МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

А. І. Колосов, А. В. Якунін

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»
у двох модулях
Модуль 1

Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної

(*для студентів денної форми навчання за напрямом підготовки 6.050201 – Системна інженерія*)

Харків – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2016

Колосов А. І. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» : у 2-х модулях (для студентів денної форми навчання за напрямом підготовки 6.050201 – Системна інженерія) / А. І. Колосов, А. В. Якунін ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. − Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016.

Колосов А. І. Модуль 1 : Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної / А. І. Колосов, А. В. Якунін. – 2016. – 230 с.

Автори : д-р фіз.-мат. наук, проф. А. І. Колосов,
канд. техн. наук, доц. А. В. Якунін

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доц. М. П. Данилевський

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 7 від 24.02.2016 р.

Математика – це ключ і двері до всіх наук.
Г. Галілей

Інженер повинен володіти загальними математичними методами – тільки тоді він зможе вирішувати дійсно нові питання для своєї спеціальності.
О. М. Крилов

Передмова

У конспекті лекцій викладено розділи, що відповідають першому семестру курсу вищої математики за діючою програмою для студентів галузі знань 0502 – Автоматика та управління, напряму підготовки 6.050201 – Системна інженерія. Головна увага приділяється розкриттю суті понять, їх взаємозв'язків без надмірної строгості викладу з об'єднуючою прикладною спрямованістю. Теоретичні відомості подаються коротко, чітко й аргументовано з опорою на наочність, інтуїцію та з ілюстрацією на типових прикладах. Частина викладеного матеріалу розрахована на самостійне опрацювання. До всіх розділів додаються контрольні запитання.

Системна інженерія використовує широкий математичний апарат для дослідження зв'язків між різними величинами, що характеризують техніко-економічні процеси. Вивчення основ вищої математики та ознайомлення з її різноманітними застосуваннями дозволить майбутнім фахівцям оволодіти математичною культурою і вдосконалити своє логічне та абстрактне мислення, що відкриє доступ до досягнень світової науки і дасть можливість творчо переосмислити базові підходи в системній інженерії, сформувати обґрунтоване особисте бачення задач зі сфери своєї професійної діяльності та виробити інноваційні підходи до їх вирішення.

Основою даного посібника є цикл лекцій з вищої математики, що читаються на факультеті менеджменту за відповідним напрямом підготовки бакалавра Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова.

Конспект лекцій призначений для студентів зазначеного напряму і може бути використаний для студентів галузі знань 0501 – Інформатика та обчислювальна техніка, напряму 6.050101 – Комп'ютерні науки.

Змістовий модуль 1 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ. ВСТУП ДО АНАЛІЗУ. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Аналітичною геометрією називається розділ вищої математики, в якому вивчаються геометричні об'єкти засобами алгебри на основі методу координат.

Математичний аналіз – це сукупність розділів вищої математики, в яких вивчаються властивості змінних величин на основі понять функції, граничного переходу та неперервності.

1.1 Пряма лінія на площині

Для визначення положення довільної точки використовується деяка система координат. Її вибір залежить від характеру поставленої задачі. Найбільш поширеною на практиці є декартова прямокутна система координат.

1.1.1 Координатна пряма. Числові проміжки. Модуль дійсного числа

Напрямлена пряма, на якій задано початок відліку точку O і масштаб $OE = 1$, називається ***координатною прямою*** (***віссю***) (рис. 1).

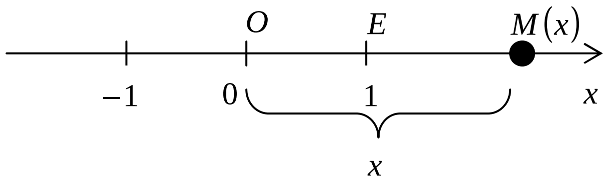


Рисунок 1

Довільній точці M координатної прямої Ox відповідає певне дійсне число x – її ***координата***. Навпаки, довільному дійсному числу x відповідає певна точка M координатної прямої Ox. Враховуючи таку взаємно однозначну відповідність, координатну пряму називають ***числовою прямою*** і ототожнюють з множиною дійсних чисел R: $R = (-\infty; +\infty)$.

Основні ***числові проміжки*** показані на рисунку 2:

$[a;\ b]$ – ***відрізок*** (***закритий інтервал*** або ***сегмент***); $[a;\ b)$, $(a;\ b]$, $(-\infty;\ a]$, $[a;+\infty)$ – ***півінтервали***, зокрема $(-\infty;\ a]$ і $[a;+\infty)$ – ***закриті півпрямі***; $(a;\ b)$, $(-\infty;\ a)$, $(a;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$ – ***інтервали***, зокрема $(-\infty;\ a)$ і $(a;+\infty)$ – ***відкриті півпрямі***, $a<b$.

Проміжки $[a;\ b]$; $[a;\ b)$, $(a;\ b]$, $(a;\ b)$ називаються ***скінченними***, а всі інші – ***нескінченними***. Числа a і b – їхні ***кінці***, $d=b-a$ – ***довжина***.

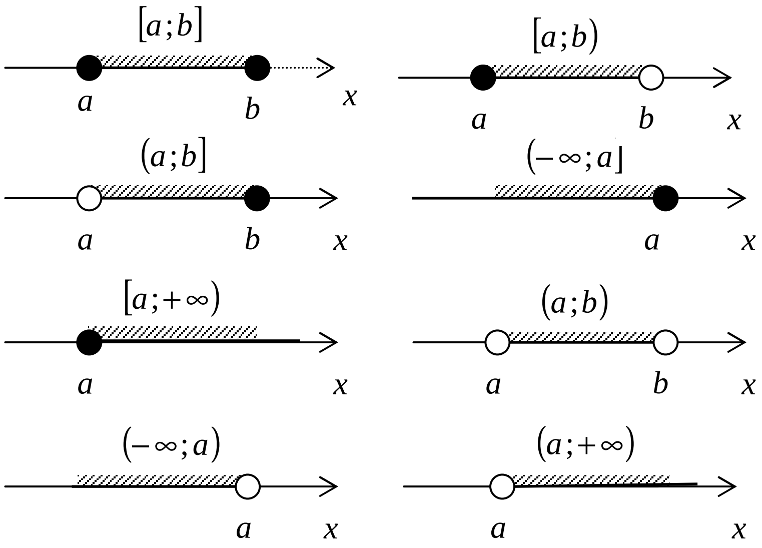


Рисунок 2

Модулем (***абсолютною величиною***) дійсного числа x називається невід'ємне число, яке позначається $|x|$ і визначається формулою

$$\boxed{|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0; \\ -x, & x<0. \end{cases}}$$

Модуль дійсного числа x дорівнює відстані відповідної точки $M(x)$ від початку відліку O (***геометричний зміст*** модуля).

Відстань між довільними двома точками $M_1(x_1)$ і $M_2(x_2)$ визначається формулою $\boxed{M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|}$.

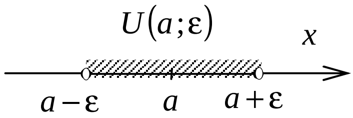


Рисунок 3

Інтервал $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ називається ε***-околом числа*** a і позначається $U(a;\varepsilon)$, де ε – довільне додатне число, $\varepsilon > 0$ (рис. 3).

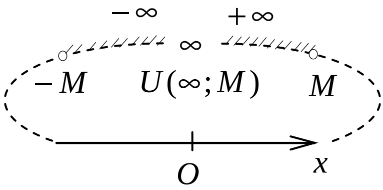


Рисунок 4

Зауваження. Координатну пряму Ox умовно можна вважати замкненою в нескінченно віддаленій точці ∞. Тому для довільного додатного числа M, $M > 0$, розглядають сукупність інтервалів $U(\infty;M) = \{x \mid |x| > M\}$, яку називають M ***- околом символу нескінченності*** ∞ (рис. 4).

1.1.2 Декартова прямокутна система координат на площині. Відстань між двома точками. Ділення відрізка у заданому відношенні

Дві взаємно перпендикулярні координатні прямі Ox і Oy зі спільним ***початком*** O утворюють ***декартову прямокутну систему координат на площині*** (рис. 5). Ox називається ***віссю абсцис***, а Oy – ***віссю ординат***. Сукупність прямих, що паралельні координатним осям, утворює ***координатну сітку*** на координатній площині Oxy. Положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою парою чисел $(x;y)$ – її ***координатами*** (x – ***абсциса***, y – ***ордината***).

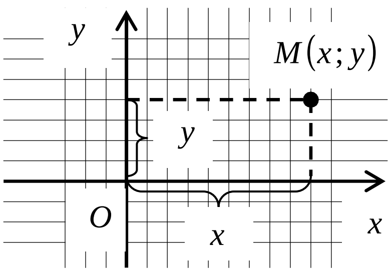


Рисунок 5

З прямокутного $\Delta M_1 N M_2$ (рис. 6) за теоремою Піфагора можна зробити висновок, що ***відстань між*** довільними ***двома точками*** $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ визначається формулою

$$\boxed{M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

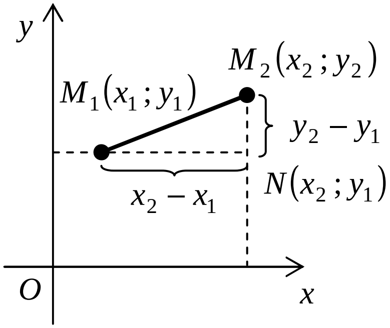


Рисунок 6

Нехай задані дві точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ і відношення $\lambda = M_1M / MM_2$, у якому точка $M(x, y)$ ділить відрізок M_1M_2, починаючи від точки M_1 (рис. 7). З подібності прямокутних трикутників $\Delta M_1NM \sim \Delta MPM_2$ випливає, що

$$\frac{NM}{PM_2} = \frac{M_1N}{MP} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda \ ; \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda \ .$$

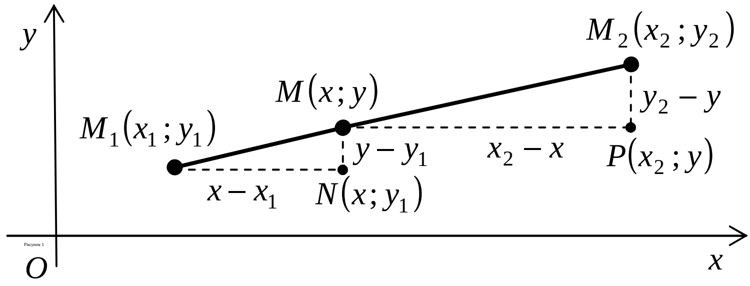


Рисунок 7

Звідси ***координати точки*** $M(x, y)$***, яка ділить заданий відрізок у заданому відношенні***, обчислюються за формулами

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}} \ ; \quad \boxed{y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}} \ .$$

<u>Зауваження 1</u>. Якщо точка M лежить між точками M_1 і M_2,

то $\lambda > 0$ (***ділення внутрішнім способом***); якщо точка M не належить відрізку M_1M_2, то $\lambda < 0$ (***ділення зовнішнім способом***).

Зауваження 2. Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$. Тоді ***координати середини відрізка*** визначаються за формулами

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}}; \qquad \boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}.$$

Приклад. Трикутник ABC задано координатами вершин $A(-2;4)$, $B(5;-2)$, $C(7;6)$. Побудувати ΔABC в системі координат. Знайти: а) довжину медіани AM; б) точку E перетину медіан.

□ M – середина сторони BC:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7+5}{2} = 6 \ ; \ \ y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2 \ ; \ \ M(6;\, 2) \ .$$

$$AM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-(-2))^2 + (2-4)^2} = \sqrt{68} \ .$$

За властивістю точки перетину медіан трикутника

$\lambda = AE/EM = 2/1 = 2$. Тоді E: $\quad x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \dfrac{-2+2\cdot 6}{1+2} = \dfrac{10}{3}$;

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{4+2\cdot 2}{1+2} = \frac{8}{3} \ ; \quad E\left(\frac{10}{3}; \frac{8}{3}\right) .$$

(Рисунок ΔABC на координатній площині Oxy зробіть самостійно). ■

1.1.3 Рівняння з двома змінними як рівняння лінії

Геометричним відображенням залежностей між двома величинами служать різні лінії – графіки відповідних функцій.

Під час розв’язування широкого кола оптимізаційних задач (наприклад, знайти найкращий план виробництва при обмежених ресурсах) потрібно виділяти певну плоску область – частину площини, обмежену деякими кривими.

Уміння будувати графіки функцій і аналізувати властивості відповідних ліній є важливим інструментом інженерної практики. Знайомство з ними починається з найпростіших випадків – прямої лінії і кривих другого порядку.

Співвідношення $\boxed{F_1(x,y)=F_2(x,y)}$ називається ***рівнянням з двома змінними***. Його можна подати у ***стандартному вигляді***

$$\boxed{F(x,y)=0}.$$

Тут $F_1(x,y)$, $F_2(x,y)$ і $F(x,y)$ – деякі вирази.

Зображення множини розв'язків даного рівняння на координатній площині Oxy називається ***графіком*** цього рівняння.

Звичайно графіком рівняння служить деяка лінія. Наприклад, а) графіком рівняння $x^2+y^2=1$ є коло з центром у початку координат $O(0;0)$ і радіусом $R=1$ (***дійсна лінія***); б) графіком рівняння є одна точка – початок координат $O(0;0)$ (***вироджена лінія***); в) рівняння $x^2+y^2=-1$ ніякого графіка не має (***уявна лінія***).

<u>Зауваження 1</u>. Вигляд рівняння лінії залежить як від самої лінії, так і від вибору системи координат.

<u>Зауваження 2</u>. Говорять, що лінія ***задана неявно***, якщо її рівняння має вигляд $F(x,y)=0$ або $F_1(x,y)=F_2(x,y)$. Якщо рівняння лінії розв'язане відносно змінної y, то говорять, що лінія ***задана явно*** рівнянням $y=f(x)$, де $f(x)$ – деякий вираз. Лінія може задаватись системою рівнянь $x=x(t)$ і $y=y(t)$, де t – допоміжна змінна (параметр), $x(t)$ і $y(t)$ – деякі вирази. Тоді говорять, що лінія ***задана параметрично***. Наприклад, траєкторія руху матеріальної точки в механіці часто задається в параметричній формі, при цьому роль параметра t відіграє час.

<u>Правило 1</u>. *Щоб встановити, чи лежить указана точка* $M_0(x_0,y_0)$ *на даній лінії* l: $F(x,y)=0$, *треба перевірити, чи задовольняють координати точки рівняння лінії*:

$$F(x_0,y_0)=0 \iff M_0\in l\ ;\quad F(x_0,y_0)\neq 0 \iff M_0\notin l\,.$$

<u>Правило 2</u>. *Щоб встановити, чи перетинаються дві дані лінії* l_1: $F_1(x,y)=0$, l_2: $F_2(x,y)=0$ *і знайти точки перетину (спільні*

точки), треба скласти систему рівнянь $\begin{cases} F_1(x,y)=0 \\ F_2(x,y)=0 \end{cases}$ *і розв'язати її.*

Правило 3. *Щоб скласти рівняння даної лінії треба:*
1) *ввести систему координат;* 2) *знайти співвідношення між координатами довільної (поточної, бігучої) точки* $M(x,y)$ *цієї лінії та відомими сталими величинами, що визначають саме цю лінію, на основі характеристичної властивості даної лінії;* 3) *за допомогою рівносильних перетворень звести одержане рівняння до найбільш простого вигляду.*

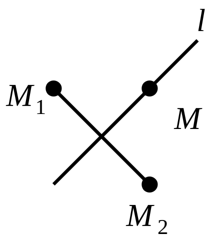


Рисунок 8

Зауваження 3. Тип лінії визначають, зводячи її рівняння до відповідного стандартного вигляду.

Приклад. Скласти рівняння серединного перпендикуляра l до відрізка M_1M_2, де $M_1(-4;5)$, $M_2(4;-1)$ (рис. 8).

□ Довільна точка $M(x,y)$ шуканої лінії рівновіддалена від кінців відрізка M_1M_2:

$$M_1M = M_2M\ ;\quad \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}\ ;$$

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-5)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2} \quad \Big|\uparrow 2\ ;$$

$$x^2+8x+16+y^2-10y+25 = x^2-8x+16+y^2+2y+1\ ;$$

$$l:\quad 4x-3y+6=0 \ \text{– пряма лінія.} \ \blacksquare$$

1.1.4 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай ***похила пряма*** l утворює кут α з віссю Ox і перетинає вісь Oy у точці $B(0;\,b)$ (рис. 9). Тангенс кута нахилу α називають ***кутовим коефіцієнтом*** k прямої l: $k = tg\,\alpha$. Число b називають ***початковою ординатою*** прямої l.

Нехай $M(x,y)$ – довільна точка прямої l. У прямокутному

ΔBNM $\angle MBN = \alpha$. Тоді

$$\frac{NM}{BN} = tg\ \angle MBN; \quad \frac{y-b}{x} = tg\ \alpha = k; \quad y - b = kx.$$

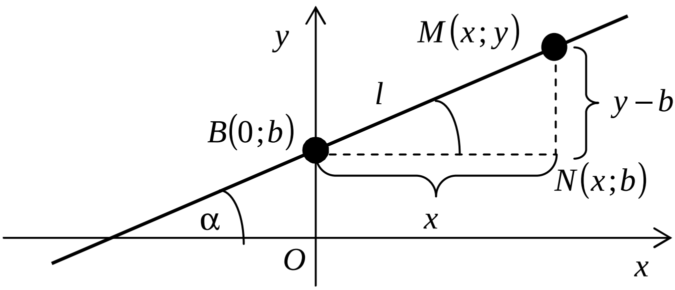


Рисунок 9

Звідси маємо ***рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом***

$$\boxed{y = kx + b}\ .$$

Зауваження 1. Якщо $b = 0$, то пряма $y = kx$ проходить через початок координат $O(0;0)$. Якщо $k = 0$, то пряма $y = b$ паралельна осі Ox (***горизонтальна***).

Зауваження 2. Якщо пряма паралельна осі Oy $(\alpha = 90^\circ)$, то її кутовий коефіцієнт не існує $(k = tg\ 90^\circ = \infty)$, отже її рівняння не можна подати у відповідному вигляді. ***Рівняння вертикальної прямої*** має вигляд $\boxed{x = a}$, де a – абсциса точки перетину $A(a;\ 0)$ з віссю Ox.

Зауваження 3. Усі витрати підприємства на виробництво й збут продукції y складаються зі сталих (орендна плата, амортизація та ін.) і змінних (заробітна плата, витрати сировини, енергоресурсів та ін.) величин. Якщо змінні витрати пропорційні обсягу виробництва продукції x, то сума витрат на виробництво продукції y визначається лінійною залежністю $y = kx + b$, де b – сума сталих витрат; k – ставка змінних витрат на одиницю продукції.

Приклад 1. Для ремонту устаткування на деякому підприємстві потрібні запчастини в кількості x одиниць на рік. Якщо виготовляти їх на власних потужностях, то сталі витрати $b = 600$ тис. грн. на рік, а ставка змінних витрат на одиницю продукції $k = 80$ грн. На ринку готові запчастини можна купити за ціною $p = 200$ грн/од. Знайти мінімальну кількість запчастин $x_{\min}$, при якій вигідніше їх виробляти самотужки.

□ Якщо купити x запчастин, то сумарні витрати становлять $Y = px = 200x$. Якщо виготовити x запчастини самотужки, то їх собівартість становить: $y = kx + b = 80x + 600\,000$. При $y < Y$ підприємству вигідніше виробляти запчастини, ніж купувати. Відповідна мінімальна кількість $x_{\min}$ потрібних запчастин є найменшим цілим розв'язком цієї нерівності:

$$80x + 600\,000 < 200x;\ 120x > 600\,000;\ x > 500;\ x_{\min} = 501. \ ■$$

<u>Приклад 2</u>. Побудувати пряму l за її рівнянням:

а) $y = 2x - 3$; б) $y = -2x$; в) $y = 2$; г) $x = -3$.

(Розв'язати самостійно).

1.1.5 Рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку. Пучок прямих

Нехай пряма l проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ і має заданий кутовий коефіцієнт k. Тоді для прямої l маємо

$$y = kx + b \ ; \quad M_0(x_0, y_0) \in l \Rightarrow y_0 = kx_0 + b \ ;$$

$$b = y_0 - kx_0 \ ; \quad y = kx + y_0 - kx_0 \ .$$

Звідси отримуємо ***рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку*** $\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}$.

<u>Зауваження</u>. ***Пучок прямих*** з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$ задається сукупністю рівнянь

$$\boxed{\left[\begin{array}{c} y - y_0 = k(x - x_0),\ k \in (-\infty; +\infty) \\ x = x_0 \ . \end{array}\right.}$$

Приклад. Написати рівняння і побудувати пряму, що належить пучку з центром у точці $M_1(-3;\,4)$, якщо: а) пряма паралельна осі Ox; б) пряма паралельна осі Oy; в) пряма нахилена до осі Ox під кутом $\alpha = 60^\circ$. (Розв'язати самостійно).

1.1.6. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай пряма l проходить через дві задані точки $M_1(x_1\,, y_1)$ і $M_2(x_2\,, y_2)$. Оскільки пряма l проходить через точку $M_1(x_1\,, y_1)$, то $y - y_1 = k\left(x - x_1\right)$. Тоді

$$M_2(x_2\,, y_2) \in l \;\Rightarrow\; y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)\;;$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\;;\quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right)\,.$$

Звідси маємо ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}\,.$$

Приклад 1. Трикутник ABC задано координатами вершин $A(2;4)$, $B(-4;1)$, $C(5;3)$. Побудувати ΔABC в системі координат. Знайти рівняння бісектриси AL.

□ $$AB = \sqrt{(-4-2)^2 + (1-4)^2} = 3\sqrt{5}\;;$$

$$AC = \sqrt{(5-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{5}\,.$$

За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника

$$\lambda = \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3\,.$$

Тоді L: $x = \dfrac{-4 + 5\cdot 3}{1+3} = \dfrac{11}{4}$; $y = \dfrac{1 + 3\cdot 1}{1+3} = 1$; $L\left(\dfrac{11}{4};\,1\right)$;

$$AL: \ \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}; \ \frac{y-4}{1-4}=\frac{x-2}{11/4-2}; \ y-4x+12=0. \ ■$$

Приклад 2. Знайти залежність $y=kx+b$ повних витрат y на виробництво продукції від її обсягу x, якщо при максимальному обсязі виробництва $x_{\max}=60$ од. загальні витрати становлять $y_{\max}=30$ млн. грн. Мінімальному обсягу виробництва $x_{\min}=40$ од. відповідають загальні витрати $y_{\min}=25$ млн. грн. Побудувати одержану пряму $y=kx+b$ на координатній площині Oxy.

□ Застосуємо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{y-y_{\min}}{y_{\max}-y_{\min}}=\frac{x-x_{\min}}{x_{\max}-x_{\min}}; \ \frac{y-25}{30-25}=\frac{x-40}{60-40};$$

$y=0{,}5x+15$ – шукана залежність.

(Рисунок зробити самостійно). ■

1.1.7 Загальне рівняння прямої та його окремі випадки

Кожна пряма описується деяким рівнянням першого степеня. Навпаки, кожне рівняння першого степеня є рівнянням деякої прямої.

Загальним рівнянням прямої називається рівняння першого степеня вигляду

$$\boxed{Ax+By+C=0},$$

де A, B і C – сталі коефіцієнти, причому хоча б одне з чисел A, B відмінне від нуля, тобто $\boxed{A^2+B^2\neq 0}$.

Зауваження 1. Загальне рівняння прямої записується з точністю до сталого множника. По можливості його зводять до вигляду, де всі коефіцієнти – цілі числа, причому перший ненульовий коефіцієнт додатний.

Зауваження 2. У залежності від значень сталих A, B і C можливі наступні окремі випадки:

$C = 0$, тоді пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат;

$A = 0$, тоді пряма $By + C = 0$ паралельна осі Ox. Її рівняння можна подати у вигляді $y = b$, де $b = -C/B$;

$B = 0$, тоді пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі Oy. Її рівняння можна подати у вигляді $x = a$, де $a = -C/A$;

$A = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $y = 0$ співпадає з віссю Ox;

$B = 0$ і $C = 0$, тоді пряма $x = 0$ співпадає з віссю Oy.

<u>Приклад 1</u>. У трикутнику ABC задано рівняння сторін AB: $3x - 4y - 2 = 0$ і AC: $2x + 5y - 9 = 0$. Знайти координати вершини A. (Розв'язати самостійно).

<u>Приклад 2</u>. Побудувати пряму l за її рівнянням:

а) $3x - 4y + 12 = 0$ (знайти точки перетину з осями координат); б) $x = 2$ (знайти точку перетину з віссю абсцис); в) $y = -4$ (знайти точку перетину з віссю ординат).

(Розв'язати самостійно).

1.1.8 Рівняння прямої у відрізках на осях

Нехай похила пряма l відтинає на осях координат Ox і Oy відповідно відрізки a і b, тобто перетинає осі координат у двох заданих точках $A(a;\,0)$ і $B(0;\,b)$ (рис. 10). Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, отримаємо

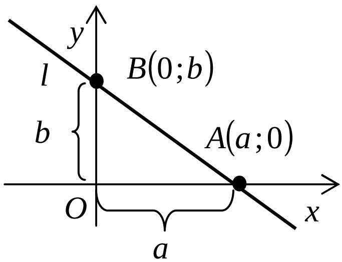


Рисунок 10

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}; \quad \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1.$$

Звідси маємо ***рівняння прямої у відрізках на осях***

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}.$$

Зауваження. У відрізках на осях не можна подати рівняння прямих, які паралельні осям координат.

Приклад. Пряма l задана своїм загальним рівнянням $4x-5y-11=0$. Записати її рівняння: а) з кутовим коефіцієнтом; б) у відрізках на осях.

□ а) $4x-5y-11=0$; $-5y=-4x+11$;

$$y=\frac{4}{5}x-\frac{11}{5}; \quad k=\frac{4}{5}; \quad b=-\frac{11}{5};$$

б) $4x-5y-11=0$; $4x-5y=11$;

$$\frac{4x}{11}-\frac{5y}{11}=1; \quad \frac{x}{11/4}+\frac{y}{-11/5}=1; \quad a=\frac{11}{4}; \quad b=-\frac{11}{5}. \ ■$$

1.1.9 Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай прямі l_1 і l_2, що зображені на рис. 11, мають задані кутові коефіцієнти відповідно k_1 і k_2. Тоді для кута φ між ними маємо

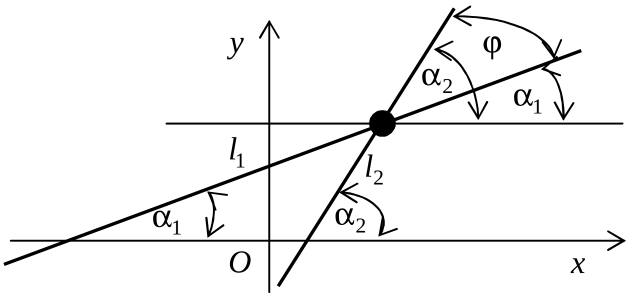


Рисунок 11

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1 \;; \qquad tg\ \varphi = \frac{tg\ \alpha_2 - tg\ \alpha_1}{1 + tg\ \alpha_1 \cdot tg\ \alpha_2}\ .$$

Оскільки $tg\ \alpha_1 = k_1$; $tg\ \alpha_2 = k_2$, то ***тангенс кута між прямими*** знаходиться за формулою

$$\boxed{tg\ \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}\ .$$

Для паралельних прямих $\varphi = 0$, $tg\ \varphi = 0$, а для перпендикулярних прямих $\varphi = 90^\circ$, $tg\ \varphi \to \infty$. З одержаної формули випливає, що

1) ***необхідною і достатньою умовою паралельності*** невертикальних прямих l_1 і l_2 є рівність $\boxed{k_1 = k_2}$;

2) ***необхідною і достатньою умовою перпендикулярності*** похилих прямих l_1 і l_2 є рівність $\boxed{k_1 k_2 = -1}$.

<u>Зауваження</u>. Кут між прямими φ розуміється як кут повороту. ***Гострий кут*** між прямими знаходиться за формулою

$$\varphi_г = arctg\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|\ .$$

<u>Приклад</u>. У тупокутному ΔABC ($\angle A$ – тупий) задано рівняння сторін AB: $y = -3x + 5$, AC: $y = 2x - 10$ і координати вершини $C(2;\,3)$. Знайти: а) $\angle A$; б) рівняння висоти CN; в) рівняння середньої лінії ML, що паралельна AB, де M – середина сторони AC.

□ а) Знайдемо гострий кут між прямими AB і AC:

$$k_{AB} = -3\,;\ k_{AC} = 2\,;\ \varphi_г = arctg\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = arctg\left|\frac{2-(-3)}{1 + 2\cdot(-3)}\right| =$$

$= arctg 1 = \pi/4$. Тоді $\angle A = \pi - \varphi_г = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$.

б) $CN \perp AB \;\Leftrightarrow\; k_1 k_2 = -1$; $k_{AB} = -3$;

$$k_{CN} = -1/k_{AB} = 1/3\,;\;\; C \in CN\,;\;\; CN:\quad y - y_0 = k\left(x - x_0\right)\,;$$

$$y - 3 = \frac{1}{3}\left(x - 2\right)\,;\quad y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}\,.$$

в) $A = AB \cap AC$: $\begin{cases} y = -3x + 5 \\ y = 2x - 10 \end{cases}$; $\quad A\left(3;\, -4\right)$.

M – середина сторони AC: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{3+2}{2} = \dfrac{5}{2}$;

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2}\,;\;\; M\left(5/2;\, -1/2\right)\,.$$

$$ML \parallel AB:\;\; k_{ML} = k_{AB} = -3\,;\;\; M \in ML\,;\;\; ML:$$

$$y - y_0 = k\left(x - x_0\right);\;\; y + 1/2 = -3\left(x - 5/2\right);\;\; y = -3x + 7\,.\;\; \blacksquare$$

1.1.10 Відстань від точки до прямої

Нехай задані точка $M_0\left(x_0\,, y_0\right)$ і пряма l своїм загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$ (рис. 12). ***Відстанню*** d ***від точки до прямої*** називається довжина перпендикуляра M_0N, опущеного з даної точки на дану пряму.

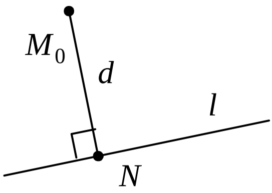


Рисунок 12

Скориставшись умовою перпендикулярності, знайдемо рівняння цього перпендикуляра $l_\perp$. Склавши і розв’язавши систему рівнянь прямих l і $l_\perp$, одержимо точку перетину N. Довжину перпендикуляра M_0N знайдемо як відстань між двома точками. В результаті (пробіть указані операції самостійно) одержимо формулу для ***відстані*** d ***від точки до прямої***

$$\boxed{d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}\,.$$

Приклад. У трикутнику ABC задано рівняння сторони AB: $x/2 - y/6 = 1$ і координати вершини $C(-1; -3)$. Знайти довжину висоти CN.

□ Перетворимо рівняння прямої AB до загального вигляду: $x/2 - y/6 = 1$; $6x - 2y = 12$; $3x - y - 6 = 0$.

Знайдемо довжину висоти CN як відстань від точки C до прямої

$$AB:\ CN = \left|3\cdot(-1) - (-3) - 6\right| \Big/ \sqrt{3^2 + (-1)^2} = 6\big/\sqrt{10}\ . \ ■$$

1.2.Криві другого порядку

1.2.1 Загальне рівняння лінії другого порядку

Лінії другого порядку відповідає рівняння другого степеня, загальний вигляд якого

$$\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}$$

де A, B, C, D, E, F – сталі коефіцієнти, причому хоча б одне з чисел A, B і C відмінне від нуля, тобто

$$\boxed{A^2 + B^2 + C^2 \neq 0}.$$

Існують чотири типи ліній другого порядку – ***коло, еліпс, гіпербола і парабола***. Тип лінії визначається знаком дискримінанта $\boxed{\Delta = B^2 - AC}$:

а) якщо дискримінант $\Delta < 0$, то рівняння має ***еліптичний тип*** і визначає або еліпс (зокрема, коло), або точку (наприклад, $x^2 + y^2 = 0$), або уявну криву (наприклад, $x^2 + y^2 = -1$);

б) якщо дискримінант $\Delta > 0$, то рівняння має ***гіперболічний тип*** і визначає або гіперболу, або пару прямих, що перетинаються (наприклад, $x^2 - y^2 = 0$ – пара прямих: $x + y = 0$ і $x - y = 0$);

в) якщо дискримінант $\Delta = 0$, то рівняння має ***параболічний тип*** і визначає або параболу, або пару паралельних прямих (наприклад, $x^2 - 1 = 0$), або уявну лінію (наприклад, $x^2 + 1 = 0$ – пара уявних прямих).

Лінія другого порядку називається ***виродженою***, якщо її загальне рівняння визначає на площині: порожню множину (уявну лінію), точку, пряму, пару прямих.

Зауваження. Надалі будемо розглядати тільки ***суттєво криві дійсні лінії*** другого порядку. Уявні криві та інші випадки виродження вивчати не будемо.

1.2.2 Канонічне рівняння кола

Колом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань до заданої точки площини C (***центра*** кола) дорівнює заданій сталій величині r (***радіусу*** кола).

Розглянемо коло з центром у початку координат $O(0;0)$ і радіусом r (рис. 13). Для довільної точки $M(x;y)$ кола:

$$MO = r\ ;\quad \sqrt{x^2+y^2} = r\ ;\quad x^2+y^2 = r^2\ .$$

Одержане співвідношення $\boxed{x^2+y^2=r^2}$ називається ***канонічним*** (найпростішим) ***рівнянням кола***.

Зауваження. Якщо центром кола служить точка $C(a;b)$, то маємо ***рівняння кола зі зміщеним центром*** (рис. 14)

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}\ .$$

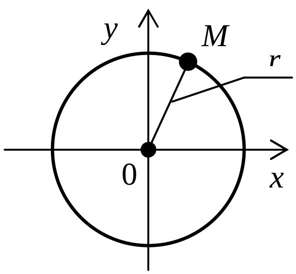


Рисунок 13

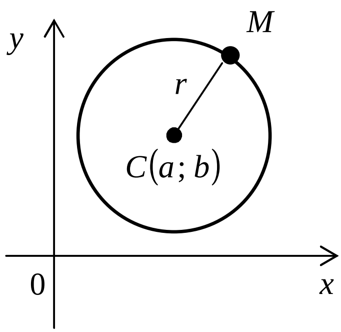


Рисунок 14

Приклад 1. Переконатись, що рівняння

$$3x^2+3y^2+6x-5y-9=0$$

є рівнянням кола. Знайти його центр $C(a;\,b)$ і радіус r.

□ $x^2+y^2+2x-(5/3)y-3=0$;

$$x^2+2x+1-1+y^2-2\cdot\frac{5}{6}y+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-3=0\ ;$$

$$(x+1)^2+(y-5/6)^2=(\,13/6)^2\ ;\quad C(-1;\,5/6)\ ;\quad r=13/6\,.\ \blacksquare$$

Приклад 2. Дано дві точки $A(4;\,-3)$ і $B(-8;\,1)$. Скласти рівняння кола l, для якого відрізок AB служить діаметром.

□ Центром кола l є середина C діаметра AB, а радіус кола $r=AB/2$. Тоді:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4+(-8)}{2}=-2\,;\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{-3+1}{2}=-1\,;$$

$$C(-2;-1);\quad AB=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$

$$=\sqrt{(4-(-8))^2+(-3-1)^2}=4\sqrt{5}\,;\quad r=2\sqrt{5}\,.$$

Рівняння кола $(x+2)^2+(y+1)^2=20$. ■

Приклад 3. Два підприємства A і B, відстань між якими $AB=100$ км (рис. 15), виробляють деяку продукцію одного виду, причому відпускна ціна одиниці продукції на цих підприємствах однакова. Нехай перевезення продукції до споживача завжди здійснюється по прямій, а транспортні витрати на перевезення одиниці продукції від підприємства A складають $k_1=0{,}03$ грн./км, а від підприємства B – $k_2=0{,}02$ грн./км. Де розміщені споживачі, що несуть однакові витрати на купівлю продукції обох підприємств? Якою є конфігурація ринку збуту продукції цих підприємств?

□ Нехай відпускна ціна одиниці продукції на цих підприємствах дорівнює p грн. Припустимо, що споживач знаходиться в деякій точці $M(x;\,y)$. З рис. 15 видно, що

$$AM=\sqrt{(x+50)^2+y^2}\,; \quad BM=\sqrt{(x-50)^2+y^2}\,.$$

Витрати споживача на покупку одиниці виробу з підприємства A складають $p+k_1\cdot AM = p+0{,}03\cdot\sqrt{(x+50)^2+y^2}$,

а з підприємства B відповідно

$$p+k_2\cdot BM = p+0{,}02\cdot\sqrt{(x-50)^2+y^2}\,.$$

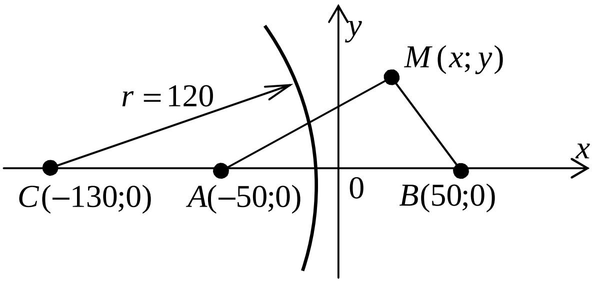


Рисунок 15

Якщо витрати споживача однакові, то

$$p+0{,}03\cdot\sqrt{(x+50)^2+y^2} = p+0{,}02\cdot\sqrt{(x-50)^2+y^2}\,;$$

$$0{,}03\cdot\sqrt{(x+50)^2+y^2}=0{,}02\cdot\sqrt{(x-50)^2+y^2}\,;$$

$$3\cdot\sqrt{(x+50)^2+y^2}=2\cdot\sqrt{(x-50)^2+y^2} \quad \uparrow 2\,;$$

$$9(x+50)^2+9y^2=4(x-50)^2+4y^2\,;$$

$$5x^2+1300x+5y^2+5\cdot 2500=0\,; \;\; x^2+260x+y^2+2500=0\,;$$

$$x^2+2\cdot 130x+130^2-130^2+y^2+2500=0\,;$$

$$(x+130)^2+y^2=14400$$

– коло з центром $C(-130;0)$ і радіусом $r=120$ км (рис. 15). Для споживачів, які знаходяться на цьому колі, витрати на покупку продукції підприємств A і B однакові.

Для споживачів, які знаходяться поза колом, витрати менші на покупку продукції підприємства B. Для споживачів, які знаходяться всередині кола, витрати менші на покупку продукції підприємства A. Отже, конфігурація ринку збуту виглядає так:

- споживачі, які знаходяться всередині кола, купують продукцію підприємства A;
- споживачі, які знаходяться на колі, купують продукцію рівно можливо обох підприємств;
- споживачі, які знаходяться поза колом, купують продукцію підприємства B. ■

1.2.3 Канонічне рівняння еліпса

Еліпсом називається множина всіх точок площини, для кожної з яких сума відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (***фокусів*** еліпса) дорівнює заданій сталій величині $2a$, більшій за відстань між фокусами.

Для довільної точки $M(x;y)$ еліпса (рис. 16) $r_1 + r_2 = 2a$, де $r_1 = MF_1$ і $r_2 = MF_2$ – ***фокальні радіуси*** точки $M(x;y)$; $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокуси, $F_1F_2 = 2c < 2a$. Тоді

$$\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a .$$

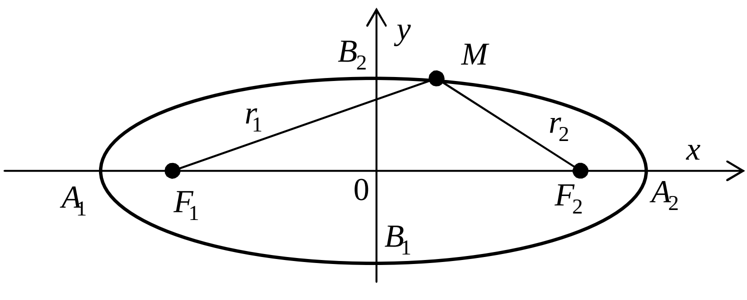


Рисунок 16

Підносячи до квадрата і спрощуючи, поклавши $b^2 = a^2 - c^2$ (проробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння еліпса***

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}, \quad \text{де} \quad \boxed{b^2=a^2-c^2>0}.$$

Еліпс має форму овалу, який симетричний відносно ***великої осі*** $A_1A_2=2a$ і ***малої осі*** $B_1B_2=2b$, а також центрально симетричний відносно точки $O(0;0)$ – ***центра*** еліпса. Точки перетину з осями координат $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ називаються ***вершинами*** еліпса.

Відношення ***міжфокусної відстані*** $F_1F_2=2c$ до великої осі $A_1A_2=2a$ називається ***ексцентриситетом*** еліпса і позначається ε: $\boxed{\varepsilon=c/a}$.

Зауваження. Ексцентриситет характеризує форму еліпса, при цьому $0\le\varepsilon<1$. Якщо $\varepsilon=0$, то маємо окремий випадок еліпса – коло, при цьому $a=b=r$. Чим більше значення ε, тим сильніше витягнутий еліпс вздовж великої осі.

Дві прямі, що мають рівняння $\boxed{x=\pm a/\varepsilon}$, називаються ***директрисами*** еліпса. Оскільки для еліпса $\varepsilon<1$, то права директриса розміщена вертикально правіше від його правої вершини; а ліва директриса –лівіше від його лівої вершини.

Властивість директрис еліпса: *Відношення фокального радіуса r довільної точки еліпса до відстані d цієї точки до відповідної директриси є стала величина, що дорівнює ексцентриситету еліпса* $\boxed{r/d=\varepsilon}$.

Приклад 1. Переконатись, що рівняння $16x^2+6y^2-96=0$ є рівнянням еліпса. Зобразити ескіз еліпса, знайшовши точки його перетину з осями координат (вершини еліпса).

$$\square \quad 16x^2+6y^2-96=0\ ; \quad \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{16}=1\ ; \quad \frac{x^2}{\sqrt{6}^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$

– еліпс, що перетинає осі координат у вершинах $A_1(-\sqrt{6};0)$, $A_2(\sqrt{6};0)$, $B_1(0;-4)$, $B_2(0;4)$.

(Ескіз еліпса зробити самостійно). ■

Приклад 2. Скласти канонічне рівняння еліпса, мала піввісь якого $b = 2\sqrt{3}$, а лівий фокус знаходиться у точці $F(-2;0)$. Знайти його ексцентриситет і написати рівняння директрис.

□ За умовою задачі $b = 2\sqrt{3}$, а половина міжфокусної відстані $c = 2$. Тоді

$$c^2 = a^2 - b^2; \; a^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 = 16; \; a = 4.$$

Звідси

$x^2/16 + y^2/12 = 1$ – канонічне рівняння; $\varepsilon = 2/4 = 1/2$ – ексцентриситет; $x = \pm 4/(1/2)$; $x = \pm 8$ – директриси. ■

Приклад 3. Написати рівняння еліпса, симетричного відносно осей координат, який проходить через точки $M_1(-2;-3)$ і $M_2(2\sqrt{3};-\sqrt{3})$. Знайти велику й малу півосі та ексцентриситет. Для точки M_1 обчислити її фокальні радіуси та відстані від неї до кожної з директрис.

□ Еліпс симетричний відносно осей координат, тому його рівняння буде канонічним: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Оскільки точки M_1 і M_2 належать еліпсу, то одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (-2)^2/a^2 + (-3)^2/b^2 = 1 \\ (2\sqrt{3})^2/a^2 + (-\sqrt{3})^2/b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4/a^2 + 9/b^2 = 1 \\ 12/a^2 + 3/b^2 = 1 \end{cases}$$

Для розв’язування системи застосуємо метод заміни змінної:

$$\begin{matrix} 1/a^2 = u; \\ 1/b^2 = v; \end{matrix} \quad \begin{cases} 4u + 9v = 1 \\ 12u + 3v = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u = (1-9v)/4 \\ 12(1-9v)/4 + 3v = 1 \end{cases}$$

$$-24v = -2;\; v = 1/12;\; u = (1 - 9/12)/4 = 1/16;\; a^2 = 16;\; b^2 = 12.$$

Дістанемо рівняння еліпса

$$x^2/16 + y^2/12 = 1, \; a = 4 \text{ і } b = 2\sqrt{3}.$$

Оскільки $b^2 = a^2 - c^2$, то $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 12} = 2$.

Фокуси еліпса $F_1(-2;0)$ і $F_2(2;0)$. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = c/a = 2/4 = 1/2$.

Фокальні радіуси точки M_1 (відстані точки до фокусів):

$$r_1 = MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(-2+2)^2 + (-3)^2} = 3;$$

$$r_2 = MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3)^2} = 5.$$

Рівняння директрис еліпса

$$x = \pm a/\varepsilon \;\Rightarrow\; x = \pm 4/(1.2) \;\Rightarrow x = \pm 8.$$

Відстані точки M_1 до директрис еліпса дорівнюють:

$$d_1 = |x + a/\varepsilon|;\;\; d_1 = |-2+8| = 6;$$

$$d_2 = |x - a/\varepsilon|;\;\; d_2 = |-2-8| = 10. \quad \blacksquare$$

1.2.4 Канонічне рівняння гіперболи

Гіперболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок площини F_1 і F_2 (***фокусів*** гіперболи) дорівнює заданій сталій величині $2a$, меншій за відстань між фокусами.

Для довільної точки $M(x;y)$ гіперболи (рис. 17)

$$|r_1 - r_2| = 2a,$$

де $r_1 = MF_1$ і $r_2 = MF_2$ – ***фокальні радіуси*** точки $M(x;y)$; $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокуси, $F_1F_2 = 2c > 2a$. Тоді

$$\left|\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a.$$

Підносячи до квадрата і спрощуючи, поклавши $b^2 = c^2 - a^2$ (пробобіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння гіперболи***

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}, \quad \text{де } \boxed{b^2 = c^2 - a^2 > 0}.$$

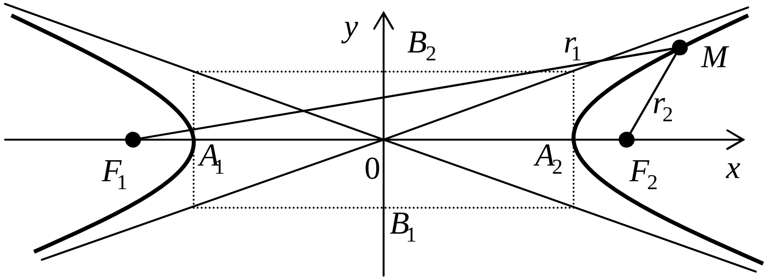


Рисунок 17

Гіпербола складається з двох нескінченних гілок, які симетричні відносно ***дійсної осі*** $A_1A_2 = 2a$ і ***уявної осі*** $B_1B_2 = 2b$, а також центрально симетричні відносно точки $O(0;0)$ – ***центра*** гіперболи. Дійсні вершини $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ є точками перетину гіперболи з віссю Ox. Через уявні вершини $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ гіпербола не проходить. Прямі

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x}\ ; \quad \boxed{y = -\frac{b}{a}x}$$ є ***асимптотами*** гіперболи.

Асимптотою називається пряма, що необмежено зближається з гілкою кривої на нескінченності.

Відношення ***міжфокусної відстані*** $F_1F_2 = 2c$ до дійсної осі $A_1A_2 = 2a$ називається ***ексцентриситетом*** гіперболи і позначається ε: $\boxed{\varepsilon = c/a}$.

Зауваження. Ексцентриситет характеризує форму гіперболи, при цьому $\varepsilon > 1$. Чим менше значення ε, тим сильніше витягнута гіпербола вздовж дійсної осі.

Дві прямі, що мають рівняння $\boxed{x = \pm a/\varepsilon}$, називаються ***директрисами*** гіперболи. Оскільки для гіперболи $\varepsilon > 1$, то права директриса розмішена вертикально між центром і правою вершиною, а ліва директриса – між центром і лівою вершиною.

Властивість директрис гіперболи аналогічна відповідній властивості для еліпса: $\boxed{r/d = \varepsilon}$.

Приклад 1. Переконатись, що рівняння $5x^2 - 15y^2 - 225 = 0$ є рівнянням гіперболи. Знайти вершини гіперболи та її асимптоти. Зобразити ескіз гіперболи. (Розв'язати самостійно).

Приклад 2. Знайти рівняння гіперболи l_g, якщо її ексцентриситет $\varepsilon_g = 2$, а фокуси збігаються з фокусами еліпса $l_e: \; x^2/100 + y^2/36 = 1$.

□ $l_e: \; x^2/100 + y^2/36 = 1; \; a_e^2 = 100; \; b_e^2 = 36; \; c_e^2 = a_e^2 - b_e^2;$

$$c_e^2 = 100 - 36 = 64; \; c_g = c_e = 8; \; \varepsilon_g = c_g/a_g; \; a_g = c_g/\varepsilon_g;$$

$$a_g = 8/2 = 4; \; a_g^2 = 16; \; b_g^2 = c_g^2 - a_g^2; \; b_g^2 = 8^2 - 4^2 = 48;$$

$$l_g: \; x^2/16 - y^2/48 = 1. \quad ■$$

Приклад 3. Точка $M\left(-4; 3\sqrt{3}\right)$ належить гіперболі $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, а її асимптоти $y = \pm(3/2)x$. Знайти канонічне рівняння, ексцентриситет і директриси гіперболи.

□ Оскільки точка M належать гіперболі, то

$$(-4)^2/a^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2/b^2 = 1.$$

З рівнянь асимптот маємо $b/a = 3/2$. Розв'язуючи одержану систему двох рівнянь з двома невідомими a і b (зробіть це самостійно), знаходимо $a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ і $b = 3\sqrt{3}$.

Звідси $x^2/12 - y^2/27 = 1$ – канонічне рівняння;

$$c^2 = a^2 + b^2; \; c^2 = 12 + 27 = 39; \; c = \sqrt{39}; \; \varepsilon = c/a;$$

$$\varepsilon = \left(\sqrt{39}\right)/\sqrt{12} = \sqrt{39}/2\sqrt{3} \text{ – ексцентриситет;}$$

$$x = \pm 2\sqrt{3}/\left(\sqrt{39}/2\sqrt{3}\right); \; x = \pm 12\sqrt{39}/39 \text{ – директриси.} \quad ■$$

Приклад 4. Нехай x – чисельність робітників фірми. Вони повинні згідно угоди виконати певне завдання, за що одержать загалом $S = 100$ тис. грн. заробітної плати. Відомо, що зарплата в усіх однакова і відрахування становлять $\Delta = 500$ грн. з належної кожному суми. Знайти залежність $y = y(x)$ заробітної плати кожного робітника y від їх чисельності x. Обчислити величину зарплати при чисельності $x = 20$.

□ Маємо рівняння $y = 100000/x - 500$. .Воно визначає гіперболу, для якої пряма $y = -500$ є горизонтальною асимптотою, а пряма $x = 0$ служить вертикальною асимптотою. Оскільки за економічним змістом $x > 0$ і $y > 0$, то розглядається гілка цієї гіперболи, що лежить у першій чверті. При цьому

$$y = 100000/x - 500 > 0;\ 100000/x > 500;\ x < 200.$$

При чисельності $x = 20$ одержимо

$$y(20) = 100000/20 - 500 = 4500 \text{ (грн.)}. \ ■$$

1.2.5 Канонічне рівняння параболи

Параболою називається множина всіх точок площини, для кожної з яких відстань від заданої точки площини F (***фокуса*** параболи) дорівнює відстані до заданої прямої l_d (***директриси*** параболи), що не проходить через фокус.

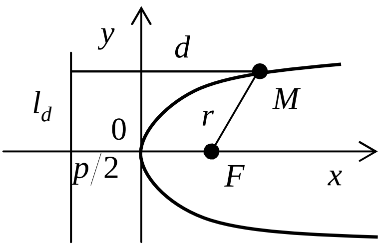


Рисунок 18

Для довільної точки $M(x;y)$ параболи (рис. 18)

$$r = d,$$

де $r = MF$ – ***фокальний радіус*** точки $M(x;y)$; d – відстань точки $M(x;y)$ до директриси l_d: $x = -p/2$; $F(p/2;0)$ – фокус; p – ***параметр*** параболи (відстань від фокуса до директриси), $p > 0$. Тоді

$$\sqrt{(x - p/2)^2 + (y - 0)^2} = x - (-p/2).$$

Підносячи до квадрата і спрощуючи (зробіть це самостійно), одержимо ***канонічне рівняння параболи*** $\boxed{y^2 = 2px}$.

Очевидно, що $x \geq 0$.

Парабола має форму нескінченної гілки, яка симетрична відносно ***осі*** параболи OF. Точка $O(0;0)$ на осі симетрії (початок координат) називається ***вершиною*** параболи. Асимптот парабола не має.

Зауваження 1. Згідно з означенням параболи і властивостями директрис еліпса і гіперболи, прийнято, що ***ексцентриситет*** параболи дорівнює одиниці $\boxed{\varepsilon = 1}$.

Приклад 1. Визначити координати фокуса $F(p/2;\,0)$ і рівняння директриси l_d параболи $y^2 = 12x$. Знайти кінці $M_1(p/2;\,-p)$ і $M_2(p/2;\,p)$ хорди $M_1M_2 = 2p$, яка проходить через фокус параболи і перпендикулярна до її осі. Зобразити ескіз параболи, провівши плавну лінію через її вершину O і точки $M_1(p/2;\,-p)$, $M_2(p/2;\,p)$.

□ $y^2 = 2px$; $y^2 = 12x$; $2p = 12$; $p = 6$; $F(p/2;\,0)$;

$F(3;\,0)$; $l_d:\ x = -p/2$; $l_d:\ x = -3$; $M_1(3;-6)$; $M_2(3;\,6)$.

(Ескіз параболи зробити самостійно). ■

Приклад 2. Скласти рівняння параболи $l_p:\ y^2 = 2px$, якщо її фокус збігається з правою дійсною вершиною гіперболи $l_g:\ x^2/4 - y^2/6 = 1$. Знайти точки перетину цих ліній.

□ $l_g:\ x^2/4 - y^2/6 = 1.$; $a_g^2 = 4$; $F(p/2;0) = A_2(a_g;0)$;

$$p/2 = a_g = 2;\quad p = 4;\quad l_p:\ y^2 = 2px;\quad y^2 = 8x;$$

$$\begin{cases} x^2/4 - y^2/6 = 1 \\ y^2 = 8x\,; \end{cases} \quad \frac{x^2}{4} - \frac{8x}{6} = 1\,;\ 3x^2 - 16x - 12 = 0\,;$$

$x_1 = 6$; $x_2 = -2/3$ – не задовольняє умову $x \ge 0$;

$y^2 = 8\cdot 6$; $y_1 = 4\sqrt{3}$; $y_2 = -4\sqrt{3}$; $M_1(3;\,-4\sqrt{3})$; $M_2(3;\,4\sqrt{3})$. ■

Приклад 3. Фірма планує випускати газові котли. Дослідження ринку показало, що залежність попиту Q (кількість реалізованих котлів) від ціни p одного котла задається рівнянням

$Q = 60000 - 2{,}5p$. Функція вартості $V = V(Q)$ (затрати V фірми на випуск Q котлів) визначається рівнянням $V = 1180000 + 18000Q + 0{,}1Q^2$. Скласти залежність $\Pi = \Pi(Q)$ прибутку Π від кількості Q котлів. Визначити його оптимальне значення $\Pi_{\max}$ і відповідний обсяг реалізації $Q_{\max}$.

□ Виразимо ціну p котла як функцію від обсягу продаж Q: $2{,}5p = 60000 - Q$; $p = 24000 - 0{,}4Q$. Дохід R від продажу Q котлів дорівнює $R = pQ$. Тоді

$$R = pQ = 24000Q - 0{,}4Q^2.$$

Прибуток $\Pi = R - V$ також виразимо як функцію від Q:

$$\Pi = R - V = 24000Q - 0{,}4Q^2 - (1180000 + 18000Q + 0{,}1Q^2) =$$

$$= 6000Q - 0{,}5Q^2 - 1180000.$$

Графіком цієї функції є вертикальна парабола з напрямленими вниз гілками і вершиною в точці $M_0(Q_0; \Pi_0)$, де

$$Q_0 = 6000/(2 \cdot 0{,}5) = 6000; \quad \Pi_0 = \Pi(Q_0) = 6000 \cdot 6000 -$$

$$- 0{,}5 \cdot 6000^2 - 1180000 = 16820000.$$

Оскільки $Q > 0$ і виробництво повинно бути прибутковим $\Pi > 0$, то треба розглядати тільки дугу параболи, що лежить у першій чверті. Розв’яжемо нерівність $\Pi(Q) > 0$. Для цього знайдемо точки, в яких парабола перетинає вісь абсцис Q:

$$\Pi(Q) = 0; \quad 6000Q - 0{,}5Q^2 - 1180000 = 0;$$

$$0{,}5Q^2 - 6000Q + 1180000 = 0; \; Q^2 - 12000Q + 2360000 = 0;$$

$$D/4 = 6000^2 - 2360000 = 33640000 = 5800^2;$$

$$Q_1 = 6000 - 5800 = 200; \; Q_2 = 6000 + 5800 = 11800.$$

Отже, фірма повинна виробляти газових котлів більше, ніж 200, і менше, ніж 11800.

Оскільки дана парабола найбільшого значення досягає у своїй вершині, то прибуток буде найбільшим, коли фірма буде виробляти $Q_{\max} = Q_0 = 6000$ котлів. При цьому її оптимальний прибуток буде становити $\Pi_{\max} = \Pi_0 = 16820000$ (грош. од). ■

Зауваження 2. На практиці часто зустрічаються параболи з іншим розміщенням відносно системи координат. На рис. 19 – 22 наведені основні випадки і відповідні канонічні рівняння.

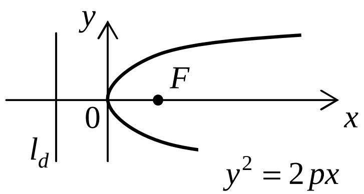


Рисунок 19

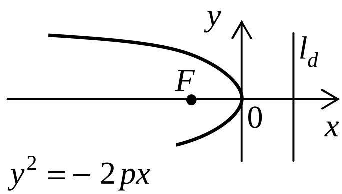


Рисунок 20

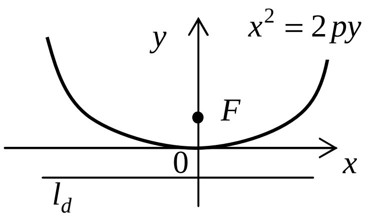


Рисунок 21

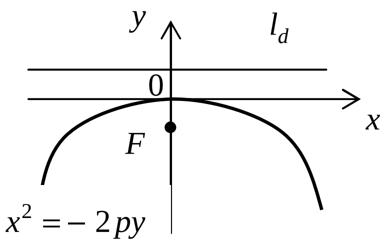


Рисунок 22

1.2.6 Рівняння деяких ліній у параметричній формі

Нехай плоска лінія задана у декартовій прямокутній системі координат ***параметричними рівняннями***

$$\boxed{x = x(t); \quad y = y(t)},$$

де t – допоміжна змінна (***параметр***), $x(t)$ і $y(t)$ – деякі вирази.

Якщо з цих рівнянь вдається вилучити параметр t, то одержується рівняння лінії у неявній $F(x, y) = 0$ чи навіть у явній $y = f(x)$ формах.

Зауваження 1. Якщо лінія задана явно рівнянням $y = f(x)$, то її завжди можна подати в параметричній формі

$$\boxed{x = t; \quad y = f(t)}.$$

Приклад 1. Показати, що система параметричних рівнянь $\boxed{x = a\cos t;\ y = b\sin t}$, де $a, b = const$, причому $a > 0;\ b > 0$, визначає еліпс з центром у початку координат і півосями a і b.

□ $\cos t = x/a$; $\sin t = y/b$,

$$\cos^2 t + \sin^2 t = (x/a)^2 + (y/b)^2;\quad x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1. \quad ■$$

Зауваження 2. Якщо $a = b = r$, то маємо параметричні рівняння кола $\boxed{x = r\cos t;\ y = r\sin t}$, $r > 0$.

Приклад 2. Показати, що система параметричних рівнянь

$$\boxed{x = mt + a;\ y = nt + b}, \text{ де } a, b, m, n = const,$$

визначає пряму.

□ Знайдемо параметр t з обох рівнянь і прирівняємо одержані вирази між собою:

$$t = (x - a)/m;\ t = (y - b)/n;\ (y - b)/n = (x - a)/m.$$

Звідси $y = \dfrac{n}{m}x + \dfrac{bm - an}{m}$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом n/m і початковою ординатою $(bm - an)/m$. ■

Приклад 3. Нехай з бігом часу t (років) валовий продукт P (млрд. дол.) деякої держави змінюється за формулою $P = 2000 + \lg 5t$, а кількість населення N (млн.) зростає за законом $N = 700 + \sqrt{2t}$. Обчислити значення цих величин у момент часу $t_0 = 2$. Подати у явному вигляді $P = f(N)$ залежність валового продукту P від кількості населення N.

□ Обчислимо значення валового продукту P_0 і кількості населення N у момент часу $t_0 = 2$:

$$P_0 = 2000 + \lg(5 \cdot 2) = 2001;\quad N_0 = 700 + \sqrt{2 \cdot 2} = 702.$$

З рівняння $N = 700 + \sqrt{2t}$ виразимо параметр t. Потім одержане співвідношення підставимо у вираз $P = 2000 + \lg 5t$ для валового продукту і спростимо:

$$\sqrt{2t} = N - 700; \quad t = (1/2)(N-700)^2 :$$

$$P = 2000 + \lg\left(5 \cdot (1/2)(N-700)^2\right);$$

$$P = 2000 + \lg\left(5 \cdot (1/2) \times\!\!\times (N-700)^2\right)$$

$P = 2000 + \lg 2{,}5 + 2\lg(N - 700)$ – шукана залежність. ■

Приклад 4. Побудувати ескіз дуги ***циклоїди***, що задана в параметричній формі

$$\boxed{\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}} \quad t \in [0;\, 4\pi]\ ; \quad a > 0\ .$$

(***Циклоїда*** – лінія, яку описує точка кола радіуса $r = a$ під час його кочення без ковзання уздовж осі Ox. Параметр t – кут повороту колеса).

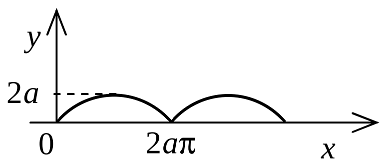


Рисунок 23

□ Побудуємо точки за їх координатами з табл. 1, а потім сполучимо знайдені точки плавною лінією. Отримаємо (рис. 23) задану дугу циклоїди. ■

Таблиця 1

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	
x	0	$a(\pi/2-1)$	$a\pi$	$a(3\pi/2+1)$	
y	0	a	$2a$	a	
t	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π
x	$2a\pi$	$a(5\pi/2-1)$	$3a\pi$	$a(7\pi/2+1)$	$4a\pi$
y	0	a	$2a$	a	0

Приклад 5. Побудувати ескіз ***астроїди***, що задана в параметричній формі

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}} \quad t \in [0;\, 2\pi]\ ; \quad a > 0\ .$$

(***Астроїда*** – лінія, яку описує точка кола радіуса $r = a/4$ під час його кочення без ковзання по внутрішній стороні кола радіуса $R = a$).

(Розв'язати самостійно. Значення параметра t взяти з кроком $\pi/8$, починаючи з $t = 0$).

1.3 Теорія границь

1.3.1 Сталі та змінні величини

У результаті вимірювання різних фізичних, економічних чи інших величин (часу, довжини, об'єму, маси, витрат, доходу, прибутку та ін.) визначаються їх числові значення. Математика займається величинами, відвертаючись від їх конкретного змісту. Далі, розглядаючи величини, матимемо на увазі їх числові значення.

Сталою величиною або ***константою*** (від латинського слова «constans» – «сталий») називається величина, яка не змінює свого значення в умовах задачі, що розглядається. Звичайно сталі величини позначаються малими (інколи великими) літерами з початку латинського алфавіту $a, b, c, d, \ldots$.

Змінною величиною називається величина, яка може набувати різних значень в умовах задачі, що розглядається. Звичайно змінні величини позначаються малими (інколи великими) буквами з кінця латинського алфавіту $\ldots, w, x, y, z$.

Сукупність всіх числових значень змінної величини утворює її область значень.

Зауваження 1. Сталу величину часто зручно розглядати як окремий випадок змінної величини, всі значення якої рівні між собою.

Зауваження 2. Характер процесу змінювання може бути різним. Зокрема, розрізняють ***неперервні*** та ***дискретні*** змінні величини. Множина значень неперервної величини складається лише з числових проміжків. Множина значень дискретної величини включає в себе окремі ізольовані точки.

Наприклад:

а) Змінна величина $y = |x|$ визначена для всіх $x \in R$ і є неперервною. Її множиною значень є закрита півпряма $[0; +\infty)$.

б) Змінна величина $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \ x < 0; \\ 0, \ x = 0; \\ 1, \ x > 0 \end{cases}$ також визначена для всіх $x \in R$ і є дискретною. Її множиною значень є сукупність трьох ізольованих точок $\{-1; 0; 1\}$.

1.3.2 Класифікація змінних величин

Змінна x є ***упорядкована величина***, якщо про кожне з двох будь-яких її значень можна сказати, яке з них попереднє та яке наступне.

Тут ці поняття не пов'язані з часом, а є способом упорядкування значень змінної величини.

Окремим випадком упорядкованої змінної величини є ***числова послідовність*** $x_1, x_2, ..., x_i, ...$. Тут при $i < k$ значення x_i попереднє, а x_k – наступне незалежно від того, яке з цих значень більше.

Змінна величина x називається ***обмеженою***, якщо всі її значення за модулем не перевищують деякого додатного числа M протягом всього процесу змінювання:

$$\exists M > 0, \forall x: |x| \le M \ .$$

У противному випадку змінна величина називається ***необмеженою***. Точніше, змінна величина x називається ***необмеженою***, якщо для довільного додатного числа M знайдеться хоча б одне значення x, яке за модулем перевищує це число M:

$$\forall M > 0, \exists x: |x| > M \ .$$

Наприклад:

а) Змінна величина $x_n = 1000/n$, $n \in N$ є обмеженою, оскільки існує таке число $M > 0$, що для всіх значень x_n виконується нерівність $|x_n| \le M$, $n \in N$. Зокрема, можна взяти $M = 2000$, оскільки

$$|x_n| = |1000/n| = 1000/n \le 2000\ ,\ \ n \in N\ .$$

б) Змінна величина $y_n = (-1)^n n^2$, $n \in N$ є необмеженою, оскільки для будь-якого числа $M > 0$ можна знайти хоча б одне значення y_n, для якого виконується нерівність $|y_n| > M$. Зокрема, якщо взяти $M = 1000$, то

$$|y_{100}| = \left|(-1)^{100} \cdot 100^2\right| = 10000 > 1000\,.$$

Змінна величина x називається ***зростаючою***, якщо в процесі змінювання її значення не зменшуються, тобто кожне наступне значення неменше попереднього. Позначається $x \nearrow$.

Змінна величина x називається ***спадною***, якщо в процесі змінювання її значення не збільшуються, тобто кожне наступне значення не більше попереднього. Позначається $x \searrow$.

Зростаючі та спадні змінні величини називаються ***монотонними***.

Монотонна величина називається ***строго монотонною***, якщо її значення задовольняють відповідну строгу нерівність.

Наприклад:

а) Змінна величина $x_n = 2^n$, $n \in N$ є строго зростаючою $x_n = 2^n \nearrow$, оскільки $x_{n+1} = 2^{n+1} > x_n = 2^n$, $n \in N$.

б) Змінна величина $y_n = (1/2)^n$, $n \in N$ є строго спадною $y_n = (1/2)^n \searrow$, оскільки $y_{n+1} = (1/2)^{n+1} < y_n = (1/2)^n$, $n \in N$.

в) Змінна величина $z_n = (-2)^n$, $n \in N$ є немонотонною, оскільки, зокрема,

$$z_3 = (-2)^3 \le z_2 = (-2)^2\ ;\ \ z_4 = (-2)^4 \ge z_3 = (-2)^3\ .$$

г) Змінна величина $u_n = \operatorname{sgn}(n - 10)$, $n \in N$ є зростаючою (не строго), оскільки $u_{n+1} = \mathrm{sgn}(n-9) \geq u_n = \mathrm{sgn}(n-10)$, $n \in N$. Зокрема, $u_8 = \mathrm{sgn}(-2) = -1 = u_7 = \mathrm{sgn}(-3) = -1$ і $u_{11} = \mathrm{sgn}(1) = 1 > u_{10} = \mathrm{sgn}(0) = 0$.

д) Площа S правильного вписаного в коло многокутника при подвоєнні його сторін є монотонно зростаючою величиною.

Підкреслимо, що величини з пунктів б), г) і д) є обмеженими, а величини з пунктів а) і в) – необмежені.

1.3.3 Нескінченно малі величини

Змінна величина x називається ***нескінченно малою***, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються меншими будь-якого фіксованого додатного числа ε.

Іншими словами, змінна величина x називається ***нескінченно малою***, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться такий момент t_ε процесу змінювання, що у всі наступні моменти $t > t_\varepsilon$ значення змінної величини x за модулем менші цього числа ε:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_\varepsilon, \forall t > t_\varepsilon : |x| < \varepsilon.$$

Нескінченно малі величини позначаються звичайно малими буквами грецького алфавіту $\alpha, \beta, \ldots$.

Те, що змінна величина α є нескінченно малою, позначається так: $\alpha \to 0$ (читається «α прямує до 0») або $\lim \alpha = 0$ (від латинського слова «limes» – «границя», читається «границя α дорівнює 0»).

Наприклад:

а) $\alpha = 10000/n^2 \to 0$ і $\beta = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2} \to 0$. Зокрема, якщо $\varepsilon = 0{,}01$, то нерівність $|\alpha| < \varepsilon \Leftrightarrow |10000/n^2| < 0{,}01$ виконується для всіх $n > n_\varepsilon = 1000$.

б) Змінні величини $x_n = 1 + (-1)^n$ і $y_n = n^{\cos \pi n}$ не є нескінченно малими.

<u>Зауваження</u>. Нуль 0 – це єдина стала величина, що є нескін-

ченно малою.

Геометричний зміст: змінна величина α є нескінченно малою, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon > 0$ її значення в процесі змінювання потрапляють і надалі залишаються в ε-околі точки нуль:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists t_\varepsilon,\ \forall t > t_\varepsilon:\ \alpha \in U(0;\varepsilon).$$

Доведення основних властивостей нескінченно малих величин ґрунтується на їх означенні та властивостях модуля.

Теорема 1. *Нескінченно мала величина є обмеженою*:

$$\alpha \to 0\ \Rightarrow\ \exists M > 0:\ |\alpha| \le M\ .$$ (Без доведення).

Теорема 2. *Сума (різниця) двох нескінченно малих величин також є нескінченно малою величиною*:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha \to 0\\ \beta \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow\ \alpha \pm \beta \to 0.$$ Символічний запис $0 \pm 0 = 0$.

□ $\forall\varepsilon > 0$; $\exists t_{\varepsilon/2}$: $|\alpha| < \varepsilon/2$; $|\beta| < \varepsilon/2$;

$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ \Rightarrow\ \alpha \pm \beta \to 0$. ■

Теорема 3. *Добуток нескінченно малої величини на обмежену є нескінченно малою величиною*:

$$\left.\begin{array}{r}|x| \le M\\ \alpha \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow\ \alpha x \to 0\ .$$

□ $\exists M > 0: |x| \le M$; $\forall\varepsilon > 0$; $\exists t_{\varepsilon/M}$: $|\alpha| < \varepsilon/M$;

$|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x| < \varepsilon/M \cdot M = \varepsilon\ \Rightarrow\ \alpha x \to 0$. ■

Наслідок. *Добуток сталої величини на нескінченно малу є нескінченно малою величиною*:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha \to 0\\ C = const\end{array}\right\} \Rightarrow\ C\alpha \to 0\ .$$ Символічний запис $C \cdot 0 = 0$.

Теорема 4. *Добуток двох нескінченно малих величин також є нескінченно малою величиною*:

$$\left.\begin{matrix}\alpha \to 0\\ \beta \to 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \ \alpha\beta \to 0 \ . \text{ Символічний запис } \ 0 \cdot 0 = 0 .$$

□ $\forall \varepsilon > 0$; $\exists t_{\sqrt{\varepsilon}}$: $|\alpha| < \sqrt{\varepsilon}$; $|\beta| < \sqrt{\varepsilon}$;

$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon \ \Rightarrow \ \alpha\beta \to 0$. ■

Зауваження 1. Відношення двох нескінченно малих величин може бути будь-якою величиною і називається ***невизначеністю виду*** $0/0$. Символічний запис $0/0 = ?$

Зауваження 2. Нескінченна алгебраїчна сума нескінченно малих величин може бути будь-якою величиною. Символічний запис $0 \pm 0 \pm 0 \pm \ldots = ?$

1.3.4 Нескінченно великі величини. Зв'язок нескінченно малих і нескінченно великих величин

Змінна величина x називається ***нескінченно великою***, якщо в процесі змінювання її значення за модулем стають і надалі залишаються більшими будь-якого фіксованого додатного числа M .

Іншими словами, змінна величина x називається ***нескінченно великою***, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно великого) додатного числа $M > 0$ знайдеться такий момент t_M процесу змінювання, що у всі наступні моменти $t > t_M$ значення змінної величини x за модулем більші цього числа M :

$$\forall M > 0, \exists t_M \, , \forall t > t_M : |x| > M \ .$$

Те, що змінна величина x є нескінченно великою, позначається так: $x \to \infty$ (читається «x прямує до ∞») або $\lim x = \infty$ (читається «границя x дорівнює ∞»).

Зауваження 1. Якщо в процесі змінювання значення нескінченно великої величини x стають і надалі залишаються додатними, то більш точно пишуть $x \to +\infty$ або $\lim x = +\infty$. Аналогічно, якщо в процесі змінювання значення нескінченно великої величини x стають і надалі залишаються від'ємними, то більш точно пишуть $x \to -\infty$ або $\lim x = -\infty$.

Наприклад:

а) $x_n = (-1)^n n^2 \to \infty$. Зокрема, якщо $M = 100$, то нерівність $|x_n| > M \iff \left|(-1)^n n^2\right| > 100$ виконується для всіх $n > n_M = 10$.

б) $y_n = 2^n - 100 \to +\infty$; $z_n = -n^3 + 1000/n \to -\infty$.

в) Змінні величини $x_n = 2^n + (-2)^n$ і $y_n = n^2 \sin\frac{\pi n}{2}$ не є нескінченно великими (хоча є необмеженими).

Зауваження 2. Не існує сталої величини, що є нескінченно великою.

Геометричний зміст: змінна величина x є нескінченно великою, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно великого) додатного числа $M > 0$ її значення в процесі змінювання потрапляють і надалі залишаються в M - околі символу нескінченності:

$$\forall M > 0, \exists t_M, \forall t > t_M: \; x \in U(\infty; M).$$

Зауваження 3. Добуток сталої відмінної від нуля величини C на нескінченно велику x є нескінченно великою величиною:

$$\left.\begin{array}{r} x \to \infty \\ C = const \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Cx \to \infty .$$

Зауваження 4. Добуток двох нескінченно великих величин є нескінченно великою величиною:

$$\left.\begin{array}{r} x \to \infty \\ y \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow xy \to \infty .$$

Зауваження 5. Різниця двох нескінченно великих величин може бути будь-якою величиною і називається ***невизначеністю виду*** $\infty - \infty$. Символічний запис $\infty - \infty = ?$ Аналогічне твердження справедливе для алгебраїчної суми будь-якого скінченного числа нескінченно великих величин.

Зауваження 6. Відношення двох нескінченно великих величин може бути будь-якою величиною і називається ***невизначеністю***

виду ∞/∞. Символічний запис $\infty/\infty = ?$

Теорема 1. *Величина, обернена до нескінченно великої величини, є нескінченно малою*:

$$x \to \infty \;\Rightarrow\; \alpha = 1/x \to 0 .\text{ Символічний запис } 1/\infty = 0 .$$

□ $\forall \varepsilon > 0, \exists t_{1/\varepsilon}, \forall t > t_{1/\varepsilon} : |x| > 1/\varepsilon$;

$$|\alpha| = 1/|x| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \alpha \to 0 . \quad \blacksquare$$

Наприклад, $x_n = 2^n \to \infty \;\Rightarrow\; \alpha = 1/x_n = 2^{-n} \to 0$.

Теорема 2. *Величина, обернена до нескінченно малої відмінної від нуля величини, є нескінченно великою*:

$$\left.\begin{matrix} \alpha \to 0 \\ \alpha \neq 0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{\alpha} \to \infty .\text{ Символічний запис } 1/0 = \infty .$$

□ $\forall M > 0, \exists t_{1/M}, \forall t > t_{1/M} : |\alpha| < 1/M$;

$$|x| = 1/|\alpha| > M \;\Rightarrow\; x \to \infty . \quad \blacksquare$$

Наприклад,

$$\alpha = \lg(1 + 1/n) \to 0 \;\Rightarrow\; x_n = 1/\alpha = \lg^{-1}(1 + 1/n) \to \infty .$$

Зауваження 7. Добуток нескінченно малої величини на нескінченно велику може бути будь-якою величиною і називається ***невизначеністю виду*** $0 \cdot \infty$. Символічний запис $0 \cdot \infty = ?$

1.3.5 Границя змінної величини та її властивості

Поняття границі характеризує напрям процесу змінювання.

Стала величина a називається ***границею*** змінної величини x, якщо їх різниця $x - a$ є нескінченно малою величиною:

$$x - a = \alpha \to 0 .$$

Записується так: $x \to a$ (читається «x прямує до a») або $\lim x = a$ (читається «границя x дорівнює a»).

Наприклад $\lim \frac{n+1}{n} = 1$, оскільки $\alpha = \frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n} \to 0$.

Зауваження 1. Означення границі дано через поняття нескінченно малої величини («***мовою нескінченно малих***»). Існують інші еквівалентні означення границі.

Геометричний зміст: стала величина a є границею змінної величини x, якщо для будь-якого наперед заданого (скільки завгодно малого) додатного числа $\varepsilon > 0$ значення змінної величини x у процесі змінювання потрапляють і надалі залишаються в ε-околі точки a:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists t_\varepsilon, \forall t > t_\varepsilon:\ x \in U(a;\varepsilon).$$

Зауваження 2. Якщо з контексту задачі не зрозуміло, в яких умовах відбувається процес змінювання, то додаткову інформацію подають під знаком границі або після нього. Наприклад: $x_n \to a$ *при* $n \to \infty$ (читається «x_n прямує до a при n, що прямує до ∞») або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (читається «границя x_n при n, що прямує до ∞, дорівнює a»).

Доведення основних властивостей границь ґрунтується на означенні границі та властивостях нескінченно малих.

Теорема 1. *Змінна величина в фіксованому процесі змінювання має не більше однієї границі.*

□ Доведення методом від супротивного.

$$\left.\begin{array}{c} x \to a \\ x \to b \\ a \neq b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x - a = \alpha \to 0 \\ x - b = \beta \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -a + b = \alpha - \beta \to 0\ ;$$

$$\left.\begin{array}{c} b - a = \alpha - \beta \to 0 \\ b - a = const \end{array}\right\} \Rightarrow b - a = 0 \Rightarrow b = a\ ,$$

що суперечить припущенню $a \neq b$. ■

Зауваження 3. Змінна величина може не мати границі в даному процесі змінювання. Змінна величина може вести себе по-різному в різних процесах змінювання.

Теорема 2. *Змінна величина, що має скінченну границю, є обмеженою у відповідному процесі змінювання.*

$$\lim x = a \Rightarrow \exists M > 0, \forall x: |x| \leq M\ .$$

(Без доведення).

Теорема 3. *Границя сталої величини дорівнює самій цій величині*:

$$\boxed{C = const \Rightarrow \lim C = C}\ .$$

□ $C = const \Rightarrow C - C = 0 \to 0 \Rightarrow C \to C$. ■

Теорема 4. *Границя скінченної алгебраїчної суми змінних величин дорівнює такій же сумі їх границь, якщо останні існують*:

$$\boxed{\lim(x + y - z) = \lim x + \lim y - \lim z}\ .$$

□ $\left.\begin{array}{r}\lim x = a\\ \lim y = b\\ \lim z = c\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = a + \alpha,\ \alpha \to 0\\ y = b + \beta,\ \beta \to 0\\ z = c + \gamma,\ \gamma \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow x + y - z =$

$= (a + \alpha) + (b + \beta) - (c + \gamma) = (a + b - c) + (\alpha + \beta - \gamma)$;

$\alpha + \beta - \gamma \to 0 \Rightarrow \lim(x + y - z) = a + b - c$. ■

Теорема 5. *Границя добутку двох змінних величин дорівнює добутку їх границь, якщо останні існують*:

$$\boxed{\lim(xy) = \lim x \cdot \lim y}\ .$$

□ $\left.\begin{array}{r}\lim x = a\\ \lim y = b\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = a + \alpha,\ \alpha \to 0\\ y = b + \beta,\ \beta \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow\ x\,y = (a + \alpha)\times$

$$\times(b + \beta) = ab + (\alpha b + \beta a + \alpha\beta)\ ;$$

$$\alpha b + \beta a + \alpha\beta \to 0 \Rightarrow \lim(xy) = a\,b\ . \quad ■$$

Наслідок 1. *Сталий множник, відмінний від нуля, можна виносити за знак границі*:

$$\boxed{\lim(Cx) = C \cdot \lim x\ ,\ \ C = const}\ .$$

Наслідок 2. *Границя степеня з натуральним показником змінної величини дорівнює відповідному степеню її границі, якщо остання існує*:

$$\boxed{\lim x^n = (\lim x)^n\ ,\ \ n \in N}\ .$$

Теорема 6. *Границя відношення двох змінних величин дорівнює такому ж відношенню їх границь, якщо останні існують, причому* *границя знаменника відмінна від нуля*:

$$\boxed{\lim\frac{x}{y}=\frac{\lim x}{\lim y}}\ .$$

□ $$\left.\begin{array}{r}\lim x=a\\ \lim y=b\,,\ b\neq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=a+\alpha,\ \alpha\to 0\\ y=b+\beta,\ \beta\to 0\end{array}\right\}\Rightarrow\ \frac{x}{y}-\frac{a}{b}=$$

$$=\frac{a+\alpha}{b+\beta}-\frac{a}{b}=\frac{\alpha b-\beta a}{b(b+\beta)}\to 0\Rightarrow\lim\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\ .\qquad\blacksquare$$

<u>Теорема 7</u>. *Границя невід'ємної змінної величини також невід'ємна*. Аналогічно, *границя недодатної змінної величини також недодатна*:

$$\boxed{x\geq 0\Rightarrow\lim x\geq 0}\ ;\quad\boxed{x\leq 0\Rightarrow\lim x\leq 0}\ .$$

□ Доведемо першу частину теореми методом від супротивного.

$$\lim x=a<0;\ \left.\begin{array}{r}x\geq 0\\ a<0\end{array}\right\}\Rightarrow x-a>-a=const>0\Rightarrow$$

$\Rightarrow\lim(x-a)\neq 0$, що суперечить припущенню $\lim x=a$.

Доведення другої частини аналогічно. ■

<u>Зауваження 4</u>. Якщо змінна величина x додатна $x>0$, то гарантувати строгу нерівність для границі $\lim x>0$ у загальному випадку не можна. Те саме справедливе і для від'ємної змінної величини. Наприклад:

$$x_n=1/n>0\ ;\quad\lim x_n=\lim(1/n)=0\ .$$

<u>Теорема 8 (про стабілізацію знака нерівності)</u>. *Якщо границя змінної величини додатна, то починаючи з деякого моменту процесу змінювання всі її наступні значення також додатні*:

$$\boxed{\lim x>0\Rightarrow\exists t_0,\ \forall t>t_0:\ x>0}.$$

Аналогічно, *якщо границя змінної величини від'ємна, то починаючи з деякого моменту процесу змінювання всі її наступні значення також від'ємні*:

$$\boxed{\lim x<0\Rightarrow\exists t_0,\ \forall t>t_0:\ x<0}.$$ (Без доведення).

Приклад 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-5x^2+x+7}{3x^2-2}$.

$$\square \quad \lim_{x\to -2}\frac{x^3-5x^2+x+7}{3x^2-2}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3-5x^2+x+7\right)}{\lim\limits_{x\to -2}\left(3x^2-2\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to -2}x^3-\lim\limits_{x\to -2}5x^2+\lim\limits_{x\to -2}x+\lim\limits_{x\to -2}7}{\lim\limits_{x\to -2}3x^2-\lim\limits_{x\to -2}2}=$$

$$=\frac{\left(\lim\limits_{x\to -2}x\right)^3-5\left(\lim\limits_{x\to -2}x\right)^2+\lim\limits_{x\to -2}x+7}{3\left(\lim\limits_{x\to -2}x\right)^2-2}=\frac{(-2)^3-5(-2)^2-2+7}{3(-2)^2-2}=-\frac{7}{10}\ .\ \blacksquare$$

Спираючись на розв’язаний приклад, сформулюємо наступне правило:

Границю раціонального дробу $P(x)/Q(x)$, *де* $P(x)$ *і* $Q(x)$ *– многочлени, можна обчислити шляхом прямої підстановки замість* x *його граничного значення, якщо при цьому не порушуються умови, вказані у властивостях границь.*

Зауваження 5. Якщо вказані умови порушуються, то треба скористатися, зокрема, властивостями нескінченно малих і нескінченно великих величин.

Приклад 2. Знайти границю

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-5}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}2^{-1/x^2}$. в) $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x-1}$.

$$\square \text{ а) } \lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x-5}{x^2-1}=\left|\frac{(-1)^3-2\cdot(-1)-5}{(-1)^2-1}=\frac{-4}{0}\right|=\infty\,;$$

$$\text{б) } \lim_{x\to 0}2^{-1/x^2}=\left|2^{-1/0^2}=2^{-1/0}=2^{-\infty}\right|=0\,;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 1}\sin\frac{1}{x-1}=\left|\sin\frac{1}{1-1}=\sin\frac{1}{0}=\sin(\infty)\right| - \textit{не існує}\,.\ \blacksquare$$

1.3.6 Розкриття невизначеності виду $0/0$ для многочленів

Правило: *Для розкриття невизначеності виду* $0/0$ *для многочленів* $P(x)/Q(x)$ *треба чисельник* $P(x)$ *і знаменник* $Q(x)$ *розкласти на множники та скоротити дріб, а потім перейти до границі.*

Приклад. Знайти границю:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{x^3-1}; \quad \text{б) } \lim_{x\to 2}\frac{3x^4-5x^3-5x+2}{x^2-4};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}; \quad \text{г) } \lim_{x\to -3}\frac{x^2+6x+9}{x^3+27}; \quad \text{д) } \lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^4-16}.$$

$$\square \text{ а) } \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-5x+2}{x^3-1}=\left|\frac{3\cdot 1^2-5\cdot 1+2}{1^3-1}=\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\left|\begin{matrix}3x^2-5x+2=0\\ x_1=1;\ x_2=2/3\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x-2/3)}{(x-1)(x^2+x+1)}=3\lim_{x\to 1}\frac{x-2/3}{x^2+x+1}=$$

$$=3\cdot\frac{1-2/3}{1^2+1+1}=\frac{1}{3}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to 2}\frac{3x^4-5x^3-5x+2}{x^2-4}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\left|\begin{array}{l|l}
\underline{\ }\,3x^4-5x^3-5x+2 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^4-6x^3} & 3x^3+x^2+2x-1 \\
\qquad \underline{\ }\,x^3-5x+2 & \\
\qquad \underline{x^3-2x^2} & \\
\qquad\quad \underline{\ }\,2x^2-5x+2 & \\
\qquad\quad \underline{2x^2-4x} & \\
\qquad\qquad \underline{\ }\,-x+2 & \\
\qquad\qquad \underline{-x+2} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x^3+x^2+2x-1)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^3+x^2+2x-1}{x+2}=$$

$$=\frac{3\cdot 2^3+2^2+2\cdot 2-1}{2+2}=7\frac{3}{4};$$

в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-2}=\left|\frac{4}{0}\right|=\infty\ ;$$

г) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+6x+9}{x^3+27}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+3)^2}{(x+3)(x^2-3x+9)}=$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-3x+9}=\frac{-3+3}{(-3)^2-3\cdot(-3)+9}=\frac{0}{27}=0\,;$$

д) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{x^4-16}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x-2)(x^2+4)}=$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x-4}{(x-2)(x^2+4)}=\frac{3}{16}.\quad\blacksquare$$

1.3.7 Розкриття невизначеності виду ∞/∞ для многочленів

При розкритті невизначеності виду ∞/∞ для нескінченно великих величин, зручно спочатку перейти до розгляду нескінченно малих величин, використовуючи наступне правило:

Для розкриття невизначеності виду ∞/∞ для многочленів $P(x)/Q(x)$ треба чисельник $P(x)$ і знаменник $Q(x)$ поділити на найвищий степінь x, а потім перейти до границі.

Зауваження 1. Указане правило справедливе для всіх випадків нескінченно великих величин ∞, $+\infty$ чи $-\infty$, тобто знак символу ∞ можна не уточнювати.

Приклад. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^3+4x-1}{5x^2-2x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6}$;

в) ж $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^3+4x}{2x^5+x^3+6}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x^8+4x^2}{x-10x^6+7}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-5x^3+4x-1}{5x^2-2x+6}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-5/x+4/x^3-1/x^4}{5/x^2-2/x^3+6/x^4}=\left|\frac{3-0+0-0}{0-0+0}\right|=\infty;$$

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x-7}{8x^2-3x+6}=\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5-4/x-7/x^2}{8-3/x+6/x^2}=$

$=\dfrac{5-0-0}{8-0+0}=\dfrac{5}{8}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^3+4x}{2x^5+x^3+6}=$

$$=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{9/x^2+4/x^4}{2+1/x^2+6/x^5}=\frac{0+0}{2+0+0}=0;$$

д) (Розв'язати самостійно). ■

Зауваження 2. Очевидно, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\begin{cases}0,\ m<n,\\ a_{p0}/a_{q0},\ m=n,\\ \infty,\ m>n,\end{cases}$$

де a_{p0} і a_{q0} – коефіцієнти при найвищих степенях відповідних многочленів.

1.3.8 Розкриття невизначеності виду $0/0$ для ірраціональних виразів

Правило: *Для розкриття невизначеності виду* $0/0$ *для ірраціональних виразів треба спочатку відповідним чином позбавитись ірраціональності, що дає нуль, потім скоротити дріб, і нарешті перейти до границі.*

Приклад. Знайти границю:

$$\text{а) } \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6}; \quad \text{б) } \lim_{x\to -3}\frac{\sqrt[3]{4x+4}+2}{\sqrt{-3x}+x}.$$

□ $$\text{а) } \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-1}-3}{4x^2-5x-6}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{5x-1}-3\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}{\left(4x^2-5x-6\right)\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{5x-1}+3}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{5x-1-9}{4x^2-5x-6}=\frac{1}{\sqrt{5\cdot 2-1}+3}\times$$

$$\times\lim_{x\to 2}\frac{5x-10}{4x^2-5x-6}=\left|\begin{matrix}4x^2-5x-6=0\\ x_1=2;\ x_2=-3/4\end{matrix}\right|=\frac{1}{6}\times$$

$$\times\lim_{x\to 2}\frac{5(x-2)}{4(x-2)(x+3/4)}=\frac{5}{4}\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+3/4}=\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{1}{2+3/4}=\frac{5}{11};$$

$$\text{б) } \lim_{x\to -3}\frac{\sqrt[3]{4x+4}+2}{\sqrt{-3x}+x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\left(\sqrt[3]{4x+4}+2\right)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)\left(\sqrt{-3x}-x\right)}{\left(\sqrt{-3x}+x\right)\left(\sqrt{-3x}-x\right)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{-3x}-x}{\sqrt[3]{(4x+4)^2}-2\sqrt[3]{4x+4}+4}\cdot\lim_{x\to -3}\frac{4x+4+8}{-3x-x^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{-3\cdot(-3)}-(-3)}{\sqrt[3]{(4\cdot(-3)+4)^2}-2\sqrt[3]{4\cdot(-3)+4}+4}\cdot\lim_{x\to -3}\frac{4(x+3)}{-x(3+x)}=$$

$$=(6/12)\cdot(-4)\lim_{x\to -3}(1/x)=-2\cdot(-1/3)=2/3.\ ■$$

1.3.9 Ознаки існування границі

Питання про границю має дві сторони: 1) Чи існує границя? 2) Як обчислити границю? Друге питання вже частково розглянуте. Звернемо увагу на перше питання.

Теорема 1 (про обмежену монотонну змінну). *Обмежена мо-*

нотонна величина має границю, причому:

$$\left.\begin{array}{l} x \le M \\ x \nearrow \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim x \le M \quad \text{і} \quad \left.\begin{array}{l} x \ge M \\ x \searrow \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim x \ge M, \text{ де } M = const.$$

(Без доведення).

Теорема 2 (про стиснену змінну). *Нехай задано три змінні величини* x, y *і* z, *для яких виконується подвійна нерівність* $x \le y \le z$. *Якщо при цьому крайні змінні* x *і* z *мають однакову границю* $\lim x = \lim z = a$, *то середня змінна* y *також має ту саму границю* $\lim y = \lim x = \lim z = a$:

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} x \le y \le z \\ \lim x = \lim z = a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim y = \lim x = \lim z = a}.$$ (Без доведення).

Зауваження. Згідно з означенням границі поведінка змінної величини у початковий період процесу змінювання ніяким чином не впливає на розв’язання питання про границю.

1.3.10 Перша стандартна границя. Розкриття невизначеності виду $0/0$ для тригонометричних виразів

При обчисленні границь конкретних змінних величин часто використовуються вже відомі ***стандартні границі***.

Теорема 1 (***перша стандартна границя***). *Границя відношення синуса нескінченно малої величини до самої цієї величини існує і дорівнює одиниці*:

$$\boxed{\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \left| \frac{0}{0} \right| = 1}.$$

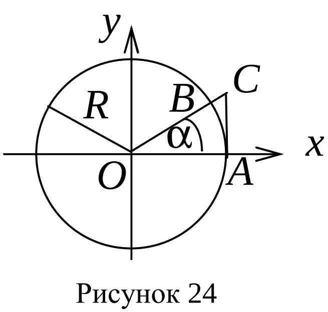


Рисунок 24

□ Функція $\dfrac{\sin \alpha}{\alpha}$ – парна, тому можна обмежитися тільки додатними значеннями α. А оскільки $\alpha \to 0$, то можна розглядати тільки значення α з першої чверті $0 < \alpha < \pi/2$.

Розглянемо коло радіуса R з центром у початку координат (рис. 24). Порівнюючи площі трьох вкладених одна в одну фігур, отримаємо:

$$S_{\Delta OAB} < S_{сектора OAB} < S_{\Delta OAC} ;$$

$$(1/2)R^2 \sin\alpha < (1/2)R^2\alpha < (1/2)R^2 tg\alpha ;\ \ \sin\alpha < \alpha < tg\alpha \ \ (*);$$

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha} ;\ \ 1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha ;\ \ \ \cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1 \ \ (**).$$

З нерівності (*) і умови $0 < \sin(\alpha/2) < 1$ випливає

$$0 < \beta = 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} < 2\sin\frac{\alpha}{2} < 2\cdot\frac{\alpha}{2} = \alpha .$$

Оскільки $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha = 0$ і $\lim\limits_{\alpha\to 0} 0 = 0$, то за теоремою про стиснену змінну $\lim\limits_{\alpha\to 0}\beta = \lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha = \lim\limits_{\alpha\to 0} 0 = 0$. Звідси

$$\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = \lim_{\alpha\to 0}(1-\beta) = 1 - \lim_{\alpha\to 0}\beta = 1 .$$

*Я*кщо врахувати, що $\cos 0 = 1$, то $\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha = \cos 0 = 1$.

Із цього співвідношення і нерівності (**) за теоремою про стиснену змінну нарешті одержимо

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = \lim_{\alpha\to 0} 1 = 1 . \quad \blacksquare$$

<u>Наслідок 1</u>. $\boxed{\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{tg\,\alpha}{\alpha} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = 1}$.

$$\square \ \lim_{\alpha\to 0}\frac{tg\,\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\cos\alpha} = 1\cdot 1 = 1 . \quad \blacksquare$$

<u>Наслідок 2</u>. $\boxed{\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\arcsin\alpha}{\alpha} = \left|\dfrac{0}{0}\right| = 1}$.

$$\square \ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\arcsin\alpha}{\alpha} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|\begin{array}{l} u = \arcsin\alpha;\ \alpha = \sin u; \\ \alpha\to 0 \ \Rightarrow\ u\to 0 \end{array}\right| =$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\sin u/u}=\frac{1}{1}=1. \quad \blacksquare$$

<u>Наслідок 3</u>. $\boxed{\lim_{\alpha\to 0}\frac{arctg\,\alpha}{\alpha}=\left|\frac{0}{0}\right|=1}$.

$\square$ $$\lim_{\alpha\to 0}\frac{arctg\,\alpha}{\alpha}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{array}{l} u=arctg\,\alpha;\ \alpha=tg u; \\ \alpha\to 0\ \Rightarrow\ u\to 0 \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{u}{tg u}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{tg u/u}=\frac{1}{1}=1. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження</u>. Для розкриття невизначеності виду $0/0$ з тригонометричними виразами треба розкласти чисельник і знаменник на множники і скоротити дріб або застосувати першу стандартну границю чи її наслідки.

<u>Приклад</u>. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\,tg\,x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{ctg(\pi/4-x)}{4x-\pi}$.

$\square$ а) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\,tg\,x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times$$

$$\times\lim_{x\to 0}\cos x=1\cdot 1=1;$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(3x/2)}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(3x/2)\cdot(3x/2)^2}{(3x/2)^2\cdot x\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot x}=$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x/2)}{3x/2}\right)^2:\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{9}{2}\cdot 1^2:1=\frac{9}{2};$$

в) $$\lim_{x\to \pi/4}\frac{ctg(\pi/4+x)}{4x-\pi}=\left|\frac{0}{0}\right|=\left|\begin{array}{l} u=x-\pi/4;\ x=\pi/4+u; \\ x\to\pi/4\ \Rightarrow\ u\to 0 \end{array}\right|=$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{ctg(\pi/4+u+\pi/4)}{4(\pi/4+u)-\pi} = \lim_{u\to 0}\frac{ctg(\pi/2+u)}{4u} = -\frac{1}{4}\cdot\lim_{u\to 0}\frac{tg\,u}{u} =$$

$$= (-1/4)\cdot 1 = -1/4\,. \quad \blacksquare$$

1.3.11 Друга стандартна границя. Розкриття невизначеності виду 1^∞

Теорема 1 (***друга стандартна границя***). *Змінна величина* $(1+1/n)^n$ *має границю при* $n\to\infty$. *Ця границя позначається буквою* e *і називається* ***числом Ейлера***:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left|1^\infty\right| = e}\,.$$

□ $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$; $x_1 = \left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1 = 2$; $x_2 = \left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$;

$x_3 = \left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{64}{27} \approx 2{,}37$; $x_4 = \left(1+\dfrac{1}{4}\right)^4 = \dfrac{625}{256} \approx 2{,}44$; ... .

Можна довести, що змінна величина $x_n = (1+1/n)^n$ – зростаюча x_n і обмежена числом $M=3$. Тому за теоремою про обмежену монотонну змінну існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$. ■

Зауваження 1. Можна показати, що число Ейлера e – ірраціональне і навіть ***трансцендентне*** (воно не може бути коренем жодного алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами). Його значення $e = 2{,}718281828459045... \approx 2{,}72$.

Зауваження 2. При обчисленнях границь використовують також наступні форми запису другої стандартної границі:

1) $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \left|1^\infty\right| = e}$,

де змінна x – дійсна неперервна (на відміну від дискретної змінної n). Графік функції $y=(1+1/x)^x$ подано на рис. 25.

2) $\boxed{\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = \left|1^{\infty}\right| = e}$

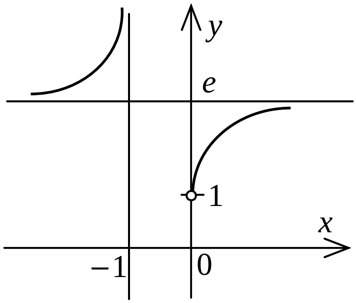


Рисунок 25

Границя виразу – одиниця плюс нескінченно мала в степені, оберненому до цієї нескінченно малої – дорівнює числу Ейлера e.

Зауваження 3. Показникова функція $y = e^x$ з основою e називається ***експонентою*** (***експоненціальною функцією***) і часто позначається $y = \exp x$ (рис. 26). Логарифмічна функція $y = \log_e x$ з основою e називається ***натуральним логарифмом*** і позначається $y = \ln x$ (рис. 26). Десятковий і натуральний логарифми зв'язані співвідношеннями

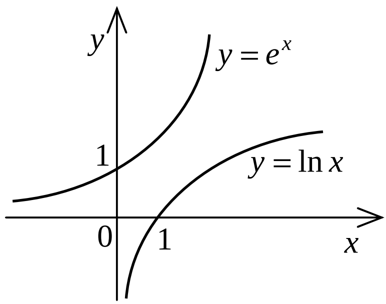


Рисунок 26

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = M \ln x;$$

$$\ln x = (1/M)\lg x,$$

де $M = 1/\ln 10 = 0{,}43429...$ – модуль переходу.

Приклад. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+2}\right)^{2x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{1/2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)\left(\ln(6x-7)-\ln(6x+1)\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(6x+1)}{x^2+3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)\right)$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x^3}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+2}\right)^{2x+1} = \left|1^{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{3x-5}{3x+2}-1\right)\right)^{2x+1} =$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-5-3x-2}{3x+2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{3x+2}\right)^{2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-7}\cdot\frac{-7}{3x+2}(2x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-7(2x+1)}{3x+2}}=e^{-7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+1/x}{3+2/x}}=$$

$$=e^{-7\cdot\frac{2+0}{3+0}}=e^{-14/3};\quad \text{б) }\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{1/2x}=\left|1^{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{(1/\sin 2x)\cdot(\sin 2x/2x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x/2x)}=e^{1}=e\ ;$$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)\big(\ln(6x-7)-\ln(6x+1)\big)=\left|\infty\cdot(\infty-\infty)\right|=$

$$=\lim_{x\to+\infty}(2x-3)\ln\frac{6x-7}{6x+1}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{6x-7}{6x+1}\right)^{2x-3}=$$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x-7}{6x+1}\right)^{2x-3}=\left|1^{\infty}\right|=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6x-7}{6x+1}-1\right)^{2x-3}=$$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-8}{6x+1}\right)^{2x-3}=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-8}{6x+1}\right)^{\frac{6x+1}{-8}\cdot\frac{-8}{6x+1}(2x-3)}=$$

$$=\ln e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8(2x-3)}{6x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8(2x-3)}{6x+1}\cdot\ln e=-8\lim_{x\to+\infty}\frac{2-3/x}{6+1/x}=$$

$$=-8\cdot(2-0)/(6+0)=-8/3;$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(6x+1)}{x^2+3x}=\left|\dfrac{0}{0}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+3x}\ln(6x+1)=$

$$=\lim_{x\to 0}\ln(6x+1)^{1/(x^2+3x)}=\ln\lim_{x\to 0}(6x+1)^{1/(x^2+3x)}=\left|1^{\infty}\right|=$$

$$=\ln\lim_{x\to 0}(1+6x)^{(1/(6x))\cdot 6x/(x^2+3x)}=\ln\lim_{x\to 0}e^{6/(x+3)}=\ln e^{2}=2.$$

(Завдання з д) і е) розв'язати самостійно). ■

Зауваження 4. До знаходження границь треба підходити творчо і обов'язково оцінювати ситуацію, що виникає: чи є невизначеність і якого типу? Шаблонне застосування відомих алгоритмів часто призводить до помилки. Наприклад, границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{6x-5}{3x+2}\right)^{1-2x}$ за структурою запису нагадує розглянуті вище, але перевірка показує, що невизначеності немає і результат одержується безпосередньо:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x-5}{3x+2}\right)^{1-2x}=\left|2^{-\infty}\right|=0.$$

Аналогічно $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{12x+5}{4x-1}\right)^{1-6x}=\left|3^{+\infty}\right|=+\infty$.

1.3.12 Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі

Нехай змінні α і β – нескінченно малі в одному процесі змінювання. Розглянемо їх відношення α/β (припускається, що $\beta\neq 0$). Тоді:

1) Якщо $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$, то α називається нескінченно малою ***вищого порядку*** мализни порівняно з β і позначається $\alpha=o(\beta)$ (α прямує до нуля швидше, ніж β).

2) Якщо $\lim\dfrac{\alpha}{\beta^k}=A\neq 0$ і $A\neq\infty$, то α називається ***нескінченно малою*** k ***-го порядку*** мализни порівняно з β.

3) Якщо $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=A\neq 0$ і $A\neq\infty$, то α і β називаються ***нескінченно малими одного порядку*** мализни.

3а) Якщо $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, то α і β називаються ***еквівалентними нескінченно малими***, позначається $\alpha\sim\beta$.

4) Якщо відношення α/β не має ні скінченної, ні нескінченної границі, то α і β називаються ***непорівнянними нескінченно малими***.

Наприклад:

а) $\alpha = \sin 2x$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді

$\lim\limits_{x\to 0}(\alpha/\beta) = \lim\limits_{x\to 0}(\sin 2x/x) = 2$. Отже, нескінченно малі α і β одного порядку.

б) $\alpha = x^n$, $\beta = x$, $n > 1$, $x \to 0$. Тоді

$\lim\limits_{x\to 0}(\alpha/\beta) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^n/x\right) = \lim\limits_{x\to 0} x^{n-1} = 0$. Отже, $\alpha = o(\beta)$.

в) $\alpha = 4x^3$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha/\beta^3\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(4x^3/x^3\right) = 4$. Отже, величина α є нескінченно малою третього порядку мализни відносно β.

г) $\alpha = (x+1)/x^2$, $\beta = 1/x$, $x \to \infty$. Тоді

$\lim\limits_{x\to\infty}(\alpha/\beta) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(((x+1)/x^2)/(1/x)\right) = \lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x) = 1$. Отже, $\alpha \sim \beta$.

д) $\alpha = x\sin(1/x)$, $\beta = x$, $x \to 0$. Тоді

$\lim\limits_{x\to 0}(\alpha/\beta) = \lim\limits_{x\to 0}\left((x\sin(1/x))/x\right) = \lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$ – не існує. Отже, α і β – непорівнянні.

Нехай нескінченно мала α подана у вигляді суми $\alpha = \beta + \gamma$. Перший доданок β називається ***головною частиною*** α, якщо другий доданок γ має вищий порядок порівняно з β.

<u>Теорема 1</u>. *Нескінченно мала* α *еквівалентна своїй головній частині* β: $\alpha \sim \beta$.

$$\square \quad \alpha = \beta + \gamma; \quad \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \frac{\gamma}{\beta}; \quad \lim\frac{\alpha}{\beta} = \lim 1 + \lim\frac{\gamma}{\beta} = 1 + 0 = 1; \quad \blacksquare$$

Наприклад, при $x \to \infty$ величина $\alpha = (x+1)^2/x^4$ є нескінченно малою. Її можна подати у вигляді $\alpha = \beta + \gamma$, де перший доданок $\beta = 1/x^2$ еквівалентний α (головна частина), а другий доданок $\gamma = (2x+1)/x^4$ має вищий порядок порівняно з β (перевірте це самостійно).

Теорема 2 (принцип заміни нескінченно малих). *При розкритті невизначеності виду* $0/0$ *можна чисельник і знаменник цієї невизначеності заміняти величинами, що їм еквівалентні*:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \sim \alpha_* \\ \beta \sim \beta_*\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\frac{\alpha}{\beta} = \lim\frac{\alpha_*}{\beta} = \lim\frac{\alpha}{\beta_*} = \lim\frac{\alpha_*}{\beta_*}$$

Основні еквівалентності при $x \to 0$, що використовуються при обчисленнях границь, подані в таблиці 2:

Таблиця 2

$\sin x \sim x$	$arctg\, x \sim x$	$a^x - 1 \sim x\ln a$
$tg\, x \sim x$	$1-\cos x \sim x^2/2$	$\ln(1+x) \sim x$
$\arcsin x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$	$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

Приклад. Знайти границю:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-7x^2\right)}{\arcsin 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{6x}-1}{tg^2 x}$.

□ а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x}-1}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{(1+3x)^{1/5}-1}{x} =$$

$$= \left|(1+3x)^{1/5} - 1 \sim 3x/5\right| = \lim_{x\to 0}\frac{3x/5}{x} = \frac{3}{5};$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-7x^2\right)}{\arcsin 2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|\ln\left(1-7x^2\right) \sim -7x^2;\right.$$

$$\left.\arcsin 2x \sim 2x\right| = \lim_{x\to 0}\frac{-7x^2}{2x} = 0;$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{tg^2 x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left|e^{6x}-1 \sim 6x;\ \ tgx \sim x\right| = \lim_{x\to 0}\frac{6x}{x^2} = \infty\ .\ ■$$

Зауваження 1. Якщо в чисельнику чи знаменнику невизначеності $0/0$ стоїть алгебраїчна сума, то в загальному випадку не можна заміняти еквівалентними величинами окремі доданки, а лише весь чисельник чи знаменник в цілому.

Зауваження 2. Нескінченно великі величини порівнюють між собою так само, як і нескінченно малі.

Наприклад, при $x \to \infty$ величини $y = 3x^5 - x^4 + 2$ і $z = 8x^5 + 3x^3 - 2x + 1$ є нескінченно великими. Границя їх відношення $\lim\limits_{x \to \infty}(y/z) = 3/8$. Тому ці величини y і z є нескінченно великими одного порядку.

1.4 Функція. Неперервність функції

1.4.1 Загальне поняття функції. Області визначення та значень. Графік функції. Способи задання функції

Досліджуючи різні явища, розв'язуючи техніко-економічні та інші проблеми доводиться розглядати одночасно декілька змінних величин. Наприклад, при виготовленні u одиниць деякої продукції треба використати x одиниць певної сировини, y одиниць енергоресурсів, видати z одиниць заробітної плати, заплатити s одиниць податків і т.д.

У цьому комплексі змінних величин деякі можуть бути жорстко пов’язані між собою. Їх називають ***функціонально залежними***, при цьому виділяють ***незалежні змінні*** – величини, значення яких можна обирати довільно, та ***залежні змінні*** – величини, значення яких визначаються значеннями незалежних змінних.

Нехай задані непорожні множини X і Y. Якщо вказано правило (***закон відповідності***) f, за яким кожному значенню x з множини X ставиться у відповідність одне певне значення y з множини Y, то кажуть, що задано ***функцію***, визначену на множині X, зі значеннями у множині Y. Функцію позначають одним із способів: $y = f(x)$, $x \in X$, або $f: X \to Y$, або $X \xrightarrow{f} Y$.

При цьому x називається ***незалежною змінною*** (***аргументом***), а y – ***залежною змінною*** (***функцією***).

Множина $D(f) = X$ називається ***областю визначення*** функції. Множина $E(f)$ всіх тих значень $y \in Y$, кожне з яких відповідає принаймні одному $x \in D(f)$, називається ***областю значень*** функції. Область значень $E(f)$ є підмножиною множини Y.

Значення функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначають так: $f\left(x_0\right)$ або $f(x)\big|_{x=x_0}$.

Функція $y = C, C = const$, яка на всій області визначення набуває єдиного значення C, називається ***сталою***.

Дві функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ називаються ***рівними***, якщо: 1) вони мають одну й ту саму область визначення $D(f) = D(g)$; 2) на кожному елементі x з цієї області визначення функції набувають однакових значень $f(x) = g(x)$.

Якщо змінні x і y розглядати як декартові координати точок на площині, то ***графіком*** функції $y = f(x)$ є множина всіх точок координатної площини Oxy з координатами $\left(x, f(x)\right)$, $x \in D(f)$.

<u>Зауваження 1</u>. Кожна пряма, паралельна осі Oy, з графіком функції може мати не більше однієї спільної точки.

Наприклад, на рис. 27 крива m є графіком деякої функції, а крива n – ні.

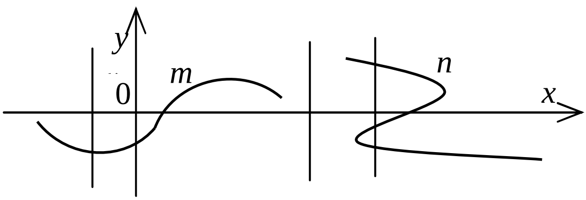


Рисунок 27

Функція $y = f(x)$ вважається <u>заданою</u>, якщо: 1) вказана її область визначення $D(f)$: 2) вказаний закон відповідності f.

<u>Основні способи задання функції.</u>

1) <u>Табличний спосіб задання функції.</u> При цьому способі пишуть у визначеному порядку значення аргументу $x_1, x_2, ..., x_i, ...$ і

відповідні значення функції $y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots$:

x	x_1	x_2	…	x_i	…
y	y_1	y_2	…	y_i	…

Цей спосіб дуже часто використовується в економіці. Він зручний тим, що для кожного наведеного в таблиці значення аргументу можна відразу знайти відповідне значення функції без додаткових обчислень. Проте неможливо безпосередньо знайти відповідне значення функції для проміжного значення аргументу, і до дослідження функції важко застосувати апарат математичного аналізу.

2) Графічний спосіб задання функції. Якщо у прямокутній системі координат на площині маємо деяку сукупність точок (x, y) і при цьому ніякі дві точки не лежать на одній прямій, що паралельна осі Oy, то ця сукупність точок визначає деяку однозначну функцію $y = f(x)$. Значеннями аргументу є абсциси точок, значеннями функції – відповідні ординати.

Перевагою графічного способу є його наочність і можливість безпосередньо визначити відповідне значення функції для кожного значення аргументу. Проте значення функції знаходиться наближено, і до дослідження функції важко застосувати апарат математичного аналізу.

3) Аналітичний спосіб задання функції:

а) ***Явна форма задання функції***. Функцію задають у вигляді формул, що визначають операції (і послідовності їх виконання), які потрібно здійснити над значенням незалежної змінної x, щоб визначити значення залежної змінної y.

Наприклад, $y = (x^{1/2} - 1)^2$, де $x \geq 0$.

б) ***Неявна форма задання функції***. Під неявним розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв’язаного відносно y, яке визначає функцію тільки тоді, коли всі впорядковані пари (x, y), що є розв'язками даного рівняння, утворюють множину, в якій для будь-якого числа x_0 є не більш як одна пара (x_0, y_0) з першим елементом x_0.

Наприклад, співвідношення $x^2/25+y^2/9=1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$ задають неявно функцію, графіком якої служить дуга еліпса, що лежить у першій чверті.

У деяких випадках функцію $y=y(x)$, задану неявно, можна подати в явній формі, розв'язавши рівняння $F(x,y)=0$ відносно змінної y. Наприклад: $xy-4=0 \Rightarrow y=4/x$.

в) ***Параметрична форма задання функції***. Якщо функцію $y=y(x)$ задано параметрично, то значення змінних x і y, що відповідають одне одному, визначають через третю величину t (***параметр***): $x=x(t)$, $y=y(t)$.

У деяких випадках функцію, задану параметрично, можна записати в неявній (чи навіть явній) формі, виключивши параметр t. Наприклад, функція $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t\in[0,\ \pi/2]$, допускає запис у неявній формі:

$$x^2+y^2=\sin^2 t+\cos^2 t \;\Rightarrow\; x^2+y^2=1,\ t\in[0,\ \pi/2],$$

звідки можна одержати явне подання: $y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0;1]$.

Якщо функція задана аналітично, то легко перейти до табличного чи графічного способу її задання, оскільки аналітичний спосіб дає можливість знайти відповідне значення функції для будь-якого значення аргументу, хоча це часто вимагає складних обчислень. Його безсумнівна перевага полягає у можливості застосування апарату математичного аналізу. Недоліками аналітичного задання є недостатня наочність та необхідність обчислень.

Зауваження 2. Коли функція задається аналітично, то часто область визначення явно не вказується. Тоді розглядається так звана ***природна область визначення*** (***область допустимих значень***). *Щоб знайти природну область визначення треба скласти систему обмежень на всі математичні операції, що фігурують в наведених формулах, і розв'язати її.*

Приклад. Знайти область визначення функції

а) $y=\ln(6-x)+\sqrt{x^2-9}$; б) $y=\arcsin(1/x)-3\sqrt{8-x^3}$;

в) $y=\frac{2}{\sqrt{16-x^2}}+\ln x^2$; г) $y=arctg\frac{1}{x+4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+8}}$.

□ а) $D(f):\ \begin{cases} 6-x>0 \\ x^2-9\ge 0 \end{cases}\ \begin{cases} x<6 \\ |x|\ge 3 \end{cases}\quad x\in(-\infty;-3]\cup[3;6)$.

(Завдання б), в) і г) розв'язати самостійно). ■

1.4.2 Основні елементарні функції та їх графіки

Основні елементарні функції та їх графіки вивчають у середній школі. Вони відіграють важливу роль в математиці, тому ці функції, їх області визначення та графіки треба добре знати.

<u>Стала функція</u> $y=C$, $C=const$. Функція визначена на всій числовій прямій $-\infty<x<+\infty$. Графіком служить пряма, паралельна осі Oy.

<u>Степенева функція</u> $y=x^{\alpha}$. Її властивості залежать від значення показника α:

а) α – ціле додатне число. Функція визначена на всій числовій прямій $-\infty<x<+\infty$. Графіки функції у цьому випадку при деяких значеннях α мають вигляд, зображений на рисунках 28 і 29;

б) α – ціле від'ємне число. Функція визначена для усіх значень x, окрім $x=0$. Графіки функцій при деяких значеннях α мають вигляд, зображений на рисунках 30 і 31;

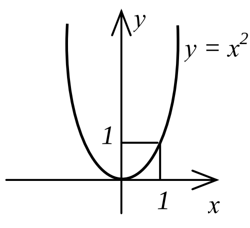


Рисунок 28

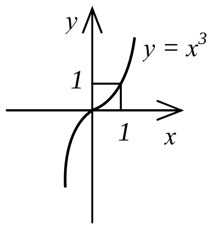


Рисунок 29

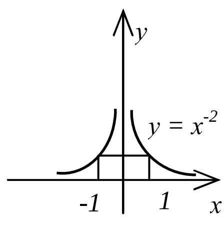


Рисунок 30

в) число α – раціональне дробове. На рисунках 32, 33 і 34 зображені графіки степеневої функції, коли числа α додатні. При від'ємних числах α матимемо графіки, які схожі з зображеними на рисунках 30 і 31, коли знаменник дробу непарний, і їх частиною праворуч від осі Oy, якщо знаменник дробу парний.

<u>Показникова функція</u> $y = a^x$, $a > 0$ і $x \in R$. Графік її має вигляд, зображений на рисунку 35. Розглянуті випадки, коли $0 < a < 1$ і $a > 1$.

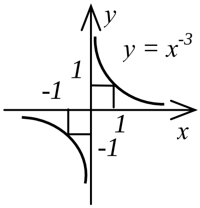


Рисунок 31

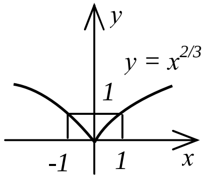


Рисунок 32

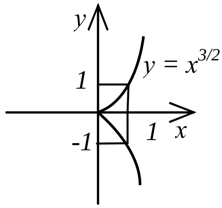


Рисунок 33

<u>Логарифмічна функція</u> $y = \log_a x$, $a > 0$ і $x > 0$. Графік її зображено на рисунку 36. Розглянуті випадки, коли $0 < a < 1$ і $a > 1$. $\lg x$ – десятковий логарифм, $\ln x$ – натуральний логарифм.

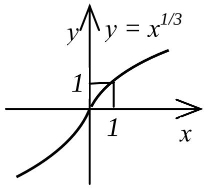


Рисунок 34

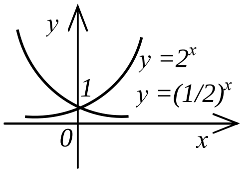


Рисунок 35

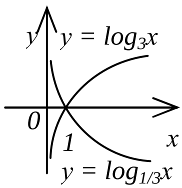


Рисунок 36

<u>Тригонометричні функції</u>: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$, $y = \sec x = 1/\cos x$, $y = \mathrm{cosec}\, x = 1/\sin x$. Усі названі тригонометричні функції періодичні.

Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ мають період 2π. Ці функції визначені при всіх значеннях $x \in R$.

Функції $y = tg\, x$ і $y = \sec x$ мають період відповідно π і 2π. Вони визначені скрізь, крім точок $x = (2k+1)\pi/2$, $k \in Z$.

Функції $y = ctg\,x$ і $y = \cos ec\,x$ мають період відповідно π і 2π. Вони визначені скрізь, крім точок $x = k\pi$, $k \in Z$.

Графіки тригонометричних функцій зображені на рисунках 37–39.

Обернені тригонометричні функції:

а) Функція арксинус $y = \arcsin x$. Область її визначення – відрізок $[-1;1]$, область значень – відрізок $[-\pi/2;\pi/2]$. Графік подано на рисунку 40.

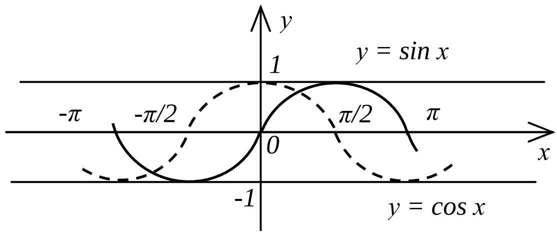
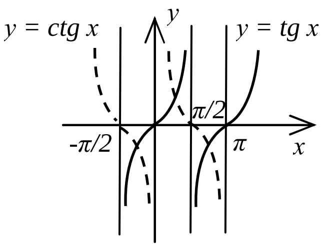


Рисунок 37

б) Функція арккосинус $y = \arccos x$. Область її визначення – відрізок $[-1;1]$, область значень – відрізок $[0;\pi]$. Графік подано на рисунку 41.



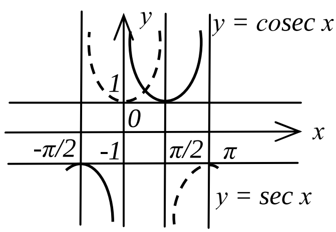


Рисунок 38 Рисунок 39

в) Функція арктангенс $y = arctg\,x$. Область її визначення – вся числова пряма, область значень – інтервал $(-\pi/2;\pi/2)$. Графік подано на рисунку 42.

г) Функція арккотангенс $y = arcctg\,x$. Область її визначення –

вся числова пряма, область значень – інтервал $(0;\pi)$. Графік подано на рисунку 43.

Деякі границі, що відображають властивості основних елементарних функцій:

$$\lim_{x\to-\infty} arctg\, x = -\pi/2\,; \quad \lim_{x\to+\infty} arctg\, x = \pi/2\,;$$

$$\lim_{x\to-\infty} arcctg\, x = \pi\,; \quad \lim_{x\to+\infty} arcctg\, x = 0\,.$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0,\ a>1; \\ +\infty,\ 0<a<1; \end{cases} \quad \lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty,\ a>1; \\ 0,\ 0<a<1; \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty,\ a>1; \\ +\infty,\ 0<a<1; \end{cases} \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty,\ a>1; \\ -\infty,\ 0<a<1; \end{cases}$$

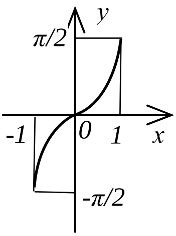


Рисунок 40

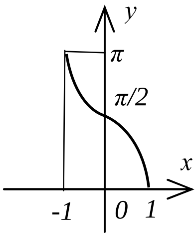


Рисунок 41

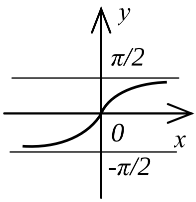


Рисунок 42

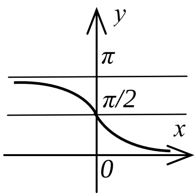


Рисунок 43

1.4.3 Класифікація функцій за властивостями та будовою

Функція, як змінна величина, може бути монотонною чи не монотонною, обмеженою чи необмеженою. Крім цих властивостей також зазначають її парність і періодичність.

Значення незалежного аргументу x, при яких функція $y = f(x)$ обертається в нуль, тобто корені рівняння $f(x) = 0$ (спільні точки графіка функції з віссю Ox), називаються ***нулями*** (***коренями***) функції. На рисунку 44 x_1 і x_2 – корені.

Інтервали області визначення, де функція $y = f(x)$ зберігає знак, тобто інтервали, де функція додатна $f(x) > 0$ (графік функції розташований над віссю Ox), та інтервали, де функція від'ємна

$f(x) < 0$ (графік розміщений під віссю Ox) називаються ***інтервалами знакосталості*** функції (рис. 44).

Парність. Функція $y = f(x)$ називається ***парною***, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in D(f)$; і ***непарною***, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in D(f)$. Інакше функція називається ***функцією загального вигляду*** (***загального положення***).

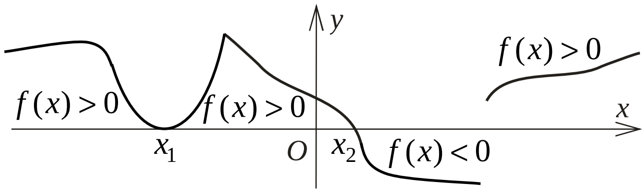
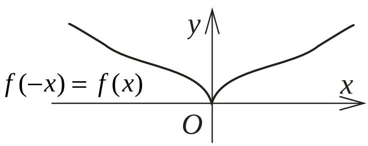


Рисунок 44

Наприклад, функції $y = x^2$ і $y = \cos x$ – парні, функції $y = \sin x$ і $y = arctg\, x$ – непарні, а функції $y = 2^x$ і $y = \arccos x$ – загального вигляду.

Зауваження 1. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy (рис. 45), а графік непарної функції симетричний відносно початку координат O (рис. 46).



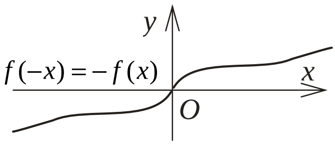


Рисунок 45 Рисунок 46

Періодичність. Функція $y = f(x)$ називається ***періодичною***, якщо існує додатне число T (***період***) таке, що справджується рівність $f(x+T) = f(x)$, $x \in D(f)$.

Звичайно під ***періодом*** (***основним періодом***) функції розуміють T_0 – найменший з усіх додатних періодів (якщо такий існує) (рис. 47). У цьому разі всі періоди функції йому кратні: $T = kT_0$, $k \in N$.

<u>Приклад 1</u>. Дослідити функцію $y = \sin(ax+b)$, $a \neq 0$ на періодичність і у випадку періодичності знайти період.

□ Дана функція визначена на всій числовій прямій. Припустимо, що ця функція періодична. Тоді для довільного $x \in R$ повинна виконуватися умова $\sin(ax+b) = \sin(a(x+T)+b)$, де $T = const > 0$. Розв'яжемо це рівняння відносно T:

$$T = (\pi + 2\pi k)/a - 2x - 2b/a, \quad k \in Z; \; T = (2\pi n)/a, \quad n \in Z.$$

Величина T з першої формули не є періодом, тому що залежить від x. Друга формула задає нескінченну множину чисел. Отже, задана функція періодична. Найменшим додатним з цих чисел є $T_0 = 2\pi/|a|$ – основний період. ■

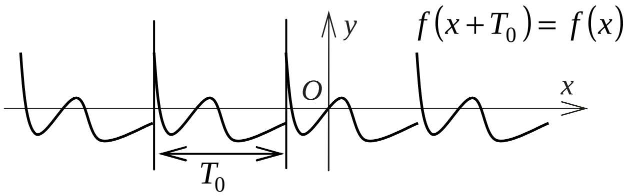


Рисунок 47

<u>Обмеженість.</u> Функція $y = f(x)$ є ***обмеженою зверху***, якщо існує таке число M, що для всіх значень аргументу з області визначення функції виконується нерівність $f(x) \leq M$, і ***обмеженою знизу***, якщо існує таке число τ, що для всіх значень аргументу з області визначення функції виконується нерівність $f(x) \geq \tau$.

Функція, обмежена зверху і знизу, є ***обмеженою***.

Наприклад, функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ обмежені зверху числом 1, а знизу числом -1. Функція $y = 2^x$ обмежена знизу числом 0, а зверху необмежена. Функції $y = tg\, x$ і $y = ctg\, x$ необмежені.

<u>Монотонність.</u> Функція $y = f(x)$ є ***зростаючою*** на проміжку $(a;b)$, якщо для будь-якої пари значень $x_1 \in (a;b)$ і $x_2 \in (a;b)$ з

нерівності $x_1 > x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \geq f(x_2)$, тобто *більшому значенню аргументу відповідає неменше значення функції*. Якщо з нерівності $x_1 > x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \leq f(x_2)$, то функція зветься ***спадною***, тобто *більшому значенню аргументу відповідає небільше значення функції*.

Зростаючі і спадні функції називають ***монотонними***.

Якщо в поданих означеннях нестрогі нерівності замінити на строгі, то маємо ***строго монотонні*** функції.

Якщо область визначення можна розбити на деяке число проміжків, які не перетинаються, таких, що на кожному з них функція монотонна, то вони називаються ***проміжками монотонності*** функції.

Наприклад, функція $y = x^2$ визначена на всій числовій осі. Вона має два проміжки строгої монотонності $(-\infty;0)$ і $(0;+\infty)$, на першому з яких функція є строго спадною, а на другому – строго зростаючою.

<u>Складена функція</u>. Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині U, а функція $u = \varphi(x)$ визначена на множині X, причому для кожного значення $x \in X$ відповідне значення $u = \varphi(x)$ належить множині U. Тоді на множині X визначена функція $y = f(\varphi(x))$, яку називають ***складеною функцією*** від x або ***суперпозицією*** (***композицією***) функцій φ і f. При цьому $y = f(u)$ називають ***зовнішньою функцією***, а $u = \varphi(x)$ – ***внутрішньою функцією*** або ***проміжним аргументом***. Змінну x називають ***незалежною змінною*** або ***внутрішнім аргументом***.

Складена функція – це функція від функції. Більшість функцій, які вивчають у математиці, можна розглядати як складені функції.

Наприклад, функцію $z = \sqrt{x} - 1$ можна записати: $y = \sqrt{x}$; $z = y - 1$.

<u>Зауваження 2</u>. Суперпозиція може застосовуватися повторно. Наприклад, $y = \sin v$; $v = 2^u$; $u = arctg\, x$.

<u>Зауваження 3</u>. Розглядаючи складені функції, слід звертати увагу на області визначення функцій, що їх утворюють.

Приклад 2. Задану функцію подати як складену за допомогою чотирьох основних арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення і ділення) та суперпозиції основних елементарних функцій:

а) $y = \ln^4 3^{\sin^2 x} + 5\cos x^3$; б) $y = tg^6 2^x - 3\sqrt{\arccos(1/x^2)}$.

(Розв'язати самостійно).

Елементарні функції. ***Елементарною функцією*** називається така, що може бути задана за допомогою скінченного числа арифметичних операцій і суперпозицій над основними елементарними функціями.

Наприклад, $y = (\lg x + 4\sqrt[3]{x} + 2tg\, x)/(10^x - x^2 \arcsin x)$ – елементарна функція, а функції $y = \operatorname{sgn} x$ (знак числа x) та $y = \sin x + \sin x^2 + \sin x^3 + ... + \sin x^n + ...$ не є елементарними.

На рисунку 48 подана схема класифікації елементарних функцій.

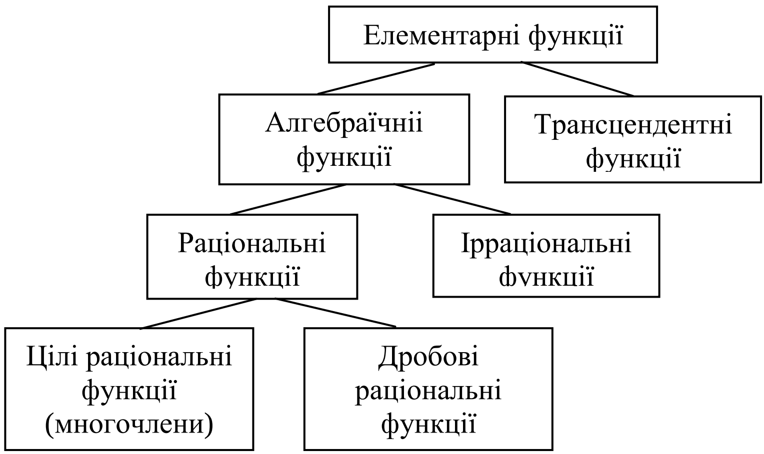


Рисунок 48

Алгебраїчні функції. До числа ***алгебраїчних функцій*** належать такі елементарні функції:

1) ***Ціла раціональна функція*** або ***многочлен*** (***поліном***)

$$y = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n ,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – ***коефіцієнти*** (сталі числа), зокрема, a_0 – ***старший коефіцієнт***, $a_0 \neq 0$, a_n – ***вільний член***; n – ***степінь*** (***порядок***) многочлена (ціле невід'ємне число). Зрозуміло, що ця функція визначена при будь-якому $x \in R$.

2) ***Дробово-раціональна функція*** (***раціональний дріб***) – відношення двох многочленів $y = P_n(x) / Q_m(x)$.

Наприклад, раціональний дріб $y = a / x$, $(a \neq 0, x \neq 0)$ виражає обернено пропорційну залежність.

3) ***Ірраціональна функція*** – це така функція $y = f(x)$, в якій зустрічається піднесення до степеня з раціональним дробовим показником.

Наприклад, функція $y = (2x^2 + \sqrt{x})/(1 + 5x^2)$ є ірраціональною.

Елементарні функції, що не є алгебраїчними, називаються ***трансцендентними***. З основних елементарних функцій до них відносяться показникова, логарифмічна, тригонометричні та обернені тригонометричні функції.

Наприклад, функція $y = \cos x - 5x^3$ є трансцендентною.

<u>Обернена функція</u>. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині X, а Y – множина її значень. Якщо ця функція $y = f(x)$ така, що при кожному фіксованому $y \in Y$ рівняння $y = f(x)$ має єдиний розв'язок $x \in X$, то можна розглядати ***обернену функцію*** $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$. Обернена функція $x = f^{-1}(y)$ кожному $y \in Y$ ставить у відповідність єдине значення $x \in X$ таке, що $f(x) = y$. Функція $y = f(x)$, $x \in X$ при цьому називається ***прямою функцією***.

Якщо функція f^{-1} обернена до функції f, то й функція f буде оберненою до функції f^{-1}. Функції f і f^{-1} називають ***взаємно оберненими***. Область визначення X функції f є областю значень функції f^{-1}, область значень Y функції f є областю визначення функції f^{-1}.

Графіки функцій $y=f(x)$, $x\in X$ і $x=f^{-1}(y)$, $y\in Y$ збігаються (відображають одну залежність з різних позицій).

Зауваження 4. Якщо в оберненій функції $x=f^{-1}(y)$ ввести традиційні позначення для незалежної та залежної змінних (перезначити $x\to y$, $y\to x$), то матимемо ***обернену функцію в традиційних позначеннях змінних*** $y=f^{-1}(x)$. Графіки прямої $y=f(x)$ і оберненої $y=f^{-1}(x)$ функцій симетричні відносно бісектриси $y=x$ першого і третього координатних кутів.

Наприклад, функція $y=f(x)=x^2$ на інтервалі $[0;+\infty)$ має обернену $y=\sqrt{x}$. Графіки цих функцій зображені на рисунку 49.

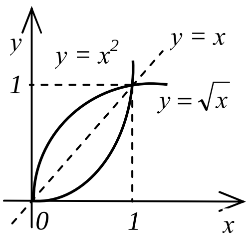


Рисунок 49

Теорема. *Нехай функція* $y=f(x)$ *визначена і строго зростаюча (строго спадна) на відрізку* $[a;b]$. *Тоді обернена функція* $y=f^{-1}(x)$ *визначена і строго зростаюча (строго спадна) на відрізку* $\left[f(a);f(b)\right]$ $\left(\left[f(b);f(a)\right]\right)$.

(Без доведення).

1.4.4 Поняття неперервності функції в точці. Властивості функцій, які неперервні в точці

З поняттям границі тісно пов'язане інше фундаментальне поняття математичного аналізу – неперервність функції

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і x – довільна точка з цього околу, відмінна від x_0. Різницю $\Delta x=x-x_0$ називають ***приростом незалежної змінної*** (***приростом аргументу***). Відповідну різницю $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ називають ***приростом функції***.

Тоді $x = x_0 + \Delta x$; $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

<u>Зауваження</u>. Приріст функції Δy залежить як від вибору точки x_0, так і від вибору приросту аргументу Δx.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною в точці*** x_0, якщо в цій точці виконується рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Сформульоване означення неперервності накладає на функцію $f(x)$ такі умови: 1) функція визначена в деякому околі точки x_0, включаючи і саму точку x_0, тобто існує число $f(x_0)$; 2) існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ – границя функції в точці x_0; 3) границя функції в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці.

Оскільки $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$, то для неперервної в точці x_0 функції маємо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$, тобто *знак границі* $\lim$ *і знак неперервної функції* f *можна міняти місцями*. Іншими словами, *щоб обчислити границю неперервної функції, треба у її вираз замість аргументу підставити його границю*.

У рівності $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ перенесемо $f(x_0)$ ліворуч та уведемо під знак границі як сталу. Тоді отримаємо $\lim\limits_{x - x_0 \to 0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0$, звідки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, тобто *функція неперервна, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції*.

Якщо функція $f(x)$ неперервна у кожній точці деякого інтервалу $(a;b)$, то вона називається ***неперервною на*** цьому ***інтервалі***.

<u>Приклад</u>. Довести, що функція $y = \sin x$ неперервна у довільній точці x_0 області визначення $D(f) = R$.

□ $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin(\Delta x / 2)\cos(x_0 + \Delta x / 2)$.

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin(\Delta x / 2) = 0$, а величина $\cos(x_0 + \Delta x / 2)$ обмежена, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. ■

Спираючись на властивості границь, можна встановити наступне:

1) Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні у точці x_0, то функції $g(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$, $h(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ і $q(x) = f_1(x) / f_2(x)$ $\left(f_2(x) \neq 0 \right)$, також неперервні у точці x_0.

2) Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна у точці x_0, а функція $f(u)$ неперервна у точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то й складена функція $f(\varphi(x))$ неперервна у точці x_0.

3) Якщо функція $f(x)$ неперервна у точці x_0 і має обернену функцію $x = f^{-1}(y)$ в деякому околі точки x_0, то обернена функція $x = f^{-1}(y)$ неперервна в точці $y_0 = f(x_0)$.

4) Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і відмінна від нуля $f(x_0) \neq 0$, то існує такий окіл цієї точки x_0, що для всіх x з указаного околу функція $f(x)$ не обертається в нуль і має знак, який збігається зі знаком $f(x_0)$.

Неперервність функцій використовується при обчисленні границь. З наведених властивостей випливають такі важливі наслідки:

1) ***Заміна змінної***

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \left| \begin{array}{c} u = \varphi(x) \\ u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \end{array} \right| = \lim_{u \to u_0} f(u).$$

2) Границя ***показниково-степеневої функції***

$$\lim_{x \to x_0} \left(u(x) \right)^{v(x)} = \left(\lim_{x \to x_0} u(x) \right)^{\lim\limits_{x \to x_0} v(x)}.$$

3) *Усі елементарні функції є неперервними у кожній точці*

своєї природної області визначення.

1.4.5 Односторонні границі. Одностороння неперервність. Властивості функцій, неперервних на відрізку

Границя функції $f(x)$ в точці x_0 при додатковій умові, що x залишається меншим x_0, називається ***лівою границею*** функції $f(x)$ в точці x_0 і позначається

$$\lim_{x\to x_0,\, x<x_0} f(x) \quad \text{або} \quad \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Аналогічно визначається ***права границя*** функції $f(x)$ в точці x_0:

$$\lim_{x\to x_0,\, x>x_0} f(x) \quad \text{або} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

Ліва і права границі називаються ***односторонніми границями***.

<u>Теорема 1</u>. *Для того, щоб функція $f(x)$ в точці x_0 мала границю, яка дорівнює A, необхідно і достатньо, щоб існували обидві односторонні границі в цій точці, кожна з яких також дорівнює* A:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A \\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A\end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

(Без доведення).

Нехай функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $(a;x_0]$, $a<x_0$. Функція $f(x)$ ***неперервна у точці*** x_0 ***зліва***, якщо

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0).$$

Аналогічно, функція $f(x)$, визначена на півінтервалі $[x_0;b)$, $x_0<b$, ***неперервна у точці*** x_0 ***справа***, якщо

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Загальна назва для функції, неперервної зліва чи справа, – ***од-***

носторонньо неперервна.

Якщо функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ і точка $x_0 \in (a;b)$, то *для неперервності функції у точці* x_0 *необхідно і достатньо, щоб функція* $f(x)$ *була неперервна зліва і справа у точці* x_0. Іншими словами, *функція* $f(x)$, *яка визначена в деякому околі точки* x_0, *неперервна в точці* x_0, *якщо обидві її односторонні границі дорівнюють значенню функції в цій точці*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній внутрішній точці відрізка $[a;b]$ і відповідно односторонньо неперервна на його кінцях, то вона називається ***неперервною на відрізку*** $[a;b]$.

Властивості функцій неперервних на відрізку сформулюємо у вигляді теорем (без доведення).

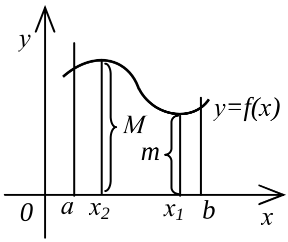


Рисунок 50

Теорема 2 (про обмеженість функції та існування найменшого та найбільшого значень). *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *то вона обмежена на цьому відрізку і серед її значень існує найменше* $m = f(x_1)$ *та найбільше* $M = f(x_2)$, *де* $x_1 \in [a;b]$ *і* $x_2 \in [a;b]$ (рис. 50). (Без доведення).

Зауваження. Твердження теореми може бути невірним, якщо розглядати $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$.

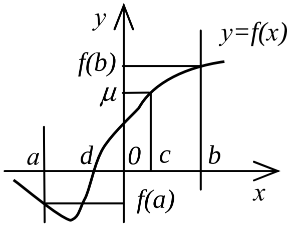


Рисунок 51

Теорема 3 (про перетворення функції на нуль). *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і на його кінцях має значення різних знаків* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Тоді на інтервалі* $(a;b)$ *знайдеться хоча б одна точка* $x = d$ *така, що* $f(d) = 0$ (рис. 51).

(Без доведення).

Теорема 4 (про проміжне значення). *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і на його кінцях приймає різні значення* $f(a) \neq f(b)$. *Тоді для будь-якого числа* μ, *що міститься між числами* $f(a)$ *і* $f(b)$, *на інтервалі* $(a;b)$ *знайдеться хоча б одна точка* $x = c$ *така, що* $f(c) = \mu$ (рис. 51).

(Без доведення).

1.4.6 Точки розриву та їх класифікація

Неперервна в точці x_0 функція $f(x)$ повинна задовольняти наступні умови: 1) функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і деякому її околі. 2) існує скінченна ліва границя функції $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$. 3) існує скінченна права границя функції $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$. 4) односторонні границі рівні. 5) спільне значення односторонніх границь дорівнює значенню функції $f(x_0)$ в цій точці x_0.

Якщо хоча б одна з перелічених умов порушується, то функція $f(x)$ називається ***розривною*** в точці x_0, а сама точка x_0 називається ***точкою розриву*** цієї функції.

Якщо в точці розриву x_0 існують обидві скінченні односторонні границі, то це – ***точка розриву першого роду***. Якщо у точці розриву x_0 хоча б одна з односторонніх границь нескінченна або взагалі не існує, то це – ***точка розриву другого роду***.

Якщо в точці розриву першого роду x_0 односторонні границі рівні $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$, то маємо ***усувний розрив***, оскільки, поклавши $f(x_0) = A$, дістанемо неперервну функцію.

Якщо в точці розриву першого роду x_0 односторонні границі різні $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1 \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$, то маємо ***скінченний стрибок*** висотою $|A_2 - A_1|$.

Якщо в точці розриву другого роду x_0 існують одна нескінченна одностороння границя, а інша – скінченна чи нескінченна, то маємо ***нескінченний стрибок***.

<u>Правило</u>. *Для знаходження точок розриву функції $f(x)$ і визначення їх характеру треба:*

1) знайти можливі точки розриву (скінченні кінці інтервалів області визначення; точки, в яких змінюється характер задання функції, і т.п.);

2) у кожній «підозрілій» точці x_0 обчислити, якщо існують, значення функції $f(x_0)$ та обидві односторонні границі $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ і $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$;

3) з аналізу отриманих значень зробити висновок про наявність і характер розриву.

<u>Приклад</u>. Визначити точки розриву заданої функції та з'ясувати їх характер:

а) $y = arctg\left(1/(x-3)\right)$;

б) $y = 7^{-3/x^2}$;

в) $y = \sin\left(\pi/x\right)$;

г) $y = \begin{cases} 2^{2/(x+1)} - 3, & x < 1; \\ \log_2 x, & x \geq 1 \end{cases}$

□ а) Функція $y = arctg\left(1/(x-3)\right)$ невизначена у точці $x = 3$. Розглянемо

$$\lim_{x \to 3-0} arctg\left(1/(x-3)\right) = -\pi/2 \quad \text{і} \quad \lim_{x \to 3+0} arctg\left(1/(x-3)\right) = \pi/2 .$$

Функція у точці $x = 3$ має скінченний стрибок висотою π (рис. 52).

б) Функція $y = 7^{-3/x^2}$ невизначена у точці $x = 0$. Розглянемо

$$\lim_{x \to -0} 7^{-3/x^2} = 0 \quad \text{і} \quad \lim_{x \to +0} 7^{-3/x^2} = 0 .$$

Якщо довизначимо функцію рівністю $f(0) = 0$, то дістанемо неперервну у точці $x = 0$ функцію. Отже, маємо усувний розрив (рис. 53).

в) Функція $y = \sin\left(\pi/x\right)$ невизначена у точці $x = 0$. Обидві односторонні границі $\lim\limits_{x\to -0} \sin\left(\pi/x\right)$ і $\lim\limits_{x\to +0} \sin\left(\pi/x\right)$ не існують. Отже, маємо точку розриву другого роду (рис. 54).

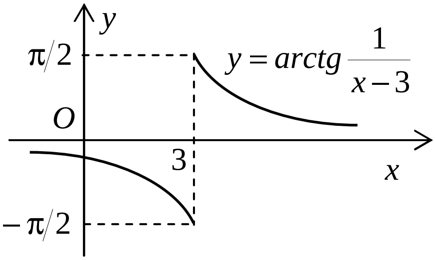


Рисунок 52

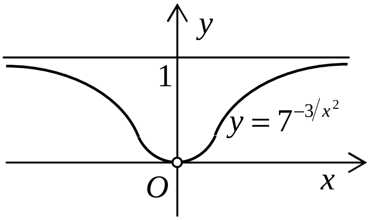


Рисунок 53

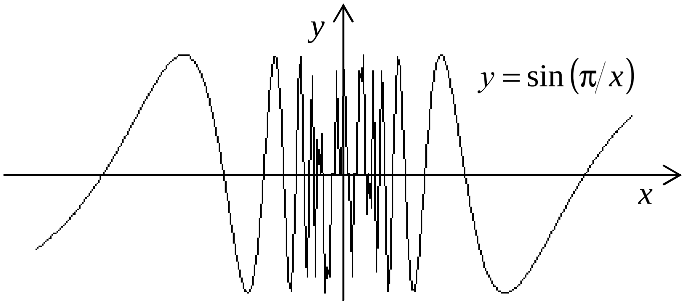


Рисунок 54

г) Функція $y = f(x) = \begin{cases} 2^{2/(x+1)} - 3, \ x < 1; \\ \log_2 x, \ x \ge 1 \end{cases}$ визначена на всій числовій прямій, окрім точки $x = -1$, а в точці $x = 1$ змінюється її аналітичний вираз. Тому маємо дві точки, що «підозрілі» на розрив.

У точці $x = -1$:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0}\left(2^{2/(x+1)} - 3\right) = -3;$$

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0}\left(2^{2/(x+1)} - 3\right) = -3;$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0}\left(2^{2/(x+1)} - 3\right) = +\infty .$$

Отже, у точці $x=-1$ функція має нескінченний стрибок (рис. 55).

У точці $x=1$:

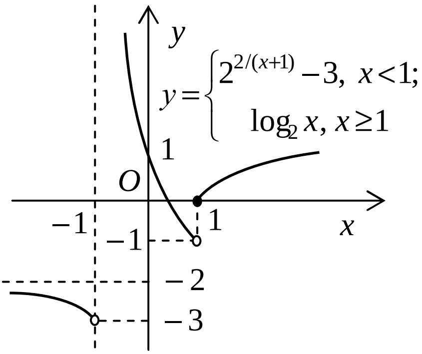


Рисунок 55

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) =$$

$$= \lim_{x\to 1-0}\left(2^{2/(x+1)}-3\right)=-1;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) =$$

$$= \lim_{x\to 1+0}\log_2 x = 0;$$

$$f(1)=\log_2 1 = 0.$$

Отже, у точці $x=1$ функція має скінченний стрибок висотою 1 (рис. 55). ■

1.4.7 Застосування функцій в економіці

Наявність функціональних залежностей між економічними показниками дозволяє використовувати для опису і дослідження економічних задач поняття функції та інші засоби математичного аналізу. Наведемо деякі приклади:

1. ***Функція попиту від ціни*** $q=f(p)$ – залежність попиту q на товар від його ціни p. Функції попиту можуть бути найрізноманітнішими, зокрема,

$$q=600/(p+3)+10; \quad q=ae^{-3p}, \text{ де } a=const.$$

2. Оберненою до попередньої є ***функція ціни від попиту*** $p=\varphi(q)$. Це можуть бути, зокрема, залежності

$$p=3-0{,}5\ln aq; \quad p=aq^{-0{,}6}, \text{ де } a=const.$$

3. Нехай u – сумарний виторг при реалізації q одиниць товару за ціною p, що залежить від попиту $p=\varphi(q)$. Тоді ***функція сумарного виторгу*** $u=f(q)$ визначається як добуток кількості одиниць товару q на його ціну p: $u=f(q)=q\varphi(q)$. Наприклад,

якщо залежність ціни від попиту $p = 3 - 0{,}5 \ln aq$, то функція сумарного виторгу: $u = q(3 - 0{,}5 \ln aq)$.

4. ***Функція пропозиції*** $S = f(p)$ – залежність пропозиції S товару від його ціни p. Обернена функція $p = \varphi(S)$ є ***функцією ціни від пропозиції***.

5. ***Функція сумарних витрат*** $K = F(x)$ – залежність сумарних витрат K на виробництво x одиниць товару від їх кількості x. Якщо розділити сумарні витрати K на кількість виробленого товару x, то одержимо ***функцію середніх*** (***питомих***) ***витрат*** (***собівартість*** одиниці товару) $\Pi = f(x)$:

$$\Pi = f(x) = K / x = F(x) / x .$$

6. ***Функція корисності*** (***функція переваг***) $y = f(x)$ – залежність ступеня корисності y (результату, ефекту) дії певного економічного фактору від рівня x (кількості, інтенсивності) цього фактору.

Приклад. Дослідження показують, що залежності попиту y на товари першої необхідності і попиту z на предмети розкоші від рівня доходу x покупців описуються функціями Л. Торнквіста:

$$y = \frac{b_1(x - a_1)}{x - c_1},\ x > a_1 > c_1;\quad z = \frac{b_2 x(x - a_2)}{x - c_2},\ x > a_2 > c_2;$$

$$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 = const .$$

Тут a_1 і a_2 – рівні доходу, при яких починається придбання відповідного товару, $a_2 > a_1$. Знайти граничний попит при $x \to \infty$.

$$\square \quad \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{b_1(x - a_1)}{x - c_1} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = b_1 \lim_{x\to\infty} \frac{1 - a_1 / x}{1 - c_1 / x} = b_1;$$

$$\lim_{x\to\infty} z = \lim_{x\to\infty} \frac{b_2 x(x - a_2)}{x - c_2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = b_2 \lim_{x\to\infty} \frac{1 - a_2 / x^2}{1/x - c_2 / x^2} = \infty .$$

Таким чином, при необмеженому зростанні рівня доходів попит на товари першої необхідності наближається до стану насичення $y = b_1$, а попит на предмети розкоші необмежено зростає. ■

1.5 Матриці, визначники та операції над ними

Матриці – це математичні об’єкти, що застосовуються для компактного запису таблично заданої інформації. Вони, зокрема, спрощують подання систем лінійних алгебраїчних або диференціальних рівнянь.

1.5.1 Означення матриці. Рівність матриць. Види матриць

Матрицею розміру (***розмірності***) $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з m ***рядків*** і n ***стовпців***.

Числа a_{ij} $\left(i, j = \overline{1, n}\right)$ називаються ***елементами*** матриці. Перший індекс i вказує номер рядка (нумерація зверху вниз), а другий j – номер стовпця (нумерація зліва направо), на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Матриці A і B називаються ***рівними***, якщо вони мають однаковий розмір $m \times n$ і їх відповідні елементи рівні

$$\boxed{A_{m\times n} = B_{m\times n} \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij},\ i = \overline{1, m};\ \ j = \overline{1, n}}\ .$$

Матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю, називається ***нульовою*** і позначається 0.

Матриця, у якої число стовпців дорівнює числу рядків $m = n$, називається ***квадратною*** n***-го порядку***.

Якщо $m \neq n$, то матриця називається ***прямокутною***.

Матриця, яка складається тільки з одного рядка $m = 1$, називається ***матрицею-рядком*** (***вектором-рядком***).

Матриця, яка складається тільки з одного стовпця $n = 1$, називається ***матрицею-стовпцем*** (***вектором-стовпцем***).

Для квадратної матриці A n-го порядку сукупність елементів

$a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ називається ***головною діагоналлю***, а сукупність елементів a_{1n} , $a_{2(n-1)}$, ..., a_{n1} – ***побічною діагоналлю***.

Головна діагональ проходить з лівого верхнього кута у правий нижній, а побічна діагональ – з правого верхнього кута у лівий нижній.

Квадратна матриця, у якої всі елементи, що знаходяться вище (нижче) головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***нижнє трикутною*** (***верхнє трикутною***)

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}; \; U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Прямокутна матриця, у якої всі елементи, що знаходяться вище (нижче) головної діагоналі a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr} $(r = \min\{m, n\})$ дорівнюють нулю, називається ***матрицею східчастої форми***. Окремим випадком такої матриці є ***нижнє трапецієвидна*** (***верхнє трапецієвидна***) ***матриця***. На рисунку 56 подана ***верхнє трапецієвидна*** матриця.

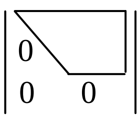


Рисунок 56

Квадратна матриця D, у якої всі елементи, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***діагональною***:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця, у якої всі діагональні елементи дорівнюють одиниці, називається ***одиничною*** і позначається E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

1.5.2 Операції над матрицями

Сумою матриць A і B однакового розміру $m \times n$ називається така матриця $C = A + B$ того ж розміру, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів вихідних матриць

$$\boxed{C = A + B \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}, \quad i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n} \; .$$

Аналогічно вводиться ***різниця*** матриць

$$\boxed{C = A - B \iff c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}}, \quad i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n} \; .$$

Добутком матриці A розміру $m \times n$ ***та числа*** α називається така матриця $C = \alpha A$ того ж розміру, кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента вихідної матриці на це число $\boxed{C = \alpha A \iff c_{ij} = \alpha a_{ij}}, \quad i = \overline{1,m}; \; j = \overline{1,n}$.

Таким чином, *операції додавання та віднімання матриць і множення матриці на число виконуються поелементно*.

<u>Приклад 1</u>. Для заданих матриць A і B знайти їх вказану лінійну комбінацію

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}; \; C = 2A - 3B \; .$$

Іншими словами, *виконати зазначені дії над заданими матрицями.*

$$\square \quad 2A = \begin{pmatrix} -4 & 12 & -8 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \; 3B = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 9 \\ -9 & -12 & 6 \end{pmatrix};$$

$$C = 2A - 3B = \begin{pmatrix} -19 & 18 & -17 \\ 15 & 12 & -8 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Добутком матриці A розміру $m \times p$ ***на матрицю*** B розміру $p \times n$ називається така матриця $C = AB$ розміру $m \times n$, кожний елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка першого співмножника A та j-го стовпця другого співмножника B

$$\boxed{C_{m\times n} = A_{m\times p}B_{p\times n} \;\Leftrightarrow\; c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\,b_{kj}}\,,\quad i=\overline{1,m};\;\; j=\overline{1,n}\;.$$

Зауваження 2. Добуток AB існує тільки тоді, коли розміри матриць A і B ***узгоджені***: перший співмножник A має число стовпців, яке дорівнює числу рядків другого співмножника B. Навіть коли обидва добутки AB і BA мають смисл, то в загальному випадку $AB \neq BA$. Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються ***переставними***. Зрозуміло, що переставні матриці завжди квадратні.

Зауваження 3. Зазначимо деякі властивості добутку матриць:

1) $AE = A$; $EA = A$; 2) $(AB)C = A(BC)$;

3) $A(B+C) = AB + AC$; 4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

Приклад 2. Для заданих матриць A і B знайти добутки AB і BA (Вказівка. *Спочатку зверніть увагу на узгодженість розмірів.* Поміркуйте, *чи можна починати виконувати множення без перевірки узгодженості розмірів матриць? Чому?*):

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

□ $$C_{2\times 2} = A_{2\times 3}\,B_{3\times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\cdot 3 + 3\cdot 2 + (-4)\cdot 4 & -2\cdot(-1) + 3\cdot 0 + (-4)\cdot 1 \\ 3\cdot 3 + 2\cdot 2 + (-5)\cdot 4 & 3\cdot(-1) + 2\cdot 0 + (-5)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -2 \\ -7 & -8 \end{pmatrix};$$

$$D_{3\times 3} = B_{3\times 2}\,A_{2\times 3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot(-2) + (-1)\cdot 3 & 3\cdot 3 + (-1)\cdot 2 & 3\cdot(-4) + (-1)\cdot(-5) \\ 2\cdot(-2) + 0\cdot 3 & 2\cdot 3 + 0\cdot 2 & 2\cdot(-4) + 0\cdot(-5) \\ 4\cdot(-2) + 1\cdot 3 & 4\cdot 3 + 1\cdot 2 & 4\cdot(-4) + 1\cdot(-5) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -9 & 7 & -7 \\ -4 & 6 & -8 \\ -5 & 14 & -21 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Якщо в матриці A поміняти місцями відповідні рядки і стовпці, то одержимо ***транспоновану*** матрицю A^T. Операція переходу від матриці A до матриці A^T називається ***транспонуванням***.

Приклад 3. Для даної матриці A знайти транспоновану A^T:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \text{б) } A=\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -5 & 7 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

□ а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $A^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

б) (Розв'язати самостійно). ■

1.5.3 Визначник матриці. Мінор і алгебраїчне доповнення. Правило обчислення визначника

Кожній квадратній матриці A n-го порядку ставиться у відповідність число, яке позначається

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

і обчислюється за певним правилом, що наведене далі. Це число називається ***визначником*** (***детермінантом***) матриці A. Число n називають порядком визначника. ***Визначник n-го порядку*** часто позначають як Δ_n.

Визначник n-го порядку Δ_n дорівнює алгебраїчній сумі всіх можливих добутків n його елементів, узятих по одному з кожного рядка і кожного стовпця. Якщо в кожному добутку перші індекси елементів розміщені в порядку зростання, то знак добутку дорівнює $(-1)^s$, де s – число ***інверсій*** (ситуацій, коли більше число передує меншому) у переставленні других індексів.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку Δ_n називається визначник $(n-1)$-го порядку, який одержується з визначника Δ_n видаленням i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначається за формулою $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}\ M_{ij}}$.

Загальне правило обчислення визначника має рекурентний характер (визначник n-го порядку Δ_n виражається через визначники $(n-1)$-го порядку Δ_{n-1}):

а) *Визначник першого порядку* Δ_1 $(n=1)$ *дорівнює самому елементу* a_{11}: $\boxed{\Delta_1 = a_{11}}$.

б) *Визначник* n*-го порядку* Δ_n $(n \geq 2)$ *дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення*:

$$\boxed{\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}}$$

(***розклад визначника за елементами першого рядка***).

Із загального правила можна одержати спрощені співвідношення для визначників другого та третього порядків:

1) визначник другого порядку Δ_2 обчислюється за формулою:

$$\boxed{\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}}$$

(правило «хреста» (схема на рис. 57, а):
визначник другого порядку Δ_2 *дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей*);

Приклад 1. Обчислити визначник другого порядку за правилом «хреста» $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$.

□ $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5)-(-4)\cdot 3 = 2\ .$$ ■

2) визначник третього порядку Δ_3 обчислюється за формулою:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

(правило «трикутників» (схема на рис. 57, б):
визначник третього порядку дорівнює сумі шести доданків, кожне з яких є добутком трьох елементів: три добутки елементів, розміщених на головній діагоналі і у вершинах двох трикутників зі стороною, що паралельна головній діагоналі, беруться зі знаком «+», а *три добутки елементів, розміщених на побічній діагоналі і у вершинах двох трикутників зі стороною, що паралельна побічній діагоналі, беруться зі знаком* «-»).

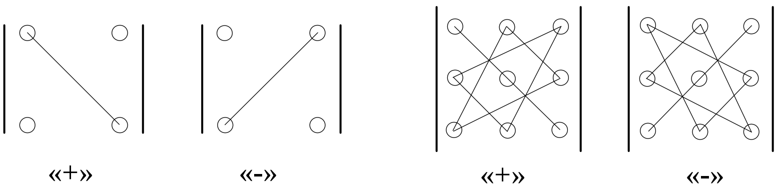


Рисунок 57 – Схеми обчислення визначників : а – другого порядку; б – третього порядку

Приклад 2. Знайти мінор M_{23} і алгебраїчне доповнення A_{23} елемента a_{23} даного визначника

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$\square \quad a_{23} = -1; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - (-4) \cdot 6 = 24;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1) \cdot 24 = -24. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 3</u>. Обчислити визначник третього порядку, розклавши його за елементами першого рядка

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$\square \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(2-0) - 2(-1-0) - 4(-3+10) = -32. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 4</u>. Обчислити визначник третього порядку за правилом «трикутників»

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$\square \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 9 + 3 \cdot 3 \cdot 2 +$$

$$+ (-1) \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot (-2) \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 9 - 3 \cdot 4 \cdot 2 =$$

$$= -36 + 18 - 20 + 20 + 27 - 24 = -15. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження 1</u>. Для обчислення визначників більш високих порядків ($n > 3$) таких зручних та легких для запам'ятовування схем не існує.

Зауваження 2. Елементами визначника можуть бути не тільки числа, а й об'єкти іншої природи, що допускають операції додавання і множення. Наприклад, функції одного й того ж аргументу.

Приклад 5. Розв'язати рівняння:

$$\text{а)}\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & x \\ 1 & x & -1 \end{vmatrix} = 0; \qquad \text{б)}\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & x \\ x & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

□ а) $$2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & x \\ x & -1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0\ ; \quad -2x^2 - 2x + 4 = 0\ ;$$

$$x^2 + x - 2 = 0\ ; \quad x_1 = -2; \quad x_2 = 1.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

1.5.4 Основні властивості визначника

Зауваження 1. Для скорочення формулювань будь-який рядок чи будь-який стовпець називатимемо ***рядом***.

Властивість 1. *Сума добутків елементів будь-якого ряду на їх алгебраїчні доповнення не залежить від номера ряду і дорівнює значенню визначника*:

$$\boxed{\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}}$$

– ***розклад визначника за*** i ***-м рядком***;

$$\boxed{\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}}$$

– ***розклад визначника за*** j ***-м стовпцем***.

Зауваження 2. При розкладанні визначника рекомендується вибирати такий ряд, в якому найбільше нульових елементів.

Наслідок. *Визначник з нульовим рядом дорівнює нулю*.

Властивість 2. *Значення визначника не зміниться після заміни всіх його рядків відповідними стовпцями і навпаки*.

Операція заміни всіх рядків визначника Δ_n відповідними стовпцями і навпаки називається ***транспонуванням*** визначника. Отриманий визначник Δ_n^T називається ***транспонованим***, його значення дорівнює значенню самого визначника Δ_n: $\Delta_n^T = \Delta_n$.

Наприклад,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -4 & 7 \\ -3 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad \Delta^T = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -4 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}; \quad \Delta^T = \Delta.$$

Властивість 3. *Якщо поміняти місцями два паралельних ряди, то визначник змінить знак на протилежний, не змінившись за абсолютною величиною*.

Властивість 4. *Визначник з двома однаковими паралельними рядами дорівнює нулю*.

Властивість 5. *Спільний множник елементів будь-якого ряду можна виносити за знак визначника*.

Іншими словами, *щоб помножити визначник на деяке число, треба на це число помножити всі елементи одного довільно вибраного ряду*.

Зауваження 3. Нагадаємо, щоб матрицю помножити на число, треба на це число помножити кожний елемент матриці в цілому. Запам’ятайте цю відмінність!

Наприклад,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -5 & -20 & 5 \\ -3 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ -3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Властивість 6. *Визначник, у якого елементи двох паралельних рядів відповідно пропорційні, дорівнює нулю*.

Властивість 7. *Сума добутків елементів будь-якого ряду на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого паралельного йому ряду дорівнює нулю*:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0\,, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0, \quad i \neq j}\,.$$

<u>Властивість 8</u>. *Значення визначника не зміниться, якщо до всіх елементів якого-небудь ряду додати відповідні елементи іншого паралельного йому ряду, помножені на одне і те саме число.*

<u>Властивість 9</u>. *Якщо кожний елемент якого-небудь ряду є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у першому з яких відповідний ряд складається з перших доданків, а в другому – з других доданків.*

<u>Зауваження 4</u>. Для квадратних матриць A і B одного порядку справедливо

$$\boxed{\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B}.$$

Визначник, у якому всі елементи, що знаходяться нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається ***визначником верхнє трикутного вигляду*** (рис. 58).

Аналогічно вводиться поняття визначника ***нижнє трикутного вигляду*** (рис. 59).

Окремим випадком визначника трикутного вигляду є визначник ***східчастої форми*** як трапеція. На рис. 60 подано ***верхнє трапецієвидний*** визначник.

<u>Зауваження 5</u>. Будь-який визначник можна звести до трикутного вигляду, користуючись основними його властивостями.

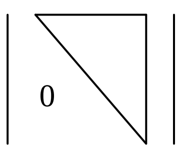


Рисунок 58

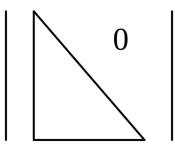


Рисунок 59

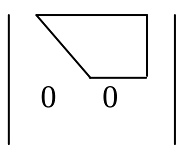


Рисунок 60

<u>Теорема</u>. *Визначник трикутного вигляду дорівнює добутку елементів його головної діагоналі.*

(Доведіть самостійно).

1.5.5 Обернена матриця та її обчислення

Розглянемо квадратну матрицю A n-го порядку.

Якщо визначник матриці A дорівнює нулю $\det A = 0$, то матриця називається ***виродженою*** (***особливою*** або ***сингулярною***). Якщо ж визначник матриці A відмінний від нуля $\det A \neq 0$, то матриця називається ***невиродженою*** (***неособливою*** або ***регулярною***).

Приклад 1. Перевірити, що дана матриця A невироджена:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

□ $\det A = \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 21 = -13 \neq 0$ – матриця A невироджена. ■

Матриця $\overline{A}$ з елементами $\overline{a}_{ij}$ називається ***приєднаною*** до матриці A, якщо $\boxed{\overline{a}_{ij} = A_{ij}^T}$, де A_{ij}^T – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}^T транспонованої матриці A^T.

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до невиродженої квадратної матриці A, якщо виконується умова $\boxed{A A^{-1} = A^{-1} A = E}$.

Теорема. *Для будь-якої невиродженої квадратної матриці A існує єдина обернена матриця A^{-1}, яка обчислюється за формулою*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\overline{A}}. \qquad \text{(Без доведення).}$$

Приклад 2. Упевнитися, що дана матриця A невироджена, і знайти обернену матрицю A^{-1}. Перевірити рівності $A A^{-1} = E$ і $A^{-1} A = E$.

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & -6 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

□ а) $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ – матриця A невироджена.

Отже, існує обернена матриця A^{-1}. Знаходимо транспоновану матрицю A^T і обчислюємо алгебраїчні доповнення її елементів:

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_{11}^T = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12}^T = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{13}^T = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{21}^T = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{22}^T = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{23}^T = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{31}^T = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{32}^T = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33}^T = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

Формуємо приєднану матрицю $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо обернену матрицю A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Рівності $AA^{-1} = E$ і $A^{-1}A = E$ перевірте самостійно.

б) (Розв’язати самостійно). ■

1.5.6 Мінори матриці. Ранг матриці

Виділимо в матриці A розміру $m \times n$ будь-які k рядків і k стовпців $\left(1 \le k \le \min\{m, n\}\right)$. Визначник, складений з елементів, які стоять на перетині виділених рядів, називається ***мінором*** M_k k-го порядку матриці A.

Рангом $rank\, A$ матриці A розміру $m \times n$ називається найбільший порядок відмінного від нуля мінору цієї матриці.

Зрозуміло, що $0 \le rank\, A \le \min\{m, n\}$, при цьому ранг дорівнює нулю тільки для нульової матриці.

Якщо $rank\, A = \min\{m, n\}$, то матриця A називається ***матрицею повного рангу***.

Базисним мінором матриці A називається довільний відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці.

Розглянемо верхнє трапецієвидну матрицю $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \tilde{a}_{2r} & \tilde{a}_{2(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{1(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

в якій ненульові елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці.

<u>Теорема 1</u>. *Ранг трапецієвидної матриці* $\tilde{A}$ *дорівнює числу* r *її ненульових рядків:* $rank\, \tilde{A} = r$. *За її базисний мінор* $\tilde{M}_r$ *можна взяти кутовий мінор*

$$\tilde{M}_r = \begin{vmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} \\ 0 & 1 & \dots & \tilde{a}_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(Без доведення).}$$

Елементарними перетвореннями матриці називаються наступні операції:

1) переставлення місцями будь-яких двох паралельних рядів;

2) множення елементів будь-якого ряду на довільне ненульове число;

3) додавання до всіх елементів будь-якого ряду відповідних елементів будь-якого іншого паралельного йому ряду, помножених на одне і те ж довільне число.

Дві матриці A і B називаються ***еквівалентними***, якщо одну з них можна одержати з іншої за допомогою елементарних перетворень. Позначається $A \sim B$.

Теорема 2. *Еквівалентні матриці мають один і той же ранг*

$$A \sim B \;\Rightarrow\; rank\, A = rank\, B\,.$$

Іншими словами, *елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.* (Без доведення).

Метод елементарних перетворень знаходження рангу матриці полягає у зведені даної матриці A розміру $m \times n$ за допомогою елементарних перетворень рядків і переставлення стовпців до еквівалентної східчастої верхнє трапецієвидної (зокрема, верхнє трикутної) матриці $\tilde{A}$, в якій всі ненульові елементи головної діагоналі $\tilde{a}_{ii}$, $i = \overline{1,r}$ дорівнюють одиниці: $\tilde{a}_{ii} = 1$, $i = \overline{1,r}$.

Тоді $rank\, A = rank\, \tilde{A} = r$.

Приклад 1. Знайти ранг даної матриці A методом елементарних перетворень

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\square\;\; A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & -6 & -3 \end{pmatrix} \sim \left| S_1 \leftrightarrow S_3 \right| \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & -6 & -3 & 5 \\ -6 & 9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left| R_1 := -R_1 \right| \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 \\ 5 & -6 & -3 & 5 \\ -6 & 9 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{vmatrix} R_2 := R_2 - 5R_1 \\ R_3 := R_3 + 6R_1 \end{vmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & -2\\ 0 & 9 & 7 & 15\\ 0 & -9 & -7 & -15\end{pmatrix}\sim\left|R_3:=R_3+R_2\right|\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & -2\\ 0 & 9 & 7 & 15\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\left|R_2:=R_2/9\right|\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 7/9 & 5/3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

$rank\,A=r=2$, де R_i – i-й рядок; S_j – j-й стовпець. ■

1.6 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь і методи їх розв'язування

1.6.1 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні поняття

Система m ***лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з*** n ***невідомими*** x_j $(j=\overline{1,n})$ має вигляд

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases},$$

де a_{ij} $(i=\overline{1,m};\ \ j=\overline{1,n})$ і b_i $(i=\overline{1,m})$ – задані числа:

a_{ij} $(i=\overline{1,m};\ \ j=\overline{1,n})$ – ***коефіцієнти*** при невідомих;

b_i $(i=\overline{1,m})$ – ***вільні члени*** (***праві частини***).

Система, у якій число рівнянь дорівнює числу невідомих n, називається ***квадратною*** n***-го порядку***.

Система називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, і ***несумісною*** (***суперечливою***), якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається ***визначеною***, якщо її розв'язок єдиний, і ***невизначеною*** – в протилежному випадку.

Введемо матричні позначення

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix}; \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix};$$

$$C=(A \mid B)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 21 & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

де X – ***матриця-стовпець невідомих*** розміру $n\times1$; A – ***основна матриця*** системи, складена з коефіцієнтів при невідомих розміру $m\times n$; B – ***матриця-стовпець вільних членів*** (***правих частин***) розміру $m\times1$; C – ***розширена матриця*** системи розміру $m\times(n+1)$;

Тоді СЛАР можна подати в матричній формі $\boxed{AX=B}$.

Для квадратної системи визначник Δ_n, складений з коефіцієнтів при невідомих, називається ***визначником системи***

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для квадратної системи n-го порядку $\Delta_n=\det A$.

Система називається ***однорідною***, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю $b_i=0 \quad (i=\overline{1,\ m})$, і – ***неоднорідною***, якщо хоча б один з вільних членів відмінний від нуля.

Однорідна СЛАР $\boxed{AX=0}$ завжди сумісна, бо має тривіальний (очевидний) нульовий розв’язок $X=0$.

<u>Теорема Кронекера – Капеллі</u>. *Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $AX=B$ сумісна тоді і тільки то-*

ді, коли ранг розширеної матриці $C=(A \mid B)$ *дорівнює рангу основної матриці* A: $\operatorname{rank} C=\operatorname{rank} A=r$. *У випадку сумісності:* 1) *якщо ранг цих матриць дорівнює числу невідомих* $r=n$, *то система має єдиний розв'язок (є визначеною);* 2) *якщо цей спільний ранг менше числа невідомих* $r<n$, *то система є невизначеною і має безліч розв'язків, які залежать від* $n-r$ *довільних сталих (параметрів)* (рис. 61). (Без доведення).

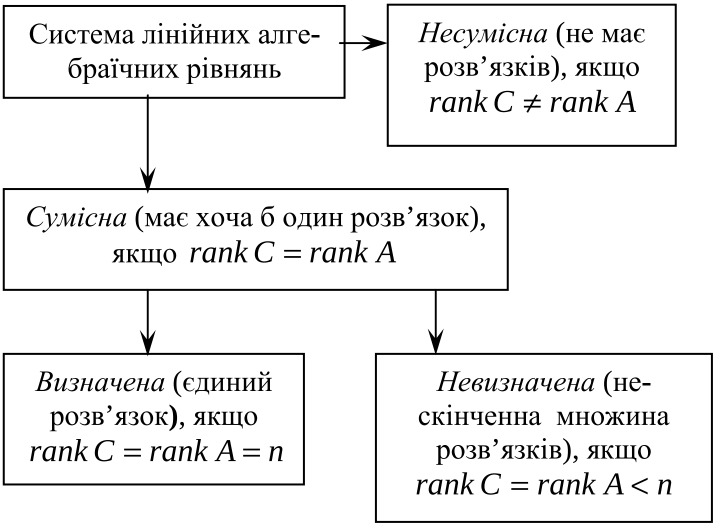


Рисунок 61

Оскільки розширена матриця C включає в себе основну матрицю A, то $\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} C$. Розширена матриця C одержана з основної матриці A доданням тільки одного стовпця, тому $\operatorname{rank} C \leq \operatorname{rank} A+1$.

Нехай система сумісна $\operatorname{rank} C=\operatorname{rank} A=r$ і M_r – деякий (довільно вибраний) базисний мінор її основної матриці A. *Якщо залишити в системі тільки всі ті рівняння, частина коефіцієнтів яких входить в базисний мінор, то одержана система буде рівносильна початковій.*

Якщо сумісна система є невизначеною

$rank\,C = rank\,A = r < n$, то ті r невідомі x_j, коефіцієнти при яких входять у вибраний базисний мінор M_r, називаються ***базисними***, а решта $n-r$ невідомі x_j називаються ***вільними***.

Залишимо в системі тільки всі ті рівняння, частина коефіцієнтів яких увійшла в базисний мінор, і перенесемо вправо всі члени з вільними невідомими. Розглядаючи вільні невідомі як довільні сталі (параметри), одержуємо квадратну систему r-го порядку відносно базисних невідомих, визначником якої служить базисний мінор M_r. Оскільки $M_r \neq 0$, то базисні невідомі знаходяться однозначно. Таким чином, отримуємо ***загальний розв'язок*** початкової системи. При довільно вибраних фіксованих значеннях вільних невідомих (параметрів) одержуємо ***частинний розв'язок***. Частинний розв'язок, який відповідає нульовим значенням вільних невідомих, називається ***опорним розв'язком***.

Приклад. Перевірити дану систему на сумісність

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$$

□ Для знаходження рангу використовуємо метод елементарних перетворень. За допомогою елементарних перетворень рядків розширеної матриці $C = \left(A \mid B\right)$ та переставлення стовпців тільки основної матриці A зводимо розширену матрицю C до східчастої форми з верхнє трапецієвидною основною матрицею A. Ранг основної матриці A дорівнює числу рядків трапеції. Якщо в розширеній матриці C нижче рядків трапеції всі елементи нульові, то її ранг дорівнює рангу основної матриці $rank\,C = rank\,A$. У протилежному випадку ранг розширеної матриці на одиницю більший: $rank\,C = rank\,A + 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 8 & -7 \end{pmatrix}; \quad C = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 8 & -7 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{vmatrix} R_2 := R_2 - R_1 \\ R_3 := R_3 - 5R_1 \end{vmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left|R_3 := R_3 - 3R_2\right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \sim \left|R_3 := -R_3/5\right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left|S_2 \leftrightarrow S_4\right| \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Звідси $rank\, A = 2;\ rank\, C = 3$.

Оскільки $rank\, C \neq rank\, A$, то система несумісна. ■

Зауваження 1. Загальний розв’язок СЛАР може мати різний вигляд, що, зокрема, залежить від вибору складу базисних і вільних невідомих і від способу введення довільних сталих.

Зауваження 2. Загальний розв’язок X сумісної неоднорідної СЛАР $AX = B$ можна подати у вигляді суми $X = X_0 + X_*$ загального розв’язку X_0 відповідної однорідної СЛАР $AX = 0$ і будь-якого частинного розв’язку X_* вихідної неоднорідної СЛАР

Разом з тим, загальний розв’язок X_0 відповідної однорідної СЛАР можна подати у вигляді лінійної комбінації

$$X_0 = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_{n-r} X_{n-r}$$

$n - r$ лінійно незалежних частинних розв’язків X_j $(j = \overline{1, n-r})$ цієї однорідної СЛАР, що утворюють так звану ***фундаментальну систему розв’язків***. Тут C_j $(j = \overline{1, n-r})$ – довільні сталі (параметри).

Частинний розв’язок неоднорідної СЛАР, що відповідає нульовим значенням довільних сталих , називається її ***опорним розв’язком***.

1.6.2 Розв’язування квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Теорема. *Якщо основна матриця* A *квадратної системи* $\boxed{AX = B}$ *невироджена (тобто,* $\det A \neq 0$ *), то система має єдиний розв’язок, який обчислюється за формулою* $\boxed{X = A^{-1}B}$.

□ Оскільки матриця A – невироджена, то існує обернена матриця A^{-1}. Тоді

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B\,;\quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B\,;\quad EX = A^{-1}B\,;\quad X = A^{-1}B\,. \ ■$$

Приклад. Розв’язати квадратну систему

$$\text{а)}\ \begin{cases} 3x - 2y - 5z = -7 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 2x - y - 3z = -4 \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} 3x - 4y + 5z = 6 \\ -x + y - 4z = 1 \\ 2x - 3y + 7z = 1 \end{cases}$$

за допомогою оберненої матриці (***матричним методом***).

□ а) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$;

$$AX = B\ ; \quad \det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Оскільки визначник матриці відмінний від нуля, то матриця A невироджена і обернена матриця A^{-1} існує. Знайдемо всі алгебраїчні доповнення транспонованої матриці (виконайте відповідні обчислення самостійно), сформуємо приєднану матрицю $\overline{A}$ і одержимо обернену матрицю A^{-1}:

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -16 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -16 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7+0-4 \\ -70+0+64 \\ 28+0-28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} x=-1 \\ y=2 \\ z=0 \end{matrix}$$

б) (Розв’язати самостійно). ■

1.6.3 Розв’язування квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера

Розв’язання квадратної системи з невиродженою основною матрицею можна подати безпосередньо через визначники.

<u>Теорема (правило Крамера)</u>. *Якщо визначник квадратної системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв’язок, який обчислюється за формулою*

$$\boxed{x_j = \Delta_n^{(j)} / \Delta_n \quad , \qquad j = \overline{1,n}},$$

де $\Delta_n^{(j)}$ *– допоміжний визначник, одержаний з основного визначника* Δ_n *заміною* j *-го стовпця стовпцем вільних членів*

$$\Delta_n^{(j)} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

<u>Приклад 1</u>. Перевірити, що визначник квадратної системи відмінний від нуля і розв’язати її методом Крамера:

$$\text{а)} \begin{cases} 3x-2y+z=1 \\ x-y+2z=-3 \\ 2x-y+3z=-4 \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} 4x-2y+z=-3 \\ 3x+y-7z=8 \\ 2x-2y+3z=-5 \end{cases}$$

□ а) $\Delta=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=-4\neq 0$; $\Delta^{(1)}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -3 & -1 & 2\\ -4 & -1 & 3\end{vmatrix}=-4$;

$\Delta^{(2)}=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & -4 & 3\end{vmatrix}=0$; $\Delta^{(3)}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & -3\\ 2 & -1 & -4\end{vmatrix}=8$; $x=\dfrac{\Delta^{(1)}}{\Delta}=1$;

$y=\dfrac{\Delta^{(2)}}{\Delta}=0$; $z=\dfrac{\Delta^{(3)}}{\Delta}=-2$. б) (Розв’язати самостійно). ■

1.6.4 Розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

Розглянемо довільну прямокутну систему m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими x_j $\left(j=\overline{1,\,n}\right)$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

Нехай A – основна матриця, складена з коефіцієнтів рівнянь системи при невідомих, а C – розширена матриця цієї системи, яку отримують з основної матриці системи, дописуючи стовпець вільних доданків. Мета методу Гаусса: привести розширену матрицю системи до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень матриці. Елементарним перетворенням рядків розширеної матриці C і переставленню стовпців тільки основної матриці A відповідають наступні рівносильні перетворення лінійної системи:

1) переставлення місцями будь-яких двох рівнянь (перенумеровування рівнянь);

2) множення обох частин будь-якого рівняння на довільне ненульове число;

3) додавання до обох частин будь-якого рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на довільне число;

4) перенумеровування невідомих.

Метод Гаусса дослідження і розв’язування СЛАР складається з двох основних етапів.

На першому етапі (***прямий хід*** методу Гаусса – зверху вниз) здійснюють послідовне виключення невідомих за допомогою вказаних рівносильних перетворень системи. Тому часто метод Гаусса ***називають методом послідовного вилучення невідомих***. Спочатку виділяють перше рівняння і відповідно перше невідоме. Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Якщо ця умова не виконується, то переставляють рівняння і/або перенумеровують невідомі так, щоб цей коефіцієнт був відмінний від нуля. Ділять перше рівняння на $a_{11} \neq 0$ і за допомогою одержаного рівняння виключають послідовно перше невідоме з другого рівняння, потім з третього рівняння і т.д. до останнього найнижчого. Виділяють друге рівняння і відповідно друге невідоме. Припустимо, що $a_{22} \neq 0$. Якщо ця умова не виконується, то переставляють рівняння і/або перенумеровують невідомі так, щоб цей коефіцієнт був відмінний від нуля. Ділять друге рівняння на $a_{22} \neq 0$ і за допомогою одержаного рівняння виключають послідовно друге невідоме з третього рівняння, потім з четвертого рівняння і т.д. до останнього найнижчого. Цей процес продовжують до тих пір, доки не дійдуть до останнього найнижчого рівняння або ситуації, коли виділене рівняння і всі рівняння, що лежать нижче нього, мають тільки нульові коефіцієнти при невідомих.

В результаті система зводиться до наступної східчастої форми

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + \tilde{a}_{12}\tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{a}_{1r}\tilde{x}_r + \tilde{a}_{1(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{1n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_1 \\ \qquad \tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{a}_{2r}\tilde{x}_r + \tilde{a}_{2(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{2n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_2 \\ . \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad \tilde{x}_r + \tilde{a}_{r(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \ldots + \tilde{a}_{rn}\tilde{x}_n = \tilde{b}_r \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \tilde{b}_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = \tilde{b}_m \end{cases}$$

Якщо хоча б один з вільних членів $\tilde{b}_j$ $(j = \overline{r+1,\, m})$ відмінний від нуля, то система несумісна, тобто не має розв’язків.

Зауваження 1. Прямий хід методу Гаусса зручно виконувати в матричній формі, зводячи розширену матрицю до східчастого вигляду з верхнє трапецієвидною основною матрицею. При цьому застосовуються елементарні перетворення рядків розширеної матриці і переставлення стовпців тільки основної матриці (перенумеровування невідомих).

Якщо всі вільні члени, які відповідають рядком розширеної матриці, що стоять нижче трапеції, дорівнюють нулю $\tilde{b}_j = 0$ $(j = \overline{r+1,\, m})$, то $rank\, A = rank\, C = r$ і система сумісна. Перші r невідомі $\tilde{x}_j$ $(j = \overline{1,\, r})$ є базисними, а решта $n-r$ невідомі $\tilde{x}_j$ $(j = \overline{r+1,\, m})$ – вільні. Тоді здійснюють перехід до другого етапу.

На другому етапі (***зворотний хід*** методу Гаусса – знизу вгору) вільні невідомі приймають за довільні сталі (параметри) $\tilde{x}_j = C_{j-r}$ $(j = \overline{r+1,\, m})$. Відкидають нульові рівняння (тотожності $0 = 0$). Переносять в праву частину всі члени, що містять вільні невідомі. Одержують систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих. Цю систему розв'язують, підіймаючись знизу вгору. Спочатку з останнього рівняння знаходять останнє базисне невідоме $\tilde{x}_r$. Потім одержане значення $\tilde{x}_r$ підставляють у передостаннє рівняння і визначають з нього $\tilde{x}_{r-1}$ і т.д., доки не знайдуть $\tilde{x}_1$.

Приклад 1. Розв'язати систему методом Гаусса

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 7 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

□ а) Прямий хід: $\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 4 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \end{array} \sim \left| \begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 3R_1 \end{array} \right| \sim$

$$
\begin{array}{c} \\ \sim \end{array}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \end{array}
$$

$$
\sim\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 10 & -10 \\ 0 & 4 & -7 & 10 & -1 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{l} R_2 := R_2/4 \\ R_3 := R_3 - R_2 \end{array}\right| \sim
$$

$$
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \end{array}
$$

$$
\sim\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -7/4 & 5/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right).
$$

Оскільки останньому рядку (поза трапецією) відповідає рівняння з нульовими коефіцієнтами і відмінним від нуля вільним членом, то система несумісна (не має розв'язків).

б) (Розв'язати самостійно). ■

Приклад 2. Розв'язати систему методом Гаусса

а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 \qquad - x_4 + 5x_5 = -1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

□ а) Прямий хід:

$$
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc:c} 3 & 1 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left| S_1 \leftrightarrow S_2 \right| \sim
$$

$$
\begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array}
$$

$$
\sim\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right) \sim \left|\begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 3R_1 \\ R_4 := R_4 - 5R_1 \end{array}\right| \sim
$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7 \\ 0 & -8 & -10 & 4 & -5 & -21 \end{array}\right) \end{array} \sim \left| R_2 := -R_2/4 \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & -4 & -5 & 6 & -3 & -7 \\ 0 & -8 & -10 & 4 & -5 & -21 \end{array}\right) \end{array} \sim \left| \begin{array}{l} R_3 := R_3 + 4R_2 \\ R_4 := R_4 + 8R_2 \end{array} \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & -7 \end{array}\right) \end{array} \sim \left| R_3 \leftrightarrow R_4 \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & x_5 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5/4 & -3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \left| S_3 \leftrightarrow S_5 \right| \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_2 & x_1 & x_5 & x_4 & x_3 & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3/4 & -3/2 & 5/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Система сумісна, але невизначена, оскільки

$$rank\, C = rank\, A = r = 3 < n = 5.$$

Покладемо x_2, x_1, x_5 – базисні невідомі; x_4, x_3 – вільні невідомі.

Зворотний хід: Вільні невідомі приймаємо за довільні сталі (параметри) $x_4 = C_1$; $x_3 = C_2$. Відкидаємо тотожність $0 = 0$, яка відповідає останньому рядку. Переносимо в праву частину всі члени, що містять вільні невідомі. Одержуємо систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих x_2, x_1, x_5:

$$\begin{cases} x_2 + 3x_1 + 2x_5 = 4 + C_1 - 2C_2 \\ x_1 + \dfrac{3}{4}x_5 = \dfrac{7}{4} + \dfrac{3}{2}C_1 - \dfrac{5}{4}C_2 \\ x_5 = -7 + 8C_1 \end{cases}.$$

Цю систему розв'язуємо, підіймаючись знизу вгору, починаючи з останнього рівняння.

$$x_4 = C_1 \ ; \ x_3 = C_2 \ ; \ x_5 = -7 + 8C_1 \ ; \ x_1 = \frac{7}{4} + \frac{3}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2 -$$

$$-\frac{3}{4}x_5 = \frac{7}{4} + \frac{3}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2 - \frac{3}{4}(-7 + 8C_1) = 7 - \frac{9}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2 \ ;$$

$$x_2 = 4 + C_1 - 2C_2 - 3x_1 - 2x_5 = 4 + C_1 - 2C_2 -$$

$$-3\left(7 - \frac{9}{2}C_1 - \frac{5}{4}C_2\right) - 2(-7 + 8C_1) = -3 - \frac{3}{2}C_1 + \frac{7}{4}C_2 \ .$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$x_1 = 7 - (9/2)C_1 - (5/4)C_2; \ \ x_2 = -3 - (3/2)C_1 + (7/4)C_2;$$

$x_3 = C_2$; $x_4 = C_1$; $x_5 = -7 + 8C_1$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Поклавши $x_3 = C_2 = 0$ і $x_4 = C_1 = 0$, отримуємо опорний розв'язок $x_1 = 7$; $x_2 = -3$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = -7$.

б) (Розв'язати самостійно). ■

Зауваження 2. Для спрощення вигляду загального розв'язку останнього Прикладу 2а можна покласти $x_3 = 4C_2$ і $x_4 = 2C_1$, тоді $x_1 = 7 - 9C_1 - 5C_2$ і $x_2 = -3 - 3C_1 + 7C_2$, де $C_1, C_2 \in R$.

1.6.5 Однорідна квадратна система лінійних алгебраїчних рівнянь

Згідно з теоремою Кронекера – Капеллі однорідна прямокутна СЛАР $AX = 0$ завжди сумісна і має тривіальний (нульовий) розв'язок $X = 0$, бо ранг розширеної матриці $C = \left(A \mid 0\right)$ дорівнює рангу основної матриці A. Нульовий розв'язок $X = 0$ єдиний, якщо цей спільний ранг дорівнює числу невідомих. У противному разі СЛАР має безліч розв'язків.

З наведених міркувань для квадратної СЛАР випливає така

<u>теорема</u>. *Однорідна квадратна система* $AX = 0$ *має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю* $\det A = 0$. *Якщо цей визначник відмінний від нуля, то система має лише нульовий розв'язок.*

<u>Приклад 1</u>. Знайти значення параметра α, при яких однорідна квадратна СЛАР

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - \alpha x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ \alpha x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + \alpha x_3 = 0 \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок (має безліч розв'язків).

$$\square \text{ а) } \Delta = \det A = 0\ ; \quad \begin{vmatrix} 1 & -\alpha & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = 0\ ;$$

$$\alpha^2 + 8\alpha - 33 = 0\ ; \quad \alpha_1 = 3; \quad \alpha_2 = -11.$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

<u>Приклад 2</u>. Переконатись, що дана однорідна квадратна СЛАР має безліч розв'язків. Знайти її загальний розв'язок і будь-який ненульовий частинний розв'язок.

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\square \text{ а) } \Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Отже, система має безліч розв'язків. Розв'яжемо систему методом Гаусса.

<u>Прямий хід</u>: $C = \left(A \mid 0\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{vmatrix} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 4R_1 \end{vmatrix} \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left|R_3 := R_3 - R_2\right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left|R_2 := R_2/6\right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Отже, $rank\, C = rank\, A = r = 2 < n = 3$,

Тут x_1, x_2 – базисні невідомі; x_3 – вільне невідоме.

<u>Зворотний хід</u>:

Відкидаємо тотожність $0 = 0$, яка відповідає останньому рядку. Вільне невідоме приймаємо за довільну сталу (параметр)

$$x_3 = C .$$

Переносимо в праву частину всі члени, що містять вільне невідоме. Одержуємо систему верхнє трикутної форми відносно базисних невідомих x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -2x_3 \\ \qquad x_2 = (5/6)x_3 \end{cases} .$$

Розв'язуємо систему, починаючи з останнього рівняння.

$$x_3 = C;\ \ x_2 = (5/6)\, C;\ \ x_1 = 2x_2 - 2C = 2 \cdot (5/6)\, C - 2C = -(1/3)\, C .$$

Отже, загальний розв’язок

$$x_1 = -(1/3)\,C\,; \quad x_2 = (5/6)\,C\,; \quad x_3 = C\,, \quad C \in R\,.$$

Покладемо $C = 6$. Тоді маємо ненульовий частинний розв’язок $x_1 = -2$; $x_2 = 5$; $x_3 = 6$.

б) (Розв’язати самостійно). ■

1.6.6 Власні вектори та власні числа квадратної матриці

Матрицю-стовпець X розміру $n \times 1$ також називають n-вимірним вектором.

Нехай A – квадратна матриця n-го порядку. Якщо існують ненульовий вектор X ($X \neq 0$) і число λ такі, що виконується рівність

$$\boxed{AX = \lambda X},$$

то говорять, що λ – ***власне число*** матриці A, а X – її ***власний вектор***, який відповідає власному числу λ.

Отже, множення матриці на власний вектор рівносильне множенню власного числа на цей вектор.

Указане матричне рівняння можна подати у вигляді

$$AX = \lambda EX\,; \quad (A - \lambda E)X = 0\,.$$

Отримана однорідна квадратна система лінійних рівнянь має ненульовий розв’язок X тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю $\boxed{\det(A - \lambda E) = 0}$. Одержане рівняння називається ***характеристичним рівнянням*** матриці A.

Відповідний многочлен $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ називається ***характеристичним многочленом*** матриці A.

Характеристичне рівняння можна подати в розгорнутій формі

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Власні числа $\lambda_j \ (j=\overline{1,n})$ *є коренями характеристичного рівняння.*

Власні числа можуть бути дійсними чи комплексними, простими чи кратними. Множину всіх власних чисел $\lambda_j \ (j=\overline{1,n})$ даної матриці називають її ***спектром***.

Якщо відоме деяке власне число λ, то з однорідної системи

$$\boxed{(A-\lambda E)X=0}$$

можна знайти відповідні власні вектори.

Найбільший модуль власного числа матриці називають її ***спектральним радіусом*** і позначають $\rho(A)$: $\rho(A)=\max\limits_j|\lambda_j|$.

<u>Властивості власних векторів і власних чисел</u>:

1) *Кожному власному вектору відповідає одне власне число.*

2) *Якщо* X *– власний вектор з власним числом* λ*, то довільний вектор* αX $(\alpha\neq 0)$ *також є власним вектором з тим же власним числом* λ. Тобто*, власний вектор визначається з точністю до довільного ненульового множника.*

3) *Якщо* X_1 *і* X_2 *– власні вектори матриці* A *з одним і тим же власним числом* λ*, то їх сума* X_1+X_2 *також є власним вектором матриці* A *з тим же самим власним числом* λ.

4) *Визначник матриці* A *дорівнює добутку всіх її власних чисел* $\det A=\prod\limits_{j=1}^{n}\lambda_j=\lambda_1\lambda_2...\lambda_n$.

5) ***Слідом*** матриці A називається сума всіх елементів головної діагоналі $Sp\,A=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{jj}=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$. *Слід матриці* A *дорівнює сумі всіх її власних чисел* $Sp\,A=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j=\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти власні числа λ_1, λ_2 та власні вектори X_1, X_2 заданої матриці:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \qquad \text{б) } A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

□ а) Власні числа знаходимо як корені характеристичного рівняння

$$\det(A-\lambda E)=0; \quad \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 5 & 6-\lambda \end{vmatrix}=0;$$

$$\lambda^2-4\lambda-32=0; \quad \lambda_1=-4; \quad \lambda_2=8.$$

З однорідної системи

$$(A-\lambda E)X=0; \quad \begin{cases} (-2-\lambda)x_1+4x_2=0 \\ 5x_1+(6-\lambda)x_2=0 \end{cases}, \text{ де } X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

знаходимо відповідні власні вектори.

При $\lambda_1=-4$ маємо

$$\begin{cases} \left(-2-(-4)\right)x_1+4x_2=0 \\ 5x_1+\left(6-(-4)\right)x_2=0 \end{cases}; \quad x_1=-2t; \;\; x_2=t; \;\; t\in R,$$

де t – параметр. Тоді $X_1=\begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2=8$ маємо

$$\begin{cases} (-2-8)x_1+4x_2=0 \\ 5x_1+(6-8)x_2=0 \end{cases}; \quad x_1=2t; \;\; x_2=5t; \;\; t\in R; \;\; X_2=\begin{pmatrix} 2t \\ 5t \end{pmatrix}.$$

б) (Розв’язати самостійно). ■

<u>Приклад 2</u>. Знайти власні числа λ_1, λ_2, λ_3 та власні вектори X_1, X_2, X_3 заданої матриці:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

□ а) Власні числа знаходимо як корені характеристичного рівняння

$$\det(A-\lambda E)=0; \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & -4 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0;$$

$$-\lambda^3+\lambda=0; \quad \lambda_1=0; \quad \lambda_2=1; \quad \lambda_3=-1.$$

З однорідної системи

$$(A-\lambda E)X=0; \quad \begin{cases} (-3-\lambda)x_1-2x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+(1-\lambda)x_2+2x_3=0 \\ x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=0 \end{cases}, \text{ де } X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

знаходимо відповідні власні вектори.

При $\lambda_1=0$ маємо

$$\begin{cases} -3x_1-2x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+x_2+2x_3=0 \\ x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x_1+x_2=-2x_3 \\ x_1+x_2=-2x_3 \end{cases}; \quad X_1=\begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ t \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2=1$ маємо

$$\begin{cases} -4x_1-2x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+2x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_1+x_2=-x_3 \end{cases}; \quad X_2=\begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_3=-1$ маємо

$$\begin{cases} -2x_1-2x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=0 \\ x_1+x_2+3x_3=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_1+x_3=-x_2 \\ x_1+3x_3=-x_2 \end{cases}; \quad X_3=\begin{pmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

б) (Розв’язати самостійно). ■

1.7 Контрольні запитання

1) Що служить координатною сіткою декартової системи координат на площині?
2) Як обчислюється відстань між двома точками на площині?
3) Як обчислюються координати точки, що ділить даний відрізок у вказаному відношенні?
4) Як знаходяться координати середини відрізка?
5) Який вигляд має рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом? Чи кожну пряму можна подати рівнянням такого вигляду?
6) Який вигляд має рівняння прямої, що паралельна осі ординат Oy?
7) Наведіть приклад рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку.
8) Як записується рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
9) Який вигляд має рівняння прямої у відрізках на осях?
10) Запишіть загальне рівняння прямої. У чому полягає неоднозначність загального рівняння прямої?
11) Як знайти гострий кут між двома похилими прямими?
12) Яка умова паралельності двох похилих прямих?
13) Яка умова перпендикулярності двох похилих прямих?
14) За якою формулою обчислюється відстань від точки до прямої?
15) Який вигляд має загальне рівняння лінії другого порядку? Наведіть всі типи ліній другого порядку.
16) Що називається колом? Запишіть канонічне рівняння кола та рівняння кола із заданим центром і радіусом.
17) Що називається еліпсом? Який вигляд має канонічне рівняння еліпса.
18) Яке співвідношення пов’язує велику a і малу b півосі еліпса та половину c міжфокусної відстані?
19) Яка лінія називається гіперболою? Запишіть канонічне рівняння гіперболи.
20) Яким співвідношенням зв’язані дійсна a і уявна b півосі гіперболи та половина c міжфокусної відстані?
21) Що таке асимптота кривої?
22) Які рівняння асимптот гіперболи?
23) Яка лінія називається параболою? Наведіть приклад канонічного рівняння параболи.

24) Що таке ексцентриситет еліпса, гіперболи, параболи?
25) Як залежить форма еліпса (гіперболи) від значення ексцентриситету?
26) Які рівняння директрис еліпса, гіперболи, параболи?
27) У чому полягає властивість директрис еліпса, гіперболи, параболи?
28) Наведіть приклади параметричних рівнянь прямої та кола.
29) Наведіть приклади використання прямої лінії (лінійної залежності) та кривих другого порядку в фахових сферах.
30) Які величини називають сталим та змінними? Наведіть приклади.
31) Що таке обмежена змінна величина? Необмежена змінна величина?
32) Наведіть приклади обмежених та необмежених величин.
33) Яка змінна величина називається зростаючою (строго зростаючою)? Спадною (строго спадною)?
34) Які змінні величини називають нескінченно малими? Нескінченно великими?
35) У чому полягає геометричний зміст нескінченно малої величини?
36) Які властивості нескінченно малих і нескінченно великих величин. Як ці величини зв'язані?
37) Як порівнюють між собою нескінченно малі величини? Що таке еквівалентні нескінченно малі?
38) Що таке границя змінної величини?
39) Перелічіть основні властивості границь, які ґрунтуються на властивостях нескінченно малих величин.
40) Сформулюйте ознаки існування границі змінної величини.
41) Що можна сказати про границю обмеженої монотонної величини?
42) Що називається першою стандартною границею? Другою стандартною границею? Які їх наслідки.
43) Як здійснюється порівняння нескінченно малих величин? Наведіть приклади еквівалентних нескінченно малих.
44) Як розкривається невизначеність виду ∞/∞ для многочленів?
45) Як розкривається невизначеність виду $0/0$ для многочленів?
46) Як розкривається невизначеність виду $0/0$ для ірраціональних та тригонометричних виразів?
47) Дайте означення функції. Що називається областю визначення, областю значень і законом відповідності функції?

48) Що таке природна область визначення аналітично заданої функції? Як вона знаходиться?
49) Що таке графік функції? Які основні способи задання функції Ви знаєте?
50) Розкрийте сутність таких понять, як: обмежена та необмежена функція; функція парна та непарна; функція загального вигляду?
51) Яка функція називається сталою? Зростаючою (строго зростаючою)? Спадною (строго спадною)?
52) Яка функція називається періодичною? Наведіть приклади періодичних функцій.
53) Яку функцію називають складеною? Наведіть приклади.
54) Яка функція називається оберненою до даної? Що можна сказати щодо розміщені графіків взаємно обернених функцій?
55) Яка функція називається елементарною? Наведіть приклади алгебраїчних та трансцендентних функцій.
56) Наведіть приклади границь, що відображають властивості основних елементарних функцій.
57) Що таке приріст аргументу і відповідний приріст функції? Дайте означення неперервності функції в точці «мовою приростів».
58) Що таке ліва та права границі функції в точці? Дайте означення неперервності функції в точці через односторонні границі.
59) Які основні властивості мають функції неперервні в точці?
60) Які основні властивості функцій, неперервних на відрізку? Сформулюйте теореми про обмеженість функції та існування найменшого та найбільшого значень, про перетворення функції на нуль, про проміжне значення.
61) Яка функція називається розривною?
62) Що таке точка розриву першого роду? Другого роду?
63) Поясніть відмінність між точками розриву першого та другого роду?
64) Наведіть приклади точок усувного розриву, скінченного та нескінченного стрибка.
65) Наведіть приклади точок нескінченного стрибка.
66) Наведіть приклади точок розриву другого роду,що не є точками нескінченного стрибка.
67) Як знаходять точки розриву аналітично заданої функції? Які точки є «підозрілими» на розрив?
68) Наведіть приклади застосування функцій у професійних сферах. Залежність між якими змінними відображена в цих функціях?
69) Що таке визначник? Мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника?

70) За яким правилом обчислюється значення визначника n-го порядку?

71) Сформулюйте правила «хреста» і «трикутників» для обчислення відповідно визначників другого і третього порядку.

72) Сформулюйте основні властивості визначника.

73) Як знаходиться значення визначника трикутного вигляду?

74) Що таке матриця?

75) Яка матриця називається невиродженою?

76) Як здійснюються операції додавання (віднімання) матриць і множення матриці на число?

77) Як здійснюється операція множення матриць? Які властивості цієї операції? Чи завжди існує добуток матриць?

78) Що таке обернена матриця та як вона обчислюється?

79) Що називається рангом матриці? Базисним мінором?

80) Які операції називаються елементарними перетвореннями матриці?

81) Які матриці називаються еквівалентними?

82) Як знаходиться ранг матриці методом елементарних перетворень?

83) Наведіть приклади застосування матриць у фаховій сфері.

84) Який вигляд має система m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з n невідомими?

85) Яка система називається сумісною? Несумісною? Визначеною? Невизначеною?

86) Сформулюйте теорему Кронекера – Капеллі для лінійних систем.

87) Як знаходиться розв’язок квадратної СЛАР за допомогою оберненої матриці? Чи завжди можна безпосередньо розв’язати довільну квадратну СЛАР цим методом?

88) Як розв’язується квадратна СЛАР методом Крамера? Чи можна безпосередньо розв’язати довільну квадратну СЛАР цим методом?

89) Як розв’язується довільна СЛАР методом Гаусса? Опишіть прямий хід і зворотній хід цього методу.

90) Сформулюйте умову наявності в однорідної квадратної СЛАР ненульових розв’язків.

91) Що таке власні числа і власні вектори квадратної матриці?

92) Як знаходяться власні числа і власні вектори?

93) Сформулюйте властивості власних чисел і власних векторів.

Змістовий модуль 2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

2.1 Диференціальне числення функції однієї змінної

При дослідженні різних техніко-економічних величин (зокрема, попиту, витрат виробництва, національного прибутку і т.п.) доводиться визначати швидкість їх зміни.

2.1.1 Похідна. Її механічний та геометричний зміст

Поняття похідної. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ і $x_0 \in (a;b)$. Надамо аргументу приріст Δx так, щоб нова точка $x_0 + \Delta x \in (a;b)$. Оскільки точка x_0 фіксована, то відповідний приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ є функцією приросту аргументу Δx. Складемо відношення $\Delta y / \Delta x$, яке також буде функцією приросту аргументу Δx.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається швидкість змінювання функції y в цій точці відносно змінювання аргументу x. *Похідна дорівнює границі відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля* $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Еквівалентні позначення похідної y', y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

Значення похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 записується так: $f'(x_0)$, або $y = f'(x)\big|_{x=x_0}$, або $df(x_0)/dx$.

Операція знаходження похідної називається ***диференціюванням*** функції. Функція, що має похідну у точці x_0, називається ***диференційованою*** у цій точці.

Коли функція $y = f(x)$ диференційована у кожній точці проміжку $(a;b)$, то кажуть, що вона ***диференційована на проміжку***

$(a;b)$. Похідна функції $y = f(x)$, диференційованої у проміжку $(a;b)$, сама є функцією x.

Теорема (зв’язок між поняттями диференційованості та неперервності). *Якщо функція* $y = f(x)$ *диференційована в деякій точці* x_0*, то вона неперервна в цій точці.*

$$\square \quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = y'\cdot 0 = 0\,. \quad \blacksquare$$

Зауваження. З цієї теореми випливає, що неперервність функції є необхідною умовою диференційованості функції. Це означає, що в точках розриву функція не диференційована. Проте ця умова не є достатньою. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в деякій точці x_0, то вона може бути як диференційованою, так і недиференційованою в цій точці. Наприклад, $y = |x|$ – недиференційована в точці $x = 0$, хоч у цій точці неперервна.

Приклад 1. Дано функцію $y = x^2$. Знайти її похідну y':

а) у довільній точці x; б) коли $x = -3$.

□ а) Для будь-якого x маємо $y = x^2$. Якщо аргумент дорівнює $x + \Delta x$, то $y + \Delta y = (x+\Delta x)^2$. Звідси

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 .$$

Тоді $\Delta y / \Delta x = (2x\Delta x + (\Delta x)^2)/\Delta x = 2x + \Delta x$. Обчислимо похідну $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x$. б) $y'\big|_{x=-3} = 2\cdot(-3) = -6$. ■

Механічний зміст похідної. Нехай матеріальна точка рухається під дією деяких сил. Візьмемо який-небудь момент часу t_0 і розглянемо проміжок часу Δt від моменту t_0 до моменту $t = t_0 + \Delta t$. За цей проміжок часу точка пройде певний шлях, який позначимо через $\Delta S(t_0)$. Цей шлях – функція Δt. За відомим з фізики означенням, відношення $\Delta S(t_0)/\Delta t$ є середня швидкість руху точки за час Δt. Розглядатимемо дедалі коротші проміжки Δt, що прямують до нуля. Границя

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta S(t_0)/\Delta t = S'(t_0) = V(t_0)$$

є миттєвою швидкістю точки у момент часу t_0.

Геометричний сенс похідної. Дотична і нормаль. Нехай дано деяку лінію *L* і на ній точку *M* (рис. 62). Візьмемо на лінії *L* деяку точку *N*, яка не збігається з точкою *M*. Пряма *MN* є січною для лінії *L*. Нехай тепер точка *N* наближається до точки *M*, залишаючись на лінії *L*. Тоді кожному положенню точки *N* відповідатиме своя січна і усі ці січні проходитимуть через точку *M*.

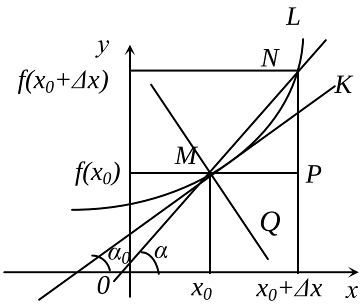


Рисунок 62

Дотичною до лінії *L* у точці *M* називається граничне положення *MK* січної *MN*, якщо точка *N* прямує до точки *M*. Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, графіком якої є лінія *L*, диференційована у точці x_0. У декартовій прямокутній системі координат точка *M*, яка лежить на графіку функції $y = f(x)$ має координати $(x_0;\, f(x_0))$. Нехай точка *N* належить графіку функції (рис. 62) і має координати $((x_0 + \Delta x); f(x_0 + \Delta x))$. Проведемо через точку *M* пряму, паралельну Ox, і позначимо точку її перетину з прямою $x = x_0 + \Delta x$ через *P*. Розглянемо прямокутний трикутник *MNP*.

Відношення $(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))/\Delta x = tg\,\alpha$ дорівнює тангенсу кута нахилу січної *MN* до додатного напряму осі Ox.

Якщо приріст $\Delta x \to 0$, то геометрично це означає, що точка $N(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y)$ рухатиметься по лінії *L*, наближаючись до точки *M*, а кут α прямуватиме до кута α_0 – кута нахилу дотичної до додатного напряму осі Ox. Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} [(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))/\Delta x] = \lim_{\Delta x \to 0} tg\,\alpha.$$

Оскільки границя лівої частини рівності дорівнює $y'_0 = f'(x_0)$, а границя правої частини дорівнює $tg\,\alpha_0$, тому $tg\,\alpha_0 = y'_0$. тобто *значення похідної функції* $f'(x)$, *у точці* x_0, *до-*

рівнює тангенсу кута нахилу дотичної.

Тоді рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$, яка проходить через точку M з координатами $(x_0; y_0)$, можна записати у вигляді

$$\boxed{y - y_0 = y'_0 \cdot (x - x_0)}.$$

Пряма MQ, яка проходить через точку дотику M і перпендикулярна до дотичної MK, називається ***нормальною прямою*** (***нормаллю***). Її рівняння

$$\boxed{y - y_0 = \left(-1/y'_0\right) \cdot (x - x_0)}.$$

Приклад 2. Знайти кут нахилу дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці $M(1/2; 1/4)$. Скласти рівняння дотичної.

□ Візьмемо похідну від функції $y = x^2$: $y' = 2x$. Тоді:

$tg\,\alpha = y'(x_0) = 2 \cdot (1/2) = 1$; $\alpha = arctg 1 = 45^\circ$ – кут нахилу дотичної; $y - 1/4 = 1 \cdot (x - 1/2)$; $y = x - 1/4$ – дотична. ■

Економічний зміст похідної. Нехай витрати виробництва V деякої продукції є функцією її кількості x, тобто $V = V(x)$. Припустимо, що кількість продукції збільшується на Δx і досягає значення $x + \Delta x$, якому відповідають витрати виробництва $V(x + \Delta x)$. При цьому приріст витрат виробництва становить $\Delta V(x) = V(x + \Delta x) - V(x)$. Середній приріст витрат на одиницю приросту продукції $\Delta V / \Delta x$.

Маргінальними (***граничними***) ***витратами*** називають гранично можливі витрати в умовах хоча би простого відтворення виробництва (при $\Delta x \to 0$), тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\Delta V / \Delta x\right)$. Але за означенням похідної $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\Delta V / \Delta x\right) = V'(x)$, тобто *похідна $V'(x)$ є маргінальними витратами виробництва*.

Позначимо через $D(x)$ та $P(x)$ відповідно дохід і прибуток при виробництві та реалізації x одиниць продукції. Тоді, аналогічно, визначаються: ***маргінальний дохід*** $D'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\Delta D / \Delta x\right)$ і ***маргінальний прибуток*** $P'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\Delta P / \Delta x\right)$.

2.1.2 Правила диференціювання. Похідна складеної та оберненої функцій

Правила диференціювання. Нехай маємо деякі функції $u = u(x)$, $v = v(x)$, які диференційовані у проміжку $(a;b)$. Тоді:

1) Якщо $y = cu$, то $\boxed{y' = (cu)' = cu'}$, де $c = const$,

тобто *сталий множник можна виносити з-під знаку похідної*;

2) Якщо $y = u \pm v$, то $y' = (u \pm v)' = u' \pm v'$,

тобто *похідна суми або різниці функцій дорівнює відповідно сумі або різниці їх похідних*;

3) Якщо $y = uv$, то $\boxed{y' = (uv)' = u'v + v'u}$,

тобто *похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і похідної другої функції на першу функцію*;

4) Якщо $y = \dfrac{u}{v}$, де $v \neq 0$, то $\boxed{y' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}}$,

тобто *похідна частки двох функцій дорівнює дробу, у якому знаменник є квадрат знаменника, а чисельник є різниця між добутками похідної чисельника на знаменник і добутком похідної знаменника на чисельник*.

Кожне з цих правил можна розглядати як теорему.

Доведемо, наприклад, правило для дробу $y = u / v$. Якщо Δy, Δu і Δv є прирости функцій $y(x)$), $u(x)$, $v(x)$, відповідні приросту Δx аргументу x, то $y + \Delta y = (u + \Delta u)/(v + \Delta v)$,

$$\Delta y = (u + \Delta u)/(v + \Delta v) - u / v = (v\Delta u - u\Delta v)/(v(v + \Delta v)).$$

Останню рівність розділимо на Δx:

$$\Delta y / \Delta x = (v\Delta u - u\Delta v)/(\Delta x \cdot v(v + \Delta v)) =$$

$$= (v\Delta u / \Delta x - u\Delta v / \Delta x)/(v(v + \Delta v)).$$

Знайдемо границю цього співвідношення. Маємо:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} (v\Delta u / \Delta x - u\Delta v / \Delta x) / \lim_{\Delta x \to 0} (v(v + \Delta v)) =$$

$$= (v \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u / \Delta x - u \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v / \Delta x)/(v^2 + v \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v).$$

Так як $v(x)$ – диференційована і, отже, неперервна функція, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$. Маємо $y'=(vu'-uv')/v^2$, де $v\neq 0$.

<u>Теорема 1 (похідна складеної функції)</u>. *Якщо функція* $u=u(x)$ *має похідну у деякій точці* $x\in(a;b)$, *а функція* $y=f(u)$ *має похідну у відповідній точці* $u=u(x)$, *то й складена функція* $y=f(u(x))$ *має похідну у точці* x, *причому*

$$\boxed{y'_x=(f(u(x))'=y'_u(u)\cdot u'_x(x)},$$

де індекси y і x біля похідних вказують, за якою змінною обчислюють похідні. Тобто *похідна складеної функції дорівнює похідній зовнішньої функції за проміжним аргументом, помноженій на похідну внутрішньої функції.*

$$\square\quad y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\begin{vmatrix}\Delta x\to 0\\ \Delta u\to 0\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\left(\Delta y/\Delta u\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta u/\Delta x\right)=y'_u\cdot u'_x.\quad\blacksquare$$

<u>Зауваження</u>. Якщо складена функція є результатом цілого ряду суперпозицій, то для знаходження її похідної за проміжний аргумент треба взяти результат всіх цих суперпозицій, крім останньої.

<u>Теорема 2 (похідна оберненої функції)</u>. *Нехай функція* $y=f(x)$ *задовольняє умові існування оберненої функції і у точці* $x\in(a;b)$ *має скінчену і відмінну від нуля похідну. Тоді обернена функція* $x=f^{-1}(y)$ *у відповідній точці* $y=f(x)$ *також має похідну. Похідні цих взаємно обернених функцій зв'язані рівністю*

$$\boxed{(f^{-1}(y))'_y=1/f'_x(x)}.$$

$$\square\quad x'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y/\Delta x}=\begin{vmatrix}\Delta y\to 0\\ \Delta x\to 0\end{vmatrix}=$$

$$=1\Big/\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta y/\Delta x\right)=1/y'_x.\quad\blacksquare$$

2.1.3 Основні формули диференціювання

Похідні основних елементарних функцій подамо всі разом (табл. 3, де $u = u(x)$), а потім вибірково доведемо деякі з них.

Таблиця 3 – Формули похідних

№ з/п	Функція	Похідна
1	2	3
1	Стала функція	$C' = 0$
2	Степенева функція	$\left(u^a\right)' = a u^{a-1} \cdot u'$
2а	x	$x' = 1$
2б	$\sqrt{u}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
2в	$\frac{1}{u}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
3	Показникова функція	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
3а	Експонента	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
4	Логарифмічна функція	$\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
4а	Натуральний логарифм	$\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
5	Синус	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
6	Косинус	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$

Продовження таблиці 3

1	2	3
7	Тангенс	$(tg\ u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
8	Котангенс	$(ctg\ u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
9	Арксинус	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
10	Арккосинус	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
1	Арктангенс	$(arctg\ u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
2	Арккотангенс	$(arcctg\ u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Доведемо деякі наведені формули диференціювання.

Теорема 1. *Похідна від* $\sin x$ *є* $\cos x$.

□ Дамо аргументу x приріст Δx. Тоді

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)\text{, де } y = \sin x;$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin((x + \Delta x - x)/2) \times$$

$$\times \cos((x + \Delta x + x)/2) = 2\sin x(\Delta x/2) \cdot \cos(x + \Delta x/2).$$

Розділимо на Δx:

$$\Delta y/\Delta x = (2\sin x(\Delta x/2) \cdot \cos(x + \Delta x/2))/\Delta x.$$

Знайдемо границю

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} (\sin(\Delta x/2)/(\Delta x/2) \times$$

$$\times \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x/2)\text{. Але } \lim_{\Delta x \to 0} (\sin(\Delta x/2)/(\Delta x/2)) = 1,$$

тому $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x / 2) = \cos x$. Остання рівність випливає з неперервності функції $\cos x$. ■

<u>Теорема 2</u>. *Похідна від* $tg\, x$ *є* $1/\cos^2 x$.

□ Похідну функції $y = tg\, x = \sin x / \cos x$ можна знайти за правилом диференціювання дробу

$$y' = \left((\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x \right) / \cos^2 x =$$

$$= \left(\cos^2 x + \sin^2 x \right) / \cos^2 x = 1 / \cos^2 x. \ ■$$

<u>Теорема 3</u>. *Похідна від функції* $\log_a x$ *є* $1/(x \cdot \ln a)$.

□ Якщо Δy є приріст функції $y = \log_a x$, який відповідає приросту Δx аргументу x, то

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x); \quad \Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x;$$

$$\Delta y = \log_a (1 + \Delta x / x); \quad \Delta y / \Delta x = (1/\Delta x) \log_a (1 + \Delta x / x).$$

Помножимо і поділимо на x вираз, який стоїть праворуч у останній рівності: $\Delta y / \Delta x = (1/x)(x/\Delta x) \log_a (1 + \Delta x / x) =$

$= (1/x) \log_a (1 + \Delta x / x)^{x/\Delta x}$. Тоді

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} (1/x) \log_a (1 + \Delta x / x)^{x/\Delta x} =$$

$$= (1/x) \log_a \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x / x)^{x/\Delta x} = (1/x) \log_a e = 1/(x \cdot \ln a). \ ■$$

<u>Теорема 4</u>. *Похідна від* $y = \arcsin x$ *є* $1/\sqrt{1 - x^2}$.

□ Оберненою функцією до функції $y = \arcsin x$ є функція $x = \sin y$. За теоремою про похідну оберненої функції маємо $(\arcsin x)' = 1/(\sin y)' = 1/\cos y = 1/(\cos(\arcsin x))$.

Оскільки $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, то $y' = 1/\sqrt{1 - x^2}$. ■

<u>Приклад</u>. Знайти похідні заданих функцій:

а) $y = x^3 \cos 7x$; б) $y = 3^{arcctg\, 2x} - \sqrt{\ln(1 + 3x^2)}$;

в) $y = x^2 / \sin 5x$; г) $y = 6^{\cos x} + \cos^6 x - \cos x^6 + e^{\pi}$.

□ а) $y' = (x^3 \cos 7x)' = (x^3)' \cos 7x + x^3 (\cos 7x)' =$

$$= 3x^2 \cos 7x - 7x^3 \sin 7x;$$

б) $y' = \left(3^{arcctg 2x} - \sqrt{\ln(1+3x^2)}\right)' = \left(3^{arcctg 2x}\right)' - \left(\sqrt{\ln(1+3x^2)}\right)' =$

$$= 3^{arcctg\,2x} \cdot \ln 3 \cdot (arcctg\,2x)' - \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+3x^2)}} \left(\ln(1+3x^2)\right)' =$$

$$= -3^{arcctg\,2x} \cdot \frac{\ln 3}{1+x^2} - \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+3x^2)}} \cdot \frac{1}{1+3x^2} \left(1+3x^2\right)' =$$

$$= -3^{arcctg\,2x} \cdot \frac{\ln 3}{1+x^2} - \frac{1}{2\sqrt{\ln(1+3x^2)}} \cdot \frac{1}{1+3x^2} \cdot 6x;$$

в) $y' = (x^2 / \sin 5x)' = \left((x^2)' \sin 5x - (\sin 5x)' x^2\right) : \sin^2 5x =$

$$= \left(2x \sin 5x - 5\cos 5x \cdot x^2\right) / \sin^2 5x = x\left(2\sin 5x - 5x \cos 5x\right) / \sin^2 5x.$$

г) $y' = \left(6^{\cos x} + \cos^6 x - \cos x^6 + e^{\pi}\right)' = \left(6^{\cos x}\right)' + \left(\cos^6 x\right)' -$

$$-\left(\cos x^6\right)' + \left(e^{\pi}\right)' = 6^{\cos x} \ln 6 \cdot (\cos x)' + 6\cos^5 x \cdot (\cos x)' - \left(-\sin x^6\right) \times$$

$$\times \left(x^6\right)' + 0 = 6^{\cos x} \ln 6 \cdot (-\sin x) + 6\cos^5 x \cdot (-\sin x) + \sin x^6 \cdot 6x^5. \ ■$$

2.1.4 Диференціювання неявно заданої функції. Правило логарифмічного диференціювання

Правило диференціювання функції $y = y(x)$, що задана неявно рівнянням $F_1(x, y) = F_2(x, y)$:

1) продиференціювати ліву і праву частини рівняння, що задає функцію, розглядаючи y як функцію від x, тобто застосовуючи правило диференціювання складеної функції;

2) з одержаної рівності знайти y'.

Зауваження 1. Похідна неявної функції $y = y(x)$, в загальному випадку, виражається не тільки через значення аргументу x, а й через значення функції y при даному значенні x.

Приклад 1. Знайти похідну y' неявної функції $y=y(x)$, що задана рівнянням $tg(2x-y)+2x^3=1+x^2y$ у точці $M(2;4)$. Скласти рівняння нормалі.

□ $\left(tg(2x-y)+2x^3\right)'=\left(1+x^2y\right)'$; $\dfrac{1}{\cos^2(2x-y)}(2x-y)'+$

$$+3\cdot 2x^2=0+\left(x^2\right)'y+x^2(y)';$$

$$\left(1/\cos^2(2x+y)\right)(2-y')+6x^2=2xy+x^2\cdot y';$$

$$2-y'+6x^2\cos^2(2x-y)=2xy\cos^2(2x-y)+x^2y'\cos^2(2x-y);$$

$$y'=\left(2-2xy\cos^2(2x-y)+6x^2\cos^2(2x-y)\right)/\left(1+\right.$$

$$\left.+x^2\cos^2(2x-y)\right);$$

$$y'\big|_{M(2;4)}=\left(2-2\cdot 2\cdot 4\cos^2(2\cdot 2-4)+6\cdot 2^2\cos^2(2\cdot 2-4)\right):$$

$$:\left(1+2^2\cdot\cos^2(2\cdot 2-4)\right)=2.$$

Рівняння нормалі $y-y_0=\left(-1/y'_0\right)\cdot(x-x_0)$;

$$y-4=\left(-1/2\right)\cdot\left(x-2\right);\quad y=(-1/2)x+5.\ ■$$

Зауваження 2. У деяких випадках при диференціюванні навіть явної функції зручно попередньо перейти до її неявного задання.

Правило логарифмічного диференціювання явно заданої функції $y=f(x)$:

1) прологарифмувати ліву і праву частини відповідного рівняння $y=f(x)$;

2) до результату логарифмування застосувати правило диференціювання неявної функції;

3) виразити y' та у співвідношенні для похідної y' замість y підставити вираз $f(x)$.

Теорема 2. *Похідна від $y=x^{\alpha}$, де $\alpha\in R$, є $\alpha x^{\alpha-1}$.*

□ Нехай $x>0$. Логарифмуємо дану функцію, маємо $\ln y=\alpha\ln x$. Візьмемо похідну від обох частин рівності

$y'/y=\alpha/x$. Звідси $y'=y(\alpha/x)=x^{\alpha}(\alpha/x)=\alpha x^{\alpha-1}$. ■

Теорема 3. *Похідна від показниково-степеневої функції* $y=u(x)^{v(x)}$ *є* $\left(u^{v}\right)'=u^{v}(v'\ln u+vu'/u)$.

□ Логарифмуємо дану функцію $\ln y=v\ln u$. Візьмемо похідну від обох частин рівності $y'/y=v'\ln u+v\cdot u'/u$. Звідси $y'=u^{v}(v'\ln u+vu'/u)$. ■

Зауваження 3. Логарифмічне диференціювання зручно застосовувати, коли функція $y=f(x)$ є багатократним добутком (часткою) степеневих, показникових і показниково-степеневих функцій.

Приклад 2. Знайти похідну заданої функції:

$$y=(3x+1)^{7}\,\sqrt[3]{(4-x)^{5}}\Big/\left(7^{4\sin x}(2x+5)\right).$$

□ $\ln y=\ln(3x+1)^{7}+\ln\sqrt[3]{(4-x)^{5}}-\ln 7^{4\sin x}-\ln(2x+5)$;

$$\ln y=7\ln(3x+1)+(5/3)\ln\,(4-x)-4\sin x\cdot\ln 7-\ln(2x+5).$$

Візьмемо похідну від обох частин одержаної рівності

$$\frac{y'}{y}=\frac{7}{3x+1}\cdot 3+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4-x}\cdot(-1)-4\ln 7\cdot\cos x-\frac{2}{2x+5}.$$

Звідси

$$y'=\left(21/(3x+1)-5/\left(12-4x\right)-4\ln 7\cdot\cos x-2/(2x+5)\right)\times$$

$$\times(3x+1)^{7}\,\sqrt[3]{(4-x)^{5}}\Big/\left(7^{4\sin x}(2x+5)\right).\quad ■$$

2.1.5 Похідна параметрично заданої функції

Теорема (похідна параметрично заданої функції). *Нехай функцію* $y=f(x)$ *задано у параметричному вигляді:* $y=\psi(t)$, $x=\varphi(t)$, *де* t *– параметр. Якщо функції* $\psi(t)$ *і* $\varphi(t)$ *диференційовані на інтервалі* $(\alpha;\beta)$ *і функція* $\varphi(t)$ *має обернену, причому* $\varphi'_t(t)\neq 0$, *то похідна функції* $y=f(x)$ *знаходиться як відношення* $\boxed{y'_x=\psi'(t)/\varphi'(t)=y'_t/x'_t}$.

□ Функція $\varphi(t)$ має обернену функцію $t = t(x)$, їх похідні зв'язані рівністю $x'_t = 1/t'_x$. Звідки $t'_x = 1/x'_t$.

Підставивши $t = t(x)$ у друге параметричне рівняння, дістанемо явну форму задання функції $y = f(x)$: $y = \psi(t(x))$.

Обчислимо її похідну як похідну складеної функції $y'_x = \psi'_t \cdot t'_x$. Тоді $y'_x = \psi'(t) \cdot \left(1/x'_t\right) = \psi'(t) / \varphi'(t) = y'_t / x'_t$. ■

Зауваження. Похідна параметрично заданої функції також є параметрично заданою функцією: $y'_x = y'_t / x'_t$; $x = x(t)$.

Приклад 1. Знайти кут нахилу α дотичної до графіка функції $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, де $0 \le t \le \pi$, у точці, яка відповідає значенню параметра $t_0 = \pi/4$. Скласти рівняння дотичної.

□ $y'_x = (a\sin t)'_t / (a\cos t)'_t = (a\cos t)/(a\sin t) = -ctg\, t$;

$tg\,\alpha = y'_{x0} = -ctg\,(\pi/4) = -1$. Звідси $\alpha = 135^0 = 3\pi/4$.

Знайдемо координати точки дотику $M_0\left(x_0;\, y_0\right)$:

$$x_0 = a\cos t_0 = \sqrt{2}\,a/2;\quad y_0 = a\sin t_0 = \sqrt{2}\,a/2;$$

Тоді рівняння дотичної $y - y_0 = y'_{x0} \cdot (x - x_0)$;

$$y - \sqrt{2}\,a/2 = -1 \cdot \left(x - \sqrt{2}\,a/2\right);\quad y = -x + \sqrt{2}\,a. \ ■$$

Приклад 2. Нехай з бігом часу t (років) валовий продукт P (млрд. дол.) деякої держави змінюється за формулою $P = 1000 + 5\ln(1+t)$, а кількість населення N (млн.) зростає за законом $N = 2000 + 2\sqrt{t}$. Знайти швидкість зміни валового продукту держави відносно кількості населення. Обчислити значення цієї швидкості в момент часу $t_0 = 4$.

□ Використовуючи механічний зміст похідної та правило диференціювання параметрично заданої функції $P = P(N)$, знайдемо шукану швидкість P'_N і обчислимо її значення при $t_0 = 4$:

$$P'_t = \frac{5}{1+t};\ N'_t = \frac{1}{\sqrt{t}};\ P'_N = \frac{P'_t}{N'_t} = \frac{5}{1+t} : \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{5\sqrt{t}}{1+t};\ P'_N\Big|_{t=4} = 2. \ ■$$

2.1.6 Похідні вищих порядків. Механічний зміст другої похідної

Нехай функція $f(x)$ диференційована на проміжку $(a;b)$. Похідна цієї функції $f'(x)$ є функцією аргументу x. Візьмемо деяку точку $x_0 \in (a;b)$. Дамо приріст аргументу $\Delta x = x - x_0$ і матимемо приріст функції $f'(x)$ у точці x_0:

$$\Delta f'(x_0) = f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0).$$

Розглянемо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\Delta f'(x_0) / \Delta x\right) = f''(x_0)$.

Якщо ця границя існує, то кажуть, що функція $f(x)$ має ***похідну другого порядку*** (***другу похідну***) у точці x_0. Її позначають $y'' = f''(x_0)$, або $d^2 f(x_0)/dx^2$, або $f''(x)\big|_{x=x_0}$.

Похідну $f'(x)$ називають ***похідною першого порядку*** (***першою похідною***), а саму функцію $f(x)$ вважають ***похідною нульового порядку*** (***нульовою похідною***).

Отже, *друга похідна – це похідна від першої похідної*

$$\boxed{y'' = (y')'}.$$

Аналогічно визначають похідні третього і наступних порядків:

$$\boxed{y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

<u>Приклад 1</u>. Знайти y''', якщо $y = \cos^6 x$.

□ Послідовно знайдемо y', y'', y''':

$$y' = -6\cos^5 x \sin x; \quad y'' = \left(-6\cos^5 x \sin x\right)' = -6 \cdot \left(-5\cos^4 x \sin x \times\right.$$

$$\left.\times \sin x + \cos^5 x \cdot \cos x\right) = 30\cos^4 x \sin^2 x - 6\cos^6 x;$$

$$y''' = \left(30\cos^4 x \sin^2 x - 6\cos^6 x\right)' = 30 \cdot \left(-4\cos^3 x \cdot \sin x \cdot \sin^2 x + \right.$$

$$\left. + \cos^4 x \cdot 2\sin x \cdot \cos x\right) - 6 \cdot 6\cos^5 x \left(-\sin x\right) =$$

$$= -120\cos^3 x \sin^3 x + 24\cos^5 x \sin x. \quad ■$$

Знайдемо вираз для другої похідної y''_{xx} параметрично заданої функції $y=\psi(t)$, $x=\varphi(t)$.

За означенням $y''_{xx}=(y'_x)'_x=(\psi'_t\cdot t'_x)'_x=(\psi'_t)'_x\cdot t'_x+\psi'_t(t'_x)'_x$.

Обчисливши похідну по x від функції ψ'_t як похідну складеної функції $(\psi'_t)'_x=\psi''_{tt}\cdot t'_x$, дістанемо $y''_{xx}=\psi''_{tt}(t'_x)^2+\psi'_t\cdot t''_{xx}$.

Оскільки $t'_x=1/x'_t$, а

$$t''_{xx}=(t'_x)'_x=(1/x'_t)'_x=-(1/(x'_t)^2)\cdot x''_{tt}\cdot t'_x=-x''_{tt}/(x'_t)^3,$$

то остаточно маємо $\boxed{y''_{xx}=(y''_{tt}\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_{tt})/(x'_t)^3}$.

Приклад 2. Знайти d^2y/dx^2 для функції, заданої у параметричній формі $x=2\cos t$, $y=3\sin t$.

□ Спочатку обчислимо перші та другі похідні від даних функцій по параметру t:

$$x'_t=-2\sin t,\ x''_{tt}=-2\cos t;\ \ y'_t=3\cos t,\ y''_{tt}=-3\sin t.$$

Тоді $d^2y/dx^2=((-2\sin t)(-3\sin t)-(3\cos t)(-2\cos t)):$

$$:(-2\sin t)^3=-3/(4\sin^3 t).\ \blacksquare$$

Приклад 3. Знайти другу похідну y'' функції, що задана неявно рівнянням $3\cos y=x^3+3y$.

□ Спочатку обчислимо першу похідну:

$$(3\cos y)'=(x^3+3y)';\ -3\sin y\cdot y'=3x^2+3y';$$

$$y'=-x^2/(\sin y+1).$$

Далі знаходимо $y''=\left(-x^2/(\sin y+1)\right)'=$

$$=-\left(\left(x^2\right)'(\sin y+1)-x^2(\sin y+1)'\right)/(\sin y+1)^2=(-x^2\sin y-x^2+$$

$$+x\cos y\cdot y'):(\sin y+1)^2=-\left(x^2\sin y+x^2+x\sin y\cdot x^2/(\sin y+1)\right):$$

$$:(\sin y+1)^2=-\left(x^2(\sin y+1)^2+x^3\sin y\right):(\sin y+1)^3.\ \blacksquare$$

Механічний зміст другої похідної. Якщо заданий закон прямолінійного руху тіла $s=s(t)$, то $ds/dt=v(t)$ – швидкість, а $d^2s/dt^2=dv/dt=a(t)$ – прискорення.

<u>Приклад 4</u>. Перевірити, чи задовольняє задана функція вказаній умові:

$$y = x\,ctg\,x\,; \; y''\sin^2 x = 2y - 2\,.$$

□ Обчислимо похідні, що входять у зазначене рівняння:

$$y' = ctgx - x \cdot 1\big/\sin^2 x\,; \quad y'' = -\frac{1}{\sin^2 x} -$$

$$-\frac{\sin^2 x - x \cdot 2\sin x \cos x}{\sin^4 x} = \frac{-2\sin x + x \cdot 2\cos x}{\sin^3 x}\,.$$

Підставимо функцію та одержані похідні у рівняння:

$$\frac{-2\sin x + 2x \cdot \cos x}{\sin^3 x} \cdot \sin^2 x = 2x \cdot ctgx - 2\,;$$

$$2x \cdot ctgx - 2 = 2x \cdot ctgx - 2\,; \quad \text{– вірно.}$$

Отже, задана функція задовольняє вказаній умові. ■

2.1.7 Диференціал функції та його властивості. Диференціали вищих порядків

Нехай $y = f(x)$ – деяка функція, визначена на проміжку $(a;b)$ і неперервна у деякій фіксованій точці x цього проміжку, і нехай приросту аргументу Δx відповідає приріст функції $\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$**,** який є функцією аргументу Δx .

Якщо для приросту функції Δy існує таке число A, що приріст функції можна записати у вигляді $\Delta y = A \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$**,** де множник $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x)$ задовольняє рівності $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$**,** то кажуть, що функція $y = f(x)$ ***диференційована у точці*** x. Головна частина $dy = A\Delta x$ приросту функції Δy, яка прямо пропорційна приросту аргументу Δx, називається ***диференціалом функції***.

<u>Теорема 1 (зв'язок між похідною та диференціалом)</u>. *Щоб функція* $y = f(x)$ *у точці* x *була диференційована, необхідно і достатньо, щоб вона мала у цій точці скінченну похідну* $f'(x)$. *Якщо виконується ця умова, то* $dy = f'(x)\Delta x$.

□ а) <u>Необхідність</u>. Нехай $\Delta y = dy + \varepsilon \cdot \Delta x$, де $dy = A \cdot \Delta x$, $A = const \neq 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. Тоді $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + \varepsilon \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} A + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = A + 0 = A;\ dy = y'\Delta x.$$

б) <u>Достатність</u>. Нехай $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' \neq 0$. За означенням границі $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon$, де $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. Звідси $\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$. Покажемо, що $y'\Delta x$ – головна частина Δy:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon\,\Delta x}{y'\Delta x} = \frac{1}{y'} \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = \frac{1}{y'} \cdot 0 = 0. \quad \blacksquare$$

Тут Δx не обов'язково нескінченно мала; але якщо Δx – нескінченно мала, то й dy – нескінченно мала. Саме у цих випадках dy (за умови, що $f'(x) \neq 0$) є головною частиною нескінченно малого приросту функції Δy.

Диференціалом незалежної змінної x називають її приріст Δx, тобто $dx = \Delta x$.

З урахуванням цієї рівності, маємо $\boxed{dy = f'(x)dx}$. Тоді $\boxed{f'(x) = dy / dx}$.

Тобто, *похідна дорівнює відношенню диференціалів функції та аргументу*.

<u>Правила обчислення диференціалів і основні диференціали</u> аналогічні відповідним формулам для похідних. Ці співвідношення наведені в табл. 4, де $u = u(x)$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти диференціал функції:

а) $y = e^{\sqrt{x}} \ln\sin x$; б) $y = \sqrt[3]{x^2} \big/ \cos x$; в) $\sin(x^2 - y) = xy$;

г) $x = t + \sin t;\ y = t\cos t$; д) $\ln(x - y) = x^2 + y^3$.

□ а) $dy = d\left(e^{\sqrt{x}} \ln\sin x\right) = \ln x \cdot d\left(e^{\sqrt{x}}\right) + e^{\sqrt{x}} d(\ln\sin x) = \ln\sin x \times$

$$\times e^{\sqrt{x}}\left(1\big/\left(2\sqrt{x}\right)\right)dx + e^{\sqrt{x}} \cdot (\cos x/\sin x)dx = e^{\sqrt{x}}\left(1\big/\left(2\sqrt{x}\right)\ln\sin x + ctgx\right)dx;$$

б) $d(\sqrt[3]{x^2}/\cos x)=(\cos x\cdot d(\sqrt[3]{x^2})-\sqrt[3]{x^2}d(\cos x))/\cos^2 x=$

$$=(2/3x^{-1/3}\cos x+\sqrt[3]{x^2}\sin x)\,dx/\cos^2 x\,;$$

б) $\left(\sin(x^2-y)\right)'=(xy)'$; $\cos(x^2-y)(x^2-y)'=x'y+xy'$;

$$\cos(x^2-y)(2x-y')=y+xy';\quad 2x\cos(x^2-y)-$$

$$-y'\cos(x^2-y)=y+xy';\quad xy'+y'\cos(x^2-y)=$$

$$=2x\cos(x^2-y)-y;\quad y'=\frac{2x\cos(x^2-y)-y}{x+\cos(x^2-y)};$$

$$dy=y'\,dx=\left(2x\cos(x^2-y)-y\right)/\left(x+\cos(x^2-y)\right)dx;$$

г) $dy=y_t'dt=(t\cos t)_t'\ dt=(\cos t-t\sin t)\,dt$.

д) (Розв’язати самостійно). ■

Таблиця 4 – Формули диференціалів

№ з/п	Формула	№ з/п	Формула
1	2	3	4
Правила обчислення диференціалів			
1	$d(u+v)=du+dv$	4	$d(uv)=vdu+udv$
2	$d(u-v)=du-dv$	5	$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$
3	$d(Cu)=Cdu$	6	$dy=y'_u\,du,\quad y=f\left(u(x)\right)$
Основні диференціали			
1	$d\,C=0$	5	$d(\sin u)=\cos u\ du$
2	$d\left(u^{\alpha}\right)=\alpha u^{\alpha-1}\,du$	6	$d(\cos u)=-\sin u\ du$
2а	$d(au+b)=a\ du$	7	$d(tg\,u)=\frac{du}{\cos^2 u}$

Продовження таблиці 4

1	2	3	4
2б	$d\left(au^2+bu+c\right)=$ $=\left(2au+b\right)\,du$	8	$d\left(ctg\,u\right)=-\dfrac{du}{\sin^2 u}$
2в	$d\left(\sqrt{u}\right)=\dfrac{du}{2\sqrt{u}}$	9	$d\left(\arcsin u\right)=\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
3	$d\left(\ln u\right)=\dfrac{du}{u}$	10	$d\left(\arccos u\right)=-\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
4	$d\left(a^u\right)=a^u\ln a\;du$	11	$d\left(arctg\,u\right)=\dfrac{du}{1+u^2}$
4а	$d\left(e^u\right)=e^u\;du$	12	$d\left(arcctg\,u\right)=-\dfrac{du}{1+u^2}$

Геометрична інтерпретація диференціала. Нехай $y=f(x)$ – деяка диференційована функція, $M\left(x_0,y_0\right)$ – точка, що належить графіку функції, $y_0=f\left(x_0\right)$. Проведемо через точку M (рис. 63) дотичну до графіка функції. Кутовий коефіцієнт нахилу дотичної (тангенс кута нахилу α) дорівнює значенню похідної $f'(x_0)$. Якщо аргументу функції надати приріст Δx, то приріст функції $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. На рисунку 63 приріст функції Δy – довжина відрізка M_1P. При цьому приріст ординати дотичної дорівнює довжині відрізка NP. Обчисливши NP як катет прямокутного трикутника MNP, маємо

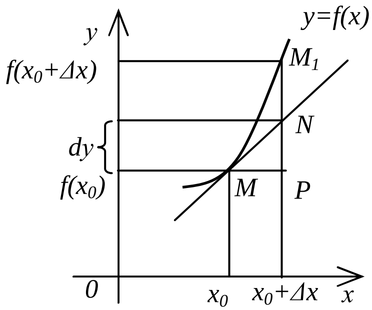


Рисунок 63

$$NP=MP\cdot tg\,\alpha=f'\left(x_0\right)\Delta x.$$

За означенням диференціала $f'(x_0)\Delta x = dy$. Таким чином, якщо $\Delta y = M_1P$ – приріст ординати графіка функції, то *диференціал* $dy = NP$ *є приростом ординати дотичної*.

Диференціал у наближених обчисленнях. При достатньо малому Δx можна замінити приріст функції її диференціалом, тобто $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$. Тоді наближене шукане значення функції можна знайти за формулою

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x .$$

Зауваження 1. Нажаль, ця формула не дозволяє оцінити похибку отриманого наближення.

Приклад 2. Обчислити наближено :

а) $\sin 46^\circ$; б) $\cos 58^\circ$.

□ а) Покладемо $x_0 = \pi/4$, що відповідає 45°; $\Delta x = \pi/180$, що відповідає 1°; $x_0 + \Delta x = \pi/4 + \pi/180$, що відповідає 46°.

Тоді $\sin 46^0 = \sin(\pi/4 + \pi/180) \approx \sin(\pi/4) +$

$$+\cos(\pi/4)\cdot(\pi/180) = \sqrt{2}/2 + \left(\sqrt{2}/2\right)\cdot\left(\pi/180\right) \approx$$

$$\approx 0{,}7071 + 0{,}7071\cdot 0{,}0175 \approx 0{,}7191 .$$

б) (Розв'язати самостійно). ■

Теорема 2 (інваріантність форми диференціала). *Нехай* $y = f(u)$ *і* $u = \varphi(x)$ *– деякі диференційовані функції зазначених аргументів такі, що з них можна утворити складену функцію* $y = f(\varphi(x))$. *Диференціал складеної функції визначається рівністю* $\boxed{dy = y'_u\, du}$. Тобто, *форма диференціала функції не залежить від того, є аргумент незалежною змінною чи функцією іншого аргументу*.

□ Якщо розглядати y як функцію незалежної змінної x, то її диференціал визначається рівністю $dy = y'_x \cdot dx$. Підставивши в цю рівність замість похідної складеної функції y'_x її вираз через f'_u і

φ'_x, дістанемо 77 $dy = f'_u \cdot \varphi'_x \cdot dx$. Але, з іншого боку, $\varphi'_x \cdot dx = du$. Тоді $dy = f'_u \cdot du$. ■

Зауваження 2. Інваріантна (незмінна) саме форма диференціала, а не його зміст. У формулі $dy = f'_u \cdot du$ множник du – не тільки диференціал, але і приріст Δu аргументу u, якщо u – незалежна змінна. Однак du – диференціал u, але не приріст Δu, якщо аргумент u – у свою чергу функція деякої змінної x.

Диференціали вищих порядків. Нехай маємо функцію $y = f(x)$, де x – незалежна змінна. Диференціал цієї функції $dy = f'(x) \cdot dx$ є деякою функцією x, але від x може залежати тільки перший множник $f'(x)$, другий множник dx є приростом незалежної змінної x і від значення цієї змінної не залежить. Оскільки dy є функція від x, то маємо право говорити про диференціал цієї функції.

Диференціал від диференціала функції називають ***другим диференціалом*** (***диференціалом другого порядку***) цієї функції і позначають через $d^2 y$:

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Аналогічно визначаються диференціали третього і наступних порядків. ***Диференціалом*** n***-го порядку*** називається перший диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = \left(f^{(n-1)}(x) \cdot dx^{n-1}\right)' \cdot dx =$$

$$= \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \cdot dx^{n-1} \cdot dx = f^{(n)}(x) \cdot dx^n.$$

Зауваження 3. Диференціали другого і вищих порядків властивості інваріантності форми не мають.

Користуючись поняттям диференціала, похідну другого і вищих порядків можна подати як відношення диференціалів відповідного порядку $y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$, ... , $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ при умові, що x – незалежна змінна.

2.1.8 Теореми Ролля і Лагранжа

Теорема 1 (теорема Ролля про корені похідної). *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$, *диференційована в усіх внутрішніх точках цього відрізка і на його кінцях приймає рівні значення* $f(a)=f(b)$, *то на інтервалі* $(a;b)$ *знайдеться хоча б одна точка* c, *в якій похідна дорівнює нулю* $f'(c)=0$.

□ Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на ньому свого найбільшого M і найменшого m значень.

Якщо $M=m$, то функція стала. Похідна від сталої величини дорівнює нулю і теорема доведена.

Нехай $f(c)=M$, де $c\in(a;b)$. Через те, що $f(c)=M$ – найбільше значення функції, то $f(c+\Delta x)-f(c)\le 0$ як при $\Delta x>0$, так і при $\Delta x<0$. Отже, $(f(c+\Delta x)-f(c))/\Delta x\le 0$, коли $\Delta x>0$, і $(f(c+\Delta x)-f(c))/\Delta x\ge 0$, коли $\Delta x<0$.

За умовою теореми похідна $f'(c)$ існує, тобто, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(c+\Delta x)-f(c))/\Delta x=f'(c)$. Але тут $f'(c)\le 0$ при $\Delta x>0$ і $f'(c)\ge 0$ при $\Delta x<0$. Ці нерівності сумісні лише тоді, коли $f'(c)=0$. Отже, між a і b є точка c, де похідна дорівнює нулю. ■

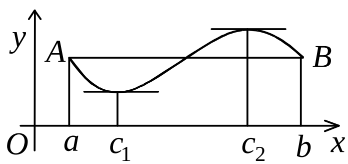


Рисунок 64

Геометричний зміст. За умов, які вказані в теоремі Ролля, на дузі AB існує хоча б одна дотична, що паралельна осі Ox (рис. 64).

Теорема 2 (теорема Лагранжа про скінченні прирости). *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і диференційована в усіх його внутрішніх точках, то на інтервалі* $(a;b)$ *знайдеться хоча б одна точка* c, *в якій виконується рівність* $\boxed{f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)}$ – ***формула Лагранжа скінченних приростів***.

□ Визначимо число Q рівністю $(f(b)-f(a))/(b-a)=Q$. Складемо допоміжну функцію $F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)\cdot Q$.

Очевидно, що $F(a)=0$ і $F(b)=0$.

Функція $F(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і диференційована у кожній внутрішній точці. Отже, вона відповідає теоремі Ролля, за якою усередині відрізка є точка c така, що $F'(c)=0$. Але $F'(x)=f'(x)-Q$. Тому $F'(c)=f'(c)-Q=0$. Звідси $f'(c)=Q$, тобто $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. ■

<u>Геометричний зміст</u>. За умов, що вказані в теоремі Лагранжа, на дузі AB (рис. 65) існує хоча б одна точка, в якій дотична паралельна хорді AB.

Теорема Ролля випливає з теореми Лагранжа як окремий випадок при $f(a)=f(b)$, тобто коли хорда AB паралельна осі Ox.

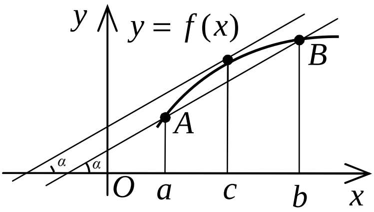


Рисунок 65

<u>Зауваження</u>. Застосовуючи формулу Лагранжа до відрізка $[x_0;x_0+\Delta x]$, для приросту функції $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ на цьому відрізку отримаємо

$$\boxed{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\Delta x,}$$

$$\boxed{\text{де } c=x_0+\theta\Delta x,\ 0<\theta<1}.$$

Одержане співвідношення є <u>точним</u> на відміну від <u>наближеної</u> формули $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$. Проте в останньому виразі похідна обчислюється в заданій точці x_0, а формула Лагранжа вимагає обчислення похідної у зміщеній точці c, точне положення якої невідоме.

2.1.9 Правило Лопіталя розкриття невизначеностей

<u>Теорема (правило Лопіталя розкриття невизначеності виду $0/0$)</u>. *Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовані в деякому околі точки a (a – число або символ ∞, $-\infty$, $+\infty$), крім, можливо, самої точки a. Нехай також $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ і $\varphi'(x)\neq 0$ в кожній точці x з вище вказаного околу a, $x\neq a$. Тоді, якщо існує границя (скінченна чи нескінченна) відношення похідних*

$f'(x)/\varphi'(x)$ при $x \to a$, то існує і границя відношення самих функцій $f(x)/\varphi(x)$ при $x \to a$, причому

$$\boxed{\lim_{x\to a}(f(x)/\varphi(x)) = |0/0| = \lim_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x))}. \quad \text{(Без доведення).}$$

Зауваження 1. Якщо границя (скінченна чи нескінченна) відношення похідних не існує, то правило Лопіталя застосовувати не можна. Але це не свідчить про те, що границя відношення самих функцій не існує. Наприклад,

$$f(x) = x^2\sin(1/x);\quad f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x);\ \varphi(x) = x;$$

$$\varphi'(x) = 1;\ \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin(1/x) - \cos(1/x)}{1} \text{ – не існує,}$$

але $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}x\sin(1/x) = 0.$$

Зауваження 2. Правило Лопіталя можна застосовувати повторно, але потрібно кожного разу перевіряти, чи не розкрилася невизначеність.

Зауваження 3. Для розкриття невизначеності виду ∞/∞ використовується теорема, аналогічна правилу Лопіталя для невизначеності виду $0/0$:

$$\boxed{\lim_{x\to a}(f(x)/\varphi(x)) = |\infty/\infty| = \lim_{x\to a}(f'(x)/\varphi'(x))}.$$

Зауваження 4. Для спрощення обчислень треба правило Лопіталя суміщати з іншими методами знаходження границь.

Приклад 1. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\pi - 4arctg\,x}{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x - \cos 3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\ln(1+x^2)}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{tg\,3x}{tg\,5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\cos(\pi x)\ln(x-5)}{\ln\left(e^x - e^5\right)}$.

□ а) $$\lim_{x\to 1}\frac{\pi - 4arctg\,x}{\ln x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 1}\frac{(\pi - 4arctg\,x)'}{(\ln x)'} =$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-4\cdot 1/(1+x^2)}{1/x}=-2\,;\quad \text{б) } \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}\,;$$

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{\cos x-\cos 3x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-\sin x)'}{(\cos x-\cos 3x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{-\sin x+\sin 3x\cdot 3}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-\cos x)'}{(-\sin x+3\sin 3x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{-\cos x+3\cos 3x\cdot 3}=\frac{1}{8}\,;\quad \text{г) } \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\ln(1+x^2)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\ln(1+x^2)\right)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1/x}{\left(1/(1+x^2)\right)\cdot 2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to +\infty}\frac{1+x^2}{x^2}=$$

$$=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\frac{1}{2}\lim_{x\to +\infty}\frac{1/x^2+1}{1}=\frac{1}{2}\,;\quad \text{д) } \lim_{x\to \pi/2}\frac{tg\,3x}{tg\,5x}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=$$

$$=\lim_{x\to \pi/2}\frac{(tg\,3x)'}{(tg\,5x)'}=\lim_{x\to \pi/2}\frac{(1/\cos^2 3x)\cdot 3}{(1/\cos^2 5x)\cdot 5}=\frac{3}{5}\lim_{x\to \pi/2}\frac{\cos^2 5x}{\cos^2 3x}=$$

$$=\left|\frac{0}{0}\right|=\frac{3}{5}\cdot\left(\lim_{x\to \pi/2}\frac{(\cos 5x)'}{(\cos 3x)'}\right)^2=\frac{3}{5}\cdot\left(\lim_{x\to \pi/2}\frac{-\sin 5x\cdot 5}{-\sin 3x\cdot 3}\right)^2=$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\left(\lim_{x\to \pi/2}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}\right)^2=\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{-1}\right)^2=\frac{5}{3}\,;$$

$$\text{е) } \lim_{x\to 5}\frac{\cos(\pi x)\ln(x-5)}{\ln\left(e^x-e^5\right)}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to 5}\cos(\pi x)\times$$

$$\times \lim_{x\to 5}\frac{(\ln(x-5))'}{\left(\ln\left(e^x-e^5\right)\right)'} = (-1)\cdot\lim_{x\to 5}\frac{1/(x-5)}{\left(1/(e^x-e^5)\right)\cdot e^x} =$$

$$= -\lim_{x\to 5}\frac{e^x-e^5}{(x-5)e^x} = \left|\frac{0}{0}\right| = -\lim_{x\to 5}\frac{\left(e^x-e^5\right)'}{(x-5)'} : \lim_{x\to 5} e^x =$$

$$= -\lim_{x\to 5}\left(e^x/1\right) : e^5 = -e^5 : e^5 = -1. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження 5</u>. Для розкриття невизначеностей виду $0\cdot\infty$ і $\infty-\infty$ спочатку їх за допомогою тотожних перетворень зводять до виду $0/0$ або ∞/∞, а потім застосовують правило Лопіталя.

Формальний запис:

$$\boxed{f\cdot\varphi = |0\cdot\infty| = f/(1/\varphi) = |0/0|}$$

або $\boxed{f\cdot\varphi = |0\cdot\infty| = \varphi/(1/f) = |\infty/\infty|}$;

$$\boxed{f-\varphi = |\infty-\infty| = \frac{1/\varphi - 1/f}{(1/f)\cdot(1/\varphi)} = |0/0|}.$$

<u>Приклад 2</u>. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(2x-\pi)\,tg\,5x$; б) $\lim\limits_{x\to+0}\ln(1+2x)\ln x$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1/x^2 - ctg\,x\right)$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(3x+e^x)-2x\right)$;

д). $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(1/\left(\sin\pi x\cdot\ln(1-x)\right)\right)$

□ а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(2x-\pi)\,tg\,5x = |0\cdot\infty| = \lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{2x-\pi}{ctg\,5x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| =$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{(2x-\pi)'}{(ctg\,5x)'} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{2}{\left(-1/\sin^2 5x\right)\cdot 5} = -\frac{2}{5};$$

б) $\lim\limits_{x\to+0}\ln(1+2x)\ln x = |0\cdot\infty| = \lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\ln^{-1}x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| =$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln(1+2x)\right)'}{\left(\ln^{-1}x\right)'} = \lim_{x\to+0}\frac{2/(1+2x)}{-\ln^{-2}x\cdot(1/x)} = -2\lim_{x\to+0} x\ln^2 x :$$

$$: \lim_{x\to+0}(1+2x) = |0\cdot\infty| = -2\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{x^{-1}} : 1 = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = -2\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln^2 x\right)'}{(x^{-1})'} =$$

$$= -2\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x\cdot 1/x}{-x^{-2}} = 4\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-1}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = 4\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} =$$

$$= 4\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-x^{-2}} = -4\lim_{x\to+0} x = 0;$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1/x^2 - ctg\,x\right) = |\infty-\infty| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x^2\cos x}{x^2\sin x} = \left|\dfrac{0}{0}\right| =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x^2\cos x)'}{(x^2\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 2x\cos x + x^2\sin x}{2x\sin x + x^2\cos x} =$$

$$= |1/0| = \infty;$$

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(3x+e^x) - 2x\right) = |\infty-\infty| = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(3x+e^x) - \ln e^{2x}\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{3x+2e^x}{e^x} = \ln\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2e^x}{e^x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \ln\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2e^x)'}{(e^x)'} =$$

$$= \ln\lim_{x\to+\infty}\frac{3+e^x}{e^{2x}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \ln\lim_{x\to+\infty}\frac{(3+e^x)'}{(e^{2x})'} = \ln\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2e^{2x}} = \ln 2;$$

д) $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(1/\left(\sin\pi x\cdot\ln(1-x)\right)\right) =$

$$= \left|\frac{1}{0\cdot\infty}\right| = \lim_{x\to 1-0}\frac{\sin^{-1}\pi x}{\ln(1-x)} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to 1-0}\frac{\left(\sin^{-1}\pi x\right)'}{\left(\ln(1-x)\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 1-0}\frac{-\sin^{-2}\pi x\cdot\cos\pi x\cdot\pi}{\left(1/(1-x)\right)\cdot(-1)} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \pi\lim_{x\to 1-0}\cos\pi x\times$$

$$\times \lim_{x\to 1-0} \frac{1-x}{\sin^2 \pi x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \pi\cdot(-1)\cdot \lim_{x\to 1-0} \frac{(1-x)'}{(\sin^2 \pi x)'} =$$

$$= -\pi \lim_{x\to 1-0} \frac{-1}{2\sin\pi x\cdot\cos\pi x\cdot\pi} = \left|-\pi\cdot\frac{-1}{2\cdot(+0)\cdot(-1)\cdot\pi}\right| = -\infty. \blacksquare$$

Зауваження 6. Для розкриття невизначеностей виду 0^0, 1^∞ і ∞^0 спочатку показниково-степеневий вираз f^φ (за основною логарифмічною тотожністю, припускаючи $f>0$) записують у вигляді $\boxed{f^\varphi = e^{\varphi \ln f}}$. У показнику маємо невизначеність виду $0\cdot\infty$, яка зводиться (як показано вище) до невизначеності $0/0$ або ∞/∞.

Приклад 3. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(x)^{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(tg\, x)^{2x-\pi}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+5^x\right)^{1/x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 7x)^{4/(7x^2)}$.

□ а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin 2x} = \left|0^0\right| = A$; $\ln A = \lim\limits_{x\to+0} \ln x^{\sin 2x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \ln x\cdot\sin 2x = \left|\infty\cdot 0\right| = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(1/\sin 2x)'} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{\left(-1/\sin^2 2x\right)\cdot\cos 2x\cdot 2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x\cdot\cos 2x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 0; \quad A = e^0 = 1;$$

б) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(tg\, x)^{2x-\pi} = \left|\infty^0\right| = A$;

$$\ln A = \lim_{x\to\pi/2}\ln(tg\, x)^{2x-\pi} = \lim_{x\to\pi/2}\left((2x-\pi)\cdot\ln tg\, x\right) =$$

$$= \left|0\cdot\infty\right| = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln tg\, x}{(2x-\pi)^{-1}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\left(\ln tg\, x\right)'}{\left((2x-\pi)^{-1}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{(1/tg\,x)\cdot(1/\cos^2 x)}{-(2x-\pi)^{-2}\cdot 2} = -\lim_{x\to\pi/2} \frac{(2x-\pi)^2}{2\sin x\cdot\cos x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= -\lim_{x\to\pi/2} \frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x} = \left|\frac{0}{0}\right| = -\lim_{x\to\pi/2} \frac{\left((2x-\pi)^2\right)'}{(\sin 2x)'} =$$

$$= -\lim_{x\to\pi/2} \frac{2\cdot(2x-\pi)\cdot 2}{\cos 2x\cdot 2} = 0; \quad A = e^0 = 1;$$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+5^x\right)^{1/x} = \left|\infty^0\right| = A;\;\; \ln A = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x+5^x\right)^{1/x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x+5^x\right)}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(x+5^x)\right)'}{x'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1/(x+5^x)\right)\cdot(1+5^x\ln 5)}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+5^x\ln 5}{x+5^x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+5^x\ln 5)'}{(x+5^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 5\cdot 5^x\ln 5}{1+5^x\ln 5} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \ln^2 5\times$$

$$\times \lim_{x\to+\infty} \frac{(5^x)'}{(1+5^x\ln 5)'} = \ln^2 5\cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{5^x\ln 5}{\ln 5\cdot 5^x\ln 5} = \ln 5;$$

$$A = e^{\ln 5} = 5;$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 7x\right)^{4/(7x^2)} = \left|1^\infty\right| = A;\;\; \ln A = \lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\cos 7x\right)^{4/(7x^2)} =$

$$= \frac{4}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 7x}{x^2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \frac{4}{7}\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\cos 7x)'}{(x^2)'} =$$

$$= \frac{4}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\left(1/\cos 7x\right)\cdot(-\sin 7x)\cdot 7}{2x} = -2\lim_{x\to 0}\frac{tg\,7x}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= -2\lim_{x\to 0}\frac{(tg\,7x)'}{x'} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\left(1/\cos^2 7x\right)\cdot 7}{1} = -14;\;\; A = e^{-14}. \;\blacksquare$$

2.1.10 Формули Тейлора і Маклорена

Нехай функція $f(x)$ n раз диференційована в деякому околі точки $x = x_0$. Знайдемо многочлен

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n$$

такий, що його значення та значення його похідних до n-го порядку включно в точці x_0 співпадають зі значеннями самої функції та її відповідних похідних у цій точці. Тобто,

$$T_n(x_0) = f(x_0);\ T_n'(x_0) = f'(x_0);\ \ldots;\ T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Природно очікувати, що такий многочлен у деякому сенсі буде «близьким» до функції $f(x)$ в околі точки x_0.

Виражаючи з наведених умов коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_n$ через значення функції та її похідних у точці x_0, отримаємо

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

– ***многочлен Тейлора*** n***-го порядку*** для функції $f(x)$. Тут $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ – n***-факторіал***; $0! = 1$; $1! = 1$.

Тоді для функції $f(x)$ в околі точки x_0 справедлива ***формула Тейлора*** n***-го порядку***

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)},$$

де $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ – ***залишковий член*** формули Тейлора.

Теорема. *Якщо функція $f(x)$ в деякому околі точки x_0 має похідні до $(n+1)$-го порядку включно, то залишковий член формули Тейлора можна подати в **формі Лагранжа***

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}},$$

де $\boxed{c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1}$.

Зауваження 1. Формула Тейлора є узагальненням формули Лагранжа про скінченні прирости.

Зауваження 2. Якщо в формулі Тейлора замінити x_0 на x, x на $x+\Delta x$ і перенести $f(x)$ вліво, а потім врахувати, що $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta f(x)$ і $f^{(k)}(x)\cdot\Delta x^k = d^k f(x)$, то її можна подати в ***диференціальній формі***

$$\boxed{\Delta f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{d^k f(x)}{k!}+\frac{d^{n+1}f(c)}{(n+1)!}}$$

Зауваження 3. При $x_0=0$ маємо окремий випадок формули Тейлора – ***формулу Маклорена***

$$\boxed{f(x)= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)},$$

де $\boxed{R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1}$.

Наведемо приклади розкладання деяких функцій за формулою Маклорена.

1. Експонента $\boxed{e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}}$.

2. Синус

$$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+(-1)^{n+1}\frac{\sin\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}}.$$

3. Косинус

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{\sin\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}}.$$

4. Логарифмічна функція

$$\boxed{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,(1+\theta x)^{n+1}}}.$$

5. Біном Ньютона $(1+x)^{\mu}$, де μ — довільне число:

$$\boxed{(1+x)^{\mu} = 1+\frac{\mu}{1!}x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3+}$$

$$\boxed{+\frac{\mu(\mu-1)...(\mu-n+1)}{n!}x^n+\frac{\mu(\mu-1)...(\mu-n)}{(n+1)!\,(1+\theta x)^{n+1-\mu}}x^{n+1}}.$$

Тут $0<\theta<1$.

Зауваження 4. Формула Тейлора широко застосовується в наближених обчисленнях. При цьому за наближення до функції приймається її многочлен Тейлора: $\boxed{f(x)\approx T_n(x)}$, а допущена абсолютна похибка дорівнює модулю залишкового члена: $\boxed{\Delta = |\,R_n(x)\,|}$.

Приклад. Застосовуючи формулу Маклорена шостого порядку для експоненти $y=e^x$, обчислити наближене значення числа Ейлера e і оцінити допущену абсолютну похибку.

□ $n=6$; $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}e^{\theta x}$; $x=1$;

$$e=e^1=1+\frac{1}{1!}+\frac{1^2}{2!}+...+\frac{1^6}{6!}+\frac{e^{\theta\cdot 1}}{7!}1^7=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+$$

$$+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{e^{\theta}}{5040}\approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}=$$

$$=2\frac{517}{720}\approx 2{,}718;\quad \Delta=\left|\frac{e^{\theta}}{5040}\right|<\frac{e^1}{5040}<\frac{3}{5040}<0{,}001.\ \blacksquare$$

2.2 Застосування похідних для дослідження функцій

Вивчення кількісної сторони різних об'єктів приводить до встановлення та дослідження функціональних залежностей між змінними величинами, які відображають відповідні процеси.

Очевидно, не можливо здійснити повне дослідження функції, лише обчислюючи її значення в окремих точках. У даному розділі будуть встановлені загальні правила дослідження поведінки функції, які дозволяють, зокрема, зробити ескіз її графіка.

2.2.1 Умови сталості, зростання та спадання функції

Теорема 1 (достатні умови монотонності та сталості). *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a;b]$ *і диференційована в усіх його внутрішніх точках. Якщо для всіх* $x \in (a;b)$ *похідна* $f'(x)$:

1) *додатна, то функція на цьому відрізку зростає*;
2) *від'ємна, то функція на цьому відрізку спадає*;
3) *дорівнює нулю, то функція на цьому відрізку – стала*.

□ Нехай $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (a;b)$. Розглянемо довільні значення $x_1, x_2 \in [a;b]$ такі, що $x_1 < x_2$. За теоремою Лагранжа про скінченні прирости маємо: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, де $x_1 < c < x_2$.

За умовою теореми $f'(c) > 0$. Звідси $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Це означає, що $f(x)$ – зростаюча функція.

Аналогічно доводяться інші два випадки. ■

Зауваження. Розглядаємо монотонність у строгому смислі.

Приклад 1. Визначити інтервали зростання і спадання функції: а) $y = x^2/2$; б) $y = arctg\, x$.

□ а) Похідна цієї функції $y' = x$. Коли $x > 0$, то $y' > 0$ – функція зростає; коли $x < 0$, то $y' < 0$ – функція спадає.

б) Похідна цієї функції $y' = 1/(x^2 + 1)$ додатна при всіх $x \in (-\infty; +\infty)$. Отже, функція $y = arctg\, x$ всюди зростає. ■

Приклад 2. З'ясуємо, як залежить дохід підприємства D від ціни p на його продукцію при різних значеннях еластичності η попиту Q.

□ Дохід D визначається як добуток вартості кожного виробу p на кількість вироблених і проданих виробів Q: $D = p \cdot Q$. Знайдемо маргінальний дохід, врахувавши, що попит Q є функцією від p:

$$\frac{dD}{dp} = Q + p \cdot \frac{dQ}{dp} = Q\left(1 + \frac{p}{Q} \cdot \frac{dQ}{dp}\right) = Q(1 + \eta).$$

Звідси при $\eta < -1$ маємо, що $\eta + 1 < 0$ і $dD/dp < 0$. Тобто, дохід спадає при зростанні ціни p, коли попит еластичний.

Якщо ж $-1 < \eta < 0$, то $\eta + 1 > 0$ і $dD/dp > 0$. Тобто, функція доходу зростає зі зростанням ціни p, коли попит не еластичний. ■

Приклад 3. Залежність фінансових зборів K від обсягу продукції Q виражається формулою $K(Q) = 0{,}05x^2 - 6x + 100$. При яких значеннях обсягу Q фінансові збори зростають?

□ Похідна $K'(Q) = 0{,}1x - 6 > 0$. Звідси $Q > 60$. Це означає, що коли обсяг продукції перевищує 60 грош. од., фінансові збори зростають. ■

2.2.2 Максимум і мінімум функції. Необхідні умови екстремуму

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = x_0$, тобто, x_0 – внутрішня точка області визначення $D(f)$.

Точка x_0 називається ***точкою мінімуму*** (відповідно ***точкою максимуму***), якщо для всіх $x \neq x_0$ з деякого околу цієї точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$ (відповідно $f(x_0) > f(x)$). Точки обох типів – мінімуму $x_{\min}$ та максимуму $x_{\max}$ – називають ***точками екстремуму***, а значення функції $y = f(x)$ в точках екстремуму – ***екстремальними значеннями*** (***екстремумами***) ***функції*** відповідного типу:

$$y_{\min} = f(x_{\min}); \quad y_{\max} = f(x_{\max}).$$

Зауваження 1. Розглядаємо лише точки внутрішнього локального (відносно всіх близьких сусідніх точок) строгого екстремуму.

Зауваження 2. Розрізняють точки ***гладкого екстремуму*** (рис. 66), в околі яких функція неперервно диференційована (графік гладкий) і похідна $f'(x) = 0$ (дотична паралельна осі Ox), і точки ***гострого екстремуму*** (рис. 67), в яких функція недиференційована (графік зазнає зламу) – похідна $f'(x)$ має розрив (нескінченна чи взагалі не існує).

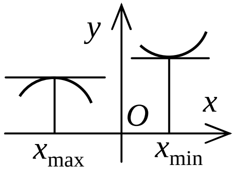


Рисунок 66

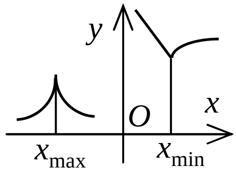


Рисунок 67

Зауваження 3. В економічних дисциплінах екстремум функції називають її ***оптимумом***, а процес його знаходження – ***оптимізацією***. Будемо розглядати оптимізацію як процес знаходження екстремуму економічних функцій, тобто вибір найкращого варіанта з множини можливих.

Теорема 1 (теорема Ферма – необхідна умова гладкого екстремуму). *Якщо диференційована функція* $f(x)$ *має в точці* x_0 *екстремум, то її похідна у цій точці дорівнює нулю* $f'(x_0)=0$.

(Доведення спирається на теорему Ролля).

Приклад. Функції $y=x^2$ і $y=x^3$ всюди диференційовані. При $x=0$ вони мають рівну нулю похідну $y'=0$. У цій точці функція $y=x^2$ досягає мінімуму, а функція $y=x^3$ екстремуму не має.

У цьому прикладі досліджено неперервно диференційовані функції. Розглянемо приклади функцій, що мають розриви похідної.

а) Функція $y=|x|$ – неперервна, але у точці $x=0$ не має похідної. З графіка (рис. 68) видно, що у точці $x=0$ функція має мінімум $y_{\min}=y(0)=0$.

б) Функція $y=\left(1-x^{2/3}\right)^{3/2}$ не має похідної у точці $x=0$: $y'\to\infty$, коли $x\to 0$ (перевірте самостійно). З графіка (рис. 69) видно, що у точці $x=0$ функція має максимум $y_{\max}=y(0)=1$.

в) Функція $y=x^{1/3}$ не має похідної у точці $x=0$: $y'\to\infty$, коли $x\to 0$. У цій точці функція екстремуму не має (рис. 70).

Таким чином, узагальненням попередньої теореми про гладкий екстремум є

Теорема 2 (необхідна умова екстремуму). *Якщо неперервна функція* $f(x)$ *має в точці* x_0 *екстремум, то її похідна у цій точці або існує і дорівнює нулю* $f'(x_0)=0$, *або не існує*.

Якщо функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і в цій точці перша похідна або існує і дорівнює нулю, або не існує, то точка x_0 називається ***критичною точкою першої похідної***.

Критична точка, в якій перша похідна дорівнює нулю, називається ***стаціонарною точкою*** функції.

Зауваження 4. Стаціонарні точки – це точки, що «підозрілі» на гладкий екстремум. Критичні точки, в яких перша похідна має розрив, – це точки, що «підозрілі» на гострий екстремум.

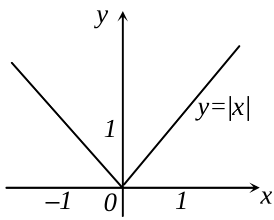


Рисунок 68

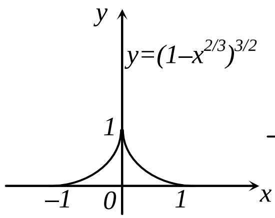


Рисунок 69

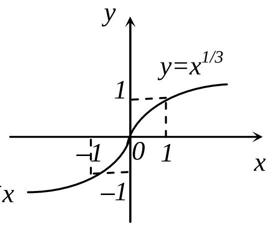


Рисунок 70

2.2.3 Достатні умови екстремуму функції

Дослідження функції у критичних точках спирається на достатні умови екстремуму.

Теорема 1 (достатня умова екстремуму за першою похідною). *Нехай* x_0 *– критична точка похідної функції* $f(x)$, *яка диференційована в деякому околі цієї точки* x_0, *крім, можливо, самої точки* x_0. *Якщо при переході зліва направо через цю точку*:

1) *похідна* $f'(x)$ *змінює знак з плюса на мінус, то при* $x=x_0$ *функція має максимум*;

2) *похідна* $f'(x)$ *змінює знак з мінуса на плюс, то при* $x=x_0$ *функція має мінімум*;

3) *похідна* $f'(x)$ *не змінює знака, то при* $x = x_0$ *функція не має екстремуму.*

□ Нехай $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус; тобто для всіх x достатньо близьких до точки x_0, маємо: $f'(x) > 0$, коли $x < x_0$, $f'(x) < 0$, коли $x > x_0$.

За теоремою Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, де $c \in (x_0; x)$.

Якщо $x < x_0$, тоді $c < x_0$, $f'(c) > 0$, $f'(c)(x - x_0) < 0$ і отже, $f(x) - f(x_0) < 0$ або $f(x) < f(x_0)$.

Якщо $x > x_0$, тоді $c > x_0$, $f'(c) < 0$, $f'(c)(x - x_0) < 0$ і отже, $f(x) - f(x_0) < 0$ або $f(x) < f(x_0)$.

Таким чином, для всіх значень x, досить близьких x_0, значення функції менше, ніж значення функції у точці x_0. Це означає, що в точці x_0 функція $f(x)$ має максимум.

Аналогічно доводяться інші два випадки. ■

Правило дослідження функції $f(x)$ на монотонність і екстремум:

1) *Знайти область визначення функції* $D(f)$.

2) *Продиференціювати функцію* $y = f(x)$.

3) *Знайти критичні точки першої похідної*:

а) *Стаціонарні точки. Для цього розв'язати рівняння* $f'(x) = 0$ *і з одержаних розв'язків вибрати ті, що є внутрішніми точками області визначення* $D(f)$ *функції.*

б) *Точки розриву похідної* $f'(x)$. *Для цього знайти точки, в яких похідна не існує, і з них вибрати ті, що є внутрішніми точками області визначення* $D(f)$ *функції.*

4) *На координатній прямій* Ox *відмітити (штриховкою) область визначення* $D(f)$ *функції, вказавши її межові точки, і нанести критичні точки першої похідної. У результаті область визначення буде розбита на інтервали між сусідніми точками.*

5) *На кожному інтервалі довільно вибрати одну пробну внутрішню точку* x *і визначити знак похідної* $f'(x)$ *у цій точці, а значить, і на даному інтервалі*.

6) *Виходячи зі знака похідної* $f'(x)$, *зробити висновок про поведінку функції на кожному інтервалі*:

якщо «+», то $f(x)$ *зростає; якщо «-», то* $f(x)$ *спадає.*

7) *Проаналізувати зміну знака похідної* $f'(x)$ *при переході через кожну критичну точку і зробити висновок про наявність і характер екстремуму*:

якщо «+,-», то $f(x)$ *має максимум; якщо «-,+», то* $f(x)$ *має мінімум; якщо «+,+» або «-,-», то* $f(x)$ *екстремуму не має.*

8) *Обчислити екстремуми функції* $f(x)$ *у знайдених точках екстремуму, якщо такі існують*:

$$y_{\min} = f(x_{\min}); \quad y_{\max} = f(x_{\max}).$$

Приклад 1. Дослідити функцію $y = \sqrt[3]{x^2} \big/ (x-4)$ на монотонність і екстремум.

□ Область визначення функції:

$$D(y): \; x - 4 \neq 0; \; x \neq 4; \; x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty).$$

Похідна цієї функції

$$y' = \frac{(2/3) \cdot x^{-1/3}(x-4) - \sqrt[3]{x^2}}{(x-4)^2} = -\frac{x+8}{3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2}.$$

Критичні точки: а) стаціонарні точки:

$$y' = 0; \;\; -\frac{x+8}{3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2} = 0; \;\; x + 8 = 0; \; x = -8 \in D(y);$$

б) точки розриву y': $3\sqrt[3]{x}\,(x-4)^2 = 0$;

$$\sqrt[3]{x} = 0 \text{ або } \sqrt[3]{x}\,(x-4)^2 = 0; \;\; x = 0 \in D(y); \;\; x = 4 \notin D(y).$$

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 71). На кожному інтервалі обираємо по одному пробному значеню аргументу $x_1 = -9$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 5$, і визначаємо в них знак похідної:

$$y'(-9)=-\frac{-1}{3\sqrt[3]{-9}\cdot(-13)^2}<0;\quad y'(-1)=-\frac{7}{3\sqrt[3]{-1}\cdot(-5)^2}>0;$$

$$y'(1)=-\frac{9}{3\sqrt[3]{1}\cdot(-3)^2}<0;\quad y'(5)=-\frac{13}{3\sqrt[3]{5}\cdot 1^2}<0.$$

Функція зростає при $x\in(-8;0)$; функція спадає при $x\in(-\infty;-8)\cup(0;\,4)\cup(4;\,+\infty)$.

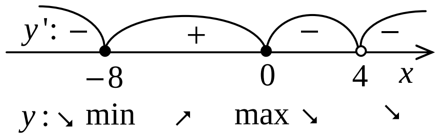


Рисунок 71

Точка мінімуму $x_{\min}=-8$; точка максимуму $x_{\max}=0$. Відповідні екстремальні значення функції

$$y_{\min}=y(-8)=-1/3;$$

$$y_{\max}=y(0)=0.\ \blacksquare$$

<u>Теорема 2 (достатня умова гладкого екстремуму за другою похідною)</u>. *Нехай* x_0 *– стаціонарна точка функції* $f(x)$, *яка двічі диференційована в деякому околі цієї точки* x_0. *Якщо друга похідна* $f''(x)$ *у цій точці* x_0:

1) *від'ємна, то при* $x=x_0$ *функція має максимум*;

2) *додатна, то при* $x=x_0$ *функція має мінімум*;

3) *дорівнює нулю, то питання про наявність і характер екстремуму залишається відкритим і потрібні додаткові дослідження*. (Наприклад, з використанням похідних більш високого порядку).

<u>Приклад 2</u>. Дослідити функцію $y=x\ln^2 x$ на екстремум.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ \ x>0;\ \ x\in(0;+\infty).$$

Похідна цієї функції $y'=\ln^2 x+2\ln x$.

Критичні точки: а) стаціонарні точки:

$$y'=0;\ \ \ln^2 x+2\ln x=0;\ \ \ln x\cdot(\ln x+2)=0;$$

$\ln x=0$ або $\ln x+2=0$; $x=1\in D(y)$; $x=e^{-2}\in D(y)$;

б) точки розриву y': немає.

Усі критичні точки є стаціонарними, де можливий гладкий екстремум. Застосовуємо другу похідну:

$$y''=2\ln x\cdot(1/x)+2\cdot(1/x)=2(\ln x+1)/x;$$

$$y''(1)=2(\ln 1+1)/1=2>0 \;\Rightarrow\; x=1-\min;$$

$$y''\left(e^{-2}\right)=2\left(\ln e^{-2}+1\right)/e^{-2}=-2e^{2}<0 \;\Rightarrow\; x=e^{-2}-\max.$$

Відповідні екстремальні значення функції

$$y_{\min}=y(1)=1\cdot\ln^2 1=0;\; y_{\max}=y\left(e^{-2}\right)=e^{-2}\cdot\ln^2 e^{-2}=4e^{-2}. \blacksquare$$

2.2.4 Найменше та найбільше значення функції на відрізку

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді за відповідною властивістю на цьому відрізку вона досягає найбільшого і найменшого значень, які відповідно називають ***глобальним*** (***абсолютним***) ***максимумом*** і ***мінімумом*** даної функції $f(x)$ на вказаному відрізку $[a;b]$. Ці значення функція може приймати на кінцях відрізка або у внутрішніх точках, що є точками її локального екстремуму. Звідси випливає

<u>Правило знаходження найбільшого і найменшого значень</u> неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$:

1) *знайти всі критичні точки першої похідної* $f'(x)$, *що лежать усередині відрізка* $[a;b]$;

2) *обчислити значення функції* $f(x)$ *в знайдених критичних точках і на кінцях відрізка*;

3) *з усіх отриманих значень функції вибрати найбільше і найменше.*

<u>Приклад</u>. Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^3/3-4x^2$ на відрізку $[-3;3]$..

□ Похідна цієї функції $y'=x^2-8x$.

Критичні точки: а) стаціонарні точки:

$$y'=0;\quad x^2-8x=0;\quad x(x-8)=0;$$

$$x = 0 \in [-3;3] \text{ або } x-8=0; \;\; x = 8 \notin [-3;3];$$

б) точки розриву y': немає.

Обчислимо значення функції: $y(0) = 0$;

$$y(-3) = (-3)^3/3 - 4\cdot(-3)^2 = -45; \;\; y(3) = 3^3/3 - 4\cdot 3^2 = -27.$$

Таким чином, найбільше значення $\max\limits_{x\in[-3;3]} y = y(0) = 0$ і найменше значення $\min\limits_{x\in[-3;3]} y = y(-3) = -45$. ■

2.2.5 Застосування теорії екстремуму до розв'язування прикладних задач

Застосовуючи поняття екстремуму, розв'язується багато задач геометричного, фізичного, економічного та іншого прикладного змісту. Розглядається функція, що служить моделлю відповідного процесу на деякому інтервалі (що може бути необмеженим) зміни аргументу, а потім знаходиться найбільше чи найменше значення цієї функції в даному інтервалі. При цьому зі змісту задачі наявність і характер екстремуму часто відомі, що полегшує її розв'язування.

Приклад 1. Нехай у результаті незалежно проведених експериментів дістали n різних значень величини x: x_1, x_2, ..., x_n. Найти таке значення цієї величини x, при якому сума квадратів похибок найменша.

□ Сума квадратів похибок є функцією

$$f(x) = (x-x_1)^2 + (x-x_2)^2 + \ldots + (x-x_n)^2,$$

яка всюди визначена. Шукане значення величини x знаходиться з умови найменшого значення цієї функції. Маємо:

$$f'(x) = 2(x-x_1) + 2(x-x_2) + \ldots + 2(x-x_n); \quad f''(x) = 2n.$$

З рівняння $f'(x) = 0$ знаходимо єдину критичну точку $x = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$. Оскільки в цій точці $f''(x) = 2n > 0$, то в ній функція досягає найменшого значення.

Отже, шуканим значенням величини x є середнє арифметичне її наближених значень. ■

Максимізація прибутку. Поняття «прибуток» характеризує ефективність діяльності підприємства. Кожного разу перед підприємством виникає питання, як організувати діяльність, щоб прибуток був максимальним.

Нехай Q – кількість товару, що реалізується, $R = R(Q)$ – функції доходу, $C = C(Q)$ – функції витрат на виробництво товару. Вигляд цих функцій залежить від засобів, форм організації виробництва і т.п.

Прибуток P від реалізації виробленого товару

$$P = P(Q) = R(Q) - C(Q).$$

У мікроекономіці відомо твердження: для максимізації прибутку необхідна рівність граничного доходу і граничних витрат: $\boxed{R'(Q) = C'(Q)}$. Дійсно, з необхідної умови екстремуму випливає, що $P'(Q) = 0$, тобто $R'(Q) - C'(Q) = 0$.Звідси $R'(Q) = C'(Q)$.

За теоремою про достатні умови гладкого и екстремуму за другою похідною прибуток буде максимальним, якщо

$$P'(Q) = 0 \quad \text{і} \quad P''(Q) < 0.$$

З умови $P''(Q) < 0$ випливає, що $R''(Q) - C''(Q) < 0$, тобто $R''(Q) < C''(Q)$. Поділимо останню нерівність почленно на рівність $R'\left(Q\right) = C'\left(Q\right)$ і одержимо

$$\frac{R''(Q)}{R'(Q)} < \frac{C''(Q)}{C'(Q)} \quad \text{або} \quad \frac{d}{dQ}\left(\ln R'(Q)\right) < \frac{d}{dQ}\left(\ln C'(Q)\right),$$

тобто $\boxed{T_Q(R') < T_Q(C')}$. Це означає що підприємство отримує максимальний прибуток, коли темп зростання граничного доходу менший, ніж темп зростання граничних витрат.

Візьмемо для залежності ціни p одиниці продукції від об’єму її реалізації Q лінійне наближення: $p = aQ + b$, де $a < 0$ і $b > 0$. Тоді сумарний дохід $R = pQ$ буде визначатися рівністю $R = aQ^2 + bQ$, при цьому $Q > 0$ і $R > 0$.

Витрати підприємства на випуск деякої продукції можна подати як суму постійної і змінної складових. Якщо вважати, що змінна складова витрат пропорційна кількості продукції, то можна покласти $C = C_f + c_v Q$, де C_f – постійні витрати; c_v – змінні витрати на одиницю продукції, $C_f > 0$ і $c_v > 0$.

Тоді функція прибутку набирає вигляду

$$P = aQ^2 + bQ - C_f - c_v Q = aQ^2 + (b - c_v)Q - C_f .$$

Знайдемо критичні точки функції прибутку:

$$P' = 2aQ + (b - c_v) = 0; \quad Q = -(b - c_v)/(2a)$$

– єдина стаціонарна точка. Оскільки $Q > 0$ і $a < 0$, то звідси маємо $c_v < b$.

Друга похідна $P'' = 2a < 0$, тому за достатньою умовою екстремуму функція прибутку при $Q_{\max} = -(b - c_v)/(2a)$ має максимум при обмежені $c_v < b$. При цьому максимальний прибуток дорівнює

$$P_{\max} = P(Q_{\max}) = a\left(-\frac{b - c_v}{2a}\right)^2 + (b - c_v)\left(-\frac{b - c_v}{2a}\right) - C_f =$$

$$= -(b - c_v)^2/(4a) - C_f$$

за умови, що $-(b - c_v)^2/(4a) > C_f$ (оскільки $P > 0$).

<u>Приклад 2</u>. Сумарні витрати на виробництво Q одиниць продукції становлять $C = C(Q) = 0{,}02Q^2 + 20Q + 480$, а залежність між ціною p і кількістю Q продукції, яку можна продати за цією ціною, задається формулою: $p = p(Q) = 34 - 0{,}07Q$. При якому об’ємі Q прибуток підприємства буде максимальний і який розмір цього прибутку?

(Розв’язати самостійно).

<u>Оптимізація оподаткування підприємств</u>.

<u>Задача</u>. Нехай t – податок на одиницю реалізованої продукції (ставка оподаткування). Тоді загальний податок T на всю продукцію об’ємом Q становить: $T = tQ$. При цьому функція прибутку має вигляд

$$P(Q) = R(Q) - C(Q) - T(Q) = R(Q) - C(Q) - tQ,$$

де функції доходу $R = R(Q)$ і витрат $C = C(Q)$ відомі.

Визначимо розмір ставки оподаткування t, за якого величина сумарного податку T з усієї продукції буде найбільшою.

Спочатку при фіксованому значенні t розв'язуємо задачу максимізації прибутку як функції від Q: знаходимо критичні точки похідної функції прибутку як корені рівняння

$$P'(Q) = R'(Q) - C'(Q) - t = 0$$

і перевіряємо, яка з отриманих точок задовольняє умові

$$P''(Q) = R''(Q) - C''(Q) < 0.$$

Потім знайдену точку, яку позначимо $Q_{opt} = Q_{opt}(t)$, підставимо в формулу $T = tQ$ загального податку і для одержаної функції розв'язуємо задачу максимізації сумарного податку $T = t\,Q_{opt}(t)$ як функції від t: знаходимо критичні точки похідної функції сумарного податку як корені рівняння

$$T' = Q_{opt}(t) + t\,Q_{opt}^{/}(t) = 0$$

і перевіряємо, яка з отриманих точок задовольняє умові

$$T'' = Q_{opt}^{/}(t) + Q_{opt}^{/}(t) + tQ_{opt}^{//}(t) = 2Q_{opt}^{/}(t) + tQ_{opt}^{//}(t) < 0.$$

Позначимо знайдену точку як t_0. Обчислимо

$$Q_0 = Q_{opt}(t_0); \quad T_{\max} = t_0\,Q_{opt}(t_0); \quad P_{\max} = P(Q_0);$$

Отже, при значенні $Q_0 = Q_{opt}(t_0)$ величина максимального прибутку складає $P_{\max} = P(Q_0)$, а оптимальний (з точки зору податкової служби) збір податків становить $T_{\max} = t_0\,Q_{opt}(t_0)$.

Приклад 3. Фірма виготовляє товар в об'ємі Q за ціною p грош. од. за одиницю товару. Функція попиту має вигляд $Q = 22 - p$, а функція витрат $C = -0{,}5Q^2 + 10Q + 4$, $0 < Q < 15$. Кожна одиниця продукції оподатковується за ставкою t. При якому значенні ставки оподаткування t величина сумарного податку $T = t\,Q$ з усієї продукції буде найбільшою?

□ Функція доходу від продажу товару об′ємом Q за ціною p визначається рівністю $R = pQ$. З умови прикладу маємо $p = 22 - Q$. Тоді $R = 22Q - Q^2$. Функція сумарного прибутку $P(Q)$ має вигляд

$$P(Q) = R(Q) - C(Q) - tQ = 22Q - Q^2 - (-0{,}5Q^2 + 10Q + 4) -$$

$$- tQ = -0{,}5Q^2 + (12 - t)Q - 4 .$$

При фіксованому значенні t знайдемо критичні точки похідної функції прибутку за змінною Q:

$$P'(Q) = -Q + (12 - t) = 0 ; \;\; Q = 12 - t .$$

Оскільки друга похідна $P''(Q) = -1 < 0$, то в знайденій точці $Q_{opt} = 12 - t$ прибуток досягає максимуму. Підставимо це значення об′єму продукції у формулу сумарного податку:

$$T = t(12 - t) = 12t - t^2 .$$

Розв’язуємо задачу максимізації сумарного податку T як функції від t: знаходимо критичні точки похідної функції $T = 12t - t^2$ сумарного податку як корені рівняння

$$T' = 12 - 2t = 0 ; \quad t = 6 .$$

Оскільки $T'' = -2 < 0$, то при $t = 6$ функція сумарного податку має максимум. Тоді $Q_{opt} = 12 - 6 = 6$. При цьому максимальна величина прибутку становить

$$P_{\max} = -0{,}5 \cdot 6^2 + (12 - 6) \cdot 6 - 4 = 14 ,$$

а оптимальний (с точки зору податкової служби) збір податку $T_{opt} = 6 \cdot 6 = 36$. Обчислимо оптимальну ціну:

$$p_{opt} = 22 - Q_{opt} = 22 - 6 = 16 .$$

Порівняємо ці цифри з результатами максимізації прибутку за відсутності оподаткування. При $t = 0$ розв’язування задачі на максимум прибутку дає: $Q_{opt} = 12$, $P_{\max} = 68$, $p_{opt} = 10$. Отже, зменшення ставки оподаткування стимулює ріст випуску продукції, сприяє збільшенню прибутку від її реалізації та зниженню ціни. ■

Приклад 4. Для деякої фірми залежність ціни p грош. од. одиниці виготовленого і проданого товару від його об'єму Q задається співвідношенням $p = 7 - (2/3)Q^{1/2}$, а функція витрат C має вигляд $C = -(2/9)Q^{3/2} + Q + 1$, $0 < Q < 100$. Кожна одиниця продукції оподатковується за ставкою t. При якому значенні t_{opt} ставки оподаткування t величина сумарного податку $T = tQ$ з усієї продукції буде найбільшою?

(Розв'язати самостійно. $t_{opt} = 2$).

2.2.6 Опуклість і вгнутість графіка функції. Точки перегину

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $(a;b)$ і в точці $x_0 \in (a;b)$ має скінченну похідну. Тоді до графіка даної функції у точці $M_0(x_0\,;\,f(x_0))$ можна провести дотичну.

Крива (графік функції) називається ***опуклою*** в точці x_0, якщо в деякому околі цієї точки вона розташована нижче дотичної, проведеної в точці x_0 (рис. 72). Якщо крива розташована вище дотичної, то вона називається ***угнутою*** (рис. 73).

Точка $M_0(x_0\,;\,f(x_0))$ називається ***точкою перегину***, якщо у досить малому її околі точки кривої з абсцисами $x < x_0$ лежать з одного боку від дотичної, а точки з абсцисами $x > x_0$ – з іншого (рис. 74). Тобто, у точці M_0 крива переходить а одного боку дотичної до іншого.

Крива (графік функції) називається ***опуклою на інтервалі*** $(a;b)$, якщо вона опукла в кожній його точці. Тобто, на цьому інтервалі крива лежить нижче кожної своєї дотичної.

Аналогічно, на ***інтервалі вгнутості*** крива лежить вище кожної своєї дотичної.

Точка перегину – це точка кривої, в якій сполучається ділянка опуклості з ділянкою вгнутості.

Теорема 1 (достатні умови опуклості та вгнутості). *Нехай на інтервалі* $(a;b)$ *задана двічі диференційована функція* $f(x)$. *Якщо для всіх* $x \in (a;b)$ *друга похідна* $f''(x)$:

1) *від'ємна, то графік функції опуклий*;

2) *додатна, то графік функції вгнутий*;

3) *дорівнює нулю, то графік функції – пряма лінія*.

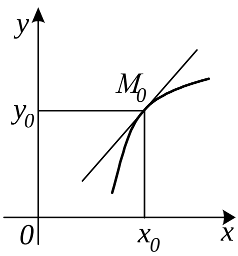


Рисунок 72

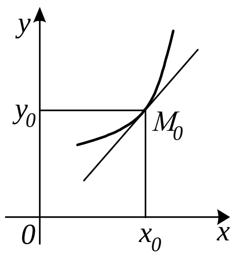


Рисунок 73

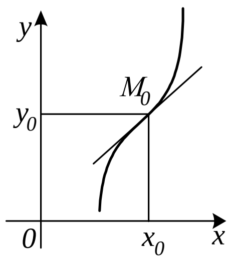


Рисунок 74

Теорема 2 (необхідні умови точки перегину). *Якщо* $M_0(x_0;y_0)$ *– точка перегину графіка функції* $f(x)$, *то друга похідна* $f''(x)$ *в точці* x_0 *або існує і дорівнює нулю* $f''(x_0)=0$, *або не існує*.

Якщо функція $f(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0 і в цій точці друга похідна $f''(x)$ або існує і дорівнює нулю, або не існує, то точка x_0 називається ***критичною точкою другої похідної***.

Зауваження 1. Критичні точки другої похідної – це точки, що «підозрілі» на перегин.

Теорема 3 (достатня умова точки перегину). *Нехай* x_0 *– критична точка другої похідної функції* $f(x)$, *яка двічі диференційована в деякому околі цієї точки* x_0, *крім, можливо, самої точки* x_0. *Якщо при переході через цю точку*:

1) *друга похідна* $f''(x)$ *змінює знак, то при* $x=x_0$ *функція має перегин*;

2) *знак другої похідної* $f'(x)$ *не змінюється, то при* $x = x_0$ *функція перегину не має.*

Зауваження 2. Правило дослідження функції на опуклість, угнутість і перегин аналогічне правилу дослідження функції на монотонність і екстремум. Треба тільки замість знака першої похідної аналізувати знак другої похідної.

Приклад 1. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину графіка функції $y = \ln(x^2 + 9)$.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ \ x^2 + 9 > 0;\ \ x \in (-\infty; +\infty).$$

Знаходимо другу похідну:

$$y' = \frac{2x}{x^2+9}; \quad y'' = 2 \cdot \frac{x^2 + 9 - 2x \cdot x}{(x^2+9)^2} = \frac{2(9 - x^2)}{(x^2+9)^2}.$$

Критичні точки другої похідної:

а) $y'' = 0;\ \ \dfrac{2(9-x^2)}{(x^2+9)^2} = 0;\ 9 - x^2 = 0; x = \pm 3 \in D(y);$

б) точки розриву y'': $\ (x^2+9)^2 = 0;\ \ x \in \varnothing$.

Область визначення функції розбивається на інтервали (рис. 75). На кожному інтервалі обираємо по одному пробному значенню аргументу $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, і визначаємо в них знак другої похідної:

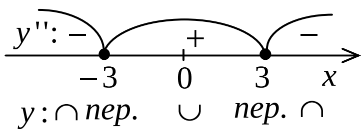


Рисунок 75

$$y''(-4) = \frac{2(9 - (-4)^2)}{((-4)^2 + 9)^2} = \frac{2 \cdot (-7)}{25} < 0;$$

$$y''(0) = \frac{2(9 - 0^2)}{(0^2+9)^2} = \frac{2}{9} > 0;$$

$$y''(4) = \frac{2(9 - 4^2)}{(4^2+9)^2} = \frac{2 \cdot (-7)}{25} < 0.$$

Функція опукла при $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; функція вгнута при $x \in (-3; 3)$. Перегин при $x_1 = -3$ і $x_2 = 3$. Тоді

$$y_1 = \ln((-3)^2 + 9) = \ln 18; \quad y_2 = \ln(3^2 + 9) = \ln 18.$$

Отже, $M_1(-3; \ln 18)$ і $M_2(3; \ln 18)$ – точки перегину. ■

Приклад 2. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину графіка функції $y = 2arctg\, x + \ln x$.

(Розв'язати самостійно).

2.2.7 Асимптоти графіка функції

Нехай $y = f(x)$ – функція, графік якої має нескінченну гілку, тобто він має точки, що лежать як завгодно далеко від початку координат.

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називається пряма, до якої необмежено наближається гілка графіка, що йде в нескінченність. Тобто, відстань від змінної точки $M(x; f(x))$ до цієї прямої прямує до нуля, якщо вказана точка рухається вздовж вітки графіка до нескінченності.

Зауваження 1. Крива може перетинати свою асимптоту, причому неоднозначно.

Асимптоти бувають двох видів: ***вертикальні*** й ***похилі*** (зокрема, ***горизонтальні***) (рис. 76).

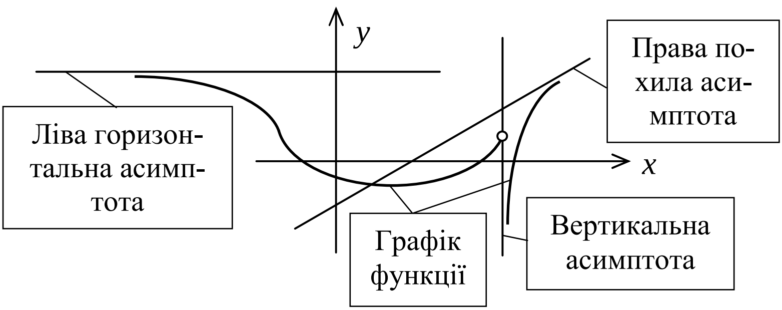


Рисунок 76

а) Вертикальна асимптота має рівняння $x = a$, де a – точка, в якій хоча б одна з односторонніх границь $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ або

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ нескінченна.

Зауваження 2. Точки, що «підозрілі» на вертикальні асимптоти, – це скінченні межові точки області визначення $D(f)$ та точки розриву функції $y = f(x)$.

Зауваження 3. Графік функції може мати довільну кількість вертикальних асимптот.

Приклад 1. Знайти вертикальні асимптоти графіка функції $y = \ln(x+3) \big/ (x^2 - 16)$.

□ Область визначення функції:

$$D(y):\ \begin{cases} x+3>0 \\ x^2-16 \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x>-3 \\ x \neq \pm 4; \end{cases} \quad x \in (-3;4) \cup (4;+\infty).$$

$x_1 = -3$ і $x_2 = 4$ – точки, що «підозрілі» на вертикальні асимптоти.

$$\lim_{x \to -3+0} \Big(\ln(x+3) \big/ (x^2-16)\Big) = \big| -\infty/(-7) \big| = +\infty \ \Rightarrow \ x = -3$$

– вертикальна асимптота.

$$\lim_{x \to 4-0} \Big(\ln(x+3) \big/ (x^2-16)\Big) = \big| \ln 7/(-0) \big| = -\infty \text{ і}$$

$$\lim_{x \to 4+0} \Big(\ln(x+3) \big/ (x^2-16)\Big) = \big| \ln 7/(+0) \big| = +\infty \ \Rightarrow \ x = 4$$

– вертикальна асимптота. ■

б) Похила (зокрема, горизонтальна) асимптота. Нехай функція $y = f(x)$ має при $x \to +\infty$ праву похилу асимптоту, рівняння якої $y = kx + b$ (рис. 77). Визначимо числа k і b.

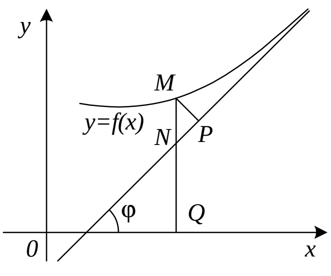


Рисунок 77

Нехай $M\big(x; f(x)\big)$ – змінна точка, що належить графіку функції, і $N\big(x; y\big)$ – відповідна точка, що належить асимптоті. Відстань від точки M до асимптоти дорівнює довжині перпендикуляра MP. За умовою $\lim\limits_{x\to+\infty} MP=0$. Якщо φ – кут нахилу асимптоти до осі Ox, то з ΔNMP маємо $NM=MP/\cos\varphi$. Оскільки φ – стала величина і $\varphi\neq\pi/2$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} NM=0$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} MP=0$ одночасно.

Але $NM=|QM-QN|=|f(x)-y|=|f(x)-kx-b|$. Тоді $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$ або $\lim\limits_{x\to+\infty} x(f(x)/x-k-b/x)=0$.

Через те, що $x\to+\infty$, має виконуватись рівність

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)/x-k-b/x)=0.$$

Оскільки k і b – сталі величини, то $\lim\limits_{x\to+\infty}(b/x)=0$.

Тоді $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)/x-k)=0$ або $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)/x\right)$.

Після знаходження k, маємо $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$.

Отже, якщо пряма $y=kx+b$ є правою похилою асимптотою, то k і b знаходяться як границі

$$\boxed{k=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)/x\right)};\quad \boxed{b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)},$$

де спочатку обчислюється k, а потім b.

Навпаки, якщо існують указані границі для визначення k і b, то має місце рівність $\lim\limits_{x\to+\infty} MP=0$ і пряма $y=kx+b$ є похила асимптота. Якщо хоча б одна з двох границь для k і b не існує, то відповідної похилої асимптоти крива не має.

Зауваження 4. Права горизонтальна асимптота $(k=0)$ має рівняння $y=b$, де $b=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Зауваження 5. Аналогічно розглядається випадок лівої похилої (зокрема, горизонтальної) асимптоти, коли $x\to-\infty$.

Зауваження 6. Графік функції $y=f(x)$ може мати не більше двох похилих (зокрема, горизонтальних) асимптот. При цьому крива повинна мати відповідну нескінченну гілку при $x\to+\infty$ або

$x \to -\infty$. Асимптоти можуть бути різними при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$.

Приклад 2. Знайти похилі асимптоти графіка функції $y = \ln(e^{2x} + e^{-3})$.

□ Область визначення функції:

$$D(y)\colon e^{3x} + e^{-3} > 0;\ x \in (-\infty; +\infty).$$

Оскільки крива має ліву при $x \to -\infty$ і праву при $x \to +\infty$ нескінченні гілки, то можуть існувати обидві – ліва і права – похилі асимптоти.

Шукаємо ліву похилу асимптоту:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(e^{3x} + e^{-3})}{x} = \left| \frac{-3}{-\infty} \right| = 0;$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(e^{3x} + e^{-3}\right) = -3.$$

Отже, пряма $y = -3$ – ліва горизонтальна асимптота.

Шукаємо праву похилу асимптоту:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^{3x} + e^{-3})}{x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\ln(e^{3x} + e^{-3})\right)'}{x'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x} \cdot 3}{e^{3x} + e^{-3}} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= 3 \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^{3x})'}{(e^{3x} + e^{-3})'} = 3 \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x} \cdot 3}{e^{3x} \cdot 3} = 3;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln(e^{3x} + e^{-3}) - 3x\right) = |\, \infty - \infty \,| =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\ln(e^{3x} + e^{-3}) - \ln e^{3x}\right) = \ln \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x} + e^{-3}}{e^{3x}} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= \ln \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^{3x} + e^{-3})'}{(e^{3x})'} = \ln \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x} \cdot 3}{e^{3x} \cdot 3} = \ln 1 = 0.$$

Отже, пряма $y = 3x$ – права похила асимптота. ■

Приклад 3. Знайти асимптоти функції

$$y=(x^2-5x-1)/2x.$$

□ Область визначення функції:

$$D(y)\colon\ x\neq 0;\ \ x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty).$$

$x=0$ – точка, що «підозріла» на вертикальну асимптоту.

$$\lim_{x\to -0}\Big((x^2-5x-1)/2x\Big)=\Big|-1/(-0)\Big|=+\infty \ \text{ і}$$

$$\lim_{x\to +0}\Big((x^2-5x-1)/2x\Big)=\Big|-1/(+0)\Big|=-\infty \ \Rightarrow\ x=0$$

– вертикальна асимптота.

Шукаємо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-5x-1}{2x^2}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2x}-\frac{1}{2x^2}\right)=\frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\Big((x^2-5x-1)/2x-x/2\Big)=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(-5/2-1/2x)=-5/2\ \ \Rightarrow\ y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$$

– похила (ліва і права одночасно) асимптота. ■

Приклад 4. Знайти асимптоти функції $y=\sqrt{x^2-4}$.

(Розв’язати самостійно. Вертикальних асимптот немає. $y=-x$ і $y=x$ – ліва і права похилі асимптоти).

2.2.8 Загальна схема дослідження функції та побудови графіка

Нехай функція задана явно рівнянням $y=f(x)$. Повне дослідження цієї функції та побудову ескізу графіка можна здійснювати за наступною схемою.

1. *Попереднє дослідження.*

1.1. *Знаходження області визначення* $D(f)$ *функції.*

1.2. *Знаходження точок перетину графіка з осями координат.*

1.3. *Знаходження інтервалів знакосталості, де функція зберігає знак (додатна чи від’ємна).*

1.4. *Дослідження функції на парність і непарність.*

1.5. *Дослідження функції на періодичність.*

2. *Дослідження точок розриву функції та її поведінки на кінцях інтервалів області визначення. Знаходження області значень* $E(f)$ *функції. Знаходження асимптот.*

2.1. *Знаходження односторонніх границь функції в точках розриву та на скінченних кінцях інтервалів області визначення. Класифікація точок розриву. Знаходження вертикальних асимптот.*

2.2. *Дослідження поведінки функції «на нескінченності» (при* $x \to -\infty$ *і* $x \to +\infty$*). Знаходження області значень* $E(f)$ *функції. Знаходження похилих асимптот.*

3. *Дослідження функції за допомогою першої похідної.*

3.1. *Знаходження інтервалів зростання та спадання функції.*

3.2. *Знаходження точок екстремуму та відповідних екстремальних значень функції.*

4. *Дослідження функції за допомогою другої похідної.*

4.1. *Знаходження інтервалів опуклості та вгнутості функції.*

4.2. *Знаходження точок перегину.*

5. *Побудова графіка.*

5.1. *Побудова асимптот.*

5.2. *Побудова характерних точок, знайдених на попередніх етапах.*

5.3. *Виділення штриховкою вертикальних смуг (вище чи нижче осі* Ox *відповідно до знака функції), де лежать частини графіка.*

5.4. *При необхідності проведення додаткових обчислень значень функції в пробних точках з тих інтервалів, де потрібно уточнити розміщення графіка.*

5.5. *Побудова ескізу графіка.*

Зауваження. При дослідженні конкретної функції не обов'язково строго додержуватися зазначеної вище схеми. Можна навіть не з'ясовувати тих чи інших властивостей, якщо вони досить очевидні. Так, на періодичність треба досліджувати тригонометричні функції, а раціональні функції – не треба, оскільки відомо, що вони неперіодичні.

Приклад 1. Дослідити функцію $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$ і побудувати ескіз її графіка.

□ Область визначення функції $D(f): x \in R$.

Точки перетину графіка функції:

з віссю Oy: $y(0) = (6 \cdot 0 - 0)^{1/3} = 0$;

з віссю Ox: $y = 0$; $\left(6x^2 - x^3\right)^{1/3} = 0$; $6x^2 - x^3 = 0$;

$x^2(6 - x) = 0$; $x = 0$; $x = 6$; маємо дві точки $(0;0)$ і $(6;0)$.

Інтервали знакосталості, де функція додатна чи від'ємна (рис. 78): функція від'ємна при $x \in (6;+\infty)$; функція додатна при $x \in (-\infty;0) \cup (0;6)$.

$y(-x) \neq y(x)$; $y(-x) \neq -y(x)$ – функція не є парною і не є непарною.

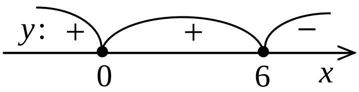


Рисунок 78

Функція неперіодична.

Точок розриву і скінченних кінців інтервалів області визначення функція не має, тому вертикальні асимптоти відсутні.

Досліджуємо поведінку функції при $x \to -\infty$ і $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} (6x^2 - x^3)^{1/3} = +\infty;$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} (6x^2 - x^3)^{1/3} = -\infty.$$

Область значень функції $E(f): y \in R$.

Похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(6x^2 - x^3\right)^{1/3}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} (6/x - 1)^{1/3} = -1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\left(6x^2 - x^3\right)^{1/3} + x \right) = \left| \infty - \infty \right| =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x^2 - x^3 + x^3}{\left(6x^2 - x^3\right)^{2/3} - x\left(6x^2 - x^3\right)^{1/3} + x^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| =$$

$$= 6 \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{(6/x - 1)^{2/3} - (6/x - 1)^{1/3} + 1} == 6 \cdot \frac{1}{3} = 2.$$

Отже, пряма $y = -x + 2$ є похила (ліва і права) асимптота.

Обчислимо похідну і знайдемо її критичні точки:

$$y' = \left(\sqrt[3]{6x^2 - x^3}\right)' = (4 - x)\Big/\sqrt[3]{x(6-x)^2}\ ;$$

стаціонарні точки: $y' = 0$; $(4-x)\Big/\sqrt[3]{x(6-x)^2} = 0$; $x = 4$; похідна не існує у точках: $\sqrt[3]{x(6-x)^2} = 0$; $x = 0$ і $x = 6$.

Інтервали монотонності та екстремуми (рис. 79): функція спадає при $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$; функція зростає при $x \in (0; 4)$; точка мінімуму $x_{\min} = 0$; точка максимуму $x_{\max} = 4$; відповідні екстремальні значення функції $y_{\min} = y(0) = 0$; $y_{\max} = y(4) = \sqrt[3]{6 \cdot 4^2 - 4^3} = 2\sqrt[3]{4}$.

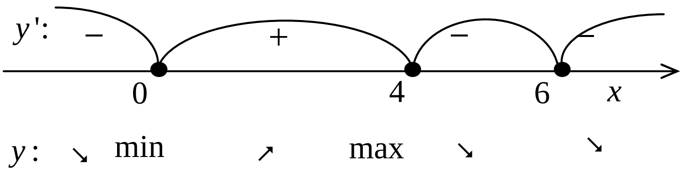


Рисунок 79

Обчислимо другу похідну і знайдемо її критичні точки:

$$y'' = -8\Big/\left(x^{4/3}(6-x)^{5/3}\right);$$

точки, де $y'' = 0$, відсутні; друга похідна не існує у точках: $x^{4/3}(6-x)^{5/3} = 0$; $x = 0$ і $x = 6$.

Інтервали опуклості й угнутості та точки перегину (рис. 80): функція опукла при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 6)$; функція вгнута при $x \in (6; +\infty)$; $x_{пер} = 6$; $y_{пер} = y(6) = \sqrt[3]{6 \cdot 6^2 - 6^3} = 0$. Отже, $(6; 0)$ – точка перегину.

Ескіз графіка функції побудовано на рисунку 81. ■

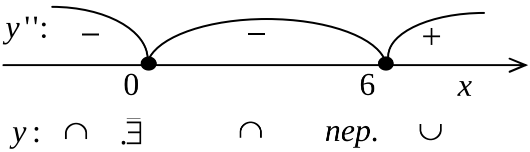


Рисунок 80

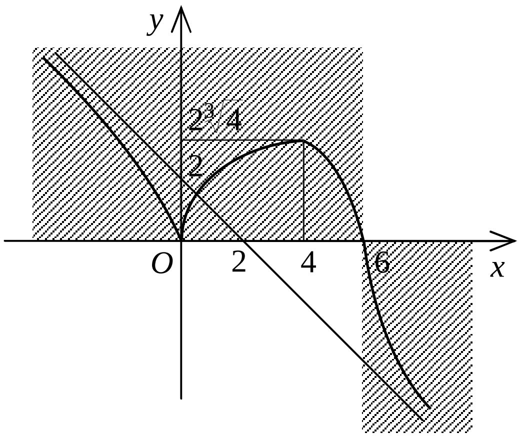


Рисунок 81

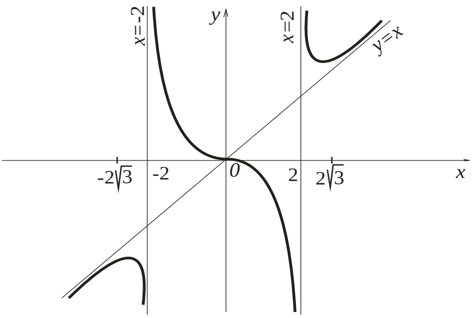


Рисунок 82

Приклад 2. Дослідити функцію і побудувати ескіз її графіка:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

(Розв'язати самостійно. Ескіз графіка подано на рисунку 82).

2.3 Вектори й операції над ними

2.3.1 Скалярні та векторні величини. Основні поняття

Три взаємно перпендикулярні координатні прямі Ox, Oy і Oz зі спільним початком O утворюють ***декартову прямокутну систему координат*** у просторі (рис. 83). Ox називається ***віссю абсцис***, Oy – ***віссю ординат***, а Oz – ***віссю аплікат***. Три взаємно перпендикулярні координатні площини Oxy, Oxz і Oyz ділять весь простір на вісім частин (***октантів***). Сукупність площин, які перпендикулярні координатним осям, утворює просторову ***координатну сітку***.

Положення довільної точки M однозначно визначається впорядкованою трійкою чисел $(x;y;z)$ – її ***координатами*** (x – ***абсциса***, y – ***ордината***, z – ***апліката***). Для знаходження цих координат через точку $M(x;y;z)$ проведемо три площини, які перпендикулярні координатним осям. Вони перетинають відповідні осі у точках $M_x(x;0;0)$, $M_y(0;y;0)$ і $M_z(0;0;z)$.

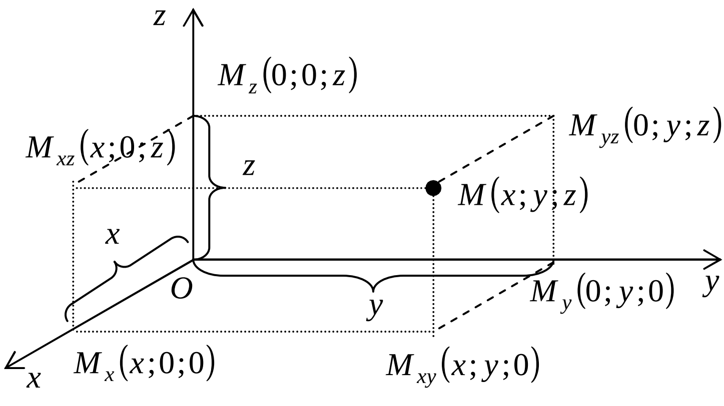


Рисунок 83

Величина, яка цілком характеризується своїм числовим значенням, називається ***скалярною величиною*** (***скаляром***).

Приклади скалярів: площа фігури, густина речовини, температура, ціна товару і т. п.

Величина, яка характеризується не тільки числовим значенням, а й напрямком, називається ***векторною величиною*** (***вектором***).

Приклади векторів: швидкість, сила і т. п.

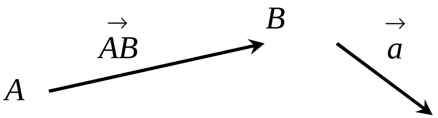


Рисунок 84

Вектор зображується напрямленим прямолінійним відрізком, в якому вказано його ***початок*** A і ***кінець*** B. Позначається $\vec{AB}$ або $\vec{a}$ (рис. 84).

Модулем (***абсолютною величиною, довжиною***) вектора називається довжина відрізка, який зображає цей вектор. Позначається $|\vec{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

Вектор, у якого початок і кінець збігаються, називається ***нульовим вектором*** і позначається $\vec{0}$. Його модуль дорівнює нулю, а напрям довільний (невизначений).

Вектор одиничної довжини називається ***одиничним вектором*** (***ортом***).

<u>Зауваження 1</u>. Надалі будемо розглядати тільки ***вільні вектори***, для яких вибір положення початку не має значення. Вільний вектор цілком характеризується модулем і напрямком.

Вектори, які лежать на паралельних прямих або на одній прямій, називаються ***колінеарними*** (***паралельними***). Позначається $\vec{a} \parallel \vec{b}$

<u>Зауваження 2</u>. Нульовий вектор колінеарний будь-якому вектору. Два вектори завжди компланарні.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються ***рівними***, якщо: 1) модулі векторів рівні $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; 2) вектори колінеарні $\vec{a} \parallel \vec{b}$ і напрямлені в один бік. Позначається $\vec{a} = \vec{b}$.

2.3.2 Лінійні операції над векторами

Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який визначається за правилом трикутника (рис. 85) або за правилом паралелограма (рис. 86).

Добутком вектора $\vec{a}$ ***на число*** λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, який задовольняє наступні умови: 1) $\boxed{|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|}$; 2) $\boxed{\lambda\vec{a}\parallel\vec{a}}$; 3) якщо $\lambda>0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в один бік $\lambda\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$; якщо $\lambda<0$, то вектори $\lambda\vec{a}$ і $\vec{a}$ напрямлені в протилежні боки $\lambda\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$; якщо $\lambda=0$, то $0\vec{a}=\vec{0}$.

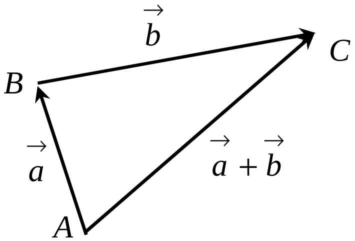


Рисунок 85

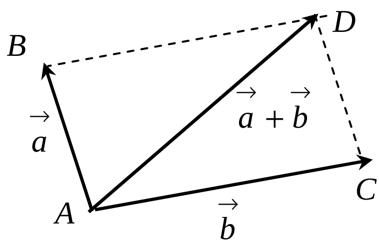


Рисунок 86

Вектор $(-1)\vec{a}$ називається ***протилежним*** вектору $\vec{a}$ і позначається $-\vec{a}$. При цьому $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$. Різниця $\vec{a}-\vec{b}$ обчислюється за формулою

$$\boxed{\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})}.$$

Розглянуті операції називаються лінійними, оскільки мають відповідні властивості (аналогічні властивостям операцій над дійсними числами):

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\ ;\quad \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\ ;$$

$$\lambda\vec{a}=\vec{a}\lambda\ ;\quad (\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})\ ;\quad \lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}\ ;$$

$$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}\ ;\quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}\ ;\quad 1\vec{a}=\vec{a}\ .$$

2.3.3 Проекція вектора. Координати вектора. Рівність векторів у координатній формі

Проекцією вектора $\vec{a}$ на ненульовий вектор $\vec{b}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, називається число, яке позначається $np_{\vec{b}}\vec{a}$ і обчислюється за формулою

$$\boxed{np_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi},$$

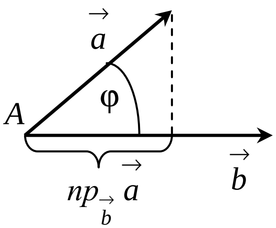


Рисунок 87

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $0\leq\varphi\leq\pi$ (рис. 87).

Нехай у просторі задана декартова прямокутна система координат (рис. 88). Упорядкована трійка одиничних векторів (ортів) $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ зі спільним початком O, спрямованих вздовж додатного напрямку відповідно осей Ox, Oy і Oz, утворює ***координатний базис*** $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$.

Нехай у координатному просторі $Oxyz$ заданий деякий вектор $\vec{a}$ (рис. 88). Проекції вектора $\vec{a}$ на осі координат

$$a_x=np_{Ox}\vec{a}\ ;\quad a_y=np_{Oy}\vec{a}\ ;\quad a_z=np_{Oz}\vec{a}$$

називаються ***координатами*** (***компонентами***) вектора $\vec{a} = \vec{a}\left(a_x;\ a_y;\ a_z\right)$.

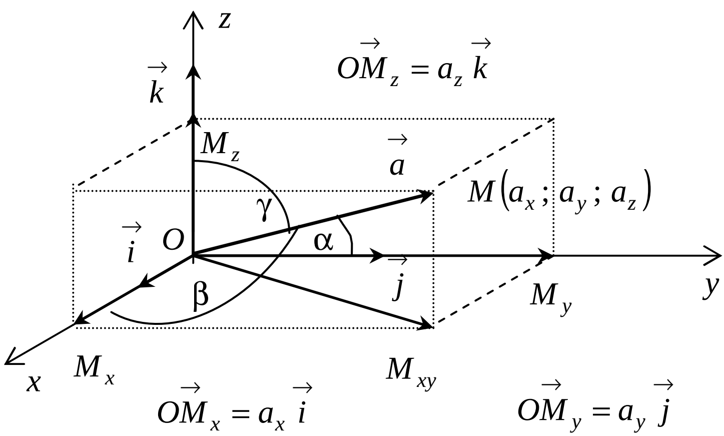


Рисунок 88

Координатні орти мають вигляд:

$$\vec{i}\,(1;\ 0;\ 0),\quad \vec{j}\,(0;\ 1;\ 0),\quad \vec{k}\,(0;\ 0;\ 1)\ .$$

Оскільки вектор $\vec{a}$ – вільний, то його можна відкладати від довільної точки, зокрема, від початку координат O. Тоді вектор $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$ служить ***радіусом-вектором*** точки $M\left(a_x;\ a_y;\ a_z\right)$.

Радіус-вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда з вимірами $|\overrightarrow{OM_x}| = |a_x|$, $|\overrightarrow{OM_y}| = |a_y|$ і $|\overrightarrow{OM_z}| = |a_z|$. Тому $\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$. *Модуль вектора дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його координат.*

Кути α, β і γ, які утворює вектор $\vec{a}$ відповідно з осями Ox,

Oy і Oz, називаються ***напрямними кутами***, а

$$\boxed{\cos\alpha = a_x \big/ |\vec{a}| \,; \quad \cos\beta = a_y \big/ |\vec{a}| \,; \quad \cos\gamma = a_z \big/ |\vec{a}|}$$

називаються ***напрямними косинусами*** вектора.

Зауваження. Напрямні косинуси зв'язані співвідношенням

$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$.   (Перевірити самостійно).

Приклад. Знайти модуль і напрямні косинуси вектора $\vec{a}(-1;2;-2)$. (Розв'язати самостійно).

Зі співвідношень

$$\vec{a} = \vec{OM} = \vec{OM}_{xy} + \vec{OM}_z = \vec{OM}_x + \vec{OM}_y + \vec{OM}_z$$

$$\text{і} \quad \vec{OM}_x = a_x \vec{i} \,; \quad \vec{OM}_y = a_y \vec{j} \,; \quad \vec{OM}_z = a_z \vec{k} \,,$$

одержимо $\boxed{\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}}$ – ***розклад вектора за координатним базисом*** $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$.

Якщо відомі координати початку $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і кінця $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ вектора $\vec{M_1M_2}$, то зі співвідношення

$$\vec{M_1M_2} = \vec{OM}_2 - \vec{OM}_1$$

маємо $\boxed{\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1)}$. Тобто, *координати вектора* $\vec{M_1M_2}$ *дорівнюють різниці відповідних координат його кінця* $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ *і початку* $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$.

Відстань між двома точками $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ і $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$ обчислюється за формулою

$$\boxed{M_1M_2 = |\vec{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}\,.$$

Два вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх відповідні координати*

$$\boxed{\vec{a} = \vec{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}}$$

2.3.4 Лінійні операції над векторами у координатній формі. Умова колінеарності векторів

Нехай $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$; $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$.

Тоді $\vec{a} + \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) + (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$

$$= (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k};$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) - (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) =$$

$$= (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k};$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}.$$

Тобто, *лінійні операції над векторами виконуються покомпонентно*:

при додаванні (відніманні) векторів їх відповідні кординати додаються (віднімаються);

при множенні вектора на число кожна координата множиться на це число.

<u>Умова колінеарності (паралельності) двох векторів</u>: *Два ненульові вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні*

$$\boxed{\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}; \quad \vec{a} \neq \vec{0}; \ \vec{b} \neq \vec{0}}.$$

$$\square \quad \vec{a} \parallel \vec{b} \iff \exists\lambda,\ \vec{a} = \lambda\vec{b} \iff a_x = \lambda b_x \ ;$$

$$a_y = \lambda b_y;\ a_z = \lambda b_z \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \ . \qquad \blacksquare$$

Приклад. Знайти, при яких значеннях α і β дані вектори колінеарні:

а) $\vec{a} = (\alpha - 2;\ 4;\ -3)$; $\vec{b} = (5;\ 3\beta;\ 6)$;

б) $\vec{a} = (3;\ \beta;\ 2\alpha - 1)$; $\vec{b} = (\alpha;\ -2;\ 2)$.

$$\square \text{ а) } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}\ ; \quad \frac{\alpha - 2}{5} = \frac{4}{3\beta} = \frac{6}{-3}\ ;$$

$$(\alpha - 2)/5 = -2\ ; \quad 4/(3\beta) = -2\ ; \quad \alpha = -8\ ; \quad \beta = -3/2\ .$$

б) (Розв'язати самостійно). $\blacksquare$

2.3.5 Поділ відрізка у заданому відношенні

Координати точки $M(x;\ y;\ z)$, яка ділить відрізок M_1M_2 у заданому відношенні λ, починаючи від точки M_1, визначаються за формулами:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\ ; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\ ; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}}\ .$$

$$\square \quad \overrightarrow{M_1M} \parallel \overrightarrow{MM_2} \iff \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{z - z_1}{z_2 - z} = \lambda\ ;$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda\ ; \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda\ ; \quad \frac{z - z_1}{z_2 - z} = \lambda\ ;$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\ ; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\ ; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\ . \quad \blacksquare$$

Зауваження. Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 пополам, то $\lambda = 1$. Тоді координати середини відрізка визначаються за формулами:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}\ ;\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}\ ;\quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}}\ .$$

Приклад. Точки $A(1; -4; 3)$ і $B(3; 0; 6)$ служать кінцями діаметра сфери. Знайти координати її центра C і радіус r.

□ $AC = BC$: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$;

$$x = \frac{1+3}{2} = 2;\quad y = \frac{-4+0}{2} = -2;\quad z = \frac{4+6}{2} = 5;\quad C(2;-2;5);$$

$$r = |\vec{AC}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ ;$$

$$r = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-(-4))^2 + (5-3)^2} = 3. \quad ■$$

2.3.6 Скалярний добуток векторів. Умова перпендикулярності двох векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi}\ .$$

Позначається скалярний добуток векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $\vec{a}\,\vec{b}$.

Нагадаємо також, що $\cos 0 = 1$; $\cos 90^\circ = 0$.

Властивості скалярним добутку:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda\,\vec{a}\cdot\vec{b}$;

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$; 4) $(\vec{a})^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Безпосередньо з означення маємо $\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}}$.

Тоді $\boxed{np_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}}$.

<u>Умова перпендикулярності (ортогональності) двох векторів</u>: *два ненульові вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді , коли їх скалярний добуток дорівнює нулю*

$$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0, \quad \vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}}.$$

Оскільки координатні орти $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ взаємно перпендикулярні і мають одиничну довжину, то

$$(\vec{i})^2=1;\ (\vec{j})^2=1;\ (\vec{k})^2=1;\ \vec{i}\cdot\vec{j}=0;\ \vec{i}\cdot\vec{k}=0;\ \vec{j}\cdot\vec{k}=0.$$

Нехай $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$; $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

Тоді $\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$

$$=a_xb_x(\vec{i})^2+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y(\vec{j})^2+$$

$$+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z(\vec{k})^2=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Таким чином, *скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат*

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}.$$

Звідси $\boxed{\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0;\quad \vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}}$.

<u>Приклад 1</u>. Знайти, при якому значенні параметра α задані вектори перпендикулярні:

а) $\vec{a}=(2\alpha;-5;-3)$; $\vec{b}=(\alpha;-\alpha;6)$; б) $\vec{a}=(\alpha;3;4)$; $\vec{b}=(2;-\alpha;1)$.

□ а) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$;

$$2\alpha \cdot \alpha + (-5) \cdot (-\alpha) + (-3) \cdot 6 = 0;$$

$$2\alpha^2 + 5\alpha - 18 = 0; \quad \alpha_1 = 2; \quad \alpha_2 = -9/2.$$

б) (Розв’язати самостійно). ■

Приклад 2. Сума в 170 000 грош. од. розміщується під проценти в чотири банки: 60 000 – під 14% річних; 20 000 – під 15%; 50 000 – під 12% і 40 000 – під 16%. На скільки зросте вкладена сума за рік?

□ Введемо позначення: $\vec{S} = (60000;\ 20000;\ 50000;\ 40000)$ – вектор вкладів; $\vec{p} = (0{,}14;\ 0{,}15;\ 0{,}12;\ 0{,}16)$ – вектор річних ставок.

Тоді сумарний річний приріст усіх вкладів:

$$\Delta S = \vec{S} \cdot \vec{p} = 60000 \cdot 0{,}14 + 20000 \cdot 0{,}15 +$$

$$+ 50000 \cdot 0{,}12 + 40000 \cdot 0{,}16 = 23800 \text{ (грош. од.)}. \quad ■$$

2.3.7 Векторний добуток векторів. Площа трикутника

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 89) називається вектор (зверніть увагу, бо саме цим векторний добуток відрізняється від скалярного добутку, що є числом), який позначається $\vec{a} \times \vec{b}$ і задовольняє наступним умовам:

1) вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) модуль вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ дорівнює добутку модулів співмножників на синус кута φ між ними

$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi}.$$

Таким чином, модуль векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (геометричний зміст векторного добутку): $\boxed{|\vec{a}\times\vec{b}| = S_{пар}}$.

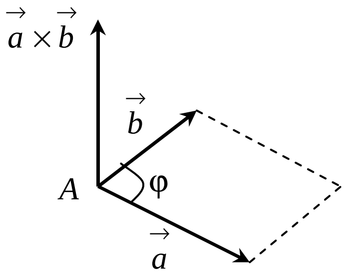


Рисунок 89

3) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ напрямлений так, що найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до суміщення з вектором $\vec{b}$ здійснюється у додатному напрямі (проти руху годинникової стрілки), якщо дивитися з кінця вектора $\vec{a}\times\vec{b}$. Іншими словами, напрям вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ визначається за правилом буравчика. Отже,

$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a};\quad \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b};\quad |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = S_{пар}.$$

Нагадаємо, що $\sin 0 = 0$.

Зауваження 1. Векторний добуток нульовий, якщо вектори колінеарні (зокрема, хоча б один із них нульовий).

Властивості векторного добутку:

1) $\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}}$. *Векторний добуток не комутативний: при зміні порядку співмножників він змінює знак на протилежний, залишаючись таким же за абсолютною величиною*;

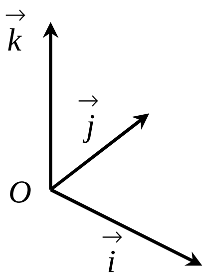


Рисунок 90

2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a}\times\vec{b}$;

3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

4) $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$.

Враховуючи взаємну орієнтацію координатних ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ (рис. 90), отримаємо:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}; \quad \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}; \quad \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0};$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}; \quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}; \quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}.$$

Нехай $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

Тоді *векторний добуток двох векторів дорівнює визначнику третього порядку, в якому перший рядок складається з координатних ортів* $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$, *другий – з координат першого співмножника, а третій – з координат другого співмножника*

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}}.$$

$\square$ $\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x\,\vec{i}\times\vec{i}+$

$+a_xb_y\,\vec{i}\times\vec{j}+a_xb_z\,\vec{i}\times\vec{k}+a_yb_x\,\vec{j}\times\vec{i}+a_yb_y\,\vec{j}\times\vec{j}+a_yb_z\,\vec{j}\times\vec{k}+$

$+a_zb_x\,\vec{k}\times\vec{i}+a_zb_y\,\vec{k}\times\vec{j}+a_zb_z\,\vec{k}\times\vec{k}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}-$

$$-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження 2</u>. Оскільки діагональ ділить паралелограм на два рівних трикутника, то з геометричного змісту векторного добутку маємо

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|}.$$

<u>Приклад</u>. Обчислити площу трикутника ABC з вершинами:

а) $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ і $C(1;3;-1)$;

б) $A(7;-1;0)$, $B(2;-4;-3)$ і $C(3;5;-2)$.

□ а) $\vec{AB} = (5-1;-6-(-1);2-2) = (4;-5;0)$;

$\vec{AC} = (1-1;3-(-1);-1-2) = (0;4;-3)$;

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k} \; ; \quad |\vec{AB}\times\vec{AC}| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = 25 ;$$

$$S_{\Delta ABC} = (1/2)\cdot 25 = 12{,}5 .$$

б) (Розв’язати самостійно). ■

2.3.8 Мішаний добуток трьох векторів. Об’єм піраміди. Умова компланарності трьох векторів. Розклад вектора за довільним базисом

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$. Позначається $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ або $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

<u>Геометричний зміст</u>: *модуль мішаного добутку* $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ *чисельно дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на векторах* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$ (рис. 91):

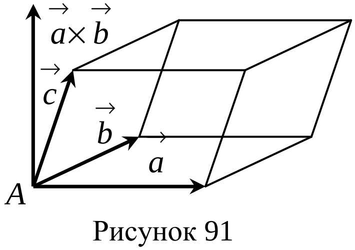


Рисунок 91

$$\boxed{V_{пар-да} = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|}.$$

□ $V_{пар-да} = S_{пар-ма}\cdot H$;

$$S_{пар-ма} = |\vec{a}\times\vec{b}|;$$

$$H=\left|np_{\vec{a}\times\vec{b}}\ \vec{c}\right|=\frac{|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|}{|\vec{a}\times\vec{b}\,|};$$

$$V_{nap-\partial a}=|\vec{a}\times\vec{b}\,|\cdot\frac{|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|}{|\vec{a}\times\vec{b}\,|}=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|.\ \blacksquare$$

Зауваження 1. Об'єм трикутної піраміди $SABC$ обчислюється за формулою $\boxed{V_{SABC}=\frac{1}{6}\,|(\vec{SA}\times\vec{SB})\cdot\vec{SC}\,|}$.

Нехай $\vec{a}=a_x\,\vec{i}+a_y\,\vec{j}+a_z\,\vec{k}$; $\vec{b}=b_x\,\vec{i}+b_y\,\vec{j}+b_z\,\vec{k}$;

$\vec{c}=c_x\,\vec{i}+c_y\,\vec{j}+c_z\,\vec{k}$.

Тоді *мішаний добуток трьох векторів дорівнює визначнику третього порядку, в якому кожний рядок складається з координат відповідного співмножника, тобто координат векторів* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}}.$$

□ $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}(c_x\,\vec{i}+c_y\,\vec{j}+c_z\,\vec{k})=\Big((a_yb_z-a_z\times$

$\times b_y)\,\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\,\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\,\vec{k}\Big)(c_x\,\vec{i}+c_y\,\vec{j}+c_z\,\vec{k})=$

$=(a_yb_z-a_zb_y)\,c_x-(a_xb_z-a_zb_x)\,c_y+(a_xb_y-a_yb_x)\,c_z=$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} . \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 1</u>. Задані координати вершин трикутної піраміди $S(4;-1;2)$, $A(5;1;4)$, $B(3;2;-1)$, $C(0;0;3)$. Знайти її об’єм.

$$\square \quad \vec{SA} = (5-4;\, 1-(-1);\, 4-2) = (1;\, 2;\, 2)\ ;$$

$$\vec{SB} = (3-4;\, 2-(-1);\, -1-2) = (1;\, 3;\, -3)\ ;$$

$$\vec{SC} = (0-4;\, 0-(-1);\, 3-2) = (-4;\, 1;\, 1);\quad (\vec{SA} \times \vec{SB}) \cdot \vec{SC} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 54\ ;\quad V_{SABC} = \frac{1}{6}\ |(\vec{SA} \times \vec{SB}) \cdot \vec{SC}\,| =$$

$$= (1/6) \cdot |54| = 9\ . \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження 2</u>. Якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні, то відповідний паралелепіпед вироджується і його об’єм дорівнює нулю. Звідси маємо ***умову компланарності трьох векторів***: *три вектора компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює нулю*:

$$\boxed{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\ \text{– компланарні} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0}\ .$$

<u>Приклад 2</u>. Задані три точки $A(1;\, 0;\, -1)$, $B(4;\, -1;\, 2)$ $C(0;\, 1;\, -3)$. Знайти значення параметра α, при якому точка $M(2;\, \alpha;\, -1)$ лежить в площині (ABC).

$\square$ Указані чотири точки лежать в одній площині, якщо три вектори $\vec{AM}$, $\vec{BM}$ і $\vec{CM}$ компланарні, тобто $(\vec{AM} \times \vec{BM}) \cdot \vec{CM} = 0$.

$$\vec{AM} = (2-1;\, \alpha - 0;\, -1-(-1)) = (1;\, \alpha;\, 0);$$

$$\vec{BM} = (2-4;\ \alpha-(-1);$$

$$\vec{BM} = (2-4;\ \alpha-(-1);\ -1-2) = (-2;\ \alpha+1;\ -3)\ ;$$

$$\vec{CM} = (2-0;\ \alpha-1;\ -1-(-3)) = (2;\ \alpha-1;\ 2);\ \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ -2 & \alpha+1 & -3 \\ 2 & \alpha-1 & 2 \end{vmatrix} = 0\,;$$

$$\alpha = 1/3\ . \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження 3</u>. Довільна трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ є ***лінійно незалежною*** (рівність $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0$ виконується лише за умови, коли всі коефіцієнти α,β,γ одночасно дорівнюють нулю) і утворює ***базис*** у тому розумінні, що будь-який вектор $\vec{d}$ єдиним способом може бути поданий у вигляді

$$\boxed{\vec{d} = d_a\,\vec{a} + d_b\,\vec{b} + d_c\,\vec{c}}\,.$$

Цю рівність називають ***розкладом вектора*** $\vec{d}$ ***за базисом*** $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$. Числа d_a, d_b, d_c служать ***координатами*** вектора $\vec{d}$ у цьому базисі.

Якщо відомі координати векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ у координатному базисі, то, записавши розклад вектора $\vec{d}$ за новим базисом $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ у скалярній формі, отримаємо систему

$$\begin{cases} a_x\,d_a + b_x\,d_b + c_x\,d_c = d_x \\ a_y\,d_a + b_y\,d_b + c_y\,d_c = d_y \\ a_z\,d_a + b_z\,d_b + c_z\,d_c = d_z \end{cases}$$

для знаходження нових координат d_a, d_b, d_c вектора $\vec{d}$.

Приклад 3. Перевірити, що задані три вектори

$$\vec{a}=(2;-1;4);\ \vec{b}=(1;0;-3);\ \vec{c}=(-2;1;-1);\ \vec{d}=(0;-1;10)$$

утворюють базис. Знайти координати d_a, d_b, d_c заданого вектора $\vec{d}$ у цьому базисі $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$:

$$\square\quad (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0-6+4-0-1+6=3\neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні і утворюють базис, а вектор $\vec{d}$ може бути поданий у вигляді $\vec{d}=d_a\vec{a}+d_b\vec{b}+d_c\vec{c}$ єдиним способом. Складемо і розв'яжемо систему рівнянь для знаходження нових координат d_a, d_b, d_c вектора $\vec{d}$:

$$\begin{cases} 2d_a+d_b-2d_c=0 \\ -d_a \qquad\quad +d_c=-1 \\ 4d_a-3d_b-d_c=10 \end{cases};\quad \Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix}=3\neq 0;$$

$$\Delta^{(1)}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 10 & -3 & -1 \end{vmatrix}=3;\ \Delta^{(2)}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 10 & -1 \end{vmatrix}=-6;$$

$$\Delta^{(3)}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 10 \end{vmatrix}=0;\ d_a=\frac{\Delta^{(1)}}{\Delta}=\frac{3}{3}=1;\ d_b=\frac{\Delta^{(2)}}{\Delta}=\frac{-6}{3}=-2;$$

$$d_c=\Delta^{(3)}/\Delta=0/3=0.\ \blacksquare$$

2.4 Площина та пряма у просторі

2.4.1 Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

Нехай на площині α задана точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і відомий ***вектор нормалі*** $\vec{n}=(A;B;C)\neq\vec{0}$ (рис. 92). Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій площині та побудуємо вектор

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0).$$

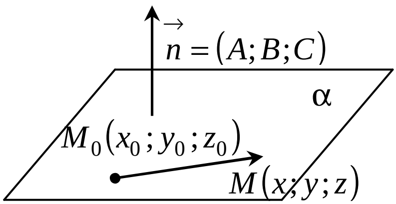


Рисунок 92

Точка M належить площині тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярний до нормалі $\vec{n}$. Використовуючи умову перпендикулярності векторів, маємо $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$ або в координатній формі

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

– ***рівняння площини, що проходить через задану точку*** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***перпендикулярно до заданого вектора*** $\vec{n}=(A;B;C)$.

<u>Приклад.</u> Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(-1;1;1)$ і перпендикулярна до площин $5x+2y-z+3=0$ і $x-y+3z+7=0$.

□ Оскільки нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1=(5;2;-1)$ і $\vec{n}_2=(1;-1;-3)$, то за нормальний вектор шуканої площини можна взяти вектор

$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=-7\vec{i}+14\vec{j}-7\vec{k}.$$

Оскільки вектор $\vec{n}_0 = (1;-2;1)$ колінеарний вектору $\vec{n} = (7;-14;7)$, то за нормальний вектор шуканої площини можна взяти вектор $\vec{n}_0$.Отримаємо рівняння площини, яка проходить через точку M_0 і перпендикулярна двом заданим площинам:

$$x+1-2(y-1)+z-1=0 \Rightarrow x-2y+z+2=0. \quad \blacksquare$$

2.4.2 Загальне рівняння площини. Окремі випадки загального рівняння площини

Розкриємо дужки в рівнянні

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

і отримаємо $Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$. Згрупуємо сталі величини та позначимо $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Тоді одержимо

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$$

– ***загальне рівняння площини***, що є лінійним відносно координат x, y, z, причому хоча б один з коефіцієнтів A, B, C відмінний від нуля, тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Зауваження. Загальне рівняння площини визначається з точністю до сталого множника.

Рівняння довільної площини можна звести до загального вигляду.

Теорема. *Будь-яка площина визначається лінійним рівнянням відносно координат* x, y, z. *Кожному лінійному рівнянню зі змінними* x, y, z *відповідає деяка площина.* (Без доведення)

Приклад. Дано три точки $M(1;-1;2)$, $N(5;-6;0)$ і $P(1;-3;-1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через точку M перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{NP}$.

□ $M \in \alpha$; $\vec{n} = \overrightarrow{NP} \perp \alpha$; $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$;

$$\vec{n} = \overrightarrow{NP} = (1-5;\ -3-(-6);\ -1-0\ ) = (-4;\ 3;\ -1);$$

$$-4(x-1)+3(y-(-1))+(-1)(z-2)=0\,;$$

$$-4x+4+3y+3-z+2=0\,;\quad -4x+3y-z+9=0\,;$$

$$4x-3y+z-9=0\,. \quad ■$$

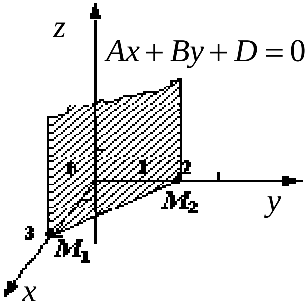


Рисунок 93

У таблиці 5 відображені особливості розміщення площини, коли один або декілька коефіцієнтів її загального рівняння дорівнюють нулю. (Частина ілюстративних зображень окремих випадків розміщення площини наведена на рисунках 93 – 95. Ілюстрації для інших випадків зробіть самостійно).

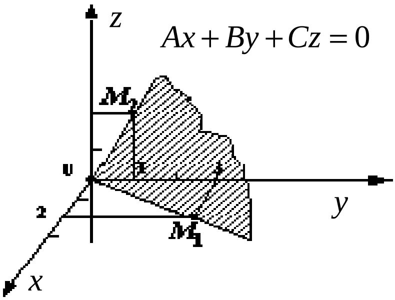


Рисунок 94

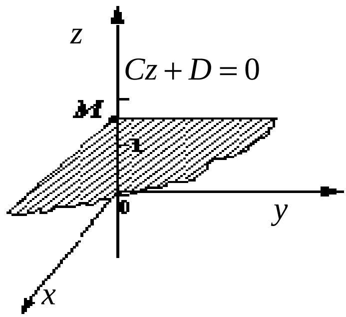


Рисунок 95

Таблиця 5

№ з/п	Рівняння	Характеристика розміщення площини
1	2	3
1	$By+Cz+D=0$	паралельна осі Ox
2	$Ax+Cz+D=0$	паралельна осі Oy
3	$Ax+By+D=0$	паралельна осі Oz (рис. 93)
4	$Ax+By+Cz=0$	проходить через початок координат (рис. 94)
5	$Cz+D=0$	перпендикулярна до осі Oz (рис. 95)

Продовження таблиці 5

1	2	3
6	$By + D = 0$	перпендикулярна до осі Oy
7	$Ax + D = 0$	перпендикулярна до осі Ox
8	$By + Cz = 0$	проходить через вісь Ox
9	$Ax + Cz = 0$	проходить через вісь Oy
10	$Ax + By = 0$	проходить через вісь Oz
11	$z = 0$	Координатна площина Oxy
12	$y = 0$	Координатна площина Oxz
13	$x = 0$	Координатна площина Oyz

2.4.3 Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай на площині α (рис. 96) задано три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ і $M_3(x_3; y_3; z_3)$, які не лежать на одній прямій.

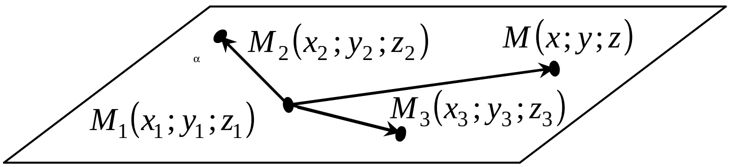


Рисунок 96

Візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ на цій площині та побудуємо три вектори $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ і $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$, що виходять з однієї точки M_1. Точка $M(x; y; z)$ належить площині тоді і тільки тоді, коли ці три вектори компланарні (рис. 96).

Використовуючи умову компланарності трьох векторів, маємо

$(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$ або в координатній формі

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0}$$

– ***рівняння площини, що проходить через три задані точки***.

<u>Приклад</u>. Дано три точки $M(1;-1;2)$, $N(5;-6;0)$ і $P(1;-3;-1)$. Написати загальне рівняння площини α, що проходить через ці точки. Знайти одиничний вектор нормалі.

□ $\begin{vmatrix} x-1 & y-(-1) & z-2 \\ 5-1 & -6-(-1) & 0-2 \\ 1-1 & -3-(-1) & -1-2 \end{vmatrix}=0$; $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 4 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}=0$;

$11x+12y-8z+17=0$; $\vec{n}=(A;B;C)=(11;12;-8)$;

$\left|\vec{n}\right|=\sqrt{11^2+12^2+(-8)^2}=\sqrt{329}$; $\vec{n}_0=\left(\frac{11}{\sqrt{329}};\frac{12}{\sqrt{329}};-\frac{8}{\sqrt{329}}\right)$. ■

2.4.4 Рівняння площини у відрізках на осях

Нехай площина α (рис. 97) перетинає всі три координатні вісі Ox, Oy і Oz відповідно у точках $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$ і $M_3(0;0;c)$.

Використовуючи рівняння площини, що проходить через три точки, маємо

$$\begin{vmatrix} x-a & y-0 & z-0 \\ 0-a & b-0 & 0-0 \\ 0-a & 0-0 & c-0 \end{vmatrix}=0 \qquad bcx+acy+abz-abc=0;$$

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

рівняння площини у відрізках на осях.

<u>Приклад 1</u>. Звести загальне рівняння площини

$$3x-6y+8z+12=0$$

до вигляду рівняння у відрізках на осях.

□ $3x-6y+8z=-12 \quad \Big| :(-12)$; $\dfrac{x}{-4}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{-2/3}=1$. ■

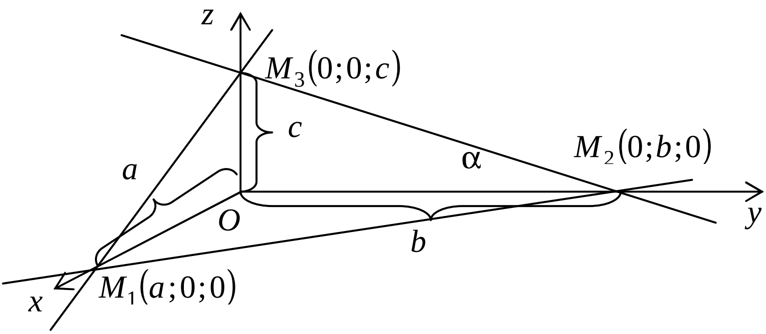


Рисунок 97

Приклад 2. Знайти точки перетину площини

$$\alpha: \quad 3x-2y+6z-12=0$$

з координатними осями і зобразити площину, побудувавши її сліди – лінії перетину з координатними площинами.

□ $\alpha \cap Ox: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ 3x-2y+6z-12=0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} a=4 \\ M_1(4;0;0) \end{matrix};$

$$\alpha \cap Oy: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ 3x-2y+6z-12=0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} b=-6 \\ M_2(0;-6;0) \end{matrix};$$

$$\alpha \cap Oy: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 3x-2y+6z-12=0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} c=2 \\ M_3(0;0;2) \end{matrix}.$$

Площина α зображена на рисунку 98. ■

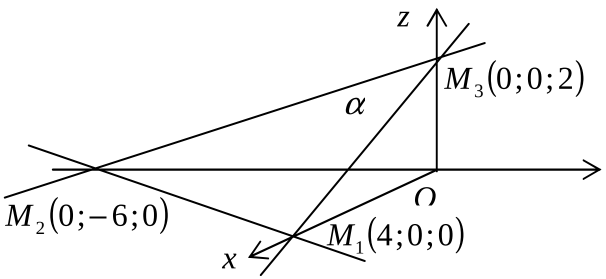


Рисунок 98

2.4.5 Кут між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Нехай задано дві площини α_1 і α_2 своїми загальними рівняннями: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Кут φ між площинами α_1 і α_2 дорівнює куту між їх векторами нормалей $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$ (рис. 99). Отже,

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}}.$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для площин.

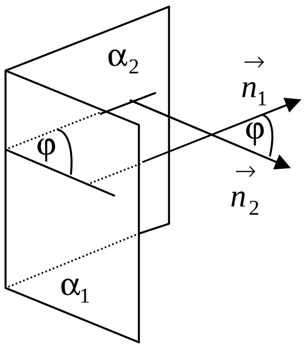


Рисунок 99

Умова перпендикулярності двох площин: $\boxed{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0}$.

Умова паралельності двох площин:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}}.$$

Дві площини збігаються, якщо

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}}.$$

Приклад. Знайти косинус кута між заданою площиною $\alpha_1:\ 2x-y-2z+6=0$ і координатною площиною Oxy.

$$\square\quad \vec{n}_1=(2;-1;-2)\ ;\ \ \alpha_2:\ z=0\ ;\ \ \vec{n}_2=\vec{k}=(0;0;1);$$

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot 0+(-1)\cdot 0+(-2)\cdot 1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=-\frac{2}{3}\ .\qquad\blacksquare$$

2.4.6 Відстань від точки до площини

Нехай у просторі задані площина α своїм загальним рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$ і деяка точка $M_0(x_0\,;y_0\,;z_0)$ (рис. 100).

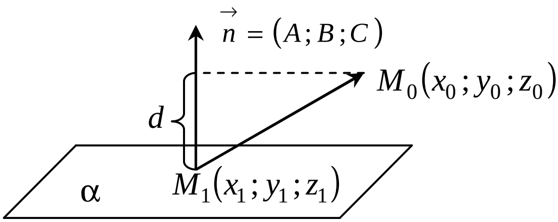


Рисунок 100

Візьмемо на цій площині довільну точку $M_1(x_1\,;y_1\,;z_1)$ та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1\,;y_0-y_1\,;z_0-z_1)$. Тоді відстань d від точки M_0 до площини α дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на вектор нормалі $\vec{n}=(A;B;C)$

$$d=\frac{|\,\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}\,|}{|\,\vec{n}\,|}=\frac{|\,A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)\,|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ .$$

Оскільки $-Ax_1-By_1-Cz_1=D$, то

$$\boxed{d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}\ .$$

Приклад 1. Знайти відстань d від точки $M_0(2;-4;3)$ до площини $\alpha: \ 3x-2y-6z-1=0$. (Розв'язати самостійно).

Приклад 2. Задана піраміда з вершинами $A(3;4;0)$, $B(4;-3;1)$, $C(-4;1;-1)$, $D(-1;-1;5)$. Знайти довжину висоти піраміди, проведеної з вершини D. (Розв'язати самостійно).

2.4.7 Рівняння прямої, що проходить через дану точку паралельно даному вектору (канонічні рівняння прямої)

Нехай на прямій l задана деяка точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і відомий ***напрямний вектор*** $\vec{s}=(m;n;p)$ цієї прямої – довільний ненульовий вектор, що їй паралельний (рис. 101).

Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ на цій прямій та побудуємо вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$. Точка M належить прямій тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору $\vec{s}$. Використовуючи умову паралельності векторів, маємо ***канонічні рівняння прямої***:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}}$$

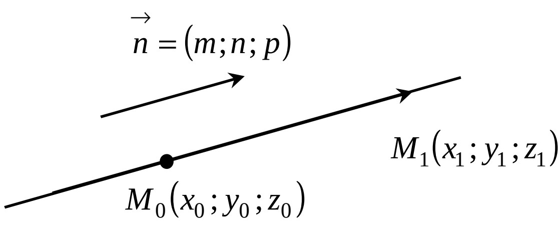


Рисунок 101

2.4.8 Параметричні рівняння прямої

Якщо у канонічні рівняння прямої ввести коефіцієнт пропорційності

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

і розв'язати їх відносно x, y та z, то отримаємо:

$$\frac{x-x_0}{m}=t\,; \quad \frac{y-y_0}{n}=t\,; \quad \frac{z-z_0}{p}=t\,; \quad \boxed{\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases}}$$

– ***параметричні рівняння прямої***, де змінна t служить параметром.

<u>Приклад</u>. Пряма задана своїми канонічними рівняннями. Записати її параметричні рівняння:

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y+4}{0}=\frac{z}{-2}. \quad \text{(Розв'язати самостійно).}$$

2.4.9 Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай на прямій l задано дві точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$. За напрямний вектор можна взяти

$$\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1).$$

Тоді з канонічних рівнянь маємо

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$$

– ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки***.

<u>Приклад</u>. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(-2;0;3)$ і $M_2(4;-2;3)$. (Розв'язати самостійно).

2.4.10 Пряма як перетин двох площин. Загальні рівняння прямої

Просторова лінія може задаватися як перетин двох поверхонь. Зокрема, пряма l є лінією перетину деяких двох площин α_1 і α_2. Якщо ці площини задані своїми загальними рівняннями

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ і } \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то система $\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}}$ називається ***загальними рівняннями прямої***.

Приклад. Пряма l задана своїми загальними рівняннями

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 10 = 0 \\ 3x + 2y - 2z + 6 = 0 \end{cases}.$$

Знайти її 1) канонічні рівняння; 2) параметричні рівняння.

□ 1) Знайдемо напрямний вектор прямої

$$\vec{s} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 14\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Знайдемо деяку точку M_0 на прямій. Нехай $x = 0$, тоді

$$\begin{cases} -2y + 4z - 10 = 0 \\ 2y - 2z + 6 = 0 \end{cases}; \quad y = -1; \quad z = 2 \; ; \quad M_0(0;-1;2).$$

Канонічні рівняння:

$$\frac{x-0}{-4} = \frac{y-(-1)}{14} = \frac{z-2}{8}; \quad \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z-2}{4}.$$

(Параметричні рівняння знайти самостійно). ■

Зауваження 1. Загальні рівняння прямої визначаються неоднозначно.

Зауваження 2. Рівняння

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0\ ,$$

де λ – параметр, задає пучок площин, які проходять через пряму l.

2.4.11 Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності та паралельності двох прямих

Нехай задано дві прямі своїми канонічними рівняннями

$$l_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\ \text{і}\ l_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Кут φ між прямими l_1 і l_2 дорівнює куту між їх напрямними векторами $\vec{s_1}=(m_1;n_1;p_1)$ і $\vec{s_2}=(m_2;n_2;p_2)$. Отже,

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}}\ .$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для прямих.

Умова перпендикулярності двох прямих:

$$\boxed{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0}\ .$$

Умова паралельності двох прямих: $\boxed{\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}}$.

2.4.12 Перетин прямої з площиною

Нехай задано пряму l параметричними рівняннями і площину α загальним рівнянням

$$l:\ \begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases};\quad \alpha:\ Ax+By+Cz+D=0\ .$$

Для знаходження точки перетину прямої та площини треба скласти і розв'язати систему їх рівнянь. Цю систему зручно розв'язувати методом вилучення невідомих (методом Гаусса), підставляючи вирази для x, y, z із параметричних рівнянь прямої у рівняння площини. Дістаємо рівняння для t

$$(Am+Bn+Cp)t=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D)\ .$$

1) Якщо $Am+Bn+Cp\neq 0$, тобто пряма не паралельна площині, то пряма і площина перетинаються в одній точці, що відповідає значенню параметра

$$t=-\ (Ax_0+By_0+Cz_0+D)/(Am+Bn+Cp)\ .$$

2) Якщо $Am+Bn+Cp=0$, тобто пряма паралельна площині, а $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, тобто точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ прямої l не лежить на площині α, то рівняння для t розв'язків не має. Пряма паралельна площині і не лежить на ній.

3) Якщо $Am+Bn+Cp=0$, тобто пряма паралельна площині, і $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, тобто точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$ прямої l лежить на площині α, то рівняння для t виконується при всіх значеннях параметра. Пряма лежить на площині.

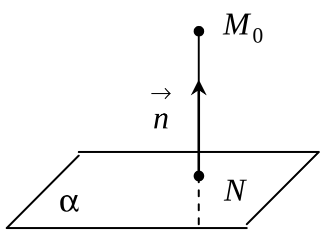


Рисунок 102

Приклад. Знайти проекцію N точки $M_0(2;-5;4)$ на площину $\alpha:\ 3x+2y-z-6=0$.

□ Точка N є основою перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на площину α (рис. 102). Напрямний вектор $\vec{s}$ прямої M_0N колінеарний вектору нормалі $\vec{n}$ площини. Можна вважати, що $\vec{s}=\vec{n}=(3;\ 2;\ -1)$. Тоді параметричні рівняння прямої M_0N:

$$x=3t+2;\qquad y=2t-5;\qquad z=-t+4\,.$$

Підставляючи ці вирази у рівняння площини, одержимо значення параметра t, що відповідає точці перетину N прямої та площини

$$3(3t+2)+2(2t-5)-(-t+4)-6=0\ ;\quad t=-1\ .$$

Тоді

$$x = 3(-1) + 2 = -1; \quad y = 2(-1) - 5 = -7; \quad z = -(-1) + 4 = 5 \ .$$

Отже, проекцією є точка $N(-1; -7; 5)$. ■

2.4.13 Кут між прямою та площиною. Умови перпендикулярності та паралельності прямої та площини

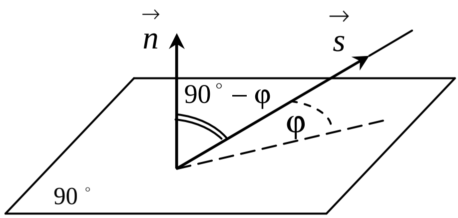


Рисунок 103

Нехай задано пряму l канонічними рівняннями і площину α загальним рівнянням

$$l: \ \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p};$$

$$\alpha: \ Ax + By + Cz + D = 0 \ .$$

Кут φ між ними (рис. 103) доповнює кут між напрямним вектором прямої $\vec{s} = (m; n; p)$ і вектором нормалі площини $\vec{n} = (A; B; C)$ до 90°.

Тоді $$\cos(90^\circ - \varphi) = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \ .$$

Застосовуючи тригонометричну формулу зведення і враховуючи, що кут φ між прямою і площиною – гострий, маємо

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}} \ .$$

Використовуючи умови перпендикулярності та паралельності векторів, маємо відповідні умови для взаємного розміщення прямої та площини.

Умова перпендикулярності прямої та площини: $\boxed{\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}}$.

Умова паралельності прямої та площини:

$$\boxed{Am + Bn + Cp = 0} \ .$$

Приклад 1. Знайти кут між прямою l і площиною α:

$$l:\ \begin{cases} x+4y-2z-8=0 \\ 2x+3y-z+6=0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \alpha:\ \frac{x}{-4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1.$$

(Розв'язати самостійно).

Приклад 2. Перевірити, що пряма $\frac{x-3}{-5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{3}$ перпендикулярна до площини $10x-4y-6z+3=0$.

(Розв'язати самостійно).

Приклад 3. Перевірити, що пряма $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{-2}$ паралельна площині $2x+2z-1=0$. (Розв'язати самостійно).

2.5 Поверхні другого порядку

2.5.1 Загальне рівняння поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина точок простору R^3, координати котрих задовольняють алгебраїчне рівняння другого степеня

$$\boxed{Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0},$$

де хоча б один з коефіцієнтів *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* відмінний від нуля, тобто виконується умова $\boxed{A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2\neq 0}$.

Це рівняння може визначати сферу, еліпсоїд, гіперболоїд (однопорожнинний або двопорожнинний), параболоїд (еліптичний або гіперболічний), конус, циліндр (еліптичний, гіперболічний або параболічний). За допомогою паралельного переносу й повороту системи координат зазначене рівняння другого порядку можна звести до канонічного вигляду. Форму та розташування поверхонь вивчають методом перерізів. Для цього перетинають поверхню координатними площинами та їм паралельними і визначають тип кривої, що одержується в перерізі.

Зауваження. Крім зазначених поверхонь, загальному рівнянню другого порядку може відповідати один з вироджених випадків:

сукупність двох площин чи прямих, площина, пряма, точка чи порожня множина. Порожній множині відповідає певна уявна поверхня, при цьому загальне рівняння втрачає геометричний смисл. Надалі обмежимося розглядом тільки дійсних невироджених поверхонь.

2.5.2 Поверхні обертання. Сфера. Еліпсоїд

Поверхня, утворена обертанням плоскої лінії (***твірної***, ***меридіана***) l навколо заданої прямої a_0 (***осі обертання***), що лежить у площині лінії l, називається ***поверхнею обертання***.

Коло, яке описує довільна точка твірної l при обертанні, називається ***паралеллю***. Площина паралелі перпендикулярна до осі обертання a_0.

Правило: *Щоб одержати рівняння поверхні, утвореної обертанням заданої кривої, що лежить у координатній площині, навколо однієї з координатних осей цієї площини, треба у рівнянні лінії зробити заміну змінних: змінну, що відповідає осі обертання, залишити тією самою, а іншу змінну замінити на «плюс / мінус» квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат.*

Зокрема

$$\boxed{\begin{matrix} F(y,z)=0 \\ \circlearrowleft Oz \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\, z\right)=0}.$$

Якщо коло $y^2+z^2=R^2$, що лежить у площині Oyz, обертати навколо осі Oz, то дістанемо ***сферу***.

Зробимо відповідну заміну змінних у рівнянні твірної:

$$\begin{matrix} y^2+z^2=R^2 \\ \circlearrowleft Oz \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \to z \\ y \to \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+z^2=R^2.$$

Звідси отримуємо $\boxed{x^2+y^2+z^2=R^2}$ – ***канонічне рівняння сфери***.

Рівняння сфери зі зміщеним центром у точці $M_o(x_0,y_0,z_0)$ і радіусом R має вигляд (рис. 104):

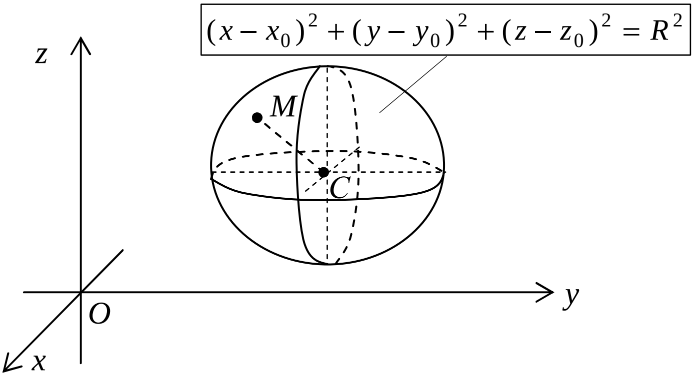


Рисунок 104

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}.$$

<u>Зауваження 1</u>. Сфера є обмеженою замкненою поверхнею, яка симетрична відносно центра. Довільна пряма, що проходить через її центр, є віссю симетрії сфери. Довільна площина, що проходить через центр сфери, служить її площиною симетрії.

<u>Приклад 1</u>. Показати, що задане рівняння є рівнянням сфери, та знайти її центр і радіус:

а) $4x^2+4y^2+4z^2-16x+24y+12z+25=0$;

б) $3x^2+3y^2+3z^2-6y+5z+3=0$.

□ а) Згрупуємо окремо члени з x, y і z, а потім виділимо повні квадрати двочленів відповідного вигляду $x \pm a$, $y \pm b$ і $z \pm c$:

$$4x^2+4y^2+4z^2-16x+24y+12z+25=0;$$

$$4(x^2-4x)+4(y^2+6y)+4(z^2+3z)+25=0;$$

$$(x^2-2\cdot 2x+2^2-2^2)+(y^2+2\cdot 3y+3^2-3^2)+$$

$$+\left(z^2+2\cdot(3/2)z+(3/2)^2-(3/2)^2\right)+25/4=0;$$

$$(x-2)^2-4+(y+3)^2-9+(z+3/2)^2-9/4+25/4=0;$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z+3/2)^2=9.$$

Одержане рівняння описує сферу з центром у точці $C\left(2,-3,\,-3/2\right)$ і радіусом $R=3$.

б) (Розв'язати самостійно). Відповідь:

$$x^2+(y-1)^2+(z+5/6)^2=25/36;\ \ C\left(0,1,\,-5/6\right);\ \ R=5/6.\ \ ■$$

Піддаючи сферу $x^2+y^2+z^2=R^2$ рівномірній деформації (розтягу чи стиску) вздовж кожної з координатних осей Ox, Oy і Oz з коефіцієнтами деформації відповідно $k_x=R/a$, $k_y=R/b$ і $k_z=R/c$ ($a,b,c>0$), треба у рівнянні цієї поверхні зробити заміну: $x\to k_x x$; $y\to k_y y$; $z\to k_z z$. У результаті матимемо

$$\left((R/a)x\right)^2+\left((R/b)y\right)^2+\left((R/c)z\right)^2=R^2;\quad \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

– ***канонічне рівняння еліпсоїда*** (рис. 105).

Величини a, b і c називаються ***півосями еліпсоїда***. Якщо будь-які дві півосі рівні між собою, то маємо еліпсоїд обертання, а якщо всі три півосі рівні між собою $a=b=c=R$, то – сферу.

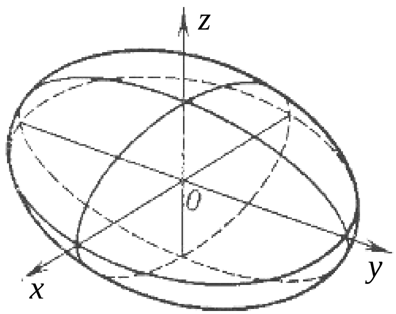


Рисунок 105

Еліпсоїд симетричний відносно координатних площин, координатних осей і початку координат, який називають ***центром еліпсоїда***. Еліпсоїд в цілому лежить в межах прямокутного паралелепіпеда зі сторонами $2a$, $2b$ і $2c$, який симетричний відносно координатних площин.

Для з'ясування форми поверхні використовуємо метод перерізів. Розсічемо поверхню площиною $x=h$ (рис. 105):

$$y^2/b^2+z^2/c^2=1-h^2/a^2.$$

1) При $|h|<a$ маємо $1-h^2/a^2=H^2>0$ – у перерізі вийде еліпс із

півосями Hb і Hc.

2) При $h = \pm a$ одержимо дві точки $(a;0;0)$ і $(-a;0;0)$.

3) При $|h| > a$ вираз $1 - h^2/a^2 < 0$ – площина й поверхня не перетинаються.

Зауваження 2. Лінією перетину еліпсоїда довільною площиною є еліпс.

Приклад 2. Звести рівняння заданого еліпсоїда до канонічного вигляду і побудувати його зображення: $16x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 144$.

(Виконати самостійно).

2.5.3 Однопорожнинний гіперболоїд

Канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда має вигляд:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}, \; a, b, c > 0$$

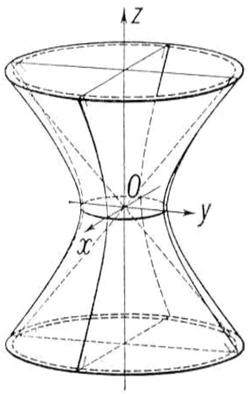


Рисунок 106

Поверхня симетрична відносно координатних площин. Початок координат є центром симетрії (рис. 106). Перерізи поверхні площинами $x = 0$, $y = 0$ є гіперболами:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Переріз поверхні площиною $z = h$ є еліпсом:

$$\frac{x^2}{(aH)^2} + \frac{y^2}{(bH)^2} = 1, \; \left(H^2 = h^2/c^2 - 1\right).$$

Зауваження. Однопорожнинний гіперболоїд належить до ***лінійчатих поверхонь***, твірні яких є прямими лініями. Він може бути побудований за допомогою двох систем прямих ліній. Лінійчаті поверхні широко використовуються в будівництві.

2.5.4 Двопорожнинний гіперболоїд

Канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда має вигляд:

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}, \quad (a,b,c>0) \quad (4)$$

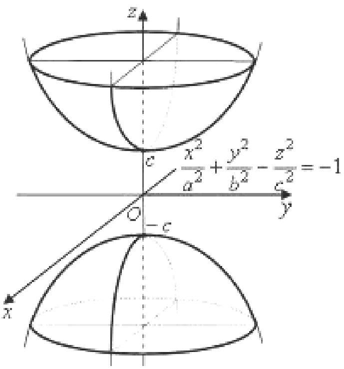


Рисунок 107

Поверхня симетрична відносно координатних осей і координатних площин. Центр симетрії знаходиться в початку координат (рис. 107).
Перерізи поверхні площинами $x=0$ і $y=0$ є гіперболами відповідно:

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Розглянемо перерізи поверхні площиною $z=h$:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1.$$

1) $|h|<c$ – переріз є порожньою множиною;

2) $|h|=c$ – у перерізі маємо дві точки: $(0;0;c)$ і $(0;0;-c)$;

3) $|h|>c$ – переріз є еліпсом: $\frac{x^2}{(aH)^2}+\frac{y^2}{(bH)^2}=1$, $\left(H^2=h^2/c^2-1\right)$.

2.5.5 Конічні поверхні. Конус другого порядку

Конічною поверхнею називається поверхня, яку описує пряма (***твірна***), що проходить через фіксовану точку O (***вершину*** конуса) та іншу змінну точку, яка рухається вздовж заданої кривої l_0 (***напрямної*** конуса), причому вершина O не лежить на напрямній l_0.

Канонічне рівняння конуса другого порядку (***еліптичного конуса***) (рис. 108) має вигляд:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0}, \ (a,b,c>0).$$

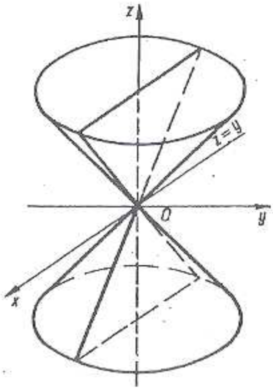


Рисунок 108

Зокрема, якщо $a=b$, то рівняння

$$\boxed{x^2/a^2+y^2/a^2-z^2/c^2=0}$$

визначає ***круговий конус***.

Еліптичний конус симетричний відносно координатних осей і координатних площин. Центр симетрії знаходиться в початку координат (рис. 108). Його перерізи площинами $x=0$ і $y=0$ є прямими, що перетинаються: $y=\pm bz/c$, $x=\pm az/c$. А перерізи площинами $z=h$ є еліпсами:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}, \quad \frac{x^2}{(aH)^2}+\frac{y^2}{(bH)^2}=1, \quad \left(H^2=h^2/c^2\right).$$

Зауваження. Коло, еліпс, гіперболу і параболу можна одержати як лінії перетину кругового конуса площиною.

2.5.6 Еліптичний параболоїд

Канонічне рівняння еліптичного параболоїда (рис. 109) має вигляд:

$$\boxed{\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z}, \ (p,q>0)$$

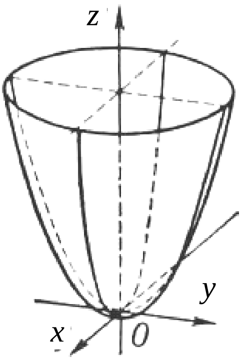


Рисунок 109

Поверхня симетрична відносно координатних площин $x0z$, $y0z$ і вісі $0z$.

Перерізи поверхні площинами $x=0$, $y=0$ є параболами: $y^2=2qz$, $x^2=2pz$. Перерізи поверхні площинами $z=h>0$ є еліпсами

$$x^2/(2ph)+y^2/(2qh)=1.$$

2.5.7 Гіперболічний параболоїд

Канонічне рівняння гіперболічного параболоїда (рис. 110) має вигляд:

$$\boxed{\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z},\ (p,q>0)$$

Гіперболічний параболоїд має форму сідла. Початок координат $O(0,0,0)$ (***вершина*** гіперболічного параболоїда) є ***сідловою точкою*** (***точкою перевалу***) цієї поверхні. Дві координатні площини Oxz і Oyz служать площинами симетрії, а координатна вісь Oz – віссю симетрії.

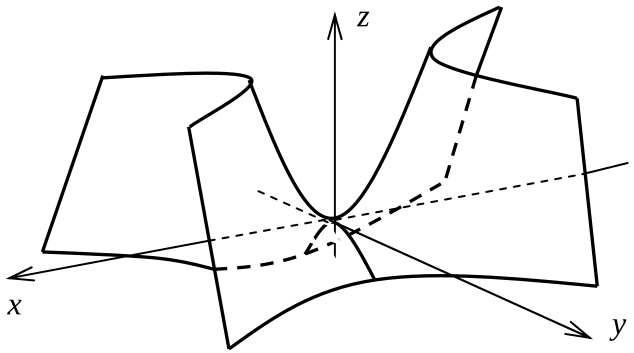


Рисунок 110

1) У перерізі поверхні площиною $x=0$ одержуємо параболу: $y^2=-2qz$. Гілки параболи напрямлені вниз.

2) У перерізі поверхні площиною $y=0$ отримуємо параболу: $x^2=2pz$. Гілки параболи напрямлені вгору.

3) У перерізі поверхні площиною $z=h$, $h\neq 0$ дістаємо гіперболу: $x^2/p-y^2/q=2h$. А при перетині з координатною площиною $z=0$ отримуємо дві прямі, що перетинаються у початку координат.

Зауваження. Гіперболічний параболоїд є лінійчатою поверхнею.

2.5.8 Циліндричні поверхні. Циліндри другого порядку

Циліндричною поверхнею (***циліндром***) називається поверхня, описана прямою (***твірною***) l, що рухається паралельно заданій прямій a_0 вздовж заданої лінії (***напрямної***) l_0, причому вказані лінії l_0 і a_0 не лежать в одній площині. Якщо напрямна циліндра лежить у площині $x0y$, а твірна паралельна осі $0z$, то рівняння циліндра має вигляд: $F(x,y)=0$ або $y=f(x)$. Аналогічно, $F(x,z)=0$ або $z=f(x)$ − рівняння циліндричної поверхні, твірна якої паралельна осі $0y$; $F(y,z)=0$ або $z=f(y)$ − рівняння циліндричної поверхні, твірна якої паралельна осі $0x$.

Якщо напрямною циліндричної поверхні є крива другого порядку, то поверхню називають ***циліндричною поверхнею другого порядку*** (рис. 111 − 113).

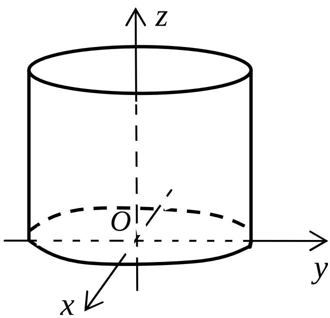


Рисунок 111

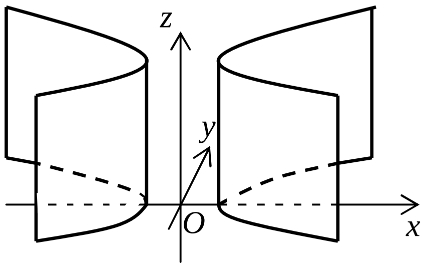


Рисунок 112

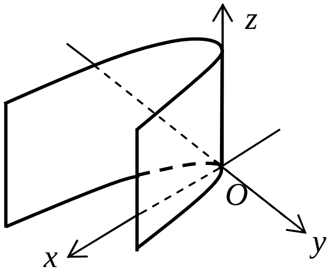


Рисунок 113

За типом кривої, що утворюється у перерізі циліндра з площиною, перпендикулярною твірній, розрізняють такі циліндри другого порядку:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$ − ***еліптичний*** (рис. 111),

зокрема, ***круговий*** $\boxed{x^2+y^2=R^2}$;

$\boxed{x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1}$ – ***гіперболічний*** (рис. 112); $\boxed{x^2 = 2py}$ – ***параболічний*** (рис. 113).

Аналогічно можна записати рівняння циліндричних поверхонь другого порядку, твірні яких паралельні осям $0x$ чи $0y$.

<u>Зауваження</u>. Циліндр є лінійчатою поверхнею. Його можна уявити як «огорожу» з паралельних прямих, виставлену вздовж напрямної l_0.

2.6 Контрольні запитання

1) Що називається похідною функції?
2) У чому полягає механічний зміст похідної?
3) У чому полягає геометричний зміст похідної? Запишіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.
4) У чому полягає економічний зміст похідної?
5) Розкрийте сутність понять: темп зростання функції; еластичність функції? Який зв'язок між ними?
6) Який зв’язок між диференційованістю та неперервністю?
7) Запишіть правила обчислення похідної суми, різниці, добутку та частки двох функцій?
8) Сформулюйте правила диференціювання похідної складеної функції? Оберненої функції? Параметрично заданої функції?
9) Наведіть формули похідних основних елементарних функцій.
10) Як здійснюється диференціювання неявно заданої функції?
11) У чому полягає правило логарифмічного диференціювання?
12) Дайте означення похідної n-го порядку. Розкрийте механічний зміст другої похідної?
13) Що таке диференціал функції?
14) У чому полягає геометричний зміст диференціала?
15) Який зв’язок між похідною та диференціалом функції?
16) Які правила обчислення диференціалу суми, різниці, добутку та частки двох функцій?
17) Наведіть формули диференціалів основних елементарних функцій.
18) Як застосовується диференціал у наближених обчисленнях?
19) Що називається диференціалом n-го порядку?

20) У чому полягає інваріантність форми першого диференціала? Чи поширюється властивість інваріантності на диференціали вищих порядків?
21) Сформулюйте теорему Ролля про корені похідної. Який її геометричний зміст?
22) Сформулюйте теорему Лагранжа про скінченні прирости. Який її геометричний зміст?
23) У чому полягає правило Лопіталя? Для розкриття невизначеностей яких видів воно застосовується безпосередньо?
24) Як зводяться невизначеності $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ і ∞^0 до одного з основних видів $0/0$ чи ∞/∞?
25) Запишіть формулу Тейлора n-го порядку із залишковим членом у формі Лагранжа.
26) Наведіть приклади розкладання функцій за формулою Маклорена для елементарних функцій.
27) Як формула Тейлора застосовується в наближених обчисленнях?
28) У чому полягають достатні умови монотонності та сталості функції?
29) Що таке точка мінімуму та максимуму функції?
30) Сформулюйте необхідну умову екстремуму?
31) Що таке критичні точки першої похідної? Стаціонарні точки функції?
32) У чому полягає достатня умова екстремуму за першою похідною?
33) Сформулюйте правило дослідження функції на монотонність і екстремум за першою похідною.
34) У чому полягає достатня умова гладкого екстремуму за другою похідною?
35) Як знаходяться найменше та найбільше значення функції в замкненій області?
36) Яка функція називається опуклою (вгнутою) в точці та на інтервалі?
37) Що таке точка перегину?
38) У чому полягають достатні умови опуклості та вгнутості?
39) У чому полягає необхідна умова точки перегину?
40) Що таке критичні точки другої похідної?
41) Сформулюйте правило дослідження функції на опуклість, угнутість та перегин за другою похідною.
42) Що називається асимптотою графіка функції? На які види діляться асимптоти?

43) Який вигляд має рівняння вертикальної асимптоти? Похилої асимптоти?

44) Опишіть загальну схему повного дослідження функції та побудови ескізу графіка.

45) Наведіть приклади задач на екстремум економічного змісту: максимізація прибутку, оптимізація оподаткування підприємств та ін.

46) Опишіть декартову прямокутну систему координат у просторі. Як утворюється координатна сітка цієї системи координат?

47) Що таке скалярні та векторні величини?

48) Які вектори називаються колінеарними? Компланарними? Рівними?

49) Як знаходяться сума, різниця двох векторів і добуток вектора на число?

50) Які властивості мають лінійні операції над векторами?

51) Як знаходяться проекція вектора на ненульовий вектор?

52) Що таке координати вектора? Як здійснюються лінійні операції над векторами в координатній формі?

53) Як знаходяться модуль і напрямні косинуси вектора, заданого в координатній формі?

54) Як формулюється умова колінеарності двох векторів?

55) Як знаходяться координати точки, що ділить відрізок у даному відношенні?

56) Що називається скалярним добутком двох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?

57) У чому полягає умова ортогональності двох векторів?

58) Що називається векторним добутком двох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?

59) Що можна сказати про координати колінеарних векторів?

60) Якщо у скалярному добутку поміняти місцями множники, чи зміниться знак добутку? а у векторному добутку? Поясніть відповідь.

61) У чому полягає геометричний зміст векторного добутку?

62) Що називається мішаним добутком трьох векторів? Як він обчислюється в координатній формі?

63) У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку?

64) У чому полягає умова компланарності трьох векторів?

65) Яка трійка векторів утворює базис? Як знайти координати вектора в даному базисі?

66) Наведіть приклади застосування векторів у фаховій сфері.

67) Що таке вектор нормалі площини? Які його координати?

68) Наведіть основні типи рівняння площини.

69) Які можливі випадки розташування площини відносно координатних осей в залежності від рівності нулю коефіцієнтів загального рівняння?
70) Як з'ясувати, що точка належить площині?
71) Який кут ми вважаємо кутом між двома площинами?
72) Як обчислюється кут між площинами?
73) Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох площин.
74) Як обчислюється відстань від точки до площини?
75) Як знайти точку перетину трьох площин?
76) Що таке напрямний вектор прямої?
77) Наведіть основні типи рівняння прямої у просторі.
78) Як отримати параметричні рівняння прямої з її канонічного рівняння?
79) Як обчислюється кут між прямими у просторі?
80) Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі.
81) Як обчислюється кут між прямою і площиною?
82) Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини.
83) Як знайти точку перетину прямої та площини?
84) Яка поверхня називається сферою? Наведіть канонічне рівняння сфери та рівняння сфери зі зміщеним центром.
85) Які лінії буде отримано, якщо сферу перерізати площинами?
86) Запишіть загальне рівняння поверхні другого порядку.
87) Яка поверхня називається циліндричною? Запишіть канонічні рівняння еліптичного, гіперболічного, параболічного циліндрів.
88) Яка фігура знаходиться в осьовому перерізі циліндричної поверхні?
89) Яка поверхня називається конічною? Наведіть канонічне рівняння конуса другого порядку.
90) Як утворюється поверхня обертання? Як знайти рівняння поверхні, утвореної обертанням заданої кривої, що лежить у координатній площині, навколо однієї з координатних осей цієї ж площини?
91) Запишіть канонічні рівняння еліпсоїда, однопорожнинного і двопорожнинного гіперболоїдів, еліптичного та гіперболічного параболоїдів. Які з цих поверхонь є лінійчатими?
92) Проаналізуйте канонічні рівняння вивчених поверхонь, назвіть їх подібності та відмінності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Алєксєєва І. В. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Практикум / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. – Київ : НТУУ «КПІ», 2013. – 180 с.

2. Алєксєєва І. В. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л.Б. Федорова. – Київ : НТУУ «КПІ», 2013. – 252 с.

3. Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов / А. М. Ахтямов. – Москва : Физматлит, 2004. – 464 с.

4. Бабенко В. В. Збірник задач з вищої математики / В. В. Бабенко, А. Г. Зіневич, С. М. Кічура, Ж. Я. Цаповська. – Львів : ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 2005. – 255 с.

5. Баврин И. И. Высшая математика / И. И. Баврин.– Москва : Академия, 2005. – 616 с.

6. Барабаш Г. М. Практикум з курсу "Вища математика" / Г. М. Барабаш, А. І. Гаталевич, С. М. Кічура, О. Я. Мильо. – Львів : ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 2007. – 157 с.

7. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – Санкт-Петербург : Профессия, 2001. – 432 с.

8. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – Санкт-Петербург : Лань, 2006. – 736 с.

9. Валєєв К. Г. Вища математика: у 2 ч. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – Київ : КНЕУ, 2001. –
Ч.1. – К.: КНЕУ, 2001. – 546 с. Ч.2. – К.: КНЕУ, 2002. – 451 с.

10. Валєєв К. Г. Математичний практикум / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – Київ : КНЕУ, 2004. – 682 с.

11. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – Москва : АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

12. Черняк А. А. Высшая математика на базе Mathcad / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк, Ю. А. Доманова. – Санкт-Петербург : БХВ–Петербург, 2004. – 593 с.

13. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва : АСТ, 2014. – Ч.1 – 303 с., Ч.2 – 415 с.

14. Діскант В. І. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії / В. І. Діскант, Л. Р. Береза, О. П. Грижук, Л. М. Захаренко. – Київ : Вища школа, 2001. – 303 с.

15. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – Київ : Ігнатекс – Україна, 2013. – 648 с.

16. Дубовик В. П. Вища математика: Збірник задач / В. П. Дубовик, І. І. Юрик та ін. – Київ : А.С.К., 2005. – 480с.

17. Дюженкова Л. І. Вища математика. Приклади і задачі / Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін. – Київ : Академія, 2003. – 624с.

18. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометри / Н. В. Ефимов. – Москва : Физматлит, 2005. – 240 с.

19. Жильцов О. Б. Вища математика з елементами інформаційних технологій / О. Б. Жильцов, Г. М. Торбін. – Київ : МАУП, 2002. – 408 с.

20. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец. – Москва : Лань, 2010. – 465 с.

21. Ильин В. А. Высшая математика / В. А. Ильин, А. В. Куркина. – Москва : Проспект, 2012. – 608 с.

22. Клюшин В. Л. Высшая математика для экономистов: задачи, тесты, упражнения / В. Л. Клюшин. – Москва : Юрайт, 2013. – 165 с.

23. Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. – Київ : ЦУЛ, 2009. – 594 с.

24. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – Москва : Наука, 1984. – 832 с.

25. Кривуца В. Г. Вища математика. Практикум / В. Г. Кривуца, В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – Київ : ЦУЛ, 2003. – 536 с.

26. Крицков Л. В. Высшая математика в вопросах и ответах / Л. В. Крицков; под ред. В. А. Ильина. – Москва : Проспект, 2013. – 176 с.

27 Лавренчук В. П. Вища математика. Загальний курс. Частина 1. Лінійна алгебра й аналітична геометрія / В. П. Лавренчук, П. П. Настасієв, О. В. Мартинюк, О. С. Кондур. – Чернівці : Книги – XXI, 2010. – 319 с.

28. Лісовська В. П. Вища математика. Практикум: У 2 ч. / В. П. Лісовська, М. О. Перестюк. – Київ : КНЕУ, 2009.
Ч.1. – 2009. – 706 с.   Ч.2. – 2012. – 748 с.

29. Лиман Ф. М. Вища математика / Ф. М. Лиман, В. Ф. Власенко, С. В. Петренко. – Суми : Університетська книга, 2012. – 614 с.

30. Лурье И. Г. Высшая математика: Практикум / И. Г. Лурье, Т. П. Фунтикова. – Москва : Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 160 с.

31. Лютий О. І. Збірник задач з вищої математики / О. І. Лютий, О. І. Макаренко. – Київ : КНЕУ, 2003. – 305 с.

32. Міхайленко В. М. Збірник прикладних задач з вищої математики / В. М. Міхайленко, Н. Д. Федоренко. – Київ : Вид-во Європ. ун-ту, 2004. – 121 с.

33. Орвис В. EXCEL для ученых, инженеров и студентов / В. Орвис. – Київ : Юниор, 1999. – 528 с.

34. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – Донецьк : Сталкер, 2003. – 495 с.

35. Пантаев М. Ю. Матанализ с человеческим лицом, или как выжить после предельного перехода. Полный курс математического анализа: в 2 т. / М. Ю. Пантаев. – Москва : Либроком, 2014 –
Т.1: Начало анализа. Язык анализа. Предел последовательности. Предел функции и непрерывность. Производная. Основные теоремы дифференциального исчисления. Применение производной. – 2014. – 363 с.
Т.2: Интеграл обыкновенный. Ряды и несобственные интегралы. Функции нескольких переменных. Функции комплексного переменного. Дифференциальные уравнения. – 2014. – 415 с.

36. Пастушенко С. М. Вища математика: Довідник / С. М. Пастушенко, Ю. П. Підченко. – Київ : Діал, 2003. – 461 с.

37. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2 т. / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 2011. Т.1. − 430 с. Т.2. − 580 с.

38. Станішевський С. О. Вища математика / С. О. Станішевський.– Харків : ХНАМГ, 2005.–270 с.

39. Тевяшев А. Д. Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ / А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин. – Харків : Рубікон, 1999. – 320 с.

40. Травкін Ю. І. Математика для економістів / Ю. І. Травкін, Л. М. Малярець. – Харків : ВД «ІНЖЕК», 2005. – 816 с.

41. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометри / О. Н. Цубербиллер. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 336 с.

42. Шипачев В. С. Высшая математика. Полный курс / В. С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. – Москва : Юрайт, 2013. – 607 с.

З М І С Т

Передмова 3

Змістовий модуль 1 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
НА ПЛОЩИНІ. ВСТУП ДО АНАЛІЗУ
ЛІНІЙНА АЛГЕБРА 4
1.1 Пряма лінія на площині 4
1.1.1 Координатна пряма. Числові проміжки.
Модуль дійсного числа 4
1.1.2 Декартова прямокутна система координат
на площині. Відстань між двома точками.
Ділення відрізка у заданому відношенні 6
1.1.3 Рівняння з двома змінними як рівняння лінії 8
1.1.4 Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом 10
1.1.5 Рівняння прямої, що проходить через задану
точку в заданому напрямку. Пучок прямих 12
1.1.6 Рівняння прямої, що проходить
через дві задані точки 13
1.1.7 Загальне рівняння прямої та його окремі випадки 14
1.1.8 Рівняння прямої у відрізках на осях 15
1.1.9 Кут між прямими. Умови паралельності
та перпендикулярності прямих 16
1.1.10 Відстань від точки до прямої 18
1.2 Криві другого порядку 19
1.2.1 Загальне рівняння лінії другого порядку 19
1.2.2 Канонічне рівняння кола 20
1.2.3 Канонічне рівняння еліпса 23
1.2.4 Канонічне рівняння гіперболи 26
1.2.5 Канонічне рівняння параболи 29
1.2.6 Рівняння деяких ліній у параметричній формі 32
1.3 Теорія границь 35
1.3.1 Сталі та змінні величини 35
1.3.2 Класифікація змінних величин 36
1.3.3 Нескінченно малі величини 38
1.3.4 Нескінченно великі величини. Зв'язок
нескінченно малих і нескінченно великих 40
1.3.5 Границя змінної величини та її властивості 42
1.3.6 Розкриття невизначеності виду $0/0$
для многочленів 47

1.3.7 Розкриття невизначеності виду ∞/∞
для многочленів 48
1.3.8 Розкриття невизначеності виду $0/0$
для ірраціональних виразів 49
1.3.9 Ознаки існування границі 50
1.3.10 Перша стандартна границя. Розкриття
невизначеності виду $0/0$
для тригонометричних виразів 51
1.3.11 Друга стандартна границя.
Розкриття невизначеності виду 1^{∞} 54
1.3.12 Порівняння нескінченно малих.
Еквівалентні нескінченно малі 57
1.4 Функція. Неперервність 60
1.4.1 Загальне поняття функції. Області визначення та
значень. Графік функції. Способи задання функції 60
1.4.2 Основні елементарні функції та їх графіки 64
1.4.3 Класифікація функцій за властивостями
та будовою 67
1.4.4 Поняття неперервності функції в точці.
Властивості функцій, які неперервні в точці 73
1.4.5 Односторонні границі. Одностороння неперервність.
Властивості функцій, неперервних на відрізку 76
1.4.6 Точки розриву та їх класифікація 78
1.4.7 Застосування функцій в економіці 81
1.5 Матриці, визначники та операції над ними 83
1.5.1 Означення матриці. Рівність матриць. Види матриць . . 83
1.5.2 Операції над матрицями 85
1.5.3 Визначник матриці. Мінор і алгебраїчне
доповнення. Правило обчислення визначника 87
1.5.4 Основні властивості визначника 91
1.5.5 Обернена матриця та її обчислення 94
1.5.6 Мінори матриці. Ранг матриці 96
1.6 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь
і методи їх розв'язування 98
1.6.1 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
Основні поняття 98
1.6.2 Розв'язування квадратної системи лінійних
алгебраїчних рівнянь за допомогою оберненої матриці . . . 103

1.6.3 Розв'язування квадратної системи лінійних
алгебраїчних рівнянь методом Крамера 104
1.6.4 Розв'язування системи лінійних алгебраїчних
рівнянь методом Гаусса 105
1.6.5 Однорідна квадратна система
лінійних алгебраїчних рівнянь 111
1.6.6 Власні вектори та власні числа квадратної матриці . . 113
1.7 Контрольні запитання 117

Змістовий модуль 2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ 121
2.1 Диференціальне числення функцій однієї змінної . . . 121
2.1.1 Похідна. Її механічний та геометричний зміст 121
2.1.2 Правила диференціювання.
Похідна складеної та оберненої функцій 125
2.1.3 Основні формули диференціювання 127
2.1.4 Диференціювання неявно заданої функції.
Правило логарифмічного диференціювання 130
2.1.5 Похідна параметрично заданої функції 132
2.1.6 Похідні вищих порядків.
Механічний зміст другої похідної 134
2.1.7 Диференціал функції та його властивості.
Диференціали вищих порядків 136
2.1.8 Теореми Ролля і Лагранжа 142
2.1.9 Правило Лопіталя розкриття невизначеностей 143
2.1.10 Формула Тейлора і Маклорена 150
2.2 Застосування похідних для дослідження функцій 152
2.2.1 Умови сталості,зростання та спадання функції 153
2.2.2 Максимум і мінімум функції.
Необхідні умови екстремуму 154
2.2.3 Достатні умови екстремуму функції 156
2.2.4 Найменше та найбільше значення
функції на відрізку 160
2.2.5 Застосування теорії екстремуму
до розв'язування прикладних задач 161
2.2.6 Опуклість і вгнутість графіка функції.
Точки перегину 166

1.6.3 Розв’язування квадратної системи лінійних
алгебраїчних рівнянь методом Крамера 104
1.6.4 Розв’язування системи лінійних алгебраїчних
рівнянь методом Гаусса 105
1.6.5 Однорідна квадратна система
лінійних алгебраїчних рівнянь 111
1.6.6 Власні вектори та власні числа квадратної матриці . . 113
1.7 Контрольні запитання 117

Змістовий модуль 2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ 121
2.1 Диференціальне числення функцій однієї змінної . . . 121
2.1.1 Похідна. Її механічний та геометричний зміст 121
2.1.2 Правила диференціювання.
Похідна складеної та оберненої функцій 125
2.1.3 Основні формули диференціювання 127
2.1.4 Диференціювання неявно заданої функції.
Правило логарифмічного диференціювання 130
2.1.5 Похідна параметрично заданої функції 132
2.1.6 Похідні вищих порядків.
Механічний зміст другої похідної 134
2.1.7 Диференціал функції та його властивості.
Диференціали вищих порядків 136
2.1.8 Теореми Ролля і Лагранжа 142
2.1.9 Правило Лопіталя розкриття невизначеностей 143
2.1.10 Формула Тейлора і Маклорена 150
2.2 Застосування похідних для дослідження функцій 152
2.2.1 Умови сталості,зростання та спадання функції 153
2.2.2 Максимум і мінімум функції.
Необхідні умови екстремуму 154
2.2.3 Достатні умови екстремуму функції 156
2.2.4 Найменше та найбільше значення
функції на відрізку 160
2.2.5 Застосування теорії екстремуму
до розв’язування прикладних задач 161
2.2.6 Опуклість і вгнутість графіка функції.
Точки перегину 166

2.4.13 Кут між прямою та площиною. Умови перпендикулярності та паралельності прямої та площини 209
2.5 Поверхні другого порядку 210
2.5.1 Загальне рівняння поверхні другого порядку 210
2.5.2 Поверхні обертання. Сфера. Еліпсоїд 211
2.5.3 Однопорожнинний гіперболоїд 214
2.5.4 Двопорожнинний гіперболоїд 215
2.5.5 Конічні поверхні. Конус другого порядку 215
2.5.6 Еліптичний параболоїд 216
2.5.7 Гіперболічний параболоїд 217
2.5.8 Циліндричні поверхні. Циліндри другого порядку . . 218
2.6 Контрольні запитання 219

Список літератури 223

Навчальне видання

КОЛОСОВ Анатолій Іванович,
ЯКУНІН Анатолій Вікторович

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

у двох модулях

МОДУЛЬ 1

Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної

(*для студентів денної форми навчання за напрямом підготовки 6.050201 – Системна інженерія*)

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*

За авторською редакцією
Комп'ютерне верстання *А. В. Якунін*

План 2015, поз. 52 Л

Підп. до друку 16.04.2016 Формат 60х84 1/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 14,0
Зам. № Тираж 100 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства ім. О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.