МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для практичних занять та самостійної роботи
з навчальної дисципліни

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

*(для студентів заочної форми навчання
освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»
напряму підготовки 6.030504 - Економіка підприємства)*

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2016

Методичні вказівки для практичних занять та самостійної роботи з навчальної дисципліни «Оптимізаційні методи і моделі» (для студентів заочної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки 6.030504 - Економіка підприємства) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад. : О. О. Воронков. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 78 с.

Укладач канд. екон. наук О. О. Воронков

Рецензент канд. екон. наук, доц. Н. І. Склярук

Рекомендовано кафедрою економіки підприємств міського господарства, протокол № 1 від 27.08.2015 р.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Методичні вказівки спрямовані на допомогу студентам оволодіти практичними навичками з побудови оптимізаційних економіко-математичних моделей та розв’язання типових завдань з оптимізації.

Дисципліна «Оптимізаційні методи і моделі» є нормативною дисципліною циклу природничо-наукової і загальноекономічної підготовки в навчальному плані за напрямом «Економіка підприємства» для кваліфікаційного рівня «Бакалавр». Обсяг практичних занять з дисципліни становить 6 аудиторних годин (3 практичних заняття), на самостійну роботу студента припадає 130 годин.

Метою вивчення дисципліни «Оптимізаційні методи і моделі» є формування системи базових знань в області методології постановки задач, побудови економіко-математичних моделей та їхнього аналізу.

В результаті вивчення курсу студенти мають оволодіти прийомами побудови економіко-математичних моделей, основними математичними поняттями і методами розв'язання оптимізаційних задач різної складності.

Відповідно до робочої програми курсу «Оптимізаційні методи і моделі» у методичних вказівках до практичних занять розглянуто найважливіші теми змістового модуля 1 «Особливості і сфери застосування оптимізаційних методів і моделей в економіці. Класифікація оптимізаційних методів. Лінійні оптимізаційні моделі» - геометрична інтерпретація лінійної оптимізаційної моделі, 2 «Економічна інтерпретація і аналіз оптимальних планів лінійних оптимізаційних моделей» - двоїста задача лінійного програмування, аналіз розв’язків лінійних оптимізаційних моделей прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику. Знання й навички, що отримані під час вивчення цих тем, найчастіше застосовуються у практичній діяльності.

У методичних вказівках до самостійної роботи для кожної теми зазначено обсяг витрат часу на вивчення, що відповідає програмі курсу. Наприкінці методичних вказівок наведено список основних і додаткових підручників, які рекомендується використовувати. Кожна тема супроводжується посиланнями на відповідні їй сторінки підручників. Після вивчення теоретичного матеріалу треба дати відповіді на запитання для самоперевірки за темою, а також вирішити задачі, що пропоновані для самостійного розв'язання. Для полегшення роботи перед задачами для самостійного розв'язання наведене розв'язання аналогічних прикладів.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

Практичне заняття 1 – 2 години
Тема ПЗ: ПОБУДОВА ЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

Мета - сформувати вміння з побудови математичних моделей задач економічного вибору.

Задача 1.1

Виконати замовлення з виробництва 32 виробів $В_1$ і 4 виробів $В_2$ взялися бригади $Б_1$ і $Б_2$. Продуктивність бригади $Б_1$ з виробництва виробів $В_1$ та $В_2$ становить відповідно 4 та 2 вироби на годину, фонд робочого часу цієї бригади 9,5 год. Продуктивність бригади $Б_2$ – відповідно 1 та 3 вироби на годину, а її фонд робочого часу – 4 год. Витрати, що пов'язані з виробництвом одиниці виробу, для бригади $Б_1$ дорівнюють відповідно 9 та 20 грн., для бригади $Б_2$ – 15 та 30 грн.

Складіть математичну модель задачі, що дозволяє знайти оптимальний обсяг випуску виробів, який забезпечує мінімальні витрати на виконання замовлення.

Розв'язання

Задаємося змінними задачі. Шуканими величинами у задачі є обсяги випуску виробів. Вироби $В_1$ випускатимуться двома бригадами $Б_1$ та $Б_2$. Тому необхідно розрізняти кількість виробів $В_1$, що вироблені бригадою $Б_1$, і кількість виробів $В_1$, що вироблені бригадою $Б_2$. Аналогічно, обсяги випуску виробів $В_2$ бригадою $Б_1$ та бригадою $Б_2$ так само є різними величинами. Внаслідок цього в цій задачі 4 змінні. Для зручності сприйняття будемо використати двоіндексну форму запису x_{ij} – кількість виробів $В_j$ (j=1,2), що виготовляються бригадою $Б_i$ (i=1,2), а саме,

x_{11} - кількість виробів $В_1$, що виготовляються бригадою $Б_1$, [шт.];
x_{12} - кількість виробів $В_2$, що виготовляються бригадою $Б_1$, [шт.];
x_{21} - кількість виробів $В_1$, що виготовляються бригадою $Б_2$, [шт.];
x_{22} - кількість виробів $В_2$, що виготовляються бригадою $Б_2$, [шт.].

Цільова функція. Метою розв'язання задачі є виконання плану з мінімальними витратами, тобто критерієм ефективності розв'язку є показник витрат на виконання усього замовлення. Тому цільову функцію треба представити формулою розрахунку цих витрат. Витрати кожної бригади на виробництво одного виробу $В_1$ та $В_2$ відомі з умови. Отже, цільова функція має вигляд

$$L(X) = 9x_{11}+20x_{12}+15x_{21}+30x_{22} \to \min, \left[\frac{грн.}{шт} * шт = грн.\right].$$

Обмеження. Можливі обсяги виробництва виробів бригадами обмежуються наступними умовами:

- загальна кількість виробів $В_1$, що вироблені обома бригадами, повинна дорівнювати 32 шт., а загальна кількість виробів $В_2$ - 4 шт.;

- час, відпущений на роботу над цим замовленням, становить для бригади $Б_1$ - 9,5 год., а для бригади $Б_2$ - 4 год.;

- обсяги виробництва виробів не можуть бути від'ємними величинами.

Отже всі обмеження задачі розділимо на три групи, зумовлені:

1) величиною замовлення на виробництво виробів;
2) фондами часу, виділеними бригадам;
3) невід'ємністю обсягів виробництва.

Для зручності складання обмежень запишемо вихідні дані у вигляді таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 - Вихідні дані

Бригада	**Продуктивність бригад, шт/год.**		**Фонд робочого часу, год.**
	$В_1$	**$В_2$**	
$Б_1$	4	2	9,5
$Б_2$	1	3	4
Замовлення, шт	32	4	

Обмеження на замовленням виробів мають наступну змістову форму запису

$$\begin{bmatrix} \textit{кількість виробів } В_1 \\ \textit{виготовлених бригадами } Б_1 \textit{ і } Б_2 \end{bmatrix} = [32\ \textit{шт.}]$$

та

$$\begin{bmatrix} \textit{кількість виробів } В_2 \\ \textit{виготовлених бригадами } Б_1 \textit{ і } Б_2 \end{bmatrix} = [4\ \textit{шт.}].$$

Математична форма запису має вигляд

$$x_{11} + x_{21} = 32 \text{ [шт.]}$$

і

$$x_{12} + x_{22} = 4 \text{ [шт.]}.$$

Обмеження за фондами часу має змістову форму

$$\begin{bmatrix} \textit{загальний час, витрачений бригадою } Б_1 \\ \textit{на виготовлення виробів } В_1 \textit{ і } В_2 \end{bmatrix} \le [9{,}5\ \textit{год.}]$$

та

$$\begin{bmatrix} \textit{загальний час, витрачений бригадою } Б_2 \\ \textit{на виготовлення виробів } В_1 \textit{ і } В_2 \end{bmatrix} \le [4\ \textit{год.}].$$

Проблема полягає в тому, що в умові задачі безпосередньо не заданий час, що витрачають бригади на виробництво одного виробу $В_1$ або $В_2$, тобто не задана трудомісткість виробництва. Але є інформація про продуктивність кожної з бригад, тобто про кількість вироблених виробів за 1 годину. Трудомісткість $Тр$ та продуктивність $Пр$ є зворотними величинами, тобто

$$Тр = \frac{1}{Пр} \left[\frac{\textit{год.}}{\textit{шт.}} \right].$$

Тому за даними таблиці 1.1 дістаємо наступну інформацію:

- $\frac{1}{4}$ год. витрачає бригада $Б_1$ на виробництво одного виробу $В_1$;
- $\frac{1}{2}$ год. витрачає бригада $Б_1$ на виробництво одного виробу $В_2$;
- $\frac{1}{1}$ год витрачає бригада $Б_2$ на виробництво одного виробу $В_1$;
- $\frac{1}{3}$ год витрачає бригада $Б_2$ на виробництво одного виробу $В_2$.

Запишемо обмеження за фондами часу в математичному вигляді

$$\frac{x_{11}}{4}+\frac{x_{12}}{2}\le 9{,}5 \quad \left[\frac{год.}{шт.}шт.\right]\le[год.],$$

$$\frac{x_{21}}{1}+\frac{x_{22}}{3}\le 4 \quad \left[\frac{год.}{шт.}шт.\right]\le[год.].$$

Невід'ємність обсягів виробництва задається виразом

$$x_{ij}\ge 0 \ (i=1{,}2;\ j=1{,}2).$$

Отже, математична модель цієї задачі має вигляд

$$L=9x_{11}+20x_{12}+15x_{21}+30x_{22}\to min \quad [грн.],$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}=32 \quad [шт.],\\ x_{12}+x_{22}=4 \quad [шт.],\\ \frac{x_{11}}{4}+\frac{x_{12}}{2}\le 9{,}5 \quad [год.],\\ \frac{x_{21}}{1}+\frac{x_{22}}{3}\le 4 \quad [год.],\\ x_{ij}\ge 0 \quad (i=\overline{1{,}2};\ j=\overline{1{,}2} \quad [шт.]. \end{cases}$$

Задача 1.2

Для пошиття одного виробу потрібно викроїти з тканини 6 деталей. На швейній фабриці розроблені два варіанти розкрою тканини. У таблиці 1.2 наведені характеристики варіантів розкрою 10 м тканини та комплектність, тобто кількість деталей певного виду, що необхідні для пошиття одного виробу. Щомісячний запас тканини для пошиття виробів певного типу становить 405 м^2. У найближчий місяць планується зшити 90 виробів.

Треба побудувати математичну модель задачі, що дозволяє в найближчий місяць виконати план з пошиття з мінімальною кількістю відходів.

Таблиця 1.2 - Характеристика варіантів розкрою відрізів тканини по 10 м

Варіант розкрою	**Кількість деталей, шт. /відріз**						**Відходи, м^2/відріз**
	1	2	3	4	5	6	
1	60	0	90	40	70	90	0,5
2	80	35	20	78	15	0	0,35
Комплектність, шт. /виріб	1	2	2	2	2	2	

Розв'язання

Змінні задачі. У цій задачі шукані величини явно не вказані, але відомо, що має бути виконаний щомісячний план з пошиття 90 виробів. Для пошиття 90 виробів на місяць потрібно розкроїти строго певну кількість деталей. Крій проводиться з відрізів тканини по 10 м за двома різними способами, які дозволяють одержати різну кількість деталей. Оскільки заздалегідь невідомо, скільки тканини буде розкроюватися за першим способом і скільки – за другим, то як шукані величини можна задати кількість відрізів тканини по 10 м , що розкроєні за кожним із способів:

x_1 - кількість відрізів тканини по 10 м^2, що розкроєні за першим способом протягом місяця, [відріз./міс.];

x_2 - кількість відрізів тканини по 10 м^2, що розкроєні за другим способом протягом місяця, [відріз./міс].

Цільова функція. Метою розв'язання задачі є виконання плану за мінімальну кількість відходів. Оскільки кількість виробів строго заплановано (90 шт. /міс.), то цей параметр не описує цільової функції, а належить до обмеження, невиконання якого означає, що задачу не розв’язано. А критерієм ефективності виконання плану служить параметр "кількість відходів", який необхідно звести до мінімуму. Оскільки при розкрої одного відрізу (10 м^2) тканини за 1-м варіантом виходить 0,5 м^2 відходів, а за 2-м варіантом - 0,35 м^2, то загальна кількість відходів при крої (цільова функція) має вигляд

$$L = 0{,}5x_1 + 0{,}35x_2 \to \min,$$

$$\left[\frac{м^2 відх}{відріз} * \frac{відріз}{міс.} = \frac{м^2 відх}{міс.}\right].$$

Обмеження. Кількість розкроїв тканини за різними способами обмежується наступними умовами:

- має бути виконаний план з пошиття виробів, інакше кажучи, загальна кількість деталей, що викроєні, повинна бути такою, щоб з них можна було пошити 90 виробів на місяць, а саме: деталей 1-го виду має бути як мінімум 90 та деталей інших видів - як мінімум по 180;
- витрата тканини має не перевищувати її місячного запасу на складі;
- кількість відрізів розкраюваної тканини не може бути від’ємною.

Обмеження за планом пошиття пальто мають наступну змістову форму запису

$$\begin{bmatrix} \textit{загальна кількість деталей } 1, \\ \textit{що викрієні за всіма варіантами} \end{bmatrix} \geq [90\ шт.],$$

$$\begin{bmatrix} \textit{загальна кількість деталей } 2, \\ \textit{що викрієні за всіма варіантами} \end{bmatrix} \geq [180\ шт.],$$

…………………………………………….....

$$\begin{bmatrix} \textit{загальна кількість деталей } 6, \\ \textit{що викрієні за всіма варіантами} \end{bmatrix} \geq [180\ шт.].$$

Математично ці обмеження записуються у наступному вигляді:

$$60x_1 + 80x_2 \geq 90;$$
$$35x_2 \geq 180;$$
$$90x_1 + 20x_2 \geq 180;$$
$$40x_1 + 78x_2 \geq 180;$$
$$70x_1 + 15x_2 \geq 180;$$
$$90x_1 \geq 180;$$
$$\left[\frac{шт.}{відріз} * \frac{відріз}{міс.}\right] \geq \left[\frac{шт.}{міс.}\right].$$

Обмеження за витратами тканини має такі форми запису:
змістову

$$\begin{bmatrix} загальна\ кількість\ тканини, \\ що\ розкрієна\ за\ місяць \end{bmatrix} \leq \left[405\ м^2\right]$$

і математичну

$$x_1 + x_2 \leq \frac{405}{10},$$
$$\left[\frac{відріз}{міс.}\right] \leq \left[\frac{м^2 * відріз}{міс. * м^2}\right].$$

Невід'ємність кількості розкроєних відрізів задається у вигляді виразу

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Отже, математична модель задачі має вигляд

$$L = 0{,}5x_1 + 0{,}35x_2 \to \min \quad [м_2 відх./міс.];$$
$$60x_1 + 80x_2 \geq 90 \quad [шт./міс.];$$
$$35x_2 \geq 180 \quad [шт./міс.];$$
$$90x_1 + 20x_2 \geq 180 \quad [шт./міс.];$$
$$40x_1 + 78x_2 \geq 180 \quad [шт./міс.];$$
$$70x_1 + 15x_2 \geq 180 \quad [шт./міс.];$$
$$90x_1 \geq 180 \quad [шт./міс.];$$
$$x_1 + x_2 \leq 40{,}5 \quad [відріз/міс.];$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \quad [відріз/міс.].$$

Практичне заняття 2 – 2 години

Тема ПЗ: ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЛІНІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ

Мета - засвоєння студентами основних понять і визначень дисципліни шляхом ілюстрації змісту оптимізації, формування розуміння сутності алгоритму пошуку оптимального розв’язку у оптимізаційних моделях економічного вибору.

Задача 2.1

Знайдемо оптимальний розв’язок задачі, математична модель якої має вигляд

$$L = 3x_1 + 2x_2 \to max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1, & (3) \\ x_2 \le 2, & (4) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Побудуємо прямі обмежень, для чого обчислимо координати точок перетинання цих прямих з осями координат (рис. 2.1).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 = 1, & (3) \\ x_2 = 2, & (4) \end{cases}$$

$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (2) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 0, \end{cases} \quad (3) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Пряма (4) проходить через точку $x_2 = 2$ паралельно осі x_1.

Визначимо ОПР. Наприклад, підставимо точку (0;0) у вихідне обмеження (3), дістанемо $0 < 1$, що є істинною нерівністю, тому стрілкою позначимо напівплощину, яка містить точку (0;0), тобто розташовану правіше та нижче за пряму (3). Аналогічно визначимо припустимі напівплощини для інших обмежень та вкажемо їх стрілками біля відповідних прямих обмежень. Загальною областю, дозволеною всіма обмеженнями, тобто ОПР, є багатокутник ABCDEF.

Цільову пряму можна побудувати за рівнянням

$$3x_1 + 2x_2 = 6,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

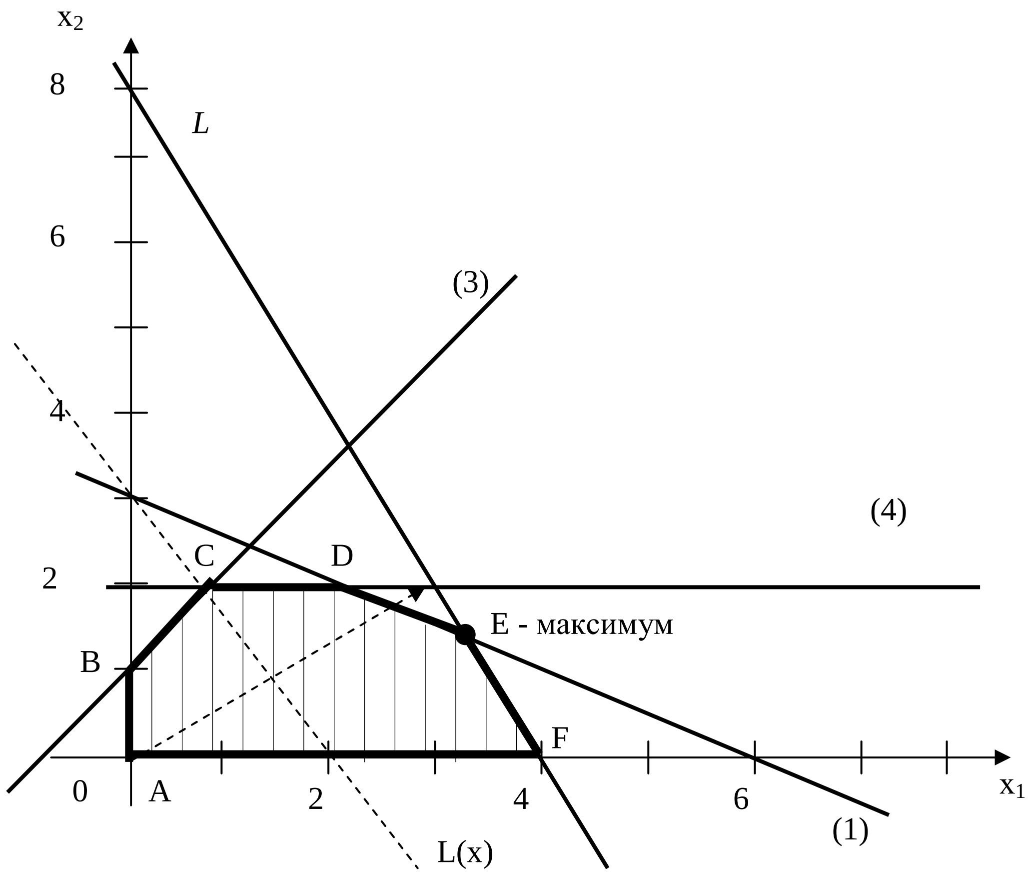

Рисунок 2.1 – Графічне розв’язання задачі

Побудуємо вектор C з точки (0;0) у точку (3;2). Точка E - це остання вершина багатокутнику припустимих рішень ABCDEF, крізь яку проходить цільова пряма, що рухається за напрямком вектору C. Тому E - це точка максимуму цільової функції. Визначимо координати точки E з системи рівнянь прямих обмежень (1) та (2):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{3} \\ x_2 = \dfrac{4}{3} \end{cases},$$

$$E = \left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right).$$

Максимальне значення цільової функції дорівнює $L^* = 3 * \dfrac{10}{3} + 2 * \dfrac{4}{3} = 12\dfrac{2}{3}$.

Задача 2.2

$$L = -2x_1 - x_2 \to min(max),$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, & (1) \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, & (2) \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, & (3) \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, & (4) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Побудуємо обмеження (рис. 2.2):

$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \quad (2) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \quad (3) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 0 \end{cases},$$

$$(4) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Цільову пряму побудуємо за рівнянням

$$-2x_1 - x_2 = -4,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Визначимо ОПР. Обмеження-рівність (4) припускає тільки точки, що лежать на прямій (4). Підставимо точку (0;0) в обмеження (3), одержимо 0≥9, що є помилковою нерівністю, тому стрілкою позначимо напівплощину, що не містить точку (0;0), тобто розташовану вище прямої (3). Аналогічно визначимо й укажемо припустимі напівплощини для інших обмежень. Аналіз напівплощин, припустимих іншими обмеженнями-нерівностями, дозволяє визначити, що ОПР - це відрізок АВ.

Будуємо вектор С з точки (0;0) у точку (-2;-1). Для пошуку мінімуму цільової функції рухаємо цільову пряму проти напрямку вектора С. Точка В - це остання точка відрізка АВ, через яку проходить цільова пряма, тобто В - точка мінімуму цільової функції.

Визначимо координати точки В з системи рівнянь прямих обмежень (3) і (4)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx 3{,}46 \\ x_2 \approx 1{,}85 \end{cases}.$$

Мінімальне значення цільової функції дорівнює

L (3,46; 1,85)= -2 * 3,46 -1 * 1,85 = -8,77.

При пошуку точки максимуму цільової функції будемо рухати цільову пряму за напрямком вектора С. Останньою точкою відрізка АВ, а виходить, і точкою максимуму буде А. Визначимо координати точки А з системи рівнянь прямих обмежень (1) і (4)

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx 2{,}86 \\ x_2 \approx 2{,}57 \end{cases}.$$

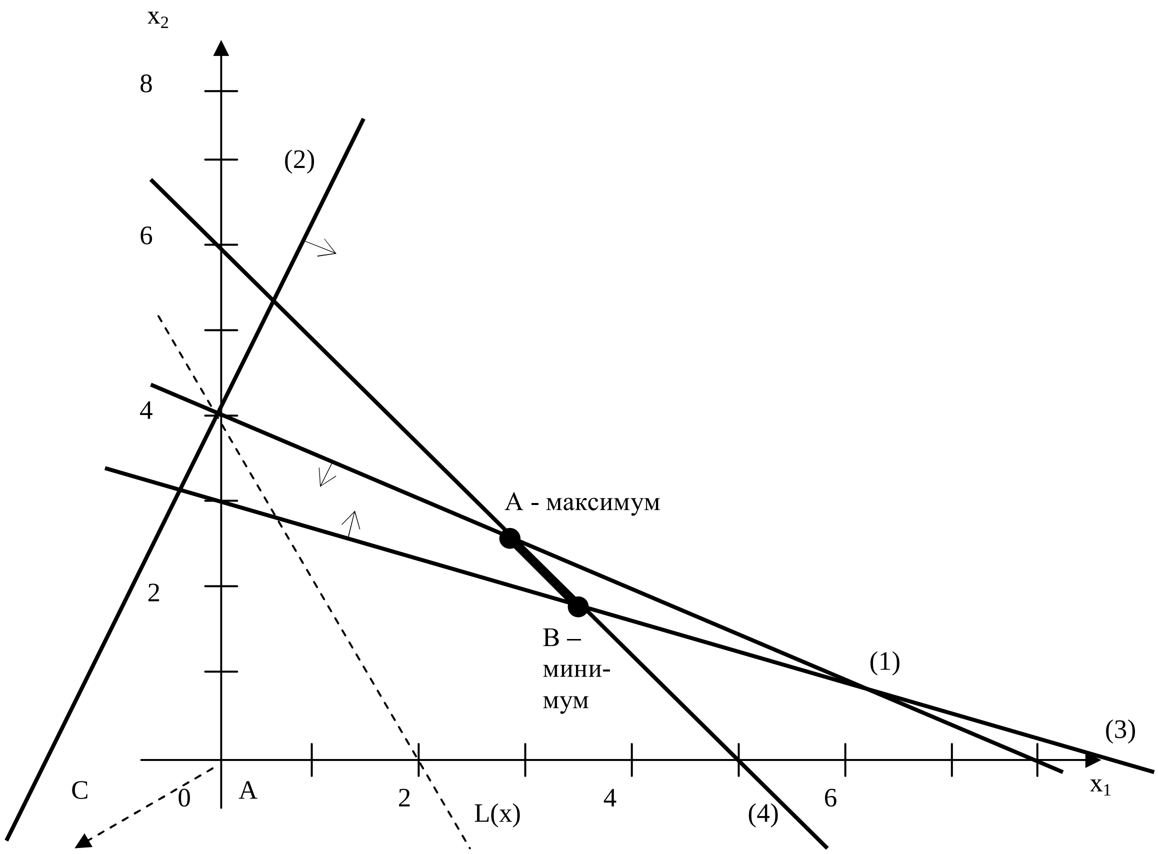

Рисунок 2.2 – Геометричне рішення задачі

Максимальне значення цільової функції дорівнює

$$L\ (2{,}86;\ 2{,}57) = -2 * 2{,}86 - 1 * 2{,}57 = -8{,}29.$$

Таким чином, B(3,46; 1,85) - точка мінімуму, $L_{\min}$= -8,77; A(2,86; 2,57`) - точка максимуму, $L_{\max}$= -8,29.

Задача 2.3

$$L = x_1 - 3x_2 \to min(max),$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3, & (1) \\ x_1 + x_2 \ge 5, & (2) \\ x_1 \le 4, & (3) \\ -2x_1 + x_2 \ge 2, & (4) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. & \end{cases}$$

Побудуємо обмеження (рис. 2.3)

$$(1) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \quad (2) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \quad (4) - \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2, \end{cases} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Пряма (3) проходить через точку x_1 = 4 паралельно осі x_2. Цільову пряму побудуємо за рівнянням

$$x_1 - 3x_2 = -3,$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Визначимо ОПР. Підставимо точку (0;0) в обмеження (2), дістанемо 0≥5, що є помилковою нерівністю, тому стрілкою позначимо напівплощину, що не містить точку (0;0), тобто розташовану правіше й вище прямої (2).

Аналогічно визначимо та вкажемо припустимі напівплощини для інших обмежень. Аналіз припустимих напівплощин дозволяє визначити, що ОПР - це незамкнута область, обмежена прямими (2), (3), (4) і віссю x_2.

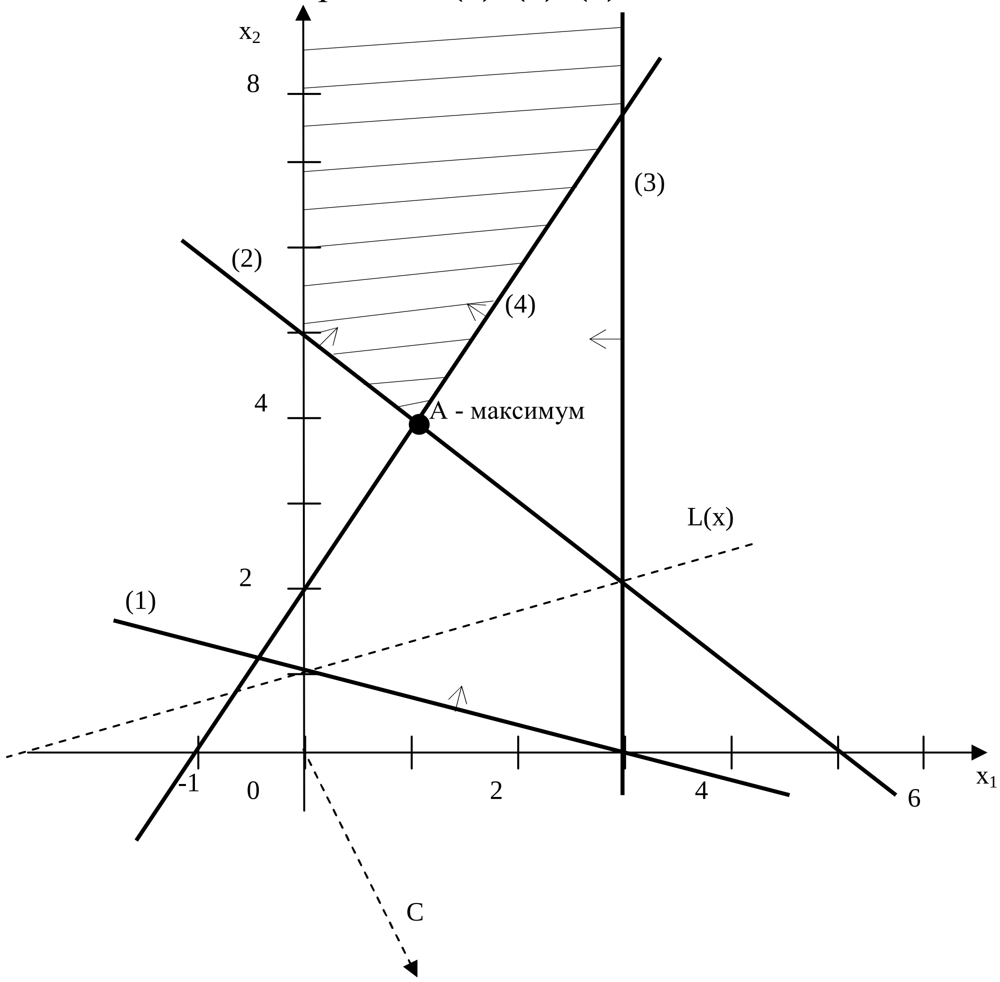

Рисунок 2.3 – Геометричне рішення задачі

Будуємо вектор С з точки (0;0) у точку (1;-3). Для пошуку мінімуму цільової функції рухаємо цільову пряму проти напрямку вектора С. Оскільки в цьому напрямку ОПР не обмежена, неможливо в цьому напрямку знайти останню точку ОПР. Звідси витікає, що цільова функція не обмежена на множині планів знизу (оскільки йде пошук мінімуму).

При пошуку максимуму цільової функції будемо рухати цільову пряму за напрямком вектора С до перетинання з вершиною А - останньою точкою ОПР у цьому напрямку. Визначимо координати точки А з системи рівнянь прямих обмежень (2) і (4):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}.$$

Максимальне значення цільової функції дорівнює:

$$L(1;\, 4)=1*1-3*4 = -11.$$

Отже, у даній задачі цільова функція не обмежена на множині планів знизу, а A(1;4) є точкою максимуму цільової функції, $L_{\max} = -11$.

Практичне заняття 3 – 2 години

Тема ПЗ: АНАЛІЗ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

Мета - оволодіння практичним вмінням з побудови математичної моделі двоїстої задачі, отримання оптимального плану шляхом використання симплекс-методу та зв'язку оптимальних планів прямої і двоїстої задач; оволодіння методикою аналізу чутливості оптимального розв'язку та формування вміння оцінювати рентабельність продукції, виконувати аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів та коефіцієнтів цільової функції.

Задача 3.1

До наведеної нижче задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Вирішити одну з них симплекс-методом і визначити оптимальний план іншої задачі:

$$L = -5x_1 + 2x_2 \to max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Перш ніж записати двоїсту задачу, необхідно пряму задачу привести до відповідного вигляду. Оскільки цільова функція максимізується й у системі обмежень є нерівності, вони повинні мати знак «менше або дорівнює». Тому перше обмеження моделі помножимо на (-1). При цьому знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

Тепер користуючись правилами, складемо двоїсту задачу:

$$L' = -u_1 + 5u_2 \to min,$$

$$\begin{cases} -u_1 + 2u_2 \geq -5, \\ -u_1 + 3u_2 \geq 2, \\ u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0. \end{cases}$$

Оскільки записані задачі симетричні, будь-яку з них можна вирішити симплекс-методом. Визначимо спочатку оптимальний план прямої задачі. Приведемо її до канонічної форми

$$L = -5x_1 + 2x_2 \to max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

У векторній формі система обмежень має вигляд

$$x_1\overline{A}_1 + x_2\overline{A}_2 + x_3\overline{A}_3 + x_4\overline{A}_4 = \overline{B},$$

де $\overline{A}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $\overline{A}_2 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; $\overline{A}_3 = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$; $\overline{A}_4 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; $\overline{B} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$.

У системі векторів для створення початкового одиничного базису відсутній вектор $\overline{A}_5 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Тому введемо штучну змінну в перше обмеження.

Розширена задача лінійного програмування матиме вигляд:

$$L = -5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 \to max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

У цій задачі x_4 і x_5 - базисні змінні, а x_1, x_2, x_3 - вільні. Нехай $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, тоді $x_4 = 5$; $x_5 = 1$. Перший опорний план задачі:

$$x^* = (0;0;0;5;1).$$

Складемо симплекс-таблицю 3.1 й перевіримо план на оптимальність:

Таблиця 3.1 - Перший опорний план

Базис	**Cj$_{баз}$**	**Cj**	**-5**	**2**	**0**	**0**	**-M**	**Θ**
		B	**A$_1$**	**A$_2$**	**A$_3$**	**A$_4$**	**A$_5$**	
A$_5$	-M	1	1	1	-1	0	1	1
A$_4$	0	5	2	3	0	1	0	5/3
	Lj	-M	-M	-M	M	0	-M	
	Δj		-M+5	-M-2	M	0	0	
A$_2$	2	1	1	1	-1	0	1	-
A$_4$	0	2	-1	0	3	1	-3	2/3
	Lj	2	2	2	-2	0	2	
	Δj		7	0	-2	0	2+M	
A$_2$	2	5/3	2/3	1	0	1/3	0	
A$_3$	0	2/3	-1/3	0	1	1/3	-1	
	Lj	10/3	4/3	2	0	2/3	0	
	Δj		19/3	0	0	2/3	M	

Отримано оптимальний план прямої задачі

$$x^* = (0;\ 5/3;\ 2/3;\ 0),\ L = 10/3.$$

Відповідно до першої теореми двоїстості оптимальний план двоїстої задачі існує і можна записати, що

$$\min L' = \max L = 10/3,$$

$$u^* = \overline{C}_{баз}\overline{D}^{-1},$$

де $C_{баз}$ = (2; 0) і міститься у стовпчику «С$_{баз}$» останньої симплекс-таблиці.

Матриця $\overline{D}^{-1}$ міститься в останній симплекс-таблиці у стовпчиках змінних x_5 і x_4, які утворювали початковий базис, $\overline{D}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1/3\\ -1 & 1/3\end{pmatrix}$. Таким чином, дістанемо

$$u^* = (2;0)^* \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix} = (0;2/3),$$

$$min\,L' = -1^*0 + 5^*2/3 = 10/3.$$

Таким чином, застосовуючи до розв'язування прямої задачі симплекс-метод, ми знайшли її оптимальний план, а потім визначили оптимальний план двоїстої задачі, використовуючи першу теорему двоїстості.

Задача 3.2

Фабрика виробляє два види фарб: перший – для зовнішніх, а другий – для внутрішніх робот. Для виробництва фарб використовують два інгредієнта: A і B. Максимально можливі добові запаси цих інгредієнтів відповідно 6 і 8 т. Відомі витрати A і B на 1 т відповідної фарби. Добовий попит на фарбу 2-го виду не перевищує попиту на фарбу 1-го виду більш ніж на 1 т. Попит на фарбу 2-го виду не перевищує 2 т на добу. Ціни на фарби відповідно дорівнюють 3 тис.грн і 2 тис. грн. за 1 т. Треба визначити план виробництва, що максимізує дохід та проаналізувати чутливість оптимального розв'язку задачі.

Розв'язання

Параметри задачі зведемо у таблицю 3.2.

Таблиця 3.2 – Вихідні дані

Інгредієнти	**Витрати інгредієнтів, т.інгр/т.фарби**		**Запас, т.інгр/добу**
	Фарба 1-го виду	**Фарба 2-го виду**	
A	1	2	6
B	2	1	8

ОПР задачі (рис. 3.1) - багатокутник ABCDEF. В оптимальній точці E перетинаються прямі (1) і (2). Тому обмеження (1) і (2) є зв'язними, а відповідні їм ресурси (інгредієнти A і B) - дефіцитними.

Розглянемо економічний зміст цих понять. Точка максимуму ЦФ $E = \left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)$ відповідає добовому виробництву $3\frac{1}{3}$ т фарби 1-го виду й $1\frac{1}{3}$ т фарби 2-го виду. У виробництві фарб використовуються інгредієнти A і B. Добовий запас на складі інгредієнтів A і B - це праві частини зв'язних обмежень (1) і (2) (6 і 8 т інгр./добу). Згідно з цими обмеженнями, на виробництво в точці E витрачається

$$1^*3\frac{1}{3} + 2^*1\frac{1}{3} = 6 \text{ [т інгр.A/добу]} \quad \text{і} \quad 2^*3\frac{1}{3} + 1^*1\frac{1}{3} = 8 \text{ [т інгр.B/добу]}.$$

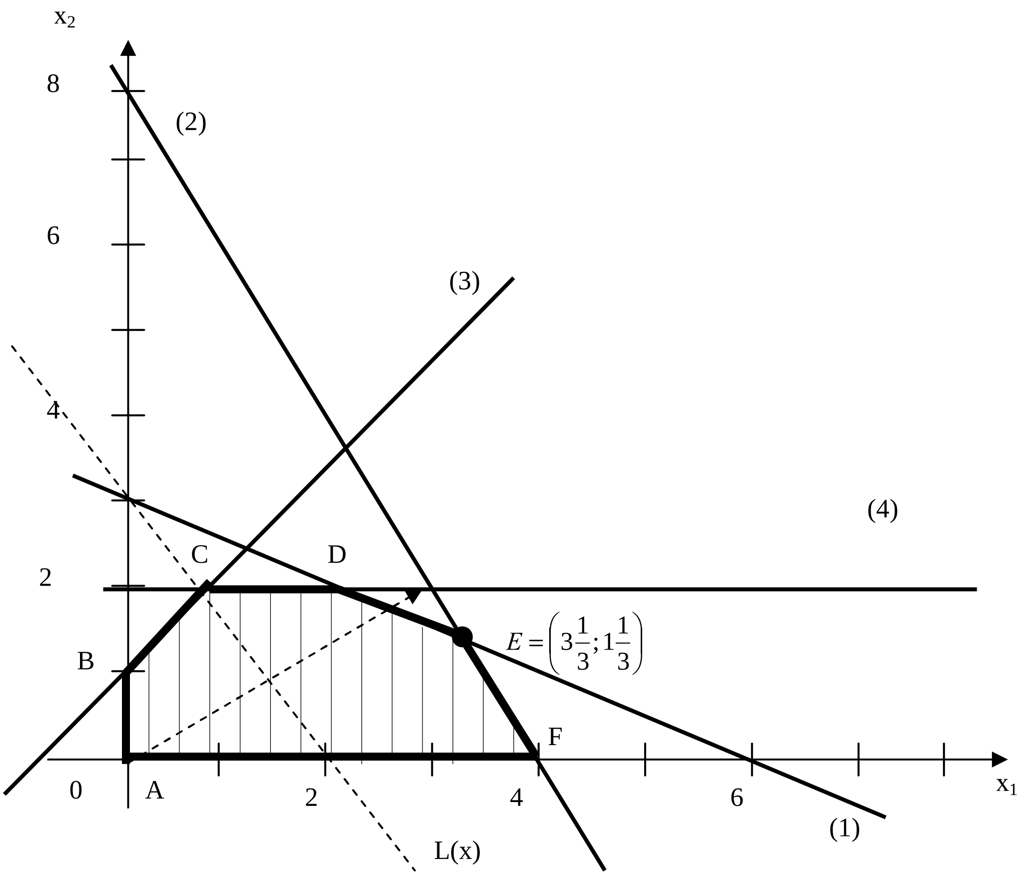

Рисунок 3.1 – Графічне розв'язання задачі

$$L = 3x_1 + 2x_2 \to max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 \le 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 1, & (3) \\ x_2 \le 2, & (4) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Таким чином, поняття «зв'язні обмеження» (1) і (2) означає, що при виробництві фарб у точці E$\left(3\frac{1}{3};\ 1\frac{1}{3}\right)$ запаси інгредієнтів A і B витрачаються повністю, і з цієї причини неможливо подальше нарощування виробництва. У цьому полягає економічний зміст поняття дефіцитності ресурсів, тобто якщо фірма зможе збільшити добові запаси інгредієнтів, то це дозволить збільшити випуск фарб. У зв'язку з цим виникає питання: до якого рівня доцільно збільшити запаси інгредієнтів і на скільки при цьому збільшиться оптимальне виробництво фарб?

Правило 1. Щоб графічно визначити максимальне збільшення запасу дефіцитного ресурсу, що викликає поліпшення оптимального розв'язку, необхідно пересувати відповідну пряму в напрямку поліпшення ЦФ доти, поки це обмеження не стане надлишковим.

При проходженні прямої (1) через точку К (рис. 3.2) багатокутник ABCKF стає ОПР, а обмеження (1) – надлишковим. Дійсно, якщо видалити пряму (1), що проходить через точку К, ОПР ABCKF не зміниться. Точка К стає оптимальною, у цій точці обмеження (2) і (4) стають зв’язними.

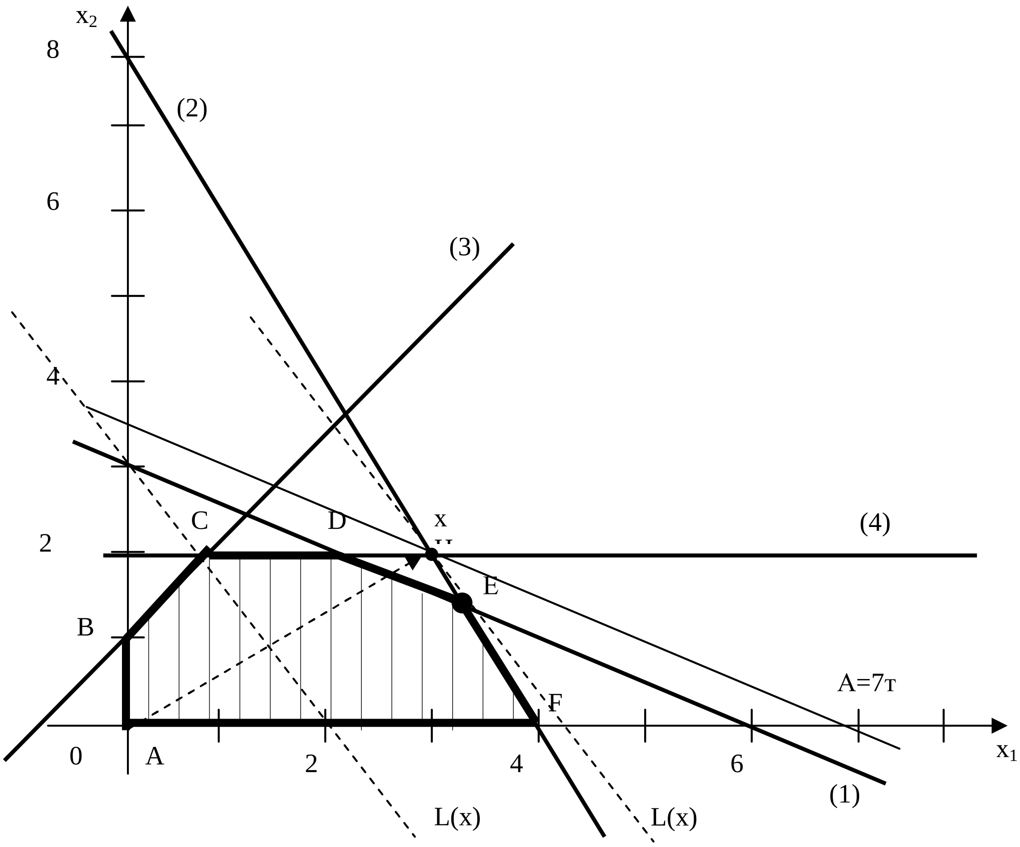

Рисунок 3.2 – Аналіз збільшення ресурсу А

Правило 2. Щоб чисельно визначити максимальну величину запасу дефіцитного ресурсу, що викликає поліпшення оптимального розв'язку, необхідно:

- визначити координати точки (x_1;x_2), у якій відповідне обмеження стає надлишковим;
- підставити координати (x_1;x_2) у ліву частину відповідного обмеження.

Координати точки К(3;2) знайдемо шляхом рішення системи рівнянь прямих (2) і (4). Тобто у цій точці фірма буде робити 3 т фарби 1-го виду і 2 т фарби 2-го виду. Підставимо $x_1 = 3$ і $x_2 = 2$ у ліву частину обмеження (1) і отримаємо максимально припустимий запас інгредієнта А

$$x_1 + 2x_2 = 3 + 2*2 = 7 \text{ [т інгр.А/добу]}.$$

Подальше збільшення запасу інгредієнта А недоцільно, тому що це не змінить ОПР і не призведе до іншого оптимального розв'язку. Дохід від продажу фарб в обсязі, що відповідає точці К, можна розрахувати, підставивши її координати (3;2) до виразу ЦФ

$$3x_1 + 2x_2 = 3*3 + 2*2 = 13 \text{ [тис. грн. /добу]}.$$

Розглянемо доцільність збільшення запасу інгредієнта В. Відповідно до правила 1, обмеження (2) стає надлишковим у точці J, в якій перетинаються пряма (1) і вісь змінної x_1 (рис. 3.3). Багатокутник ABCDJ стає ОПР, а точка J(6;0) - оптимальним розв'язком.

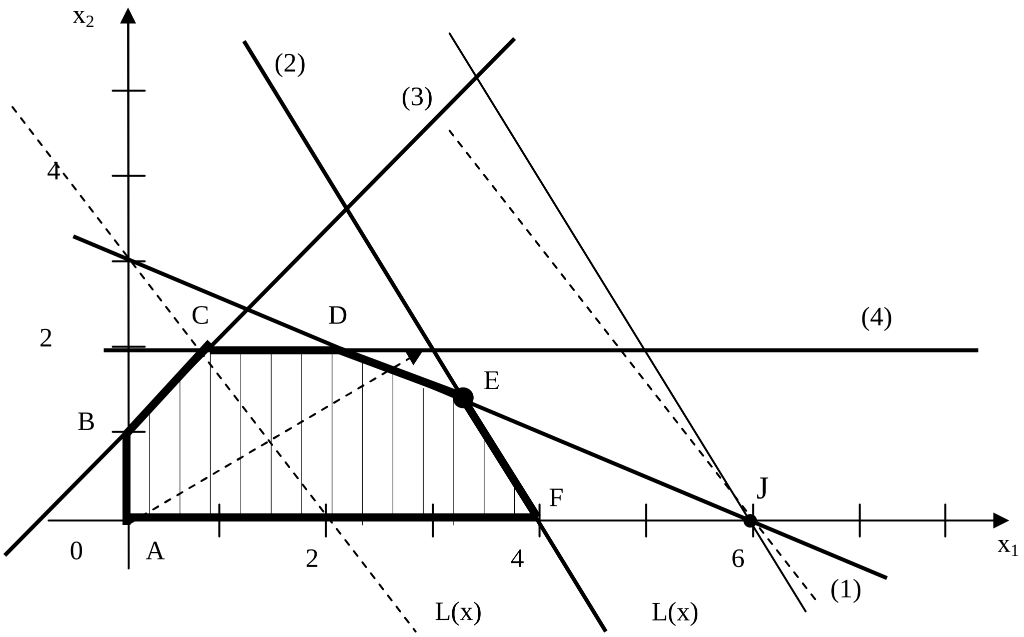

Рисунок 3.3 – Аналіз збільшення ресурсу В

У точці J вигідно виробляти тільки фарбу 1-го виду (6 т на добу). Дохід від продажу при цьому складе

$$3x_1 + 2x_2 = 3 * 6 + 2 * 0 = 18 \text{ [тис. грн. /добу]}.$$

Щоб забезпечити такий режим роботи, відповідно до правила 2, запас інгредієнта В треба збільшити до величини

$$2x_1 + x_2 = 2 * 6 + 0 = 12 \text{ [т інгр.В/добу]}.$$

Обмеження (3) і (4) є незв’язними, тому що не проходять через оптимальну точку Е (рис. 3.3). Відповідні їм ресурси (попит на фарби) є недефіцитними. З економічної точки зору це означає, що в цей момент рівень попиту на фарби безпосередньо не зумовлює обсяг виробництва. Тому деяке його коливання може ніяк не вплинути на оптимальний режим виробництва в точці Е.

Наприклад, збільшення (зменшення) попиту на фарбу 2-го виду відповідатиме переміщенню прямої обмеження $x_2 \leq 2$ (4) вгору (униз). Переміщення прямої (4) вгору ніяк не може змінити точку Е максимуму ЦФ. Переміщення ж прямої (4) униз не впливає на існуюче оптимальне рішення тільки до перетинання із точкою Е (правило 3).

Правило 3. Щоб визначити максимальне зменшення запасу недефіцитного ресурсу, що не змінює оптимального розв'язку, необхідно пересувати відповідну пряму до перетинання з оптимальною точкою.

Правило 4. Щоб чисельно визначити мінімальну величину запасу недефіцитного ресурсу, що не змінює оптимального розв'язку, необхідно підставити координати оптимальної точки до лівої частини відповідного обмеження.

Щоб з'ясувати, до яких меж падіння попиту на фарбу 2-го виду не вплине на виробництво в точці $E\left(3\frac{1}{3};\ \ 1\frac{1}{3}\right)$, використаємо правило 4. Підставимо до лівої частини обмеження (4) координати точки Е, одержимо

$$x_2 = \ \ 1\frac{1}{3}.$$

Тобто граничний рівень, до якого може знизитись попит на фарбу 2-го виду і при якому не зміниться оптимальність отриманого раніше рішення, дорівнює $1\frac{1}{3}$1 т фарби на добу.

Економічний зміст обмеження (3)

$$-x_1+x_2 \leq 1 \text{ [т фарби/добу]}$$

полягає у тому, що обсяг продажів фарби 2-го виду може перевищити обсяг продажів фарби 1-го виду максимум на 1 т. Подальше збільшення продажів фарби 2-го виду порівняно з фарбою 1-го виду графічно відобразиться переміщенням прямої (3) уліво й вгору, але ніяк не вплине на оптимальність точки Е. Але якщо різниця попитів на фарбу 2-го й 1-го видів буде зменшуватися, то пряма (3) буде переміщатися нижче й правіше. Останнім положенням прямої (3), при якому точка Е залишається оптимальною, є перетинання із точкою Е (рис. 3.1). Відповідно до правила 4, підставимо координати точки $E\left(3\frac{1}{3};\ \ 1\frac{1}{3}\right)$ у ліву частину обмеження (3)

$$-x_1 + x_2 = -3\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = -2 \text{ [т фарби].}$$

Різниця попитів на фарбу 2-го й 1-го виду в точці стала від’ємною. Тобто, проходження прямої (3) через точку Е означає, що фарбу 2-го виду будуть купувати у меншому обсязі, ніж фарбу 1-го виду

$$x_1 - x_2 = 2 \text{ [т фарби/добу].}$$

Висновок: максимальне перевищення попиту на фарбу 1-го виду над попитом на фарбу 2-го виду, при якому оптимальне рішення в точці Е не зміниться, становить 2 т фарби в добу.

Результати розв'язання першої задачі аналізу оптимального рішення на чутливість подані в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 - Результати аналізу ресурсів задачі

№	Тип ресурсу	Максимальна зміна ресурсу, $\max\Delta Bi$, т/добу	Максимальна зміна доходу, $\max\Delta L^*$, тис. грн./добу	Цінність додаткової одиниці ресурсу $yi = \max\Delta L^*/\max\Delta Bi$, тис. грн./т
(1)	Дефіцитний	7-6=+1	$13-12\frac{2}{3}=+\frac{1}{3}$	$y_1=\left[\frac{1}{3}\Big/1\right]=\frac{1}{3}$
(2)	Дефіцитний	12-8=+4	$18-12\frac{2}{3}=+5\frac{1}{3}$	$y_2=\left[5\frac{1}{3}\Big/4\right]=1\frac{1}{3}$
(3)	Недефіцитний	-2-1= -3	$12\frac{2}{3}-12\frac{2}{3}=0$	$y_3=[0/(-3)]=0$
(4)	Недефіцитний	$1\frac{1}{3}-2\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$	$12\frac{2}{3}-12\frac{2}{3}=0$	$y_4=\left[0\Big/(-\frac{2}{3})\right]=0$

Друга задача аналізу на чутливість
(вибір ресурсу, збільшення запасу якого є найвигіднішим)

Аналіз таблиці 3.2 показує, що до поліпшення оптимального розв'язку, тобто до збільшення добового доходу, призводить збільшення дефіцитних ресурсів. Для визначення вигідності збільшення цих ресурсів використовують поняття цінності додаткової одиниці і-го ресурсу y_i

$$y_i = \frac{\max \Delta L^*}{\max \Delta B_i},$$

де max ΔL^* - максимальний приріст оптимального значення ЦФ;

max ΔB_i - максимально припустимий приріст обсягу і-го ресурсу.

Наприклад, з таблиці 3.2 випливає, що збільшення добового запасу інгредієнта А [обмеження (1)] на 1 т дозволить отримати додатковий дохід, що дорівнює $y_1 = \frac{1}{3}$ тис.грн./добу, в той час як збільшення запасу В [обмеження (2)] на 1 т принесе $y_2 = 1\frac{1}{3}$ тис.грн./добу. Недефіцитні ресурси мають нульові оцінки, оскільки зміна цих ресурсів не призводить до збільшення доходу.

Висновок: додаткові вкладення в першу чергу треба направляти на збільшення ресурсу В, а лише потім на ресурс А. Змінювати недефіцитні ресурси немає необхідності.

Третя задача аналізу на чутливість (аналіз зміни коефіцієнтів ЦФ)

Зробимо графічний аналіз припустимого діапазону зміни цін. Зміна цін на продукцію, тобто зміна коефіцієнтів ЦФ, подається на графіку обертанням цільовій прямої навколо оптимальної точки. Так, при збільшенні коефіцієнта ЦФ c_1 або зменшенні c_2 цільова пряма обертається за годинниковою стрілкою. При зменшенні c_1 або ж збільшенні c_2 цільова пряма обертається проти годинникової стрілки (рис. 3.4).

За таких поворотів точка E залишатиметься оптимальною доти, поки нахил цільової прямої не вийде за межі, зумовлені нахилами прямих обмежень (1) і (2). Так, наприклад, якщо нахил цільової прямої збіжиться з нахилом прямої (1), оптимальним рішенням будуть точки відрізка DE.

У випадку збігу с прямою (2) оптимальним рішенням будуть точки відрізка EF. Якщо цільова пряма вийде за межі нахилу (1) або (2), то оптимальною точкою стане відповідно *D* або *F*.

Припустимо, що ціна на фарбу 2-го виду не змінюється, тобто зафіксуємо значення цільового коефіцієнта c_2. Проаналізуємо графічно результати зміни значення цільового коефіцієнту c_1, тобто ціни на фарбу 1-го виду. Оптимальне рішення в точці E не буде змінюватися при збільшенні c_1 доти, поки цільова пряма не збіжиться з прямою (2). Аналогічно, оптимальне рішення в точці E не буде змінюватися при зменшенні c_1 доти, поки цільова пряма не збіжиться з прямою (1).

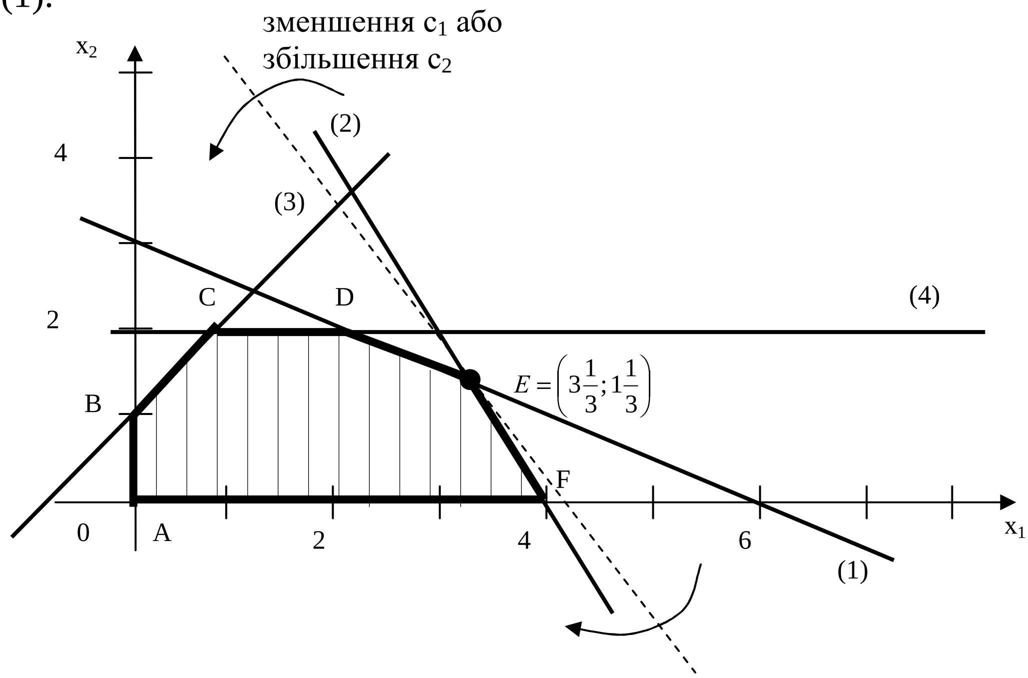

Рисунок 3.4 – Аналіз зміни цін

Аналітичний пошук припустимогодіапазону зміни цін

Збіг у процесі обертання цільової прямої з прямою обмеження означає, що кути їхнього нахилу щодо горизонтальної осі зрівнялися, а виходить, стали рівними тангенси кутів нахилу цих прямих.

Правило 5. Щоб визначити границі припустимого діапазону зміни коефіцієнта ЦФ, наприклад $\min c_1$ і $\max c_1$, необхідно дорівняти тангенс кута нахилу цільової прямої $tg\alpha_{ЦФ}$ по черзі до тангенсів кутів нахилу прямих зв’язних обмежень, наприклад $tg\alpha_{(1)}$ і $tg\alpha_{(2)}$ (рис. 3.5 і 3.6).

Визначимо наскільки максимально може знизитися ціна на фарбу 1-го виду, не змінюючи оптимальну точку E. Для цього скористуємось правилом 5 і формулою розрахунку тангенса кута нахилу прямої (рис. 3.7).

Визначимо тангенси кутів нахилу:

- цільової прямої $L(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$, з огляду на те, що $c_2=2$ фіксоване

$$tg\alpha_{C\Phi} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1}{2};$$

- зв'язного обмеження $x_1 + 2x_2 \leq 6$ (1)

$$tg\alpha_{(1)} = \frac{1}{2};$$

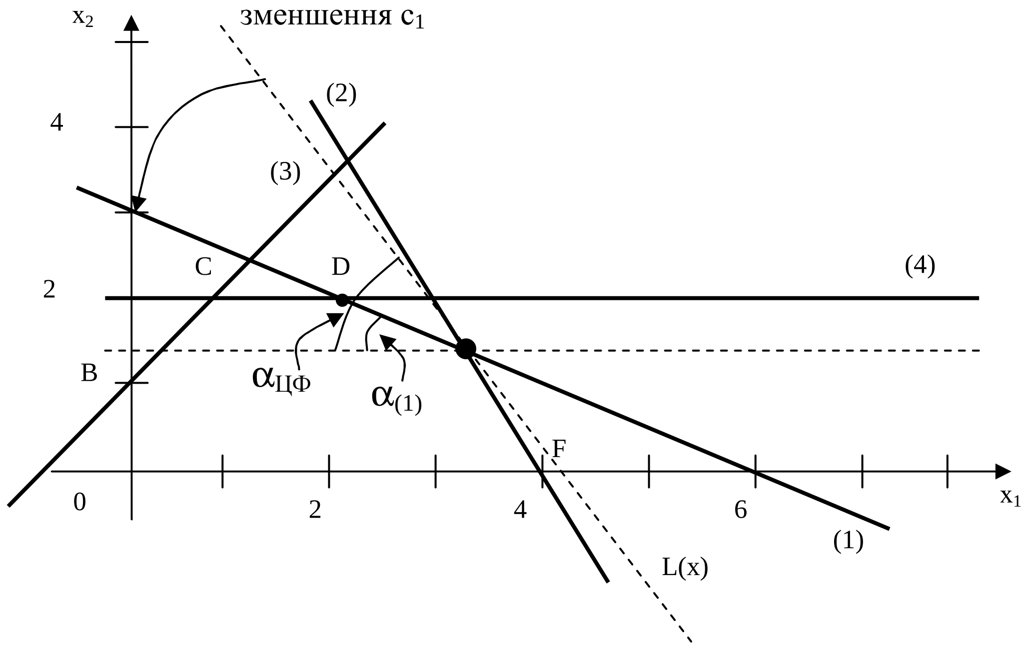

Рисунок 3.5 – Визначення мінімуму c_1

- зв'язного обмеження $2x_1 + x_2 \leq 8$ (2)

$$tg\alpha_{(2)} = \frac{2}{1} = 2.$$

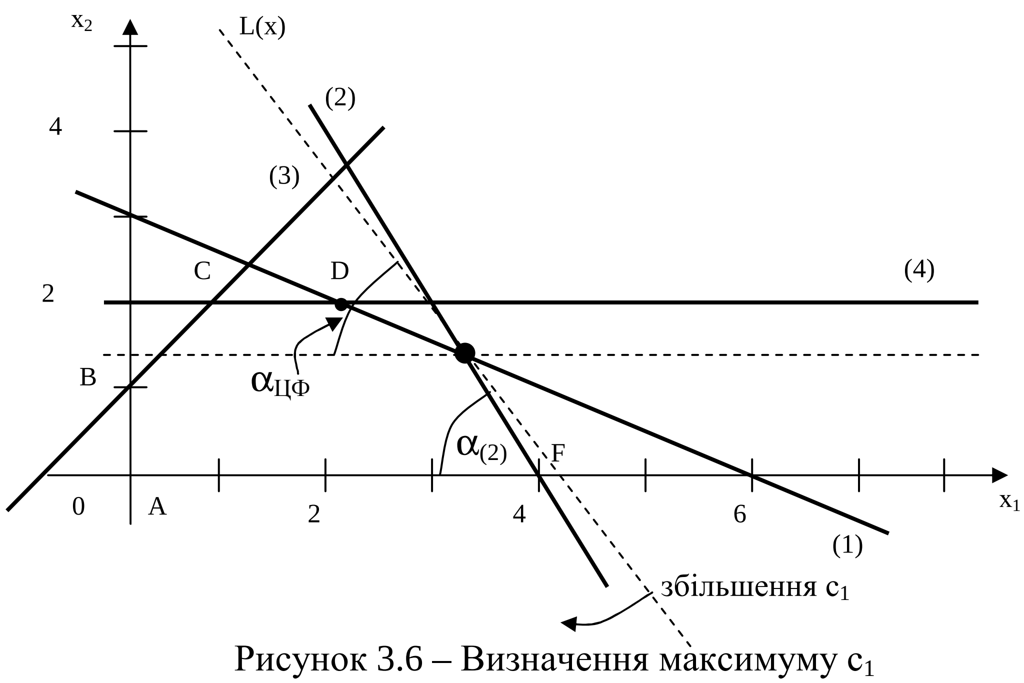

Рисунок 3.6 – Визначення максимуму c_1

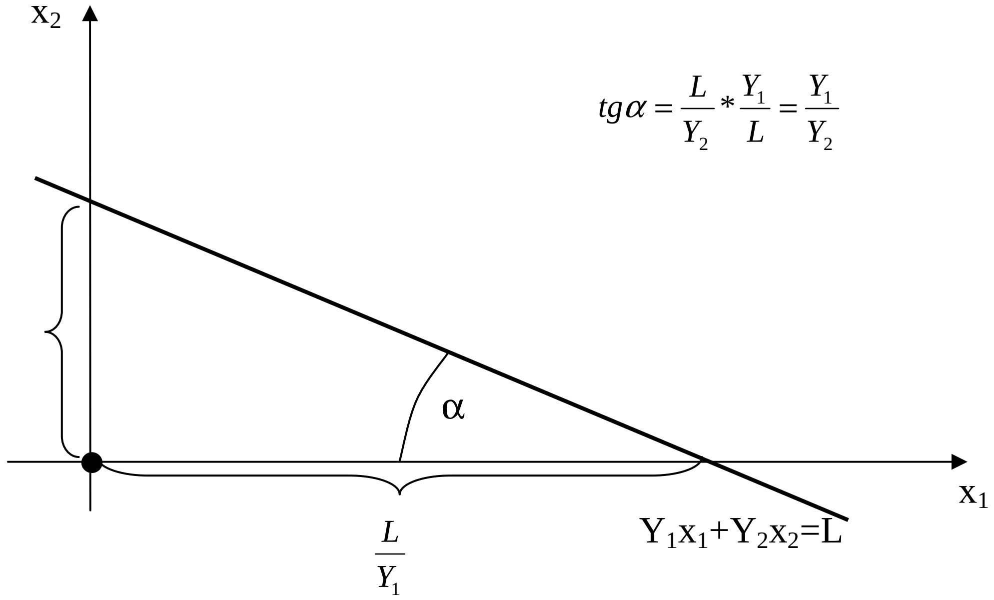

Рисунок 3.7 – Визначення тангенса кута нахилу tgα прямої $Y_1x_1 + Y_2x_2 = L$

Для знаходження min c_1 цільова пряма має збігтися з прямою (1) (рис. 3.5):

$$tg\alpha_{ЦФ}=tg\alpha_{(1)};$$

$$\frac{c_1}{2} = \frac{1}{2};\ \min c_1=1\ [\text{тис. грн./т}].$$

Для знаходження maxc_1 цільова пряма має збігтися із прямою (2) (рис. 3.6):

$$tg\alpha_{ЦФ}=tg\alpha_{(2)};$$

$$\frac{c_1}{2} = 2;\ \max c_1 = 4\ [\text{тис.грн./т}].$$

Отже, якщо ціни на фарбу першого виду коливатимуться в межах $1<c_1<4$ тис.грн./т, то оптимальне рішення задачі не зміниться.

З проведених розрахунків та їхньої графічної ілюстрації випливає, що якщо ціна на фарбу першого виду стане меншою за 1 тис.грн./т ($c_1<1$), найбільш вигідним буде виробництво фарб у точці D (рис. 3.5). При цьому загальне споживання інгредієнту B знизиться, що призведе до його недефіцитності [ресурс (2)], а дефіцитними будуть ресурси (1) і (4).

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Курс «Оптимізаційні методи і моделі» відповідно до навчальної програми вивчається у 3 семестрі студентами 2-го курсу. Обсяг самостійної роботи студента, який навчається за заочною формою, становить 130 годин. У методичних вказівках для кожної теми зазначено обсяг витрат часу на вивчення, що відповідає програмі курсу. Наприкінці методичних вказівок наведено список основних і додаткових підручників, які рекомендується використовувати. Кожна тема супроводжується посиланнями на відповідні їй сторінки підручників.

Після вивчення теоретичного матеріалу треба дати відповіді на контрольні запитання з теми, а також вирішити задачі, пропоновані для самостійного розв'язання. Для полегшення роботи перед задачами для самостійного розв'язання наведено розв'язання аналогічних задач.

Мета вивчення дисципліни - формування системи знань щодо методології та інструментарію з побудови і використання оптимізаційних економіко-математичних моделей.

Завдання – оволодіння необхідним обсягом теоретичних і практичних знань з питань постановки економічних задач, побудови їх оптимізаційних моделей, методів розв’язання та аналізу з метою використання під час прийняття рішень.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен:

знати: основні поняття і термінологію варіаційних задач на знаходження екстремуму функції на множині припустимих рішень, класифікацію оптимізаційних моделей та методів, прийоми побудови оптимізаційних моделей, послідовність та зміст основних етапів розв’язання варіаційних економічних задач, методи пошуку оптимального плану лінійних та нелінійних оптимізаційних моделей;

вміти: здійснювати постановку оптимізаційних економічних задач та формувати їх математичні моделі, давати економічну інтерпретацію змінним лінійної моделі та проводити післяоптимізаційний аналіз оптимальних рішень щодо оцінки дефіцитності ресурсів, рентабельності та стійкості оптимального плану, використовувати методи оптимізації нелінійних моделей на основі використання множників Лагранжа та випуклого програмування.

Змістовий модуль 1. Особливості і сфери застосування оптимізаційних методів і моделей в економіці. Класифікація оптимізаційних методів. Лінійні оптимізаційні моделі

Тема 1 ПРЕДМЕТ, ОСОБЛИВОСТІ І СФЕРИ ВИКОРИСТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МЕТОДІВ В ЕКОНОМІЦІ. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ. (6 годин)

Предмет дисципліни. Задачі економічного вибору.

Поняття про моделювання.

Основні поняття оптимізаційних задач і моделей.

Література: [1] с. 7-14; [2] с. 4-11; [4] с. 21-33.

Контрольні запитання

1. Предмет і зміст курсу «Оптимізаційні методи і моделі», у чому полягають особливості оптимізаційних задач?
2. Сформулюйте оптимізаційну задачу у найбільш загальному вигляді.
3. Які прийнято виділяти загальні етапи в розв'язанні оптимізаційних задач?
4. Чому до оптимізаційних задач не завжди застосовують класичні методи пошуку умовного екстремуму функції?
5. Що являє собою цільова функція оптимізаційної задачі?
6. Дайте визначення понять: план, припустимий план, оптимальний план, розв’язок задачі.
7. На які класи поділяють моделі і методи розв'язання оптимізаційних задач?

Тема 2 ЛІНІЙНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ. (18 годин)

Загальна форма задачі лінійного програмування (ЗЗЛП).

Основні властивості ЗЗЛП та її перша геометрична інтерпретація.

Канонічна форма задачі лінійного програмування (КЗЛП).

Симплекс-метод.

Література: [1] с. 18-69; [2] с. 29-55; [4] с. 95-126.

Контрольні запитання

1. Запишіть загальну математичну модель задачі лінійного програмування.
2. Як звести задачу лінійного програмування до канонічної форми?
3. Які форми використовують для запису лінійних оптимізаційних задач?
4. Поясніть на прикладі геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування.
5. Який розв’язок лінійної оптимізаційної моделі називається припустимим?
6. Поясніть, яка область розв’язків називається областю припустимих планів.
7. Який план лінійної оптимізаційної моделі називається опорним?
8. Який опорний план називається невиродженим?

9. Сформулюйте основні аналітичні властивості розв’язків лінійних оптимізаційних задач.

10. Які лінійні оптимізаційні задачі можна вирішувати графічним методом?

11. За яких умов лінійна оптимізаційна задача з необмеженою областю припустимих планів має розв’язок?

12. Поясніть сутність алгоритму графічного методу.

13. Для розв'язання яких оптимізаційних задач застосовується симплексний метод?

14. Поясніть сутність алгоритму симплексного методу.

15. Сформулюйте умови оптимальності розв’язку під час розв’язання задачі симплексним методом.

16. Як вибрати напрямний вектор-стовпець?

17. Як вибрати розв'язний елемент?

18. Поясніть сутність методу Жордана-Гаусса.

19. Поясніть сутність методу штучного базису.

Приклад 2.1. Власні кошти банку разом з депозитами становлять 100 млн.грн. Не менше 35 млн.грн. з них повинні бути розміщені в кредитах, прибутковість яких становить 15%. Кредити є неліквідними активами банку, тому що у випадку непередбаченої потреби в готівці обернути їх у гроші без істотних втрат неможливо. Інша справа - цінні папери, особливо державні. Їх можна в будь-який момент продати, діставши деякий прибуток або, у всякому разі, без великого збитку. Тому існує правило, відповідно до якого комерційні банки повинні купувати в певній пропорції ліквідні активи - цінні папери, щоб компенсувати неліквідність кредитів. Нехай у цьому разі цінні папери повинні становити не менше 30% коштів, розміщених у кредитах і цінних паперах, а їхня прибутковість становить 10%.

Скласти економіко-математичну модель задачі, що дозволяє сформувати оптимальний пакет активів банку, тобто встановити, яку частину власних коштів банку треба розмістити в кредитах, а яку вкласти в цінні папери для того, щоб дістати максимальний прибуток. Вирішити задачу графічним способом.

Розв'язання

Завдання полягає у визначенні найвигіднішого для банку розміщення власних коштів і депозитів у кредитах і цінних паперах, при якому банк отримає за розглянутий проміжок часу найбільший прибуток. Позначимо x_1 кошти, розміщені в кредитах, x_2 – кошти, вкладені в цінні папери.

Значення x_1 і x_2, насамперед, повинні задовольняти балансовому обмеженню, що враховує можливості банку:

$$x_1+x_2 \leq 100.$$

Обмеження по кредитах виразиться записом

$$x_1 \geq 35.$$

Цінні папери повинні становити не менше 30% коштів банку. Ця вимога виразиться обмеженням

$$x_2 \geq 0,3*(x_1+x_2).$$

За змістом змінних x_1 і x_2 вони повинні бути невід'ємними:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Метою задачі є отримання найбільшого прибутку. З урахуванням прибутковості прибуток від x_1 млн. грн., розміщених у кредитах складе $0,15x_1$, а від x_2 млн. грн., вкладених у цінні папери, дорівнюватиме $0,1x_2$ млн. грн. Таким чином, цільова функція запишеться у вигляді

$$L = 0,15x_1 + 0,1x_2 \to \max.$$

Отримана математична модель виглядає так:
Знайти такі x_1 і x_2, що перетворюють на максимум цільову функцію

$$L = 0,15x_1 + 0,1x_2 \to \max$$

і задовольняють обмеженням

$$x_1+x_2 \leq 100.$$
$$x_1 \geq 35.$$
$$x_2 \geq 0,3*(x_1+x_2).$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Побудуємо область припустимих розв'язків (рис. 2.1).

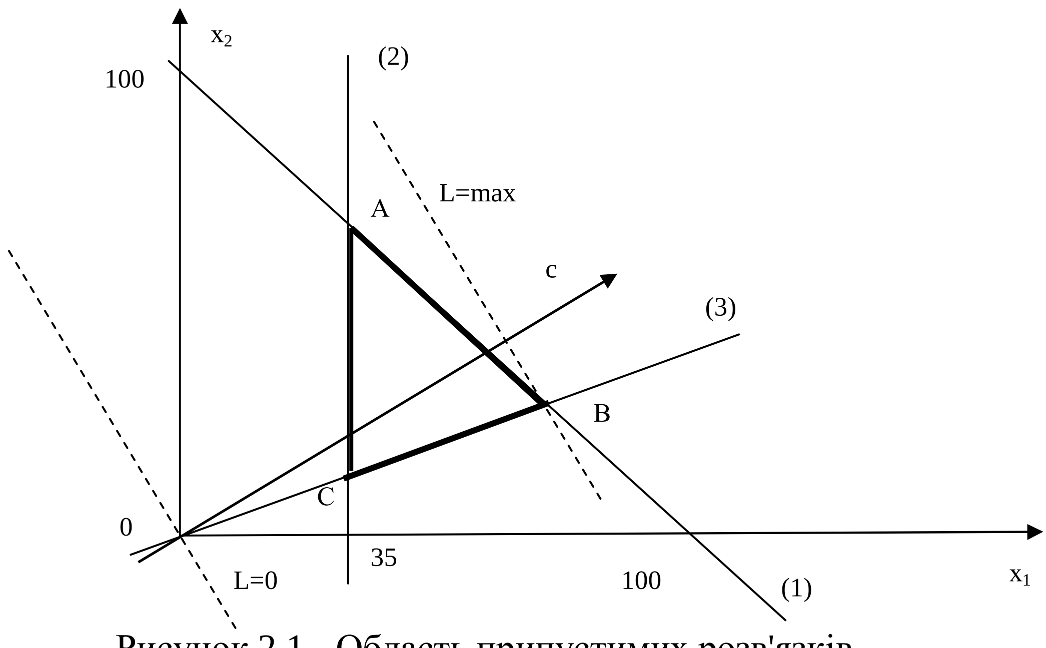

Рисунок 2.1 - Область припустимих розв'язків

Перше обмеження – пряма, що проходить через точки з координатами (0,100) і (100,0). Друге обмеження – пряма $x_1 = 35$. Третє обмеження - пряма, що проходить через точки з координатами (0,0) і, наприклад, (35,15). Область припустимих розв'язань - трикутник ABC. Побудуємо градієнт цільової функції, що вказує напрямок найшвидшого її зростання, вектор c=(0,15; 0,1). Опорна пряма L=0, що проходить через початок координат, перпендикулярна вектору c(0,15; 0,1). Переміщуючи опорну пряму в напрямку, зазначеному вектором c, знаходимо, що оптимальний план лежить у точці B.

Для знаходження її координат вирішимо систему рівнянь:

$$x_1+x_2 = 100,$$
$$x_2 = 0{,}3*(x_1+x_2),$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 100 \\ x_2 = 0{,}3*(x_1 + x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = 100 - x_1 \\ 100 - x_1 = 0{,}3*(x_1 + 100 - x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 70 \\ x_2 = 30 \end{array}\right\}.$$

Таким чином, для одержання максимального прибутку банку необхідно розмістити в кредитах 70 млн.грн. і 30 млн.грн. вкласти у цінні папери. При цьому максимальний прибуток становитиме

$$L = 0{,}15*70 + 0{,}1*30 = 13{,}5 \text{ млн.грн.}$$

Приклад 2.2. На підприємстві є можливість випускати чотири види продукції $П_j$. При її виготовленні використовуються ресурси $Р_1$, $Р_2$ і $Р_3$. Розміри припустимих витрат ресурсів обмежені відповідно величинами 34, 16 і 22 одиниць. Видаток ресурсу $Р_i$ ($i = \overline{1{,}3}$) на одиницю продукції $П_j$ ($j = \overline{1{,}4}$) заданий матрицею

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Планова ціна одиниці продукції $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ відповідно дорівнює 18, 14, 15, 10 грош.од., а оптова ціна – 25, 17, 19, 12 грош.од. Скласти економіко-математичну модель задачі, що дозволяє знайти збалансований по ресурсах план випуску продукції, що забезпечує підприємству максимальний прибуток. Симплексним методом знайти оптимальний план випуску продукції за видами, дати змістовну відповідь, розкривши економічний зміст усіх змінних, які беруть участь у розв'язанні задачі.

Розв'язання

Позначимо x_1, x_2, x_3, x_4 кількість одиниць продукції відповідно $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, запланованої до випуску. Прибуток підприємства є різницею між його доходом і витратами. Визначимо величину прибутку для кожного виробу:

для $П_1$ 25-18=7 грош. од.,
для $П_2$ 17-14=3 грош. од.,
для $П_3$ 19-15=4 грош. од.,
для $П_4$ 12-10=2 грош. од.

Тоді цільова функція виразиться в такий спосіб:

$$L = 7x_1+3x_2+4x_3+2x_4 \rightarrow \max.$$

Складемо обмеження, зумовлені видатком ресурсів:

$$2x_1+4x_2+1x_3+5x_4 \le 34,$$
$$4x_1+1x_2+4x_3+1x_4 \le 16,$$
$$2x_1+3x_2+1x_3+2x_4 \le 22.$$

За змістом задачі змінні x_1, x_2, x_3, x_4 не можуть виражатися невід’ємними числами. Введемо обмеження

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Таким чином, модель задачі формулюється так:
Знайти такі x_1, x_2, x_3, x_4, які перетворюють на максимум цільову функцію

$$L = 7x_1+3x_2+4x_3+2x_4 \to \max$$

і задовольняють обмеженням

$$2x_1+4x_2+1x_3+5x_4\leq 34,$$
$$4x_1+1x_2+4x_3+1x_4\leq 16,$$
$$2x_1+3x_2+1x_3+2x_4\leq 22,$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0\ x_3\geq 0,\ x_4\geq 0.$$

Перш ніж вирішувати задачу лінійного програмування симплексним методом, її модель приводять до канонічної форми. Основною ознакою канонічної форми є запис обмежень задачі у вигляді рівностей. Щоб перетворити нерівності на еквівалентні рівняння, введемо в ліві частини нерівностей додаткові (балансові) невід'ємні змінні x_5, x_6, x_7, які за змістом є різницями між правими й лівими частинами нерівностей. У результаті модель буде записана так:

знайти такі x_j, які перетворюють на максимум функцію

$$L = 7x_1+3x_2+4x_3+2x_4 \to \max$$

і задовольняють обмеженням

$$2x_1+4x_2+1x_3+5x_4+ x_5\leq 34,$$
$$4x_1+1x_2+4x_3+1x_4+ x_6\leq 16,$$
$$2x_1+3x_2+1x_3+2x_4+ x_7\leq 22,$$
$$x_j\geq 0.$$

Відзначимо також, що додаткові змінні x_5, x_6, x_7 мають цілком визначений економічний зміст – це не використовувана при даному плані виробництва кількість сировини того або іншого виду (можливі залишки ресурсів P_1, P_2, P_3), їх ще називають резервами.

Аналізуючи канонічну модель, зазначимо, що кожна змінна x_5, x_6, x_7 входить тільки в одне з рівнянь системи. Ця обставина свідчить про те, що змінні x_5, x_6, x_7, є базисними, а інші x_1, x_2, x_3, x_4 – вільними.

Складемо симплекс-таблицю 2.1, що відповідає початковому опорному плану

$$x= (0, 0, 0, 0, 34, 16, 22)$$

за якого цільова функція $L = 0$.

Таблиця 2.1 - Симплекс-таблиця, що відповідає початковому опорному плану

Базис	**$C_{jбаз}$**	**C_j**	**7**	**3**	**4**	**2**	**0**	**0**	**0**
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_5	0	34	2	4	1	5	1	0	0
A_6	0	16	4	1	4	1	0	1	0
A_7	0	22	2	3	1	2	0	0	1
L_j		0	0	0	0	0	0	0	0
Δ_j			-7	-3	-4	-2	0	0	0

Оскільки в рядку Δ_j є від'ємні елементи, план не є оптимальним. Перш ніж перейти до нового опорного плану, визначимо, який вектор треба вводити до базису в першу чергу. Для цього визначимо добутки Δ_j*Θ_j і виберемо найбільший за абсолютною величиною.

$$\Theta_1 = \min(34/2,\ 16/4,\ 22/2) = 4,$$
$$\Theta_2 = \min(34/4,\ 16/1,\ 22/3) = 7{,}33,$$
$$\Theta_3 = \min(34/1,\ 16/4,\ 22/1) = 4,$$
$$\Theta_4 = \min(34/5,\ 16/1,\ 22/2) = 6{,}8,$$
$$\Delta_1{*}\Theta_1 = -7{*}4 = -28,\ \Delta_2{*}\Theta_2 = -3{*}7{,}33 = -22,$$
$$\Delta_3{*}\Theta_3 = -4{*}4 = -16,\ \Delta_4{*}\Theta_4 = -2{*}6{,}8 = -13{,}6.$$

Найбільшим за абсолютною величиною є $\Delta_1{*}\Theta_1 = -28$. Будемо вводити до базису вектор A_1, і виводити з базису вектор A_6.

Складемо нову симплекс-таблицю 2.2.

Таблиця 2.2 – Покращення початкового опорного плана

Базис	**$C_{jбаз}$**	**C_j**	**7**	**3**	**4**	**2**	**0**	**0**	**0**
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_1	7	4	1	0,25	1	0,25	0	0,25	0
A_5	0	26	0	3,50	-1	4,50	1	-0,50	0
A_7	0	14	0	2,50	-1	1,50	0	-0,50	1
L_j		28	7	1,75	7	1,75	0	1,75	0
Δ_j			0	-1,25	3	-0,25	0	1,75	0

Отриманий новий опорний план *x*= (4; 0; 0; 0; 26; 0; 14), при якому цільова функція *L* = 28, тобто збільшилась.

Перевірка плана на оптимальність показує, що в рядку Δ_j є від’ємні елементи, тобто цей план також не є оптимальним. Визначимо, який вектор треба вводити до базису для переходу до нового опорного плану. Визначимо добутки Δ_j*Θ_j:

$$\Theta_2 = \min(4{*}4,\ 26{*}2/7,\ 14{*}2/5) = 5{,}6,$$
$$\Theta_4 = \min(4{*}4,\ 26{*}4/18,\ 14{*}4/6) = 5{,}78,$$
$$\Delta_2{*}\Theta_2 = -1{,}25{*}5{,}6 = -7,\ \Delta_4{*}\Theta_4 = -1/4{*}5{,}78 = -1{,}445.$$

Будемо вводити до базису вектор A_2, а виводити з базису вектор A_7. Складемо нову симплекс-таблицю 2.3.

Таблиця 2.3 - Симплекс-таблиця, що містить оптимальний план

Базис	**$C_{jбаз}$**	**C_j**	**7**	**3**	**4**	**2**	**0**	**0**	**0**
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_2	3	5,60	0	1	-0,40	0,60	0	-0,20	0,40
A_1	7	2,60	1	0	1,10	0,10	0	0,30	-0,10
A_5	0	6,40	0	0	0,40	2,40	1	0,20	-1,40
L_j		35,00	7	3	6,50	2,50	0	1,50	0,50
Δ_j			0	0	2,50	0,50	0	1,50	0,50

Отримано новий план *x*= (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0), при якому значення цільової функції *L* = 35.

Перевірка отриманого плану на оптимальність показує, що всі $\Delta_j \geq 0$, отже план є оптимальним. Відповідно до цього плану треба виготовити 2,6 од.

продукції $П_1$ і 5,6 од. продукції $П_2$; продукцію $П_3$ і $П_4$ виготовляти не слід. При цьому підприємство дістане максимальний прибуток в розмірі 35 грош. од. Залишаться невикористаними 6,4 од. ресурсу $Р_1$, а ресурси $Р_2$ і $Р_3$ будуть витрачені цілком.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 2.1. Для збереження здоров'я й працездатності людина повинна у добу споживати не менш 20 умовн.од. білків, не менш 40 умовн. од. жирів і не менш 88 умовн. од. вуглеводів. Для простоти припустимо, що є всього два види продуктів $П_1$ і $П_2$, вартість одиниці кожного з них дорівнює відповідно 6 і 10 грош. одиниць. Вміст названих живильних речовин у різних продуктах харчування не однаковий. Припустимо, що в одиниці продукту $П_1$ міститься 4 умовн. од. білків, 4 умовн. од. жирів і 4 умовн. од вуглеводів, а в одиниці продукту $П_2$ відповідно 1, 3 і 15 умовн. од. тих же живильних речовин. Потрібно скласти економіко-математичну модель задачі, що дозволяє сформувати з продуктів $П_1$ і $П_2$ добову дієту, що, з однієї сторони, містила б білків, жирів і вуглеводів не менш науково обґрунтованих норм і разом з тим вимагала б мінімальних витрат. Вирішити задачу графічним способом. (Відповідь: $x_1 = 7$, $x_2=4$).

Задача 2.2. Для виробництва трьох видів продуктів $П_1$, $П_2$, $П_3$ використовуються чотири види ресурсів $Р_1$, $Р_2$, $Р_3$, $Р_4$. Добовий видаток ресурсів на 1 одиницю кожного продукту та їхній денний запас наведені в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4 – Вихідні дані

Ресурси	**Витрата ресурсу на 1 одиницю продукту**			**Запас, од.**
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
$Р_1$	1	1,25	0,8	2500
$Р_2$	0,4	0,25	0,5	1000
$Р_3$	1	1,6	1,5	4000
$Р_4$	0,4	0	0	800

Ціна 1 од. продукту $П_1$ становить 58 грош.од., продукту $П_2$ - 40 грош.од., продукту $П_3$ - 60 грош.од. Яку кількість продуктів кожного виду необхідно виробляти, щоб дохід від реалізації був максимальним?
(Відповідь: x = (2000; 211,8; 294; 0; 0; 1220; 0), L*=142117,6).

Задача 2.3. Графічним методом визначити оптимальні плани наступних задач лінійного програмування:

а)

$$\min(\max)(x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_2 \ge 1 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0 \end{cases};$$

б)

$$x_1 - 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases};$$

в)

$$\min(\max)(x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30 \\ -x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 10 \\ x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0 \end{cases};$$

г)

$$\min(\max)(x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ -x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Задача 2.4. Фірма планує організацію виробництва двох видів продукції A і B. Призначений для цього інвестиційний фонд обмежений сумою 5000 дол. Якщо буде потреба цю суму можна збільшити на 10000 дол. за рахунок банківського кредиту, процентна ставка за використання якого становить 20%. Витрати, пов'язані з виробництвом одиниці продукції A, дорівнюють 50 дол., а одиниці продукції B - 100 дол. Очікуваний прибуток фірми від реалізації одиниці продукції A становить 100 дол., а одиниці продукції B - 150 дол. Фірма має попереднє замовлення на виробництво не менш ніж 100 од. продукції A і 50 од. продукції B.

Визначити обсяги виробництва продукції кожного виду, які забезпечать фірмі найбільший прибуток з урахуванням виплат за кредит.

Задача 2.5. Фірма має капітал 300000 дол., що може використовуватися для фінансування проектів 1 і 2. Реалізація проекту 2 гарантує одержання щорічного прибутку в розмірі 1 дол. на кожний вкладений долар. Проект 1 гарантує прибуток у розмірі 3 дол. на кожний інвестований долар, але через два роки. У випадку фінансування проекту 1 період інвестицій повинен бути кратним двом рокам.

Визначити, як варто розпорядитися капіталом, щоб максимізувати загальний дохід, що може одержати фірма через три роки після початку інвестицій.

Задача 2.6. Вирішити симплексним методом наступні задачі:

а)

$$\max(5x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \ge -3 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases};$$

б)

$$\min(x_1 - 3x_2 + x_3)$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \le -2 \\ 2x_2 + 4x_3 \le 7 \\ x_j \ge 0;\ j = \overline{1,3} \end{cases};$$

в)

$$\max(-x_1 - x_2 + 3x_3)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 \ge -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 8 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3} \end{cases};$$

г)

$$\min(-x_1 - 3x_2 + 2x_3)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_j \ge 0;\ j = \overline{1,3} \end{cases}.$$

Тема 3 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА (28 годин)

Транспортна задача в матричній постановці та її властивості.

Методи побудови опорного плану.

Метод потенціалів.

Випадок виродження.

Транспортна задача за критерієм часу.

Література: [1] с. 118-138;[2] с. 134-169; [4] с. 193-216.

Контрольні запитання

1. Поясніть економічну та математичну постановку транспортної задачі.
2. Чим відрізняється транспортна задача від загальної лінійної оптимізаційної моделі?
3. Сформулюйте необхідну й достатню умову існування розв’язку транспортної задачі.
4. Поясніть властивості опорних планів транспортної задачі.
5. Чим відрізняється відкрита транспортна задача від закритої?
6. Як перетворити відкриту транспортну задачу на закриту?
7. Які Ви знаєте методи побудови опорного плану?
8. Побудуйте невироджений опорний план за методами північно-західного кута, мінімального елемента та подвійної переваги для наступної транспортної задачі:

$$a_i = 50,70,90; \quad b_j, = 70,65,70, 75,$$

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 4\,7\,9\,7 \\ 2\,4\,5\,8 \\ 6\,3\,9\,5 \end{bmatrix}.$$

Порівняйте ці плани.

9. Що означає «виродження» опорного плану? Як від нього позбутися?
10. Назвіть етапи розв'язання ТЗ методом потенціалів.
11. Як обчислюють потенціали?
12. Поясніть умову оптимальності транспортної задачі.

Приклад 3.1. На ділянках $У_1$, $У_2$, $У_3$ площею 300, 500 і 400 га відповідно можуть вирощуватися сільськогосподарські культури $К_1$, $К_2$, $К_3$ і $К_4$. Планове завдання передбачає збір цих культур у кількостях відповідно по 6000, 1500, 225 і 1250 тонн. Матриця

$$\begin{bmatrix} 20 & 50 & 24 & 10 \\ 25 & 40 & 10 & 20 \\ 30 & 15 & 20 & 15 \end{bmatrix}$$

характеризує прибуток у грош.од. від реалізації 1 тонни при вирощуванні на ділянці $У_i$ (i=1,3) культури $К_j$ (j=1,4). Урожайність різних культур не залежить від ділянки посіву й становить 20, 30, 15 і 50 ц/га. Скласти економіко-математичну модель задачі, користуючись якою можна знайти план посіву сільськогосподарських культур, який максимізує прибуток. Методом потенціалів знайти такий розподіл культур $К_1$, $К_2$, $К_3$ і $К_4$ за ділянками $У_1$, $У_2$ і $У_3$, при якому прибуток досягає найбільшого значення. Знайти оптимальний розподіл культур за ділянками при додатковій умові, що в майбутньому році використання ділянки $У_3$ під культуру $К_1$ агрономічною службою не рекомендовано. Встановити, на скільки зміниться величина максимального прибутку при дотриманні додаткового обмеження.

Розв'язання

Позначимо x_{ij} площу (у га), що передбачається зайняти на ділянці $У_i$ (i=1,3) культурою $К_j$ (j=1,4). З урахуванням урожайності культур для виконання планового завдання під культуру $К_1$ треба відвести 6000/20=300 га, під культуру $К_2$ – 15000/30=500 га, під культуру $К_3$ – 2250/15=150 га й під культуру $К_4$ – 12500/50=250 га. Усього буде потрібно 300+500+150+250=1200 га. Загальна посівна площа також становить 300+500+400=1200 га.

Умови повного використання наявних посівних площ на всіх ділянках занесемо у таблицю 3.1.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані

Площа ділянки $У_i$	**Площа, займана під культуру $К_j$**			
	$К_1$ (300)	$К_2$ (500)	$К_3$ (150)	$К_4$ (250)
$У_1$ (300)	20 x_{11}	50 x_{12}	24 x_{13}	10 x_{14}
$У_2$ (500)	25 x_{21}	40 x_{22}	10 x_{23}	20 x_{24}
$У_3$ (400)	30 x_{31}	15 x_{32}	20 x_{33}	15 x_{34}

Отримаємо обмеження з використання посівних площ:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=300,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=500,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=400$$

і умови повної зайнятості площ відповідними культурами

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=300,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=500,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=150,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=250,$$

умови невід'ємності змінних

$$x_{ij} \geq 0, \ (i=1,3;\ j=1,4).$$

Цільова функція задачі має вигляд

$$L = 20x_{11}+50x_{12}+24x_{13}+10x_{14}+25x_{21}+40x_{22}+$$
$$+10x_{23}+20x_{24}+30x_{31}+15x_{32}+20x_{33}+15x_{34} \rightarrow \max.$$

Таким чином, задача збігається до знаходження розв'язання системи лінійних рівнянь, яке доставляє максимум цільової функції.

Аналізуючи систему рівнянь, зазначимо, що вона має всі особливості транспортної задачі. Отже її можна розв'язати, наприклад, методом потенціалів. Оскільки в розглянутому випадку має місце задача максимізації, ознакою оптимального плану буде відсутність у заключній таблиці вільних кліток з додатними оцінками.

Побудуємо початковий опорний план методом найбільшого елемента (табл. 3.2).

Таблиця 3.2 - Початковий опорний план

Площа ділянки $У_i$	**Площа, займана під культуру $К_j$**			
	$К_1$ (300)	**$К_2$ (500)**	**$К_3$ (150)**	**$К_4$ (250)**
$У_1$ (300)	20	50 300	24	10
$У_2$ (500)	25 300 -	40 200	10	20 +
$У_3$ (400)	30 0 +	15	20 150	15 250 -

Для дослідження плану на оптимальність треба знайти оцінки вільних кліток. Для цього слід знайти потенціали U_i і V_j, які визначаються в результаті вирішення системи рівнянь, складених по зайнятих клітках:

$$U_1 + V_2 = 50,$$
$$U_2 + V_1 = 25,$$
$$U_2 + V_2 = 40,$$
$$U_3 + V_1 = 30,$$
$$U_3 + V_3 = 20,$$
$$U_3 + V_4 = 15.$$

Отримаємо:

$$V_1=30,$$
$$U_1=5, \quad V_2=45,$$
$$U_2=-5, \quad V_3=20,$$
$$U_3=0, \quad V_4=15.$$

Тепер знайдемо оцінки вільних кліток:

$$\Delta_{11} = c_{11} - (U_1 + V_1) = 20\text{-}(5+30) = -15,$$
$$\Delta_{13} = c_{13} - (U_1 + V_3) = 24\text{-}(5+20) = -1,$$
$$\Delta_{14} = c_{14} - (U_1 + V_4) = 10\text{-}(5+15) = -10,$$
$$\Delta_{23} = c_{23} - (U_2 + V_3) = 10\text{-}(-5+20) = -5,$$
$$\Delta_{24} = c_{24} - (U_2 + V_4) = 20\text{-}(-5+15) = 10,$$
$$\Delta_{32} = c_{32} - (U_3 + V_2) = 15\text{-}(0+45) = -30.$$

Оскільки серед оцінок є додатна (Δ_{24} = 10), план не оптимальний, і його можна поліпшити, займаючи клітку (У$_2$,К$_4$). Щоб визначити, яку площу x_{24} треба відвести в новому опорному плані на ділянці У$_2$ під культуру К$_4$, побудуємо замкнутий контур для клітки (У$_2$,К$_4$) і визначимо

$$\lambda=\min(x_{ij})=\min(300,\ 250)=250.$$

Додаючи λ в «додатних» клітках і віднімаючи у «від'ємних», отримуємо новий опорний план (табл. 3.3)

Таблиця 3.3 - Наступний опорний план

Площа ділянки У$_i$	**Площа, займана під культуру К$_j$**			
	К$_1$ (300)	**К$_2$ (500)**	**К$_3$ (150)**	**К$_4$ (250)**
У$_1$ (300)	20	50 300	24	10
У$_2$ (500)	25 50	40 200	10	20 250
У$_3$ (400)	30 250	15	20 150	15

Перевіримо план на оптимальність. Потенціали зайнятих кліток:

$$U_1 + V_2 = 50,$$
$$U_2 + V_1 = 25,$$
$$U_2 + V_2 = 40,$$
$$U_2 + V_4 = 20,$$
$$U_3 + V_1 = 30,$$
$$U_3 + V_3 = 20.$$

Звідки отримаємо:

$$V_1=25,$$
$$U_1 = 10, \qquad V_2 = 40,$$
$$U_2 = 0, \qquad V_3 = 15,$$
$$U_3 = 5, \qquad V_4 = 20.$$

Визначимо оцінки вільних кліток:

$$\Delta_{11} = c_{11} - (U_1 + V_1) = 20\text{-}(10+25) = -15,$$
$$\Delta_{13} = c_{13} - (U_1 + V_3) = 24\text{-}(10+15) = -1,$$
$$\Delta_{14} = c_{14} - (U_1 + V_4) = 10\text{-}(10+20) = -20,$$
$$\Delta_{23} = c_{23} - (U_2 + V_3) = 10\text{-}(0+15) = -5,$$
$$\Delta_{32} = c_{32} - (U_3 + V_2) = 15\text{-}(5+40) = -30,$$
$$\Delta_{34} = c_{34} - (U_3 + V_4) = 15\text{-}(5+20) = -10.$$

Оцінки всіх вільних кліток від’ємні, отже отриманий план оптимальний. Розмір прибутку при реалізації оптимального плану посіву складе

$$L = 50*30*300+25*20*50+40*30*200+20*50*250+$$
$$+30*20*250+20*15*150 = 1160000 \text{ грн.}$$

Щоб визначити оптимальний план посіву без використання ділянки $У_1$ під культуру $К_2$, звільнимо клітку ($У_1$, $К_2$). Для цього умовно занизимо показник критерію оптимальності в цій клітці, наприклад, до значення мінус 100 (від’ємний прибуток), щоб цю клітку займати було невигідно. Замість культури $К_2$ на ділянці $У_1$ розмістимо культури $К_3$ і $К_4$, а під $К_2$ відведемо ділянку $У_2$. На ділянці $У_3$ залишаться культури $К_1$ і $К_3$ (табл 3.4).

Таблиця 3.4 - Симплекс-таблиця, що відповідає початковому опорному плану

Площа ділянки $У_i$	**Площа, займана під культуру $К_j$**			
	$К_1$ (300)	**$К_2$ (500)**	**$К_3$ (150)**	**$К_4$ (250)**
$У_1$ (300)	20	-100	24 50 +	10 250 --
$У_2$ (500)	25	40 500	10	20
$У_3$ (400)	30 300	15 0	20 100 --	15 +

Перевіримо оптимальність отриманого плану. Потенціали зайнятих кліток:

$$U_1 + V_3 = 24,$$
$$U_1 + V_4 = 10,$$
$$U_2 + V_2 = 40,$$
$$U_3 + V_1 = 30,$$
$$U_3 + V_3 = 20,$$
$$U_3 + V_2 = 15.$$

Звідки отримаємо:

$$V_1 = 30,$$
$$U_1 = 4, \quad V_2 = 15,$$
$$U_2 = 25, \quad V_3 = 20,$$
$$U_3 = 0, \quad V_4 = 6.$$

Визначимо оцінки вільних кліток

$$\Delta_{11} = з_{11} - (U_1 + V_1) = 20-(4+30) = -14,$$
$$\Delta_{12} = з_{12} - (U_1 + V_2) = -100-(4+25) = -129,$$
$$\Delta_{21} = з_{21} - (U_2 + V_1) = 25-(25+30) = -30,$$
$$\Delta_{23} = з_{23} - (U_2 + V_3) = 10-(25+20) = -35,$$
$$\Delta_{24} = з_{24} - (U_2 + V_4) = 20-(25+6) = -11,$$
$$\Delta_{34} = з_{34} - (U_3 + V_4) = 15-(0+6) = 9.$$

План не оптимальний, оскільки оцінка вільної клітки ($У_3$, $К_4$) додатна $\Delta_{34} = 9$.

Поліпшимо його, помістивши в клітку ($У_3$, $К_4$) ненульову компоненту і визначимо $\lambda = \min(x_{ij}) = \min(100, 250) = 100$. Отримаємо новий план і визначимо його оптимальність (табл. 3.5).

Таблиця 3.5 - Оптимальний план

Площа ділянки $У_i$	Площа, займана під культуру $К_j$			
	$К_1$ (300)	$К_2$ (500)	$К_3$ (150)	$К_4$ (250)
$У_1$ (300)	20	-100	24 150+	10 150-
$У_2$ (500)	25	40 500	10	20
$У_3$ (400)	30 300	15 0	20	15 100

Потенціали зайнятих кліток:

$$U_1 + V_3 = 24,$$
$$U_1 + V_4 = 10,$$
$$U_2 + V_2 = 40,$$
$$U_3 + V_1 = 30,$$
$$U_3 + V_2 = 15,$$
$$U_3 + V_4 = 15.$$

Звідки отримаємо:

$$V_1=25,$$
$$U_1 =0, \quad V_2 =10,$$
$$U_2 =30, \quad V_3 =24,$$
$$U_3 =5, \quad V_4 =10.$$

Визначимо оцінки вільних кліток:

$$\Delta_{11} = з_{11} - (U_1 + V_1) = 20-(0+25) = -5,$$
$$\Delta_{12} = з_{12} - (U_1 + V_2) = -100-(0+10) = -110,$$
$$\Delta_{21} = з_{21} - (U_2 + V_1) = 25-(30+25) = -30,$$
$$\Delta_{23} = з_{23} - (U_2 + V_3) = 10-(30+24) = -44,$$
$$\Delta_{24} = з_{24} - (U_2 + V_4) = 20-(30+10) = -20,$$
$$\Delta_{33} = з_{33} - (U_3 + V_3) = 20-(5+24) = -9.$$

Оскільки всі оцінки вільних кліток від’ємні, план є оптимальним. Відповідно до цього плану на ділянці $У_1$ треба 150 га відвести під культуру $К_3$ і 150 га під культуру $К_4$; ділянка $У_2$ повністю зайнята культурою $К_2$, а на ділянці $У_3$ на 300 га розмістити культуру $К_1$ і на 100 га культуру $К_4$. При цьому максимальний прибуток становитиме

$$L = 24*15*150+10*50*150+40*30*500+30*20*300+15*50*100 =984000 \text{ грн.}$$

Додаткове обмеження на посів культури $К_2$ скоротило прибуток на

1160000-984000 = 176000 грн.

Приклад 3.2. Виробниче об'єднання складається із трьох філій A_1,A_2, A_3, які виготовляють однорідну продукцію в кількості відповідно 1000, 1500 і 1200 од. на місяць. Ця продукція відправляється на два склади D_1, D_2 місткістю відповідно 2500 і 1200 од., а потім - до п'ятьох споживачів B_1, B_2, ..., B_5, попит яких становить відповідно 900, 700, 1000, 500 і 600 од. Вартості перевезення одиниці продукції від виробника на склад, а потім із складів до споживачів наведені в таблицях 3.6 та 3.7.

Таблиця 3.6 - Вартість перевезення від виробника на склад

Філія	Вартість перевезення від виробника на склад	
	D_1	D_2
A_1	2	8
A_2	3	5
A_3	1	4

Таблиця 3.7 - Вартість перевезення із складу до споживача

Склад	Вартість перевезення із складу до споживача				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
D_1	1	3	8	5	4
D_2	2	4	5	3	1

Окрім того, за індивідуальними контрактами можливі також безпосередні поставки продукції з першої філії другому споживачеві, а також із третьої філії четвертому споживачеві. Вартість транспортування одиниці продукції за транзитним маршрутом A_1B_2 дорівнює 3 грош.од., а за маршрутом A_3B_4 – 4 грош.од. Перевезення продукції із складу на склад є неприпустимим.

Сформулювати задачу як транспортну з проміжними пунктами (двоетапну) та визначити її оптимальний план.

Розв'язання

Кожний склад можна уявити як вихідний пункт відправлення продукції і як пункт призначення. Тому склади відіграють роль як постачальників продукції, так і її споживачів.

Перевезення продукції безпосередньо від філій до споживачів (крім випадків, означених в умові задачі), а також із складу на склад блокується за допомогою досить великої вартості M. Побудовану з урахуванням цього транспортну таблицю 3.8 двоетапної задачі наведено нижче.

Таблиця 3.8 - Транспортна таблиця двоетапної задачі

A, D	D, B							u_i
	D_1=2500	D_2=1200	B_1=900	B_2=700	B_3=1000	B_4=500	B_5=600	
A_1=1000	-2 **1000 -Θ**	8	M	3 **+Θ**	M	M	M	u_1 =0
A_2=1500	3 **300**	5 **1200**	M	M	M	M	M	u_2 =1
A_3=1200	1 **1200**	4	M	M	M	4	M	u_3 =-1
D_1=2500	0 **+Θ**	M	1 **900**	3 **700 -Θ**	8 **900**	5	4	u_4 =0
D_2=1200	M	0	2	4	5 **100**	3 **500**	1 **600**	u_5 =-3
v_j	v_1=2	v_2=4	v_3=1	v_4=3	v_5=8	v_6=6	v_7=4	

При такому плані витрати становлять L = 2*1000 + 3*300 + 5*1200 + +1*1200+ 1*900+ 3*700 +8*900 + 5*100 + 3*500 + 1*600 = 22900 грош.од.

Помітимо, що в клітках D_1D_1 і D_2D_2 розміщується нульова вартість перевезення продукції. Це припускає можливість неповного використання складських приміщень у зв'язку з можливим транзитним транспортуванням.

Дана ТЗ є збалансованою, тому що

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 1000 + 1500 + 1200 = 3700,$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 900 + 700 + 1000 + 500 + 600 = 3700.$$

Перший опорний план побудований за методом мінімальної вартості. Він є неоптимальним. Перехід до нового плану виконаємо, заповнивши порожню клітку D_1D_1 відповідно до побудованого циклу (табл 3.9).

Таблиця 3.9 - Перехід до нового плану

A, D	**D, B**							**u_i**
	D_1=2500	D_2=1200	B_1=900	B_2=700	B_3=1000	B_4=500	B_5=600	
A_1=1000	-2 **300**	8	M	3 **700**	M	M	M	u_1 =2
A_2=1500	3 **300**	5 **1200**	M	M	M	M	M	u_2 =3
A_3=1200	1 **1200 -Θ**	4	M	M	M	4 **+Θ**	M	u_3 =-1
D_1=2500	0 **700 +Θ**	M	1 **900**	3	8 **900 -Θ**	5	4	u_4 =0
D_2=1200	M	0	2	4	5 **100 +Θ**	3 **500 -Θ**	1 **600**	u_5 =-3
v_j	v_1=0	v_2=2	v_3=1	v_4=1	v_5=8	v_6=6	v_7=4	

L = 2*300 + 3*700 + 3*300 +5*1200+ 1*1200+ 1*900 +8*900 + 5*100 + +3*500 + 1*600 = 21500 грош.од.

Таблиця, що відповідає третьому опорному плану задачі, наведена у таблиці 3.10.

Таблиця 3.10 - Оптимальний план

A, D	**D, B**							**u_i**
	D_1=2500	D_2=1200	B_1=900	B_2=700	B_3=1000	B_4=500	B_5=600	
A_1=1000	-2 **300**	8	M	3 **700**	M	M	M	u_1 =0
A_2=1500	3 **300**	5 **1200**	M	M	M	M	M	u_2 =2
A_3=1200	1 **700**	4	M	M	M	4 **500**	M	u_3 =3
D_1=2500	0 **1200**	M	1 **900**	3	8 **400**	5	4	u_4 =0
D_2=1200	M	0	2	4	5 **600**	3	1 **600**	u_5 =-3
v_j	v_1=0	v_2=2	v_3=1	v_4=1	v_5=8	v_6=3	v_7=4	

В останній таблиці 3.10 отриманий оптимальний план ТЗ. Мінімальні витрати на перевезення становлять:

L = 2*300 + 3*700 + 3*300 +5*1200+ 1*1200+ 1*700 +
+ 4*500 +1*900 + 8*400 +5*600 + 1*600 = 20000 грош.од.

Оптимальний план перевезень продукції двоетапної транспортної задачі подамо у вигляді схеми на рисунку 3.1.

Із схеми видно, що на перший склад надходить 300 + 300 + 700= =1300 од. продукції, тобто його місткість використовується не цілком (D_1D_1 = =1200 од.). Це виникає внаслідок прямих поставок продукції за маршрутом A_1B_2 у кількості 700 од. і A_3B_4 у кількості 500 од.

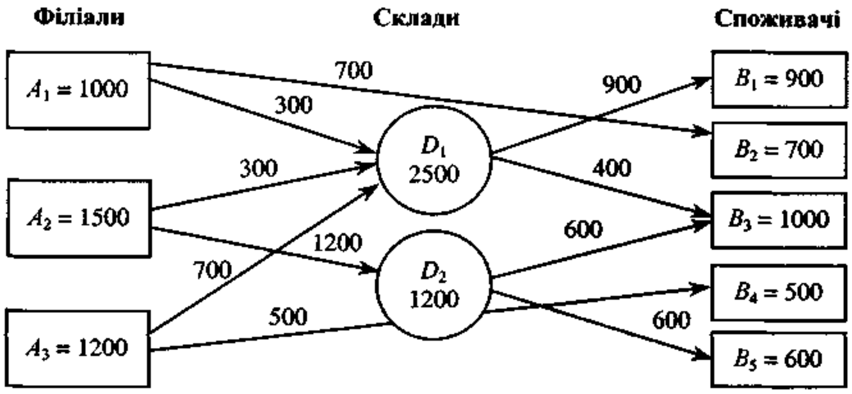

Рисунок 3.1 – Схема перевезень

Дана ТЗ має ще один альтернативний оптимальний план, що відрізняється від першого лише в частині, що стосується перевезення продукції із складів до третього та п'ятого споживачів.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 3.1. На ділянках B_1, B_2, B_3 і B_4 при спорудженні метрополітену необхідно виконати грабарства в обсягах відповідно 5, 8, 10 і 2 тис. м^3 з використанням взаємозамінних механізмів M_1, M_2 і M_3. Ресурси часу роботи механізмів відповідно дорівнюють 170, 210 і 120 годин, а їхня продуктивність залежно від гірничо-геологічних умов на ділянках і конструкції механізмів виражається величинами 50, 35 і 20 м^3/год відповідно. Собівартість робіт у грош. од. /м^3 механізмів на ділянках наведена у матриці

$$\begin{bmatrix} 1{,}8 & 0{,}7 & 2{,}1 & 1{,}9 \\ 0{,}8 & 1{,}1 & 2{,}3 & 0{,}7 \\ 1{,}5 & 2{,}8 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

Скласти економіко-математичну модель задачі, що дозволяє знайти план розподілу механізмів за ділянками робіт, при якому загальна вартість робіт буде найменшою. За методом потенціалів знайти такий розподіл механізмів за ділянками, при якому сумарна вартість виконаних робіт буде мінімальною. Знайти оптимальний розподіл механізмів по дільницях робіт при додатковій умові, що на пусковій ділянці B_3 грабарства повинні бути виконані в повному обсязі. Встановити, наскільки зміниться вартість робіт при виконанні цієї вимоги.

Задача 3.2. Передбачено штрафи за недопоставку одиниці продукції споживачам B_1, B_2, B_3 у розмірі відповідно 5, 3 і 2 грош.од. Визначити оптимальний план ТЗ:

$$a_i = (10; 80; 15) \atop b_j = (75; 20; 50); \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 6 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.3. Розв'язати транспортну задачу

$$a_i = (80; 40; 60; 40) \atop b_j = (70; 60; 80); \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

якщо вартість збереження одиниці продукції, що не вивезена, у постачальників A_1, A_2, A_3, A_4 дорівнює відповідно 5, 4, 2 и 3 грош. од.

Задача 3.4. Розв'язати транспортну задачу:

$$a_i = (75; 40; 35; 40) \atop b_j = (20; 60; 140); \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix},$$

якщо штрафи за недопоставку продукції споживачам B_1, B_2, B_3 складають відповідно 6, 4 і 8 грош.од.

Задача 3.5. Розв'язати транспортну задачу за умови, що вартість збереження невивезеної продукції у постачальників A_1, A_2, A_3 дорівнює відповідно 8, 7 і 5 грош.од. за одиницю продукції:

$$a_i = (60; 90; 50) \atop b_j = (30; 80; 20; 40); \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 & 1 \\ 6 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.6. В транспортній задачі загальний обсяг виробництва продукції перевищує загальний попит. Вартість зберігання одиниці продукції, яка не вивезена від постачальників A_1, A_2, A_3, A_4, дорівнює відповідно 7, 3, 4 і 8 грош.од. Визначити оптимальний план задачі:

$$a_i = (30; 80; 20; 40) \atop b_j = (60; 80; 20); \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 3.7. У незбалансованій транспортній задачі загальний попит перевищує загальний обсяг виробництва на 10 од. продукції. За недопоставку продукції споживачам за умовами задачі передбачено штрафи у розмірі 6 і 4 грош.од. за кожну одиницю продукції відповідно для першого і другого постачальників. Визначити оптимальний план такої транспортної задачі:

$$a_i = (10; 10; 30\ 20) \atop b_j = (20; 30; 20; 10); \qquad c_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

ЗМ 2 Економічна інтерпретація і аналіз оптимальних планів лінійних оптимізаційних моделей

Тема 4 ТЕОРІЯ ПОДВІЙНОСТІ ТА ДВОЇСТІ ОЦІНКИ В АНАЛІЗІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ (13 годин)

Пряма та двоїста задачі як пара сполучених задач.

Основні теореми подвійності, їхній економічний зміст

Двоїсті оцінки та дефіцитність ресурсів.

Література: [1] с. 72-75, 90-105;[2] с. 88-99; [4] с. 141-161.

Контрольні запитання

1. У чому полягає сутність подвійності в лінійному програмуванні?
2. Дайте визначення двоїстої задачі.
3. Охарактеризуйте основні властивості пари двоїстих задач?
4. Як тіньові оцінки характеризують дефіцитність сировини?
5. Як в оптимальному розв'язку ЗЛП виражається принцип рентабельності?
6. У чому полягає сутність подвійності в лінійному програмуванні?
7. Запишіть просту лінійну оптимізаційну модель. Запишіть до неї двоїсту задачу. Дайте економічну інтерпретацію двоїстих оцінок.
8. Скільки змінних і обмежень має двоїста задача залежно від прямої?
9. Сформулюйте правила побудови пари двоїстих задач.
10. Як зв'язані оптимальні плани прямої та двоїстої задач?
11. Як за розв'язком прямої задачі знайти розв'язок двоїстої?
12. Дайте економічну інтерпретацію компонент та розв'язків прямої та двоїстої задач.
13. Як визначити, що ресурс є дефіцитним (недефіцитним)?
14. Як визначити, що продукція є рентабельною (нерентабельною)?

Приклад 4.1. Використовуючи розв'язання прикладу 2.2 та відповідність між двоїстими змінними, знайти компоненти оптимального плану двоїстої задачі – двоїсті оцінки u_i.

Розв'язання

Для складання двоїстої задачі скористуємося умовою прямої задачі та властивостями пари сполучених задач.

Пряма задача була сформульована в такий спосіб: знайти такі x_j, які перетворюють на максимум функцію

$$L = 7x_1+3x_2+4x_3+2x_4 \to \max$$

і задовольняють обмеженням

$$2x_1+4x_2+1x_3+5x_4+ x_5\le 34,$$
$$4x_1+1x_2+4x_3+1x_4+ x_6\le 16,$$
$$2x_1+3x_2+1x_3+2x_4+ x_7\le 22,$$
$$x_j\ge 0.$$

Двоїста задача формулюється в такий спосіб: знайти такі u_1, u_2, u_3, які перетворюють на мінімум цільову функцію

$$L' = 34u_1+16u_2+22u_3 \to \min$$

і задовольняють обмеженням

$$\begin{aligned}
&2u_1 + 4u_2 + 2u_3 \geq 7,\\
&4u_1 + u_2 + 3u_3 \geq 3,\\
&u_1 + 4u_2 + u_3 \geq 4,\\
&5u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 2,\\
&u_i \geq 0\ (i = 1,3).
\end{aligned}$$

З теорем двоїстості виходить, що якщо розв’язано одну з пари двоїстих задач, то одночасно знайдений і розв'язок іншої задачі. Компоненти оптимального плану цієї задачі перебувають у рядку цільової функції останньої симплекс-таблиці розв’язаної задачі. Визначити їх можна, використовуючи відповідність між змінними двоїстих задач. Щоб установити цю відповідність, перетворимо обмеження двоїстої задачі в еквівалентні рівняння, віднімаючи з лівих частин додаткові невід’ємні змінні. Отримаємо

$$\begin{aligned}
&2u_1 + 4u_2 + 2u_3 - u_4 = 7,\\
&4u_1 + u_2 + 3u_3 - u_5 = 3,\\
&u_1 + 4u_2 + u_3 - u_6 = 4,\\
&5u_1 + u_2 + 2u_3 - u_7 = 2,\\
&u_i \geq 0\ (i = 1,7).
\end{aligned}$$

У цьому запису змінні u_4, u_5, u_6, і u_7 є базисними, а u_1, u_2, u_3 – вільними. У прямій задачі змінні x_1, x_2, x_3 і x_4 є вільними, а x_5, x_6, x_7 - базисними. Відповідність встановлюють, зіставляючи базисним змінним однієї задачі вільні змінні іншої і навпаки.

$$\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\overbrace{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4}^{\text{вільні}}}\\
\Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow\\
\multicolumn{4}{c}{\underbrace{u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7}_{\text{базисні}}}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{\overbrace{x_5 \quad x_6 \quad x_7}^{\text{базисні}}}\\
\Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow\\
\multicolumn{3}{c}{\underbrace{u_1 \quad u_2 \quad u_3}_{\text{вільні}}}
\end{array}.$$

Як видно, змінна u_1 зв'язана із змінною x_5 (тому їх називають двоїстими змінними), в останній симплексній таблиці, що містить оптимальний план, x_5 знаходиться в базисі, отже двоїста їй змінна u_1 на цьому етапі розрахунків є вільною і як вільна змінна дорівнює нулю (у будь-якій двоїстій парі завжди одна змінна базисна, а інша – вільна). Отже, u_1 =0. Далі, u_2 відповідає x_6. Остання симплекс-таблиця має вигляд, наведений у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 - Симплекс-таблиця, що має оптимальний план

Базис	**$C_{jбаз}$**	**C_j**	**7**	**3**	**4**	**2**	**0**	**0**	**0**
		P_0	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**
A_2	3	5,60	0	1	-0,40	0,60	0	-0,20	0,40
A_1	7	2,60	1	0	1,10	0,10	0	0,30	-0,10
A_5	0	6,40	0	0	0,40	2,40	1	0,20	-1,40
L_j		35,00	7	3	6,50	2,50	0	1,50	0,50
$\square_j$			0	0	2,50	0,50	0	1,50	0,50

Оптимальний план x= (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0), за якого значення цільової функції L = 35.

У цій симплекс-таблиці в стовпці вектора A_6 у рядку L_6 знаходиться елемент 1,5, отже u_2= 1,5. У такий же спосіб можна визначити, що u_3= 0,5.

З теорем подвійності також виходить, що значення цільових функцій розв'язаних двоїстих задач дорівнюють одна одній, тому L' = 35.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 4.1. Використовуючи розв'язання задачі 2.2 і відповідність між двоїстими змінними, знайти компоненти оптимального плану двоїстої задачі – двоїсті оцінки u_i. (Відповідь: u*=(11,8; 101,18; 0; 14,4)).

Задача 4.2. Для виготовлення виробів А, В, С підприємство використовує три різних види сировини. Норми витрати сировини на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу А, В і С, а також загальна кількість сировини кожного виду, що може бути використана підприємством, наведені в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2 – Вихідні дані

Вид сировини	**Норми витрат сировини**			**Запас сировини**
	А	**В**	**С**	
S_1	18	15	12	360
S_2	6	4	8	192
S_3	5	3	3	180
Ціна одного виробу, грн.	9	10	16	

Скласти план виготовлення виробів, при якому загальна вартість всієї виробленої підприємством продукції є максимальною. Скласти двоїсту задачу й знайти її оптимальний план. (Відповідь: x*=(0; 8; 20; 0; 0; 96), L*=400 грн. u*=(0,22; 1,67; 0)).

Тема 5 АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ (14 годин)

Аналіз розв’язків лінійних оптимізаційних моделей.
Аналіз параметричної стійкості розв’язків ЗЛП.
Оцінка рентабельності виробленої продукції.
Аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів.

Література: [1] с. 72-75, 90-105;[2] с. 101-116; [4] с. 171-190.

Контрольні запитання

1. У чому полягає проблема параметричної стійкості ЗЛП?
2. У чому полягає економічна інтерпретація змінних двоїстої задачі?
3. Після оптимізаційний аналіз задач лінійного програмування.
4. Як визначити статус ресурсів прямої задачі?
5. Як визначити план виробництва продукції та зміну доходу підприємства, якщо збільшити (зменшити) обсяг ресурсів?
6. Як розрахувати інтервали можливої зміни ціни на одиницю кожного виду продукції?

7. Як виробник має змінити план виробництва продукції, щоб уникнути втрат, пов'язаних з надвиробництвом відповідного виду продукції?
8. Як визначити рентабельність кожного виду продукції, виготовленої на підприємстві?

Приклад 5.1. Зробимо аналіз оптимальних планів задачі, отриманих у прикладах 2 і 3. Остання симплекс-таблиця, що містить оптимальний план, наведена у таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 - Симплекс-таблиця, що містить оптимальний план

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	**7**	**3**	**4**	**2**	**0**	**0**	**0**
		B_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_2	3	5,60	0	1	-0,40	0,60	0	-0,20	0,40
A_1	7	2,60	1	0	1,10	0,10	0	0,30	-0,10
A_5	0	6,40	0	0	0,40	2,40	1	0,20	-1,40
L_j		35,00	7	3	6,50	2,50	0	1,50	0,50
Δ_j			0	0	2,50	0,50	0	1,50	0,50

Оптимальний план x*= (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0), при якому значення цільової функції L* = 35.

Оптимальний план двоїстої задачі u*=(0; 1,5; 0,5).

Розв'язання

З останньої симплекс-таблиці прямої задачі маємо:

x* = (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0), max L = 35;

u*=(0; 1,5; 0,5)

min L' = 35 = max L.

Оптимальний план прямої задачі передбачає виробництво тільки двох видів продукції $П_1$ і $П_2$ у кількості відповідно 2,6 і 5,6 од. Випуск продукції $П_3$ і $П_4$ не передбачається ($x_3 = x_4 = 0$). Додаткові змінні x_5, x_6, x_7 характеризують залишок (невикористану частину) ресурсів відповідно P_1, P_2 і P_3. Оскільки $x_5 = 6,4$, перший ресурс використовується у процесі виробництва продукції не повністю, а другий і третій ресурси - повністю ($x_6 = x_7 = 0$). При такому оптимальному плані виробництва продукції і використанні ресурсів підприємство отримує найбільший прибуток у розмірі 35 грош. од.

План двоїстої задачі дає оптимальну систему оцінок ресурсів, використовуваних у виробництві. Так, u_2= 1,5 і u_3 = 0,5 відмінні від нуля, а ресурси P_2 і P_3 використовуються цілком. Двоїста оцінка u_1 = 0 і відповідний вид ресурсу не повністю використовується при оптимальному плані виробництва продукції. Це підтверджується також попереднім аналізом додаткових змінних оптимального плану прямої задачі. Така оптимальна система оцінок дає найменшу загальну вартість всіх ресурсів, використовуваних на підприємстві: min L' = 35 грош. од.

Статус ресурсів прямої задачі можна визначити трьома способами. Перший - підстановкою x* у систему обмежень прямої задачі. Якщо обмеження виконується як строга рівність, то відповідний ресурс є дефіцитним, у протилежному разі - недефіцитним.

$2*2{,}6+4*5{,}6+1*0+5*0 = 27{,}6 <34$ (ресурс 1 недефіцитний),

$4*2{,}6+1*5{,}6+4*0+1*0 = 16$ (ресурс 2 дефіцитний),

$2*2{,}6+3*5{,}6+1*0+2*0 = 22$ (ресурс 3 дефіцитний).

Другий спосіб - за допомогою додаткових змінних прямої задачі. Якщо додаткова змінна в оптимальному плані дорівнює нулю, то відповідний ресурс є дефіцитним, а якщо відмінна від нуля - ресурс недефіцитний.

Третій спосіб - за допомогою двоїстих оцінок. Якщо $u_i \neq 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягів і-го ресурсу призводить до відповідної зміни прибутку підприємства, тому такий ресурс є дефіцитним. Якщо $u_i = 0$, то й ресурс недефіцитний. Так,

$u_1=0$ (ресурс 1 недефіцитний),

$u_2 = 1{,}5$ (ресурс 2 дефіцитний),

$u_3 = 0{,}5$ (ресурс 3 дефіцитний).

Отже, якщо запас другого дефіцитного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю ($b_2 = 16 + 1 = 17$), то цільова функція max L збільшиться при інших незмінних умовах на $u_2 = 1{,}5$ грош. од. і дорівнюватиме max $L = 36{,}5$ грош.од. Але за рахунок яких змін в оптимальному плані виробництва продукції збільшиться прибуток підприємства? Інформацію про це дають елементи стовпця «A_6» останньої симплекс-таблиці, що відповідає двоїстій оцінці $u_2 = 1{,}5$. У новому оптимальному плані значення базисної змінної x_1 збільшиться на 0,3, змінної x_2 - зменшиться на 0,2, а витрати сировини P_2 зростуть на 0,2. При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення змінних будуть такими:

$$x^* = (2{,}9;\ 5{,}4;\ 0;\ 0;\ 6{,}6;\ 0;\ 0).$$

Таким чином, збільшення запасу другого дефіцитного ресурсу за інших незмінних умов спричинить зростання випуску продукції $П_1$ і зниження виробництва продукції $П_2$, а обсяг використання ресурсу P_1 збільшиться. При такому плані виробництва максимальний прибуток підприємства буде

$$\max L= 7*2{,}9 + 3*5{,}4 + 4*0 + 2*0 = 36{,}5,$$

тобто зросте на $u_2 = 1{,}5$.

Проаналізуємо, як зміниться оптимальний план виробництва продукції, якщо запас дефіцитного ресурсу P_3, при інших незмінних умовах, збільшити на одну умовну одиницю ($b_3 = 22 + 1 = 23$). Аналогічно міркуючи, скористаємося елементами стовпчика «A_7» останньої симплекс-таблиці, що відповідає двоїстій оцінці $u_3 = 0{,}5$. Запишемо новий оптимальний план:

$$x^* = (2{,}5;\ 6;\ 0;\ 0;\ 5;\ 0;\ 0),$$

$$\max L^* = 7*2{,}5 + 3*6 + 4*0 + 2*0 = 35{,}5.$$

Таким чином, прибуток підприємства збільшиться на 0,5 грошових одиниць за рахунок збільшення виробництва продукції $П_2$ на 0,4 одиниці й зменшення випуску продукції $П_1$ на 0,1 одиниці. При цьому обсяг використання ресурсу P_1 зменшиться на 1,4 од.

У результаті проведеного аналізу виникає питання, чи будуть зберігатися встановлені співвідношення, якщо запас дефіцитного ресурсу змінити не на одиницю, а, наприклад, на 10 од.? Щоб однозначно відповісти на це запитання, необхідно розрахувати інтервали можливої зміни обсягів дефіцитних ресурсів, у межах яких двоїсті оцінки u_i, залишаються на рівні оптимальних значень.

Приріст (зміну) запасу ресурсу P_2 позначимо Δb_2. Тоді якщо $b'_2 = b_2 + \Delta b_2$, то новий оптимальний план

$$x^* = (2{,}6+0{,}3\Delta b_2;\ 5{,}6-0{,}2\Delta b_2;\ 0;\ 0;\ 6{,}4+0{,}2\Delta b_2;\ 0;\ 0).$$

Єдина вимога, яку можна висунути до нових оптимальних значень, - це умова невід'ємності, тобто

$$\begin{cases} 2{,}6+0{,}3\Delta b_2 \ge 0 \\ 5{,}6-0{,}2\Delta b_2 \ge 0 \\ 6{,}4+0{,}2\Delta b_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_2 \ge -8{,}67 \\ \Delta b_2 \le 28 \\ \Delta b_2 \ge -32 \end{cases},$$

$$-8{,}67 \le \Delta b_2 \le 28.$$

Це означає, що коли запас ресурсу P_2 збільшиться на 28 од. або зменшиться на 8,67 од., то оптимальною двоїстою оцінкою ресурсу P_2 залишиться $u_2 = 1{,}5$. Таким чином, запас ресурсу P_2 може змінюватися в межах

$$16-8{,}67 \le b_2+\Delta b_2 \le 16 + 28,$$

$$7{,}33 \le b_2 \le 44.$$

Відповідно до цього максимально можливий прибуток підприємства буде знаходитись в межах

$$35-8{,}67*0{,}3 \le L_{\max} \le 35 + 28*0{,}2,$$

$$32{,}4 \le L_{\max} \le 40{,}6.$$

Аналогічно розраховується інтервал стійкості двоїстої оцінки $u_3 = 1{,}5$ дефіцитного ресурсу P_3:

$$\begin{cases} 2{,}6-0{,}1\Delta b_3 \ge 0 \\ 5{,}6+0{,}4\Delta b_3 \ge 0 \\ 6{,}4-1{,}4\Delta b_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_3 \le 26 \\ \Delta b_3 \ge -14 \\ \Delta b_3 \le 4{,}57 \end{cases},$$

$$-14 \le \Delta b_3 \le 4{,}57,$$

$$8 \le b_3 \le 26{,}57.$$

Таким чином, якщо запас ресурсу P_3 збільшиться на 4,57 од. або зменшиться на 14 од., то двоїста оцінка $u_3 = 1{,}5$ цього ресурсу залишиться оптимальною.

Зазначимо, що вказані інтервали стосуються тільки випадків, коли змінюється тільки один ресурс, а запаси всіх інших фіксовані, тобто при інших незмінних умовах. У випадку одночасної зміни обсягів всіх або декількох ресурсів підхід до визначення нового оптимального плану дещо інший.

Оцінку рентабельності продукції, що виготовляється на підприємстві, виконують шляхом аналізу двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі, що характеризують кожен вид продукції.

Підставимо u^* у систему обмежень двоїстої задачі. Якщо вартість ресурсів на одиницю продукції (ліва частина) перевищує ціну цієї продукції (права частина), то виробництво такої продукції для підприємства недоцільне. Якщо ж співвідношення виконується як строга рівність, то продукція рентабельна:

$2*0 + 4*1{,}5 + 2*0{,}5 = 7$ (продукція $П_1$ рентабельна),

$4*0 + 1*1,5 + 3*0,5 = 3$ (продукція $П_2$ рентабельна),

$1*0 + 4*1,5 + 1*0,5 = 6,5 > 4$ (продукція $П_3$ нерентабельна),

$5*0 + 1,5 + 2*0,5 = 2,5 > 2$ (продукція $П_4$ нерентабельна).

Аналогічні результати можна отримати, проаналізувавши двоїсті оцінки додаткових змінних, значення яких показують, на скільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції. Тому якщо додаткова змінна двоїстої задачі дорівнює нулю, то продукція рентабельна. І, навпаки, якщо $u_i \neq 0$, то відповідна продукція нерентабельна.

Додаткові змінні двоїстої задачі розташовуються в індексному рядку останньої симплекс-таблиці в стовпцях «A_1»-«A_4». Їхні оптимальні значення $u_4 = 0$; $u_5 = 0$; $u_6 = 2,5$; $u_7 = 0,5$. Тому продукція $П_3$ і $П_4$ нерентабельна, а продукція $П_1$ і $П_2$ - рентабельна.

Під впливом різних обставин ціна одиниці продукції на підприємстві може змінюватися (збільшуватися або зменшуватися). Тому завжди цікаво знати, в межах яких змін ціни продукції кожного виду оптимальний план її виробництва залишається тим самим:

$$x^* = (2,6;\ 5,6;\ 0;\ 0;\ 6,4;\ 0;\ 0).$$

Для визначення інтервалів зміни коефіцієнтів цільової функції скористаємося тим, що при цьому симплекс-таблиця, що відповідає оптимальному плану, зберігає свій вигляд за винятком елементів індексного рядка. Нові оцінки (L_j - C_j) повинні задовольняти умові оптимальності задачі максимізації, тобто бути невід’ємними.

Зміну коефіцієнта c_3 позначимо Δc_3. Оскільки x_3 - небазисна змінна, то в симплекс-таблиці зміниться лише відповідна оцінка L_3-c_3:

$$(L_3 – c_3) = 3 * (-0,4) + 7 * 1,1 +0 * 0,4 - (4 + \Delta c_3) = 2,5 - \Delta c_3.$$

За умови L_3-$c_3 \geq 0$ одержимо нерівність $2,5-\Delta c_3 \geq 0$, тобто $\Delta c_3 \leq 2,5$. Це означає, що коли ціна одиниці продукції $П_3$, при інших незмінних умовах, зросте не більше ніж на 2,5 грош. од., то оптимальним планом виробництва продукції на підприємстві залишиться $x^* = (2,6;\ 5,6;\ 0;\ 0;\ 6,4;\ 0;\ 0)$. Тільки максимальний прибуток зміниться на max $\Delta L = \Delta c_3 x_3$.

Аналогічно розраховуємо інтервал зміни коефіцієнта Δc_4:

$$(L_4\text{-}c_4) = 3*0,6+7*0,1+0*2,4-(2+\Delta c_4)= 0,5-\Delta c_4;$$

$$\Delta c_4 \leq 0,5.$$

Із зростанням ціни одиниці продукції $П_4$ на 0,5 грош. од., за інших незмінних умов, оптимальний план виробництва продукції не зміниться, а max $\Delta L = \Delta c_4 x_4$.

Задачі для самостійного розв’язання

Задача 5.1. Зробити аналіз оптимальних планів задачі 2.1.

Задача 5.2. Зробити аналіз оптимальних планів задачі 2.2.

Задача 5.3. Підприємство виготовляє три види продукції А, В і С, використовуючи для цього три види ресурсів 1, 2, 3. Норми витрат всіх ресурсів на одиницю продукції і запаси ресурсів приведені в таблиці 5.2.

Таблиця 5.2 – Вихідні дані

Ресурс	**Норма витрат на одиницю продукції**			**Запас ресурсу**
	A	**B**	**C**	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: A - 9 грош.од., B – 10 грош.од. і C - 16 грош.од. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший дохід.

Остання симплекс-таблиця даної задачі має вигляд, наведений в таблиці 5.3.

Таблиця 5.3 - Симплекс-таблиця, що відповідає оптимальному плану

Базис	$C_{j\,баз}$	C_j	**9**	**10**	**16**	**0**	**0**	**0**
		B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
A_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
A_3	16	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
A_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
	L_j	400	14	10	16	2/9	5/3	0
	Δ_j		0	0	10	2/9	5/3	0

Записати математичні моделі прямої і двоїстої задач; записати оптимальні плани прямої і двоїстої задач, виконати їхній економічний аналіз; визначити статус ресурсів, використовуваних для виробництва продукції, і рентабельність кожного виду продукції; обчислити інтервали стійкості двоїстих оцінок щодо зміни запасів дефіцитних ресурсів; розрахувати інтервали можливих змін ціни одиниці рентабельної продукції.

Задача 5.4. Підприємство виготовляє продукцію A, B і C, для чого використовує три види ресурсів 1, 2, 3. Норми витрат всіх ресурсів на одиницю продукції і обсяги ресурсів на підприємстві приведені в таблиці 5.4.

Таблиця 5.4 – Вихідні дані

Ресурс	**Норма витрат на одиницю продукції**			**Запас ресурсу**
	A	**B**	**C**	
1	4	2	1	180
2	3	1	3	210
3	1	2	5	244

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: A - 10 грош.од., B – 14 грош.од. і C - 12 грош.од. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший дохід.

Остання симплекс-таблиця, що містить оптимальний план, має вигляд, що наведений у таблиці 5.5.

Таблиця 5.5 - Симплекс-таблиця, що відповідає оптимальному плану

Базис	**$Cj_{баз}$**	**Cj**	**10**	**14**	**12**	**0**	**0**	**0**
		B	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**
A_2	14	82	19/8	1	0	5/8	0	-1/8
A_5	0	80	23/8	0	0	1/8	1	-5/8
A_3	12	16	-3/4	0	1	-1/4	0	1/4
	Lj	1340	97/4	14	12	23/4	0	5/4
	Δj		57/4	0	0	23/4	0	5/4

Записати математичні моделі прямої і двоїстої задач; записати оптимальні плани прямої і двоїстої задач, виконати їхній економічний аналіз; визначити статус ресурсів, використовуваних для виробництва продукції, і рентабельність кожного виду продукції; обчислити інтервали стійкості двоїстих оцінок щодо зміни запасів дефіцитних ресурсів; розрахувати інтервали можливих змін ціни одиниці рентабельної продукції.

Задача 5.5. Підприємство виготовляє продукцію чотирьох видів A, B, C і D, для чого використовує три види ресурсів 1, 2, 3. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції і запаси ресурсів на підприємстві приведені в таблиці 5.6.

Таблиця 5.6 – Вихідні дані

Ресурс	**Норма витрат на одиницю продукції**				**Запас ресурсу**
	A	**B**	**C**	**D**	
1	2	1	1	1	280
2	1	-	1	1	80
3	1	5	1	-	250

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: A – 4 грош.од., B – 3 грош.од., C - 6 грош.од., D - 7 грош.од. Визначити план виробництва продукції, що максимізує дохід підприємства.
Остання симплекс-таблиця має вигляд, що наведений у таблиці 5.7.

Таблиця 5.7 - Симплекс-таблиця, що відповідає оптимальному плану

Базис	**$Cj_{баз}$**	**Cj**	**4**	**3**	**6**	**7**	**0**	**0**	**0**
		B	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	**A_6**	**A_7**
A_5	0	150	4/5	0	-1/5	0	1	-1	-1/5
A_4	7	80	1	0	1	1	0	1	0
A_2	3	50	1/5	1	1/5	0	0	0	1/5
	Lj	710	38/5	3	38/5	7	0	7	3/5
	Δj		18/5	0	8/5	0	0	7	3/5

Записати математичні моделі прямої і двоїстої задач; записати оптимальні плани прямої і двоїстої задач, виконати їхній економічний аналіз; визначити статус ресурсів, використовуваних для виробництва продукції, і рентабельність кожного виду продукції; обчислити інтервали стійкості двоїстих оцінок щодо зміни запасів дефіцитних ресурсів; розрахувати інтервали можливих змін ціни одиниці рентабельної продукції.

ЗМ 3 Методи розв'язання нелінійних оптимізаційних задач

Тема 6 ЦІЛОЧИСЛОВІ ТА ДРОБОВО-ЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. (8 годин)

Типи задач дискретного програмування.

Метод Гоморі.

Метод віток і границь.

Дрібно-лінійне програмування.

Література: [1] с. 152-171; 177-184; [2] с. 175-186; 214-221; [4] с. 397-417, 422-428, 432-437.

Контрольні запитання

1. Яка оптимізаційна модель називається цілочисловою?
2. Наведіть приклади оптимізаційних задач цілочислового програмування.
3. Які розроблені методи розв'язування цілочислових оптимізаційних задач?
4. Поясніть зміст поняття «правильне відтинання».
5. Охарактеризуйте метод Гоморі.
6. Охарактеризуйте метод гілок і границь.
7. Сформулюйте задачу дробово-лінійного програмування.
8. Охарактеризуйте метод розв'язання задач дробово-лінійного програмування.

Приклад 6.1. На придбання обладнання для нової виробничої ділянки виділено 15 грош. од. Підприємство може замовити машини типу А вартістю 3 грош. од., що випускають 1 од. продукції за зміну; і машини типу В вартістю 2 грош. од., що забезпечують випуск 2 од. продукції за зміну. Причому число придбаних машин В не повинне перевищувати 5 штук. Потрібно скласти економіко-математичну модель, користуючись якою, можна знайти план придбання машин, що враховує можливості підприємства й забезпечує найвищу продуктивність нової ділянки. Користуючись одним з методів цілочислового програмування, знайти оптимальний план придбання обладнання.

Розв'язання

Складемо математичну модель задачі. Припустимо, що підприємство придбає x_1 машин А и x_2 машин В. Тоді змінні x_1 і x_2 повинні задовольняти наступним нерівностям:

$$3x_1+2x_2\le 15,$$
$$x_2\le 5.$$

Якщо підприємство придбає зазначену кількість обладнання, то продуктивність нової ділянки складе:

$$L= x_1+2x_2 \to \max.$$

За своїм економічним змістом змінні x_1 і x_2 можуть приймати тільки цілі невід'ємні значення, тобто

$$x_1, x_2 \geq 0,$$
$$x_1, x_2 – \text{цілі}.$$

Таким чином, математична модель задачі матиме вигляд: знайти таке рішення $x=(x_1, x_2)$, що перетворює на максимум цільову функцію

$$L= x_1+2x_2 \to \max$$

і задовольняє обмеженням

$$3x_1+2x_2 \leq 15,$$
$$208x_1+505x_2 \leq 5200,$$
$$x_1, x_2 \geq 0,$$
$$x_1, x_2 – \text{цілі}.$$

Оскільки невідомі можуть приймати тільки цілі значення, задача є задачею цілочислового програмування. Тому що число змінних дорівнює двом, для розв'язання задачі можна скористатися її геометричною інтерпретацією. Для цього побудуємо багатокутник рішень (рис. 6.1).

Обмеженням задачі задовольняють всі точки отриманого багатокутника OBAC, а умовам цілочисельності – тільки точки, показані кружками. Щоб знайти точку, координати якої є рішенням задачі, замінимо багатокутник OBAC багатокутником OBDEFGHK, що містить всі припустимі точки із цілочисельними координатами й таким, що координати кожної з вершин є цілими числами. Для визначення вершини, що містить оптимальний план, побудуємо вектор c=(1;2) і пряму $x_1+2x_2=0$. Пересуваючи побудовану пряму в напрямку, зазначеному вектором, визначимо, що останньою точкою, яка з'єднує її з багатокутником OBDEFGHK, є його вершина з координатами $x=(1; 5)$.

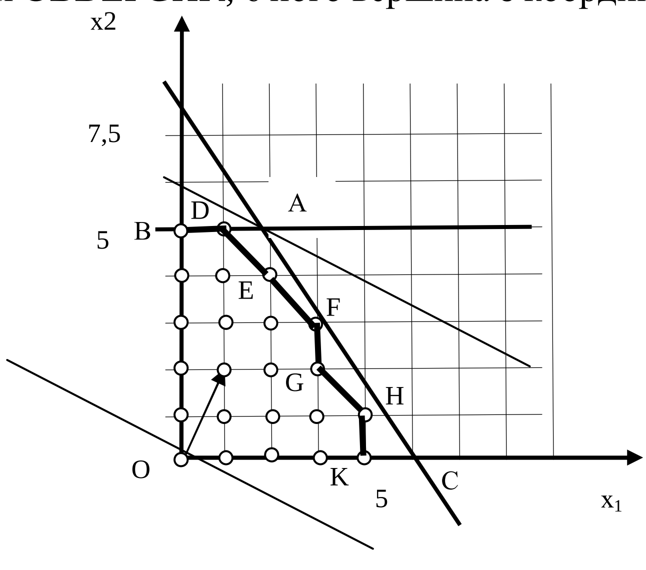

Рисунок 6.1 - Багатокутник рішень

Вирішимо задачу симплексним методом, не враховуючи вимогу цілочисельності. Для цього приведемо її до канонічного вигляду:

$$L= x_1+2x_2 \to \max,$$
$$3x_1+2x_2 +x_3 = 15,$$
$$x_2 + x_4 = 5,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Очевидно, що опорним планом є план

$$x = (0, 0, 15, 5).$$

Заповнимо симплекс-таблицю 6.1.

Таблиця 6.1 – Початковий опорний план

Базис	$C_{j баз}$	C_j	1	2	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_3	0	15	3	2	1	0
A_4	0	5	0	1	0	1
L_j		0	0	0	0	0
Δ_j			-1	-2	0	0

Зроблена оцінка оптимальності плану показує, що план не є оптимальним. Перейдемо до нового базису. Очевидно, що вводити до базису треба в першу чергу вектор A_2, виводити з базису при цьому необхідно вектор A_4. Складемо нову симплекс-таблицю. Помножимо головний рядок нової таблиці на -2 і додаємо до рядку вектору A_3, результат записуємо в рядок вектора A_3 нової таблиці 6.2.

Таблиця 6.2 – Наступний опорний план

Базис	$C_{j баз}$	C_j	1	2	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_2	2	5	0	1	0	1
A_3	0	5	3	0	1	-2
L_j		10	0	2	0	2
Δ_j			-1	0	0	2

Новий опорний план $x = (0; 5; 5; 0)$. Перевіривши його на оптимальність, переконуємося, що цей план також не є оптимальним, його необхідно поліпшити. Перейдемо до чергового опорного плану. Для цього введемо до базису вектор A_1, виводити з базису будемо вектор A_3. Заповнимо чергову симплекс-таблицю 6.3.

Таблиця 6.3 – Оптимальний план

Базис	$C_{j баз}$	C_j	1	2	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	5/3	1	0	1/3	-2/3
A_2	2	5	0	1	0	1
L_j		35/3	1	2	1/3	4/3
Δ_j			0	0	1/3	4/3

Отримали новий опорний план $x = (5/3; 5; 0; 0)$. Всі розраховані значення симплекс-різниць додатні або дорівнюють нулю, отже отриманий план є оптимальним. Але він не задовольняє умові цілочисельності змінних x_1 і x_2. Для змінної x_1, що має дробову частину, складаємо додаткове обмеження, користуючись останньою симплекс-таблицею:

$$x_1 + 1/3x_3 – 2/3x_4 \geq 5,3.$$

До системи обмежень додамо нерівність

$$f(1)\ x_1 + f(1/3)x_3 + f(-2/3)x_4 \geq f(5/3),$$

$$1/3x_3 + 1/3x_4 \geq 2/3.$$

Введемо невід'ємну змінну x_5 і складемо рівняння:

$$1/3x_3 + 1/3x_4 - x_5 = 2/3.$$

Складемо нову симплекс-таблицю 6.4 з новою умовою, доповнивши таблицю, що містить оптимальний план, новим рядком.

Таблиця 6.4 – Симплекс-таблиця з новою умовою

Базис	**$C_{jбаз}$**	**C_j**	**1**	**2**	**0**	**0**	**0**
		P_0	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**
A_1	1	5/3	1	0	1/3	-2/3	0
A_2	2	5	0	1	0	1	0
A_5	0	-2/3	0	0	-1/3	-1/3	1
L_j		35/3	1	2	1/3	4/3	0
Δ_j			0	0	1/3	4/3	0

Слід пам'ятати, що після включення до системи обмежень додаткового рівняння, яке відповідає правильному відсіканню, завжди буде утворюватися неприпустиме базисне рішення. Для одержання припустимого базисного рішення потрібно перевести в базисні змінні одну з вільних змінних (x_3 або x_4). Нехай це буде x_3. Введемо до базису вектор A_3. Для цього помножимо рядок A_5 на (-3) і результат запишемо в рядок A_3. Головний рядок нової таблиці помножимо на (-1/3) і додамо до першого рядку попередньої таблиці. Результат запишемо в рядок A_1. Потім цей самий рядок помножимо на 0,069 і додамо до другого рядку попередньої таблиці, результат запишемо в рядок A_2. Потім помножимо головний рядок на (-1/3) і додамо до другого рядку попередньої таблиці (табл. 6.5).

Таблиця 6.5 – Одержання припустимого базисного плану

Базис	**$C_{jбаз}$**	**C_j**	**1**	**2**	**0**	**0**	**0**
		P_0	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**
A_1	1	1	1	0	0	-1	1
A_2	2	5	0	1	0	1	0
A_5	0	2	0	0	1	1	-3
L_j		11	1	2	0	1	1
Δ_j			0	0	0	1	1

Отримано план x = (1; 5; 0; 0; 2). Дослідження плану на оптимальність показує, що він є оптимальним, при цьому отримали цілочисельне рішення.

Таким чином, підприємству треба придбати одну машину А і п'ять машин типу В. При цьому продуктивність нової ділянки буде максимальною і складе 11 одиниць продукції.

Задача 6.2. Вирішити задачу дрібно-лінійного програмування симплексним методом:

$$Z = \frac{3x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2} \to \max$$

за умови

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 4x_2 + x_5 = 8, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Розв'язання

Зведемо початкову задачу до задачі лінійного програмування, для цього позначимо

$$\frac{1}{y_0} = x_1 + x_2 .$$

Уведемо нові змінні:

$$y_j = y_0 x_j , \quad j = \overline{1,5} .$$

Одержимо задачу лінійного програмування:

$$3y_1 + 2y_2 \to max,$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 - y_3 + 12y_0 = 0, \\ 2y_1 - y_2 + y_4 - 9y_0 = 0, \\ -y_1 + 4y_2 + y_5 - 8y_0 = 0, \\ y_1 + y_2 = 1, \\ y_0 \ge 0, \quad y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Вирішимо завдання симплексним методом. У перше й останнє обмеження введемо штучні змінні y_6, і y_7. Маємо оптимальний розв'язок перетвореної задачі:

$$y_1 = 0{,}7222,\ y_2 = 0{,}2778,\ y_3 = y_4 = 0,\ y_5 = 0{,}1296.$$

Знайдемо оптимальний розв'язок вихідної задачі з огляду на те, що $x_j = \dfrac{y_i}{y_0}$:

$$x^* = (5{,}57;\ 2{,}14;\ 0;\ 0;\ 5),\ Z_{max} = 2{,}722.$$

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 6.1. Для виконання робіт P_1, P_2 і P_3 сільськогосподарське підприємство може придбати трактори марок А і Б вартістю 4 і 3 грош.од. кожний. З використанням нової техніки необхідно виконати не менше 2020 умовн.од. роботи P_1, не менше 104 умовн.од. роботи P_2 і не менше 20 умовн.од.

роботи P_3. За розглянутий проміжок часу з використанням трактора марки А можна виконати 404 умовн.од. роботи P_1, 8 умовн.од. роботи P_2 або 1 умовн.од. роботи P_3. З використанням трактора марки Б можна виконати 105 умовн.од. роботи P_1, 10 умовн.од. роботи P_2 або 4 умовн.од. роботи P_3. Скласти економіко-математичну модель, що дозволяє знайти такий варіант придбання тракторів тієї чи іншої марки, при якому будуть виконані всі необхідні роботи, а витрати на нову техніку будуть мінімальними. Користуючись одним з методів цілочисельного лінійного програмування, знайти оптимальний варіант придбання тракторів.

Задача 6.2. Підприємство випускає вироби А і В, при виготовленні яких використовується сировина C_1 і C_2. Відомі запаси сировини (b_1= 7, b_2 = 10), норми витрати на одиницю виробу А сировини C_1 – 1 од., сировини C_2 – 1 од. На одиницю продукції В сировини C_1 – 1 од., сировини C_2 – 2 од. Оптові ціни виробу А – 12 од., виробу В – 11 од., планова собівартість виробу А – 9 од., В – 10 од. Як тільки обсяг випуску продукції перестане відповідати оптимальним розмірам підприємства, подальше збільшення випуску x_j приводить до підвищення вартості продукції й у першому наближенні фактична собівартість c_j описується функцією

$$c_j = c_j^0 + c_j^{'} x_j ,$$

де $c_j^{'}$ - деяка постійна величина.

При пошуку плану випуску виробів, що забезпечує підприємству найвищий прибуток в умовах порушення балансу між обсягом випуску й оптимальних розмірів підприємства цільова функція набуває вигляд

$$f = (p_1 - (c_1^0 + c_1^{'} x_1)) * x_1 + (p_2 - (c_2^0 + c_2^{'} x_2)) * x_2 ,$$

а обмеження за видами сировини

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 ,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 ,$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$$

Скласти економіко-математичну модель задачі. Графічним методом вирішити отриману задачу й сформулювати відповідь в економічних термінах відповідно до умов задачі.

Задача 6.3. За методом Гоморі розв’язати задачі цілочисельного програмування.

а)

$$Z = x_1 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - \text{цілі} \end{cases};$$

б)

$$Z = x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - \text{цілі} \end{cases};$$

в)

$$Z = 3x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36 \\ x_2 \le 13 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - \textit{цілі} \end{cases};$$

г)

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 4x_2 \le 10 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - \textit{цілі} \end{cases}.$$

Задача 6.4. За методом віток і границь розв'язати задачу цілочислового програмування:

а)

$$Z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 16 \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - \textit{цілі} \end{cases};$$

б)

$$Z = 3x_1 + 7x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \le 32 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - \textit{цілі} \end{cases};$$

в)

$$Z = x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 3x_1 + 7x_2 \le 21 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - \textit{цілі} \end{cases};$$

г)

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 3x_1 + 9x_2 \le 27 \\ x_j \ge 0; \quad x_j - \textit{цілі} \end{cases}.$$

Задача 6.5. Розв'язати графічно задачі дробово-лінійного програмування:

а)

$$Z = \frac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,2} \end{cases};$$

б)

$$Z = \frac{-5x_1 + 4x_2}{-2x_1 - 3x_2} \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \le 12 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \ge 10 \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,2} \end{cases}.$$

в)

$$Z = \frac{5x_1 - 3x_2}{x_1 + 3x_2} \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ -x_1 + 6x_2 \le 18 \\ x_1 - 3x_2 \le 3 \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,2} \end{cases};$$

г)

$$Z = \frac{3x_1 - x_2}{2x_1 + x_2} \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ -x_1 + 3x_2 \le 9 \\ 3x_1 - x_2 \le 12 \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,2} \end{cases}.$$

Задача 6.6. Розв'язати задачі дробово-лінійного програмування симплексним методом.

а)

$$Z = \frac{-5x_1 + 2x_2}{3x_1 + 4x_2} \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,5} \end{cases};$$

б)

$$Z = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2x_1 + x_3 + 1} \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,3} \end{cases};$$

в)

$$Z = \frac{x_1 + 2x_2 - x_3}{3x_1 + x_2 + 5x_3} \to \max$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + x_3 \le 12 \\ -x_1 + 7x_2 + 2x_3 \le 12 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 \ge 1 \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,3} \end{cases};$$

г)

$$Z = \frac{2x_1 - 3x_2 + 1}{x_1 + x_2 + 3} \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 20 \\ 3x_1 - x_2 \ge 10 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 11 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 35 \\ x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,3} \end{cases}.$$

Тема 7 НЕЛІНІЙНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ (10 годин)

Постановка задачі нелінійного програмування (ЗНП).

Класичний метод оптимізації з використанням множників Лагранжа.

Опукле програмування.

Необхідні й достатні умови існування сідлової точки. Теорема Куна-Таккера.

Деякі методи розв'язання задач НЛП.

Література: [1], с. 187-195;[2], с. 251-279; [4], с. 797-804.

Контрольні запитання

1. Запишіть загальну задачу нелінійного програмування.
2. Охарактеризуйте труднощі, що виникають при розв'язанні задач нелінійного програмування.
3. Поясніть, що уявляє собою функція Лагранжа? Яке її призначення?
4. Охарактеризуйте метод Лагранжа.
5. Яка функція називається опуклою (угнутою)?
6. Сформулюйте необхідні й достатні умови існування сідлової точки для певної диференційованої функції.

Приклад 7.1. Знайти умовний екстремум функції $F=xy$ за умови

$$g(x, y) = x + y - 2 = 0 \text{ для } x \geq 0, y \geq 0.$$

Розв'язання

Функція Лагранжа має вигляд

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(y+x-2).$$

Для відшукання передбачуваного екстремуму вирішимо систему трьох рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = y + x - 2 = 0.$$

Віднімаючи від першого рівняння друге, знаходимо $y - x = 0$. З третього рівняння визначаємо $y + x = 1$. Підставивши $y = x$ в останню формулу, остаточно одержимо $x^*= 1$ і $y^* = 1$. З урахуванням цих результатів з першого або другого рівнянь знаходимо $\lambda^* = -1$. Значення функції в точці екстремуму

$$F^*=x^*y^* = 1*1 = 1.$$

Умови прикладу подані на рисунку 7.1.

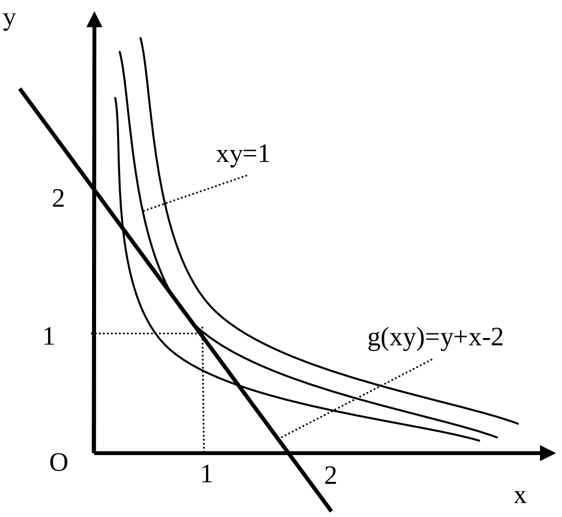

Рисунок 7.1 - Умови прикладу

Лінія рівня, що проходить через точку передбачуваного екстремуму, описується рівнянням xy=1. Всі лінії рівня, що лежать нижче лінії xy=1, мають рівень менший за 1, а що лежать вище лінії рівня xy=1, мають рівень понад 1. Це випливає з рівняння ліній рівнів $y = k/x$, де k - значення рівня. Ясно, що чим більше k, тим правіше проходить крива. Функція, обумовлена умовою $g(xy)=y+x-2=0$, є прямою лінією $y=2-x$. Через симетрію задачі функції xy=1 і $g(xy)=y+x-2=0$ торкаються одна одної в точці передбачуваного екстремуму (з координатами (1,1)). Із сказаного випливає, що на прямій $y=2-x$ значення функції $u=xy$ менші за одиницю скрізь, окрім точки передбачуваного екстремуму. Таким чином, у цій точці має місце максимум.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 7.1. Використовуючи метод Лагранжа, відшукати умовний екстремум функції

$$F = x_1 x_2 + x_3$$

за умови

$$x_1^2 x_2^2 + x_3^2 = 1,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Задача 7.2. Знайти графічним методом максимум і мінімум функції:

$$F = x + 2y$$

за умови

$$x^2 + y^2 \leq 4,$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Задача 7.3. За методом Лагранжа знайти точку умовного екстремуму.

а) $\begin{matrix} F = 2x_1^2 + x_2^2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 5 \end{matrix}$; б) $\begin{matrix} F = x_1^2 - x_2^2 \\ 3x_1 + 4x_2 = 12 \end{matrix}$; в) $\begin{matrix} F = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{matrix}$;

г) $\begin{matrix} F = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{matrix}$; д) $\begin{matrix} F = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 5x_2 \\ x_1 + 3x_2 = 6 \end{matrix}$; є) $\begin{matrix} F = 2x_1^2 + 5x_1 + x_2^2 + 3x_2 \\ x_1 + 5x_2 = 12 \end{matrix}$.

Задача 7.4. На виробництво трьох видів продукції А, В і С витрачають матеріальні, трудові та фінансові ресурси. Норми витрат на одиницю продукції, сумарний запас, а також розмір прибутку від реалізації одиниці продукції, що залежить від обсягу виробництва (в умовних одиницях), відбиває таблиця 7.1.

Таблиця 7.1 – Вихідні дані

Ресурси	**Продукція**			**Запас ресурсів**
	А	**В**	**С**	
Матеріальні	4	5	7	100
Трудові	3	6	8	120
Фінансові	2	1	4	75
Прибуток	$4x_1^2$	$x_2^2+2x_2$	$3x_3^2+6$	
Обсяг виробництва	X_1	X_2	X_3	

Попит на продукцію видів В і С відомий і становить 12 і 8 од. Визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду, якщо ресурси потрібно використати повністю. Знайти оцінки ресурсів і подати економічний аналіз оптимального плану.

Тема 8 ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ (6 годин)

Загальна схема методів динамічного програмування.

Основні типи задач і моделі динамічного програмування.

Література: [1], с. 195-209; [2], с. 292-310; [4], с. 441-465.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачу динамічного програмування.
2. Поясніть сутність методу розв'язання задач динамічного програмування.
3. Наведіть приклади реальних динамічних задач.

Приклад 8.1. Для ритмічної роботи підприємства необхідне систематичне поповнення запасу сировини С, що витрачається при виробництві продукції. Потреба в сировині за місяцями планового періоду відома та виражається числами 150, 50, 100 і 100 од. Поповнення запасу проводиться партіями, кратними 50 од. На початок планового періоду на складах підприємства є запас сировини обсягом в 100 од. Складські приміщення не дозволяють зберігати одночасно більше 300 од. сировини. До кінця планового періоду весь запас повинен бути витрачений, оскільки підприємство переходить на випуск нової продукції, для якої сировина С не буде потрібна.

Витрати $P(x)$ на поповнення запасу залежать від обсягу x партії поставки та описуються функцією $P(x)$, що задається таблицею 8.1.

Таблиця 8.1 – Вихідні дані

x	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
$P(x)$	0	50	48	44	40	36	32	27	24	22	21	21	20

Витрати $\varphi(\overline{m}_i)$ на зберігання сировини залежать від середнього рівня $\overline{m}_i$ запасу сировини в даному місяці, що визначається за формулою

$$\overline{m}_t = D_t/2 + j_t ,$$

де D_t – обсяг споживання сировини в даному місяці;

j_t - залишок сировини до кінця цього місяця.

Витрати на зберігання описуються функцією $\varphi(\overline{m}_i)$, що задається таблицею 8.2.

Таблиця 8.2 – Витрати на зберігання

$\overline{m}_i$	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325
$\varphi(\overline{m}_i)$	0	3	8	15	30	36	41	46	50	51	52	53	54	56

Потрібно так організувати процес поповнення і зберігання сировини на підприємстві в розглянутому плановому періоді, щоб сумарні витрати мінімізувалися при неодмінній умові безперебійного функціонування виробництва.

Розв'язання

Позначимо:

$f_t(i)$ – мінімальні сумарні витрати на поповнення і зберігання сировини за останні t місяців планового періоду при рівні запасу на початок t-го місяця в i одиниць;

x - обсяг партії поставки сировини;

d_t – обсяг споживання сировини в t-му місяці;

i_t – рівень запасу сировини на початок місяця;

j_t – залишок сировини на кінець місяця;

M - місткість складських приміщень підприємства.

Тоді рівень запасу сировини на кінець t-го місяця визначиться як

$$i_t + x - d_t.$$

Функціональні рівняння Беллмана матимуть наступний вигляд:

для 4-го місяця - $$f_4(i) = P_4(x) + \varphi_4(d_4/2),$$

де перший доданок - витрати на поповнення запасу сировини, а другий - витрати на зберігання сировини в 4-му місяці;

для проміжного t-го місяця -

$$f_t(i) = \min\{P_t(x) + \varphi_t(d_t/2 + (i + x - d_t)) + f_{t-1}(i + x - d_{t-1})\},$$

де перший доданок – витрати в t-му місяці на поповнення запасу сировини в обсязі x_t од., другий – витрати на зберігання сировини в цьому місяці, причому середній рівень запасу становить ($d_t/2+(i+x-d_t)$) од., третій – мінімальні сумарні витрати на поповнення і зберігання сировини за попередні місяці планового періоду.

За умовою $d_1=150$, $d_2=50$, $d_3=100$ і $d_4=100$, $i_1=100$, M=300 (рис. 8.1).

Функціональне рівняння для 4-го місяця матиме такий вигляд:

$$f_4(i) = P_4(x) + \varphi_4(100/2),$$

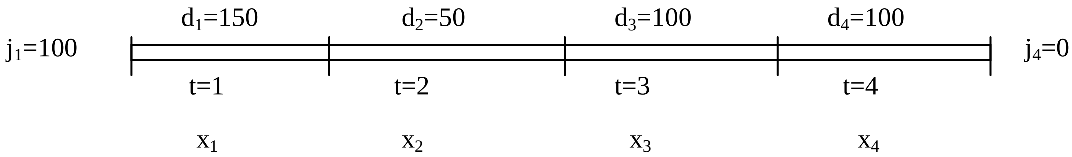

Рисунок 8.1 – Обсяги споживання сировини

де рівень запасу сировини на початок 4-го місяця може становити 0, 50 або 100 од., відповідно x може приймати значення 100, 50 або 0 од. Заповнимо таблицю 8.3 і визначимо сумарні мінімальні витрати на поповнення запасу і його зберігання.

Таблиця 8.3 – Вихідні дані

i	x_4(i)	f_4(i)
0	100	40+8
50	50	48+8
100	0	0+8

Очевидно, витрати останнього місяця будуть найменшими у випадку, якщо запас на початок забезпечить видаток сировини.

Проаналізуємо два останніх місяці:

$$f_3(i) = \min\{P_3(x) + \varphi_3(100/2 + (i + x - 100)) + f_4(i + x - 100)\}.$$

Рівень запасу сировини на початок 3-го (другого від кінця) місяця може становити 0, 50, 100, 150 або 200 од., а обсяг поставки сировини x відповідно

200, 150, 100, 50 або 0 од. Заповнимо таблицю. У клітки основного поля таблиці будемо вписувати значення суми трьох доданків P_3, φ_3 і f_4. Якщо на початок 3-го місяця залишок i=0, тоді:

якщо поставка x=100, то f_3(i=0) = 40+8+48,

якщо поставка x=150, то f_3(i=0) = 32+30+56,

якщо поставка x=200, то f_3(i=0) = 24+41+8.

Мінімальна вартість дорівнює 73 при поставці x=200. Занесемо ці значення в останні стовпці. Аналогічно заповнимо інші клітки таблиці 8.4.

Таблиця 8.4 – Рівень запасу сировини на початок 3-го місяця

x / i_3	0	50	100	150	200	$x^{опт}_3$(i)	f_3(i)
0			40+8+48	32+30+56	24+41+8	200	73
50		48+8+48	40+30+56	32+41+8		150	81
100	0+8+48	48+30+56	40+41+8			0	56
150	0+30+56	48+41+8				0	86
200	0+41+8					0	49

Функціональне рівняння для 2-го місяця

$$f_2(i) = \min\{P_2(x) + \varphi_2(50/2 + (i + x - 50)) + f_3(i + x - 50)\}.$$

Рівень запасу сировини на початок 2-го (третього від кінця) місяця може становити 0, 50, 100, 150, 200 або 250 од., а обсяг поставки сировини x відповідно 250, 200, 150, 100, 50 або 0 од. Заповнимо таблицю. Якщо на початок 2-го місяця залишок i=0, тоді:

якщо поставка x=50, то f_3(i=0) = 48+3+73,

якщо поставка x=100, то f_3(i=0) = 40+15+81,

якщо поставка x=150, то f_3(i=0) = 32+36+56,

якщо поставка x=200, то f_3(i=0) = 24+46+86,

якщо поставка x=250, то f_3(i=0) = 21+51+49.

Мінімальна вартість дорівнює 121 при поставці x=250. Занесемо ці значення в останні стовпці. Аналогічно заповнимо інші клітки таблиці 8.5.

Таблиця 8.5 – Рівень запасу сировини на початок 2-го місяця

x / i_2	0	50	100	150	200	250	$x^{опт}_2(i)$	$f_2(i)$
0		48+3+73	40+15+81	32+36+56	24+46+86	21+51+49	150	121
50	0+3+73	48+15+81	40+36+56	32+46+86	24+51+49		0	76
100	0+15+81	48+36+56	40+46+86	32+51+49			0	96
150	0+36+56	48+46+86	40+51+49				0	92
200	0+46+86	48+51+49					0	132
250	0+51+49						0	100

Функціональне рівняння для 1-го місяця:

$$f_1(i) = \min\{P_1(x) + \varphi_1(150/2 + (i + x - 150)) + f_2(i + x - 150)\}.$$

Рівень запасу сировини на початок 1-го (четвертого від кінця) місяця може становити за умовою задачі 100 од., а обсяг поставки сировини x відповідно 200, 150, 100, 50 од. Заповнимо таблицю. Якщо на початок 1-го місяця залишок i=100, тоді:

якщо поставка x=50, то f_3(i=0) = 48+3+73,

якщо поставка x=100, то f_3(i=0) = 40+15+81,

якщо поставка x=150, то f_3(i=0) = 32+36+56,

якщо поставка x=200, то f_3(i=0) = 24+46+86,

якщо поставка x=250, то f_3(i=0) = 21+51+49.

Мінімальна вартість дорівнює 121 при поставці x=250. Занесемо ці значення в останні стовпці. Аналогічно заповнимо інші клітки таблиці 8.6.

Таблиця 8.6 – Рівень запасу сировини на початок 1-го місяця

i_2 \ x	50	100	150	200	$x^{опт}_1(i)$	$f_1(i)$
100	48+15+121	40+36+76	32+46+96	24+51+92	100	152

Тепер можна прийняти остаточне рішення щодо організації процесу поповнення і зберігання сировини, який мінімізує витрати. З останньої таблиці видно, що мінімальна вартість витрат складе 152 од. Для її досягнення треба в першому місяці планового періоду зробити закупівлю 100 од. сировини, при цьому загальний запас сировини складе 200 од., з яких 150 од. буде витрачене на потреби виробництва. До початку другого місяця планового періоду залишиться 50 од. сировини, і цей запас повністю буде використаний у виробництві протягом другого місяця. На початку третього місяця треба зробити закупівлю 200 од. сировини. Цей запас повністю забезпечить виробництво в третьому та четвертому місяцях.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 8.1. Підприємство розподіляє кошти на покупку п'яти типів верстатів у чотири цехи. Експлуатація k-го верстата приносить прибуток $f_k(x_k)$ цеху залежно від кількості виділених цьому цехові верстатів x_k. Функція $f_k(x_k)$ задана таблицею 8.7.

Таблиця 8.7 – Вихідні дані

x_k	$f_1(x_k)$	$f_2(x_k)$	$f_3(x_k)$	$f_4(x_k)$
1	10	12	14	12
2	15	14	16	13
3	18	16	19	16
4	20	20	22	18
5	24	22	24	22

Визначити, яку кількість верстатів треба виділити кожному цеху, щоб сумарний прибуток був максимальним.

Задача 8.2. В умовах попередньої задачі кількість виділених верстатів покласти рівною шести. Функція для шести верстатів $f_k(x_k)$ задана в таблиці 8.8.

Таблиця 8.8 – Вихідні дані

x_k	$f_1(x_k)$	$f_2(x_k)$	$f_3(x_k)$	$f_4(x_k)$
1	10	12	14	12
2	15	14	16	13
3	18	16	19	16
4	20	20	22	18
5	24	22	24	22
6	30	28	32	30

Задача 8.3. Фірма планує нарощувати виробничі потужності на трьох підприємствах, виділяючи для цього 18 млн.грн. За кожним із підприємств розроблено інвестиційний проект із зазначенням прогнозованих сумарних витрат C та доходів D, що пов'язані з його реалізацією. Розробити план інвестування. Вихідні дані наведені в таблиці 8.9.

Таблиця 8.9 – Вихідні дані

Інвестиційний проект	**Підприємство**					
	1		**2**		**3**	
	Інвестиції, млн грн.	**Прибуток, млн грн.**	**Інвестиції, млн грн.**	**Прибуток, млн грн.**	**Інвестиції, млн грн.**	**Прибуток, млн грн.**
1	0	0	0	0	0	0
2	2	6	6	12	7	9
3	4	8	7	14	8	10
4	5	11	9	18	10	14

Задача 8.4. Розв'язати задачу 8.3, якщо розмір інвестицій становить 20 млн. грн., а перший інвестиційний проект (ситуація, коли певному підприємству не виділяється коштів) є неприпустимим.

Задача 8.5. Розв'язати задачу 8.3, якщо модернізація має проводитися ще на одному - четвертому підприємстві фірми, для якого розроблено три інвестиційні проекти, що наведені в таблиці 8.10.

Таблиця 8.10 – Інвестиційні проекти

Проект	**Інвестиції, млн грн.**	**Прибуток, млн грн.**
1	0	0
2	4	6
3	5	8

Врахувати, що інвестиційний портфель збільшиться на 2 млрд грн.

Задача 8.6. Знайти оптимальний розподіл 6 млрд грн. між трьома підприємствами галузі. Прибуток, який можна одержати від капіталовкладень певного розміру в кожне з підприємств, відбиває таблиця 8.11.

Таблиця 8.11 – Вихідні дані

Розмір капіталовкладень, млн.грн.	**Прибуток по підприємствах, млн грн.**		
	I	**II**	**III**
1	0,27	0,34	0,21
2	0,31	0,44	0,35
3	0,42	0,57	0,46
4	0,65	0,69	0,68
5	0,74	0,87	0,74
6	0,93	0,95	0,85

Тема 9 ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ТА РИЗИКУ (6 годин)

Загальна математична постановка задачі стохастичного програмування.

Класифікація задач стохастичного програмування. Основні методи розв'язання.

Імітаційне моделювання.

Прийняття рішень в умовах невизначеності й ризику.

Література: [1], с. 223-237; [4], с. 607-628.

Контрольні запитання

1. Поясніть сутність задач стохастичного програмування.
2. Як класифікують стохастичні оптимізаційні моделі?
3. Яка стохастична задача називається одноетапною?
4. Яка стохастична задача називається двоетапною?
5. Охарактеризуйте методи розв'язання стохастичних задач.

Приклад 9.1. Фермер має змогу купити три види зерна для готування кормових сумішей. Дані про поживність зерна, його вартість і мінімальні та максимальні потреби в живильних речовинах наведені в таблиці 9.1.

Таблиця 9.1 – Вихідні дані

Зерно	**Кормових одиниць**	**Протеїн**	**Лізин**	**Кальцій**	**Ціна, грн.**
Ячмінь	115	8,5	0,41	45	45
Кукурудза	133	7,3	0,21	40	40
Горох	118	19,2	1,42	0,2	50
Потреба в живильних речовинах					
максимальна	106	890	45	12	
мінімальна	95,4	801	41	9	

Потреба в живильних речовинах розподілена рівномірно. Розробити економіко-математичну модель і знайти оптимальне рішення, що забезпечує мінімальні витрати на закупівлю зерна й задовольняє мінімально припустиму потребу у всіх живильних речовинах з імовірністю 0,9.

Розв'язання

Нехай x_1, x_2, x_3 – необхідна кількість ячменя, кукурудзи й гороху відповідно. Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

$$F(x_1,x_2,x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3 \rightarrow \min$$

за умови

$$P\{115x_1 + 133x_2 + 118x_3 \geq a\} \geq 0{,}9,$$
$$P\{8{,}5x_1 + 7{,}3x_2 + 19{,}2x_3 \geq b\} \geq 0{,}9,$$
$$P\{0{,}41x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}42x_3 \geq c\} \geq 0{,}9,$$
$$P\{0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 \geq d\} \geq 0{,}9,$$

де a, b, c, d - випадкові рівномірно розподілені величини.

Отриману систему імовірнісних обмежень запишемо у вигляді детермінованих еквівалентів:

$$115x_1 + 133x_2 + 118x_3 \geq a_1,$$
$$8{,}5x_1 + 7{,}3x_2 + 19{,}2x_3 \geq b_1,$$
$$0{,}41x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}42x_3 \geq c_1,$$
$$0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 \geq d_1,$$

де a_1, b_1, c_1, d_1 – значення випадкових величин, що задовольняють умовам

$$P\{a \geq a_1\} \geq 0{,}9,$$
$$P\{b \geq b_1\} \geq 0{,}9,$$
$$P\{c \geq c_1\} \geq 0{,}9,$$
$$P\{d \geq d_1\} \geq 0{,}9.$$

Визначимо параметри a_1, b_1, c_1, d_1. З теорії ймовірностей відомо, що

$$\frac{1}{106-95{,}4}\int_{95{,}4}^{a_1} d\varphi = 0{,}9 .$$

Звідси дістанемо $\frac{1}{10{,}6}\left(\varphi\Big|_{95{,}4}^{a_1}\right) = 0{,}9$ або $\frac{1}{10{,}6}(a_1 - 95{,}4) = 0{,}9$; $a_1 = 104{,}94$.

Визначимо інші параметри: b_1=881,1; c_1 = 44,6; d_1 = 11,7.

Запишемо детермінований варіант економіко-математичної моделі

$$F(x_1,x_2,x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3 \rightarrow \min$$

за умови

$$115x_1 + 133x_2 + 118x_3 \geq 104{,}94,$$
$$8{,}5x_1 + 7{,}3x_2 + 19{,}2x_3 \geq 881{,}1,$$
$$0{,}41x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}42x_3 \geq 44{,}6,$$
$$0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 \geq 11{,}7,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Вирішивши цю задачу симплексним методом, дістанемо x_1=3,094, x_2=3,559, x_3=1,866. Оптимальний видаток складе 3749 грн.

Приклад 9.2. Нехай потрібно зробити запас з n товарів у кількості X =(x_1, x_2,..., x_n), на які є випадковий попит ω = (ω_1, ω_2, ..., ω_n). Нестача одиниці j-го товару карається штрафом c_j, тобто C = (c_1, c_2, ..., c_n), а витрати на зберігання одиниці відповідної продукції, яку не вдалося збути, задаються вектором d = (d_1, d_2, ..., d_n).

Розв'язання

Функція збитків, що відповідає розв'язку x, має вигляд:

$$f(x,\omega)=\sum_{j=1}^{n}\left\{C_j\max\left(0,\omega_j-x_j\right)+d_j\max\left(0,x_j-\omega_j\right)\right\},$$

де $C_j\max\left(0,\omega_j-x_j\right)$ - штраф за незадоволення попиту щодо j-го виду продукції;

$d_j\max\left(0,x_j-\omega_j\right)$ - витрати на зберігання j-ї продукції.

Для знаходження оптимального розв'язку цієї задачі необхідно знати функцію розподілу випадкової величини ω. Коли така функція розподілу невідома і знайти її неможливо, вважають, що випадкова величина розподілена рівномірно. При цьому необхідно пам'ятати, що саме таке припущення може призвести до неправильного прийняття рішення.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 9.1. Фірма виробляє товар, попит на який заздалегідь не відомий. Навіть при відомих цінах і витратах на виробництво очевидний ризик неотримання прибутку, якщо обсяг виробництва менше попиту, або невиправданих витрат, якщо обсяг виробництва більше попиту.

Нехай z - випадковий попит на товар, c - ціна реалізованого товару, g - питомі витрати на виробництво, x - шуканий обсяг виробництва продукції.

Сформулювати модель балансу попиту і пропозиції з урахуванням можливості часткової адаптації виробництва до попиту.

Задача 9.2. Для виготовлення виробів двох видів (j=1,2) можна використати обладнання двох груп (i=1,2). Витрати часу a_{ij} цими групами обладнання на виготовлення продукції є випадковими величинами. Собівартість одного виробу b_{ij} (i=1,2; j=1,2) - також випадкова величина. Нехай щільність розподілу випадкових величин a_{ij} та b_{ij} відома; a_{ij} розподілені за нормальним законом з математичним сподіванням $\overline{a}_{ij}$ та середнім квадратичним відхиленням σ_{ij}, а b_{ij} розподілені рівномірно в інтервалі (b_{ij} , γ_{ij}).

Нехай N_1 і N_2 - плани випуску виробів першого та другого виду (що обумовлюється контрактом): N_1 = 100 шт., N_2 = 200 шт.

Визначити оптимальний план роботи обладнання, за якого мінімізуються сподівані сумарні виробничі витрати на випуск виробів, якщо ризик (імовірність) перевищення фонду часу T у разі виконання контрактів становить не більш як 0,10, а ризик невиконання контракту не перевищує 0,05.

Побудувати математичну модель задачі і розв'язати її для даних, наведених у таблиці 9.2.

Таблиця 9.2 – Вихідні дані

Група обладнання i	**Питомі витрати часу, людино-год/шт.**				**Питома собівартість виробу, грн.**				**Фонд часу j-го обладнання, год.**
	j=1		**j=2**		**j=1**		**j=2**		
	a_{i1}	σ_{i1}	a_{i2}	σ_{i2}	δ_{i1}	γ_{i1}	δ_{i2}	γ_{i2}	
1	0,2	0,2	0,3	0,3	2	4	1	2	50
2	0,1	0,2	0,1	0,2	3	6	2	8	65

Задача 9.3. Деталі (j = A, B, C) можна обробляти на трьох верстатах (i = 1, 2, 3). Припустимо, що норми витрат часу на обробку j-ї деталі на i-му верстаті випадкові та розподілені згідно з рівномірним законом у інтервалі [δ_{ij} , γ_{ij}], а ціна j-ї деталі C_j - також є випадковою величиною, що розподілена за нормальним законом із середнім $\overline{C}_j$ та середнім квадратичним відхиленням δ_{ij} . Значення δ_{ij} і γ_{ij} , C_j і σ_i наведено в таблицях 9.3 та 9.4.

Таблиця 9.3 – Значення параметрів розподілу

Характеристика	**Ціна деталі**		
	A	B	C
C_j	10	16	12
σ_j	5	10	8

Таблиця 9.4 – Вихідні дані

Верстат i	**Норма часу на обробку деталі**						**Плата за 1 год, роботи верстата, тис. грн.**	**Ліміт часу роботи верстата, год.**
	A		**B**		**C**			
	δ_{iA}	γ_{iA}	δ_{iB}	γ_{iB}	δ_{iC}	γ_{iC}		
1	0,2	0,4	0,1	0,2	0,05	0,1	30	40
2	0,6	1,0	0,1	0,3	0,1	0,4	10	50
3	0,2	0,5	0,2	0,4	0,2	0,0	20	60

Нехай будь-яку деталь можна виготовити на будь-якому верстаті.

Визначити оптимальну виробничу програму, яка забезпечує виконання таких умов:

- максимум сподіваної вартості товарної продукції за мінімального ризику;
- максимум сподіваного сумарного прибутку за мінімального ризику;
- максимум сподіваного прибутку за умови, що кожний верстат виготовляє лише одну деталь, а планом передбачено виробництво всіх трьох деталей;
- максимум прибутку за умови, що ризик випустити не менш як 120 шт.

деталей A буде не більшим за 0,20;

- ризик того, що деталей A буде випущено не менш як 100 шт., а деталей B не менш як 200 шт., буде не більшим за 0,25;

- мінімум ризику стосовно того, що буде випущено не менш як задану кількість комплектів, а саме 80, які містять 3 деталі типу A, 2 деталі B та одну деталь C;

- максимум прибутку, коли ризик того, що деталей A буде випущено не менше як 90 шт., не перевищує 0,10, а деталей B не менш ніж 900 шт. - не перевищує 0,85.

Тема 10 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР (6 годин)

Основні поняття теорії ігор.

Змішані стратегії. Основна теорема теорії ігор.

Зведення гри двох гравців до задачі лінійного програмування.

Література: [1], с. 213-221; [2], с. 239-249; [4], с. 549-557, 575-578, 580-587.

Контрольні запитання

1. Що називається конфліктною ситуацією?
2. Що таке гра?
3. Що таке хід гри?
4. Дайте визначення платіжної матриці.
5. Сформулюйте принцип „мінімакса”.
6. Дайте визначення максимінної та мінімаксної стратегій.
7. Яка гра називається скінченою, парною?
8. Які властивості мають оптимальні стратегії гравців?
9. Дайте визначення понять виграш, ціна гри, нижня та верхня ціни гри.
10. Сформулюйте основну теорему теорії ігор.
11. Зведення гри до задачі лінійного програмування.

Приклад 10.1. Дві компанії A і B продають два види товарів. Компанія A рекламує продукцію на радіо (A_1), телебаченні (A_2) і в газетах (A_3). Компанія B, на додаток до використання радіо (B_1), телебачення (B_2) і газет (B_3), розсилає також брошури поштою (B_4). Залежно від уміння та інтенсивності проведення рекламної кампанії, кожна з компаній може залучити на свою сторону частину клієнтів конкуруючої компанії. Наведена у таблиці 10.1 матриця характеризує відсоток клієнтів, притягнутих або загублених компанією A.

Таблиця 10.1 – Вихідні дані

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**Мінімуми рядків**
A_1	8	-2	9	-3	-3
A_2	6	5	6	8	5
A_3	-2	4	-9	5	-9
Максимуми стовпців	8	5	9	8	

Розв'язання

Вирішення гри ґрунтується на забезпеченні найкращого результату з найгірших кожного гравця. Якщо компанія А обирає стратегію A_1, то незалежно від того, що робить компанія В, найгіршим результатом є втрата компанією А 3% ринку на користь компанії В. Це визначається мінімумом елементів першого рядка матриці платежів. Аналогічно при виборі стратегії A_2 найгіршим результатом для компанії А є збільшення ринку на 5% за рахунок компанії В. Нарешті, найгіршим результатом при виборі стратегії A_3 є втрата компанією А 9% ринку на користь компанії В. Ці результати містяться в стовпці «Мінімуми рядків». Щоб досягти найкращого результату з найгірших, компанія А обирає стратегію A_2, тому що вона відповідає найбільшому елементові стовпця «Мінімуми рядків».

Розглянемо тепер стратегії компанії В. Оскільки елементи матриці є платежами компанії А, критерій найкращого результату з найгірших для компанії В відповідає вибору мінімаксного значення. У результаті доходимо висновку, що вибором компанії В є стратегія B_2.

Оптимальним рішенням у грі є вибір стратегій A_2 і B_2, тобто обом компаніям треба проводити рекламу на телебаченні. При цьому виграш буде на користь компанії А, тому що її ринок збільшиться на 5 %. У цьому разі говорять, що ціна гри дорівнює 5% і що компанії А і В використовують стратегії, що відповідають сідловій точці.

Рішення, що відповідає сідловій точці, гарантує, що ні однієї компанії немає рації намагатися вибрати іншу стратегію. Дійсно, якщо компанія В переходить до іншої стратегії (B_1, B_3 або B_4), то компанія А може зберегти свій вибір стратегії A_2, що призведе до більшої втрати ринку компанією В (6 або 8%). За тими самими причинами компанії А немає резону використовувати іншу стратегію, тому що коли вона візьме, наприклад, стратегію A_3, то компанія В може використати свою стратегію B_3 і збільшити свій ринок на 9%. Аналогічні висновки мають місце, якщо компанія А використовуватиме стратегію A_1.

Оптимальне рішення гри, що відповідає сідловій точці, не обов'язково повинне характеризуватися чистими стратегіями. Замість цього оптимальне рішення може вимагати змішування випадковим чином двох або більше стратегій.

Приклад 10.2. Розв’язати гру 2х4, у якій платежі сплачуються гравцеві А. Вихідні дані наведені в таблиці 10.2.

Таблиця 10.2 – Вихідні дані

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**
A_1	2	2	3	-1
A_2	4	3	2	6

Для розв’язання скористатися графічним методом.

Розв'язання

Гра не має розв’язання у чистих стратегіях, тому стратегії повинні бути змішаними. Очікуваний виграш гравця А, що відповідає j-й чистій стратегії гравця В, визначають за формулою

$$(a_{1j}-a_{2j})p_1+a_{2j}, \qquad j=1, 2, \ldots, n.$$

Очікувані виграші гравця А, що відповідають чистим стратегіям гравця В, запишемо у таблицю 10.3.

Таблиця 10.3 – Очікувані виграші гравця А

Чисті стратегії гравця В	**Очікувані виграші гравця А**
1	$-2p_1+4$
2	$-p_1+3$
3	p_1+2
4	$-7p_1+6$

Відповідно до чотирьох стратегій гравця В побудуємо чотири прямі лінії (рис. 10.1).

Максимінну точку визначаємо як найбільший виграш нижньої огинаючої, якому відповідає точка перетину прямих 3 і 4. Визначимо імовірність p_1:

$$p_1+2=-7p_1+6; \; p_1=0{,}5.$$

Визначимо ціну гри:

$$v=\begin{cases}0{,}5+2=2{,}5-\textit{з} \quad \textit{рівняння} \quad \textit{прямої} \quad 3,\\ -7*0{,}5+6=2{,}5-\textit{з} \quad \textit{рівняння} \quad \textit{прямої} \quad 4.\end{cases}$$

Оптимальним рішенням для гравця А є змішування стратегій A_1 і A_2 з ймовірностями 0,5 і 0,5. Оптимальна змішана стратегія гравця В визначається двома стратегіями, що визначають нижню огинаючу графіка, тобто стратегіями B_3 і B_4. Виходячи з цього, запишемо очікувані платежі гравця В, що відповідають чистим стратегіям гравця А (табл. 10.4).

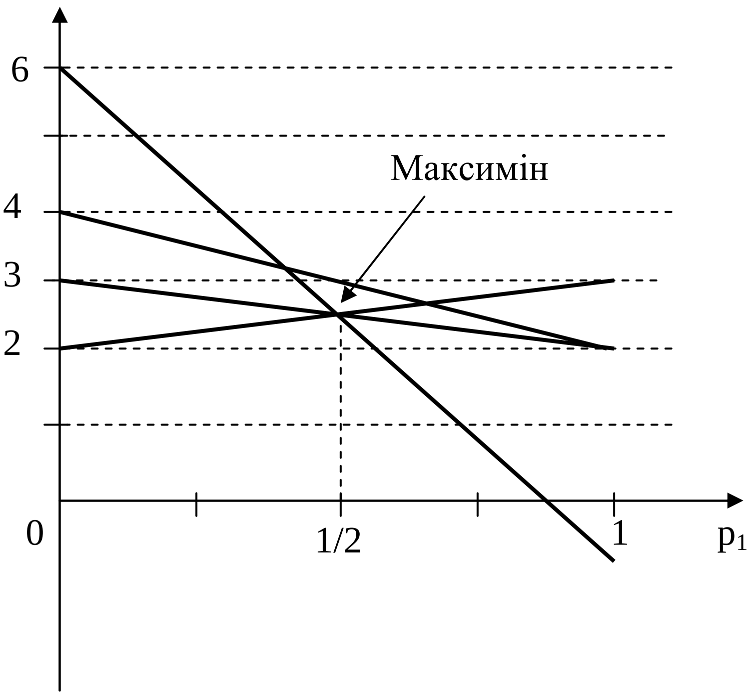

Рисунок 10.1 – Визначення точки максиміна

Таблиця 10.4 – Очікувані платежі гравця В

Чисті стратегії гравця А	**Очікувані платежі гравця В**
1	$4q_3-1$
2	$-4q_3+6$

Відповідно до двох стратегій гравця А побудуємо прямі лінії (рис. 10.2).

Мінімакс для гравця В визначаємо як найменший програш верхньої огинаючої, якому відповідає точка перетину прямих. Визначимо імовірність q_3:

$$4q_3-1=-4q_3+6; \quad q_3=7/8.$$

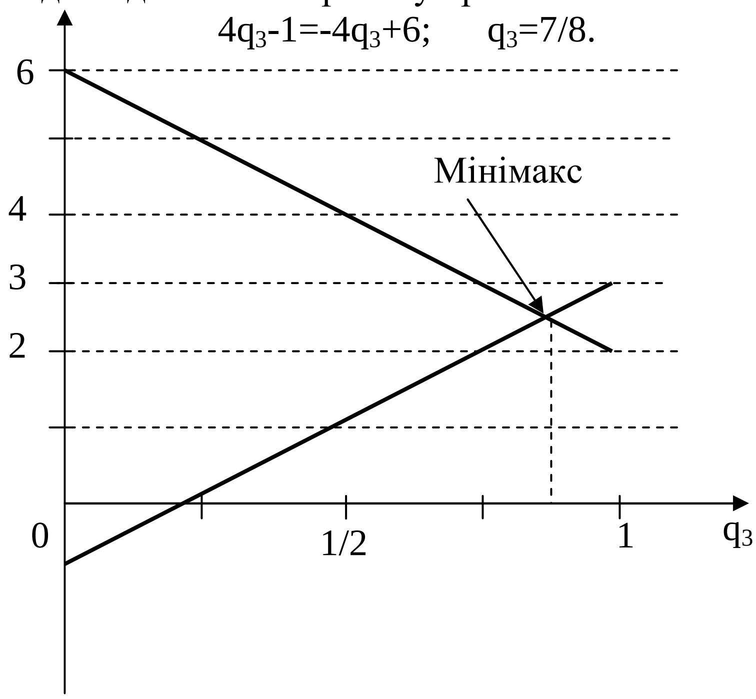

Рисунок 10.2 – Визначення точки мінімакса

Визначимо ціну гри:

$$v=\begin{cases} 4*\frac{7}{8}-1=2{,}5, \\ -4*\frac{7}{8}+6=2{,}5. \end{cases}$$

Таким чином, рішенням гри для гравця А є змішування стратегій A_1 і A_2 з рівними імовірностями 0,5 і 0,5, а для гравця В - змішування стратегій B_3 і B_4 з імовірностями 7/8 і 1/8.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 10.1. Визначить рішення, обумовлене сідловою точкою, що відповідає чистій стратегії, і ціну гри для наступних ігор, у яких платежі задані для гравця А.

а)

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**
A_1	8	6	2	8
A_2	8	9	4	5
A_3	7	5	3	5

б)

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**
A_1	4	-4	-5	6
A_2	-3	-4	-9	-2
A_3	6	7	-8	-9
A_4	7	3	-9	5

Задача 10.2. Розв'язати графічно гру, у якій платежі сплачуються гравцеві А.

а)

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	1	3	4	-3	-2
A_2	2	5	1	4	1

б)

	B_1	**B_2**
A_1	2	5
A_2	7	1
A_3	3	7
A_4	4	6
A_5	9	2

в)

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**
A_1	5	3	2	-4	8
A_2	2	1	4	5	3

г)

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_4**
A_1	2	4	0	3	5
A_2	6	3	8	4	2
A_3	1	3	-2	2	4

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Ачкасов А. Є. Конспект лекцій з курсу «Економіко-математичне моделювання» (для студентів 3 курсу заочної форми навчання бакалаврів за галуззю знань 0305 - Економіка і підприємництво, напрями підготовки 6.030504 - Економіка підприємства, 6.030509 - Облік і аудит) / А. Є. Ачкасов, О. О. Воронков; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2011.– 204 с.
2. Вітлінський В. В. Математичне програмування: [навч. посіб для студ. вищих навч. закл. економ. спец.] / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т. О.Терещенко. – Київ : КНЕУ, 2001. – 380 с.
3. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование: учебник / Ю. Н. Кузнецов, В. А. Кузубов, А. В. Волощенко. – Москва : Высш.школа, 1980. – 240 с.
4. Таха Х. А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха – Москва : Изд.дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
5. Исследование операций в экономике: Уч. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман./ Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – Москва : ЮНИТИ, 2003. - 407 с.
6. Акулич И. Л. Математическое програмирование в примерах и задачах: учеб. пособ. / И. Л. Акулич .- Москва : Высш. школа, 1986. – 244с.
7. Акоф Р. Основы исследования операций / Р. Акоф, М. Сасиени. – Москва : Мир, 1971. – 320 с.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

для практичних занять та самостійної роботи
з навчальної дисципліни

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

*(для студентів заочної форми навчання
освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»
напряму підготовки 6.030504 - Економіка підприємства)*

Укладачі **ВОРОНКОВ** Олексій Олександрович

Відповідальний за випуск *А. Є. Ачкасов*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2015, поз. 488М

Підп. до друку 03.11.2015 Формат 60х84/16
Друк на різографі Ум. друк. арк. 4,6
Зам. № Тираж 50 пр.

Виконавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК 4705 від 28.03.2014 р.