третій. Імовірність влучення в той, чи інший елемент пропорційна площі цих елементів, які складають відповідно: 0,1, 0,2, 0,7 об'єкта. Об'єкт двічі вражений. Визначити імовірність знищення об'єкта.

*Рішення*. $A$ – знищення об'єкта; $P(A/\ 2)$ – умовна імовірність знищення об'єкта при умові двічі враження. Ці два враження можуть знищити об'єкт двома способи: − якщо хоч один постріл вразив перший елемент, або обидва вразили другий елемент. Оскільки ці варіанти несумісні (в об'єкт потрапило 2 постріли), то можна застосувати *теорему додавання.* Імовірність влучення в перший елемент визначаємо через імовірність протилежної події (жодного влучення з двох – не буде), що дорівнює: $1 - 0,92^2$. Імовірність того, що відбудуться обидва влучення в другий елемент − $0,2^2$.

Тоді $$P(A/2) = 1 - 0,9^2 + 0,2^2 = 0,23.$$

*Приклад* 3. Знайти імовірність знищення об'єкта, якщо в нього тричі влучено.

*Рішення*. Здійснюємо протилежну подію – не знищення об’єкта при трьох влученнях. Це може бути тільки при двох влученнях у третій елемент, а одного влучення – у другий. Таких комбінацій – три ($З_3^2 = 3$).

Тоді $P(A\cdot \bar{A} / 3) = 3\cdot 0{,}7^{2\cdot} 0{,}2 = 0{,}294$, звідки $P(A/3) = 1 – 0{,}294 = 0{,}706$.

*Приклад* 4. Монета кидається 6 разів. Знайти імовірність *A* того, що гербів буде більше, ніж цифр.

*Рішення*. Перелічимо усі можливі варіанти *A*:

$A1$ – випаде 6 гербів і жодної цифри.

$A2$ – випаде 5 гербів і 1 цифра.

$A3$ – випаде 4 герби й 2 цифри і т.д.

Після цього складаємо усі імовірності.

Інше рішення: *A* – випаде більше гербів,

*B* – випаде більше цифр,

*C* – випаде однакове число гербів і цифр.

Оскільки події *A, B, C* несумісні і утворюють повну групу, то

$$P(A)+P(B)+P(C) = 1.$$

Оскільки $P(A) = P(B)$, то $2P(A) + P(C) = 1$, тоді: $P(A) = \dfrac{1 - P(C)}{2}$ .

Знайдемо імовірність події *C*. Вона дорівнює $(1/6)^6$. Число таких комбінацій дорівнює $C_6^3 = 20$ (число способів, якими з шести спроб вибрати 3, коли буде герб). Отже: $P(C) = \dfrac{20}{64} = 5/16$, звідки

$$P(A) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{16}\right) = \frac{11}{32}.$$

Формула *повної імовірності* є наслідком обох теорем – добутку і додавання. Якщо необхідно визначити імовірність події *A*, яка може відбутись разом з одною із подій : $H_1$, $H_2$, … $H_n$ , що утворюють повну групу *несумісних* подій, які звуть *гіпотезами*.

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i). \qquad (8.12)$$

Оскільки гіпотези $H_1$, $H_2$, ... $H_n$ , утворюють повну групу, то подія $A$ може з’явитись лише в комбінації з будь-якою з цих гіпотез

$$A = H_1A + H_2A + \ldots + H_nA. \qquad (8.13)$$

Оскільки гіпотези $H_1$, $H_2$, ... $H_n$ несумісні, то і комбінації $H_1A$, $H_2A \ldots H_nA$ − теж несумісні. Використаємо теорему додавання

$$P(A) = P(H_1A) + P(H_2A) + \ldots + P(H_nA) = \sum_{i=1}^{n}P(H_iA). \qquad (8.14)$$

Застосуємо до події $H_i A$ теорему добутку, то отримаємо

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i) \qquad (8.15)$$

*Приклад* 1. Маємо три урни: у першій – 2 білих і 1 чорна куля; у другій – 3 білих і 1 чорна куля; у третій – 2 білих і 2 чорних кулі.

Знайти імовірність А витягти білу кулю.

*Рішення*. Розглянемо три гіпотези: $H1$ – вибір першої урни,

$H2$ – вибір другої урни,

$H3$ – вибір третьої урни.

Оскільки гіпотези по умовам рівно можливі, то $P(H1) = P(H2) = P(H3) = 1/3$.

Умовні імовірності події А при цих гіпотезах дорівнюють:

$$P(A/H1)= 2/3; \qquad P(A/H2) = 3/4; \qquad P(A/H3) = 1/2.$$

По формулі повної імовірності:

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{23}{36}.$$

*Приклад 2*. По об'єкту тричі стріляють. Імовірність влучення при першому пострілі – 0,4, при другому – 0,5, при третьому – 0,7. Для виходу з ладу об’єкта достатньо трьох влучень; при одному влученні об'єкт виходить з ладу з імовірністю 0,2 ; при двох влученнях – з імовірністю 0,6. Знайти імовірність виходу з ладу об'єкта з трьох пострілів.

*Рішення*. Розглянемо чотири гіпотези: $H0$ – в об'єкт не влучено

$H1$ – влучив один постріл

*H2* – влучено два постріли

*H3* – влучено три постріли.

Знайдемо імовірність цих гіпотез: $P(H0) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$;

$P(H1) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3+0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}36$;

$P(H2) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}5\ 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}41$.

$P(H3) = 0{,}4\cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}14$.

Умовні імовірності випадку *A* (вихід з ладу) при цих гіпотезах:

$P(A \mid H0) = 0$; $P(A \mid H1) = 0{,}2$; $P(A \mid H2) = 0{,}6$; $P(A \mid H3) = 1{,}0$.

Застосуємо формулу повної імовірності

$P(A) = P(H0)P(A \mid H0) + P(H1)P(A \mid H1)+P(H2)P(A \mid H2) + P(H3)P(A \mid H3)=$

$= 0{,}36 \cdot 0{,}2 + 0{,}41 \cdot 0{,}6 + 0{,}14 \cdot 1{,}0 = 0{,}458$.

## 8.3 Поняття функції розподілу, математичного очікування, дисперсії

Імовірність випадкової величини (події) – це кількісна оцінка можливості її появи. Достовірна подія має імовірність $p = 1$. Для випадкової події : $0 \le p(x) \le 1$, а сума імовірностей усіх можливих подій

$$\sum_{0}^{n} p_i = 1. \qquad (8.16)$$

Необхідно мати характеристики функції розподілу: *середнеарифметичне* і *математичне очікування*, *дисперсію, розмах ряду розподілу*. Якщо серед *n* подій випадкова величина $x_i$ повторяться $n_1$ раз, величина $x_2$ – $n_2$ раз і т.д., то середнеарифметичне значення $x$ дорівнює:

$$\bar{x} = \sum_{1}^{n} (x_i\ n_i)/\ n \qquad (8.17)$$

Розмах можна використовувати для оцінки варіації ряду подій :

$$R = x_{max} - x_{min}\ , \qquad (8.18)$$

тут $x_{max}$ , $x_{min}$ – значення обмірюваної величини або погрішності.

Замінивши замість емпіричних частот: $y_1, ...y_n$ − їхніми імовірностями: $p_1,\dots,p_n$ , одержимо важливу характеристику розподілу – *математичне очікування:*

$$m(\mathrm{x}) = \sum_{1}^{n} x_{\mathrm{i}}\, p_i \qquad (8.19)$$

*Приклад* 1. Маємо 5 вимірів однієї вибірки: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$ з імовірностями: $\mathrm{p}_1 = 0{,}1$; $\mathrm{p}_2 = 0{,}15$; $\mathrm{p}_3 = 0{,}45$; $\mathrm{p}_4 = 0{,}3$; $\mathrm{p}_5 = 0$.
Тоді середня величина $x = 15/\ 5 = 3$, а математичне очікування у відповідність із (8.19) дорівнює: $m(x) = 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0/15 + 3\cdot 0{,}45 + 4\cdot 0{,}3 + 5\cdot 0 = 2{,}95$.

Для випадкових безперервних величин математичне очікування дорівнює

$$m(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot p(x)\, dx, \qquad (8.20)$$

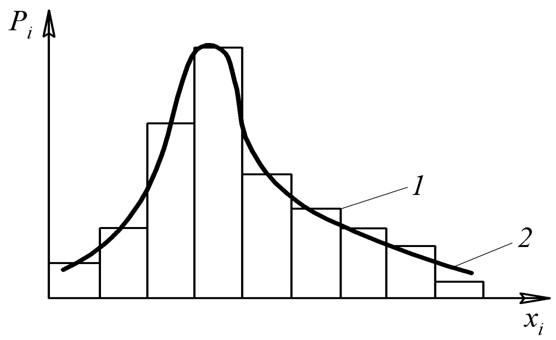



Рисунок 8.1 − Розподіл випадкових величин: 1− гістограма; 2− крива розподілу

Якщо систематичні погрішності вимірів повністю виключені, то дійсне значення вимірюваної величини дорівнює математичному очікуванню, а відповідну йому абсцису називають *центром розподілу*.

Однакову площу під кривою розподілу можна описати різними кривими, – це означає, що вони можуть мати різне *розсіювання*. Мірою розсіювання (точності виміру) є *дисперсія D* і *середньоквадратичне відхилення σ*. Дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини стосовно математичного очікування і визначається таким чином

$$D(x) = \sum_{1}^{n} (x_i - m(x))^2 .\, p_i\, . \qquad (8.21)$$

Тоді: $D(x) = (1 - 2{,}95)^2\cdot 0{,}1 + (2 - 2{,}95)^2\cdot 0{,}15 + (3 - 2{,}95)^2\cdot 0{,}45 + (4 - 2{,}95)^2\cdot 0{,}3 +$
$+(5 - 2{,}95)^2\cdot 0 = 0{,}83$.

Середньоквадратичне відхилення випадкової величини: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$ .

Коефіцієнт варіації $k_в = \sigma / m(x)$ визначають у відносних одиницях ($k_в<1$) і використовують для порівняння інтенсивності розсіювання даних вимірів.

Основним завданням статистики є підбор теоретичних кривих по наявному емпіричному законі розподілу. Якщо при $n$ вимірах випадкової величини отриманий ряд її значень: $x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n$, то при обробці таких рядів їх групують в інтервали і встановлюють для кожного частоту появи: $y_i$ і $y_{oi}$. Потім за величинами $x_i$ і $y_{oi}$ будують східчасту гістограму частот і обчислюють характеристики емпіричної кривої розподілу.

Основними характеристиками емпіричного розподілу є: середнеарифметичне значення події

$$\bar{x} = \sum_{1}^{n} x_i / n; \tag{8.23}$$

дисперсія

$$D = \sum_{1}^{n} (\bar{x}_i - x)^2 / n; \tag{8.24}$$

середнеквадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{D}. \tag{8.25}$$

Значення цих величин відповідають величинам $\bar{x}$, $D(x)$ *і* $\sigma(x)$ теоретичного розподілу.

## 8.4 Закон нормального розподілу (Гаусса). Розподіл Пуассона

*Закон нормального розподілу (закон Гаусса)*, полягає в тому, що він є *граничним* законом, до якого зводяться інші закони в більшості ситуацій. Він характеризується *щільністю* імовірності наступного виду

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m_x)}{2\sigma^2}} . \tag{8.26}$$

Тут максимальна ордината кривій $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ відповідає точці $x = m$. При видаленні від точки $m$ щільність розподілу падає і при $x > \pm$ крива розподілу наближається до осі абсцис. Тут параметр $m$ − математичне очікування, а $\Sigma = \sqrt{D}$ середнє квадратичне відхилення величини $x$.

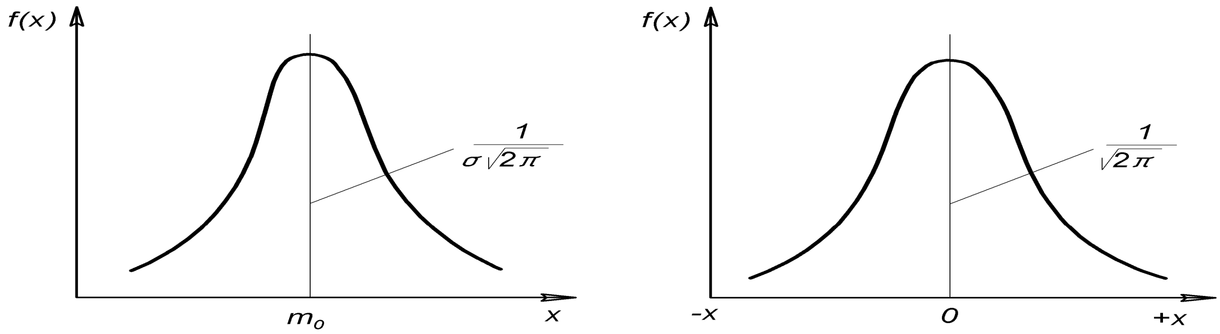



Рисунок 8.2− Крива нормального розподілу: а) $m(x) \neq 0$; б) $m(x) = 0$

При $m(x) \neq 0$ це рівняння відповідає функції нормального розподілу.

Для $m(x) = 0$ і $\sigma^2 = 1$ закон нормального розподілу описується формулою

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \tag{8.27}$$

Оцінка розсіювання здійснюється по величині $\sigma$ − чим вона більша, тим більше розсіювання, а максимумі кривої розподілу $\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$ спадає.

Тому величину $y = \frac{1}{\sqrt{2\sigma\pi}}$ при $\sigma = 1$ або $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ називають *мірою точності*.

Чим менше $\sigma$, тим більша збіжність результатів експерименту. Для діапазону $\pm\, t{\cdot}\sigma$ імовірність попадання події $x_i$ в цей діапазон обчислюють по розподілу Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{2}{2\pi} \int_0^t e^{-x_i^2} dx. \tag{8.28}$$

При аналізі випадкових дискретних процесів використовують *розподіл Пуассона*. Імовірність появи числа подій $x = 1, 2, 3,...$ в одиницю часу дорівнює

$$p(x) = \frac{m^x}{x} e^{-m} = [(\lambda\, t)^x / x!]\, e^{-\lambda t}, \tag{8.29}$$

тут $x$ − число подій за даний відрізок часу $t$ ;

$\lambda$ − щільність (середнє число подій за одиницю часу);

$\lambda{\cdot}t$ − число подій за час $t$ ; $\lambda \cdot t = m$.

Для закону Пуассона дисперсія дорівнює математичному очікуванню числа настання подій за час $t$, тобто $\sigma^2 = m$.

*Приклад.* За 5 хв. під навантаження подається 6 машин. Яка імовірність надходження за 5 хв. 10 машин ?

Тут: $x = 10$, $\lambda \cdot t = 6$, $p(x) = (\sigma^{10}\ e^{-6}) / 10! = 0{,}041$

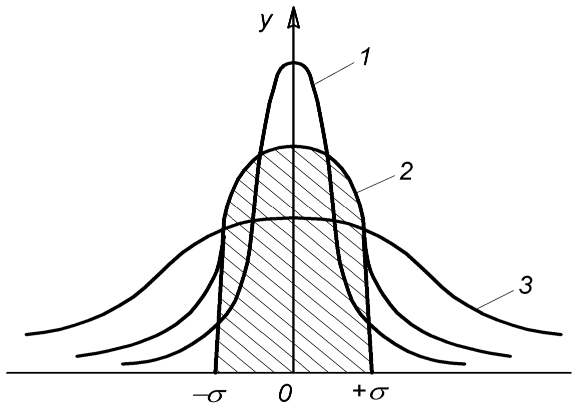



Рисунок 8.3− Розсіювання кривій нормального розподілу: 1− σ = 0,5; 2− σ = 1; 3− σ = 2

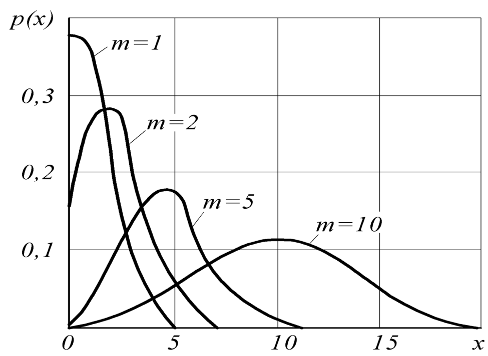



Рисунок 8.4− Розподіл Пуассона

## 8.5 Показовий закон розподілу

Його використовують для дослідження тривалих процесів (часу відмови приладів, тривалості роботи устаткування та ін.) щільність імовірності якого виражається залежністю (рис. 8.5,а)

$$f(x) = \lambda\ e^{-\lambda x}. \tag{8.30}$$

Тут щільність $\lambda$ є величиною зворотною математичному очікуванню:

$$\lambda = 1/\, m(x), \quad \text{а} \quad \sigma^2 = [m(x)]^2. \tag{8.31}$$

У різних сферах досліджень використовують закон розподілу Вейбулла (рис. 8.5,б)

$$f(x) = n\ \mu^n\ x^{n-1} e^{\mu^n x^n}\ , \tag{8.32}$$

де $n$, $\mu$ − параметри закону, $x$ − аргумент (зазвичай, час).

Так, інтенсивність електричного старіння ізоляції залежить від факторів, що не підлягають контролю, тому термін служби ізоляції $t$ є випадковою величиною, яку описують виразом

$$F(t) = 1 - \exp\,[-(t\,/\,b)^{c}],$$

тут $b$ – параметр масштабу, що дорівнює строку служби при імовірності відмов 0,63; він пропорційний середньому значенню $\bar{t}$ (математичному очікуванню); $b = k_{в}\bar{t}$; ($k_{в}$ залежить від параметра форми $c$: − при $c$ = 10÷15 кВ, $k_{в}$= 1,03÷1,05); тоді:

$$F(t) = 1–\exp[-(\frac{t \cdot U^{n}}{A \cdot k_{в}})^{c}]. \qquad (8.33)$$

Цей вираз використовують при статистичному аналізі експериментальних даних про термін служби.

## 8.6 Закон *γ – розподілу*

Використовують для дослідження процесів поступового старіння, зниження параметрів і властивостей об'єктів у часі і т.п.

$$f(x) = (\lambda^{\alpha}/\alpha!)x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x}, \qquad (8.34)$$

тут $\lambda$, $\alpha$, – параметри. При $\alpha$ = 1, $\gamma$ − функція перетворюється в показову.

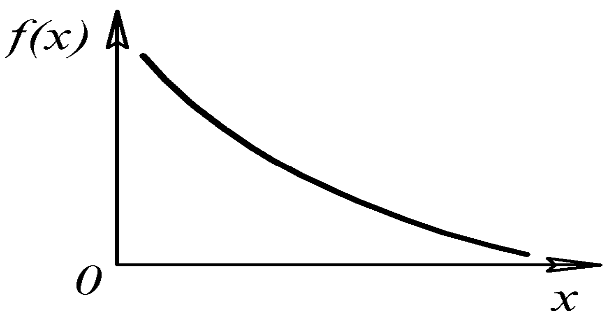



Рисунок 8.5,а − Показова функція

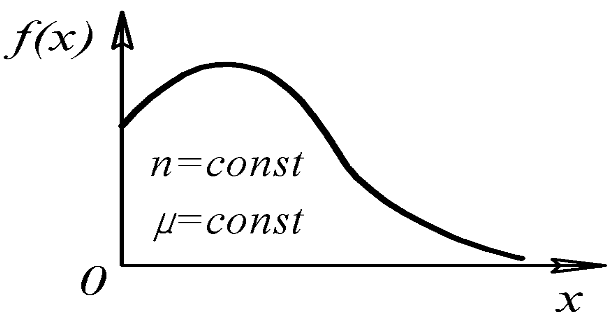



Рисунок 8.5,б − Розподіл Вейбулла

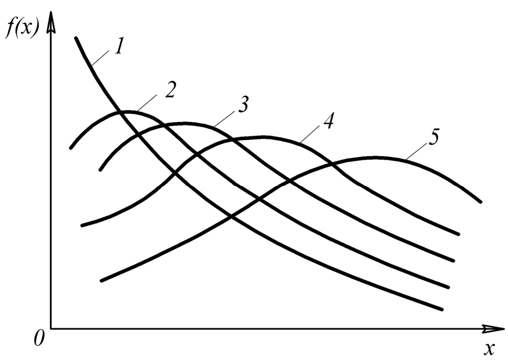



Рисунок 8.6 − Криві $\gamma$-розподілу: 1- α=1; λ=1; 2- α=3; λ=1; α=4; λ=1,5; α=4; λ=1,5

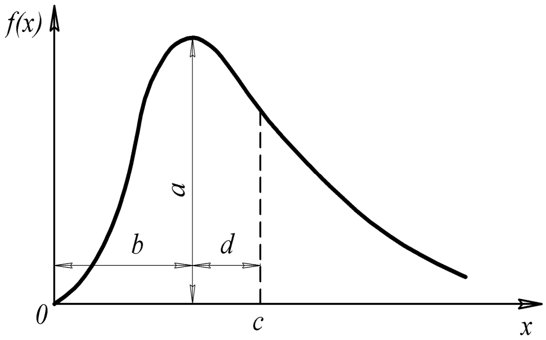



Рисунок 8.7 − Розподіл Пірсона

При дослідженні процесів встановлення розрахункових характеристик матеріалів, використовують закон розподілу Пірсона

$$f(x) = ae^{dx}(1 + \frac{x}{b})^{db}, \qquad (8.35)$$

тут $a$ – максимальна ордината; $d$, $b$ – відстані від максимальної ординати до центра розподілу $C$ и початку координат 0.

При дослідженні складних процесів імовірнісного характеру застосовують метод *Монте-Карло*, що дозволяє знайти оптимальне рішення з безлічі варіантів. Цей метод статистичного моделювання або статистичних випробувань заснований на використанні випадкових чисел, що моделюють імовірнісні процеси. В основі його – закон великих чисел який наголошує: при великій кількості статистичних випробувань імовірність того, що середнє арифметичне значення випадкової величини прагне до її математичного очікування, – дорівнює 1, тобто

$$\frac{lim\, p}{n \to \infty} \, \{ \left| \frac{\sum x_i}{n} - m(x) \right| < \varepsilon \} \to 1, \qquad (8.36)$$

тут ε − будь-яке мале позитивне число.

Звідси видно, що при збільшенні числа випробувань $n$ середнє арифметичне асімптотично наближається до математичного очікування.

При оптимізації різних процесів використовують *методи теорії ігор*, що розглядають розвиток процесів залежно від випадкових ситуацій. Фактично − це математична теорія конфліктів, обумовлена розбіжністю інтересів 2-х сторін і необхідністю пошуку оптимального для даних умов рішення (метрологія, будівництво та ін.).

Запитання для самоконтролю

*1 У чому полягають задачі математичної статистики?*

*2 Які задачі вирішує теорія імовірності?*

*3 Наведіть основні параметри функції розподілу.*

*4 Дайте визначення математичному очікуванню, дисперсії.*

*5 Що таке коефіцієнт варіації ряду?*

*6 Дайте характеристику закону нормального розподілу.*

*7 Як використовують функцію розподілу Лапласа?*

*8 Охарактеризуйте розподіли Пуассона і Вейбулла.*

*9 Де використовують показовий закон і закон γ-розподілу?*

*10 Сутність методів Монте-Карло і теорії ігор?*

# 9 МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

## 9.1 Сутність методу

При визначенні залежності однієї фізичної величини $Y$ від іншої $X$ неминучі *погрішності вимірів*. Тому необхідно як можна точніше побудувати по експериментальних точках ($y_i$, $x_i$) залежність $Y(X)$. Метод найменших квадратів полягає в тім, щоб сума квадратів відхилень експериментальних точок від кривої, що згладжує, прямувала в мінімум

$$\sum_{i=1}^{N}[y_i - \varphi(x)]^2 \to min , \qquad (9.1)$$

де $y_i$ $x_i$ – експериментальні значення змінних в $i$-*м* вимірі;

$N$ − число експериментів; $\varphi(X)$ − шукана залежність $Y$ від $X$.

## 9.2 Метод розкладання в ряд Тейлора

Для емпіричного опису досліджуваної закономірності в ділянці її існування, обумовленої межами зміни аргументу, використовують алгебраїчний поліном певного ступеня (ряд Тейлора).

Для визначення параметрів залежності $Y = \varphi(X)$ запишемо її як функцію аргументу $X$ і параметрів $a_j$, $j = \overline{0,s}$. Тоді умова (9.1) прийме вид

$$\sum_{i=1}^{N} \left[x_{\rm i} - \varphi( x_i, a_0, a_1, \ldots a_j, \ldots a_s)\right]^2 = min\ldots \qquad (9.2)$$

Для визначення параметрів, що задовольняють цій умові, необхідно знайти екстремуми функцій багатьох змінних $a_j$, шляхом узяття похідних по параметрах від цього вираження і прирівняти їх нулю, одержавши систему $s + 1$ рівнянь, вирішення яких дозволить знайти параметри $a_j$.

$$\sum_{i=1}^{N} \left[y_i - \varphi( x_i, a_0, \ldots a_j, \ldots a_s)\right] d\varphi/da_j = 0, \quad j = \overline{0,s}\ldots \qquad (9.3)$$

## 9.3 Визначення параметрів полінома

При апроксимації даної залежності поліномом $s$–го порядку (9.4) визначення параметрів полінома здійснюють у такій послідовності.

$$Y = a_o + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_sX^s, \qquad (9.4)$$

така система рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned} a_o\sum_i x_i^0 + a_1\sum_i x_i^1 + a_2\sum_i x_i^2 + \dots a_s\sum_i x_i^s &= \sum_i x_i^0 y_i \\ a_o\sum_i x_i^1 + a_1\sum_i x_i^2 + a_2\sum_i x_i^3 + \dots a_s\sum_i x_i^{s+1} &= \sum_i x_i^1 y_i; \qquad (9.5) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_o\sum_i x_i^s + a_1\sum_i x_i^{s+1} + a_2\sum_i x_i^{s+2} + a_s\sum_i x_i^{2s} &= \sum_i x_i^s y_i; \end{aligned}$$

Ця система лінійна щодо параметрів $a_i$ , є *нормальною* а її вирішення дає чисельне значення цих параметрів. Якщо залежність $Y = \varphi(X)$ є *трансцендентною* (наприклад, $Y = a_o \exp a_1X$), то чисельні значення $a_j$ , що відповідають умові (9.2) можна визначити графічно або чисельними методами.

*Приклад* 1. Якщо задачі, розв'язувані оператором розбиті по складності на три категорії: $x_i$ , $i = \overline{1,N}$ ; ($N = 3$), то середній час, затрачуваний на вирішення задачі, $y_i$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
| $y_i$, хв. | 2 | 3 | 5 |

Визначити апроксимуючу залежність $Y = \varphi(X)$ (рис. 9.1).

*Рішення.* Нанесена на графік залежність має лінійний характер виду

$$Y = a_o + a_1X. \qquad (9.6)$$

Відповідно до методу найменших квадратів параметри $a_o$ і $a_1$ повинні задовольняти умові (9.1), що у цьому випадку приймає вид:

$$\sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (a_o + a_1x_1)\right]^2 = min. \qquad (9.7)$$

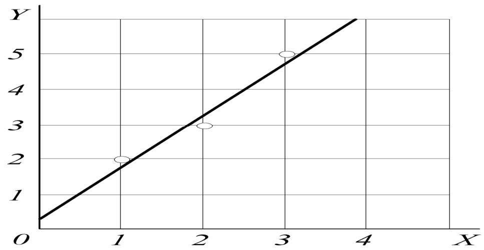



Рисунок 9.1 − Графік залежності Y = $\varphi(X)$

Взявши часткові похідні по параметрах $a_o$ і $a_1$ і прирівнявши їх нулю, одержимо систему нормальних рівнянь:

$$a_o + a_1\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} y_i ;$$

$$a_0\sum_{i=1}^{N} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i ; \qquad (9.8)$$

підставивши сюди значення $x$ і $y$ остаточно одержимо:

$$3a_o + 6a_1 = 10;$$

$$6a_o + 14a_1 = 23.$$

Рішення цієї системи

$$a_o = 1/3; \quad a_1 = 3/2.$$

Таким чином, шукана аналітична залежність має вигляд: $Y = 0{,}33 + 1{,}5\ X$.

*Приклад* 2. Необхідно визначити коефіцієнти $a_1$ і $a_2$ у рівнянні

$$k_p = a_1 + a_2 c. \qquad (9.9)$$

Тут невідомі два параметри, − тому систему рівнянь запишемо у вигляді:

$$y = a_1 x_1 + a_2 u_2 ,$$

$$y u_2 = a_2 x_1 u_2 + a_2 u_2^2. \qquad (9.10)$$

Оскільки рівняння лінійні, – обмежимося чотирма серіями дослідів.

Таблиця 9.1– Результати вимірювань

| $u_2$ = c | $y = k_p$ | $u^2$ | $yx$ |
|---|---|---|---|
| 230 | 1,26 | 52900 | 289,8 |
| 255 | 1,32 | 65025 | 336,6 |
| 295 | 1,40 | 87025 | 413,0 |
| 320 | 1,50 | 102400 | 480,0 |
| 1100 | 5,48 | 307350 | 1519,4 |

Тоді систему рівнянь можна представити у вигляді:

$$5{,}48 = 4a_1 + 1100a_2;$$

$$1519 = 1100a_1 + 307350a_2$$

Вирішення їх дає: $a_1 = 0{,}78$; $a_2 = 0{,}0025$.

Отже емпірична формула буде мати вигляд

$$k_p = 0{,}78 + 0{,}0025\ c. \qquad (9.11)$$

Для обчислення коефіцієнтів *а* методом найменших квадратів необхідно користуватися існуючими типовими програмами для ЕОМ.

Запитання для самоконтролю

1 *Поясніть сутність методу найменших квадратів.*

*2 В чом полягає метод розкладання в ряд Тейлора?*

*3 Як реалізується метод «динамічного програмування»?*

# 10 МОДЕЛЮВАННЯ В НАУКОВО-ТЕХНІЧНОМУ ПРОЦЕСІ

## 10.1 Поняття про критерії подоби

Моделювання – це дослідження об’єкта на основі моделі, яка відображає найбільш характерні його ознаки, вибір яких визначає мету дослідження. Основною умовою застосування цього методу є встановлення *критеріїв подоби* – формулювання тих умов, при яких модель відбиває досліджуваний об'єкт. Критерії подоби можуть бути трьох видів. *Абсолютна подоба* – це повна відповідність стану або явища в просторі і часі. *Повна подоба* – подоба процесів у часі і просторі, що визначають досліджуване явище (приклад: генератор, всі режими якого відрізняються від подібного – лише масштабами). *Неповна подоба* – збіг процесів тільки в часі або тільки в просторі.

З погляду адекватності природи і оригіналу моделювання може бути:

– *фізичне*, реалізоване при однаковій фізичній природі явищ;

– *аналогове*, що вимагає відповідності деяких параметрів порівнюваних процесів;

– *математичне*, що полягає у формальному перетворенні рівнянь, які спрощують їхнє вирішення.

## 10.2 Теореми подоби

Вони встановлюють співвідношення між параметрами свідомо подібних явищ (перша і друга теореми) і визначають умови (третя), необхідні для того, щоб явища були подібними.

*Перша теорема подоби.* У подібних явищ (фізично, математично й ін.) можна знайти деякі сполучення параметрів, називаних критеріями подоби, що мають однакові (чисельно або функціонально) значення.

*Приклад.* Випадок подібних процесів, описуваних, однорідними рівняннями:

$$y_j^1/y_n^1 = y_j^2/y_n^2 = \ldots = y_s^i/y_n^s, \qquad (10.1)$$

де 1, 2,...,$s$ − номери процесу; $y_j$, $y_n$ – параметри моделі і об'єкта.

Індекси, що позначають номер процесу опускаємо і запишемо в загальному виді

$$\pi_j = y_j \,/\, y_n = idem, \qquad (10.2)$$

де $\pi$ − критерії подоби; *idem* означає − однаково для всіх процесів. Критерії подоби шляхом множення або розподілу можуть перетворюватися в критерії іншої форми. Якщо критерії $\pi_R = idem$ і $\pi_{k+j} = idem$, то $\pi_R{\cdot}\pi_{k+\mathrm{j}} = idem$; $\pi_R \,/\, \pi_{R+j} = idem$; $1/\,\pi_R = idem$; $R{\cdot}\,\pi_R = idem$. ($R$ – $const$).

*Друга теорема подоби.* Усяке повне рівняння фізичного процесу в певній системі одиниць може бути представлене у вигляді залежності між безрозмірними співвідношеннями із вхідних в рівняння параметрів, які і є критерії подоби. Теорема вказує на можливість свого роду заміни змінних і скорочення їхнього числа з $m$ розмірних до $n$ безрозмірних величин з переходом до критєріального рівняння.

*Приклад.* Процес описується лінійним диференційним рівнянням третього порядку:

$$A_3 d^3\varphi/dt^3 + A_2\, d^2\varphi/dt^2 + A_1\, d\varphi/dt + A_o\varphi = 0, \qquad (10.3)$$

тут $t$ – час; $A_3(з^3)$, $A_2(з^2)$, $A_1(c)$ – коефіцієнти, що мають постійні величини і розмірності, $A_0$ – безрозмірний коефіцієнт.

Підстановкою $t = q{\cdot}\tau$, безрозмірного часу $\tau$ рівняння призводимо до безрозмірного виду

$$d^3\varphi/dt^3 + \chi d^2\varphi/dt^2 + \xi d\varphi\ /dt + \varphi = 0, \qquad (10.4)$$

тут $\chi = (A_2/A_3)\ \sqrt{A_0 / A_3}$ і $\xi = (A_1/A_3)\sqrt{(A_0 / A_3)^2}$ − безрозмірні коефіцієнти (критерії подоби) функціональних залежностей $\varphi = f(\tau)$.

*Третя теорема подоби.* Необхідними і достатніми умовами подоби, є пропорційність схожих параметрів, що входять в умову однозначності і рівність критеріїв подоби досліджуваного явища.

## 10.3 Види та характеристики моделей

Моделювання досліджуваного об'єкта дозволяє одержувати більш повне і наочне уявлення про досліджуваний об'єкт.

*Концептуальні моделі* припускають використання моделей, сформованих спостереженням за об'єктом у процесі його роботи. Виділяють логічні моделі, утворені методами математичної логіки.

*Кібернетичні моделі* ґрунтуються на одержанні співвідношень між вхідними і вихідними функціями для деякого чорного ящика без розкриття його внутрішньої структури.

*Квазіаналогові моделі* і електронні моделі займаються синтезом ланцюгів, що є моделями різних об'єктів і технічних систем. Електронне моделювання вирішує задачі об'єктів і процесів шляхом використання комбінованих операційних блоків, що дозволяють створити універсальні спеціалізовані аналогові системи.

*Фізична модель* (наприклад, енергосистеми) − це зменшена копія реальної системи, що має параметри, критерії подоби якої однакові з відповідними критеріями оригіналу. Це дозволяє провести дослідження, одержати достовірні дані і обробити їх у критеріальних залежностях.

*Аналогова модель.* Якщо при розходженні фізичної природи у двох системах, але процеси в яких описуються однаковими диференційними рівняннями, – тоді одна з них є моделлю – аналогом іншої.

Прикладом електричних моделей прямої аналогії є розрахункові моделі постійного струму, як аналог змінного. Тут електрична схема для змінного струму складається за допомогою резисторів, а ЕРС генераторів – за допомогою джерел постійного струму. При цьому розрахункові моделі змінного струму (для сталого режиму) виявляються фізичними моделями.

## 10.4 Оцінка достовірності результатів дослідження

Достовірність результатів згідно критеріальної програми будь-якого дослідження дає експеримент, проведений по критериальній програмі, що дозволяє поширити результати у вигляді узагальнень на цілий клас явищ і діапазону доцільних параметрів. Критеріальна обробка результатів експерименту скорочує число необхідних експериментів за рахунок зменшення числа змінних факторів.

*Приклад.* Нехай вивчається процес в електричному колі з активним опором $R$, індуктивністю $L$ і ємністю $C$ при включенні джерела постійної напруги $U$. Необхідно оцінити вплив варіацій параметрів $R$, $L$, $C$ і $U$ у заданих діапазонах на максимальну величину струму $i$ в ланцюзі, тобто досліджувати залежність

$$i_{max} = f(R,\ L,\ C,\ U). \qquad (10.5)$$

Критерії подоби процесу визначаються на основі аналізу розмірності параметрів $i$, $R$, $L$, $C$, $U$. Вибравши в якості незалежних параметрів $U$, $R$, $C$, отримаємо:

$$\pi_1 = iR/U; \qquad \pi_2 = L/R^2C. \qquad (10.6)$$

З урахуванням цих критеріїв досліджувана залежність у критеріальній формі прийме вид

$$\pi_i = i_{max}R / U = \varphi(L / R^2C). \qquad (10.7)$$

Якщо відомий математичний опис процесу, то для цього прикладу

$$U = L\,di / dt + 1/C \int i\,dt + i \cdot R. \qquad (10.8)$$

Розділивши всі члени рівняння на четвертий, одержимо три критерії подоби:

$$\pi_1 = U / Ri = i_{\sim} / i\ ; \quad \pi_2 = L / R\,t; \quad \pi_3 = t / R\,C. \qquad (10.9)$$

тут $i_{\sim}$ – це сталий струм у ланцюзі.

Об'єднавши другий і третій критерії в один, при незмінному масштабі часу отримаємо $$\pi = \pi_2 \pi_3 = \mathrm{i} / R^2 C = idem; \qquad (10.10)$$

Критерій $\pi_1^{-1}$ визначає масштаб струму $i = i / i_{\sim}$ . Отже одержали той же результат, що й на основі аналізу розмірності.

Перехід до критеріїв подоби зменшує кількість варіюємих факторів із чотирьох ($L$, $R$, $C$, $U$) до одного ($L / R^2C$) і тим самим зменшує необхідне число експериментів. Для визначення критеріїв подоби необхідно:

– знати початкові і граничні значення параметрів режиму, що змінюються;

– значення параметрів $p_{l+1}, \ldots, p_{l+n}$;

– скласти матрицю розмірності $A$ усіх параметрів ($p_1 \ldots p_l$, $p_{l+1}, \ldots, p_{l+n}$) і визначити ранг матриці;

– потім як незалежні параметри вибрати $R$ величин. Це дозволяє визначити на основі аналізу розмірностей форму запису безрозмірних комплексів виду:

$$\pi_1 = p_{R+1} / ( p^x{}_{1R+1} p^y{}_{2R+1} \ldots p^z{}_{kR+1}); \qquad (10.11)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\pi_{l-R} = p_l / ( p_1^{xl} p^{yl}{}_2 \ldots\ldots p_k^{zl} ),$$

а також критеріїв подоби, кожний з яких містить поточне значення параметра

$$p_{l+1}{}^* = p_{l+1} / (p_1^{xl+1} p_2^{yl+1} \ldots p_k^{zl+1});$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (10.12)$$
$$p_{l+n}{}^* = p_{l+n} / (p_1^{xl+n} p_2^{yl+n} \ldots p^z{}_R^{l+n}).$$

Запитання для самоконтролю

*1 Задачі моделювання, типи моделей ?*

*2 Абстрактне та аналогове моделювання.*

*3 Сутність фізичного і імітаційного моделювання.*

*4 Використання критеріїв подоби при моделюванні?*

*5 Сформулюйте три теореми подоби.*

*6 Математичне цифрове подоба і моделювання.*

## 11 РІШЕННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

### 11.1 Методи вирішення градієнта Бонсо-Уілсона

Задача *оптимізації* досліджуваних процесів виникає при теоретичних дослідженнях і полягає у визначенні екстремуму деякої функції $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ в діапазоні значень параметрів $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Такі задачі спрямовані на находження значень факторів, при яких відгук досягає екстремуму (*max* або *min*).

*Перший* метод знаходження рішення полягає в створенні математичної моделі і знаходженні екстремуму; лінійного, нелінійного або динамічного програмування; принципу максимуму та ін.

Для спрощення процедури використовують *метод градієнтного спуску і підйому*, суть якого полягає в знаходженні екстремуму цільової функції $f(x_1, x_2,)$, яка описує поверхню (рис. 11.1).

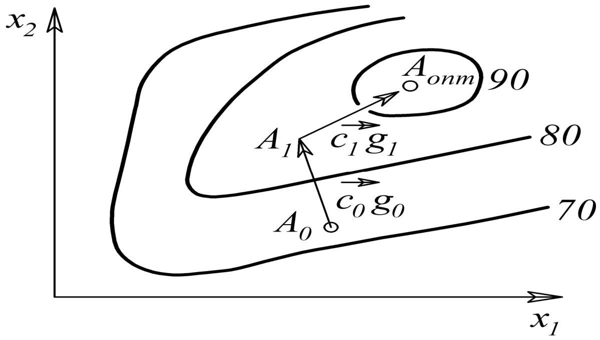



Рисунок 11.1– Схема руху по градієнту

Вибираємо будь-яку точку поверхні $A_o(x_{o1}, x_{o2})$, потім визначаємо найбільш крутий напрямок підйому або спуска (градієнт) і позначаємо $\bar{q}$. По напрямку градієнта рухаємося із кроком $c\bar{q}$ до оптимуму ($c$ – *const.*). У результаті досягаємо точку $A_1$ $(x_{11}, x_{22})$, у якій повторюємо цю процедуру до моменту визначення точки з дійсним екстремумом $(A_{onm})$.
Недолік цього методу − необхідність безперервного знаходження градієнта.

Задачі оптимізації, в яких при находженні екстремуму цільова функція $f$ і граничні рівняння її ділянки $s$ виявляються лінійними, вирішують методом лінійного програмування, якій полягає в находженні екстремуму критерію оптимальності з лінійними рівняннями. Тоді цільова функція записується у вигляді суми

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \rightarrow min\ (max). \qquad (11.1)$$

При цьому обмеження задаються у вигляді лінійних нерівностей:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m \geq b_i\ ; \qquad (11.2)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

тут $a_{ij}$, $b_i$, $c_i$ – константи; $x_1, x_2, \dots, x_m$ – незалежні змінні.

Для вирішення задач лінійного програмування розроблені стандартні комп'ютерні програми.

*Другий* метод використовує дані експерименту і моделей довільного виду з використанням різних методів оптимізації: Гаусса-Зейделя, градієнта та ін.

## 11.2 Метод крутого (поокординатного) сходження

Цей метод полягає в послідовному просуванні до екстремуму почерговим варіюванням кожного фактора доти, – поки буде досягнутий екстремум. При реалізації двохфакторного експерименту функція $Y = f(X_1, X_2)$ представлена лініями рівних значень відгуку $Y_j = const$ (рис. 11.2). Рух, паралельний осям координат (крива1), відбувається доти, поки не буде досягнутий частковий екстремум, у якому $dY/dX_i = 0$. Ця умова виконується в точці торкання прямої, паралельної вісі координат, з однієї із ліній рівних значень відгуку.

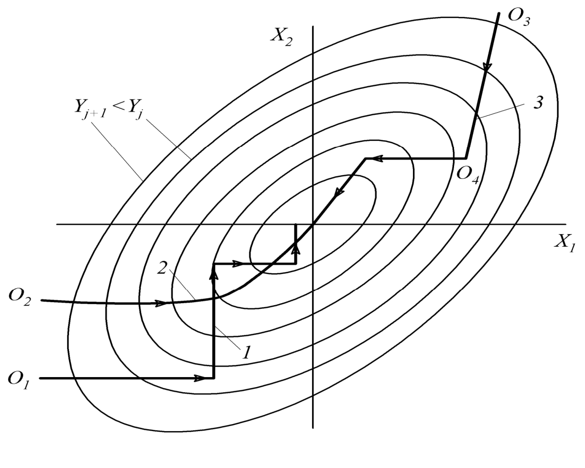



Рисунок 11.2 − Находження екстремуму функції відгуку від двох факторів.
Недолік цього методу – відносна тривалість процесу

## 11.3 Метод Гаусса-Зейделя

Він полягає у тому, що напрямок вектора градієнта *L*, знайденого в початковій точці стану об'єкта, визначає напрямок руху у факторному просторі доти, поки часткова похідна *dY/dL* у цьому напрямку не обернеться в нуль. В цій точці знову визначають напрям градієнта і відбувається рух вздовж цього вектора до перетворення в нуль часткової похідної функції відгуку, взятої по новому напрямку – і так до тих пір, поки не визначиться екстремум функції відгуку (крива 3). Тут не потрібно беззупинно визначати величину і напрямок градієнта функції *Y*.

Всі наведені методи пошуку екстремуму віднесені до класу *детермінованих* і при складної залежності функції відгуку від факторів впливу, пошук екстремуму дуже складний, тому використовують випадкові методи пошуку.

*Випадкові методи пошуку* екстремуму засновані на алгоритмах, у яких порядок розрахунку часткових похідних е випадковим. Таким е алгоритм перебору усіх можливих факторів, при якому кожна робоча точка береться випадково (метод сканування). Відкидаються усі положення системи крім тих, фактори яких відповідають найкращім показникам якості.

### Запитання для самоконтролю

*1 В чому полягає задача оптимізації рішення?*

*2 Викладіть сутність методу Гаусса-Зейделя?*

*3 Як реалізується метод градієнта? Його недоліки?*

*4 Сутність методу крутого сходження?*

*5 Що таке «симплекс-метод» та його переваги?*

# 12 ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБ’ЄКТА

## 12.1 Диференційні рівняння динамічного об’єкта

Візуальний аналіз експериментальних результатів дозволяє визначити форму запису диференціального рівняння об'єкта. Динамічні властивості можна описати лінійними диференційними рівняннями не вище другого порядку із запізнюючим аргументом.

*Приклад.* Об'єкт описується диференційним рівнянням першого порядку (наприклад, ланцюг збудження двигуна постійного струму) з невідомими коефіцієнтами $T$ і $k$.

$$T\,y' + y = k\,x \qquad (12.1)$$

На вхід поданий сигнал типу одиничної східчастої функції $1(t)$. Тоді реакція об'єкта являє собою перехідну функцію $h(t)$, що є рішенням рівняння (12.1) при $x(t) = 1(t)$ і нульових початкових умовах

$$h(t) = k(1 - e^{-t/T}). \qquad (12.2)$$

Коефіцієнти $T$ і $k$ можна визначити по експериментальній кривій $h(t)$ (рис. 12.1).

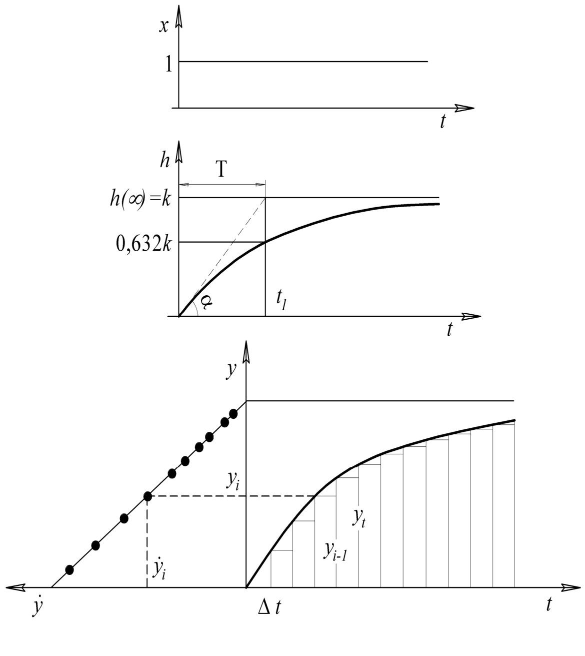



Рисунок 12.1− Визначення параметрів рівняння $h(t) = k(1- e^{-t/T})$

Тоді при $t \to \infty$ маємо: $h(\infty) = k$, а при $t = T$: $h(T) = k\,(1 - e^{-1}) = 0{,}632\,h(\infty)$. Тут $h(\infty)$ − стала величина вихідної координати $y$.

Якщо вхідний сигнал дорівнює $A\,1(t)$, то вихідний – дорівнює $y(t) = Ah(t)$ , де $A = const$. Значення $T$ і $k$ можна визначити і іншим методом. З (12.1) видно, що вихідна величина $y$ пов'язана з похідної $y'$ лінійною залежністю:

$$y = k\,x \quad Ty'. \tag{12.3}$$

Функцію $y = f(y')$ можна побудувати шляхом графічного диференціювання перехідної функції (рис. 12.1). Коефіцієнти рівняння (12.3) можуть бути визначені по методу найменших квадратів. Постійну часу $T$ можна визначити графічно. Оскільки $h'(t) = \dfrac{k}{T} e^{-t/T}$, то при $t = 0$, одержимо: $h'(0) = k/T = tg\,\alpha$,

де $\alpha$ – кут нахилу дотичній до кривій $h(t)$ при $t = 0$. Оскільки (рис. 12.1) $tga = k / t_1$, то $t_1 = T$. Це означає, що відрізок асимптоти між точкою її перетинання з дотичною і віссю координат, чисельно дорівнює $T$.

## 12.2 Рівняння для диференцюючої та інтегруючої ланки

*Приклад.* Об'єкт дослідження описується диференційним рівнянням виду

$$Ty' + y = kx' \tag{12.4}$$

і являє собою диференцюючу ланку (резистор + конденсатор).

Перехідна функція диференцюючої ланки $h(t) = \dfrac{k}{T} e^{-t/T}$ зображена на рисунку 12.2.

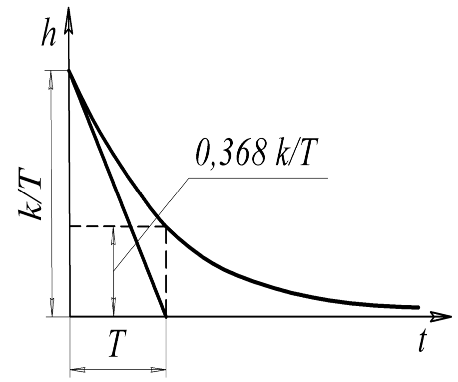



Рисунок 12.2 − Перехідна функція диференційної ланки

Визначивши з (12.4) величину $h(t)$ при $t = 0$ і $t = T$, одержимо:

$$h(0) = k / T; \qquad h(T) = \frac{k}{T} e^{-1} = 0{,}368 \cdot \frac{k}{T} .$$

Як і в попередньому випадку, $T$ і $k$ знаходимо як відрізок осі абсцис між початком координат і точкою перетинання дотичній до кривій $h(t)$ у точці $t = 0$ з віссю абсцис (рис. 12.3).

*Приклад.* Об'єкт дослідження – інтегруюча ланка, описувана рівнянням

$$y = \int_0^t kxdt , \qquad \text{або} \qquad y' = k\,x, \qquad (12.5)$$

де $k$ − невідомий параметр (приклад: – двигун постійного струму; як вхідна координата − напруга на вході, у якості вихідний − кут повороту вала).

Перехідна функція тут має вигляд: $h(t) = k \cdot t$ (рис. 12.3).

Величина $k$, пропорційна тангенсу кута нахилу перехідної характеристики до вісі абсцис і визначається як відношення $k = h_1 / t_1$.

При наявності інерційності об'єкта диференційне рівняння (12.5) запишемо таким чином

$$Ty'' + y' = kx. \qquad (12.6)$$

Відповідна перехідна функція (12.7) показана на рисунку 12.3, крива 2.

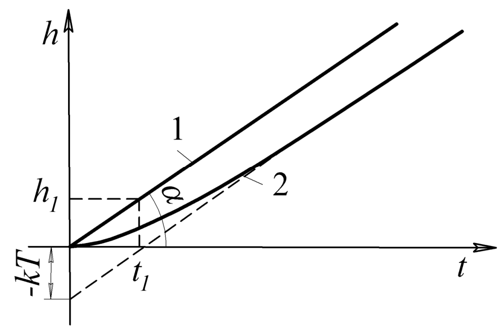



Рисунок 12.3 − Перехідна функція інтегруючих ланок

$$h^*(t) = k \cdot [t - T(1 - e^{-t/T})] . \qquad (12.7)$$

Знайдемо величину параметра $T$, визначивши різницю між вихідними координатами об'єкта в першому і другому випадках: $\Delta h(t) = h(t) - h^*(t)$.

При $t \to \infty$, одержимо

$$\lim_{t\to\infty} \Delta h(t) = \lim_{t\to\infty} \{kt - k\,[t - T(1 - e^{-t/T})]\} = k\,T. \qquad (12.8)$$

Тоді рівняння асимптоти перехідної функції $h^*(t)$ має вид: $h^*(t) = k(t - T)$. Оскільки при $t = t_1$ величина $h^*(t_1) = 0$, то $T = t_1$.

Запитання для самоконтролю

1 *Поняття про перехідну функцію динамічного процесу?*

2 *Фізичний зміст поняття «вагової функції»?*

3 *Ідентифікація об'єкта дослідження математичною моделлю.*

4 *Фізична сутність частотного методу ідентифікації?*

5 *Статистичні методи визначення вагової функції.*

6 *Визначення параметрів математичних операторів?*

7 *Види диференційних рівнянь динамічних процесів та їх рішення?*

8 *Визначення статистичних характеристик випадкових процесів.*

# 13 ОБРОБКА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

## 13.1 Основні положення теорії випадкових помилок

Експериментальні дані потребують обробки і представлення результатів у вигляді графіків, таблиць, формул, статистичних оцінок і словесної інтерпретації. Графічна інформація дає змогу наглядно визначити залежність результату експерименту $Y$ від одної ($X_1$) або двох ($X_1$, $X_2$) змінних. Важливим моментом є оцінка розходження результатів теоретичної розробки з даними експерименту. Теорія випадкових помилок базується на тім, що при великій кількості вимірів, випадкові погрішності однакової величини але різного знаку зустрічаються однаково часто, а імовірність появи великої погрішності зменшується з ростом її величини. При нескінченно великій кількості вимірів значення вимірюваної величини дорівнює середнє арифметичному всіх вимірів. Теорія випадкових помилок дозволяє оцінити точність отриманих результатів при даному числі вимірів (або визначити мінімальне число вимірів, – що гарантують задану точність.

Для великої вибірки ($n > 30$) і нормального закону розподілу оціночною характеристикою виміру є *дисперсія* $D$ і *коефіцієнт варіації* $k_в$:

$$D = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/(n-1); \qquad k_в = \sigma/\bar{x}\ . \tag{13.1}$$

Дисперсія $D$ характеризує однорідність вимірів; коефіцієнт варіації $k_в$ – мінливість вимірів щодо середніх значень. Чим більша $D$, тим більший розкид результатів вимірів. Чим більший $k_в$, – тим більший розкид *відносно середніх* вимірів. *Довірчим* називають інтервал $\mu$ значень $x_i$, у який попадає істинне значення $x_д$ вимірюваної величини із заданою імовірністю $p_д$.

*Довірчою імовірністю* виміру $p_д$ називається імовірність того, що істинне значення вимірюваної величини $x_д$ попадає в даний довірчий інтервал $a \leq x_д \leq b$, і виміряється у відсотках або в частках одиниці та описується виразом

$$p_д = p[a \leq x_д \leq b] = (1/2)\cdot[\varphi(b - \bar{x})/\sigma - \varphi(a - \bar{x})/\sigma], \tag{13.2}$$

де $\varphi(t)$ − інтегральна функція Лапласа

$$\varphi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{ti} e^{-t^2/2}dt\,. \tag{13.3}$$

Таблиця 13.1 – Інтегральна функція Лапласа

| $t$ | $p_д$ | $t$ | $p_д$ | $t$ | $p_д$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0000 | 0,75 | 0,5467 | 1,50 | 0,8664 |
| 0,05 | 0,0399 | 0,80 | 0,5763 | 1,55 | 0,8789 |
| 0,10 | 0,0797 | 0,85 | 0,6047 | 1,60 | 0,8904 |
| 0,15 | 0,1192 | 0,90 | 0,6319 | 1,65 | 0,9011 |
| 0,20 | 0,1585 | 0,95 | 0,6579 | 1,70 | 0,9109 |
| 0,25 | 0,1974 | 1,00 | 0,6827 | 1,75 | 0,9199 |
| 0,30 | 0,2357 | 1,05 | 0,7063 | 1,80 | 0,9281 |
| 0,35 | 0,2737 | 1,10 | 0,7287 | 1,85 | 0,9357 |
| 0,40 | 0,3108 | 1,15 | 0,7419 | 1,90 | 0,9426 |
| 0,45 | 0,3478 | 1,20 | 0,7699 | 1,95 | 0,9488 |
| 0,50 | 0,3829 | 1,25 | 0,7887 | 2,00 | 0,9545 |
| 0,55 | 0,4177 | 1,30 | 0,8064 | 2,25 | 0,9756 |
| 0,60 | 0,4515 | 1,35 | 0,8230 | 2,50 | 0,9876 |
| 0,65 | 0,4843 | 1,40 | 0,8385 | 3,00 | 0,9973 |
| 0,70 | 0,5161 | 1,45 | 0,8529 | 4,00 | 0,9999 |

Аргументом цієї функції є відношення довірчого інтервалу $\mu$ до середньо квадратичного відхилення $\sigma$ тобто

$$t = \mu / \sigma, \tag{13.4}$$

де $t$ – гарантійний коефіцієнт;

Довірчий інтервал

$$\mu = b - \bar{x}; \quad \mu = -(a - \bar{x}) \tag{13.5}$$

Якщо визначено довірчу імовірність $p_д$ (0,9; 0,95), то встановлюється точність вимірів (довірчий інтервал 2 $\mu$) із співвідношення $p_д = \varphi(\mu / \sigma)$. Половина довірчого інтервалу дорівнює:

$$\mu = \sigma \cdot arg\, \varphi(p_д) = \sigma \cdot t, \tag{13.6}$$

де $arg\ \varphi\ (p_д)$ – аргумент функції Лапласа, а при $n < 30$ – функції Стьюдента.

*Приклад.* Виконано 30 вимірів електричної міцності ізоляції при напрузі $U$ = 170 кВ і обчисленому значенні середньоквадратичного відхилення $\sigma$ = 3,1 кВ. Визначити необхідну точність вимірів для різних рівнів довірчої імовірності: $p_д$ = 0,9; 0,95; 0,997, прийнявши значення $t$ з таблиці 13.1.

Тоді: $\mu = \pm\, 3{,}1 \cdot 1{,}65 = 5{,}1$; $\mu = \pm\, 3{,}1 \cdot 2{,}0 = 6{,}2$; $\mu = \pm\, 3{,}1 \cdot 3{,}0 = 9{,}3$ (кВ).

Звідки видно, що для даного методу довірчий інтервал $\mu$ зростає вдвічі при збільшенні $p_д$ лише на 10% !

Для визначення достовірності вимірів для встановленого довірчого інтервалу (наприклад: $\mu \pm 7$ кВ) по формулі (13.4): $t = \mu/\sigma = 7/31 = 2{,}26$. Далі по таблиці (13.1) для $t = 2{,}26$ знаходимо: $p_д = 0.97$. Це означає, що у заданий довірчий інтервал з 100 вимірів не попадають – 3.

## 13.2 Визначення мінімально необхідного числа вимірів

Важливою задачею при статистичних методах оцінки точності отриманих результатів, є визначенні мінімально необхідного числа вимірів $N_{min}$ при заданих значеннях довірчого інтервалу $2\mu$ і довірчої імовірності $p_д$.

Необхідно визначити необхідну точність вимірів

$$\Delta = \sigma_o / \bar{x}, \qquad (13.7)$$

де $\sigma_o$ − середнеарифметичнє значення середнеквадратичного відхилення $\sigma$, рівне $\sigma_o = \sigma / \sqrt{n}$. ($\sigma_o$ − це *середня помилка*). Довірчий інтервал помилки виміру $\Delta$ визначається аналогічно для вимірів $\mu = t \cdot \sigma_o$. За допомогою $t$ можна визначити довірчу імовірність помилки виміру з таблиці Лапласа (13.1).

Якщо по заданій точності $\Delta$ і довірчій імовірності виміру $p_д$ необхідно визначити мінімальне число вимірів, що гарантують точність $\Delta$ і $p_д$, то аналогічно (13.6) з врахуванням (13.7) запишемо

$$\mu = \sigma \arg \varphi \,(p_д) = \sigma_o \sqrt{n}\, t. \qquad (13.8)$$

При $N_{min} = n$ одержуємо

$$N_{min} = \sigma^2 t^2 / \sigma^2_o = k^2_в t^2 / \Delta^2, \qquad (13.9)$$

де $k_в$ – коефіцієнт варіації, %; $\Delta$ – точність вимірів, %.

Послідовність визначення $N_{min}$ наступна :

– здійснюють експеримент із $n = 20 \div 50$ вимірів;

– обчислюють середньоквадратичне відхилення по ф. (13.1);

– встановлюють необхідну точність $\Delta$ виміру (не повинна перевищувати точності приладів);

– встановлюють нормоване відхилення $t$ (звичайно задається);

– за формулою (13.9) визначають $N_{min}$.

В подальшому у процесі вимірів їх число не повинно бути менше за $N_{min}$.

*Приклад.* Необхідно зробити 25 вимірів розмірів деталі, припустиме відхилення ± 0,1м. Обчислене $\sigma = 0{,}4$ м дозволяє оцінити достовірність виміру.

За формулою (13.9) $t = \sqrt{n} \cdot \dfrac{\Delta}{\sigma} = \sqrt{25} \cdot (0{,}1/\,0{,}4) = 1{,}25.$

З таблиці (13.1) довірча імовірність для $t = 1{,}25$ складає $p_д = 0{,}79$. Це низька імовірність, при якій погрішність перевищує довірчій інтервал $2\mu = 0{,}2$ м і буде зустрічатися один раз із 0,79 / (1− 0,79) = 3,37, тобто з 4-х вимірів, − що неприпустимо!

З'ясуємо мінімально необхідну кількість вимірів $N_{min}$ з довірчою імовірністю $p_д = 0{,}9$ і $p_д = 0{,}95$.

За формулою 13.9: $N_{min}$ = 0,42· 1,65$^2$ / 0,1$^2$ = 43 вимірів при $p_д$ = 0,9 і 64 вимірів при $p_д$ = 0,95, – що перевищує проведені 25 вимірів.

Цей метод за допомогою $\sigma$ і $\sigma_о$ придатний для $n$ > 30. В протилежному випадку при *малих вибірках* використовують метод Стьюдента.

Для малої вибірки довірчий інтервал

$$\mu_{ст} = \sigma_о \cdot \alpha_{ст}, \quad (13.10)$$

де $\alpha_{ст}$ − коефіцієнт Стьюдента (табл. 13.2). Звідки, знаючі $\mu_{ст}$, дійсне значення вимірювальної величини для малої вибірки дорівнює

$$x_д = \bar{x} \pm \mu_{ст} \quad (13.11)$$

Можна по відомим $n$ знайти довірчу імовірність $p_д$ при умові, що погрішність середнього значення вимірів не вийде за межі $\pm\mu_{ст.}$ Послідовність вирішення така: визначають середні значення $\bar{x}$, $\sigma_о$, $\alpha_{ст} = \mu_{ст.}/\sigma_о$. Знаючи $\alpha_{ст}$ і $n$ з таблиці 13.2 , визначають шукану довірчу імовірність $p_д$.

Таблиця 13.2 – Коефіцієнт Стьюдента $\alpha_{ст}$

| $n$ | $p_д$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,80 | 0,90 | 0,95 | 0,99 | 0,995 | 0,999 |
| 2 | 3,080 | 6,31 | 12,71 | 63,70 | 127,30 | 637,20 |
| 3 | 1,886 | 2,92 | 4,30 | 9,92 | 14,10 | 31,60 |
| 4 | 1,638 | 2,35 | 3,188 | 5,94 | 7,50 | 12,94 |
| 5 | 1,533 | 2,13 | 2,77 | 4,60 | 5,60 | 8,61 |
| 6 | 1,436 | 2,02 | 2,57 | 4,03 | 4,77 | 6,86 |
| 7 | 1,440 | 1,94 | 2,45 | 3,71 | 4,32 | 9,96 |
| 8 | 1,415 | 1,90 | 2,36 | 3,50 | 4,03 | 5,40 |
| 9 | 1,397 | 1,86 | 2,31 | 3,36 | 3.83 | 5,04 |
| 10 | 1,383 | 1,83 | 2,26 | 3,25 | 3,69 | 4,78 |
| 12 | 1,363 | 1,80 | 2,20 | 3,11 | 3,50 | 4,49 |
| 14 | 1,350 | 1,77 | 2,16 | 3,01 | 3,37 | 4,22 |
| 16 | 1,341 | 1,75 | 2,13 | 2,96 | 3,29 | 4,07 |
| 18 | 1,333 | 1,74 | 2,11 | 2,90 | 3,22 | 3,96 |
| 20 | 1,328 | 1,73 | 2,09 | 2,86 | 3,17 | 3,88 |
| 30 | 1,316 | 1,70 | 2,04 | 2,75 | 3,20 | 3,65 |
| 40 | 1,306 | 1,68 | 2,02 | 2,70 | 3,12 | 3,55 |
| 50 | 1,298 | 1,68 | 2,01 | 2,68 | 3,09 | 3,50 |
| 60 | 1,290 | 1,67 | 2,00 | 2,66 | 3,06 | 3,46 |
| ∞ | 1,282 | 1,64 | 1,96 | 2,58 | 2,81 | 3,29 |

*Приклад.* Проведено18 вимірів (табл. 13.3). Визначено: σ = 6,58; $к_в$ = 8,91%. Для точності Δ = 5 % і 3 % при довірчій імовірності $p_д$ = 0,95: $\alpha_{ст}$ = 2,11. Тоді для Δ= 5 %: $N_{min}$= $(8{,}91^2 \cdot 2{,}11^2) / 5^2$ =14; а для Δ = 3%: $N_{min}$= $(8{,}91^2 \cdot 2{,}11^2)/ 3^2$ = 40. Висновок: для підвищення точності необхідно збільшити число вимірювань.

Таблиця 13.3 – Результати вимірювань та їх обробка

| $x_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|
| 67 | – 8 | – 7,83 | 64 |
| 67 | – 8 | – 7,83 | 49 |
| 68 | – 7 | – 6,83 | 49 |
| 68 | – 7 | – 6,83 | 36 |
| 69 | – 6 | –5,83 | 25 |
| 70 | – 5 | –4,83 | 16 |
| 71 | – 4 | –3,83 | 4 |
| 73 | – 2 | –1,83 | 1 |
| 74 | – 1 | – 0,83 | 0 |
| 75 | 0 | +0,17 | 1 |
| 76 | +1 | +1,17 | 4 |
| 77 | +2 | +2,17 | 9 |
| 78 | +3 | +3,17 | 16 |
| 79 | +4 | +4,17 | 25 |
| 80 | +5 | +5,17 | 36 |
| 81 | +6 | +6,17 | 49 |
| 82 | +7 | +7,17 | 289 |
| 92 | +17 | +17,27 | |
| $\bar{x}$ = 74,83 | Σ= − 3 | Перевірка<br>− 46,5<br>+ 46,5 | Σ=737 |

При обробці даних виключають грубі помилки ряду, використовуючи *правило трьох сигм*: розкид випадкових величин від середньої величини не повинен перевищувати: $x_{max}$, $x_{min} = \bar{x} \pm 3\sigma$.

## 13.3 Визначення достовірності результатів вимірів

*Приклад.* Міцність зразків до термообробки $R_1 = \bar{R}_1 \pm \sigma_о$ = 20 ± 0,5 Н, а після термообробки $R_2 = \bar{R}_2 \pm \sigma_о$ = 23 ± 0,6 Н. Приріст міцності складає 15 %. Чи не є це розкид даних вимірів? Перевірку робимо за умови $\bar{x}$ / $\sigma_1$ $\geq$ 3. Перевіряємо

різницю: $\bar{x} = R_1 - R_2 = 3$ Н. Помилка виміру

$\sigma_o = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, тоді: $(R_1 - R_2) / \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ = 3 / (0,25 + 0,36) = 3,84 Н > 3Н.

Звідки висновок, що приріст міцності є достовірним.

Більш достовірними є методи на основі використання довірчого інтервалу.

Якщо маємо ряд малої вибірки, що відповідає закону нормального розподілу, то критерії визначення грубих помилок визначають за формулами:

$$\beta_1 = (x_{max} - \bar{x}) / \sigma\sqrt{(n-1)/n}\,; \tag{13.12}$$

$$\beta_2 = (\bar{x} - x_{min}) / \sigma\sqrt{(n-1)/n}\,, \tag{13.13}$$

тут $x_{max}$, $x_{min}$ – найбільша та найменша величина із $n$ вимірів. Максимальні значення $\beta_{max}$ в залежності від довірчої імовірності $p_\partial$, що виникають внаслідок статистичного розкиду, наведені в табл.13.4.

Якщо $\beta_1 > \beta_{\max}$, то величину $x_{max}$ необхідно виключити як грубу помилку.

При $\beta_2 < \beta_{max}$ виключають величину $x_{min}$. Після виключення грубих помилок визначають нові значення $x$ і $\sigma$ із $(n - 1)$ або $(n - 2)$ вимірів.

Таблиця 13.4 – Критерій появи грубих помилок

| $n$ | $\beta_{\max}$ при $p_\partial$ | | | $n$ | $\beta_{\max}$ при $p_\partial$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,90 | 0,95 | 0,99 | | 0,90 | 0,95 | 0,99 |
| 3 | 1,41 | 1,41 | 1,41 | 15 | 2,33 | 2,49 | 2,80 |
| 4 | 1,64 | 1,69 | 1,72 | 16 | 2,35 | 2,52 | 2,84 |
| 5 | 1,79 | 1,87 | 1,96 | 17 | 2,38 | 2,55 | 2,87 |
| 6 | 1,89 | 2,00 | 2,13 | 18 | 2,40 | 2,58 | 2,90 |
| 7 | 1,97 | 2,09 | 2,26 | 19 | 2,43 | 2,60 | 2,93 |
| 8 | 2,04 | 2,17 | 2,37 | 20 | 2,45 | 2,62 | 2,96 |
| 9 | 2,10 | 2,24 | 2,46 | 25 | 2,54 | 2,72 | 3,07 |
| 10 | 2,15 | 2,29 | 2,54 | 30 | 2,61 | 2.79 | 3,16 |
| 11 | 2,19 | 2,34 | 2,61 | 35 | 2,67 | 2,85 | 3,22 |
| 12 | 2,23 | 2,39 | 2,66 | 40 | 2,72 | 2,90 | 3,28 |
| 13 | 2,26 | 2,43 | 2,71 | 45 | 2,76 | 2,95 | 3,33 |
| 14 | 2,30 | 2,46 | 2,76 | 50 | 2,80 | 2,99 | 3,37 |

Таблиця 13.5 – Коефіцієнт для визначення максимально припустимої помилки вимірювання

| $n$ | Значення $q$ при $p_д$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 0,95 | 0,98 | 0,99 | 0,995 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 15,56 | 38,97 | 77,96 | 779,7 |
| 3 | 4,97 | 8,04 | 11,46 | 36,5 |
| 4 | 3,56 | 5,08 | 6,58 | 14,46 |
| 5 | 3,04 | 4,10 | 5,04 | 9,43 |
| 6 | 2,78 | 3,64 | 4,36 | 7,41 |
| 7 | 2,62 | 3,36 | 3,96 | 6,37 |
| 8 | 2,51 | 3,18 | 3,71 | 5,73 |
| 9 | 2,43 | 3,05 | 3,54 | 5,31 |
| 10 | 2,37 | 2,96 | 3,41 | 5,01 |
| 12 | 2,29 | 2,83 | 3,23 | 4,62 |
| 14 | 2,24 | 2,74 | 3,12 | 4,37 |
| 16 | 2,20 | 2,68 | 3,04 | 4,20 |
| 18 | 2,17 | 2,64 | 3,00 | 4,07 |
| 20 | 2,15 | 2,60 | 2,93 | 3,98 |
| | 1,96 | 2,33 | 2,58 | 3,29 |

## 13.4 Визначення точності відносних вимірювань

Важливою задачею теорії випадкових помилок є визначення помилок функції типу $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якщо відомі помилки їх аргументів. Так, при дослідженні функції одного змінного, граничні *абсолютні* помилки $\varepsilon_{гр}$ і *відносні* – $\delta_{від}$ розраховують таким чином:

$$\varepsilon_{гр} = \pm\, \varepsilon_x f'(x); \tag{13.14}$$

$$\delta_{від} = \pm\, d\, ln(x), \tag{13.15}$$

де $f'(x)$ – похідна функції $f(x)$; d $ln(x)$ – диференціал логарифма функції. Якщо досліджується функція багатьох змінних, то:

$$\varepsilon_{гр} = \pm \sum_{1}^{n} \frac{df(x_1, x_2 \ldots x_n)}{dx_i} dx_i, \tag{13.16}$$

$$\delta_{гр} = \pm\, d \left| ln(x_1, x_2 \ldots, x_n) \right| \%. \tag{13.17}$$

Послідовність визначення помилок наступна: спочатку визначають абсолютні і відносні помилки аргументів (незалежних змінних) $\varepsilon_{x1}, \varepsilon_{x2}, \ldots \varepsilon_{xn}$ , які зазвичай відомі. Потім визначають відносні помилки незалежних змінних:

$$\delta_{x1} = \varepsilon_{x1} / x_д; \quad \delta_{x2} = \varepsilon_{x2} / x_д, \ \ldots, \ \delta_{xn} = \varepsilon_{xn} / x_д \tag{13.18}$$

Визначають часткові диференціали функції і згідно формули (13.16) розраховують $\varepsilon_{гр}$ в розмінностях функції $f(y)$. Далі з (13.15) визначають $\delta_{гр}$.

## 13.5 Перевірка результатів експерименту на відтворюваність

Відповідальні експерименти обов'язково перевіряють на *відтворюваність* (повторюваність) результатів в певному діапазоні вимірів із заданою довірчою імовірністю. Маємо кілька паралельних вимірів (серій), для кожної серії знаходимо середнє арифметичне $\bar{x}_i$ ($n$ –число вимірів в одній серії (звичайно, 3÷4). Потім обчислюємо дисперсію $D_i$ і розраховуємо критерій Кохрена

$$k_{кр} = max\ D_i / \sum_1^m D_i\ , \tag{13.19}$$

де $max\ D_i$ – найбільша величина дисперсій із паралельних $m$ серій;

$\sum_1^m D_i$ – сума дисперсій $m$ серій (зазвичай $2 \le m \le 4$). Виміри вважають відтвореними при умові:

$$k_{кр} \le k_{кт}\ , \tag{13.20}$$

$k_{кт}$ – табличне значення критерію Кохрена, приймається залежно від довірчої імовірності $p_д$ і числа степенів свободи $q = n - 1$;

($m$ − число серій; $n$ − число вимірів у серії).

Таблиця 13.6 – Критерій Кохрена $k_{кт}$ при $p_д = 0,95$

| $m$ | $q = n - 1$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 16 | 36 |
| 2 | 0,99 | 0,97 | 0,93 | 0,90 | 0,67 | 0,85 | 0,81 | 0,78 | 0,73 | 0,66 |
| 3 | 0,97 | 0,93 | 0,79 | 0,74 | 0,70 | 0,76 | 0,63 | 0,60 | 0,54 | 0,47 |
| 4 | 0,90 | 0,76 | 0,68 | 0,62 | 0,59 | 0,56 | 0,51 | 0,48 | 0,43 | 0,36 |
| 5 | 0,84 | 0,68 | 0,60 | 0,54 | 0,50 | 0,48 | 0,41 | 0,41 | 0,36 | 0,26 |
| 6 | 0,78 | 0,61 | 0,53 | 0,48 | 0,44 | 0,42 | 0,38 | 0,35 | 0,31 | 0,25 |
| 7 | 0,72 | 0,56 | 0,48 | 0,43 | 0,39 | 0,37 | 0,34 | 0,31 | 0,27 | 0,23 |
| 8 | 0,68 | 0,51 | 0,43 | 0,39 | 0,36 | 0,33 | 0,30 | 0,28 | 0,24 | 0,20 |
| 9 | 0,64 | 0,47 | 0,40 | 0,35 | 0,33 | 0,30 | 0,28 | 0,25 | 0,22 | 0,18 |
| 10 | 0,60 | 0,44 | 0,37 | 0,33 | 0,30 | 0,28 | 0,25 | 0,23 | 0,20 | 0,16 |
| 12 | 0,57 | 0,39 | 0,32 | 0,29 | 0,26 | 0,24 | 0,22 | 0,20 | 0,17 | 0,14 |
| 15 | 0,47 | 0,33 | 0,27 | 0,24 | 0,22 | 0,20 | 0,18 | 0,17 | 0,14 | 0,11 |
| 20 | 0,39 | 0,27 | 0,22 | 0,19 | 0,17 | 0,16 | 0,14 | 0,13 | 0,11 | 0,08 |
| 24 | 0,34 | 0,29 | 0,19 | 0,16 | 0,15 | 0,14 | 0,12 | 0,11 | 0,09 | 0,07 |
| 30 | 0,29 | 0,20 | 0,16 | 0,14 | 0,12 | 0,11 | 0,10 | 0,09 | 0,07 | 0,06 |
| 40 | 0,24 | 0,16 | 0,12 | 0,10 | 0,09 | 0,08 | 0,07 | 0,07 | 0,06 | 0,04 |
| 60 | 0,17 | 011 | 0,08 | 0,07 | 0,06 | 0,06 | 0,05 | 0,05 | 0,04 | 0,02 |
| 120 | 0,09 | 0,06 | 0,04 | 0,04 | 0,03 | 0,03 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,01 |

$m$ – число параллельных серий вимірів;
$q$ – число степеней свободи;
$n$ – число вимірів у серії.

*Приклад.* Проведено 3 серії вимірів

| № серії | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\bar{xi}$ | $D_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 9 | 6 | 8 | 4 | 6,8 | 2,96 |
| 2 | 9 | 7 | 8 | 6 | 5 | 7,0 | 2,0 |
| 3 | 8 | 8 | 7 | 9 | 8 | 8,0 | 0,4 |

Розраховуємо критерій Кохрена : $k_{кр} = \dfrac{2{,}96}{2{,}96 + 2{,}0 + 0{,}4} = 0{,}55$.

Обчислимо число ступенів свободи: $q = n - 1 = 5 - 1 = 4$.

Для $m = 3$ і $q = 4$ за табл. (13.6) критеріїв Кохрена: $- k_{кр} = 0,74$.

Оскільки 0,55 < 0,74, то виміри є відтворюваними. При зворотному співвідношенні варто збільшити число серій $m$, або число вимірів $n$ в серії.

Запитання для самоконтролю

*1 Як визначити число необхідних вимірювань для отримання заданої точності?*
*2 Що є критерієм повторюваності результатів експерименту?*
*3 Що таке «дисперсія» і «коефіцієнт варіації» даних експерименту?*
*4 Що таке і коли використовують коефіцієнт Стьюдента?*
*5 Як визначити достовірність результатів вимірів?*
*6 Як підрахувати абсолютну та відносну помилку експерименту?*
*7 В чому полягає правило трьох сигм ?*
*8 При яких умовах експерименту використовують критерій Кохрена?*
*9 Від чого залежить точність результатів вимірювань?*
*10 Що таке «довірча імовірність» і її відношення до «довірчого інтервалу».*
*11 Як вирахувати середньоарифметичне значення середньоквадратичної дисперсії?*

## 14 ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ

### 14.1 Графічна обробка результатів

Графічне представлення досліджуваних функцій дає наочне уявлення про результати експерименту, можливість зрозуміти фізичну сутність досліджуваного процесу, встановити наявність екстремуму функції. Якщо аналізується графічним методом функція *y = f(x),* то наносять у системі прямокутних координат значення $x_1\,y_1$.

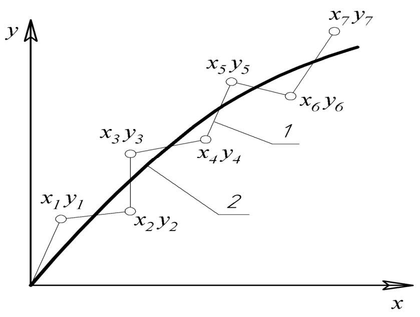



Рисунок 14.1− Графічне представлення *У = f(x)* по результатам вимірювань: 1− ламана; 2 − плавна крива

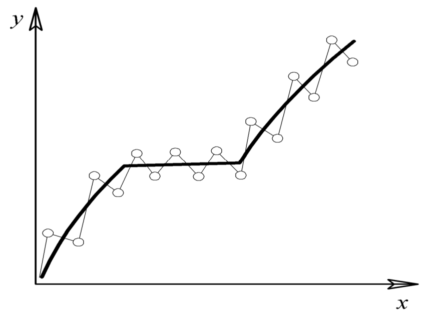



Рисунок 14.2− Вид функції *y = f(x)* при наявності стрибка

Для побудови графіка необхідно знати орієнтовно хід досліджуваного явища. Звичайно функція має плавний характер, тому варто проводити плавну криву ближче до експериментальних точок. Якщо одна-дві точки різко віддалені від кривої, варто проаналізувати фізичну суть явища і, якщо немає підстави наявності стрибка функції, − то це пояснюється грубою помилкою вимірів. Тоді потрібно повторити вимір у цьому діапазоні (рис. 14.2).

При графічному зображенні результатів вимірів із трьома змінними $b = f(x,y,z)$, застосовують метод поділу змінних. Одної з величин $z$ в межах інтервалу вимірів $z_1 - z_n$ задають кілька послідовних значень, а для інших двох змінних $x$ і $y$ будують графіки $y = f_1(x)$ при $z_i = const$. В результаті одержують сімейство кривих $y = f_1(x)$ для різних $z$ (рис. 14.3).

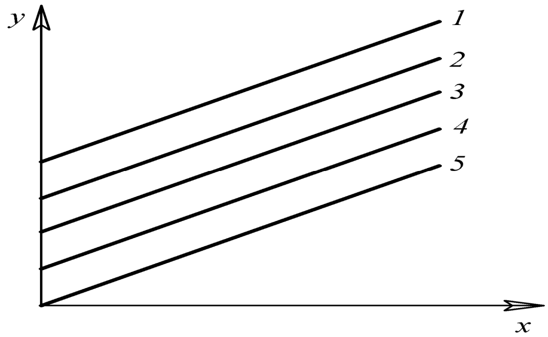



Рисунок 14.3 − Графічне представлення функції $b = f(x,y,z)$

Важливу роль для наочного представлення отриманих експериментальних даних має вибір системи координат: *рівномірної, логарифмічної, напівлогарифмічної, імовірнісної*. Функція $y = f(x)$ має різну форму в різних системах координат – нелінійні функції лінеаризують у логарифмічних координатах. У зонах вигину кривій число точок повинно бути набагато більшим, ніж на плавних ділянках.

## 14.2 Методи підбору емпіричних формул

Маємо статистичний ряд вимірів функції: $y_1, y_2,\ldots,y_n$ залежно від аргументу $x_1, x_2,\ldots, x_n$. Необхідно підібрати алгебраїчні вираження функції $y = f(x)$, які називають *емпіричними формулами*. Вони є наближеними виразеннями аналітичних формул. Така заміна останніх називається *апроксимацією* а відповідні функції − апроксимуючими.

Процес апроксимації складається з двох етапів:

– дані вимірів наносять на сітку прямокутних координат, з'єднують точки плавною кривою і вибирають орієнтовно вид формули, що описує подібну криву;

– обчислюють параметри формули, яка найкраще відповідає прийнятому аналітичному виразу. Результати вимірів багатьох процесів і явищ апроксимуються найпростішими емпіричними рівняннями типу

$$y = a + b\,x\,, \tag{14.1}$$

де $a$, $b$ – постійні. Тому потрібно прагнути до використання лінійної функції. Для цього використовують метод лінеаризації, який полягає в представленні експериментальної кривої лінійною функцією. Для перетворення деякої кривої $y = f(x\,)$ у пряму лінію вводять нові змінні:

$$X = f_1(x, y), \quad Y = f_2(x\,,y). \tag{14.2}$$

У шуканому рівнянні вони повинні бути зв'язані лінійною залежністю

$$Y = a + b\,X \tag{14.3}$$

Величини $X$ і $Y$ можна обчислити на основі рішення системи рівнянь (14.2). Далі будують пряму (рис. 14.1**)**, по якій легко графічно обчислити параметри $a$ (це ордината точки перетинання прямої з віссю $Y$) і $b$ – (тангенс кута нахилу прямої з віссю $X$):

$$b = tg\,\alpha = (Y_i\ - a)\,/\,X_i\,. \tag{14.4}$$

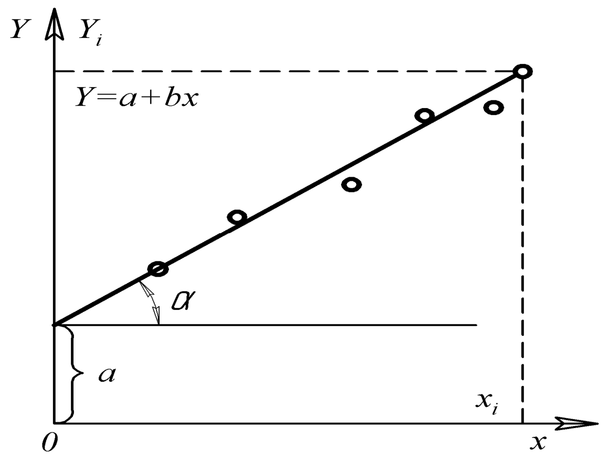



Рисунок 14.4 − Графічне визначення параметрів $a$ і $b$

При графічному визначенні параметрів $a$ і $b$ необхідно, щоб пряма будувалася на координатній сітці, у якої початком є точка $Y = 0$ і $X = 0$, а точки $X_i$ , $Y_i$ брати на крайніх ділянках цієї прямої.

## 14.3 Апроксимація методом лінеаризації

Параметри прямої $a$ і $b$ можна визначити і іншим способом. У рівняння (14.3) підставляють координати двох крайніх точок з графіка і одержують систему двох рівнянь, з яких визначають $a$ і $b$. Потім одержують емпіричну формулу (14.1), що зв'язує $Y$ і $X$ і дозволяє встановити функціональний зв'язок між $x$ і $y$ та емпіричну залежність $y = f(x)$.

*Приклад.* Підібрати емпіричну формулу наступної вибірки:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 12.1 | 19.2 | 25.9 | 33.3 | 40.5 | 46.4 | 54 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

Графічний аналіз показує, що експериментальні точки лягають на пряму і їх можна представити залежністю $y = a + b\,x$.

Беремо координати крайніх точок і підставляємо в це рівняння:

$a + 7b = 54{,}0;$

$a + 1b = 12{,}1,$ звідки: $b = 41{,}9 : 6 = 6{,}98$ і $a = 12 - 6{,}98 = 5{,}12.$

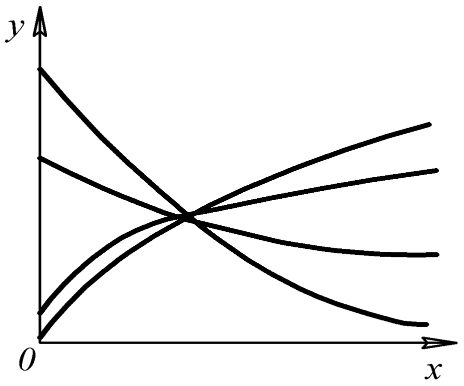
Тоді емпірична формула прийме вид

$$y = 5{,}12 + 6{,}98\,x.$$

Отже, апроксимація даних експерименту прямолінійними функціями дозволяє встановити вид емпіричних формул.

Якщо крива має вигляд (рис. 14.1,а), то використовують формулу

$$y = a{\cdot}x^b \tag{14.5}$$



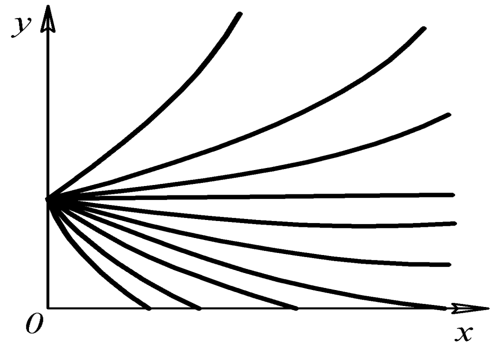




Рисунок 14.5,а – функції $y = a\cdot x^b$ Рисунок 14.5,б − функції $y = a\cdot e^{bx}$

Замінивши $X = lg\,x$ і $Y = lg\,y$, одержимо $Y = lg\,a + bX$

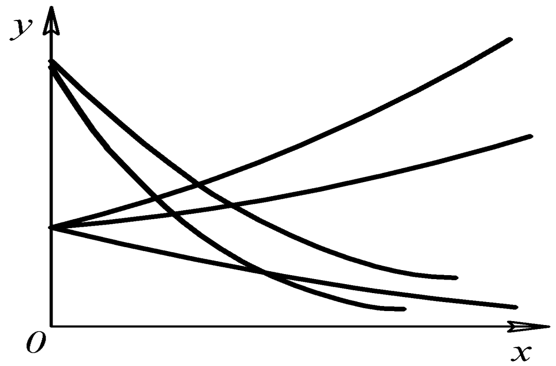
Отже, експериментальна крива стає лінійною в логарифмічних координатах.

Якщо крива має вигляд (рис. 14.5,б), то використовують формулу

$$y = a\cdot e^{bx} \qquad (14.6)$$

Замінивши $Y = lg\,y$, одержимо $Y = lg\,a + b\,x\,lg\,e$.

Крива перетворюється в пряму лінію в напівлогарифмічних координатах.



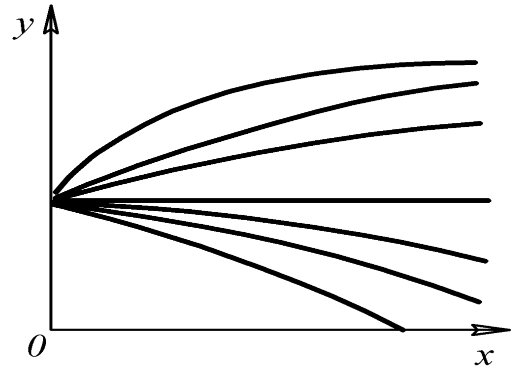




Рисунок 14.5,в − функція $y = c + ax^b$ Рисунок 14.5,г − функція $y=c+a\cdot e^{bx}$

Якщо крива має вигляд (рис.13.5в), то емпірична формула має вигляд

$$y = c + ax^b \qquad (14.7)$$

При заданому $b$, треба прийняти $X = x^b$ і тоді одержимо пряму лінію в прямокутних координатах $y = c + a\,X$.

Якщо $b$ − невідоме, то приймають $X = lg\,x$; і $Y = lg(y - c)$, − тут теж буде пряма лінія, але в логарифмічних координатах: $Y = lg\,a + b\,X$.

Тут потрібно спочатку обчислити «$c$», прийнявши на експериментальній кривій три довільні точки: $x_1$, $y_1$;  $x_2$, $y_2$;  і  $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$, $y_3$  і обчислити «$c$» з виразу:

$$c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}. \qquad (14.8)$$

Якщо графік має вигляд (рис.14.5г), то використовують формулу

$$y = c + a \cdot e^{bx} \qquad (14.9)$$

Замінивши $Y = lg(y - c)$, будують пряму в напівлогарифмічних координатах:

$$Y = lg\, a + b \cdot x\, lg\, c, \qquad (14.10)$$

де «$c$» попередньо знайдено за формулою (14.8).  Тоді:  $x_3 = 0{,}5\,(x_1 + x_2)$.

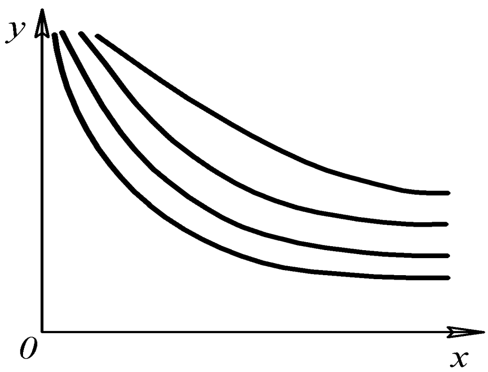



Рисунок 14.5,д − функції $y = a + b / x$

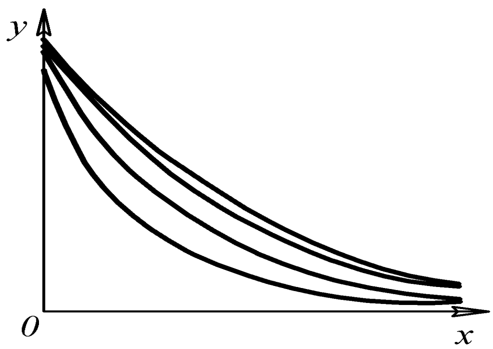



Рисунок 14.5,е − функції $y = 1/(a + bx)$

Якщо графік має вигляд (рис. 15.5,д), то використовують вираз

$$y = a + b / x. \qquad (14.11)$$

Замінивши $x = 1/z$, одержимо пряму лінію в прямокутних координатах

$$y = a + b \cdot z. \qquad (14.12)$$

Якщо графік і має вид (рис. 14.5,е), то використовують формулу

$$Y = 1 / (a + bx). \qquad (14.13)$$

Прийнявши $y = 1/z$, одержимо $z = a + b \cdot x$ − тобто пряму в прямокутних координатах.

Якщо є рівняння $y = \dfrac{1}{a + bx + cx^2}$, то шляхом заміни $y = 1/z$ одержимо

$$z = a + b \cdot x + c \cdot x^2 \qquad (14.14)$$

Складну степеневу функцію $y = a \cdot e^{nx+mx^2}$ можна перетворити в просту. При $lg\, y = z$; $lg\, a = p$; $n \cdot lg\, e = q$, $m \cdot lg\, e = r$ одержимо залежність

$$z = p + qx + r\,x^2 \qquad (14.15)$$

*Приклад.* Підібрати емпіричну формулу для вибірки:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,5 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 |
| 15,2 | 20,6 | 27,4 | 36,7 | 49,2 | 66,0 | 87,4 | 117,5 |

Будуємо графік (рис. 14,6) відповідний (рис. 14.5,б).

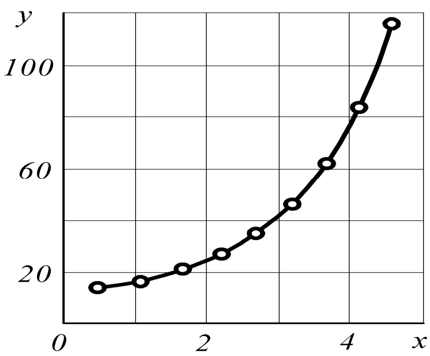



Рисунок 14.6 − Емпірична крива

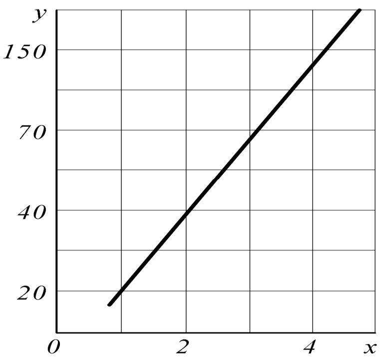



Рисунок 14.7 − Лінеаризована крива

Після логарифмування виразу $y = a \cdot e^{bx}$; $lg\, y = lg\, a + b \cdot x\, lg\, e$. Позначимо $lg\, y = Y$, тоді: $Y = lg\, a + bx\, lg\, e$, тобто в напівлогарифмічних координатах вираз для $Y$ − це пряма (рис. 14.7). Підставивши в це рівняння координати крайніх точок одержимо:

$$lg\, 15{,}2 = lg\, a + b\, lg\, e \quad \text{і}$$

$$lg\, 117{,}5 = lg\, a + 4{,}5\, b\, lg\, e,$$

або:

$$lg\, a + b\, lg\, e = 1{,}183;$$

$$lg\, a + 4{,}5\, b\, lg\, e = 2{,}070,$$

звідки: $b = 0{,}887/\,(3{,}5\, lg\, e) = 0{,}579$; $lg\, a = 1{,}183 – 0{,}254 = 0{,}929$; $a = 1{,}85$.

Остаточно емпірична формула має вигляд:

$$y = 1{,}85 \cdot e^{0{,}579x} \qquad (14.16)$$

*Приклади*. Отримано ряд результатів вимірів: $y = f(x)$ .

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X*: | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
| *Y*: | 10 | 8 | 6,2 | 5,1 | 4,2 | 3,8 | 3 | 2,3 | 2 | 1,2 | 0,7 | 0 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X*: | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
| *Y*: | 14 | 11 | 9,2 | 8 | 7 | 6 | 5,5 | 5 | 4,2 | 3,8 | 3 | 2,5 |

Побудувати графіки, знайти аналітичний вид функціональних кривих.

## 14.4 Апроксимація поліномами

Для підбору емпіричних формул варто використовувати *поліноми* виду:

$$y = A_o + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 +\ldots + A_{12}x^{12}, \qquad (14.17)$$

тут $A_о$ , $A_1$, …, $A_n$ – постійні коефіцієнти, які невідомі.

Поліномами можна апроксимувати будь-які результати, якщо вони графічно представляються безперервними функціями. При визначенні коефіцієнтів *А* використовують *методи середніх* і *найменших квадратів*.

*Метод середніх квадратів* полягає в побудові декількох плавних кривих, найкращою з яких є та, у якої різницеві відхилення − найменші, тобто $\Sigma\varepsilon \approx 0$. Метод має високу точність, якщо число точок не менш $3 \div 4$.

Послідовність розрахунку коефіцієнтів полінома наступна. Визначають число членів ряду (14.16) (зазвичай приймають $3 \div 4$). У прийняте вираження послідовно підставляють координати *x* і *y* декількох (*m*) експериментальних точок і одержують систему з *m* рівнянь. Кожне рівняння прирівнюють відповідному відхиленню:

$$\begin{aligned} &A_о + A_1x_1 + A_2x_1^2 + \ldots A_nx_1^n - y_1 = \varepsilon_1; \\ &A_о + A_1x_1 + A_2x_2^2 + \ldots A_nx_2^n - y_2 = \varepsilon_2; \qquad (14.18) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A_о + A_1x_m + A_2x_m^2 + \ldots A_nx_m^n - y_m = \varepsilon_m; \end{aligned}$$

Число точок (число рівнянь) повинно бути не менш числа коефіцієнтів *А*, що дозволить їх обчислити вирішенням системи рівнянь (14.18). Для цього систему рівнянь розбивають послідовно зверху вниз на групи, число яких повинно дорівнює числу коефіцієнтів $A_o$. У кожній групі складають рівняння і одержують нову систему рівнянь, рівну кількості груп (зазвичай 2 ÷ 3). Вирішуючи систему, обчислюють коефіцієнти $A$.

Точність розрахунків можна підвищити, згрупувавши початкові умови по 2 ÷ 3 варіанти і обчислити для кожного варіанта емпіричну формулу. Перевагу має формула, у якої $\Sigma\varepsilon^2 = min$.

*Приклад.* Виконано сім вимірів:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10,2 | 6,7 | 4,8 | 3,6 | 2,7 | 2,1 | 1,7 |

Для визначення емпіричної формули вибираємо поліном

$$y = A_o + A_1x + A_2x^2 \qquad (14.19)$$

Підстановкою в це рівняння даних вимірів систему початкових рівнянь можна розділити на три групи: 1... 2; 3... 4; 5...7 у вигляді:

$$\begin{aligned}
&1\ \ A_o + 4A_1 + 16A_2 - 10{,}2 = \varepsilon_1;\\
&2\ \ A_o + 5A_1 + 25A_2 - 6{,}7 = \varepsilon_2;\\
&3\ \ A_o + 6A_1 + 36A_2 - 4{,}8 = \varepsilon_3;\\
&4\ \ A_o + 7A_1 + 49A_2 - 3{,}6 = \varepsilon_4;\\
&5\ \ A_o + 8A_1 + 64A_2 - 2{,}7 = \varepsilon_5;\\
&6\ \ A_o + 9A_1 + 81A_2 - 2{,}1 = \varepsilon_6;\\
&7\ \ A_o + 10A_1 + 100A_2 - 1{,}7 = \varepsilon_7
\end{aligned} \qquad (14.20)$$

Складемо рівняння в кожній підгрупі:

1 – а група: $2A_o + 9A_1 + 41A_2 = 16{,}9$

2 – а група: $2A_o + 13A_1 + 85A_2 = 8{,}4$

3 – я група: $3A_o + 27A_1 + 24A_2 = 6{,}5$.

Визначивши із цих виражень коефіцієнти $A_o$, $A_1$ і $A_2$, одержимо шукану емпіричну формулу $y = 26{,}128 - 5{,}2168\,x + 0{,}2811\,x^2$.

*Метод середніх квадратів* можна використовувати для різних кривих після їхньої лінеарізації.

*Приклад.* Маємо 8 вимірів:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 |
| 57,6 | 41,9 | 31,0 | 22,7 | 16,6 | 12,2 | 8,9 | 6,5 |

Аналіз кривої в прямокутних координатах дає можливість застосувати формулу $y = a\cdot e^{-bx}$.

Проведемо вирівнювання, вводячи змінні $Y = lgy$, $X = x / 2{,}303$.

Тоді: $Y = A + BX$, де $A = lg\,a$, $B = b$.

Оскільки потрібно визначити два параметри, то всі виміри ділимо на дві групи по чотирі виміри, одержуючи рівняння:

$$1{,}7604 = A + \frac{3}{2{,}303}B; \qquad 1{,}2201 = A + \frac{15}{2{,}303}B$$

$$1{,}6222 = A + \frac{6}{2{,}303}B; \qquad 1{,}0864 = A + \frac{18}{2{,}303}B;$$

$$1{,}4914 = A + \frac{9}{2{,}303}B; \qquad 0{,}9494 = \frac{21}{2{,}303}B;$$

$$1{,}3560 = A + \frac{12}{2{,}303}B; \qquad 0{,}8129 = \frac{24}{2{,}303}B;$$

$$6{,}2300 = 4A + \frac{30}{2{,}303}B; \qquad 4{,}0688 = 4A + \frac{78}{2{,}303}B.$$

Складаємо по групах і одержуємо систему двох рівнянь із двома невідомими $A$ і $B$, вирішуючи які, одержимо: $A = 1{,}8952$; $a = 78{,}56$; $B = -0{,}1037$; $b = -0{,}1037$. Остаточно маємо $y = 78{,}56\cdot e^{-0{,}1037x}$.

При визначенні параметрів заданого рівняння ефективним є метод *найменших квадратів*. Якщо всі виміри функцій $y_1$, $y_2$,…,$y_n$ виконані з однаковою точністю і розподілені величини помилок вимірів відповідають *нормальному* закону, то параметри досліджуваного рівняння визначаються з умови, при якій сума квадратів відхилень виміряних значень від розрахункових приймає найменше значення.

Для знаходження параметрів ($a_1$, $a_2$, ... $a_n$) необхідно вирішити систему лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_1x_1 + a_2i_1 + \ldots + a_nz_1 \\
y_2 &= a_1x_2 + a_2i_2 + \ldots + a_nz_2 \qquad (14.21) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= a_1x_m + a_2u_m + \ldots + a_nz_m,
\end{aligned}$$

де $y$, ... $y_n$ – часткові значення виміряних величин функції $y$ ; $x$, $u$, $z$ – змінні величини. Цю систему приводять до системи лінійних рівнянь множенням кожного рівняння відповідно на $x_1 \ldots x_m$ і наступного їхнього додавання, потім множення відповідно на $u_1 \ldots u_m$. Отже одержуємо систему *нормальних рівнянь*:

$$\sum_1^m yx = a_1\sum_1^m xx + a_2\sum_1^m xu + \cdots + a_n\sum_1^m xz \qquad (14.22)$$

$$\sum_1^m yu = a_1\sum_1^m ux + a_2\sum_1^m uu + \cdots + a_n\sum_1^m uz$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_1^m yz = a_1\sum_1^m zx + a_2\sum_1^m zu + \cdots + a_n\sum_1^m zz$$

Рішення цієї системи рівнянь дає шукані коефіцієнти.

*Приклад.* Необхідно визначити коефіцієнти $a_1$ *і* $a_2$ у рівнянні: $\kappa_p = a_1 + a_2 \cdot c$. Оскільки необхідно визначити два параметри, то система рівнянь може бути записана у вигляді двох рівнянь:

$$y = a_1x_1 + a_2u_2 \quad \text{і} \qquad (14.23)$$

$$yu_2 = a_2x_1u_2 + a_2u_2^2, \qquad (14.24)$$

де $y = k_p$; $x_1 = 1$; $x_2 = c$.

Отримані рівняння є лінійними, тому можна обмежитися чотирма серіями вимірів. Оскільки вони зведені в (табл. 14.7), то систему нормальних рівнянь можна записати у вигляді:

$$5{,}48 = 4\,a_1 + 1100\,a_2;$$

$$1519 = 1100\,a_1 + 307350\,a_2.$$

Вирішуючи її, одержимо: $a_1 = 0{,}78$; $a_2 = 0{,}0025$.

Отже, емпірична формула має вигляд:

$$k_p = 0{,}78 + 0{,}0025\,c. \qquad (14.25)$$

Таблиця 14.7 – Результати вимірів

| $u_2 = c$ | $y = k_p$ | $u^2$ | $y{\cdot}x$ |
|---|---|---|---|
| 230 | 1,26 | 52900 | 289 |
| 255 | 1,32 | 65025 | 336,6 |
| 295 | 1,40 | 87025 | 413,0 |
| 320 | 1,50 | 102400 | 480,0 |
| 1100 | 5,48 | 307350 | 1519,4 |

Для розрахунку коефіцієнтів *A* методом найменших квадратів необхідно використовувати типові програми для ЕВМ.

Запитання для самоконтролю

*1 В яких випадках слід застосовувати метод поділу змінних?*

*2 Які існують системи координат і для чого їх використовують?*

*3 Для чого здійснюють лінеаризацію нелінійних функцій?*

*4 Для чого здійснюють апроксимацію експериментальних кривих?*

*5 Викладіть процедуру апроксимації.*

*6 В чому полягає апроксимація «методом двох крайніх точок»?*

*7 Які методи використовують для лінеаризації експериментальних кривих?*

*8 Як здійснити апроксимацію функції виду:* $y = c + a \cdot e^{bx}$ *?*

*9 Яка послідовність апроксимації поліномами?*

*10 В чом полягає «метод середніх квадратів»?*

*11 Що таке «метод найменших квадратів»?*

# 15 РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ АПРОКСИМАЦІЇ

## 15.1 Задача регресійного аналізу

Це дослідження закономірностей зв'язку між явищами (процесами), які залежать від багатьох (у тому числі невідомих) факторів. Якщо між змінними $x$ і $y$ існує зв'язок, при якому одному значенню $x$ відповідає кілька значень $y$, то такий зв'язок є *регресійним*. Функція $y = f(x)$ є регресійною (кореляційною), якщо кожному значенню аргументу $x$ відповідає статистичний ряд розподілу $y$. Отже, регресійні залежності характеризуються *імовірнісними* або *стохастичними* зв'язками, встановлення яких можливо лише при виконанні статистичних вимірів.

Суть регресійного аналізу полягає у встановленні рівняння регресії, тобто виду кривої між випадковими величинами (аргументами $x$ і функцією $y$), оцінці тісноти зв’язків між ними, імовірності і адекватності результатів вимірів. Для попереднього визначення наявності такого зв'язку між $x$ і $y$ наносять точки на графік, утворюючі кореляційне поле.

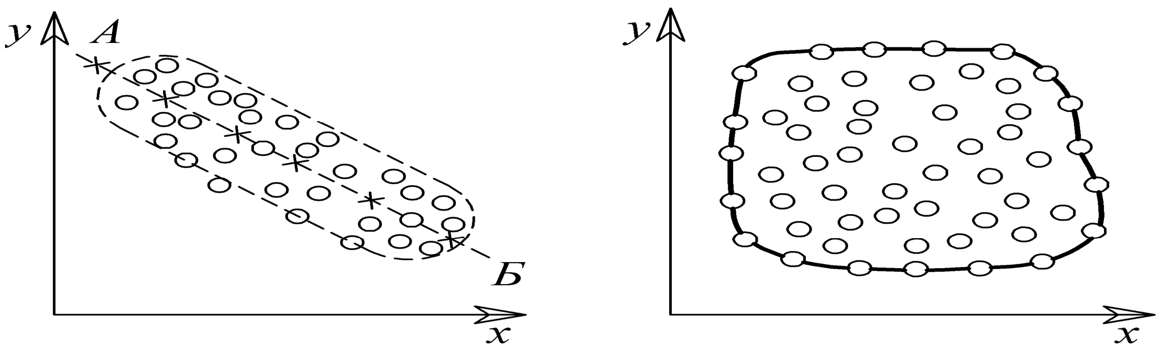



Рисунок 15.1 − Види кореляційних полів

По характерові групування точок навколо прямої або кривої лінії, її нахилу (рис. 15.1) можна візуально визначити наявність або відсутність такого кореляційного зв’язку. Якщо усереднювати точки $x_i$ і з'єднати точки $y_i$, то одержимо ламану лінію − експериментальну регресійну залежність. Провівши плавну лінію, рівновіддалену від точок $\bar{y}$, одержимо теоретичну регресійну залежність.

Існують *однофакторні* (парні) і *багатофакторні* регресійні залежності. Парна залежність апроксимується прямою, параболою, гіперболою, статичною, логарифмічною і ін. функціями. Двохфакторне поле апроксимується площиною, параболоїдом, гіперболоїдом і ін. При цьому зв'язок виражається за допомогою $m$ – мірного простору рівняннями другого порядку

$$y = b_o + \sum_{1}^{m} b_i x_i + \sum_{j}^{m} b_{ij} x_i x_j + \sum_{1}^{m} b_{ij} x_i^2 , \qquad (15.1)$$

де $y$ – функція мети (відгуку) багатофакторних змінних; $x_i$ − незалежні фактори; $b_{\text{i}}$ – коефіцієнти, що характеризують вплив фактора $x_i$ на функцію мети; $b_{ij}$ – коефіцієнти, що характеризують подвійний вплив факторів $x_i$ і $x_j$ на функцію мети.

Оптимальною є регресійна залежність, у якій виконується умова найменших квадратів: $\Sigma(y_i - \bar{y})^2 = min$, де $y_i$ – фактичні ординати поля; $\bar{y}$− середнє значення ординати з абсцисою $x$. Поле кореляції апроксимується рівнянням прямої $y = a + b{\cdot}x$. Лінію регресії розраховують із умов найменших квадратів. Коефіцієнти регресії $a$ і $b$ обчислюють із формул:

$$b = (n\sum x{\cdot}y - \sum x\sum y) / n\sum x^2 - (\sum x)^2 \qquad (15.2)$$

$$a = y - bx = (\Sigma y) / n - b(\Sigma x) / n.$$

Критерієм близькості кореляційної залежності між $x$ і $y$ до лінійної функціональної залежності − є коефіцієнт кореляції $r$

$$r = \frac{n\sum x_i y_i - \sum xi \sum y_i}{\sqrt{[n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] \cdot [n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}} . \qquad (15.3)$$

При $r = 1$ $x$ і $y$ пов'язані функціональним зв'язком, тобто одному значенню $x$ відповідає одне $y$ ; при $r = 0{,}8...0{,}85$ кореляція хороша; задовільна – при $r \geq 0{,}5$. При $r < 1$, − лінійного зв'язку немає. При $r = 0$ лінійний кореляційний зв'язок відсутній, але може існувати нелінійна регресія.

Для визначення відсотка розкиду функції $y$ відносно її середнього значення, що визначається зміною фактора $x$, розраховують *коефіцієнт детермінації* $k_д$

$$k_д = r^2. \qquad (15.4)$$

Рівняння регресії прямої має вигляд

$$y = \bar{y} + r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}). \qquad (15.5)$$

Оцінка погрішності експерименту (дисперсії відтворюваності) здійснюється на підставі даних паралельних вимірів і характеризує рівноточність вимірів в усіх дослідах.

## 15.2 Перевірка нульової гіпотези

Суть перевірки складається у порівнянні отриманої або передбачуваної теоретичної функції $y = f(x)$ – з результатами вимірів (здійснюється шляхом порівняння *найбільшої* і *найменшої* дисперсій).

Одним зі статистичних критеріїв для *малих вибірок* є критерій Фішера, що полягає у визначенні помилки апроксимації дослідних даних. Для цього розраховують експериментальне значення критерію Фішера $k_{фэ}$ і порівнюють із теоретичним (табличним) $k_{фт}$, при необхідній довірчій імовірності $p_д$ (звичайно вибирають $p_д$ = 0,95). Якщо при цьому $k_{фэ} < k_{фт}$ – модель є адекватною. Дослідний критерій Фішера обчислюють за формулою

$$k_{фд} = D_a / D_{ср}, \qquad (15.6)$$

де $D_a$ − дисперсія адекватності; $D_{ср}$ − середня дисперсія всього експерименту, обчислені таким чином:

$$D_a = \frac{\sum_1^n (y_{it} - \bar{y}_{iэ})^2}{n-d}; \qquad (15.7)$$

$$D_{ср} = \frac{\sum_1^m \sum_1^n (y_{iT} - y_{iэ})^2}{mn}, \qquad (15.8)$$

де $y_{it}$ – теоретичне значення функції для кожного виміру; $y_{iэ}$– експериментальне значення функції; $\bar{y}_{iэ}$–середнє експериментальне значення функції з $m$ серій; $n$ – число вимірів в одному досліді; $d$ – число коефіцієнтів рівняння теоретичної регресії.

Значення $k_{фт}$ беруть із таблиці (14.1) для довірчої імовірності 0,95 і числа ступенів свободи $q_1 = n - d$; $q_2 = n(m-1)$. У ф. (14.7) $y_{im}$ обчислюють за теоретичною регресією для фактора $x_i$; $\bar{y}_i$ – визначають як середнє із $m$ серій вимірів, тобто:

$$\bar{y}_{iэ} = \frac{1}{m}(y_{1є} + y_{2є} + \ldots + y_{mє}). \qquad (15.9)$$

Таблиця 15.1 – Критерій Фішера

| $q$ | Значення $k_{фт}$ при $p_д = 0,95$ для різних $q_2$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 12 | 24 | 36 |
| 1 | 16 | 19 | 21 | 22 | 23 | 23 | 24 | 24 | 24 |
| 2 | 18 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 | 19 |
| 3 | 10 | 9,6 | 9,3 | 9,1 | 9,0 | 8,9 | 8,7 | 8,6 | 8,5 |
| 4 | 7,7 | 6,9 | 6,6 | 6,4 | 6,3 | 6,2 | 5,9 | 5,8 | 5,6 |
| 5 | 6,6 | 5,8 | 5,4 | 5,2 | 5,1 | 5,0 | 4,7 | 4,5 | 4,4 |
| 6 | 6,0 | 5,1 | 4,8 | 4,5 | 4,4 | 4,3 | 4,0 | 3,8 | 3,7 |
| 7 | 5,6 | 4,7 | 4,4 | 4,1 | 4,0 | 3,9 | 3,6 | 3,4 | 3,2 |
| 8 | 5,3 | 4,5 | 4,1 | 3,8 | 3,7 | 3,6 | 3,3 | 3,1 | 2,9 |
| 9 | 5,1 | 4,3 | 3,9 | 3,6 | 3,5 | 3,4 | 3,1 | 2,9 | 2,7 |
| 10 | 5,0 | 4,1 | 3,7 | 3,5 | 3,3 | 3,2 | 2,9 | 2,7 | 2,5 |
| 11 | 4,8 | 4,0 | 3,6 | 3,4 | 3,2 | 3,1 | 2,8 | 2,6 | 2,4 |
| 12 | 4,8 | 3,9 | 3,5 | 3,3 | 3,1 | 3,0 | 2,7 | 2,5 | 2,3 |
| 13 | 4,7 | 3,8 | 3,4 | 3,2 | 3,0 | 2,9 | 2,6 | 2,4 | 2,2 |
| 14 | 4,6 | 3,7 | 3,3 | 3,1 | 3,0 | 2,9 | 2,5 | 2,3 | 2,1 |
| 15 | 4,5 | 3,7 | 3,3 | 3,1 | 2,9 | 2,8 | 2,5 | 2,3 | 2,1 |
| 16 | 4,5 | 3,6 | 3,2 | 3,0 | 2,9 | 2,7 | 2,4 | 2,2 | 2,0 |
| 17 | 4.5 | 3,6 | 3,2 | 3,0 | 2,8 | 2,7 | 2,4 | 2,2 | 2,0 |
| 18 | 4,4 | 3,6 | 3,2 | 2,9 | 2,8 | 2,7 | 2,3 | 2,1 | 1,9 |
| 19 | 4,4 | 3,5 | 3,1 | 2,9 | 2,7 | 2,6 | 2,3 | 2,1 | 1,8 |
| 20 | 4,4 | 3,5 | 3,1 | 2,9 | 2,7 | 2,6 | 2,3 | 2,1 | 1,8 |
| 22 | 4,3 | 3,4 | 3,1 | 2,8 | 2,7 | 2,6 | 2,2 | 2,0 | 1,8 |
| 26 | 4,2 | 3,4 | 3,0 | 2,7 | 2,7 | 2,4 | 2,1 | 1,9 | 1,7 |
| 30 | 4,2 | 3,3 | 2,9 | 2,7 | 2,5 | 2,4 | 2,1 | 1,9 | 1,7 |
| 60 | 4,0 | 3,2 | 2,9 | 2,5 | 2,4 | 2,3 | 1,9 | 1,7 | 1,4 |
| | 3,8 | 3,0 | 2,6 | 2,4 | 2,2 | 2,1 | 1,8 | 1,5 | 1,0 |

*Приклад.* Отримано теоретичне вираження $y = 80x$ і для підтвердження проведений експеримент із $m = 5$ серій по $n = 7$ вимірів (табл. 15.2).

Встановити адекватність теоретичного вираження.

Таблиця 15.2 – Результати вимірів

| № Експе – рименту | $x_i$ | Виміряні значення $y_{iэ}$ в серии | | | | | $\bar{y}_{iэ}$ | $y_{im}$ | $y_{im}$- $\bar{y}_{iэ}$ | $(y_{im}$- $\bar{y}_{iэ})^2$ | $\sum_{1}^{m}(y_{im}-\bar{y}_{iэ})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $y_{1э}$ | $y_{2э}$ | $y_{3э}$ | $y_{4э}$ | $y_{5э}$ | | | | | |
| 1 | 0,2 | 12 | 17 | 15 | 14 | 16 | 14,8 | 16 | 2.3 | 1,44 | 4,4 |
| 2 | 0,3 | 23 | 21 | 24 | 25 | 23 | 23,2 | 24 | 0,8 | 0,64 | 2,4 |
| 3 | 0,4 | 30 | 34 | 31 | 35 | 35 | 33,0 | 32 | 1,0 | 1,00 | 3,8 |
| 4 | 0,5 | 38 | 43 | 40 | 39 | 42 | 40,4 | 40 | 0,4 | 0,16 | 3,6 |
| 5 | 0,6 | 52 | 47 | 48 | 49 | 40 | 47,2 | 48 | 0,8 | 0,64 | 16,4 |
| 6 | 0,7 | 59 | 58 | 55 | 54 | 53 | 55,8 | 56 | 0,2 | 0,04 | 5,4 |
| 7 | 0,8 | 62 | 66 | 62 | 61 | 63 | 62,8 | 64 | 1,8 | 1,44 | 4,4 |
| | | | | | | | | | | | |

Разом: 5,36 40,4

За формулою (15.7) визначаємо дисперсію адекватності $D_a = 5{,}36/(7-1) = 0{,}89$. Тут $d$ =1, тому що в теоретичному вираженні один значущий член $x$.

Дисперсія $D_{ср}$ спочатку обчислюється построчно для $m$ строк:

Для першої строки: $D_1 = \Sigma(y_{iт} - y_{iэ})^2/m = 1/5[(12-16)^2+(17-16)^2+(15-16)^2+ +(14-16)^2 = 4{,}4$;

Для другої строки: $D_2 = 1/5[(23-24)^2+(21-24)^2+(24-24)^2+(25-24)^2+(23-24)^2] = 2{,}4$ і т.д. Середня дисперсія всього експерименту буде

$$D_{ср} = \sum_{1}^{n} D_i / n = 40{,}4 / 7 = 5{,}77. \qquad (15.10)$$

Потім за формулою (14.6) $k_{фє} = D_a / D_{ср} = 0{,}89 / 5{,}77 = 0{,}15$

Теоретичні значення критерію Фішера можна визначити із таблиці 15.1. Збіжності експериментальної і теоретичної регресії при наступних ступенях свободи: $q_1 = 7 - 1 = 6$ і $q_2 = 7(5 - 1) = 27$; $k_{фт} = 3{,}75$.

Оскільки $k_{фє} = 0{,}15 < k_{фт} = 3{,}75$, − то модель є адекватною з довірчою імовірністю $p_д = 95$ %.

Для *великих вибірок* застосовують *критерій Пірсона* відповідно до якого гіпотеза про закон розподілу підтверджується, якщо виконується умова

$$p(\chi^2,q) > \alpha = 1 - \varphi\ (x). \qquad (15.11)$$

Тут $\alpha = 1 - \varphi\ (x)$ – рівень значимості, прийнятий як 0,1; $\chi$ − критерій згоди Пирсона; $q$– число ступенів свободи: $q = m - s$; $m$ − кількість груп (серій, розрядів) великої вибірки або число вимірів в одній серії; $s$ − число використовуваних зв'язків. Значення $\chi^2$ – обчислюють за формулою

$$\chi^2 = \sum_1^m (y_{ei} - y_{mi})^2 / y_{mi}\ , \qquad (15.12)$$

де $y_{ei}$ , $y_{mi}$ – кількість вимірів у кожній групі серій відповідно за даними експерименту і теоретичній кривій.

Якщо маємо велику вибірку з $N$ статистичних вимірів. Розбиваємо їх на $m$ діапазонів: $x_1...x_2$, $x_3…x_4$, $x_5…x_6$ і т.д. За даними вимірів у кожному діапазоні може виявитися $y_э$ вимірів (частота); наприклад, у діапазоні $x_1…x_2$ буде $y_{e1}$ вимірів, в наступному числовому діапазоні $x_3…x_4$ буде $y_{e2}$ вимірів і т.д. Тоді

$$\sum_1^m y_{ei} = N. \qquad (15.13)$$

За даними вимірів будуємо експериментальну криву частот $y_{ei} = f(x)$ або $y_{ei} / N = f(x)$. Цю криву можна апроксимувати теоретичною кривою (законом Пуассона, показовим, логарифмічним, нормальним та ін.). Для неї встановлюють відповідні частоти появи значення $y_{mi}$ у даному діапазоні. Далі обчислюють критерій Пірсона $\chi^2$ і порівнюють його з таблицею 15.3.

Таблиця 15.3 – Критерій Пірсона

| $\chi^2$ | Значення критерія Пірсона при числі степеней свободи | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 0,317 | 0,606 | 0,801 | 0,909 | 0,962 | 0,985 | 0,994 | 0,998 |
| 2 | 0,157 | 0,367 | 0,572 | 0,735 | 0,849 | 0,919 | 0,959 | 0,981 |
| 3 | 0,083 | 0,223 | 0,391 | 0,557 | 0,700 | 0,806 | 0,885 | 0,934 |
| 4 | 0,045 | 0,135 | 0,261 | 0,406 | 0,549 | 0,767 | 0,079 | 0,854 |
| 5 | 0,025 | 0,083 | 0,171 | 0,287 | 0,415 | 0,543 | 0,660 | 0,757 |
| 6 | 0,014 | 0,049 | 0,111 | 0,199 | 0,306 | 0,423 | 0,539 | 0,647 |
| 7 | 0,008 | 0,030 | 0,071 | 0,135 | 0,220 | 0,320 | 0,428 | 0,536 |

Продовження таблиці 15.3

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 0,004 | 0,018 | 0,046 | 0,091 | 0,156 | 0,238 | 0,332 | 0,433 |
| 9 | 0,002 | 0,011 | 0,020 | 0,061 | 0,109 | 0,173 | 0,252 | 0,342 |
| 10 | 0,001 | 0,006 | 0,018 | 0,040 | 0,075 | 0,124 | 0,188 | 0,265 |
| 11 | 0,000 | 0,004 | 0,011 | 0,026 | 0,051 | 0,088 | 0,138 | 0,201 |
| 12 | - | 0,002 | 0,007 | 0,017 | 0,034 | 0,062 | 0,100 | 0,151 |
| 13 | - | 0,001 | 0,004 | 0,011 | 0,023 | 0,043 | 0,072 | 0,111 |
| 14 | - | 0,000 | 0,002 | 0,007 | 0,014 | 0,029 | 0,036 | 0,059 |
| 15 | - | - | 0,001 | 0,004 | 0,010 | 0,020 | 0,030 | 0,042 |

*Приклад.* Проведено $n$ = 250 вимірів величини $x_i$. Необхідно визначити закон розподілу. Розбиваємо вибірку $y_{ei}$ на сім груп, результати вимірів нанесемо на сітку в прямокутних координатах і встановлюємо, що крива близька до закону нормального розподілу, по якій визначають відповідні теоретичні частоти :

1 23 50 82 58 28 2

1 27 57 80 57 27 1

і за формулою (15.12) обчислюємо критерій згоди $\chi^2$:

$$\chi_1{}^2 = (1-1)^{2/1} + (23-27)^{2/27} + (50-57)^{2/57} + (82-80)^{2/80} + (58-57)^{2/57} +$$
$$+ (58-57)^{2/57} + (2-27)^{2/27} + (2-1)^{2/1} = 2{,}56$$

За кількості розрядів $m$ = 7; констант нормального закону $s$ = 2; $q$ = 7 - 2 = 5. За таблицею 15.3 відповідно до $p$ (2,56; 5) визначаємо $\chi^2$ = 0,774. Оскільки 0,774 > 0,10 − то адекватність є задовільною.

Література: [1, С. 138 − 141]; [2, С. 305 − 309].

Запитання для самоконтролю

*1 В чому полягає сутність і задача регресійного аналізу?*

*2 Що таке кореляційні поля?*

*3 Що таке одно факторні і багатофакторні кореляційні залежності?*

*4 Наведіть аналітичний вид коефіцієнта кореляції.*

*5 При яких значеннях коефіцієнту кореляції визначають характер функції зв'язку?*

*6 Що характеризує коефіцієнт детермінації?*

*7 Що таке і як здійснюється перевірка «нульової гіпотези»?*

*8 Що являє собою «дисперсія адекватності»?*

*9 Як встановлюють адекватність рішень за критерієм Фішера?*

*10 Які умови використання критерію згоди Пірсона* $\chi^2$*?*

# 16 КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

## 16.1 Задача кореляційного аналізу

Задача полягає у встановлені залежності однієї випадкової величини $Y$ від однієї або декілька інших випадкових величин $X$ і визначення *тісноти* цієї залежності, − використовують *кореляційний аналіз*. Величини $Y$ і $X$ можуть бути пов'язані функціональною або статистичною залежностями. Якщо при зміні однієї з величин змінюється середнє значень іншої, то така залежність називається кореляційною (кореляція – лат. – взаємозв'язок).

Якщо експериментально отримані $N$ пар чисел ($y_i$ , $x_i$) залежностей $Y$ від $X$, то можна оцінити тісноту лінійного зв'язку між ними. Приблизна залежність $Y = f(X)$ може бути представлена у вигляді прямої, яка є середнеквадратичною регресією $Y$ на $X$

$$Y = m_y + r_{yx}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\,(X - m_x) = a_o + a_1X, \tag{16.1}$$

де $m_x$ і $m_y$ – математичні очікування величин $X$ і $У;$ $\sigma_x$ і $\sigma_в$ – середні квадратичні відхилення цих величин; $r_{yx}$ − *коефіцієнт кореляції*

$$r_{y\text{x}} = k_{yx} / \sigma_x\, \sigma_y\,; \tag{16.2}$$

$k_{yx}$ – кореляційний момент випадкових величин $X$ і $У$.

Параметр $D_{yo} = \sigma_y^{\,2}(1 - r_{yx}^{\,2})$ – це остаточна дисперсія випадкової величини $Y$ відносно $X$, що характеризує величину помилки при апроксимації залежності $Y = f(X)$ лінійною функцією виду (16.1).

При $r_{yx} = \pm\, 1$ остаточна дисперсія $D_{yo} = 0$, що свідчить про функціональну залежність між $Y$ і $X$. При $r_{yx} = 0$ лінійного зв'язку між $Y$ і $X$ немає.

## 16.2 Визначення коефіцієнтів кореляції

Коефіцієнт кореляції $-1 \le r_{yx} \le +1$ є характеристикою *тісноти лінійного зв'язку* між $X$ і $Y$. Чим ближче $r_{yx}$ до 1, – тим зв'язок тісніший.

Коефіцієнти $a_o$ і $a_1$, знайдені методом найменших квадратів, також характеризують тісноту лінійного зв'язку, тому що *коефіцієнт регресії* $a_1$:

$$a_1 = r_{yx} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}. \tag{16.3}$$

*Приклад* 1. Задачі, що вирішує оператор, мають 3 категорії складності: $x_i$, $i = 1, N$; $N = 3$. Середній час на вирішення задачі, $y_i$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 2 | 3 |
| $y_i$, *хв.* | 2 | 3 | 5 |

Оцінити тісноту лінійного зв'язку між випадковими величинами $x$ і $y$.

*Рішення*. Визначимо коефіцієнт кореляції $r_{yx}$ знайшовши спочатку $k_{yx}$, $\sigma_x$:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i-1}^{N} (x_i - m_x)^2}, \tag{16.4}$$

де $m_x = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{N} x_i$. Після підстановки чисел, одержимо: $m_x = 2$; $\sigma_x = 1$.

Аналогічно: $m_y = 3{,}33$; $\sigma_y = 1{,}53$.

Кореляційний коефіцієнт визначаємо за формулою

$$k_{yx} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(y_i - m_y)\cdot(x_i - m_x).= 1{,}5.$$

Коефіцієнт кореляції, знайдений з (15.2): $r_{yx} = 1{,}5 / (1{,}0 \cdot 1{,}53) = 0{,}98$.

Це свідчення тісного зв'язку між $y$ і $x$.

При необхідності визначення тісноти нелінійного зв'язку між випадковими величинами вводять параметр $\eta_{xy}$ – *кореляційне відношення* – це відношення міжгрупового середнього квадратичного відхилення $\sigma_{yi}$ до загального середнього квадратичного відхилення $\sigma_y$ випадкової величини $y$.

$$\eta_{xy} = \sigma_{yi} / \sigma_y. \tag{16.5}$$

Якщо $\eta_{xy} = 0$, то $\sigma_{yi} = 0$ і середнє значення $y$ при будь яких $x$ постійне, рівне загальному середньому, – отже, кореляційного зв'язку немає.

При $\eta_{xy} = 1$, $\sigma_{yi} = \sigma_y$ і величини $x$ і $y$ пов'язані функціональною залежністю.

*Приклад* 2

Таблиця 16.1 – Отримано результати експерименту

| $y_i / x_i$ | 10 | 20 | 30 | $N_{yf}$ |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 4 | 28 | 6 | 38 |
| 25 | 6 | – | 6 | 12 |
| $N_{x\mathrm{i}}$ | 10 | 28 | 12 | $N$ = 50 |

$N$ = 50 – загальне число дослідів; $N_{xi}$, $N_{yi}$ – частота появи конкретного значення вимірюваної величини $X$ і $У$. (Число $N_{xi}$ відповідає числу повторень дослідів у точці $X = x_i$). Визначити тісноту кореляційного зв'язку $X$ і $Y$.

*Рішення.* Наносимо точки $(x_i, y_i)$ на графік (рис. 16.1), відзначивши біля кожної $x_i$ число повторень величини $Y = y_i$. (при $x_i$ = 10 величина $y_i$ = 15).

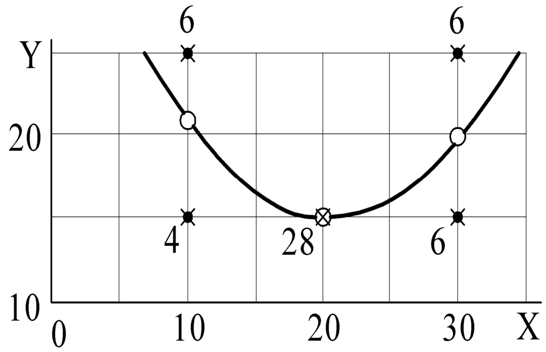



Рисунок 16.1− Графік залежності функції $Y = f(X)$

Для визначення параметру $\eta_{xy}$ зробимо наступне:

− визначимо загальне середнє величини $Y$;

$$m_y = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j = \frac{1}{N}\left(N_{y1}y_1 + N_{y2}y_2\right) = \frac{1}{50}(38\cdot 15 + 12\cdot 25) = 17{,}4;$$

− умовні середні величини $Y$ при заданому $X = x_i$;

$m\, y_i = \dfrac{1}{N_{x_i}}\sum\limits_{j=1}^{N_{xi}} y_{ij}$ ; при $i$ = 1 одержимо: $m_{yi}$ = (1/10)· (4· 15 + 6· 25) = 21.

Аналогічно знайдемо $m_{y2}$ = 15 і $m_{y3}$ = 20 (рис. 16.1).

Знаходимо загальне середнє квадратичне відхилення величини $У$:

$$\sigma_в{}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{2} N_{yj}\,(y - m_y)^2 = (1 / 50 - 1)\cdot[38(15 - 17{,}4)^2 + 12(25 - 17{,}4)^2] = 18{,}58;$$

$\sigma_в$ = 4,31. Визначимо середнє квадратичне відхилення умовних середніх значень $m_{yi}$:

$$\sigma_в{}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{3}\left(m_{yi} - m_y\right)^2 N = (1/50 - 1)[(21 - 17{,}4)^2\cdot 10 + (15 - 17{,}4)\cdot 28 +$$

$$+ (20 - 17{,}4)^2\cdot 12] = 7{,}66; \quad \sigma_в = 2{,}76.$$

Знаючи $\sigma_{yi}$ і $\sigma_y$ за формули (16.5) : $\eta_{yx} = \sigma_{yi} / \sigma_y$ знаходимо кореляційне відношення $\eta_{yx}$ = 0,64. Оскільки воно менше 1, то нелінійний зв'язок між $X$ і $Y$ − слабкий.

Візуальний аналіз графіка (рис. 16.1) дозволяє рівняння регресії $Y = f(x)$ представити у вигляді параболи другого порядку: $Y = a_o + a_1X + a_2X$ (під $Y$ розуміємо умовне середнє цієї величини при $x_i = const$, тобто $Y = m_{x\cdot}$).

Після підстановки коефіцієнтів, визначених шляхом вирішення системи рівнянь, одержимо $Y = 38 - 2{,}25\,X + 0{,}055\,X^2$.

Запитання для самоконтролю

*1 Що таке «коефіцієнт регресії»?*

*2 В чому полягає задача регресивного аналізу?*

*3 При яких умовах вводять параметр η – кореляційне відношення?*

*4 Як визначити тісноту кореляційного зв'язку між X і Y?*

*5 При яких значеннях коефіцієнту кореляції $r_{yx}$ існує залежність між X і Y?*

# 17 ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ

## 17.1 Задача дисперсного аналізу

Метою цього аналізу є встановлення ступені впливу деякого фактору $X$ на дослідну величину $Y$. Сутність методу полягає в порівнянні *факторної дисперсії*, яка породжена дією фактора $X$ і остаточною дисперсією, обумовленою випадковими причинами. Якщо різниця між цими дисперсіями значна, − то фактор *X* суттєво впливає на *Y*.

Дисперсний аналіз також придатний, якщо необхідно перевірити ступінь точності групи $m$ приладів і встановити вплив одного параметра приладу на точність виміру.

*Приклад.* Кожним приладом проведено $n$ вимірів – усього $n{\cdot}m$. Окремий вимір $x_{ij}$, де $i$ − номер приладу (від 1 до $m$); $j$ − номер проведеного їм виміру (від 1 до $n$).

Дисперсійний аналіз припускає підпорядкування відхилень нормальному закону розподілу, тому обчислюють для кожної серії вимірів середнє арифметичне і середнє з показань кожного приладу і т.д. для кожного з $n_i$ вимірів і $m_i$ приладів. Після чого обчислюють *суму квадратів відхилень* між вимірами серій, яка показує ступінь розбіжності систематичних погрішностей

$$S_1 = n \sum_{i=1}^{m} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 , \qquad (17.1)$$

тут $\bar{x}_i$– середнє арифметичне $n$ вимірів; $\bar{x}$ – середнє арифметичне всіх серій вимірів (тобто загальне середнє). Вона показує ступень розходження в систематичних погрішностях усіх $m$ приладів, тобто характеризує розсіювання досліджуваного фактора між вимірами.

Сума квадратів відхилення всередині серії $S_2$ визначається за формулою

$$S_2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 , \qquad (17.2)$$

тут $x_{ij}$ – окремий $i$ –тий вимір на $j$ –том приладі.

Вона характеризує залишкове розсіювання випадкових погрішностей одного вимірювального приладу. При цьому допускають, що центри нормальних розподілів випадкових величин рівні, тому всі $m{\cdot}n$ виміри розглядають як вибірку з однієї нормальної сукупності. Тому обчислюють критерій

$$J = \frac{S_1/(m-1)}{S_2/m(n-1)} , \qquad (17.3)$$

де чисельник і знаменник є дисперсії $\sigma^2$ для $m$ і $n{\cdot}m$ спостережень. В залежності від значення $k_1 = m - 1$ і $k_2 = m(n - 1)$ – числа степенів свободи і довірчої імовірності $p_д$ (0,95; 0,99) складені таблиці значень $j_т$. Якщо $j \le J_т$, то вважають, що всі прилади мають однакові (допустимі) систематичні похибки.

## 17.2 Поняття факторної та залишкової дисперсії

Якщо необхідно встановити ступінь впливу фактора $X$ на дослідну величину $Y$ також використовують дисперсний аналіз. Принцип цього методу полягає в порівнянні *факторної дисперсії*, викликаної фактором $X$, і *залишкової дисперсії*, обумовленої випадковими причинами. У тому випадку, коли розходження в дисперсіях велике, – це означає, що і фактор $X$ істотно впливає на $Y$ і середні значення $Y$ при різних $X$ також сильно відрізняються.

*Приклад***.** У процесі експерименту проведено по 2 виміри ($m = 2$) величини $Y$ на кожному із двох рівнів ($N = 2$) фактора $X$ (табл. 17.1).

Таблиця 17.1 – Результати вимірів

| $x_i / y_{ij}$ | $y_{i1}$ | $y_{i2}$ | $\bar{y}_i$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $y_{12}$ | $y_{11}$ | $\bar{y}_1$ |
| $x_2$ | $y_{22}$ | $y_{21}$ | $\bar{y}_2$ |

$x_i$ – значення факторів в $i$-м досліді; $i = 1, N$; $N$ – число дослідів, тобто число різних значень фактора $X$; $y_{ij}$ – $j$-е значення величини $Y$ в $i$–м досліді; $j = 1,m$ $m$ − число повторень дослідів при $X = x_i$; $\bar{y}_i = m_{yi} = \frac{1}{m}\sum_{s=1}^{m} y_{ij}$ – середнє значення величини $y$ в $i$-м досліді (групове середнє); $\bar{y} = m_y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\bar{y}_i =$

$= \frac{1}{mN}\sum_{s=1}^{N}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}$ – загальне середнє значення $\bar{y}$.

*Рішення*. 1. Визначимо загальну суму квадратів відхилень величини $Y$ від загальної середньої $\bar{y}$, що характеризує розсіювання усіх ($m \cdot N$) виміряних значень величини $Y$ навколо загального середнього цієї величини $\bar{y}$.

$$S_y = \sum_{s=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} (y_{ij} - \bar{y})^2 \qquad (17.4)$$

2. Визначимо факторну суму квадратів відхилень середніх значень $Y$ в кожному досліді $\bar{y}_i$ від загальної середньої $\bar{y}$, що характеризує розсіювання групових середніх у всіх $N$ дослідах (міжгрупове розсіювання)

$$S_{уф} = m \sum_{i=1}^{N} (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \quad . \qquad (17.5)$$

3. Визначимо остаточну суму квадратів відхилень величини $Y$ від її середньої величини в кожному досліді, що характеризує розсіювання величини $Y$ у середині досліду (міжгрупове розсіювання):

$$S_{уо} = \sum_{s=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \qquad (17.6)$$

Для нашого випадку одержимо:

$$S_у = (y_{11} - \bar{y})^2 + (y_{12} - \bar{y})^2 + (y_{21} - \bar{y})^2 + (y_{22} - \bar{y})^2. \qquad (17.7)$$

Віднімемо і додамо до кожного спостережуваного $y_{ij}$ відповідні групові середні $\bar{y}_i$ і після перетворення одержимо:

$$S_y = 2 \cdot [(\bar{y}_1 - \bar{y})^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y})^2] + [(y_{11} - \bar{y}_1)^2 + (y_{12} - \bar{y}_1)^2 + (y_{21} - \bar{y}_2)^2 + (y_{22} - \bar{y}_2)^2].$$

З врахуванням (16.5) і (16.6) для $N = 2$ і $m = 2$ одержимо:

$$S_y = S_{уф} + S_{у0} \qquad (17.8)$$

Залишкову суму квадратів відхилень можна обчислити по відомим $S_у$ і $S_{уф}$. Розділивши відповідні суми квадратів відхилень на число ступенів свободи, одержимо *загальну*, *факторну* і *залишкову* дисперсію:

$$D_y = \frac{S_y}{N(m-1)}; \qquad D_{уф} = \frac{S_{уф}}{N-1}; \qquad D_{уо} = \frac{S_{у0}}{N(m-1)}. \qquad (17.9)$$

Перевірка нульової гіпотези про рівність групових середніх сукупностей з невідомими, але однаковими дисперсіями здійснюється за допомогою критерію Фішера і полягає в порівнянні $D_{уф}$ і $D_{уо}$ :

$$F = D_{уф} / D_{уо}. \qquad (17.10)$$

Величина $F$, розрахована по даним експерименту порівнюється з табличним $F_T$ і при $F < F_T$ нульова гіпотеза підтверджується. При рівності факторної і залишкової дисперсій – нульова гіпотеза вірна. Якщо різниця значна – гіпотеза неправдива. Якщо $D_{уф} < D_{уо}$, то групові середні рівні і використовувати $F$-фактор не варто. У цьому суть методу дисперсного аналізу.

*Приклад*. Проведено 3 експерименти ($N = 3$) і в кожному вимірі повторюються 4 рази ($m = 4$). При рівні значимості $a = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу про рівність групових середніх $\bar{y}_i$. Закон розподілу похибок виміру – *нормальний* з однаковими дисперсіями.

Таблиця 17.2 – Результати вимірювань

| $y_{ij} / x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|
| $y_{i1}$ | 51 | 52 | 42 |
| $y_{i2}$ | 52 | 54 | 44 |
| $y_{i3}$ | 56 | 56 | 50 |
| $y_{i4}$ | 57 | 58 | 52 |
| $\bar{y}_i$ | 54 | 55 | 47 |

За формулами (17.4) і (17.5) визначимо загальну і факторну суми квадратів відхилень: $S_y = 266$; $S_{уф} = 152$. Залишкова сума квадратів відхилень: $S_o = S_y - S_{уф} = 226 - 152 = 114$. Відповідно до (17.9) факторна і залишкова дисперсії:

$$D_{уф} = 152/(3-1) = 76;$$

$$D_{уо} = 114/3(4-1) = 12{,}67.$$

Тоді $F = 76/12{,}67 = 6$. Порівнюючи з табличним: $F_T = 4{,}26 < F = 6$ − то нульова гіпотеза невірна, тобто вплив $X$ на $Y$ завеликий.

Запитання для самоконтролю

*1 Які задачі і в чому полягає дисперсний аналіз?*

*2 Як розраховують суму квадратів відхилень між вимірами?*

*3 Що таке загальна, факторна і залишкова дисперсії?*

*4 Яким критерієм визначається значимість різниць дисперсій?*

*5 Як визначають факторну суму квадратів відхилень середніх значень в кожному вимірі?*

# 18 ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

## 18.1 Етапи планування

Послідовність планування дослідів полягає у виборі числа і умов проведення дослідів, що дозволяють одержати необхідні дані про об'єкт із необхідною точністю. Вхідні змінні: $X_i$, $i = 1,\overline{k}$, що визначають стан об'єкта – це *фактори*, які впливають на нього.

Вихідна змінна $Y$ – це *функція відгуку* на вхідний вплив. Вона є метою дослідження (оптимізація, якість, швидкодія, надійність, габатіти і т.п.).

Вибір діапазону експериментування (факторного простору), обумовленому по кожному факторі $X_i$ його можливим максимальним і мінімальним значеннями ($X_{i\,min} < X_i < X_{i\,max}$).

## 18.2 Вибір математичної моделі об’єкта

Якщо вид функції $Y = f(X_1,...X_k)$ невідомий, необхідно використовувати степеневий ряд, що є математичною моделлю об'єкта дослідження.

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i X_i + \sum_{i\le j} a_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^{k} a_{ii} X_i^2 + \cdots, \qquad (18.1)$$

де $k$ – число факторів, що впливають. Для визначення коефіцієнтів апроксимуючого полінома, використовують метод найменших квадратів за умовою $N > s$ (кількість дослідів більша, ніж число коефіцієнтів полінома $s$). Доцільно усі фактори представити в безрозмірній формі (кодування змінних).

Наприклад, початок координат переносять в точку $X_i = 0{,}5\cdot(X_{imin} + X_{imax})$, а інтервал зміни параметрів $X_i$ розбивають на ряд симетричних щодо центра рівнів. Тоді значенням $X_{imax}$ відповідає змінна $x_i = +1$, а $X_{imin}$ відповідає $x_\mathrm{i} = = -1$.

Оскільки перетворення є лінійними, то в (18.1) змінюються лише коефіцієнти

$$Y = b_\mathrm{o} + \sum_{ш=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i \prec j}^{k} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2 + \cdots, \qquad (18.2)$$

де $x_\mathrm{i}$ – безрозмірні змінні (фактори впливу).

## 18.3 Складання програми експерименту

Розробка програми полягає у визначенні інтервалу значень кожного фактора в кожному досліді, складання таблиці (матриці) планування для незалежних $(i = 1, k)$ і залежних $(i = k+1, s-1)$ параметрів. Частина незалежних параметрів і є планом експерименту. Експеримент, у якому використовуються всі можливі сполучення факторів як залежних, так і незалежних називають *повним факторним експериментом* (ПФЕ). Якщо $k$ факторів варіюються на 2-х рівнях, то число можливих сполучень факторів дорівнює $2^\mathrm{k}$ і ПФЕ називають − типу $2^\mathrm{k}$. Таблиця 17.1 складена з обох видів факторів і зветься *матрицею планування*.

Таблиця 18.1 – Результати вимірів

| Номер досліду $N$ | $x_o$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3 = x_1 x_2$ | Y |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | +1 | -1 | -1 | +1 | $Y_1$ |
| 2 | +1 | +1 | -1 | -1 | $Y_2$ |
| 3 | +1 | -1 | +1 | -1 | $Y_3$ |
| 4 | +1 | +1 | +1 | +1 | $Y_4$ |

*Приклад* 1. Складемо план ПФЕ типу $2^2$. Число дослідів $N = 2^2 = 4$.

Відповідна матриця у таблиці 18.1. Цей план відповідає моделі виду

$$Y = b_o x_o + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 \, . \qquad (18.3)$$

У першому стовпці матриці – фіктивний фактор $x_o$ = +1 при коефіцієнті полінома $b_o$. Стовпці $x_1$ і $x_2$ задають планування (умови досліду); стовпець $x_3$ не самостійний і заповнюється за даними стовпців $x_1$ і $x_2$ . За результатами експерименту відповідно до плану, можна визначити всі 4 коефіцієнти полінома (18.3). Оскільки $N = s = 4$, і умова $N > s$ не виконується, то неможливо провести статистичної оцінки апроксимуючої залежності. Тому потрібно обмежитися лінійною залежністю без врахування взаємного впливу факторів (при цьому $s = 3 < N = 4$), або провести додатковий дослід у нульовій точці $x_1 = x_2 = 0$ (тоді $N = 5 > s = 4$). Якщо помилка досліду невідома, то для її визначення виміри в кожній точці необхідно повторити.

*Приклад* 2. Необхідно нанести гальванічне покриття з мінімальною внутрішньою напруженістю, яку можна виміряти по деформації металу. Необхідно з'ясувати, − як на внутрішні напруження (функції відгуку) впливають різні фактори. Попередній аналіз свідчить, що найбільш дієвими є три фактори: струм $X_1$, температура розчину $X_2$ і концентрація речовини покриття $X_3$ (табл. 18.2).

Таблиця 18.2 – Параметри технологічного процесу

| Параметр | Струм $X_1$, А/дм$^2$ | Температура $X_2$, °С | Концентрація $X_3$, кг/ м$^3$ |
|---|---|---|---|
| Основний рівень $X_{i(ср)}$ | 55 | 45 | 0,7 |
| Інтервал зміни $I_i$ | 25 | 15 | 0,3 |
| Верхній рівень $X_{i\,max}$ | 80 | 60 | 1,0 |
| Нижній рівень $X_{i\,min}$ | 30 | 30 | 0,4 |

Аналіз відомостей про об'єкт свідчить, що найбільш дієві лінійні ефекти і парні взаємодії, тому модель об'єкта має вигляд

$$Y = b_o x_o + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 \qquad (18.4)$$

Для цієї моделі потрібен ПФЕ типу $2^3$ з $s = 7$ і $N = 8$ (табл. 18.3).

Таблиця 18.3 – Результати вимірів

| №, $n$ Виміру | Послі-довність | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $Y_1$ | $Y_2$ | $\bar{Y}$ | $D_Y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8; 13 | +1 | -1 | -1 | -1 | 3,4 | 3,10 | 3,75 | 0,245 |
| 2 | 11; 15 | +1 | +1 | -1 | -1 | -0,4 | -0,60 | -0,50 | 0,020 |
| 3 | 6; 14 | +1 | -1 | +1 | -1 | 2,7 | 1,80 | 2,25 | 0,405 |
| 4 | 3; 12 | +1 | +1 | +1 | -1 | 2,35 | 3,15 | 2,75 | 0,320 |
| 5 | 2; 4 | +1 | -1 | -1 | +1 | 2,20 | 3,30 | 2,75 | 0,605 |
| 6 | 1; 9 | +1 | +1 | -1 | +1 | -0,84 | -1,16 | -1,00 | 0,051 |
| 7 | 5; 7 | +1 | -1 | +1 | +1 | 0,60 | 0,90 | 0,75 | 0,045 |
| 8 | 10; 16 | +1 | +1 | +1 | +1 | 0,60 | 0,40 | 0,50 | 0,020 |

За формули $G = D_{\text{ymax}} / \sum_{i=1}^{N} D_{yi}$ визначимо критерій Кохрена

$$G = 0{,}605/1{,}711 = 0{,}35.$$

Табличне значення $G_m$ при $m - 1 = 1$ і $N = 8$ дорівнює 0,680, то $G_{\text{р}} < G_{\text{т}}$ і тому гіпотеза рівноточності є дійсною.

Погрішність досліду оцінюємо середньою квадратичною погрішністю при визначенні середнього значення $\bar{y}_i$: $\sigma^2_{\bar{y}} = D_{\bar{y}} = \frac{1}{mN} \sum_{i=1}^{N} D_{yi} = \frac{1{,}711}{2 \cdot 8} = 0{,}107$, де $m \cdot N$ – загальне число вимірів. Коефіцієнти апроксимуючого поліному:

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^{N} Y_u x_{0u} = \frac{1}{8} (3{,}75 - 0{,}50 + 2{,}25 + 2{,}75 + 2{,}75 - 1{,}0 + 0{,}75 + 0{,}50) = 1{,}406.$$

Аналогічно: $b_1 = -0{,}968$; $b_2 = 0{,}156$; $b_3 = -0{,}656$; $b_{13} = -0{,}031$; $b_{23} = -0{,}281$.

Звідки: $Y = 1{,}406 - 0{,}968x_1 + 0{,}156x_2 - 0{,}656x_3 + 1{,}031x_1x_2 - 0{,}031x_1x_3 - 0{,}281x_2x_3$.

Запитання для самоконтролю

*1 Дайте визначення «повного факторного експерименту»(ПФЕ).*

*2 За яких умов визначають вхідні і вихідні змінні?*

*3 Як здійснюється вибір діапазону експериментування?*

*4 Умови вибору математичної моделі об'єкта дослідження.*

*5 Сутність методу найменших квадратів?*

*6 Навести приклад складання ПФЕ типу $2^2$.*

# 19 ОБРОБКА ТА ОФОРМЛЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

## 19.1 Форма і зміст наукового звіту

Результати науково-технічного дослідження необхідно обробити, систематизувати і викласти у вигляді звіту. Необхідно керуватися наступними вимогами: чіткою та логічною послідовністю викладання матеріалу; короткістю та точністю формулювань; переконливістю висновків і обґрунтованістю рекомендацій.

Структура звіту наступна. *Титульний лист*: – містить офіційну назву організації; найменування теми дослідження; посаду, прізвище виконавця та керівника науково-технічного дослідження; місце знаходження; рік виконання роботи. *Реферат*: - містить відомості про об'єм звіту, кількість сторінок, ілюстрацій, таблиць і літературних джерел. Також наводиться перелік (від 5 до 10) ключових слів, які характеризують зміст звіту.

В ньому коротко викладають об'єкт (процес) та предмет дослідження, мету роботи, методи дослідження, отримані результати. Відмічаються наукова новизна отриманих результатів та рекомендації щодо можливості їх впровадження, а також економічний ефект.

*Зміст*. Містить перелік розділів і підрозділів з номерами сторінок. *Перелік умовних скорочень*, символів, одиниць і термінів.

*Вступ*. Містить характеристику сучасного стану досліджуваної проблеми, обґрунтовується її актуальність, формулюється мета дослідження та способи її досягнення.

*Основний зміст звіту*. Наводиться літературний огляд по темі дослідження, де викладаються матеріали про стан проблеми. Аналізують існуючі проблеми і невирішені питання, що заважають досягненню вищих показників і більш ефективній роботі сучасного обладнання. Вивчають нові наукові досягнення та ідеї, які можуть бути використані для успішного вирішення поставленої задачі. Огляд завершується обґрунтуванням прийнятої методики і плану дослідження з наукової та економічної точок зору. Послідовно викладаються хід і результати проведених експериментальних досліджень; розглядаються результати обробки даних експерименту; наводяться дані аналізу та узагальнення теоретичних і експериментальних досліджень. Розділи звіту повинні завершуватися узагальненнями отриманих результатів і рекомендаціями до їх можливого використання. Кожна таблиця повинна мати найменування та номер, що збігається з номером даного розділу. Рисунки (схеми, графіки, осцилограми) також нумеруються і супроводжуються підписами, які пояснюють їх зміст. Номери сторінок ставлять у правому верхньому куту.

*Висновки* повинні містити оцінку результатів дослідження з точки зору їх відповідності поставленій меті у вигляді невеликої кількості чітких і конкретних тверджень і пропозицій. Необхідно запропонувати напрямки та шляхи подальшої роботи над вдосконаленням отриманих результатів.

*Список використаних літературних джерел* оформлюється згідно прийнятих правил: прізвище та по батькові автора, назва джерела інформації, видання, рік публікації, номера сторінок.

*Додатки* містять допоміжні матеріали: таблиці, громіздкі математичні викладки, протоколи і акти випробувань, опис нестандартного обладнання, інструкції, методики, алгоритми і програми, різного роду пояснювальні ілюстрації.

## 19.2 Інші форми представлення результатів

Завершене науково-технічне дослідження може бути опубліковане у вигляді *статті* або *тез доповідей* на відповідних тематичних конференціях. Рукопис статті оформлюється у відповідності до вимог, які публікуються в деяких номерах цих журналів. *Тези доповідей* на семінари або конференції – це скорочений (1÷2 сторінки тексту) варіант статті, що містить основні положення щодо отриманих результатів дослідження.

Науково-дослідні роботи, які мають мати ознаки новини, можуть претендувати на визнання в якості *винаходу*, *відкриття* або *патенту на корисну модель*.

## 19.3 Впровадження результатів наукових розробок

Цей етап є завершальним у науково-технічному дослідженні і полягає у передачі виробничому об’єднанню або підприємству наукової продукції у формі наукового звіту, рекомендації, інструкції, методики (розрахунків, вимірів, випробувань), алгоритмів і програм обчислень, технічного завдання на розробку нового пристрою, процесу, системи. По її результатам складається протокол оцінки конструктивних, технологічних, експлуатаційних енергетичних, економічних та інших характеристик пропонованої розробки. Лише після цього розробка передається у промислове виробництво. Впровадження наукових розробок в промислове виробництво завершується оформленням акта впровадження і розрахунком економічного ефекту.

*Навчальне видання*

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійного вивчення та виконання контрольної роботи
з навчальної дисципліни

# ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

*(для студентів 4–5 курсів денної і заочної форм навчання
напряму підготовки 6.050701 − Електротехніка та електротехнології
та слухачів другої вищої освіти зі спеціальності
7.05070103 − Електротехнічні системи електропостачання)*

Укладач **РОЙ** Віктор Федорович

Відповідальний за випуск *П. П. Рожков*

*За авторською редакцією*

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2016, поз. 227М

---

Підп. до друку 27.04.2016. Формат 60x84/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 4,8
Зам. № Тираж 50 пр.

Виконавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК 4705 від 28.03.2014 р.