

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ  
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА имени А. Н. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
к выполнению контрольных работ по курсу

# **СФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТРИГОНОМЕТРИЯ**

*(для студентов всех форм обучения  
направления подготовки 6.080101 – Геодезия, картография, землеустройство)*

**ХАРЬКОВ – ХНУГХ им. А. Н. Бекетова – 2016**

Методические указания к выполнению контрольных работ по курсу «Сферическая геометрия и тригонометрия» (для студентов всех форм обучения направления подготовки 6.080101 – Геодезия, картография, землеустройство) / Харьков. нац. ун-т гор. хоз-ва им. А. Н. Бекетова; сост.: С. М. Мордовцев. – Харьков : ХНУГХ им. А.Н. Бекетова, 2016. – 35 с.

Составитель: С.М. Мордовцев

Рецензент: канд. техн. наук, доц. А. В. Якунин

Рекомендовано кафедрой высшей математики, протокол № 4 от 25.11.2015

## Содержание

ВСТУПЛЕНИЕ .....	4
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.....	5
ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ .....	8
РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ .....	11
РЕШЕНИЕ КОСОУГОЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ .....	20
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	24
ПРИЛОЖЕНИЕ А. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.....	25
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ЗАПИСЬ ФОРМУЛ В MS EXCEL .....	27
ПРИЛОЖЕНИЕ В. СОЗДАНИЕ ФУНКЦИИ GADMС().....	34

## ВСТУПЛЕНИЕ

Методические указания напрямую связаны с конспектом лекций специального раздела «Основы сферической геометрии и тригонометрии» и соответствующим дистанционным курсом для специальности «Геодезия, картография, землеустройство». Базовые математические знания, полученные после изучения этого специального раздела, помогут в освоении таких предметов как «Геодезия», «Математические методы в геодезических измерениях», «Спутниковая геодезия и сферическая астрономия», «Геоинформационные технологии».

После изучения теории рекомендуется познакомиться с представленными примерами решения контрольных заданий, а затем решить задачу согласно варианту. Рекомендуется использовать MS Excel. Для этого откройте новую рабочую книгу, переименуйте рабочие листы: КР1, КР2, КР3\_1, КР3\_2, КР3\_3, КР3\_4, КР3\_5, КР4\_1, КР4\_2.

Рекомендуется познакомиться с приложением Б, в котором представлены советы по вводу формул и использованию встроенных функций MS Excel. Следуя инструкции, представленной в приложении, создайте пользовательскую функцию. GRADMC(), которая переводит градусы в десятичных долях в формат град/мин/сек (приложение В).

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

### Контрольная работа № 1

Контрольная (индивидуальная) работа № 1 состоит из двух заданий, которые выбираются студентом согласно варианту.

**Задание 1.** Вычислить длину дуги  $S$  параллели земного шара ( $R=6370$  км), на широте  $\varphi$ , если разница долгот равна  $\Delta\lambda$  (табл. 1.1).

Таблица 1.1

№ вар.	$\Delta\lambda$	$\varphi$	№ вар.	$\Delta\lambda$	$\varphi$
1	1°10'15"	55°45'00"	11	17°19'21"	31°45'17"
2	5°12'17"	54°31'25"	12	20°17'18"	35°40'01"
3	2°11'18"	56°29'30"	13	26°30'17"	40°31'02"
4	25°17'19"	56°50'40"	14	11°29'11"	43°17'07"
5	5°20'30"	89°10'10"	15	9°33'18"	45°18'19"
6	4°31'49"	45°10'02"	16	7°41'35"	46°19'17"
7	10°29'03"	40°21'05"	17	6°31'17"	80°20'03"
8	11°30'41"	39°31'42"	18	15°17'13"	82°17'07"
9	30°10'29"	49°27'12"	19	19°21'34"	85°20'20"
10	26°11'30"	44°31'11"	20	13°31'11"	81°30'15"

**Задание 2.** Длина дуги  $AB$  параллели земного шара на широте  $\varphi^\circ$  равна  $S$ . Определить длину дуги  $L$  экватора между меридианами, проходящими через точки  $A$  та  $B$ .

Таблица 1.2

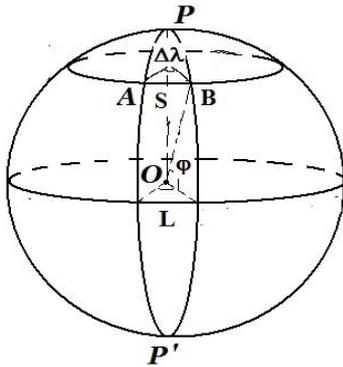
№ вар.	$S$	$\varphi$	№ вар.	$S$	$\varphi$
1	1200	31°45'17"	11	100	55°45'00"
2	1800	35°40'01"	12	320	54°31'25"
3	2240	40°31'02"	13	140	56°29'30"
4	900	43°17'07"	14	1600	56°50'40"
5	720	45°18'19"	15	8	89°10'10"
6	600	46°19'17"	16	360	45°10'02"
7	120	80°20'03"	17	890	40°21'05"
8	300	82°17'07"	18	1000	39°31'42"
9	180	85°20'20"	19	2180	49°27'12"
10	250	81°30'15"	20	2076	44°31'11"

Примеры решения контрольной работы № 1

**Задание 1.** Вычислить длину дуги S параллели земного шара (R=6370 км), на широте  $\varphi^{\circ}=42^{\circ}31'25''$  (рис.1.1), если разница долгот  $\Delta\lambda^{\circ}=8^{\circ}12'11''$ .

**Решение.** Согласно формуле (2) п.3.1.2 длина дуги определяется по формуле

$$S=R \cdot \Delta\lambda \cdot \cos\varphi,$$



где  $\Delta\lambda^{\circ}=8^{\circ}12'11''=8^{\circ}+12/60+11/3600=8,203056^{\circ}$

или в радианах –  $\Delta\lambda=\pi\Delta\lambda^{\circ}/180^{\circ}=0,14317$ ;

$\varphi^{\circ}=42^{\circ}31'25''=42^{\circ}+31/60+25/3600=42,523611^{\circ}$

или в радианах –  $\varphi=\varphi^{\circ}\pi/180=0,742177$ .

Тогда  $S=6370 \cdot 0,14317 \cdot \cos(0,742177)=672,14$  км

Задачу рекомендуется решать с помощью MS Excel (рис 1.2).

Рисунок 1.1.

D8		fx		=B1*E7*cos(E4)	
	A	B	C	D	E
1	R=	6370	км		
2	$\varphi$				
3	град	мин	сек	дес.град	радианы
4	42	31	25	42,52361	0,742177
5	$\Delta\lambda$				
6	град	мин	сек	дес.град	радианы
7	8	12	11	8,203056	0,14317
8	Длина дуги S=				672,1393

В ячейку D4 запишите формулу, переводящую угол  $\varphi^{\circ}$  в десятичные доли градуса: =A4+B4/60+C4/3600

В ячейку E4 введите формулу, переводящую угол в радианы:

$$=\text{РАДИАНЫ}(D4)$$

По аналогичным формулам вычисляется угол  $\Delta\lambda$ .

Рисунок 1.2

Наконец, в ячейку D8 запишите формулу, вычисляющую длину дуги S:

$$=B1*E7*cos(E4)$$

Замечание: Опытные пользователи могут сразу записать формулу, вычисляющую длину дуги S:

$$=B1*РАДИАНЫ(A7+B7/60+C7/3600)*(COS(РАДИАНЫ(A4+B4/60+C4/3600)))$$

**Задание 2.** Длина дуги  $AB$  параллели земного шара ( $R=6370$  км), на широте  $\varphi^0=40^{\circ}28'10''$  равна  $S=720$  км. (рис. 1.1) Вычислить длину дуги экватора  $L$  между меридианами, которые проходят через точки  $A$  и  $B$ .

	A	B	C	D	E
1	S=	720	км		
2		град	мин	сек	
3	$\varphi=$	40	28	10	
4	$\varphi=$	40,46944			
5	$\varphi=$	0,706325			
6	$\cos(\varphi)=$	0,760752			
7	L=	946,4317	км		
8					

Рисунок 1.3

**Решение.** Длина дуги экватора, отсекаемая двумя меридианами, определяется по формуле  $L=R \cdot \Delta\lambda$ , где  $\Delta\lambda$  - разница долгот точек  $B$  и  $A$ , которая определяется по формуле  $\Delta\lambda=S/(R\cos\varphi)$ . Таким образом,  $L=S/\cos\varphi$ .

Решение с помощью MS Excel представлено на рис 1.3.

Замечание: Опытные пользователи могут сразу записать формулу, вычисляющую длину дуги  $L$ :  $=B1/(COS(РАДИАНЫ(B3+C3/60+D3/3600)))$

## ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

### Контрольная работа № 2

Контрольная (индивидуальная работа) № 2 состоит из двух задач, которые выбираются студентом согласно варианту.

**Задание 1.** Найти кратчайшее расстояние (ортодромию) между городами, (табл.2.1). Координаты городов указаны в таблице 2.2.

Таблица 2.1

Вар.	Город 1	Город 2	Вар.	Город 1	Город 2
<b>1</b>	Киев	Винница	<b>13</b>	Черновцы	Черкассы
<b>2</b>	Днепропетровск	Житомир	<b>14</b>	Киев	Сумы
<b>3</b>	Донецк	Ивано-Франковск	<b>15</b>	Чернигов	Днепропетровск
<b>4</b>	Киев	Симферополь	<b>16</b>	Донецк	Одесса
<b>5</b>	Кировоград	Запорожье	<b>17</b>	Харьков	Львов
<b>6</b>	Львов	Сумы	<b>18</b>	Киев	Днепропетровск
<b>7</b>	Одесса	Луганск	<b>19</b>	Одесса	Ровно
<b>8</b>	Черновцы	Харьков	<b>20</b>	Житомир	Запорожье
<b>9</b>	Херсон	Луганск	<b>21</b>	Луцк	Харьков
<b>10</b>	Луганск	Ужгород	<b>22</b>	Луганск	Чернигов
<b>11</b>	Черкассы	Львов	<b>23</b>	Ужгород	Донецк
<b>12</b>	Кировоград	Хмельницкий	<b>24</b>	Ивано-Франковск	Кировоград

Таблица 2.2

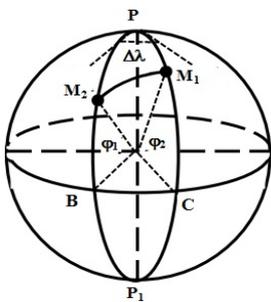
Город	Широта	Долгота	Город	Широта	Долгота
Винница	49°14'	28°29'	Полтава	49°34'	34°34'
Днепропетровск	48°27'	34°59'	Ровно	50°37'	26°15'
Донецк	48°00'	37°48'	Симферополь	44°56'	34°6'
Житомир	50°15'	28°40'	Сумы	50°55'	34°45'
Запорожье	47°50'	35°10'	Тернополь	49°34'	25°36'
Ивано-Франковск	48°55'	24°43'	Ужгород	48°37'	22°18'
Киев	50° 27'	30°30'	Харьков	50°00'	36°15'
Кировоград	48°30'	32°16'	Херсон	46°38'	32°35'
Луганск	48°35'	39°20'	Хмельницкий	49°25'	26°58'

Продолжение таблицы 2.2

Город	Широта	Долгота	Город	Широта	Долгота
Луцк	50°45'	25°20'	Черкаскы	48°25'	32°04'
Львов	49°50'	24°00'	Чернигов	51°30'	31°18'
Одесса	46°28'	30°44'	Черновцы	48°18'	25°56'

**Задание 2.** Выберите на карте мира любой город, определите его координаты и вычислите кратчайшее расстояние между Харьковом и выбранным городом.

Пример решения контрольной работы № 2



**Задание 1.** Определить кратчайшее расстояние (ортодромию) между Берлином (52°30'17" СШ; 13°23'44" ВД) и Парижем (48°50'11" СШ; 2°20'15" ВД). Радиус земли R=6371 км.

**Решение.** Рассмотрим сферический треугольник  $M_1PM_2$  (рис. 2.1). Для определения ортодромии воспользуемся формулой косинуса стороны сферического треугольника:

Рисунок 2.1

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A .$$

Так как  $BC$  – дуга экватора,  $P$  – полюс, то стороны  $\Delta M_1PM_2$  равны  $M_1P = 90^\circ - \varphi_1$ ;  $M_2P = 90^\circ - \varphi_2$ . Разница долгот - это угол  $\angle M_1PM_2 = \Delta\lambda$ . Тогда, в нашем случае формула приобретает вид:

$$\cos M_1M_2 = \cos (90^\circ - \varphi_1) \cos(90^\circ - \varphi_2) + \sin(90^\circ - \varphi_1)\sin(90^\circ - \varphi_2) \cos \Delta\lambda$$

или

$$\cos M_1M_2 = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \Delta\lambda \quad (*)$$

Вычисления рекомендуется проводить с помощью MS Excel (рис 2.2).

**Краткие указания.** Градусы переводятся в радианы, подсчитываются косинусы и синусы с использованием встроенных функций COS(), SIN(). Затем в ячейку B11 записывается формула (\*) в виде: =B9\*B10+B6\*B7\*B8.

Дуга  $M_1M_2$  вычисляется в радианах с использованием функции арккосинус:  $=ACOS(B11)$ . Длина дуги  $M_1M_2$  вычисляется по формуле:  $=6371*B12$ . Таким образом, расстояние между Парижем и Берлином примерно равно 787 км.

B13       $\text{=ОКРУГЛ}(B12*6371;0)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	координаты	широта $\varphi$					долгота $\lambda$				
2	точек	град	мин	сек	десятичная мера	радианы	град	мин	сек	десятичная мера	радианы
3	Париж	48	50	11	48,83639	0,85236	2	20	15	2,3375	0,0408
4	Берлин	52	30	17	52,50472	0,91638	13	23	44	13,39556	0,2338
5	разность долгот угол $\Delta \lambda$									11,05806	0,193
6	$\cos(\Delta\lambda)$	0,9814									
7	$\cos(\varphi_1)$	0,6582									
8	$\cos(\varphi_2)$	0,6087									
9	$\sin(\varphi_1)$	0,7528									
10	$\sin(\varphi_2)$	0,7934									
11	$\cos(M_1M_2)$	0,9905									
12	$M_1M_2$ в рад.	0,1379									
13	расстояние $M_1M_2$	<b>878</b>	км								

Рисунок 2.2 – Решение задачи

## РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

### Контрольная работа № 3

Контрольная (индивидуальная) работа № 3 состоит из пяти заданий, которые выбираются студентом согласно варианту.

**Задания 1-5.** По заданным элементам прямоугольного сферического треугольника определить его остальные элементы (табл. 3.1-3.5).

Таблица 3.1 – Даны гипотенуза  $a$  и катет  $b$

№	$a$	$b$	№	$a$	$b$
1	61°07'08"	33°18'17"	11	61°07'08"	54°41'47"
2	32°08'00"	23°50'48"	12	32°08'00"	22°12'00"
3	64°03'10"	40°04'16"	13	64°03'10"	55°07'35"
4	107°17'00"	143°12'03"	14	107°17'00"	68°13'15"
5	83°01'04"	73°02'12"	15	83°01'04"	65°22'56"
6	58°40'13"	15°15'42"	16	58°40'13"	12°22'39"
7	78°21'49"	13°02'17"	17	78°21'49"	78°03'04"
8	83°01'04"	73°02'12"	18	83°01'04"	65°22'56"
9	115°56'50"	124°52'25"	19	58°40'13"	15°15'42"
10	80°52'27"	72°13'48"	20	64°03'10"	40°04'16"

Таблица 3.2 – Даны два катета  $b$  и  $c$

№	$b$	$c$	№	$b$	$c$
1	48°27'21"	33°07'37"	11	50°00'00"	52°55'26"
2	51°02'48"	12°16'42"	12	57°13'00"	98°47'00"
3	48°54'54"	12°16'42"	13	108°07'00"	39°03'05"
4	50°00'00"	52°55'26"	14	43°18'02"	118°53'58"
5	2°44'00"	11°38'11"	15	75°18'12"	118°09'21"
6	43°18'02"	118°53'58"	16	98°47'00"	57°13'00"
7	75°18'12"	118°09'21"	17	52°55'26"	50°00'00"
8	47°15'00"	56°25'00"	18	56°25'00"	47°15'00"
9	63°31'26"	58°40'30"	19	58°40'30"	63°31'26"
10	2°44'00"	11°38'11"	20	12°16'42"	48°54'54"

Таблица 3.3 – Дана гипотенуза  $a$  и прилежащий угол  $B$

№	$a$	$B$	№	$a$	$B$
1	40°33'40"	65°58'47"	11	120°38'43"	116°56'17"
2	127°32'26"	21°08'18"	12	115°17'20"	19°13'50"
3	120°38'43"	44°54'44"	13	60°21'19"	32°39'23"
4	115°17'20"	98°28'30"	14	87°16'00"	76°57'43"
5	60°21'19"	72°24'40"	15	44°44'18"	47°37'21"
6	87°16'00"	78°21'49"	16	60°22'25"	38°57'12"
7	44°44'18"	52°05'54"	17	87°16'00"	78°21'49"
8	60°22'25"	68°12'58"	18	120°38'43"	116°56'17"
9	40°33'40"	30°23'50"	19	115°17'20"	19°13'50"
10	127°32'26"	103°15'23"	20	60°16'00"	78°03'04"

Таблица 3.4 – Дан катет  $b$  и прилежащий угол  $C$

№	$b$	$C$	№	$b$	$C$
1	54°06'20"	73°11'06"	11	118°12'48"	55°30'20"
2	60°38'07"	40°56'23"	12	74°21'53"	52°05'54"
3	50°00'00"	59°56'10"	13	54°08'20"	73°11'06"
4	28°07'10"	8°19'25"	14	37°52'18"	49°21'45"
5	64°30'09"	132°44'57"	15	60°38'07"	40°56'23"
6	37°52'18"	49°21'45"	16	38°25'51"	47°30'18"
7	50°00'00"	59°56'10"	17	28°07'10"	8°19'25"
8	2°44'00"	78°21'49"	18	64°30'09"	132°44'57"
9	28°07'10"	8°19'25"	19	54°06'20"	73°11'06"
10	64°30'09"	132°44'57"	20	60°38'07"	40°56'23"

Таблица 3.5 – Даны два угла  $B$  и  $C$

№	$B$	$C$	№	$B$	$C$
1	58°27'40"	53°43'14"	11	53°43'14"	58°27'40"
2	32°14'03"	64°59'40"	12	64°59'40"	32°14'13"
3	42°38'51"	63°13'22"	13	63°13'22"	42°38'51"
4	11°56'56"	87°16'00"	14	66°20'00"	74°30'00"
5	77°43'18"	52°05'51"	15	87°16'00"	11°56'56"
6	74°30'00"	66°20'00"	16	52°30'00"	48°12'17"
7	48°12'47"	52°30'00"	17	140°10'04"	70°05'02"
8	13°19'00"	87°16'00"	18	87°16'00"	13°19'00"
9	70°05'02"	140°10'04"	19	58°27'40"	53°43'14"
10	87°16'00"	13°19'00"	20	42°38'51"	63°13'22"

### Примеры решения заданий контрольной работы № 3

Для решения рекомендуется использовать формулы:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c \\ \cos a &= \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \\ \cos B &= \sin C \cos b \\ \cos C &= \sin B \cos c \\ \sin b &= \sin a \sin B \\ \sin c &= \sin a \sin C \\ \cos C &= \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} b \\ \sin b &= \operatorname{ctg} C \operatorname{tg} c \\ \cos B &= \operatorname{ctg} a \operatorname{tg} c \\ \sin c &= \operatorname{ctg} B \operatorname{tg} b \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если решение треугольника существует, то для исследуемых случаев оно единственное. При решении необходимо проводить контроль правильности расчетов и следить, чтобы значения элементов отвечали условиям существования сферического треугольника

Настоятельно рекомендуем пользоваться MS Excel, что существенно облегчает решение задач.

**Задание 1.** Даны гипотенуза  $a=80^{\circ}10'25''$  и катет  $b=47^{\circ}38'36''$ . Найти катет  $c$ , углы  $A$  и  $B$ .

**Указания к решению.** Из десяти формул (1) выбираем следующие

$$\cos a = \cos b \cos c; \quad \sin b = \sin a \cdot \sin B; \quad \cos C = \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{tg} b$$

Тогда неизвестные элементы определяются по формулам

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \quad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}, \quad \cos C = \operatorname{tg} b / \operatorname{tg} a$$

Далее проведите контроль правильности решения, проверив условия существования прямоугольного сферического треугольника.

$$1. \quad 90^{\circ} < B + C < 270^{\circ}; \quad -90 < B - C < 90:$$

2.  $0 < a + b + c < 360^0$ :
3.  $a + b > c, a + c > b, b + c > a, b > c - a, a > b - c, c > b - a$ :
4. Произвольный катет и противоположный ему угол всегда однородны.
5. Если катеты однородны, то гипотенуза должна быть меньше  $90^0$  и т.д.
6. Формула для контроля должна связывать найденные элементы. Из (1) выбираем равенство  $\cos C = \sin B \cdot \cos c$ .

**Решение с использованием MS Excel.** Решение представлено на рисунке 3.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Дана гипотенуза и катет								
2									
3		град	мин	сек	десятичная форма	радианы	cos	sin	tg
4	гипотенуза a	80	10	25	80,1736	1,3993	0,170663	0,98533	5,77353
5	катет b	47	38	36	47,6433	0,8315	0,673744	0,73897	1,0968
6	элемент						Использована формула		
7	$\cos(c)=$	0,2533					$\cos(c)=\cos(a)/\cos(b)$		
8	$c=$	1,3147	рад	75,327	дес.град	75°19'36"			
9	$\sin B=$	0,7500					$\sin(B)=\sin(b)/\sin(a)$		
10	$B=$	0,8480	рад	48,588	дес.град	48°35'15"			
11	$\cos C=$	0,1900					$\cos(C)=\text{tg}(b)/\text{tg}(a)$		
12	$C=$	1,3797	рад	79,049	дес.град	79°2'56"			
13									
14	Контроль решения		0,189971	=	0,1899713		$\cos(C)=\sin(B)\cos(c)$		
15									

Рисунок 3.1 – Решение задания 1

1. В ячейку E4 запишите формулу:  $=B4+C4/60+D4/3600$
2. Скопируйте формулу в ячейку E5.
3. В ячейку F4 запишите формулу:  $=\text{РАДИАНЫ}(E4)$  и снова скопируйте формулу.
4. В ячейку G4, H4, I4 запишите формулы:  $=\text{COS}(F4) = \text{SIN}(F4) = \text{TAN}(F4)$
5. Скопируйте формулы в соответствующие ячейки пятой строки.
6. Для определения  $\cos c$  в ячейку B7 запишите формулу:  $=G4/G5$
7. Для определения катета c в радианах в ячейку B8 запишите формулу:  $=\text{ACOS}(B7)$
8. Для того чтобы получить значение катета c в десятичных долях градуса в ячейку D8 запишите формулу:  $=\text{ГРАДУСЫ}(B8)$

9. Для того чтобы получить значение катета  $c$  в градусах-минутах-секундах в ячейку F8 запишите формулу в одну строку:

=ЦЕЛОЕ(D8)&"°"&ЦЕЛОЕ((D8-ЦЕЛОЕ(D8))\*60)&"'"&ОКРУГЛ(60\*((D8-ЦЕЛОЕ(D8))\*60-ЦЕЛОЕ((D8-ЦЕЛОЕ(D8))\*60));0)&"''''''"

Либо используйте пользовательскую функцию: =GRADMC(D8), если вы создали ее в рабочей книге MS Excel (см.ПРИЛОЖЕНИЕ).

Остальные формулы введите самостоятельно.

Проведем контроль правильности решения, проверив условия существования прямоугольного сферического треугольника .

1. Проверим условия  $90^0 < B+C < 270^0$ ;  $-90^0 < B-C < 90^0$ :

$$90^0 < 48^0 35' 15'' + 79^0 2' 56'' < 270^0; -90^0 < 48^0 35' 15'' - 79^0 2' 56'' < 90^0$$

2. Проверим условие  $0 < a+b+c < 360^0$   $80^0 10' 25'' + 47^0 38' 36'' + 75^0 19' 36'' < 360^0$

3. Проверим условия  $a+b > c$ ,  $a+c > b$ ,  $b+c > a$ ,  $b > c-a$ ,  $a > b-c$ ,  $c > b-a$  :

$$80^0 10' 25'' + 47^0 38' 36'' > 75^0 19' 36''; \blacksquare$$

$$80^0 10' 25'' + 75^0 19' 36'' > 47^0 38' 36''; \blacksquare$$

$$47^0 38' 36'' + 75^0 19' 36'' > 80^0 10' 25''; \blacksquare$$

$$47^0 38' 36'' > 75^0 19' 36'' - 80^0 10' 25'' \text{ и т.д.} \blacksquare$$

4. Произвольный катет и противоположный ему угол всегда однородны. В нашем случае условие выполняется, например,  $b < 90^0$ ,  $B < 90^0$  и т.д.

5. Формула для контроля должна связывать найденные элементы. Из (1, п.4.1) выбираем равенство  $\cos C = \sin B \cdot \cos c$ . Подставим найденные значения (рис.3.1):

$$0,189971 = 0,189971$$

Ответ:  $c=75^0 19' 36''$ ;  $B=48^0 35' 15''$ ;  $C=79^0 2' 11''$

**Задание 2.** Даны катет  $b=150^0 52' 40''$  и катет  $c=114^0 15' 54''$ . Найти гипотенузу  $a$ , углы  $B$  и  $C$ .

**Указания к решению.** Из десяти формул (1) выбираем следующие

$$\cos a = \cos b \cos c; \sin c = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{tg} b; \sin b = \operatorname{ctg} C \cdot \operatorname{tg} c$$

Тогда неизвестные элементы определяются по формулам

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c, \quad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tgb}}{\operatorname{sinc}}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tgc}}{\operatorname{sinb}}$$

Формула для контроля должна связывать найденные элементы. Из (1) выбираем равенство  $\cos a = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C$ . Проверьте другие условия существования прямоугольного сферического треугольника.

**Решение** представлено на рисунке 3.2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	<b>Даны два катета</b>								
2		град	мин	сек	десятичная форма	радианы	cos	sin	tg
3	катет <i>b</i>	150	52	40	150,8778	2,6333	-0,87358	0,486674	-0,5571
4	катет <i>c</i>	114	15	54	114,2650	1,9943	-0,41096	0,911654	-2,21837
5	элемент						Использована формула		
6	$\cos(a) =$	0,35901					$\cos(a) = \cos(b)\cos(c)$		
7	$a =$	1,20359	рад	68,9609	дес.град	68°57'39"			
8	$\operatorname{tg}(B) =$	-0,6111					$\operatorname{tg}(B) = \operatorname{tg}(b)/\operatorname{sin}(c)$		
9	$B =$	-0,5485	рад	148,571	дес.град	148°34'17"			
10	$\operatorname{tg}(C) =$	-4,5582					$\operatorname{tg}(C) = \operatorname{tg}(c)/\operatorname{sin}(b)$		
11	$C =$	-1,3548	рад	102,374	дес.град	102°22'26"			
12	Контроль решения		0,359006	=	0,359006		$\cos(a) = \operatorname{ctg}(B)\operatorname{ctg}(C)$		

Рисунок 3.2 – Решение задания 3.2

Так как  $\operatorname{tg} B$  и  $\operatorname{tg} C$  – отрицательны, то угол в градусах в ячейках D9 и D11 должен вычисляться по формулам:

$$=\text{ГРАДУСЫ}(B9)+180$$

$$=\text{ГРАДУСЫ}(B11)+180$$

Тогда будут выполнены условия существования прямоугольного сферического треугольника.

1. Так как  $b > 90^0$ , то  $B$  должен быть больше  $90^0$ , катет  $c > 90^0$ , то угол  $C$  должен быть больше  $90^0$ .
2. Катеты однородны, т.е. больше  $90^0$ . Следовательно гипотенуза должна быть меньше  $90^0$ .
3. Формула для контроля должна связывать найденные элементы. Равенство  $\cos a = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C$  выполнено, т.е.  $0,3590057 = 0,3590057$  (рис. 3.2).

Проверьте самостоятельно другие условия существования прямоугольного сферического треугольника.

Ответ:  $a=68^{\circ}57'39''$ ;  $B=148^{\circ}34'17''$ ;  $C=102^{\circ}22'26''$

**Задание 3.** Даны гипотенуза  $a=56^{\circ}15'42''$  и прилежащий к ней угол  $C=41^{\circ}5'6''$ . Найти катеты и угол  $B$ .

**Указания к решению.** Из десяти формул (1) выбираем следующие

$$\cos C = ctg a \cdot tg b; \sin c = \sin a \cdot \sin C; \cos a = ctg B \cdot ctg C$$

Тогда неизвестные элементы определяются по формулам

$$tg b = tga \cdot \cos C, \quad \sin c = \sin a \cdot \sin C, \quad tg B = \frac{1}{\cos a \cdot tg C}$$

Формула контроля  $\sin c = ctg B \cdot tg b$

Далее проведите контроль правильности решения, проверив условия существования прямоугольного сферического треугольника.

**Решение** представлено на рисунке 3.3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	<b>Гипотенуза и прилежащий угол</b>								
2		град	мин	сек	десятичная доля градуса	радианы	cos	sin	tg
3	гипотенуза a	56	15	42	56,2617	0,9820	0,555401	0,831583	1,497266
4	угол C	41	5	6	41,0850	0,7171	0,753735	0,657178	0,871895
5	элемент						Использована формула		
6	$tg(b) =$	1,1285422					$tg(b) = tg(a) \cos(C)$		
7	$b =$	0,8457147	рад	48,45588	дес.град	48°27'21"			
8	$\sin(c) =$	0,5464978					$\sin(c) = \sin(a) \sin(C)$		
9	$c =$	0,5781766	рад	33,12708	дес.град	33°7'37"			
10	$tg(B) =$	2,0650443					$tg(B) = 1 / (\cos(a) tg(C))$		
11	$B =$	1,119827	рад	64,16136	дес.град	64°9'41"			
12	Контроль решения			0,5464978	=	0,5464978	$\sin(c) = ctg(B) tg(b)$		

Рисунке 3.3 – Решение задания 3.3

Контроль решения.

1. Так как  $b < 90^{\circ}$ , то  $B$  должен быть меньше  $90^{\circ}$ ,  $C < 90^{\circ}$ , то катет  $c$  должен быть меньше  $90^{\circ}$ .
2. Катеты однородны, следовательно, гипотенуза должна быть меньше  $90^{\circ}$ .
3. Формула для контроля  $\sin c = ctg B \cdot tg b$  принимает вид  $0,5464978 = 0,5464978$ .

Проверьте самостоятельно другие условия существования прямоугольного сферического треугольника.

Ответ:  $b=48^{\circ}27'21''$ ;  $c=33^{\circ}7'37''$ ;  $B=64^{\circ}9'41''$ .

**Задание 4.** Дан катет  $b=37^{\circ}52'09''$  и прилежающий угол  $C=45^{\circ}34'35''$ . Найти катет  $c$ , угол  $B$ , гипотенузу  $a$ .

**Указания к решению.** Из десяти формул (1) выбираем следующие

$$\cos C = ctga \cdot tg b; \sin b = tgc \cdot ctg C; \cos B = \cos b \cdot \sin C$$

Тогда неизвестные элементы определяются по формулам

$$tga = tgb / \cos C, \quad tgc = \sin b \cdot tg C, \quad \cos B = \cos b \cdot \sin C$$

Далее проведите контроль правильности решения  $\cos B = tgc / tga$  и проверьте условия существования прямоугольного сферического треугольника.

**Решение** представлено на рисунке 3.4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	<b>Даны катет и прилежащий угол</b>								
2		град	мин	сек	десятичная форма	радианы	cos	sin	tg
3	катет $b$	37	52	9	37,8692	0,66094	0,789415	0,61386	0,777615
4	угол $C$	45	34	35	45,5764	0,79546	0,699958	0,714184	1,020325
5	элемент						Использована формула		
6	$tg(a) =$	1,11095					$tg(a) = tg(b) / \cos(C)$		
7	$a =$	0,83791	рад	48,0085	дес.град	48°0'31"			
8	$tg(c) =$	0,62634					$tg(c) = \sin(b) \cdot tg(C)$		
9	$c =$	0,55956	рад	32,0604	дес.град	32°3'38"			
10	$\cos(B) =$	0,56379					$\cos(B) = \cos(b) \cdot \sin(C)$		
11	$B =$	0,97183	рад	55,6819	дес.град	55°40'55"			
12	Контроль решения	0,5637875		=	0,5637875		$\cos(B) = tg(c) / tg(a)$		

Рисунке 3.4 – Решение задания 3.4

Контроль решения. 1. Так как  $b < 90^{\circ}$ , то  $B$  должен быть меньше  $90^{\circ}$ ,  $C < 90^{\circ}$ , то катет  $c$  должен быть меньше  $90^{\circ}$ .

2. Катеты однородны, значит гипотенуза должна быть меньше  $90^{\circ}$  (п.4.2).

3. Формула для контроля  $\cos B = tgc / tga$  принимает вид  $0,563787 = 0,563787$ .

Проверьте самостоятельно другие условия существования прямоугольного сферического треугольника.

Ответ:  $a=48^{\circ}00'31''$ ;  $c=32^{\circ}03'38''$ ;  $B=55^{\circ}40'55''$

**Задания 5.** Даны два угла  $B=80^{\circ}10'32''$  и  $C=154^{\circ}58'28''$ . Найти катеты  $b$ ,  $c$  и гипотенузу  $a$ .

**Указания к решению.** Из десяти формул (1) выбираем следующие

$$\cos B = \sin C \cdot \cos b; \cos a = \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C; \cos C = \cos c \cdot \sin B$$

Тогда неизвестные элементы определяются по формулам

$$\cos a = \frac{1}{\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}, \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}, \quad \cos c = \cos C / \sin B$$

Далее проведите контроль правильности решения  $\cos a = \cos b \cdot \cos c$  и проверьте условия существования прямоугольного сферического треугольника.

**Решение** представлено на рисунке 3.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Два угла								
2		град	мин	сек	десятичная доля градуса	радианы	cos	sin	tg
3	угол B	80	10	32	80,1756	1,3993	0,17063	0,985335	5,774693
4	угол C	154	58	28	154,9744	2,7048	-0,90612	0,423022	-0,46685
5	элемент						Использована формула		
6	$\cos(a)=$	-0,370931					$\cos(a)=1/(\operatorname{tg}(B)\operatorname{tg}(C))$		
7	$a=$	1,9508076	рад	111,77304	дес.град	111°46'23"			
8	$\cos(b)=$	0,4033589					$\cos(b)=\cos(B)/\sin(C)$		
9	$b=$	1,1556116	рад	66,211669	дес.град	66°12'42"			
10	$\cos(c)=$	-0,919605					$\cos(c)=\cos(c)/\sin(B)$		
11	$c=$	2,7378702	рад	156,86841	дес.град	156°52'6"			
12	Контроль решения			-0,3709309	=	-0,370931	$\cos(a)=\cos(b)\cos(c)$		

Рисунок 3.5 – Решение задания 3.5

Контроль решения. 1. Так как  $B < 90^{\circ}$ , то катет  $b$  должен быть меньше  $90^{\circ}$ ,  $C > 90^{\circ}$ , то катет  $c$  должен быть больше  $90^{\circ}$ .

2. Катеты неоднородны, значит, гипотенуза должна быть больше  $90^{\circ}$ .

3. Формула для контроля  $\cos a = \cos b \cdot \cos c$  принимает вид  $-0,370909 = -0,370909$ .

Проверьте самостоятельно другие условия существования прямоугольного сферического треугольника.

Ответ:  $a=111^{\circ}46'23''$ ;  $b=66^{\circ}12'42''$ ;  $c=156^{\circ}52'06''$

## РЕШЕНИЕ КОСОУГОЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

### Контрольная работа № 4

Контрольная (индивидуальная) работа № 4 состоит из двух заданий, которые выбираются студентом согласно варианту.

**Задания 1-2.** По заданным элементам косоугольного сферического треугольника определить его остальные элементы (табл. 4.1-4.2).

Таблица 4.1 – Даны три стороны треугольника. Найти его углы.

№	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	№	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
1	34°12'48"	42°55'12"	51°02'30"	11	109°14'32"	65°46'04"	80°38'18"
2	59°46'20"	83°17'38"	96°04'22"	12	129°16'54"	45°09'46"	112°58'04"
3	82°11'17"	64°19'21"	31°31'30"	13	39°01'40"	77°18'34"	69°32'35"
4	69°34'26"	57°49'22"	114°16'14"	14	60°31'41"	117°28'18"	78°42'26"
5	60°31'42"	117°28'19"	78°42'23"	15	142°47'00"	118°48'00"	83°17'00"
6	171°18'12"	54°07'16"	133°09'24"	16	51°12'26"	75°03'10"	45°55'52"
7	42°18'00"	17°12'00"	58°30'00"	17	42°55'12"	34°12'48"	51°02'30"
8	79°33'20"	65°28'20"	37°51'40"	18	64°19'12"	82°11'17"	31°31'30"
9	30°04'56"	27°32'22"	32°15'48"	19	117°27'59"	60°32'00"	78°42'23"
10	69°30'36"	62°20'54"	39°46'43"	20	65°28'20"	37°51'40"	79°33'20"

Таблица 4.2 – Даны три угла треугольника. Найти его стороны

№	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	№	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
1	62°05'40"	54°36'10"	70°14'30"	11	132°54'22"	44°08'36"	36°17'49"
2	90°40'16"	71°00'36"	43°04'39"	12	112°56'18"	70°56'10"	57°54'54"
3	116°08'04"	60°07'25"	69°45'17"	13	118°19'56"	31°16'39"	48°37'53"
4	123°15'06"	50°00'20"	84°07'18"	14	32°56'31"	128°13'15"	56°40'54"
5	40°00'48"	95°02'16"	73°04'34"	15	36°28'26"	111°50'54"	52°14'16"
6	47°59'12"	130°46'58"	56°48'52"	16	106°59'00"	56°55'00"	100°40'00"
7	148°14'00"	130°18'00"	120°12'00"	17	121°15'13"	81°36'20"	34°15'36"
8	49°54'13"	108°30'47"	44°50'42"	18	64°40'30"	22°48'09"	106°43'40"
9	83°42'39"	54°16'13"	55°05'54"	19	120°26'21"	39°04'28"	57°46'10"
10	132°54'22"	44°08'36"	36°17'49"	20	74°32'10"	49°10'18"	61°09'50"

Примеры решения заданий контрольной работы № 4

При решении необходимо следить, чтобы значения элементов удовлетворяли условиям существования сферического треугольника. Если результаты удовлетворяют условиям существования сферического треугольника, то в исследуемых случаях решение однозначно.

**Задание 1.** Даны стороны косоугольного сферического треугольника  $a=60^{\circ}31'42''$ ,  $b=117^{\circ}28'19''$ ,  $c=78^{\circ}42'23''$  Найти углы  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

**Указания к решению.** Для решения используются формулы

$$\operatorname{tg}(A/2) = \frac{M}{\sin(p-a)}; \operatorname{tg}(B/2) = \frac{M}{\sin(p-b)}; \operatorname{tg}(C/2) = \frac{M}{\sin(p-c)};$$

где  $M = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}$ ,  $p = \frac{a+b+c}{2}$ .

Для контроля вычислений можно использовать соотношение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{M}{\sin(p)}$$

Необходимо, чтобы выполнялись условия  $180^{\circ} < A + B + C < 540^{\circ}$ ,  
 $A + B - C < 180^{\circ}$ ,  $A + C - B < 180^{\circ}$ ,  $C + B - A < 180^{\circ}$ .

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>Три стороны</b>						
2		град	мин	сек	десятичная форма	радианы	
3	$a=$	60	31	42	60,5283	1,0564	
4	$b=$	117	28	19	117,4719	2,0503	
5	$c=$	78	42	23	78,7064	1,3737	
6		$p=$				2,2402	
7	$\sin(p-a)=$	0,9260	<b>Вычисление углов</b>				
8	$\sin(p-b)=$	0,1888			радианы	десятичная форма	град/мин/сек
9	$\sin(p-c)=$	0,7621		$A=$	0,83752	47,9864	47° 59' 10"
10	$\sin(p)=$	0,7842		$B=$	2,2826	130,783	130° 47' 0"
11	$M=$	0,4122		$C=$	0,991583	56,8135	56° 48' 48"
12	<b>Проверка</b>				<b>0,525588</b>	=	<b>0,525588</b>

Рисунок 4.1 – Решение задания 1

**Решение** задания 1 представлено на рис. 4.1.

Проведем контроль правильности решения, проверив условия существования сферического треугольника.

Проверим условия  $180^0 < A+B+C < 570^0$ :  $180^0 < 47^0 59' 10'' + 130^0 47' + 56^0 48' 48'' < 540^0$

$A+B-C < 180^0$ :  $47^0 59' 10'' + 130^0 47' - 56^0 48' 48'' < 180^0$

$A+C-B < 180^0$ :  $47^0 59' 10'' + 56^0 48' 48'' - 130^0 47' 48'' < 180^0$

$C+B-A < 180^0$ :  $130^0 47' - 56^0 48' 48'' - 47^0 59' 10'' < 180^0$

Ответ:  $A=47^0 59' 10''$ ;  $B=130^0 47'$ ;  $C=56^0 48' 48''$

**Случай 2.** Даны углы косоугольного сферического треугольника  $A=47^0 59' 12''$ ,  $B=130^0 46' 58''$ ,  $C=56^0 48' 52''$ . Найти стороны  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

**Указания к решению.** Для решения используются формулы

$$\operatorname{tg}(a/2) = N \sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \operatorname{tg}(b/2) = N \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \operatorname{tg}(c/2) = N \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

где 
$$N = \sqrt{\frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right)}}, \quad \varepsilon = A + B + C - \pi$$

Для контроля вычислений можно использовать соотношение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{b}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}\right) = N \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Необходимо, чтобы выполнялись условия  $p < 180^0$ ,  $p - a > 0$ ,  $p - b > 0$ ,  $p - c > 0$  или  $a + b + c < 360^0$ ,  $c + b > a$ ,  $a + c > b$ ,  $a + b > c$ .

**Решение** задания 2 представлено на рис. 4.2.

Указания. Переведите град/мин/сек углов в радианы, в ячейках E6 и F6 вычислите сферический излишек:  $=E3+E4+E5-180$  и  $=F3+F4+F6-PI()$

В ячейке B7 вычислите  $\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ :  $=\sin(F3-\$F\$6/2)$  и скопируйте формулу в ячейки B8 и B9. В ячейку B11 введите формулу для вычисления N:

$$=\text{КОРЕНЬ}(B10/(B7*B8*B9))$$

Сторона  $a$  вычисляется по формуле:  $=2*ATAN(\$B\$11*B7)$ , которая копируется в ячейки E10 и E11.

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>Три угла</b>						
2		град	мин	сек	десятичная доля градуса	радианы	
3	<i>угол A</i>	47	59	12	47,9867	0,8375	
4	<i>угол B</i>	130	46	58	130,7828	2,2826	
5	<i>угол C</i>	56	48	52	56,8144	0,9916	
6				$\varepsilon=$	55,5839	0,9701	
7	$\sin(A-\varepsilon/2)=$	0,3452		<b>Определение сторон</b>			
8	$\sin(B-\varepsilon/2)=$	0,9744			радианы	десятичная доля градуса	град/мин/сек
9	$\sin(C-\varepsilon/2)=$	0,4852		$a=$	1,05641	60,5280067	60° 31' 40"
10	$\sin(\varepsilon/2)=$	0,4663		$b=$	2,05027	117,471816	117° 28' 18"
11	$N=$	1,6903		$c=$	1,37370	78,7071143	78° 42' 25"
12							
13	<b>Контроль решения</b>			0,78812165	=	0,78812165	

Рисунок 4.2 – Решение задания 2

Проведем контроль правильности решения, проверив условия существования сферического треугольника.

1. Проверим условия  $0^0 < a+b+c < 360^0$ :  $60,53^0 + 117,47^0 + 78,7^0 < 360^0$

2. Проверим условие  $p < 180^0$ :  $(60,53 + 117,47 + 78,7)/2 = 128,35 < 180^0$

3. Проверим условия  $a+b > c$ ;  $a+c > b$ ;  $b+c > a$

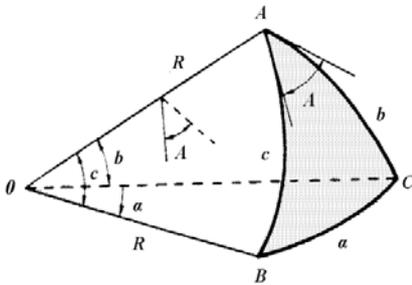
$60,53 + 117,47 > 78,7$ ;  $60,53 + 78,7 > 117,47$ ;  $117,47 + 78,7 > 60,53$

Ответ:  $A=60^0 31' 40''$ ;  $B=117^0 28' 18''$ ;  $C=78^0 42' 25''$

## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Основи сферичної геометрії та тригонометрії: навч. посібник / М. П. Данилевський, А. І. Колосов, А. В. Якунін; Харків. нац. акад. міськ. госп-ва. – Харків : ХНАМГ, 2011. – 92 с.
2. Мордовцев С.М. Конспект лекцій по курсу «Сферическая геометрия и тригонометрия (для студентов всех форм обучения направления подготовки 6.080101 – Геодезия, картография, землеустройство) / С. М. Мордовцев, А. И. Колосов, А. В. Якунин: Харьков. нац. ун-т гор. хоз-ва им. А. Н. Бекетова. – Харьков : ХНУГХ им. А.Н. Бекетова, 2016. – 78 с.
3. Кранц П. Сферическая тригонометрия / П. Кранц. / Москва : Изд-во ЛКИ, 2007. – 96 с.
4. Волынский Б.А. Сферическая тригонометрия / Б. А. Волынский. Москва: «Наука», 1977. – 136 с.
5. Степанов Н.Н. Сферическая тригонометрия / Н.Н. Степанов. Москва: ОГИЗ, 1948. – 154 с.
6. Вентцель М.К. Сферическая тригонометрия / М. К. Вентцель. Москва: Изд-во геодезической и картографической литературы, 1948. – 154 с.

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ СФЕРИЧЕСКОГО  
ТРЕУГОЛЬНИКА



1)  $a + b > c, a + c > b, b + c > a,$

$b > c - a, a > b - c, c > b - a$

Полупериод сферического треугольника всегда больше любой из сторон.

2)  $0 < a + b + c < 360^0$

Сумма сторон сферического треугольника всегда меньше  $360^0$ .

3)  $180^0 < A + B + C < 540^0$

Превышение суммы углов сферического треугольника над  $180^0$  называется его эксцессом или сферическим избытком и обозначается

$$\varepsilon = A + B + C - 180^0$$

4)  $A + B - C < 180^0; A + C - B < 180^0; B + C - A < 180^0$

5) Внешний угол сферического треугольника меньше суммы двух внутренних углов, с ним не смежных, но больше их разности.

6) Углы при основании равнобедренного сферического треугольника равны между собой.

7) В сферическом треугольнике против равных сторон лежат равные углы, т.е. если  $b = c$ , то  $B = C$ .

8) Против равных углов в сферическом треугольнике лежат равные стороны.

9) В сферическом треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

10) В сферическом треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

11) Если сумма двух сторон сферического треугольника удовлетворяет одному из условий  $a + b < 180^0, a + b = 180^0, a + b > 180^0$ , то и сумма

противолежащих им углов удовлетворяет соответствующему условию

$$A + B < 180^\circ, A + B = 180^\circ \text{ или } A + B > 180^\circ.$$

Обратно, Если сумма двух углов сферического треугольника больше, равна или меньше  $180^\circ$ , то и сумма противолежащих им сторон должна быть соответственно больше, равна или меньше  $180^\circ$ .

12). Если разность двух сторон сферического треугольника больше, равна или меньше 0, то и разность двух противолежащих им углов больше, равна или меньше нуля.

13) Если разность двух углов сферического треугольника больше, равна или меньше 0, то и разность двух противолежащих им сторон больше, равна или меньше нуля.

#### Связь между величинами сторон и углов прямоугольного сферического треугольника

1. Два элемента треугольника **однородными**, если оба они больше или меньше  $90^\circ$ , и – **разнородными**, когда один из них больше, а второй меньший за  $90^\circ$ . Пользуясь этими понятиями, зависимость между величинами катетов и гипотенузы можно сформулировать так: если катеты однородны, то гипотенуза меньше  $90^\circ$ ; если же катеты разнородны, то гипотенуза больше  $90^\circ$ .

2. Если прилежащие к гипотенузе углы однородны, то гипотенуза меньше  $90^\circ$ ; если же эти углы разнородны, то гипотенуза больше  $90^\circ$ .

3. Произвольный катет и противоположный ему угол всегда однородны.

Полученные соотношения между величинами сторон и углов прямоугольного сферического треугольника помогут при нахождении элементов треугольника по их синусам. Например, если в прямоугольном треугольнике  $ABC$  катет  $b > 90^\circ$  и при решении задачи для противоположного угла  $B$  получено, что  $\sin B = 0,5$ , то его значение равно  $B = 150^\circ$ .

$$4. \quad 90^\circ < B + C < 270^\circ; \quad -90 < B - C < 90$$

## ЗАПИСЬ ФОРМУЛ В MS EXCEL

При записи формул надо помнить три основных правила:

Первое правило: любая формула начинается со знака равно "=" и вводится без пробелов.

Второе правило: адреса ячеек записываются только с использованием букв английского алфавита (строчные или прописные – без разницы).

Третье правило: формулу лучше всего редактировать в строке формул.

### Создание простых формул

Заполните столбцы А и В. Надо перемножить числа столбцов А и В, а результат вывести в столбце С.

Сделайте активной ячейку С1 и введите в неё формулу: **=a1\*b1** и нажмите клавишу **Enter**.

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>=a1*b1</b>
<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	
<b>3</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	
<b>4</b>	<b>8</b>	<b>12</b>	
<b>5</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	

В ячейке С1 появится результат умножения содержимого ячейки А1 на содержимое ячейки В1. Вернитесь в ячейку С1. В строке формул будет записана введенная вами формула: **=A1\*B1**

Таким образом, если в ячейку введена формула, то она появится в строке формул, а в самой ячейке – результат расчетов по этой формуле.

Что делать дальше? Можно, конечно, перейти к ячейке С2 и снова записать формулу: **=A2\*B2** и так далее. Но это нерационально, особенно для больших таблиц. Excel предлагает великолепный приём копирования формулы, при котором адреса ячеек будут автоматически переписываться в соответствии с расположением ячеек. Для того чтобы скопировать формулу, вернитесь в ячейку

C1 и установите курсор мыши в нижний правый угол так, чтобы он принял вид маленького черного крестика, нажмите ЛК и, не отпуская её, переместите курсор мыши вниз по столбцу C, до последней строки таблицы. Отпустите ЛК. На экране появится результат умножения столбца A на столбец B. Щелкните, например, по ячейке C4. В строке формул вы увидите запись: =A4\*B4 , которую записала при копировании сама программа.

Таким образом, достаточно ввести формулу один раз, а затем скопировать её по строкам или столбцам. Адреса ячеек в формуле переписываются автоматически.

При записи формул можно использовать операторы: + (сложение), - (вычитание), / (деление), \* (умножение), ^ - возведение в степень. Во время вычислений в первую очередь выполняются действия в скобках. Умножение и деление выполняются раньше сложения и вычитания. Операторы, имеющие одинаковый приоритет, выполняются слева направо.

Для сравнения значений используются операторы сравнения:

Оператор	Функция
<	Меньше
>	Больше
<=	меньше или равно
>=	больше или равно
<>	не равно

Если формула введена неверно, в ячейке появляется сообщение об ошибке.

Вот некоторые сообщения:

#ДЕЛ/0	Попытка деления на ноль
#ИМЯ?	Используется имя, отсутствующее в списке
#ЗНАЧ!	Введена математическая формула, которая ссылается на текст
#ССЫЛКА!	Отсутствует диапазон ячеек, на который ссылается формула

Примечание. В начале раздела было сделано замечание о том, что пробелы внутри формулы недопустимы. Но, если формула длинная, в неё можно включить символы табуляции и разрывы строк. Тогда формула легко воспринимается. Для

того чтобы ввести символы табуляции, установите в строке формул текстовый курсор в заданную позицию и нажмите совокупность клавиш Ctrl-Alt-Tab. Разрыв строки появляется при нажатии клавиш Alt-Tab.

### Создание формулы с помощью мыши и клавиатуры

Адреса ячеек можно (и нужно!) вводить с помощью мыши. С клавиатуры вводятся только операторы.

Установите табличный курсор в ячейку D1. Например, в данном столбце должен появиться результат деления чисел столбца А на В.

1. введите знак =
2. щелкните ЛК по ячейке А1 ( в строке формул автоматически запишется адрес ячейки),
3. введите с клавиатуры знак / (косая черта)
4. щелкните ЛК по ячейке В1
5. Нажмите Enter
6. скопируйте крестиком формулу по строкам столбца D.

### Использование констант в формулах

Адреса ячеек, используемые в формуле, называют относительными, так как они изменяются при копировании формулы. Иногда необходимо зафиксировать адрес ячейки или серии ячеек, то есть сделать его абсолютным. Например, при проведении вычислений необходимо все числа столбца «С» умножить на 20%. Эта константа хранится в определенной ячейке. Как сделать адрес ячейки абсолютным? Для этого перед координатой строки или столбца (или и строки и столбца) в формулах помещают знак доллара \$.

Сделайте активной ячейка H1 и введите ставку НДС, т.е. 20% (знак % – клавиши **Shift** и **5** на основной клавиатуре). В столбце E мы хотим вычислить НДС от чисел столбца C. Щелкните по ячейке E1.

Как выглядит формула? Ответ, на первый взгляд, очевиден: =C1\*N1. Действительно, введите эту формулу. Получим правильный ответ: 1,2. Скопируйте формулу крестиком по строкам столбца E. Но тогда в строках E2-E5 появились нули, что неверно! В чем причина? Щелкните по ячейке E2 и посмотрите в строку формул. Программа записала формулу =C2\*N2. Но нам необходимо, чтобы адрес ячейки N1 не менялся, так как в этой ячейке хранится константа.

Следовательно, чтобы зафиксировать адрес, сделав его абсолютным, надо вернуться в ячейку E1, щелкнуть в строке формул по N1 и нажать клавишу **F4**

В результате формула примет вид:

	A	B	C	D	E
1	2	3	6	0,667	=C1*\$H\$1
2	4	6	24	0,667	
3	6	9	54	0,667	
4	8	12	96	0,667	
5	10	15	150	0,667	

Нажмите клавишу Enter. Скопируйте данную формулу "крестиком".

Таблица примет вид:

	A	B	C	D	E
1	2	3	6	0,667	<b>1,2</b>
2	4	6	24	0,667	<b>4,8</b>
3	6	9	54	0,667	<b>10,8</b>
4	8	12	96	0,667	<b>19,2</b>
5	10	15	150	0,667	<b>30</b>

Щелкните, например, по ячейке E5. В строке формул будет запись:

$$=E5*$H$1$$

Таким образом, при копировании адрес ячейки N1 не изменится.

### Суммирование строк и столбцов

В большинстве таблиц необходимо просто просуммировать числа в строках и столбцах. Для этого применяется встроенная функция автосуммирования.

Например, мы хотим найти суммы чисел в столбце А. Щелкните по ячейке а6. Нажмите на панели инструментов на кнопку  $\Sigma$  (автосумма). В ячейке А6 появится формула: **=СУММ(А1:А5)**. Это означает, что программа подключила встроенную функцию суммирования. Аргумент функции: А1:А5 указывает на диапазон ячеек, которые необходимо просуммировать. Нажмите клавишу **Enter**. В ячейке А6 появится результат. Скопируйте "крестиком" данную формулу вдоль шестой строки. В результате все столбцы будут просуммированы. Аналогично можно просуммировать строки. Выберите ячейку G1 и нажмите кнопку  $\Sigma$ , затем **Enter**. Далее скопируйте "крестиком" вниз полученную формулу.

Когда вы щелкаете по кнопке "Автосумма", программа определяет зону суммирования. Если вам не устраивает предложенный диапазон, то с помощью мыши можно пометить другой диапазон ячеек. Например, сделайте активной ячейку В10. Нажмите на кнопку  $\Sigma$ . Пометьте область, начиная с ячейки А1 по В5 и нажмите **Enter**. Мы получили результат сложения чисел столбцов А и В.

#### Использование встроенных функций

Excel содержит большое количество встроенных функций: математических, статистических, и финансовых и т.д. С одной из этих функций мы уже познакомились. Это функция **СУММ()**. Каждая функция имеет уникальное имя. Оно часто указывает на назначение функции. Аргументы функции записываются в круглых скобках. Например, в бухгалтерии весьма полезной будет функция **ОКРУГЛ()**, которая позволяет округлять число до заданного количества знаков после запятой. Общий вид функции:

**=ОКРУГЛ(число или адрес ячейки ;число знаков после запятой)**

Для примера:

1. введите в ячейку F10 число 10,
2. введите в ячейку G10 число 6.
3. в ячейке H10 запишите формулу: **=F10/G10**

4. Нажмите клавишу **Enter**.

Появится результат: 1,666667.

Вернемся в ячейку H10. Щелкните по строке формул и измените формулу: **=ОКРУГЛ(F10/G10;2)** Нажмите клавишу **Enter**. Результат равен 1,67.

Использование мастера функций облегчает задачу ввода формул с использованием встроенных функций. Установите табличный курсор в свободную ячейку. Для вызова мастера нажмите кнопку  на панели инструментов. Появится знакомое окно, в котором перечислены все функции, сгруппированные по категориям. Мастер позволяет изучить различные функции.

Познакомимся с некоторыми полезными функциями:

1. Очистите лист или перейдите на следующий лист.
2. В столбце В начиная с первой строки введите произвольные числа (см. рис.А.1).
3. Затем введите текст в ячейки А8:А12 (рисА.1).
4. В ячейке В8 подсчитайте сумму чисел в диапазоне В1:В6.
5. В ячейках В9:В12 введите формулы с использованием встроенных функций:

	А	В	С	Д
1		23		
2		16		
3		11		
4		38		
5		27		
6		9		
7	сумма	=СУММ(В1:В6)		
8	среднее значение	=СРЗНАЧ(В1:В6)		
9	максимальное значение	=МАКС(В1:В6)		
10	минимальное значение	=МИН(В1:В6)		
11	произведение чисел	=ПРОИЗВЕД(В1:В6)		

Рис. А.1 – Использование встроенных функций

Функция	Назначение
СРЗНАЧ(В1:В6)	Вычисляет среднее арифметическое значение заданного массива ячеек столбца В с 1-ой по 6 строку
МАХ(В1:В6)	Выводит максимальное значение заданного массива ячеек
МИН(В1:В6)	Выводит минимальное значение заданного массива ячеек
ПРОИЗВЕД(В1:В6)	Выводит произведение чисел заданного массива ячеек

## Использование математических функций

Excel предоставляет достаточно полный набор математических функций, которые используются при решении достаточно сложных задач. В таблице представлены наиболее полезные функции:

Функция	Аргумент	Назначение
КОРЕНЬ()	число	Вычисляет квадратный корень
СТЕПЕНЬ()	показатель степени	выводит результат возведения в степень
РАДИАНЫ()	значение угла в градусах	преобразует градусы в радианы
ГРАДУСЫ()	значение угла в радианах	преобразует радианы в градусы
ПИ()		выводит число $\pi=3,14159265\dots$
TAN()	угол в радианах	вычисляет тангенс угла
SIN()	угол в радианах	вычисляет синус угла
COS()	угол в радианах	вычисляет косинус угла
EXP()	число	вычисляет экспоненту аргумента
LN()	число	вычисляет натуральный логарифм
ASIN()	число	вычисляет arcsin угла в радианах
ACOS()		вычисляет arccos угла в радианах
ATAN()		вычисляет arctg угла в радианах
ABS()	число	выводит абсолютное значение аргумента
СУММПРОИЗВ()	массив 1, массив 2, массив 3, и т.д.	вычисляет сумму произведений чисел массивов

**Пример.** Составить таблицу синусов и косинусов для углов в диапазоне от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ .

**Решение.** 1. Очистите рабочий лист и в столбце А введите значения углов от 0 до 90 (т.е. 91 строку)

1. В ячейке В1 введите формулу: =SIN(РАДИАНЫ(А1))
2. Скопируйте эту формулу по строкам столбца В.
3. В ячейке С1 введите формулу: =COS(РАДИАНЫ(А1))
4. Скопируйте эту формулу по строкам столбца С

## СОЗДАНИЕ ФУНКЦИИ GRADMC()

Для дальнейшей работы рекомендуется создать новую функцию, которая войдет в состав функций MS Excel и позволит переводить десятичные градусы в формат **градусы<sup>0</sup>минуты'секунды''**. Для этого откройте рабочую книгу MS Excel. Нажмите комбинацию клавиш **Alt** и **F11**. В появившемся окне VBA (Visual Basic for application) выберите пункт главного меню **"Insert"**, затем пункт **"Module"**. Появится окно модуля, в которое введите код программы, формирующей функцию GRADMC.



Сохраните информацию под любым именем. Для проверки вернитесь на первый лист Excel. В какой-либо ячейке, например, A1 введите число 56,289654, а в ячейке B1 формулу: =GRADMC(A1)

	A	B	C	D
1	56,28965	56° 17' 22"		

В дальнейшем эту функцию можно использовать при решении задач и индивидуальной работы.

*Навчальне видання*

Методичні вказівки

для виконання контрольних робіт з курсу «Сферична геометрія та тригонометрія»

*(для студентів денної і заочної форм навчання  
напряму підготовки 6.080101 – Геодезія, картографія та землеустрій)*

(рос. мовою)

Укладач: **Мордовцев** Сергій Михайлович

Відповідальний за випуск *С.М. Мордовцев*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *С.М. Мордовцев*

План 2016 , поз. 165М

---

Підп. до друку 17.03.2016  
Друк на ризографі  
Зам. №

Формат 60x84/16  
Ум. друк. арк. 1,5  
Тираж 10 пр.

Виконавець і виготовлювач:  
Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Революції, 12, Харків, 61002  
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:  
ДК 4705 від 28.03.2014 р.