МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА имени А.Н. БЕКЕТОВА

С. М. МОРДОВЦЕВ, А. И. КОЛОСОВ, А. В. ЯКУНИН

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по курсу

СФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТРИГОНОМЕТРИЯ

(для студентов всех форм обучения
направления подготовки 6.080101 – Геодезия, картография, землеустройство)

ХАРЬКОВ – ХНУГХ им. А. Н. Бекетова – 2016

Мордовцев С.М. Конспект лекций по курсу «Сферическая геометрия и тригонометрия» (для студентов всех форм обучения направления подготовки 6.080101 – Геодезия, картография, землеустройство) / С. М. Мордовцев, А. И. Колосов, А. В. Якунин; Харьков. нац. ун-т гор. хоз-ва им. А. Н. Бекетова. – Харьков : ХНУГХ им. А.Н. Бекетова, 2016. – 79 с.

Авторы: С. М. Мордовцев, А. И. Колосов, А. В. Якунин

Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Л.Б. Коваленко

Рекомендовано кафедрой высшей математики, протокол № 4 от 25.11.2015

© В С.М. Мордовцев, А.И. Колосов,
А.В. Якунин, 2016
© ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Вступление 5

Тема 1. Основные понятия сферической геометрии 6

1.1 Дуги и углы на сфере 6

1.2 Измерение дуг и центральных углов. 10

1.3. Географическая сферическая система координат 11

1.4 Локсодрома 14

1.5 Сферический двуугольник 17

Контрольные вопросы по теме 1 19

Тема 2. Сферические треугольники 20

2.1 Сферический треугольник и его элементы 20

2.2 Полярный сферический треугольник и его свойства 23

2.3 Соотношение между сторонами и углами сферического треугольника 25

2.4 Равенство сферических треугольников. Симметричные сферические треугольники 29

2.5 Площадь сферического треугольника 32

Контрольные вопросы по теме 2 33

Тема 3. Основы сферической тригонометрии. Основные формулы сферических треугольников 34

3.1. Формулы косинусов сторон и углов сферического треугольника 34

3.2 Теорема синусов 38

3.3. Формулы пяти элементов сферического треугольника 39

3.4. Формулы четырех элементов сферического треугольника 41

Контрольные вопросы по теме 3 42

Тема 4 Решение прямоугольных сферических треугольников 43

4.1 Формулы для решения прямоугольных сферических треугольников.

Сферическая теорема Пифагора 43
4.2. Связь между величинами сторон и углов прямоугольного сферического треугольника... 45
4.3. Основные случаи и указания к решению прямоугольных сферических треугольников... 47
Контрольные вопросы по теме 4.. 52
Тема 5. Решение косоугольных сферических треугольников 53
5.1. Формулы синусов, косинусов и тангенсов половины угла сферического треугольника... 53
5.2 Формулы синусов, косинусов и тангенсов половины сторон сферического треугольника... 55
5.3 Формулы Даламбера-Гаусса и аналогии Непера. Формулы для расчета сферического излишка... 57
5.4 Основные случаи решения косоугольных сферических треугольников 61
5.5. Решение малых сферических треугольников с помощью теоремы Лежандра 65
Контрольные вопросы по теме 5... 69
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ.. 70
ПРИЛОЖЕНИЯ.. 71

ВСТУПЛЕНИЕ

В конспекте лекций изложен специальный раздел высшей математики «Основы сферической геометрии и тригонометрии», который имеет важное научное и практическое значение для специальности «Геодезия, картография, землеустройство». Базовые математические знания, полученные после изучения этого специального раздела, помогут в освоении таких предметов как «Геодезия», «Математические методы в геодезических измерениях», «Спутниковая геодезия и сферическая астрономия», «Геоинформационные технологии».

После изучения конспекта лекций студенты смогут самостоятельно выполнить индивидуальные задания раздела с использованием информационных технологий. Теоретические сведения сочетаются с примерами практического применения формул сферической тригонометрии. Совместно с конспектом рекомендуется изучить методические указания для самостоятельной работы студентов, которые помогут выполнить индивидуальные задания раздела с использованием информационных технологий. На базе конспекта также разработан дистанционный курс «Основы сферической геометрии и тригонометрии», с помощью которого студенты могут проверить и закрепить свои знания.

ТЕМА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1.1 Дуги и углы на сфере

Шаром называется тело, которое образуется вращением полкруга вокруг его диаметра. Сферической геометрией называется раздел математики, в котором изучаются геометрические фигуры, которые лежат на поверхности шара. Поверхность, которая образуется при этом, называется сферической поверхностью. Часто такую поверхность называют просто сферой. Таким образом, сфера – это геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от одной точки, которую называют центром сферы.

Всякая плоскость K (рис. 1.1), пересекаясь с шаром, образует линию пересечения, которая является окружностью радиуса r.

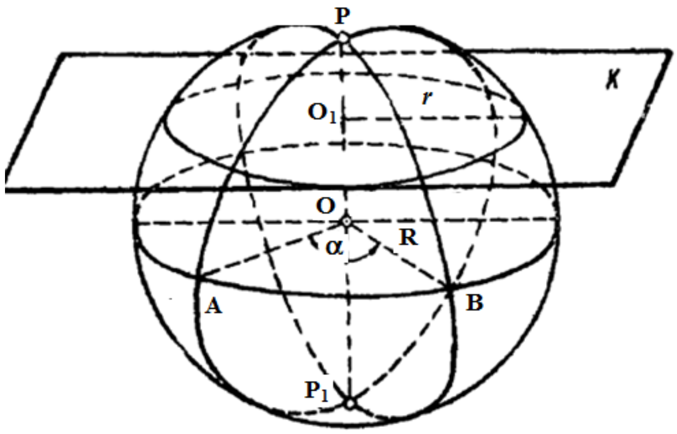


Рис. 1.1 – Большие и малые круги, дуги на сфере

Перпендикулярный к плоскости K диаметр шара, проходя через его центр O, пересекает шар в двух точках P и P_1 называемых **сферическими центрами** круга. Круги, плоскости которых проходят через центр сферы O, называются **большими кругами**; остальные круги на сфере называются малыми кругами. Сферические центры P и P_1 большого круга называются его **полюсами.** Большой круг в этом случае называется **полярой** точек P и P_1. Полюса отстоят от соответствующих больших кругов на 90°, или четверть окружности. Действительно, точки *A* и *B* большого круга находятся на дугах *AP* и BP_1, которые равны 90^0.

Через две точки на сфере, не лежащих на концах одного и того же диаметра, можно провести дугу большого круга и притом только одну. Дуга – большого круга – это кратчайшее расстояние между точками на сфере. Важно отметить, что две точки разделяют окружность на две неравные части. Меньшая дуга *AB* (рис.1.1) большого круга определяет **сферическое (кратчайшее) расстояние** между точками *A* и *B* на поверхности сферы. Эту дугу называют **геодезической линией** или **ортодромией**. Геодезические линии играют на сфере ту же роль, что и прямые в планиметрии.

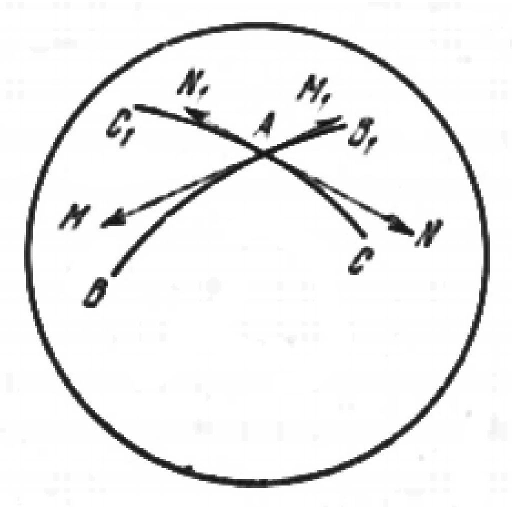
В таблице 1.1 приведен ряд аналогий между понятиями, относящимися к плоскости и к сфере, полезных для дальнейшего изучения.

Таблица 1.1 – Аналогии между понятиями, относящимися к плоскости и к сфере

Плоскость	Сфера
Прямая линия	Дуга окружности большого круга
Через две точки проходит только одна прямая	Через две точки на сфере, не лежащих на концах одного и того же диаметра, проходит дуга большого круга и притом только одна
Две прямые пересекаются только в одной точке	Две дуги больших кругов, меньшие 180^0, пересекаются в одной точке
Кривая линия	Дуга окружности малого круга

В сферической тригонометрии рассматриваются только такие фигуры, которые образованы дугами больших кругов, поэтому здесь и далее в тексте под словом «дуга» подразумевается отрезок дуги большого круга. В тех случаях, когда речь идет о дуге малого круга, это будет специально оговорено. Длина дуги пропорциональна величине **центрального угла,** т. е. угла, описываемого концом радиуса при перемещении от одного конца дуги до ее другого конца, поэтому дуга, на сфере измеряется величиной угла между радиусами, опирающимися на концы этой дуги (на рис. 1.1 – это угол α для дуги АВ).

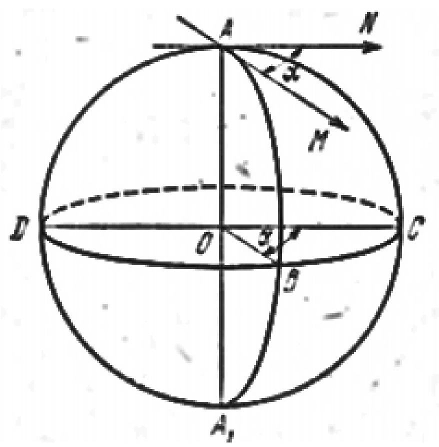
Как правило, в сферической тригонометрии, по предложению Леонарда Эйлера, рассматриваются только те дуги, длина которых равна или менее половины длины окружности, т.е. 180^0. Это правило носит название **«ограничения Эйлера».**



Две дуги, BB_1 и CC_1**,** пересекаясь в точке A на сфере, образуют **сферический угол** CAB (рис.1.2), который будем обозначать $\sphericalangle CAB$. Тогда A является его вершиной, а дуги AB и AC — сторонами сферического угла. Величина сферического угла измеряется углом между касательными MA и NA к сторонам сферического угла CAB в вершине сферического угла

Рис. 1.2 – Сферический угол.

Теорема. Сферический угол BAC (рис. 1.3) измеряется дугой BC, заключенной между его сторонами, для которой вершина угла А является полюсом, т.е. $\sphericalangle BAC = \cup BC$



Доказательство. Так как дуги ABA_1 и ACA_1 являются дугами больших кругов, то точки A и A_1 лежат на одном диаметре AOA_1, представляющем линию пересечения плоскостей ABA_1 и ACA_1. Эти плоскости образуют двугранный угол, который мы назовем соответствующим сферическому углу BAC.

Рис. 1.3– Сферический и центральный углы

Проведем касательные MA и NA к сторонам сферического угла ABC в его вершине A. По свойству касательных они лежат в плоскостях больших кругов ABA_1 и

ACA_1, и $AM \perp AA_1$, $AN \perp AA_1$. Проведем секущую плоскость $OCBD$, перпендикулярную к диаметру AA_1 и проходящую через центр сферы O. Пересечение этой плоскостью сферы даст большой круг BCD, для которого точки A и A_1 являются полюсами. Этот круг пересечется с дугами ABA_1 и ACA_1 в точках Bи C. По построению $OB \perp AA_1$ и $OC \perp AA_1$. Таким образом, угол BOC также будет плоским углом двугранного угла MAA_1N, а так как все плоские углы двугранного угла равны, то $\angle \mathrm{BOC} = \angle MAN = \sphericalangle BAC$.

Так как угол BOC есть центральный угол дуги $\angle BOC = \cup \mathrm{BC}$, и, следовательно $\sphericalangle \mathrm{BAC} = \cup \mathrm{BC}$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Сферический угол и соответствующий ему двугранный угол имеют одну и ту же меру.

Следствие 2. Дуга большого круга, проходящая через полюс какого-либо другого большого круга, перпендикулярна к этому большому кругу, т. е.

$$\cup \mathrm{AB} = \cup \mathrm{BC} \text{ (рис. 1.3).}$$

Дуга $\cup \mathrm{AB}$ называется **сферическим перпендикуляром** к дуге $\cup \mathrm{BC}$, так как угол между дугами равен 90^0.

Следствие 3. Сферический перпендикуляр к данной дуге большого круга проходит через полюс этого большого круга.

Доказательство. Прямая OB лежит в плоскости $CODB$, которая перпендикулярна к прямой AA_1. Через две прямые AO и OB, пересекающиеся в точке O, проводим плоскость AOA_1B. Эта плоскость перпендикулярна к плоскости $CODB$. В пересечении со сферой плоскость образует дугу большого круга ABA_1. Согласно следствию 2 дуга, проходящая через полюс какого-либо другого большого круга, перпендикулярна к этому большому кругу, что и доказывает следствие 3.

Следствие 4. Вертикальные сферические углы равны.

Следствие 5. Сумма смежных сферических углов равна 180^0.

1.2 Измерение дуг и центральных углов.

Для измерения длин дуг и соответствующих им центральных углов применяются следующие единицы:

1. Градус - центральный угол, соответствующий дуге в 1/360 часть окружности. Градус (°) делится на 60 минут ('), минута делится на 60 секунд ("). Градусная мера наиболее широко используется в естествознании и технике. Для представления градусов в виде десятичной дроби ($ДГ^0$) используем формулу:

$$Г^0М'С'' = Г, + \frac{М}{60} + \frac{С}{3600} = ДГ^0 \qquad (1.1)$$

где Г – градусы; М - минуты; С – секунды.

2. Радиан - центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна одному радиусу. Радианная мера используется преимущественно в теоретических выкладках и аналитических формулах. 2π радиан соответствуют 360^0.

Градусная и радианная меры связаны между собой следующими соотношениями: 1 радиан = $57{,}29577951^0$; 1^0= 0,01745329. Для перевода градусов ($ДГ^0$)в радианы (Р) рекомендуется использовать формулу:

$$Р = ДГ^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} \qquad (1.2)$$

3. Час - центральный угол, соответствующий дуге в 1/24 часть окружности. Час (^{h}) делится на 60 минут (^{m}), минута делится на 60 секунд (^{s}). Часовая мера используется тогда, когда вычисления связаны с вращением Земли и счетом времени. Для различия единиц часовой и градусной мер часто поясняется: «минута дуги» — в градусной мере или «секунда времени» — в часовой мере. Часовая и градусная меры связаны соотношениями:

$$1^o = 4^m,\ 1^h = 15°,\ 1' = 4^s,\ 1^m = 15',\ 1^s = 15''$$

Связь угловой (градусной), радианной и линейной меры дуги большого круга (рис. 1.4) определяется по формуле:

$$AB = L = \frac{\alpha^0 R}{\rho^0} = \alpha R \qquad (1.3)$$

где L, α, α^0 − линейная, радианная и угловая мера дуги большого круга; R − радиус сферы; ρ^0 – число угловых единиц в радиане $\rho^0 = 180^0/\pi = 57,2957795^0$.

Связь радианной и линейной меры дуги малого круга, проходящего через точку D, находящуюся на дуге BD с центральным углом φ (рис. 1.4) из ΔODO_1 устанавливается за формулой:

$$\mathrm{r} = R\cos\varphi \Rightarrow l = \alpha \cdot r = \alpha \cdot R\cos\varphi = L\cos\varphi \qquad (1.4)$$

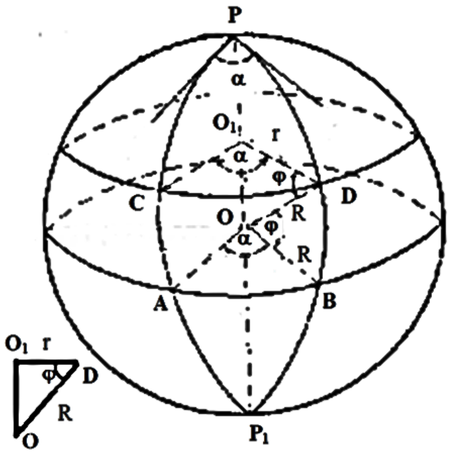


Рис. 1.4 – Длина дуги большого круга, $L=AB$, $l=CD$

1.3. Географическая сферическая система координат

Местонахождение точки на поверхности сферы (например, глобуса) определяется с помощью географических координат: **широты и долготы**. Параллели и меридианы формируют сетчатую систему координат на поверхности Земли, с помощью которой любая точка на Земле может быть точно определена. Широта и долгота - это координаты, соответственно параллелей и меридианов, которые измеряются в градусах и представляют собой угловые расстояния, рассчитываемые от центра Земли до её поверхности относительно экватора по вертикали (у широты - φ) и относительно нулевого меридиана по горизонтали (у долготы – λ). Широта φ измеряется сферическим расстоянием вдоль меридиана от экватора к соответствующей параллели $\varphi=NM$ (на север, или юг от 0° до 90°).

Долгота измеряется углом λ от начального меридиана к соответствующему меридиану (на восток или запад от 0° до 180°).

Таким образом, точка M на сфере Земли определяется координатами (рис. 1.5).

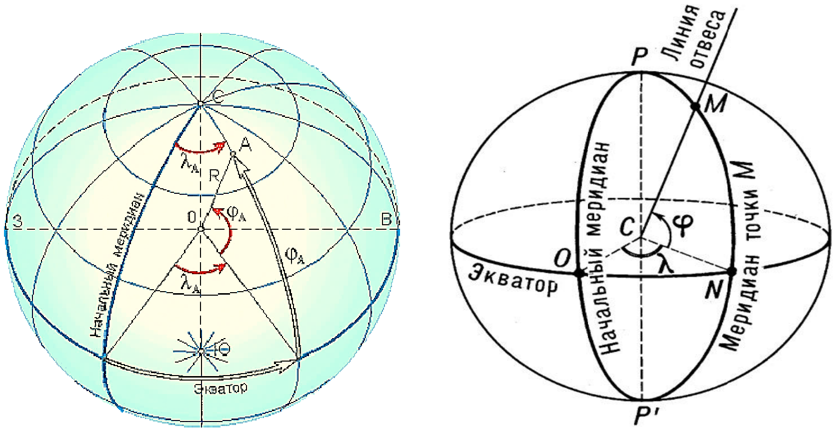


Рис. 1.5 – Определение координат точки

Координаты точки обычно записывают в градусах, минутах и секундах. Для последующих расчетов рекомендуется переписать координаты точки в градусах в виде десятичной дроби и в радианах. Это удобная форма записи при использовании тригонометрических формул.

Рассмотрим две произвольные точки M_1 та M_2 на поверхности сферы. **Азимутом** точки M_2 по отношению к точке M_1 называется сферический угол μ_{21}, который образуется ортодромией M_1M_2 и меньшей дугой меридиана PM_1P_1, который проходит через точку M_1 (рис. 1.6).

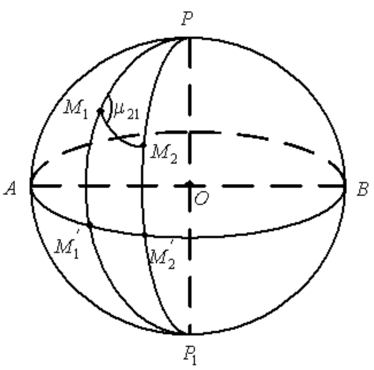


Рис. 1.6 – Азимут

Пример. Координаты Харькова: $49^0 58'50''$северной широты и $36^0 15'9''$ восточной долготы. Вычислить координаты в виде десятичной дроби, а также в радианах.

Решение. Для перевода координат в виде десятичной дроби используем формулу (1)

В нашем случае форума примет вид:

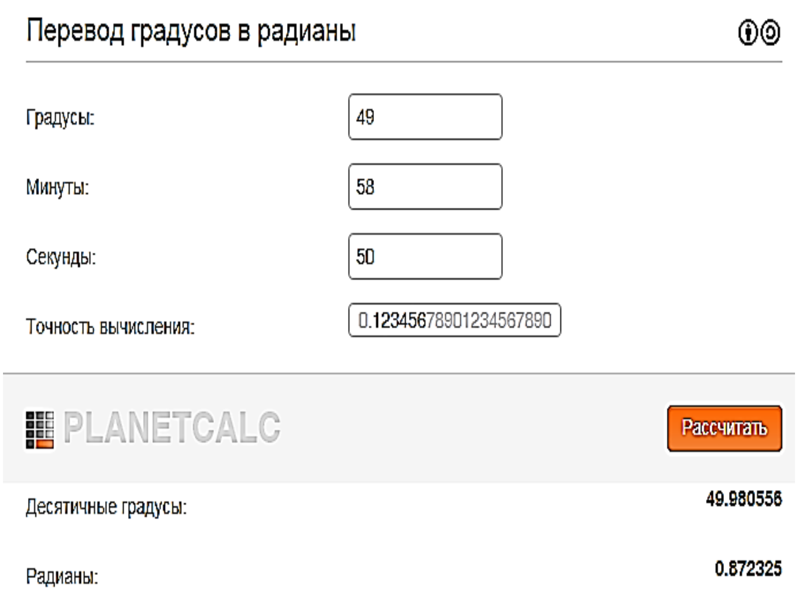
широта – $49^0 58'50''$=49,+58/60+50/3600= $49{,}98056^0$;

долгота – $36^0 15'9''$ = 36, +15/60+9/3600 = $36{,}2525^0$.

Для вычисления координат в радианах используем формулу (2): $\text{Р} = \text{ДГ}^0 \cdot \frac{\pi}{180^0}$,

где – Р – координата в радианах, ДГ^0 – координата в десятичных градусах.

В нашем случае форума примет вид: широта – $49{,}98056^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = 0{,}872325$; долгота $36{,}2525^0 \cdot \frac{\pi}{180^0} = 0{,}632725$



Примечание. Благодаря Интернету эту задачу можно без труда решить с помощью онлайн калькулятора. Например, введите адрес: http://www.planetcalc.ru/71/ Введите в появившемся окне координаты, установите точность вычисления и получите результат (рис. 1.7).

Рис. 1.7 – Перевод градусов в радианы с помощью онлайн калькулятора

Для вычисления углов в виде десятичной дроби и в радианах рекомендуется использовать MS Excel. Достаточно ввести формулу (1.1) в ячейку E2, а затем в ячейке E3 записать формулу: =РАДИАНЫ(E2) (рис. 1.8).

E2 fx =B1+D1/60+F1/3600

	A	B	C	D	E	F
1	градусы	49	минуты	58	секунды	50
2	градусы в виде десятичной дроби				49,98056	
3	радианы				0,872325	
4						

Рис. 1.8 – Перевод градусов в радианы с помощью MS Excel

Всторенные функции РАДИАНЫ() и ГРАДУСЫ() позволяют переводить градусы в радианы и наоборот, радианы в градусы.

1.4 Локсодрома

Локсодрома (или **локсодромия)** – кривая на поверхности вращения, пересекающая все меридианы под постоянным углом *К* (рис 1.9), который называется локсодромическим путевым углом. Понятие введено в рассмотрение португальским математиком Нониусом в 1529 году.

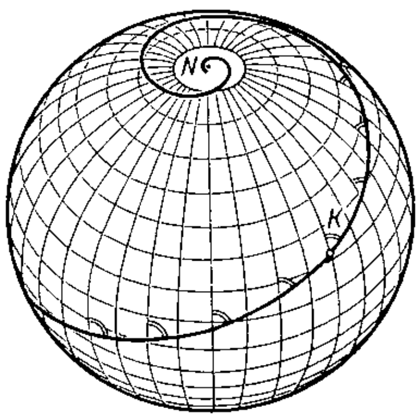


Рис. 1.9 – Локсодрома

На поверхности Земли локсодромами являются все параллели (при *К*= $\pm 90^0$) и все меридианы (при *К=0 и К=180°).* Остальные локсодромы являются спиралями, совершающими неограниченное число витков, приближаясь к полюсам. Если путешественник будет двигаться по любой локсодроме (кроме параллелей) с постоянной скоростью не останавливаясь, то он обязательно придёт к одному из полюсов за конечное время.

Локсодрома широко используется в морской навигации и аэронавигации, где угол *К* трактуется как истинный курс корабля или самолёта. Применение локсодромы вместо ортодромии (представляющей кратчайшее расстояние между двумя точками сферы), вызвано практическими удобствами управления судном или самолётом, хотя в этом случае путь оказывается длиннее (рис 1.10). Локсодрома иногда используется в сферической геодезии.

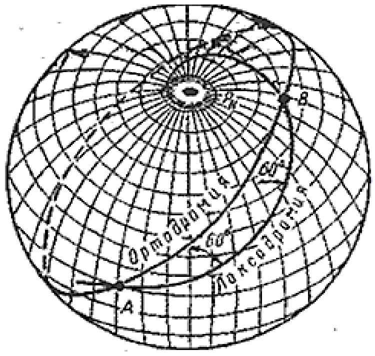


Рис. 1.10

Пусть радиус Земли равен R, а радиус некоторой параллели АВ - *r*. Тогда выражение $r = Rcos\varphi$ (рис. 1.11). Пусть дуга M_0C - локсодромия с двумя рядом стоящими произвольными точками на ней M_1 (φ_1 ,λ_1) и M_2 (φ_2 ,λ_2); *К* - угол пересечения локсодромии с земными меридианами.

Длина дуги параллели MM_2 и длина дуги меридиана MM_1, которые заключены между этими двумя точками, определяются, исходя из длины радиусов и величины центрального угла (рис. 1.11):

$$MM_2 = r \cdot \Delta\lambda = R \cdot \Delta\lambda \cdot cos\varphi; \;\; MM_1 = R \cdot \Delta\varphi, \qquad (1.5)$$

где $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Треугольник M_1MM_2 из-за малости можно считать плоским, кроме того угол M равен 90^0, следовательно

$$tgK = \frac{MM_2}{MM_1} = \; R \cdot \Delta\lambda \cdot cos\varphi / \; R \cdot \Delta\varphi =\cdot \; \Delta\lambda \cdot cos\varphi / \; \Delta\varphi \qquad (1.6)$$

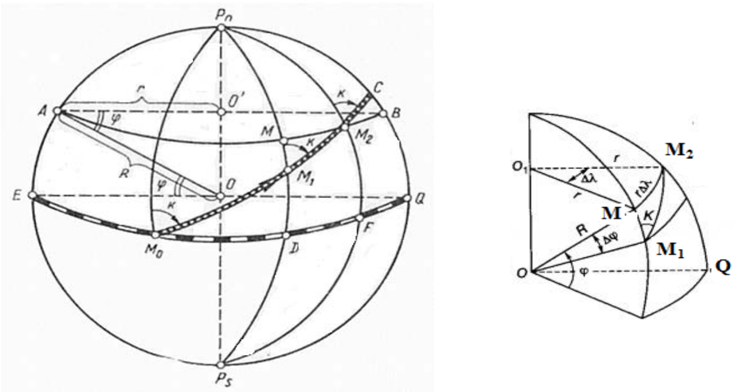


Рис. 1.11 – Вычисление угла *K* локсодромы

Перейдем от элементарно малых приращений к бесконечно малым

$$\Delta\varphi = d\varphi, \qquad \Delta\,\lambda = d\lambda.$$

Тогда $tgK = d\lambda \cdot cos\varphi / \; d\varphi$, откуда $d\lambda = tgK \cdot d\varphi / cos\varphi$

Решим полученное дифференциальное уравнение

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\,\lambda = tgk \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{cos\varphi}$$

Вычисляя интегралы, получим $\lambda_2 - \lambda_1 = tgK \cdot \left[\ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)\right) - \ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)\right)\right]$

Таким образом, $$tgK = \frac{\Delta\,\lambda}{\ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_2}{2}\right)\right) - \ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_1}{2}\right)\right)} \qquad (1.7)$$

$$K = arctg \frac{\Delta\,\lambda}{\ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_2}{2}\right)\right) - \ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_1}{2}\right)\right)} \qquad (1.8)$$

Из треугольника M_1MM_2 также следует, что $M_2M_1 = MM_1/cosK$, но так как $MM_1 = R \cdot \Delta\varphi$, то длина дуги M_2M_1 локсодромии вычисляется по формуле

$$M_2M_1 = R\Delta\varphi/cosK \qquad (1.9)$$

Свойства локсодромии.

Из анализа уравнений (1.7 и 1.8) можно сделать следующие выводы.

1. При *К*= 0° или *К*=180° следует, что tg *К*= 0. Тогда $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0$, а значит $\lambda_2 = \lambda_1$, то есть локсодромия совпадает с меридианом.

2. При *К* = 90° или *К*=-90° следует, что tg *К* стремиться к бесконечности; а это возможно если, согласно (1) знаменатель дроби в правой части равен нулю, т.е. $\varphi_2 = \varphi_1$. В этих случаях локсодромия совпадает с параллелью.

В частном случае, при $\varphi_2 = \varphi_1 = 0°$ локсодромия совпадает с экватором.

3. Пусть $\varphi_1=0^0$, тогда $\ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_1}{2}\right)\right) = \ln\left(tg\frac{\pi}{4}\right) = ln1 = 0$ и уравнение локсодромии примет вид: $(\lambda_2 - \lambda_1)\cdot ctgK = \ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_2}{2}\right)\right)$, откуда

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_2}{2}\right) = e^{(\lambda_2-\lambda_1)\cdot ctgK} \qquad (1.10)$$

Подставляя значения λ_2 через каждые 360° (плавание вокруг света по локсодромии) можно заметить, что каждому новому значению долготы соответствует новое значение широты. Иначе говоря, локсодромия пересекает каждый меридиан бесчисленное количество раз, но каждый раз в новой широте. При стремлении тангенса к бесконечности $\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_2}{2}=\frac{\pi}{2}$, откуда $\varphi_2 = 90^0$

Пример. Найти длину дуги *S* и путевой угол *К* локсодромы между двумя точками Гаваной ($23^0$10’ СШ; $82^0$21’ ЗД) и Марселем ($43^0$27’ СШ; $5^0$13’ ВД).

Решение. Рекомендуется использовать MS Excel (рис. 1.12):

– вычислите градусы в радианах, используя функцию РАДИАНЫ. Рекомендуется долготу Гаваны задать отрицательной -$82^0$21’, так как ее долгота отсчитывается на запад (ЗД);

– в ячейках В6 и В7 вычислите $tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_1}{2}\right)$ и $tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_2}{2}\right)$ по формулам:

=TAN(ПИ()/4+E3/2)

=TAN(ПИ()/4+E4/2)

– в ячейке B8 вычислите *tgK* согласно формуле (1): =i5/(LN(B7)-LN(B6))

– в ячейке B9 вычислите угол *K* в радианах, а затем в десятичных долях градуса по формулам:

=ATAN(B8)

=ГРАДУСЫ(B9)

– в ячейке B10 найдите $\Delta\varphi$: =E4-E3

– в ячейке B11 вычислите длину дуги S: =6370*B10/cos(B9)

Ответ: S= 8367 км.

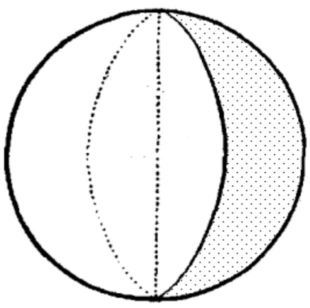
B8 f_x =I5/(LN(B7)-LN(B6))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	координаты	широта φ				долгота λ			
2	точек	град	мин	десятичная мера	радианы	град	мин	десятичная мера	радианы
3	Гавана	23	10	23,16666667	0,4043	-82	-21	-82,35	-1,4373
4	Марсель	43	27	43,45	0,7583	5	13	5,216666667	0,09105
5	разность долгот угол Δ λ=λ1–λ2							87,56666667	1,52833
6	$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_1}{2}\right)$	1,51562							
7	$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_2}{2}\right)$	2,32477							
8	*tgK*=	3,57257							
9	*K*=	1,29787	рад	74,36251146	град				
10	*Δφ*=	0,35401							
11	*S*=	**8367**	км.						

Рис. 1.12 – Решение задачи

1.5 Сферический двуугольник

На поверхности сферы обычно рассматривают фигуры, которые образуются пересечением дуг больших кругов сферы. Самой простой фигурой является **сферический двуугольник** − часть поверхности сферы, которая ограничена двумя большими полукругами. Стороны сферического двуугольника, составленного полуокружностями больших кругов, равны по 180^0 каждая. Например, на рис.1.13 сферическим двуугольником будет AA_1. Так как линейный угол двугранного угла между двумя плоскостями образуется двумя прямыми, которые лежат в обеих плоскостях и перпендикулярны линии их пересечения в одной, и той же точке, то мы



можем определить угол сферического двуугольника, как угол между двумя касательными к большим кругам двуугольника, проходящими через его вершину.

На основании этих определений легко доказывается:

Теорема 1. На одной и той же сфере сферические двуугольники с равными углами имеют равные площади.

Рис. 1.13 - Сферический двуугольник

Теорема 2. Площадь сферического двуугольника с углом α, расположенного на сфере радиуса R определяется формулой.

$$S_\alpha = 2\alpha R^2 . \qquad (1.10)$$

Доказательство. Если площадь поверхности шара разделить на 360 равных частей, то каждая из них будет равняться площади двуугольника с углом при вершине, которая равняется 1°:

$$S_{1^\circ} = \frac{4\pi R^2}{360} = \frac{2\pi}{180} R^2 .$$

Тогда площадь двуугольника с углом α^0 будет

$$S_{\alpha^\circ} = S_{1^0} \cdot \alpha^0 = \frac{2\pi}{180} R^2 \alpha^0 = \frac{2R^2\alpha^0}{\rho^0}, \text{ где } \rho^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ,2957795...,$$

В радианной мере формула (1) примет вид: $S_\alpha = 2\alpha R^2$, где угол α задан в радианах. Теорема доказана.

Теорема 3. Площади двух сферических двуугольников относятся, как их углы.

Пример. Угол сферического двуугольника равен $\alpha^0 = 30^0 15'$. Вычислить площадь двуугольника, если радиус сферы равен 10 м.

Решение. $\alpha^0 = 30^0 15' = 30{,}25^0$. В радианах $\alpha = \pi \cdot \alpha^0 / 180^0 = 0{,}527962$

Тогда площадь сферического двуугольника равна

$$S_\alpha = 2\alpha R^2 = 2 \cdot 100 \cdot 0{,}527962 = 105{,}59 \text{ м}^2.$$

Контрольные вопросы по теме 1

1. Что изучает сферическая геометрия?

2. Что называется ортодромией?

3. Что называется локсодромией

4. Каким соотношением задается связь угловой (градусной, радианной) и линейной мер дуги большого круга?

5. Что такое полюс и поляра?

6. Что такое "сферический центр" и "сферический радиус" малого круга?

7. Как определяют положение точки в географической сферической системе координат?

8. Как указать широту и долготу на сфере?

9. Что называется азимутом?

10. В чем суть ограничений Эйлера?

11. По каким формулам вычисляют линейную длину дуги большого и малого кругов?

12. Как связаны градусная и радианная меры измерения дуг и углов?

13. Приведите в радианах (с точностью до седьмого знака после запятой) сферический угол, измеренный в градусной мере: $\varphi_1 = 42°54'6''$, $\varphi_2 = 160°9'47''$.

(Ответ: $\varphi_1 = 0{,}7487753$, $\varphi_2 = 2{,}7953727$)

14. Приведите в линейной мере (с точностью до км) дугу S большого круга земного шара (R = 6370 км), измеренную в градусной мере: $\varphi_1 = 63°0'42''$

(Ответ: $S = 7006$ км)

15. Что такое "сферический угол" и как он измеряется?

16. Как вычислить площадь сферического двуугольника?

ТЕМА 2. СФЕРИЧЕСКИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

2.1 Сферический треугольник и его элементы

Сферическим треугольником называется часть поверхности сферы, ограниченная тремя дугами больших кругов, которые взаимно пересекаются. Сферический треугольник имеет шесть основных элементов: три угла A, B, C и три сторони a, b, c. Углы обозначаются теми же большими буквами, что и вершины треугольника, а противоположные им стороны - соответствующими малыми буквами (рис. 2.1).

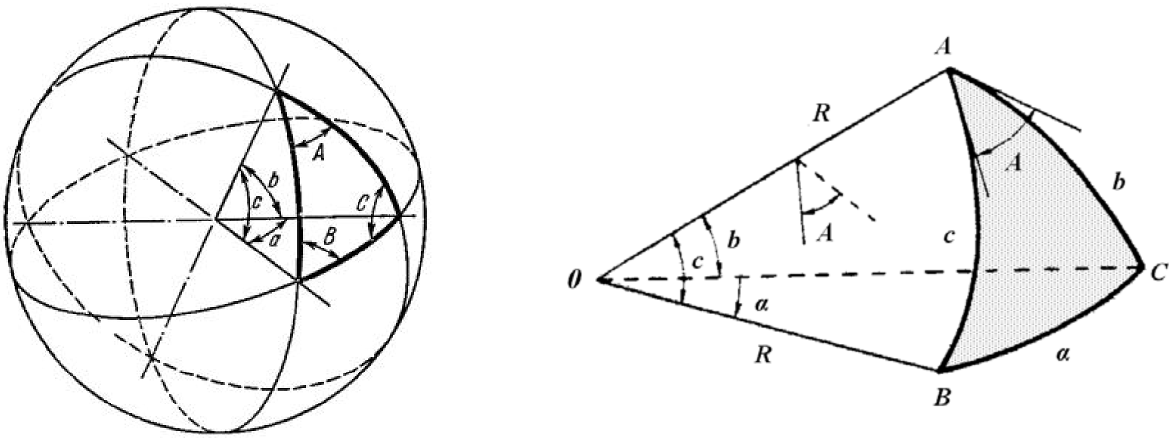


Рис. 2.1 – Сферический треугольник

Из рис. 2.1 видно, что углы сферического треугольника равны соответствующим двугранным углам трехгранника. Стороны сферического треугольника можно выразить через длину радиуса сферы и через центральные углы соответствующих дуг. В то же время, при использовании сферических треугольников в астрономии для расчетов треугольников на небесной сфере измерение длины дуг невозможно; из-за проблем с определением радиусов небесной сферы. Поэтому стороны треугольника определяются в угловой или радианной мере и равняются соответствующим плоским углам трехгранника. То есть, все шесть элементов сферического треугольника равняются соответствующим элементам трехгранника.

Поскольку стороны сферического треугольника a, b, c принято измерять в угловой или радианной мере, то выбор радиуса сферы становится не существенным. Это видно из рис. 2.2. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ − подобные. Они имеют разные (пропорциональные) линейные размеры, но их элементы, отображенные в угловой мере, являются соответственно равными. Поэтому с целью упрощения радиус сферы принимают за единицу, то есть берут R=1.

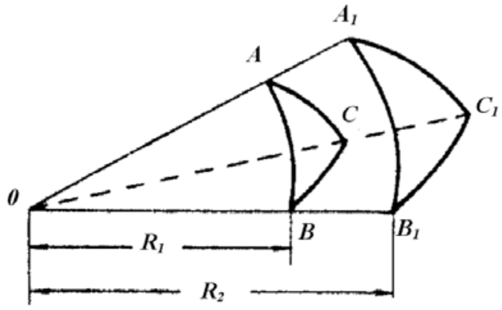


Рис. 2.2 – Подобные сферические треугольники

Если две стороны сферического треугольника не могут быть больше 180°, то одна третья сторона может быть и больше 180^0. В дальнейшем будем рассматривать только так называемые Эйлеровые сферические треугольники. У таких треугольников углы и стороны изменяются лишь в пределах от 0° до 180°. Если же дан будет такой сферический треугольник, у которого какая-либо сторона будет больше 180°, то вместо него будем рассматривать другой треугольник, служащий дополнением данного до полусферы. Этот последний треугольник будет Эйлеров. Зная же элементы этого вспомогательного треугольника, легко определить элементы данного треугольника.

Два больших круга пересекаются в двух точках, находящихся, на концах одного и того же диаметра. Если продолжить какие-либо две смежные стороны сферического треугольника до второй точки их пересечения, то эта вторая точка будет лежать на одном общем диаметре с первой точкой (рис. 2.3). В результате такого построения образуется другой сферический треугольник BCA_1, который по отношению к первоначальному треугольнику ABC

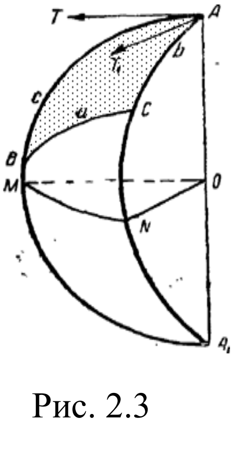


Рис. 2.3

называется сопряженным треугольником по стороне a.

Стороны и углы сопряженного треугольника определяются по формулам:

$$\angle A_1 = \angle A, \text{ сторона } a - \text{общая}; \angle BCA_1 = 180^0 - \angle C; \text{ сторона } A_1\text{B} = 180^0 - \text{c};$$

$$\angle A_1BC = 180^0 - \angle B; \text{ сторона } A_1C = 180^0 - b$$

Сферические треугольники подразделяют на:

- прямоугольные, если хотя бы один из углов треугольника равняется 90°;
- прямосторонние, если хотя бы одна из сторон треугольника равняется 90°;
- косоугольные - в иных случаях.

Сферические треугольники могут быть одновременно прямоугольными и прямосторонними. В сферической геометрии также используют понятия: равнобедренные и равносторонние треугольники.

В прямоугольном сферическом треугольнике сторона, противолежащая углу 90^0, называется гипотенузой, а две другие стороны — катетами. Но существуют сферические треугольники с двумя и тремя прямыми углами. Например, на рис. 2.4 сферические треугольники A_1B_1C, A_1B_1D и A_1CD косоугольные, у них все углы отличаются от 90°. Сферическиq треугольник *DHG* - прямоугольный, (угол *DGH* - прямой); треугольники A_1EF и A_1GE являются двояко прямоугольными, так как имеют по два прямых угла; сферический треугольник A_1FG имеет три прямых угла, он заключает в себе 1/8 часть поверхности сферы.

Рис. 2.4 – Сферические треугольники

Решение сферических треугольников составляет предмет сферической тригонометрии и находит применение в астрономии, картографии, навигации, высшей геодезии, кристаллографии, фотограмметрии.

2.2 Полярный сферический треугольник и его свойства

Два сферических треугольника, лежащие на одной и той же сфере, называются **полярными**, если вершины одного из них являются полюсами сторон другого. Впервые понятие о полярном треугольнике сформулировал в XVIII веке геометр Снеллиус.

Построим полярный треугольник для данного сферического треугольника *ABC* (рис. 2.5). Из точки *A* радиусом, равным 90°, проведем на сфере дугу B_1C_1. Тогда точка *A* будет полюсом, для проведенной дуги. Точно так же из точки *B* проведем дугу A_1C_1, из точки C дугу A_1B_1. Тогда треугольник $A_1B_1C_1$ будет полярный для данного треугольника *ABC*.

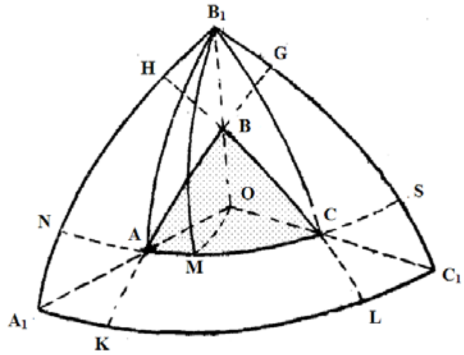


Рис 2.5 – Полярные сферические треугольники

Нетрудно видеть, что вершины построенного полярного треугольника – это полюсы для сторон треугольника *ABC*.

Проведем через точки B_1, *A* и B_1, C дуги больших кругов. Тогда, если вершина *A* является полюсом дуги B_1C_1, то каждая точка этой дуги отстоит от *A* на 90°, а потому дуга большого круга AB_1 будет равна 90° и центральный угол B_1OA, опирающийся на нее, будет прямой. Таким же образом, аналогично рассуждая, придем к заключению, что угол B_1OC будет тоже прямой.

Но если прямая B_1O перпендикулярна к двум прямым, проведенным на плоскости A_1OC_1, то она будет перпендикулярна и ко всякой третьей линии, проведенной в этой плоскости через ее основание, т. е. дуга большого круга, соединяющая вершину полярного треугольника B_1 с любой точкой M, лежащей на стороне основного треугольника AC, будет равна 90°. Таким образом, вершина B_1 полярного треугольника является полюсом для стороны AC основного треугольника.

Точно так же можно доказать, что две другие вершины полярного треугольника A_1 и C_1 являются полюсами для сторон начального треугольника BC и AB. Следовательно, если один сферический треугольник полярен относительно другого, то и второй будет полярен относительно первого (т. е. треугольники будут взаимно полярны).

Теорема. Стороны и углы двух полярных относительно друг друга треугольников попарно взаимно дополняют друг друга до 180°.

Доказательство. Дано, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полярны один относительно другого (рис. 2.5). Будем обозначать углы и стороны основного треугольника через A, B, C, a, b, c, элементы же построенного для «его полярного треугольника теми же буквами, только с индексами $A_1, B_1, C_1, a_1, b_1, c_1$.

1) Докажем, что угол основного сферического треугольника, например B, сложенный со стороной полярного треугольника b_1 дает в сумме 180°.

Продолжим дуги больших кругов BA и BC на сфере до пересечения со стороной полярного треугольника A_1C_1 в точках K и L.

Сферический угол измеряется дугою большого круга, содержащегося между его сторонами, в отношении которой вершина угла есть полюс, а поэтому угол B измеряется дугою KL. Поэтому $B + b_1 = KL + A_1C_1$.

Заменяя в этом равенстве A_1C_1 через $A_1K + KL + LC_1$, а затем объединяя слагаемые по порядку по два, получим:

$$B + b_1 = KL + A_1K + KL + LC_1 = A_1L + KC_1$$

Ввиду того, что точка C_1 есть полюс дуги BK, находим, что $KC_1 = 90°$; ввиду того, что точка A_1 есть полюс дуги BL, имеем: $A_1L = 90°$. Тогда

$$B + b_1 = 90° + 90° = 180°.$$

Точно таким же образом доказывается, что

$$A + a_1 = 180°, C + c_1 = 180°,$$

Таким образом, сумма угла данного сферического треугольника и соответствующей стороны полярного треугольника равна 180°:

$$A + a_1 = 180°; B + b_1 = 180°; C + c_1 = 180° \qquad (2.1)$$

2) Нетрудно доказать, что сумма угла полярного треугольника и соответствующей стороны основного треугольника равна 180°. Докажем, например, что $B_1 + b = 180°$.

Угол B_1 измеряется дугою NS. Поэтому $B_1 + b = NS + AC$; но вместо NS можно поставить сумму $NC + CS$, а вместо AC разность $AS—CS$ (рис. 2.5). Тогда будем иметь: $B_1 + b = NC + CS + AS – CS = NC + AS = 90°+90° = 180^o$.

Заметим, что доказанное очевидно и в силу взаимной полярности треугольников.

3) Если каждая сторона одного треугольника меньше 90°, то построенный для него полярный треугольник будет находиться вне данного треугольника, как видно на рис. 2.5. Если же какие-либо стороны одного треугольника больше 90°, а другие меньше 90°, то его полярный треугольник будет пересекать стороны данного; наконец, если каждая из сторон данного треугольника больше 90°, то его полярный треугольник будет находиться внутри него.

Свойствами полярного треугольника мы будем пользоваться в дальнейшем при выводе различных формул сферической тригонометрии.

2.3 Соотношение между сторонами и углами сферического треугольника

Из стереометрии известно, что каждый плоский угол трехгранного угла О меньше суммы и больше разности двух других плоских углов (рис. 2.6). Эти плоские углы измеряются сторонами сферического треугольника, на которые они опираются, а двугранные углы измеряются соответствующими углами сферического треугольника. Это позволяет установить следующие соотношения между сторонами и углами сферического треугольника.

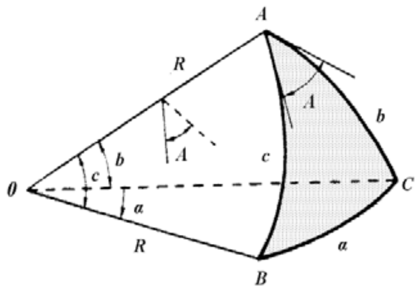


Рис. 2.6

1) Так как $\angle AOC < \angle AOB + \angle BOC$ и $\angle \mathrm{AOC} = b$, $\angle \mathrm{AOB} = \mathrm{c}$, $\angle \mathrm{BOC} = a$, то отсюда следует: $a + c > b$ Следовательно, каждая сторона сферического треугольника меньше суммы двух других сторон и можно записать систему неравенств:

$$\mathrm{a} + b > c, \qquad a + c > b, \; b + c > a,$$

$$b > c - a, \qquad a > b - c, \qquad c > b - a \qquad (2.2)$$

На основании формул второй строки следует, что каждая сторона сферического треугольника больше разности двух других.

Прибавим к обеим частям первого неравенства c и, разделив обе части полученного неравенства на два, получим

$$\frac{a + b + c}{2} = p > c$$

Следовательно, полупериод p сферического треугольника всегда больше любой из сторон.

2) Из стереометрии известно, что во всяком трехгранном угле сумма плоских его углов не превышает 360° (доказательство – в Приложении). Следовательно $0 < a + b + \mathrm{c} < 360^0$ (2.3)

Сумма сторон сферического треугольника всегда меньше 360^0.

3) Рассмотрим два взаимополярных сферических треугольника ACB и $A_1B_1C_1$, Тогда, согласно (2) для сторон треугольника $A_1B_1C_1$, можно записать:

$$0 < a_1 + b_1 + \mathrm{c}_1 < 360^0 \qquad (2.4)$$

В п. 2.2 были получены формулы, связывающие стороны и углы полярных треугольников $A + a_1 = 180^0$; $B + b_1 = 180^0$; $C + c_1 = 180^0$; откуда

$$a_1 = 180^0 - \mathrm{A}; \; \mathrm{b}_1 = 180^0 - \mathrm{B}; \; \mathrm{c}_1 = 180^0 - \mathrm{C} \qquad (2.5)$$

Подставим (2.5) в неравенство (2.4) и получим

$$180^0 < A + B + C < 540^0 \qquad (2.6)$$

Превышение суммы углов сферического треугольника над 180° называется его **эксцессом** или **сферическим избытком** и обозначается

$$\varepsilon = A + B + C - 180^0 \qquad (2.7)$$

4) Рассмотрим два взаимополярных сферических треугольника *ACB* и $A_1B_1C_1$, Тогда, согласно (1) для сторон треугольника $A_1B_1C_1$, можно записать:

$$a_1 + b_1 > c_1$$

Тогда на основании (4) получим $360^0 - A - B > 180^0 - C$, откуда

$$A + B - C < 180^0$$

Аналогично получаются остальные формулы

$$A + C - B < 180^0; \quad B + C - A < 180^0 \qquad (2.8)$$

5) Внешний угол сферического треугольника меньше суммы двух внутренних углов, с ним не смежных, но больше их разности.

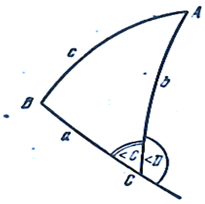


Рис. 2.7

Доказательство. Продолжим в сферическом треугольнике ABC одну из сторон, например a, и образуем внешний угол D (рис. 2.7). Из рис. видно, что $D+C=180°$. Так как $A+B+C > 180°$, то $A+B+C>D+C$. Отсюда получаем $A+B>D$. Для доказательства второй части теоремы воспользуемся неравенством (2.8):

$A + C – B < 180° = D + C$, откуда $A – B < D$.

6) Углы при основании равнобедренного сферического треугольника равны между собой.

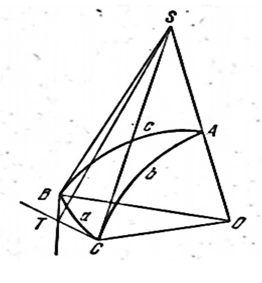


Рис 2.8

Доказательство. Пусть *ABC* - равнобедренный сферический треугольник, в котором две его стороны равны между собой: $b = c$ (рис. 2.8). Допустим, что $b < 90°$. Проведем к вершинам *A, B* и *C* радиусы сферы *CO*, *BO* и *AO* и построим касательные *SB* и *SC* к равным сторонам b и c в вершинах B и C. Эти касательные пересекут продолжение радиуса OA в одной и той же точке, а длины их будут равны: $BS=CS$. Проведем к стороне a через вершины B и C касательные BT и CT и соединим точку их пересечения T с точкой S отрезком прямой TS.

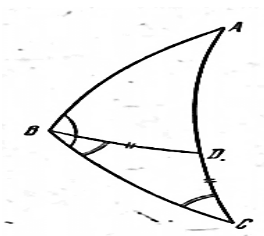
В плоских треугольниках STB и STC сторона TS является их общей стороной, а две другие стороны попарно равны между собой, т. е. $BS=CS$ и $BT=CT$. Очевидно, что эти треугольники равны между собой. Отсюда следует, что $\angle SBT=\angle SCT$. Но поскольку этими углами измеряются сферические углы при вершинах B и C сферического треугольника, отсюда заключаем, что $B = C$.

7) Из доказанной теоремы вытекает, что в сферическом треугольнике против равных сторон лежат равные углы, т. е. если $b = c$, то $B = C$.

8) Против равных углов в сферическом треугольнике лежат равные стороны.

9) В сферическом треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Доказательство. Пусть угол B сферического треугольника ABC будет больше угла C (рис. 2.9). Проведем через вершину B дугу BD окружности большого круга под углом DBC, равным углу C. Так как треугольник BCD имеет два равных угла, то он является равнобедренным и по доказанному ранее его



стороны BD и CD равны между собой. Но для треугольника ABD будет справедливо неравенство $AB < AD + BD$. Заменяя сторону BD равной ей стороной DC, имеем $AB<AD+ DC = AC$

Рис 2.9.

10) В сферическом треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

11) Если сумма двух сторон сферического треугольника удовлетворяет одному из условий $a + b <180°$, $a + b =180°$, $a + b >180°$, то и сумма противолежащих им углов удовлетворяет соответствующему условию

$$A + B < 180°, A + B = 180° \text{ или } A + B > 180°.$$

Обратно, Если сумма двух углов сферического треугольника больше, равна или меньше 180°, то и сумма противолежащих им сторон должна быть соответственно больше, равна или меньше 180°.

12). Если разность двух сторон сферического треугольника больше, равна или меньше 0, то и разность двух противолежащих им углов больше, равна или меньше нуля.

13) Если разность двух углов сферического треугольника больше, равна или меньше 0, то и разность двух противолежащих им сторон больше, равна или меньше нуля.

2.4 Равенство сферических треугольников. Симметричные сферические треугольники

Сферические треугольники, лежащие на одной и той же сфере, равны между собой, если они при наложении совпадают. Это будет тогда, когда данные равные части сферических треугольников расположены в них одинаковым образом и выполняется хотя бы одно из нижеследующих условий:

1. сферические треугольники имеют по две соответственно равные стороны и по равному углу, заключенному между этими сторонами;
2. сферические треугольники имеют по равной стороне и по два соответственно равных угла, прилежащих к этой стороне;
3. сферические треугольники имеют по три соответственно равные стороны;
4. сферические треугольники имеют по три соответственно равных угла.

Доказательство выполнения первых трех условий осуществляется методом наложения. Обозначим углы одного сферического треугольника *A, B, C,* а противолежащие им стороны *a, b, c;* углы и стороны другого сферического треугольника — соответственно A_1, B_1, C_1 и a_1, b_1, c_1. Если сферический треугольник $A_1B_1C_1$, перемещая его по сфере, возможно наложить на сферический треугольник ABC таким образом, чтобы были совмещены все их одноименные элементы (углы и стороны), то доказательства равенства обоих совмещенных сферических треугольников производятся так же, как это делается в геометрии для плоских треугольников.

Доказательство четвертого случая равенства производится методом построения двух сферических треугольников, полярных относительно данных сферических треугольников. Пусть даны два сферических треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, для которых имеет место четвертое условие, т. е. $A=A_1$, $B=B_1$, $C=C_1$. Для доказательства равенства данных сферических треугольников между собой построим полярные им сферические треугольники $A'B'C'$ и $\boldsymbol{A_1'B_1'C_1'}$. На основании известных свойств полярных сферических треугольников (п. 2.2) будут справедливы следующие равенства:

$$A + a' = 180^0, \;\; A_1 + a_1' = 180^0$$

$$B + b' = 180^0, \;\; B_1 + b_1' = 180^0$$

$$C + c' = 180^0, \;\; C_1 + c_1' = 180^0$$

Так как, по условию, $A=A_1$, $B=B_1$, $C=C_1$,то будут справедливы равенства: $\boldsymbol{a' = a_1'}$; $\boldsymbol{b' = b_1'}$; $\boldsymbol{c' = c_1'}$. т. е. сферические треугольники $A'B'C'$ и $A_1'B_1'C_1'$ полярные данным сферическим треугольникам ABC и $A_1B_1C_1$ будут равны друг другу по трем соответственно равным сторонам (по третьему условию равенства сферических треугольников).

Из равенства полярных сферических треугольников $A'B'C'$ и $A_1'B_1'C_1'$ следует, что соответственные углы их равны между собой, т. е.

$$A' = A_1' \; ; \;\; B' = B_1' \; ; \;\; C' = C_1'$$

Так как углы полярных сферических треугольников являются дополнениями до 180° сторон данных сферических треугольников, то можно написать соотношения $$A' + a = 180^0,\ A_1' + a_1 = 180^0$$

$$B' + b = 180^0,\ B_1' + b_1 = 180^0$$

$$C' + c = 180^0,\ C_1' + c_1 = 180^0$$

Из этих соотношений следует, что $a=a_1$; $b=b_1$; $c=c_1$, т. е., что данные сферические треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют также и соответственно равные стороны. Отсюда на основании третьего условия равенства сферических треугольников, заключаем, что данные сферические треугольники ABC и $A_1B_1C_1$равны между собой.

Введем еще одно важное понятие. Два сферических треугольника ABC и A_1B_1C (рис. 2.10) могут иметь соответственно равновеликие элементы: $A=A_1$, $B=B_1$, $C=C_1$, $a=a_1$, $b=b_1$, $c=c_1$, но , быть расположены на сфере в различном порядке: нумерация вершин в треугольнике ABC идет по ходу часовой стрелки, а в треугольнике $A_1B_1C_1$—против хода часовой стрелки.

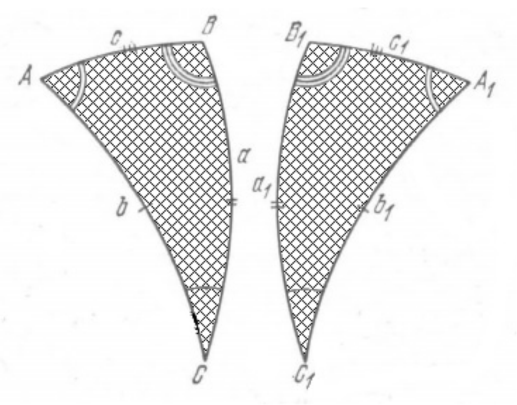


Рис. 2.10 – Симметричные сферические треугольники

При таком расположении элементов сферический треугольник $A_1B_1C_1$ не может быть наложен на сферический треугольник ABC ни в результате его перемещения по сфере (при совмещении вершин C_l и С п сторон c_1 и с вершина A_1 должна совмещаться с B, а вершина B_1 с A, но $A_1 \# B$, $B_1=A$, ни в результате вращения его вокруг стороны A_1B_1 (AB), так как при этом стороны a, b и c не совместятся с соответствующими им сторонами a_1, b_1 и c_1, выпуклости которых будут попарно противоположны; не произойдет и совмещения поверхностей сферических треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC.

Для совмещения соответствующих сторон и поверхностей сферических треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC потребуется еще их выгибание. Но выгибание поверхности сферического треугольника равносильно перемещению центра сферы. Равновеликие, но неналагающиеся друг на друга сферические треугольники называются **симметричными сферическими треугольниками**.

Примечание. Симметричные сферические равнобедренные треугольники могут быть совмещены на сфере.

2.5 Площадь сферического треугольника

В п.1.4 получена формула вычисления площади сферического двуугольника:

$$S_\alpha = 2\alpha R^2, \tag{1.10}$$

где угол α задан в радианах.

Теорема. Площадь сферического треугольника на сфере радиуса R равна произведению квадрата радиуса на сферический излишек, т.е.

$$S = R^2(A + B + C - \pi) = R^2\varepsilon$$

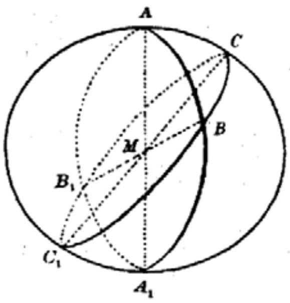


Рис. 2.11

Доказательство. Сферический треугольник дополняется любым смежным с ним треугольником до сферического двуугольника (рис. 2.11). Углы образующихся двуугольников равны углам основного треугольника. Например, на рис. 2.11 хорошо видны двуугольники с углами A и C. Согласно (2) запишем для каждого двуугольника:

$$S_{ABC} + S_{A_1BC} = 2R^2 \cdot A; \quad S_{ABC} + S_{AB_1C} = 2R^2 \cdot B; \quad S_{ABC} + S_{ABC_1} = 2R^2 \cdot C$$

Сложим равенства и получим

$$2S_{ABC} + \left(S_{ABC} + S_{A_1BC} + S_{AB_1C} + S_{ABC_1}\right) = 2R^2 \cdot (A + B + C)$$

Так как треугольники AB_1C и A_1BC равны, то $S_{AB_1C} = S_{A_1BC}$. Тогда сумма площадей треугольников в круглых скобках левой части равенства будет равна площади поверхности полусферы, т.е. $2\pi R^2$. Таким образом, получим

$$2S_{ABC} + 2\pi R^2 = 2R^2 \cdot (A + B + C), \text{ откуда } S_{ABC} = 2R^2 \cdot (A + B + C - \pi).$$

А так как сферический излишек равен $\varepsilon = (A + B + C - \pi)$, то получим формулу для вычисления площади сферического треугольника

$$S = R^2(A + B + C - \pi) = R^2\varepsilon \tag{2.9}$$

Из (2.9) следует $(A + B + C) = \pi + S / R^2$, т.е. сумма углов сферического треугольника больше 180^0.

Пример. Углы сферического треугольника на сфере радиуса 10 м. равны: $A = 87^0 45' 4''$; $B = 120^0 23' 5''$; $C = 98^0 53' 7''$. Вычислить площадь треугольника.

Решение. Переведем градусы в десятичные доли:

$$A = 87^0 45' 4'' = 87^0, + \frac{45}{60} + \frac{4}{3600} = 87{,}75111^0$$

Аналогично получим $B = 120{,}3847^0$; $C = 98{,}88528^0$

Сферический излишек равен $\varepsilon = (A + B + C - \pi) = 127{,}0211^0$, или в радианах 2,216937. Тогда $S = 100 \cdot 2{,}216937 = 221{,}7$ м^2.

Контрольные вопросы по теме 2

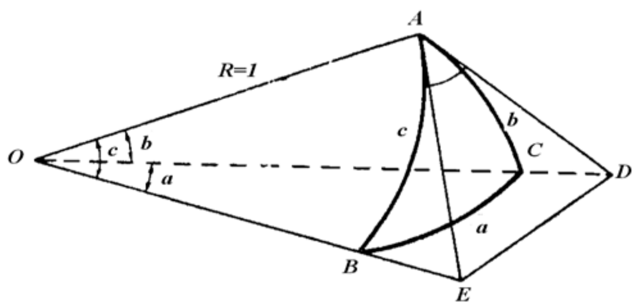
1. Какие треугольники называются сферическими?
2. Какие сферические треугольники называются полярными?
3. Как связаны стороны и углы двух полярных треугольников?
4. Может ли сумма сторон сферического треугольника превышать 360^0?
5. Будет ли сумма углов сферического треугольника равна 180^0?
6. Какие существуют соотношения между сторонами сферического треугольника?
7. Какие существуют соотношения между углами сферического треугольника?
8. Возможно ли существование сферического треугольника, у которого сторона b=32^0, а угол B превышает 100^0?
9. Как вычисляется сферический избыток?
10. Перечислите признаки равенства сферических треугольников.
11. Как вычисляется площадь сферического треугольника?
12. В чем заключается различие между понятиями: равные и симметричные сферические треугольники?

ТЕМА 3. ОСНОВЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

3.1. Формулы косинусов сторон и углов сферического треугольника

Формулы косинусов сторон сферического треугольника

Рассмотрим рис. 3.1, на котором изображен треугольник ABC на сфере с радиусом, который равняется единице и центром в точке O. В вершине A проведены касательные AE и AD к сторонам c и b сферического треугольника. Эти касательные пересекаются в точках E и D с продолжением радиусов сферы, которые проходят через вершины B и C.



Применим теорему косинусов для плоских треугольников AED и OED:

$$DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE \cdot AD \cos A,$$

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cos \alpha$$

Рис. 3.1 – Расчет сферического треугольника

Приравняв между собой правые части уравнений, получим:

$$(OE^2 - AE^2) + (OD^2 - AD^2) = 2OD \cdot OE \cos\alpha + 2AE \cdot AD \cos A$$

Принимая во внимание, что радиус сферы равен единице, из прямоугольных треугольников OAE OAD получим:

$$(OE^2 - AE^2) + (OD^2 - AD^2) = OA^2 + OA^2 = 2$$

Так как $AD = tg\, b$; $AE = tg\, c$; $OE = \dfrac{1}{\cos c}$; $OD = \dfrac{1}{\cos b}$, получаем:

$$1 - \frac{\cos a}{\cos b \cos c} + tg\, b\ tg\, c\ \cos A = 0$$

Перемножим все слагаемые последнего уравнения на $\cos b \cdot \cos c$ и одержимо окончательно:

$$\cos a = \cos b\ \cos c + \sin b\ \sin c\ \cos A \qquad (3.1)$$

Построение на рис. 3.1 возможно, если каждая из сторон b и c меньшая 90°. Поэтому выражение (3.1) нужно обобщить на тот случай, когда треугольник имеет стороны больше за 90°. Для этого рассмотрим рис. 3.2. На нем изображен ABC, который имеет стороны b>90° и c>90°. Если продолжим эти стороны до их пересечения в точке D, то получим смежный треугольник DBC, в котором каждая из сторон $180° - b$ и $180° - c$ будет меньшей за 90°.

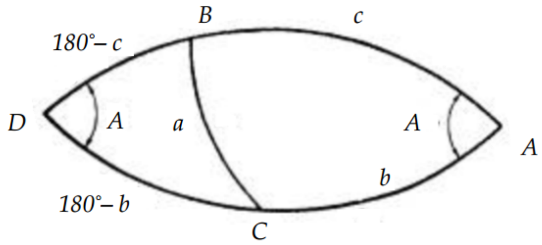


Рис. 3.2

Тогда для треугольника DBC формула (3.1) примет вид

$cos\ a = cos\ (180^{\circ} - b)\ cos\ (180^{\circ} - c) + sin\ (180^{\circ} - b)\ sin\ (180^{\circ} - c) \times cos\ A$ или

$cos\ a = cos\ b\ \ cos\ c + sin\ b\ \ sin\ c\ \ cos\ A$, что совпадает с формулой (3.1).

Замечание. При написании формул сферической тригонометрии часто используют метод круговой перестановки элементов. Например, для того чтобы получить вторую формулу, заменим в (3.1) (замена производится согласно рис.3.3 в направлении стрелки):

Рис. 3.3. $a \rightarrow b,\ b \rightarrow c,\ c \rightarrow a,\ A \rightarrow B$

Окончательно получим

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= cos\ b\ \ cos\ c + sin\ b\ \ sin\ c\ \ cos\ A \\ \cos b &= cos\ a\ \ cos\ c + sin\ a\ \ sin\ c\ \ cos\ B \\ \cos c &= cos\ a\ \ cos\ b + sin\ a\ \ sin\ b\ \ cos\ C \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

Таким образом, косинус стороны сферического треугольника равняется сумме произведений косинусов двух других сторон и синусов этих же сторон, умноженных на косинус угла между ними.

Формулы косинусов углов сферического треугольника

Чтобы получить формулы косинусов углов сферического треугольника запишем соотношения (3.2) для сторон треугольника $A_1B_1C_1$ полярного по отношению к треугольнику ABC:

$$\begin{aligned}
\cos a_1 &= \cos b_1 \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cos A_1 \\
\cos b_1 &= \cos a_1 \cos c_1 + \sin a_1 \sin c_1 \cos B_1 \\
\cos c_1 &= \cos a_1 \cos b_1 + \sin a_1 \sin b_1 \cos c_1
\end{aligned}$$

Согласно основному свойству взаимно полярных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$:

$$\begin{aligned}
a_1 = 180^\circ - A;\ \ b_1 = 180^\circ - B;\ \ c_1 = 180^\circ - C \\
A_1 = 180^\circ - a;\ \ B_1 = 180^\circ - b;\ \ C_1 = 180^\circ - c
\end{aligned}$$

Подстановка этих равенств в предыдущую формулу дает

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\left(180^\circ - A\right) = \cos\left(180^\circ - B\right)\cos\left(180^\circ - C\right) + \\
&\quad + \sin\left(180^\circ - B\right)\sin\left(180^\circ - C\right)\cos\left(180^\circ - a\right) \\
&\cos\left(180^\circ - B\right) = \cos\left(180^\circ - A\right)\cos\left(180^\circ - C\right) + \\
&\quad + \sin\left(180^\circ - A\right)\sin\left(180^\circ - C\right)\cos\left(180^\circ - b\right) \\
&\cos\left(180^\circ - C\right) = \cos\left(180^\circ - A\right)\cos\left(180^\circ - B\right) + \\
&+ \sin\left(180^\circ - A\right)\sin\left(180^\circ - B\right)\cos\left(180^\circ - c\right)
\end{aligned}\right\}$$

Воспользуемся формулами приведения тригонометрических функций

$$\sin\left(180^\circ - \alpha\right) = \sin\alpha,\ \cos\left(180^\circ - A\right) = -\cos\alpha\ ,$$

а также умножим на отрицательную единицу обе части каждого соотношения. В результате получим формулы косинусов углов сферического треугольника.

$$\left.\begin{aligned}
\cos A &= -\cos B\ \cos C + \sin B\ \sin C\ \cos a \\
\cos B &= -\cos A\ \cos C + \sin A\ \sin C\ \cos b \\
\cos C &= -\cos A\ \cos B + \sin A\ \sin B\ \cos c
\end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

Таким образом, косинус угла сферического треугольника равняется разности произведений синусов этих же углов, умноженных на косинус стороны между ними и косинусов двух других углов.

Пример использования формул. Определить кратчайшее расстояние (ортодромию) между M_1 ($52^0 11'$; $49^0 30'$) и M_2 ($58^0 17'$; $55^0 36'$), которые лежат в северной части земного шара (R=6370 км).

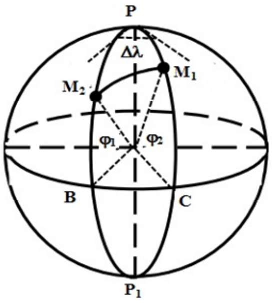


Рис. 3.4

Решение. Рассмотрим сферический треугольник $\mathbf{M_1PM_2}$ (рис. 3.4). Так как *BC* – дуга экватора, P –полюс, то стороны ΔM_1PM_2 равны $M_1P = 90^0\text{-}\varphi_1$; $M_2P = 90^0\text{-}\varphi_2$. Разница долгот - угол $\angle M_1PM_2 = \Delta\lambda$ равна $\lambda_2 - \lambda_1 = 55^\circ 36' - 49^\circ 30' = 6^0 06'$

Для определения ортодромии воспользуемся формулой косинуса стороны сферического треугольника (3.2):

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \text{ .}$$

В нашем случае формула приобретает вид:

$$\cos M_1M_2 = \cos(90^\circ - \varphi_1)\cos(90^\circ - \varphi_2) + \sin(90^\circ - \varphi_1)\sin(90^\circ - \varphi_2)\cos\Delta\lambda$$

или
$$\cos M_1M_2 = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Delta\lambda \quad \textbf{(*)}$$

Вычисления рекомендуется проводить с помощью MS Excel (рис 3.5).

<u>Краткие указания</u>. Градусы переводятся в радианы, подсчитываются косинусы и синусы с использованием встроенных функций COS(), SIN(). Например, =COS(E3). Затем в ячейку B11 записывается формула (*) в виде: =B9*B10+B6*B7*B8. Дуга M_1M_2 вычисляется в радианах с использованием функции арккосинус: =ACOS(B11). Длина дуги M_1M_2 вычисляется по формуле: =6370*B12. Таким образом, расстояние M_1M_2 примерно равно 780 км.

B11 fx =B9*B10+B6*B7*B8

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	координаты	широта				долгота			
2	точек	град	мин	десятичная мера	радианы	град	мин	десятичная мера	радианы
3	M1	52	11	52,18333333	0,91077	49	30	49,5	0,86394
4	M2	58	17	58,28333333	1,01724	55	36	55,6	0,9704
5	угол Δ λ	6	6	6,1	0,10647				
6	cos (Δλ)	0,99434							
7	cos(φ1)	0,61314							
8	cos(φ2)	0,52572							
9	sin(φ1)	0,78998							
10	sin(φ2)	0,85066							
11	cos(M1M2)	0,99251							
12	M1M2 в радианах	0,12245							
13	расстояние M1M2	779,981	км						
14									

Рис. 3.5 – Решение задачи

3.2 Теорема синусов

Теорема. Отношение синуса угла сферического треугольника к синусу противоположной стороны – это постоянная величина. Иными словами, синусы сторон сферического треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, т.е.

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}=K, \text{ где } K \text{ –константа} \qquad (3.4)$$

Доказательство. В п.3.1 получена формула

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, из которой следует: $\cos A=\dfrac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$

Тогда $$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right)^2=$$

$$=\frac{\sin^2 b\sin^2 c-\cos^2 a+2\cos a\cos b\cos c-\cos^2 b\cos^2 c}{\sin^2 b\sin^2 c}=$$

$$=\frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)-\cos^2 a+2\cos a\cos b\cos c-\cos^2 b\cos^2 c}{\sin^2 b\sin^2 c}=$$

$$=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}$$

Разделим обе части полученного выражения на $\sin^2 A$

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\ \sin^2 b\ \sin^2 c}=K^2$$

Выражение, стоящее в правой части равенства, симметрично относительно элементов $a,\ b,\ c$ и не изменит своей величины при круговой перестановке букв. Поэтому K можно принять как константу и мы получим $\dfrac{\sin A}{\sin a}=K$, что доказывает первое соотношение в (3.4). Аналогично доказываются

$$\frac{\sin B}{\sin b}=K;\ \frac{\sin C}{\sin c}=K$$

Теорема доказана. Теорема синусов (3.4) устанавливает связь между сторонами и противоположными им углами сферического треугольника:

а) Против равных сторон сферического треугольника лежат равные углы.

б) Против наибольшего угла сферического треугольника лежит наибольшая сторона и, наоборот, против наибольшей стороны сферического треугольника лежит наибольший угол.

Задача. Известны две стороны сферического треугольника a=70^{0}14', b=62^{0}10' и угол A=80^{0}20'. Определить угол B.

Решение. Согласно теореме синусов получим

$$\sin B = \sin A \cdot \sin b / \sin a$$

Тогда решение имеет вид

B6 =F4*F3/F2

	A	B	C	D	E	F
1		град	мин	дес.град	рад.	sin
2	*a=*	70	14	70,2333	1,225803	0,94107768
3	*b=*	62	10	62,1667	1,085013	0,88430949
4	*A=*	80	20	80,3333	1,402081	0,98580133
5						
6	*sin(B)=*	0,9263				
7	*B=*	1,1846	рад	67,8706	дес.град	67° 52' 14''

Рис. 3.6 – Решение задачи

3.3. Формулы пяти элементов сферического треугольника

Формулы пяти элементов устанавливают связь:

а) между тремя сторонами и двумя углами сферического треугольника (основные формулы пяти элементов);

б) между тремя углами и двумя сторонами сферического треугольника (измененные формулы пяти элементов).

Чтобы получить формулы пяти элементов, воспользуемся формулой косинусов сторон сферического треугольника (3.2, п.3.1).

Рассмотрим пару из второй и третьей формул (3.2) :

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned} \qquad (3.2')$$

Исключим cos$c$ из первой формулы (3.2’), воспользовавшись второй:

$$\cos b = \cos a(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin a \sin c \cos B$$

$$\cos b = (1 - \sin^2 a)\cos b + \cos a \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin c \cos B$$

$$\cos b = \cos b - \sin^2 a \cos b + \cos a \sin a \sin b \cos C + \sin a \sin c \cos B$$

Соединим подобные члены и разделим обе части равенства на sin$a$, получим:

$$\sin c \cos B = \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C\ .$$

Если в формулах (3.2’) исключить cos$b$, то по аналогии получим

$$\sin b \cos C = \sin a \cos c - \cos a \sin c \cos B$$

Проведем аналогичные преобразования для двух других пар формул (3.2, п.3.1), получим систему формул пяти элементов сферического треугольника.

$$\left.\begin{aligned} \sin c \cos B &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C \\ \sin b \cos C &= \sin a \cos c - \cos a \sin c \cos B \\ \sin c \cos A &= \sin b \cos a - \cos b \sin a \cos C \\ \sin a \cos C &= \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A \\ \sin a \cos B &= \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A \\ \sin b \cos A &= \sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

Произведение синуса стороны на косинус прилегающего угла равняется произведению синуса третьей стороны на косинус противоположной этому углу стороны без произведения косинуса третьей стороны на синус той же противоположной стороны и на косинус угла между ними.

Полученные формулы (3.5) однородны относительно синусов сторон сферического треугольника. Согласно теореме синусов (3.4) сделаем замену в этих формулах:

$$\sin \alpha = \frac{1}{K}\sin A\,;\ \sin b = \frac{1}{K}\sin B\,;\ \sin c = \frac{1}{K}\sin C$$

После простых преобразований, получим так называемые измененные формулы пяти элементов, которые устанавливают связь между тремя углами и двумя сторонами сферического треугольника.

$$\left.\begin{aligned}
&\sin A\cos b = \sin C\cos B + \cos C\sin B\,\cos a\\
&\sin A\cos c = \sin B\cos C + \cos B\sin C\,\cos a\\
&\sin B\cos a = \sin C\cos A + \cos C\sin A\,\cos b\\
&\sin B\cos c = \sin A\cos C + \cos A\sin C\,\cos b\\
&\sin C\cos b = \sin A\cos B + \cos A\sin B\,\cos c\\
&\sin C\cos a = \sin B\cos A + \cos B\sin A\,\cos c
\end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

Произведение синуса угла на косинус прилегающей стороны равняется произведению косинуса угла, противоположного этой стороне, на синус третьего угла плюс произведение синуса противоположного угла на косинус третьего угла и на косинус стороны между ними.

3.4. Формулы четырех элементов сферического треугольника

Выберем одну из формул (3.5, п.3.3), например

$$\sin b\cos A = \sin c\cos a - \cos c\sin a\cos B$$

По теореме синусов (3.4, п.3.2): $\sin b\cdot\sin A = \sin a\cdot\sin B$.

Разделим первое равенство на второе, получим

$$ctgA = \frac{\sin c\cdot ctga}{\sin B} - \frac{\cos c\cdot\cos B}{\sin B}$$

Откуда следует $ctgA\cdot\sin B = \sin c\cdot ctga - \cos c\cdot\cos B$ или

$$\cos c\cdot\cos B = ctga\cdot\sin c - ctgA\cdot\sin B$$

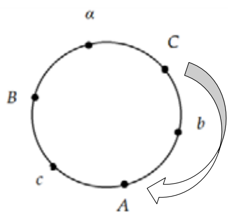
Таким образом, если в левой части каждой формулы (3.5, п.3.3) сделать замену синусов сторон по формулам, которые получаются из теоремы синусов (3.4, п.3.2)

$$\sin c = \frac{\sin b}{\sin B}\sin C;\ \sin b = \frac{\sin c}{\sin C}\sin B;\ \sin c = \frac{\sin a}{\sin A}\sin C;\ \sin a = \frac{\sin c}{\sin C}\sin A;$$

$$sin\,a = \frac{sin\,b}{sin\,B}\sin A\,; \quad sin\,b = \frac{sin\,a}{sin\,A}\sin B\,,$$

то после простых преобразований получим формулы четырех элементов сферического треугольника:

$$\left.\begin{aligned} cos\,a\cos C &= ctg\,b\,sin\,a - ctg\,B\,sin\,C \\ cos\,a\cos B &= ctg\,c\,sin\,a - ctg\,C\,sin\,B \\ cos\,b\cos C &= ctg\,a\,sin\,b - ctg\,A\,sin\,C \\ cos\,b\cos A &= ctg\,c\,sin\,b - ctg\,C\,sin\,A \\ cos\,c\cos A &= ctg\,b\,sin\,c - ctg\,B\,sin\,A \\ cos\,c\cos B &= ctg\,a\,sin\,c - ctg\,A\,sin\,B \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$



Если в сферическом треугольнике согласно схеме на рис. 3.7 взять ряд из четырех рядом расположенных элементов, например, *b, C, a, B,* то элементы *C, a* является средними, а элементы *b, B* − крайними. Тогда произведение косинусов средних элементов

Рис .3.7

равняется произведению котангенса крайней стороны на синус средней без произведения котангенса крайнего угла на синус среднего угла.

Контрольные вопросы по теме 3

1. В чем заключается метод перестановки элементов?

2. Сколько основных формул связывают шесть элементов сферического треугольника?

3. Как вычислить кратчайшее расстояние между двумя точками на сфере?

4. Сколько основных формул связывают пять элементов сферического треугольника?

5. Сколько основных формул связывают четыре элемента сферического треугольника?

6. Сколько независимых формул из общего количества формул, связывающих четыре элемента сферического треугольника?

7. Какая зависимость определяется сферической теоремой синусов?

ТЕМА 4 РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

4.1 Формулы для решения прямоугольных сферических треугольников. Сферическая теорема Пифагора

В формулу решения прямоугольного сферического треугольника должны входить три элемента: два заданных и один искомый. Число всевозможных случаев нахождения неизвестного элемента по двум данным, равно числу сочетаний из пяти элементов по трем, т.е. $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$. Таким образом, для всех случаев решения прямоугольного сферического треугольника необходимо десять формул.

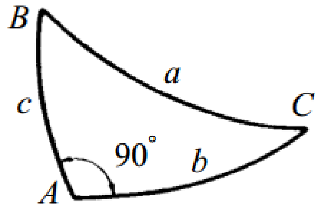


Рис. 4.1

Рассмотрим прямоугольный сферический треугольник и для определенности всегда считать, что A - прямой угол, сторону a назовем гипотезой, а стороны b и c катетами (рис. 4.1). Из шести групп основных формул, полученных в п.3.1-3.4 выделим следующие десять:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$
$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$
$$\sin A \sin b = \sin a \sin B$$
$$\sin A \sin c = \sin a \sin C$$
$$\cos b \cos C = ctg\, a \sin b - ctg\, A \sin C$$
$$\cos b \cos A = ctg\, c \sin b - ctg\, C \sin A$$
$$\cos c \cos B = ctg\, a \sin c - ctg\, A \sin B$$
$$\cos c \cos A = ctg\, b \sin c - ctg\, B \sin A$$

Учтя, что $A=90^0$, $\cos A=0$, $\sin A=1$, $ctg A=0$, получим десять формул для решения прямоугольного сферического треугольника. Например, первое равенство представляет собой **сферическую теорему Пифагора,** которая легко получается из формулы (3.1, п.3.1)

$$\cos a = \cos b \ \cos c + \sin b \ \sin c \ \cos A,$$

При A=90^0 равенство принимает вид (сферическая теорема Пифагора)

$$\cos a = \cos b \ \cos c$$

Аналогично можно получить остальные 10 равенств

$$\left.\begin{aligned}
&\cos a = \cos b \ \cos \ c \\
&\cos a = ctg\, B \ ctg \ C \\
&\cos B = \sin C \ \cos \ b \\
&\cos C = \sin B \ \cos \ c \\
&\sin \ b \ = \ \sin \ a \ \sin \ B \\
&\sin \ c \ = \ \sin \ a \ \sin \ C \\
&\cos C = ctg\, a \ tg\, b \\
&\sin b = ctg\, C \ tg\, c \\
&\cos B = ctg\, a \ tg\, c \\
&\sin c \ = \ ctg\, B \ tg \ b
\end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

Шотландский математик Дж. Непер заменил в формулах (4.1) катеты b и c их дополнениями до 90^0 и предложил удобное мнемоническое правило для написания формул, разделив их на две группы.

Первая группа формул

$$\left.\begin{aligned}
&\cos a = \sin(90^0 - b) \ \cos(90^0 - c) \\
&\cos B = \sin C \ \sin(90^0 - b) \\
&\cos C = \sin B \ \sin(90^0 - c) \\
&\cos(90^0 - b) \ = \ \sin \ a \ \sin \ B \\
&\cos(90^0 - c) \ = \ \sin \ a \ \sin \ C
\end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

Вторая группа формул

$$\left.\begin{aligned}
&\cos a = ctg\, B \ ctg\, C \\
&\cos B = ctg\, a \ ctg(90^0 - c) \\
&\cos C = ctg\, a \ ctg \ (90^0 - b) \\
&\cos(90^0 - c) \ = \ ctg\, B \ ctg \ (90^0 - b) \\
&\cos(90^0 - b) = ctg\, C \ ctg \ (90^0 - c)
\end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

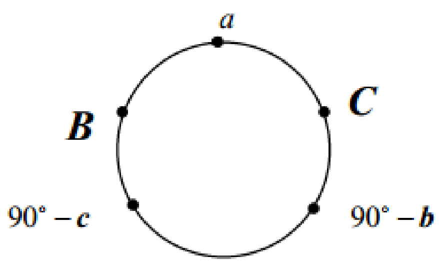


Рис. 4.2

Формулы (4.2) и (4.3) называются ***правилом Непера.*** Если принять, что катеты b и c лежат рядом, то есть не считать прямого угла A, и заменить катеты их дополнениями до 90^0 (схема на рис. 4.2). Тогда косинус произвольного элемента прямоугольного треугольника равняется произведению котангенсов прилегающих к нему элементов или произведению синусов не прилегающих элементов.

Правило Непера можно представить в стихотворной форме:

"Помнить нужно нам о том,
Элементов нужно три.
Там, где косинус внутри,
Там котангенсы кругом.
Дальний косинус где нужен,
Синус с синусом там дружен".

<u>Замечание</u>. Формулы (4.2) и (4.3) вместе с рис. 4.2 хороши для запоминания, но, на наш взгляд, при решении практических задач лучше использовать формулы (4.1).

4.2. Связь между величинами сторон и углов прямоугольного сферического треугольника

1. Для связи гипотенузы и катетов имеем сферическую формулу Пифагора:

$$\cos a = \cos b \cos c$$

а) Пусть каждый из катетов меньше 90^0, тогда $\cos b$ и $\cos c$ положительные, но тогда и $\cos a$ положительный и, значит, $a<90^0$.

б) Если каждый из катетов больше 90°, тогда $\cos b$ и $\cos c$ оба отрицательные, а потому $\cos a$ положительный и $a < 90°$.

в) Если один из катетов больше 90°, а второй менее 90°, то косинус одного катета положителен, а второго - отрицательный. Поэтому cos a будет отрицателен и $a > 90°$.

Для удобства условимся называть два элемента треугольника **однородными,** если оба они больше или меньше 90°, и – **разнородными,** когда один из них больше, а второй меньший за 90°.

Пользуясь этими понятиями, зависимость между величинами катетов и гипотенузы можно сформулировать так: **если катеты однородны, то гипотенуза меньше 90°; если же катеты разнородны, то гипотенуза больше 90 °.**

2. Для связи гипотенузы с прилегающими к ней углами имеем соотношение

$$\cos a = ctg\, B\; ctg\, C.$$

Проанализировав это выражение аналогично проведенному анализу формулы Пифагора, установим следующую зависимость между гипотенузой и прилегающими к ней углами: **если прилежащие к гипотенузе углы однородны, то гипотенуза меньше 90°; если же эти углы разнородны, то гипотенуза больше 90°.**

3. Для связи одного катета и двух углов, которые прилегают к гипотенузе, имеем соотношение: $\cos B = \sin C \cos b$.

Поскольку sin C всегда положительный независимо от того, острый или тупой угол C, то знаки cos B и cos b всегда совпадают: **произвольный катет и противоположный ему угол всегда однородны.**

Полученные соотношения между величинами сторон и углов прямоугольного сферического треугольника помогут при нахождении элементов треугольника по их синусам, выбирать, какое из двух возможных значений элемента является допустимым. Например, если в прямоугольном треугольнике ABC катет $b > 90°$ и при решении задачи для противоположного угла B получено, что $\sin B = 0{,}5$, то его значение равно $B = 150°$.

Выведем дополнительные условия существования прямоугольного сферического треугольника. Ранее, в п.2.3 получено

$$180^0 < \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} < 540^0,$$

Так как А=90^0, то $90^0 < \mathrm{B} + \mathrm{C} < 450^0$

Рассмотрим соответствующий полярный треугольник, стороны которого равны $a = 90^0, b = 180 - B, c = 180 - C.$ Тогда для этого треугольника

$$0 < a + b + \mathrm{c} < 360^0$$

или после подстановки выражений для сторон

$$450^0 - B - C < 360^0, \text{ откуда } 90^0 < B + C$$

Так как $b + c > a$, то $360^0 - B - C > 90^0$, откуда $B + C < 270^0$.

Условие $b < c + a$ приводит к $180^0 - B < 90^0 + 180^0 - C$, откуда

$$B - C > -90^0$$

Условие $\mathrm{c} < a + \mathrm{b}$ приводит к $180^0 - C < 90^0 + 180^0 - B$, откуда

$$B - C < 90^0$$

Таким образом, имеем два условия существования прямоугольного сферического треугольника $90^0 < B + C < 270^0$; $-90 < B - C < 90$

4.3. Основные случаи и указания к решению прямоугольных сферических треугольников

Возможны шесть разных случаев решения прямоугольных треугольников при условии, если заданы:

1) гипотенуза и катет; 2) два катета; 3) гипотенуза и прилегающий к ней угол; 4) катет и прилегающий к нему угол; 5) два угла; 6) катет и противоположный ему угол.

Для решения рекомендуется использовать формулы (4.1). Настоятельно рекомендуем пользоваться MS Excel, что существенно облегчает решение задач.

Если решение треугольника существует, то в первых пяти случаях оно единственное, а в шестом - двузначно. В шестом случае первый из трех искомых элементов вычисляют через синус, который имеет положительное значение в первой и второй четвертях. Поэтому для первого элемента получаем два значения, которые дополняют друг друга до 180°. Геометрически это значит, что имеем два сопряженных прямоугольных сферических треугольника. Они имеют заданные общую сторону и противоположный ей угол при вершине двуугольника.

При решении необходимо проводить контроль правильности расчетов и следить, чтобы значения элементов отвечали условиям существования сферического треугольника.

Указания к решению прямоугольных сферических треугольников

Случай 1. Даны гипотенуза a и катет b. Найти катет c, углы A и B, а также площадь треугольника.

Указания к решению. Из десяти формул (1) выбираем следующие

$$\cos a = \cos\cdot b \cos\ c;\ \sin\ b\ =\ \sin\ a\ \cdot \sin\ B;\ \cos C = ctg\ a \cdot\ tg\ \mathrm{b}$$

Тогда неизвестные элементы определяются по формулам

$$cosc = \frac{cosa}{cosb}, \qquad \sin B = \frac{sinb}{sina}, \qquad cosC = tgb/tga$$

Далее проведите контроль правильности решения, проверив условия существования прямоугольного сферического треугольника (п.2.3, п.4.2).

1. $90^0 < B + C < 270^0;\ -90 < B - C < 90$:

2. $0 < a + b + \mathrm{c} < 360^0$:

3. $a + b > c,\ \ a + c > b,\ b + c > a,\ b > c - a,\ \ \ a > b - c,\ \ \ c > b - a$:

4. Произвольный катет и противоположный ему угол всегда однородны.

5 . Если катеты однородны, то гипотенуза должна быть меньше 90^0 (п.4.2). и т.д.

6. Формула для контроля должна связывать найденные элементы. Из (4.1) выбираем равенство $cosC = sinB \cdot cosc$.

Пример. В прямоугольном сферическом треугольнике дана гипотенуза a=60^0 и катет b=30^0. Найти угла A и B, а также катет c.

Решение. $cosc = \frac{cosa}{cosb} = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} = 0{,}57735$, тогда

$c = \arccos(0{,}57735) = 0.9553$, откуда $c = 180^0 \cdot \frac{0{,}9553}{\pi} = 54{,}735^0$

$\sin B = \frac{sinb}{sina} = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} = 0{,}57735, D = \arcsin(0{,}57735) = 0{,}6155,$

откуда $B = 180^0 \cdot \frac{0{,}6155}{\pi} = 35{,}264^0$

$$cosC = \frac{tgb}{tga} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 0{,}3333, \qquad C = \arccos(0{,}3333) = 1{,}231$$

откуда $\mathrm{C} = 180^0 \cdot \frac{1{,}231}{\pi} = 70{,}529^0$

Формула для контроля $cosC = sinB \cdot cosc$ дает 0,3333=0,33333

Проверим условия существования прямоугольного сферического треугольника.

1. $90^0 < B + C = 105{,}793^0 < 270^0$; $-90 < B - C = -35{,}265^0 < 90$

2. 0< $a + b + \mathrm{c} = 144{,}735^0 < 360^0$:

Остальные условия также выполнены. Например, катеты получились однородными, а гипотенуза задана меньше 90^0.

Случай 2. Даны два катета b и c. Найти гипотенузу a, углы B и C.

Указания к решению. Из десяти формул (1) выбираем следующие

$$\cos a = \cos\cdot b \cos\ c;\ \sin\ c\ =\ ctgB\ \cdot tg\ b;\ \sin b = ctgC\ \cdot\ tg\ c$$

Тогда неизвестные элементы определяются по формулам

$$cosa = cosb \cdot cosc, \qquad \operatorname{tg} B = \frac{tgb}{sinc}, \ \ \operatorname{tg} C = \frac{tgc}{sinb}$$

Формула для контроля должна связывать найденные элементы. Из (1) выбираем равенство $cosa = ctgB \cdot ctgC$. Проверьте другие условия существования прямоугольного сферического треугольника.

Случай 3. Даны гипотенуза a и прилегающий к ней угол C. Найти катеты и угол B.

Указания к решению. Из десяти формул (1) выбираем следующие

$$\cos C = ctga \cdot tg\, b;\ \sin\ c\ =\ \sin a\ \cdot \sin C;\ \cos a = ctgB\ \cdot\ ctg\ C$$

Тогда неизвестные элементы определяются по формулам

$$tgb = tga \cdot cosC, \qquad \sin c = sina \cdot sinC, \quad \mathrm{tg}\, B = \frac{1}{cosa \cdot tg\mathrm{C}}$$

Формула контроля $sinc = ctgB \cdot tgb$

Далее проведите контроль правильности решения, проверив условия существования прямоугольного сферического треугольника (п.2.3, п.4.2).

Случай 4. Даны катет b и прилегающий к нему угол C. Найти катет c, гипотенузу a и угол B.

Указания к решению. Из десяти формул (1) выбираем следующие

$$\cos C = ctga \cdot tg\, b;\ \sin\ b\ =\ tgc\ \cdot ctgC;\ \cos B = \cos b\ \cdot\ \sin\ C$$

Тогда неизвестные элементы определяются по формулам

$$tga = tgb/cosC, \qquad \mathrm{tg}\, c = sinb \cdot tgC, \ \cos B = cosb \cdot sinC$$

Далее проведите контроль правильности решения $cosB = tgc/tga$ и проверьте условия существования прямоугольного сферического треугольника (п.2.3, п.4.2).

Случай 5. Даны углы B и C. Найти катеты и гипотенузу.

Указания к решению. Из десяти формул (1) выбираем следующие

$$\cos B = \sin C \cdot \cos\ b;\ \cos\ a\ =\ ctgB\ \cdot ctgC;\ \cos C = \cos c\ \cdot\ \sin\ B$$

Тогда неизвестные элементы определяются по формулам

$$cosa = \frac{1}{tgB \cdot tgC}, \qquad cosb = \frac{cosB}{sinC}, \quad cosc = cosC/sinB$$

Далее проведите контроль правильности решения $cosa = cosb \cdot cosc$ и проверьте условия существования прямоугольного сферического треугольника (п.2.3, п.4.2).

Случай 6. Дан катет b и противолежащий ему угол B . Найти катет c и гипотенузу a, угол C.

Указания к решению. Из десяти формул (4.1) выбираем следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{l} \sin b = \sin a \cdot \sin\ B \\ \sin c = \ ctgB\ \cdot tgb \\ \cos B = \cos b\ \cdot\ \sin\ C \end{array}\right\}$$

Тогда неизвестные элементы определяются по формулам

$$sina = \frac{sinb}{sinB}, \qquad sinc = \frac{tgb}{tgB}, \quad sinC = \frac{cosB}{cosb}$$

Далее проведите контроль правильности решения

$$sinc = sina \cdot sinC$$

Для существования треугольника необходимо, чтобы $sina$, $sinc$ и $sinC$ были положительны и меньше единицы. Для этого необходимо, чтобы b и B были однородными – оба или больше 90^0, или меньше 90^0. Для выполнения неравенства $sina < 1$, нужно, чтобы $sinb$ был меньше $sinB$. Исходя из того, что b и B должны находиться в одной четверти, при $b < 90^0$ должно выполняться $b < B < 90^0$, а при $b > 90^0$ условие $90^0 < b < B$

Если задача возможна, то получается два решения, т. е. имеем два сферических треугольника. Стороны a_1, c_1 и угол C_1 первого треугольника будут дополнениями соответствующих сторон второго треугольника a_2, c_2 и угол C_2 до 180^0. Эти треугольники будут иметь общий катет b, а противоположные этому катету углы оба будут равны B.

Примеры решения прямоугольных сферических треугольников с использованием MS Excel приведены в методических указаниях к выполнению контрольных работ по курсу «Основы сферической геометрии и тригонометрии».

Контрольные вопросы по теме 4

1. Что такое "прямоугольный сферический треугольник"? Каковы его элементы?

2. Сформулируйте теорему Пифагора для прямоугольных сферических треугольников.

3. Сформулируйте правило Непера.

4. Пользуясь правилом Непера, написать формулы, связывающие следующие элементы прямоугольного треугольника: *a, B, C; a, B, c; a,b,c; b, B, c; a, c, C; B,c,C*.

5. Какие два элемента прямоугольного сферического треугольника называют однородными?

6. Как связать гипотенузу с прилегающими углами?

7. Как связать катет с двумя углами *B* и *C*?

8. Записать условия существования прямоугольного сферического треугольника?

9. Сколько возможно случаев решения прямоугольного сферического треугольника?

10. Составьте схемы вычислений для каждого случая решения прямоугольных сферических треугольников.

11. Возможен ли прямоугольный сферический треугольник, если его углы равны: $B=135^0$, $C=140^0$?

12. Возможен ли прямоугольный сферический треугольник, если его углы равны: $B=35^0$, $C=48^0$?

13. Как осуществлять контроль правильности решения задач по определению неизвестных элементов прямоугольного сферического треугольника?

ТЕМА 5. РЕШЕНИЕ КОСОУГОЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

5.1. Формулы синусов, косинусов и тангенсов половины угла сферического треугольника

Рассмотрим произвольный сферический треугольник ABC и будем считать, что его внутренние углы не превышают 180^0. Воспользуемся известными формулами тригонометрии:

$$\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = (1 - cosA)/2; \quad \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = (1 + cosA)/2 \qquad (5.1)$$

В п.3.1 получена формула $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, откуда

$$\cos A = \frac{(\cos a - \cos b \cos c)}{\sin b \sin c} \qquad (5.2)$$

Подставим (2) в первое уравнение (1), получим

$$\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - (cosa - cosb \cdot cosc)/sinb \cdot sinc}{2} = \frac{sinb \cdot sinc + cosb \cdot cosc - cosa}{2 \cdot sinb \cdot sinc}$$

$$= \frac{\cos(b - c) - cosa}{2 \cdot sinb \cdot sinc}$$

Так как разность косинусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы двух углов на синус полуразности двух углов, то получим

$$\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = 2sin\frac{b - c + a}{2} sin\frac{a - b + c}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot sinb \cdot sinc}$$

Преобразуем выражения $b - c + a = a + b + c - 2c = 2p - 2c$;

$$a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b,$$

Где $p = (a + b + c)/2$ – полупериметр треугольника.

Тогда формула принимает вид $\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\sin(p-c)\sin(p-b)}{sinb \cdot sinc}$

В итоге, получим $sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{sinb \cdot sinc}}$

Аналогично получаются формулы синусов для других углов треугольника. Таким образом, имеем формулы синусов половины углов:

$$sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{sinb \cdot sinc}};$$

$$sin\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{sina \cdot sinc}};$$

$$sin\left(\frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{sina \cdot sinb}} \qquad (5.3)$$

Подставим (2) во второе уравнение (1), получим

$$cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 + (cosa - cosb \cdot cosc)/sinb \cdot sinc}{2} = \frac{sinb \cdot sinc - cosb \cdot cosc + cosa}{2 \cdot sinb \cdot sinc}$$

$$= \frac{-\cos(b + c) + cosa}{2 \cdot sinb \cdot sinc} = 2sin\frac{a + b + c}{2} sin\frac{b + c - a}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot sinb \cdot sinc}$$

Преобразуем выражения $b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a$. Тогда формула принимает вид

$$cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(p)\sin(p-a)}{sinb \cdot sinc}}$$

Аналогично получаются формулы синусов для других углов треугольника. Таким образом, имеем формулы косинусов половины углов:

$$cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(p)\sin(p-a)}{sinb \cdot sinc}}$$

$$cos\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(p)\sin(p-b)}{sina \cdot sinc}}$$

$$cos\left(\frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(p)\sin(p-c)}{sina \cdot sinb}} \qquad (5.4)$$

Из полученных формул без труда получаются формулы тангенсов половины углов:

$$tg\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{sinp \cdot \sin(p-a)}}$$

$$tg\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{sinp \cdot \sin(p-b)}}$$

$$tg\left(\frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{sinp \cdot \sin(p-c)}} \qquad (5.5)$$

Введем в рассмотрение дополнительную величину

$$M = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}, \qquad (5.6)$$

Тогда формулы тангенсов половины углов можно записать в виде:

$$tg\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{M}{\sin(p-a)};\ tg\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{M}{\sin(p-b)};\quad tg\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{M}{\sin(p-c)} \qquad (5.7)$$

Тангенс половины угла сферического треугольника равняется вспомогательной величине М, разделенной на синус разницы полупериметра и противоположной углу стороне.

Умножим отдельно левые и правые части формул (5.7) и получим:

$$tg\left(\frac{A}{2}\right) tg\left(\frac{B}{2}\right) tg\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{M}{\sin(p)}$$

5.2 Формулы синусов, косинусов и тангенсов половины сторон сферического треугольника

Перепишем соотношения (5.3 и 5.4) п.5.1 для углов треугольника $A_1B_1C_1$, который являются полярными к данному треугольнику ABC. Полупериметр полярного треугольника равен $p_1 = 0{,}5 \cdot (a_1 + b_1 + c_1)$

Для элементов взаимополярных треугольников выполняются известные соотношения (п.3.2):

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 180^\circ - A,\ b_1 = 180^\circ - B \\ c_1 = 180^\circ - C,\ A_1 = 180^\circ - a \end{array}\right\} \qquad (5.8)$$

Тогда:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = \dfrac{1}{2}(540^\circ - A - B - C) = 180^\circ - \dfrac{\varepsilon}{2} \\ p_1 - a_1 = A - \dfrac{\varepsilon}{2},\ \ p_1 - b_1 = B - \dfrac{\varepsilon}{2} \\ p_1 - c_1 = C - \dfrac{\varepsilon}{2},\ \ \dfrac{A_1}{2} = 90^\circ - \dfrac{a}{2} \end{array}\right\}, \qquad (5.9)$$

где ε - сферический излишек треугольника ABC.

Воспользуемся формулой (5.4) п.5.1, записав ее для полярного треугольника

$A_1B_1C_1$ и подставим у них значение величин из формул (5.8-5.9).

$$cos\left(\frac{A_1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(p_1)\sin(p_1 - a_1)}{sinb_1 \cdot sinc_1}}$$

$$cos\left(\frac{180^0 - a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(180^0 - \varepsilon/2)\sin(A - \varepsilon/2)}{\sin(180^0 - B)\cdot\sin(180^0 - c)}}$$

$$sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin(A - \frac{\varepsilon}{2})}{sinB \cdot sinC}}$$

В результате получим формулы синусов половины сторон:

$$sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin(A - \frac{\varepsilon}{2})}{sinB \cdot sinC}}$$

$$sin\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin(B - \frac{\varepsilon}{2})}{sinA \cdot sinC}}$$

$$sin\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin(C - \frac{\varepsilon}{2})}{sinA \cdot sinB}} \qquad (5.10)$$

Воспользуемся формулой (5.3), записав ее для полярного треугольника $A_1B_1C_1$ и подставим у них значение величин из формул (5.8-5.9).

$$sin\left(\frac{A_1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(p_1 - b_1)\sin(p_1 - c_1)}{sinb_1 \cdot sinc_1}};$$

$$\sin\left(\frac{180^0 - a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(B - \varepsilon/2)\sin(C - \varepsilon/2)}{\sin(180^0 - B)\cdot\sin(180^0 - c)}};$$

$$cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin(C - \frac{\varepsilon}{2})}{sinB \cdot sinC}}$$

В результате получим формулы косинусов половины сторон:

$$cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(B - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin(C - \frac{\varepsilon}{2})}{sinB \cdot sinC}}$$

$$cos\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin(C - \frac{\varepsilon}{2})}{sinA \cdot sinC}}$$

$$cos\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\sin\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin(B - \frac{\varepsilon}{2})}{sinA \cdot sinB}} \qquad (5.11)$$

Из формул (5.10-5.11) получим формулы тангенсов половины сторон:

$$tg\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\,(A-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin\,(B-\frac{\varepsilon}{2})\cdot\sin\,(C-\frac{\varepsilon}{2})}}$$

$$tg\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\,(B-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin\,(A-\frac{\varepsilon}{2})\cdot\sin\,(C-\frac{\varepsilon}{2})}}$$

$$tg\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\,(C-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin\,(A-\frac{\varepsilon}{2})\cdot\sin\,(B-\frac{\varepsilon}{2})}} \qquad (5.12)$$

Введем обозначение:

$$N=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin(A-\frac{\varepsilon}{2})\sin(B-\frac{\varepsilon}{2})\sin(C-\frac{\varepsilon}{2})}}, \qquad (5.13)$$

окончательно найдем формулы тангенсов половины стороны :

$$\left.\begin{aligned} tg\frac{a}{2}&=N\sin(A-\frac{\varepsilon}{2})\\ tg\frac{b}{2}&=N\sin(B-\frac{\varepsilon}{2})\\ tg\frac{c}{2}&=N\sin(C-\frac{\varepsilon}{2}) \end{aligned}\right\}. \qquad (5.14)$$

Умножим отдельно левые и правые части (5.14), учтя (5.13) и получим:

$$tg\frac{a}{2}tg\frac{b}{2}tg\frac{c}{2}=N\sin\frac{\varepsilon}{2}.$$

5.3 Формулы Даламбера-Гаусса и аналогии Непера. Формулы для расчета сферического излишка

Если в тригонометрическое тождество

$$\sin\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

подставить соответствующие значения из (5.3), (5.4), то получим

$$sin\frac{A+B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{sinb\cdot sinc}}\sqrt{\frac{\sin(p)\sin(p-b)}{sina\cdot sinc}}=$$

$$+\sqrt{\frac{\sin(p)\sin(p-a)}{sinb\cdot sinc}}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{sina\cdot sinc}}=$$

$$=\frac{\sin(p-b)}{sinc}\sqrt{\frac{\sin(p)\sin(p-c)}{sina\cdot sinb}}+\frac{\sin(p-a)}{sinc}\sqrt{\frac{\sin(p)\sin(p-c)}{sina\cdot sinb}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sin(p)\sin(p-c)}{sina\cdot sinb}}\left(\frac{\sin(p-b)}{sinc}+\frac{\sin(p-a)}{sinc}\right)=$$

$$=cos\left(\frac{C}{2}\right)\frac{2\sin\left(p-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{c}{2}\right)\cos\left(\frac{c}{2}\right)}==\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)/\cos\left(\frac{c}{2}\right)$$

Аналогично, если в тригонометрические тождества

$$\left.\begin{aligned}sin\frac{A\pm B}{2}&=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\pm\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\\ cos\frac{A\pm B}{2}&=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\mp\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\end{aligned}\right\}$$

подставить соответствующие значения из (5.3), (5.4), (5.10) и (5.11), то после простых преобразований получим четыре формулы Даламбера-Гаусса:

$$sin\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c}{2}\right)}$$

$$sin\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{c}{2}\right)}$$

$$cos\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c}{2}\right)}$$

$$cos\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{c}{2}\right)} \qquad (5.15)$$

Разделим первую формулу из (5.15) на третью, а вторую на четвертую. В результате получим первую и вторую аналогии Непера:

$$tg\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)},$$

$$tg\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)} \qquad (5.16)$$

Тангенс полсуммы двух углов сферического треугольника так относится к котангенсу половины третьего угла, как косинус полуразности противоположных им сторон относится к косинусу полсуммы тех же сторон.

Тангенс полуразности двух углов сферического треугольника так относится к котангенсу половины третьего угла, как синус полуразности противоположных им сторон относится к синусу полсуммы тех же сторон.

Разделив четвертую формулу (5.15) на третью и вторую на первую, получим третью и четвертую аналогии Непера:

$$tg\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)},$$

$$tg\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)} \qquad (5.17)$$

Тангенс полсуммы двух сторон сферического треугольника так относится к тангенсу половины третьей стороны, как косинус полуразности противоположных им углов к косинусу полсуммы этих же углов.

Тангенс полуразности двух сторон сферического треугольника так относится к тангенсу половины третьей стороны, как синус полуразности противоположных им углов к синусу полсуммы этих же углов.

Замечание. Общее число аналогий Непера равняется двенадцати. Другие восемь аналогий можно получить, если применим метод перестановки элементов по кругу.

Разделив первую и вторую, или третью и четвертую аналогии Непера, получим контрольную формулу Гаусса.

$$\frac{tg\,\frac{A+B}{2}}{tg\,\frac{A-B}{2}} = \frac{tg\,\frac{a+b}{2}}{tg\,\frac{a-b}{2}}$$

Формулы для расчета сферического излишка

Перемножим первые две формулы из (5.3) и используем третью формулу (5.11), получим

$$\sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{b}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{sinB\cdot sinC}}\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{sinA\cdot sinC}} = \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{sinC}\sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{sinA\cdot sinB}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{sinC}cos\left(\frac{c}{2}\right)$$

Отсюда следует $\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{b}{2}\right)sinC/cos\left(\frac{c}{2}\right)$

Аналогичную выражения можно получить перемножением второй и третьей формулы (5.2) с учетом (5.11) и т.д. В результате получим первую формулу Каньоли, которая выражают сферический излишек как функцию трех сторон и одного угла сферического треугольника.

$$\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \sin\left(\frac{a}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{b}{2}\right)sinC}{cos\left(\frac{c}{2}\right)}; \qquad \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \sin\left(\frac{b}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{c}{2}\right)sinA}{cos\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \sin\left(\frac{a}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{c}{2}\right)sinB}{cos\left(\frac{b}{2}\right)} \qquad (5.18)$$

Итак, синус половины сферического излишка треугольника равняется произведению синусов половины двух сторон на синус угла между ними, разделенному на косинус половины третьей стороны.

Вторая формула Коньоли:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sqrt{\sin p\; sin(p-a)\; sin(p-b)\; sin\,(p-c)}}{2\,cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}} \qquad (5.19)$$

выражает сферический излишек как функцию трех сторон треугольника. Эту формулу получают заменой в первой формуле (5.18) *sinC* выражением:

$$sin\ C = \frac{2\sqrt{\sin\ p\ sin(p\ -a)\ sin(p\ -b)\ sin(p\ -c)}}{\sin a\ sin\ b}$$

что выплывает из соотношений (4.1) и (4.2).

Сферический излишек возможно вычислить также по формуле Люилье:

$$tg\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{tg\frac{p}{2}tg\frac{p-a}{2}tg\frac{p-b}{2}tg\frac{p-c}{2}} \qquad (5.20)$$

5.4 Основные случаи решения косоугольных сферических треугольников

Возможны шесть разных случаев решения косоугольных треугольников, если заданы следующие элементы:

1) три стороны; 2) три угла; 3) две стороны и угол между ними; 4) сторона и два прилегающих к ней угла; 5) две стороны и угол, который лежит против одной из них; 6) два угла и сторона, которая лежит против одного из них.

При решении необходимо следить, чтобы значения элементов удовлетворяли условиям существования сферического треугольника (п.3.3).

При определении трех неизвестных элементов решения треугольника рекомендуется:

– в первом и втором случаях использовать формулы (5.6-5.7) и (5.13-5.14);

– в третьем и четвертом случаях использовать аналогии Непера (5.16-17);

– в пятом и шестом случаях рекомендуется использовать теорему синусов и аналогии Непера;

Если результаты удовлетворяют условиям существования сферического треугольника, то в первых четырех случаях решение однозначно, а в пятом и шестом имеем два решения (как в шестом случае для прямоугольного треугольника).

Замечание. 1. Сферический треугольник можно решать с использованием основных формул, полученных в разделе 3. Особенно это удобно, когда надо найти только один из неизвестных элементов.

2. Ход решения всегда необходимо контролировать, выполняя дополнительные вычисления с помощью формул, которые не использовались при нахождении неизвестных величин. Рекомендуется также определять значение одной и той же неизвестной величины с помощью разных формул.

Подробнее рассмотрим случаи решения треугольников.

Случай 1. Даны три стороны треугольника. Определить углы треугольника.

Указания к решению. Для решения используются формулы

$$tg(A/2) = \frac{M}{\sin(p-a)};\; tg(B/2) = \frac{M}{\sin(p-b)};\; tg(C/2) = \frac{M}{\sin(p-c)};$$

где $M = \sqrt{\dfrac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}$.

Для контроля вычислений можно использовать соотношение

$$tg\left(\frac{A}{2}\right) tg\left(\frac{B}{2}\right) tg\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{M}{\sin(p)}$$

Необходимо, чтобы выполнялись условия $180^0 < A + B + C < 540^0$, $A + B - C < 180^0$, $\quad A + C - B < 180^0$, $\quad C + B - A < 180^0$

Пример. Даны три стороны треугольника a=45^0, b=60^0, c=30^0. Определить углы треугольника.

Решение. $p = 145^0/2$ или $p = 1{,}1781$ рад., a=0,7854 рад, b=1,0472 рад, c=0,5236 рад. Тогда sin(p–a)=sin(0,3927)=0,3827; sin(p–b)=sin(0,1309)=0,01305; sin(p–c)=sin(0,6545)=0,6088; sin(p)=sin(1,1781)=0,9239, M=0,1814.

$$A = 2arctg\left(\frac{M}{\sin(p-a)}\right) = 2arctg\left(\frac{0{,}1814}{0{,}3827}\right) = 0{,}88538 \text{ рад. или } 50{,}729^0;$$

$$B = 2arctg\left(\frac{M}{\sin(p-b)}\right) = 2arctg\left(\frac{0{,}1814}{0{,}1305}\right) = 1{,}89424 \text{ рад. или } 108{,}532^0;$$

$$C = 2arctg\left(\frac{M}{\sin(p-c)}\right) = 2arctg\left(\frac{0{,}1814}{0{,}6088}\right) = 0{,}57927 \text{ рад. или } 33{,}19^0.$$

Контроль вычислений: $tg\left(\frac{A}{2}\right)tg\left(\frac{B}{2}\right)tg\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{M}{\sin(p)}$ или 0,196367=0,196367

Проверка существования треугольника $a+b+c=135^0<360^0$,

$$180^0 < A+B+C = 192{,}45^0 < 540^0,$$

$A+B-C=126^0<180^0, A+C-B=-24{,}6^0<180^0, C+B-A=91^0<180^0$

Случай 2. Даны три угла треугольника. Определить стороны треугольника.

Указания к решению. Для решения используются формулы

$$tg(a/2)=Nsin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right),\quad tg(b/2)=Nsin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right),\quad tg(c/2)=Nsin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

где $N=\sqrt{\dfrac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin(A-\frac{\varepsilon}{2})\sin(B-\frac{\varepsilon}{2})\sin(C-\frac{\varepsilon}{2})}}$.

Для контроля вычислений можно использовать соотношение

$$tg\left(\frac{a}{2}\right)tg\left(\frac{b}{2}\right)tg\left(\frac{c}{2}\right)=Nsin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Необходимо, чтобы выполнялись условия $p<180^0, p-a>0, p-b>0,$ $p-c>0$ или $a+b+c<360^0,\quad c+b>a,\quad a+c>b, a+b>c.$

Случай 3. Даны две стороны a и b, а также угол C между этими сторонами. Найти сторону c и углы A и B.

Указания к решению. Для вычисления углов используем аналогии Непера:

$$tg\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)},\qquad tg\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

Для вычисления стороны используем формулу косинусов

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$$

Для контроля вычислений можно использовать соотношение

$$\cos C = -\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c$$

Случай 4. Даны сторона c и два прилежащих угла A и B. Найти стороны a и b, угол C.

Указания к решению. Для вычисления сторон используем третью и четвертую аналогии Непера:

$$tg\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)},\qquad tg\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

Для вычисления угла С используем первую и вторую аналогии Непера

$$ctg\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)},\qquad ctg\frac{\mathrm{C}}{2}=\frac{tg\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}$$

Для контроля вычислений можно использовать соотношение

$$\frac{tg\frac{A+B}{2}}{tg\frac{A-B}{2}}=\frac{tg\frac{a+b}{2}}{tg\frac{a-b}{2}}$$

Случай 5. Даны две стороны *a, b* и угол *A,* который лежит против одной из сторон (т.е. стороны *a*). Найти *c, B*, *C*.

Указания к решению. Угол *B* определим по формуле

$$sinB=sinA\cdot sinb/sina$$

Угол *C* и сторону *c* определим из формул (5.16) и (5.17)

$$\operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}\right)=ctg\frac{A+B}{2}\cdot\frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)},\qquad \operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}\right)=ctg\frac{A-B}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)},$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}\right)=tg\frac{a+b}{2}\cdot\frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)},\qquad \operatorname{tg}\left(\frac{c}{2}\right)=tg\frac{a-b}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

При вычислении угла *B* возможны три ответа:

1) $sinB>1$, решения нет; 2) $sinB=1$, тогда $B=90^0$, задача имеет единственное решение; 3) $sinB<1$, тогда имеем два решения, причем в первом случае $B<90^0$, во втором случае $B>90^0$.

Контроль $$\frac{tg\frac{A+B}{2}}{tg\frac{A-B}{2}}=\frac{tg\frac{a+b}{2}}{tg\frac{a-b}{2}}$$

Кроме того, формул должны выполняться условия $C<180^0$, $c<180^0$.

Случай 6. Даны два угла *A, B* и сторона *a,* которая лежит против одного из углов (т.е. угла *A*). Найти *b, c*, *C*.

Указания. Сторона b определяется по формуле $sinb = sinB \cdot \frac{sina}{sinA}$

Контроль $\dfrac{tg\dfrac{A+B}{2}}{tg\dfrac{A-B}{2}} = \dfrac{tg\dfrac{a+b}{2}}{tg\dfrac{a-b}{2}}$

Угол *C* и сторону *c* определим из формул (5.16) и (5.17)

$$\mathrm{tg}\left(\frac{C}{2}\right) = ctg\frac{A+B}{2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{C}{2}\right) = ctg\frac{A-B}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{c}{2}\right) = tg\frac{a+b}{2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}, \quad \mathrm{tg}\left(\frac{c}{2}\right) = tg\frac{a-b}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

5.5. Решение малых сферических треугольников с помощью теоремы Лежандра

Сферический треугольник считается ***малым***, если стороны его весьма малы сравнительно с радиусом сферы, на которой он расположен.

В математическом анализе для тригонометрических функций sin *x,* cos *x,* tg *x* выводятся следующие бесконечные ряды:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$tgx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots$$

Если требуемая точность вычислений такова, что величиной x^3, как величиной третьего порядка малости, можно пренебречь, то сферический треугольник мощно рассматривать как плоский, а тригонометрические функции малых сторон примут вид $sinx = x;\ cosx = 1 - \frac{x^2}{2};\ tgx = x$

Здесь в качестве *x* могут быть стороны *a, b , c*

Тогда имеют место соотношения $\frac{a}{sina} = \frac{b}{sinb} = \frac{c}{sinc}$

как в плоском треугольнике, при этом формула

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

принимает вид

$$1 - \frac{a^2}{2} = \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + b \cdot c \cdot cosA = 1 - \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} + \frac{b^2c^2}{4} + b \cdot c \cdot cosA$$

Если пренебречь членом $\frac{b^2c^2}{4}$ как величиной четвертого порядка малости, то получим $a^2 = b^2 + c^2 - 2b{\cdot}c \cos A$, т.е. теорему косинусов для плоского треугольника.

Теорема Лежандра. Малый сферический треугольник можно приближенно вычислять как плоский, имеющий те же по величине те же стороны, а каждый из его углов должен быть на треть эксцесса меньше, чем соответственный угол сферического треугольника (рис. 5.1), т.е.

$$A_1 = A - \varepsilon/3;\ B_1 = B - \varepsilon/3; \quad C_1 = C - \varepsilon/3 \tag{5.21}$$

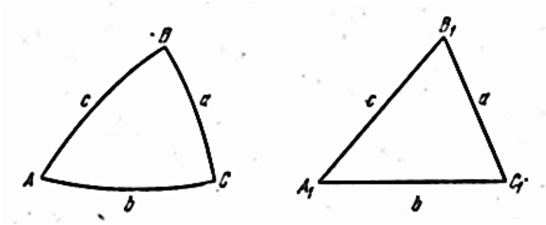


Рис. 5.1

Поскольку $A + B + C = 180° + \varepsilon$, а сумма углов плоского треугольника $A_1 + B_1 + C_1 = 180°$, то $(A + B + C) - (A_1 + B_1 + C_1) = \varepsilon$.

Следствие. Треугольники *ABC* и $A_1B_1C_1$ с определенной степенью точности можно рассматривать как равновеликие. Иными словами площади треугольников можно считать равными.

Тогда сферический излишек вычисляется по одной из формул, которые учитывают равенство площадей сферического треугольника *ABC* ($S = \varepsilon R^2$) и плоского треугольника $A_1B_1C_1$:

$$\varepsilon = \frac{absinC_1}{2R^2} \text{ или } \varepsilon = \frac{acsinB_1}{2R^2} \text{ или } \varepsilon = \frac{bcsinA_1}{2R^2}$$

Вычисление по теореме Лежандра сферических треугольников со сторонами до 200 км, лежащих на земной поверхности, приводит к ошибке в углах, не превышающей сотой секунды. Тем не менее, с определенной степенью точностью можно рассматривать в качестве малых сферические треугольники со сторонами до 600 км. Рассмотрим пример.

Пример. Даны три стороны сферического треугольника $a=3^0$, $b=5^0$, $c=4^0$. Вычислить углы по общим формулам и с использованием теоремы Лежандра.

Решение. 1) Углы косоугольного треугольника *ABC* определяются по формулам (рис. 5.2)

$$tg(A/2) = \frac{M}{\sin(p-a)};\ tg(B/2) = \frac{M}{\sin(p-b)};\ tg(C/2) = \frac{M}{\sin(p-c)},$$

где $M = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}$

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Три стороны**						
2		град	мин	сек	десятичная форма	радианы	
3	*a*=	3	0	0	3,0000	0,0524	
4	*b*=	5	0	0	5,0000	0,0873	
5	*c*=	4	0	0	4,0000	0,0698	
6						*p*= 0,1047	
7	*sin(p-a)*=	0,0523		**Вычисление углов**			
8	*sin(p-b)*=	0,0175			радианы	десятичная форма	град/мин/сек
9	*sin(p-c)*=	0,0349		*A*=	0,644111	36,9048	36° 54' 17"
10	*sin(p)*=	0,1045		*B*=	1,571406	90,0349	90° 2' 5"
11	*M*=	0,0175		*C*=	0,927905	53,165	53° 9' 54"
12		**Проверка**			**0,167065**	=	**0,167065**

Рис. 5.2 – Решение задачи по формулам для косоугольных треугольников

Таким образом, $A=36^0 54'17''$, $B=90^0 2'5''$, $C=53^0 9'54''$.

2) Рассмотрим плоский треугольник $A_1B_1C_1$ со сторонами

$$a = Ra = 6370 \cdot \frac{3^0 \cdot \pi}{180^0} = 333{,}5324201 \text{ км}$$

$$b = Rb = 6370 \cdot \frac{5^0 \cdot \pi}{180^0} = 555{,}8873668 \text{ км}$$

$$c = Rc = 6370 \cdot \frac{4^0 \cdot \pi}{180^0} = 444{,}7098934 \text{ км}$$

Тогда полупериметр треугольника $A_1B_1C_1$ равен

$$p = \frac{a + b + c}{2} = 667{,}0648401 \text{ км}$$

Площадь треугольника определим по формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 74162{,}58349 \text{ км}^2$$

Так как площадь плоского треугольника также можно найти по одной из формул $S = 0{,}5absinC_1$; $S = 0{,}5acsinB_1$; $S = 0{,}5bcsinA_1$.

Тогда углы треугольника равны

$sin\mathrm{A}_1 = \frac{2S}{bc} = 0{,}6$, откуда A_1=36^0,8699; $sinB_1 = \frac{2S}{ac} = 1$, откуда B_1=90^0

$sinC_1 = \frac{2S}{ab} = 0{,}8$, откуда A_1=53^0,1301; $\varepsilon = \frac{a \cdot c \cdot sinB_1}{2R^2} = 0{,}00304174$

Тогда по теореме Лежандра из (1) следует

$$A = A_1 + \frac{\varepsilon}{3} = 36^0{,}92808;\ B = B_1 + \frac{\varepsilon}{3} = 90^0{,}05818; C = C_1 + \frac{\varepsilon}{3} = 53^0{,}18828$$

Сравним результаты. Погрешность вычислений

$$E_A = \left|1 - \frac{A_1}{A}\right| \cdot 100\% = 0{,}063\%;\ E_B = 0{,}03\%;\ E_C = 0{,}04\%;$$

Замечание. Использование современных информационных технологий практически сводит на нет понятие малых сферических треугольников, так как даже с помощью MS Excel можно решить любой сферический треугольник. Тем не менее, формулы для обычных плоских треугольников мы помним со школы, что не скажешь о формулах из сферической тригонометрии.

В геодезии при вычислении треугольников, отнесенных к поверхности сфероида вращения, можно малую часть его поверхности принять за часть поверхности сферы, описанной радиусом, найденным по формуле Грунерта

$$R_{\text{ср}} = \sqrt{M \cdot N},$$

в которой $R_{\text{ср}}$ есть среднее геометрическое из радиусов кривизны сечений сфероида M по меридиану и N по первому вертикалу, сделанных в средней точке сферического треугольника. Эти радиусы кривизны вычисляются по формулам:

для сечения по меридиану $M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 sin^2\varphi)^3}}$

для сечения по первому вертикалу $N = \frac{a}{\sqrt{(1-e^2 sin^2\varphi)}}$

где a — большая полуось сфероида вращения, e — эксцентриситет его меридианного сечения, а φ - широта средней точки сферического треугольника.

Контрольные вопросы по теме 5

1. Сколько возможно случаев решения косоугольного сферического треугольника?

2. В чем преимущество использования формул тангенсов половины углов для решения косоугольного сферического треугольника?

3. По каким формулам удобно определять углы треугольника, если заданы его стороны?

4. По каким формулам удобно определять стороны треугольника, если заданы его углы?

5. Что выражают аналогии Непера?

6. Запишите формулы Даламбера-Гаусса.

7. По каким формулам вычисляется сферический излишек?

8. Как осуществлять контроль правильности решения задач по определению неизвестных элементов косоугольного сферического треугольника?

9. Что такое «малые сферические треугольники?

10. Сформулируйте теорему Лежандра. В чем ее значение?

11. Как решают малые сферические треугольники по теореме Лежандра?

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Основи сферичної геометрії та тригонометрії: навч. посібник / М. П. Данилевський, А. І. Колосов, А. В. Якунін; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. − Х.: ХНАМГ, 2011. − 92 с.

2. Кранц П. Сферическая тригонометрия / П.Кранц, М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 96 с.

3. Волынский Б.А. Сферическая тригонометрия / Б.А. Волынский. М: «Наука», 1977. – 136 с.

4. Степанов Н.Н. Сферическая тригонометрия / Н.Н. Степанов. М: ОГИЗ, 1948. – 154 с.

5. Вентцель М.К. Сферическая тригонометрия / М.К. Вентцель. М.: Изд-во геодезической и картографической литературы, 1948. – 154 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Основные тригонометрические формулы

Некоторые значения тригонометрических функций

α	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sinα	0	0,5	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1
cosα	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	0,5	0	-1	0
tgα	0	$\sqrt{3/3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
ctgα	–	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3/3}$	0	–	0

Основные тригонометрические тождества

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = 1/cos^2\alpha,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n = 0,\ 1, 2 \ldots.$$

$$1 + ctg^2\alpha = 1/sin^2\alpha,\ \alpha \neq \pi n,\ n = 0,\ 1, 2 \ldots.$$

Формулы приведения

β	sinβ	cosβ	tgβ	ctgβ
$\alpha+\pi/2$ $(\alpha+90^0)$	cosα	–sinα	–ctgα	–tgα
$\alpha+\pi$ $(\alpha+180^0)$	–sinα	–cosα	tgα	ctgα
$\alpha+3\pi/2$ $(\alpha+270^0)$	–cosα	sinα	–ctgα	–tgα
$\alpha+2\pi$ $(\alpha+360^0)$	sinα	cosα	tgα	ctgα
$-\alpha+\pi/2$ $(90^0-\alpha)$	cosα	sinα	ctgα	tgα
$-\alpha+\pi$ $(180^0-\alpha)$	sinα	–cosα	–tgα	–ctgα
$-\alpha+3\pi/2$ $(270^0-\alpha)$	–cosα	–sinα	ctgα	tgα
$-\alpha+2\pi$ $(360^0-\alpha)$	–sinα	cosα	–tgα	–ctgα

Формулы сложения

$$\sin(\alpha+\beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta;\ \ \sin(\alpha-\beta) = sin\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta;\ \ \cos(\alpha-\beta) = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha \cdot tg\beta}{(1 - tg\alpha \cdot tg\beta)};\ \ tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha \cdot tg\beta}{(1 + tg\alpha \cdot tg\beta)}$$

Преобразование суммы тригонометрических функций

$$sin\alpha + sin\beta = 2sin\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2};\ \ sin\alpha - sin\beta = 2sin\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2};\ \ cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{cos\alpha \cdot cos\beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots\ldots$$

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{cos\alpha \cdot cos\beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots\ldots$$

$$ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{sin\alpha \cdot sin\beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots\ldots$$

$$ctg\alpha - ctg\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{sin\alpha \cdot sin\beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots\ldots$$

$$Asin\alpha + Bcos\alpha = \sqrt{A^2+B^2} \cdot \sin(\alpha + \varphi_0),$$

где $cos\varphi_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$; $sin\varphi_0 = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Например, $sinx + cosx = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$sin\alpha \cdot sin\beta = 0{,}5 \cdot [\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$cos\alpha \cdot cos\beta = 0{,}5 \cdot [\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$sin\alpha \cdot cos\beta = 0{,}5 \cdot [\sin(\alpha-\beta) + sin(\alpha+\beta)]$$

Тригонометрические функции двойного аргумента

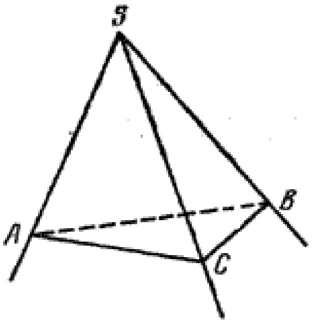
$$2sin\alpha \cdot cos\alpha = sin2\alpha$$

$cos^2\alpha - sin^2\alpha = cos2\alpha$ или $1 - 2sin^2\alpha = cos2\alpha$ или $2cos^2\alpha - 1 = cos2\alpha$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Сумма плоских углов трехгранного угла

Теорема. Сумма величин всех трех плоских углов трехгранного угла меньше 360°.



Доказательство. Пусть дан трехгранный угол SABC (см. рис.). Если через точки A, B, C проведем плоскость, то получим еще три трехгранных угла: ASBC, BSAC и CSAB. Применим к каждому из них теорему о сумме величин двух плоских углов трехгранного угла:

$$\widehat{SAB}+\widehat{SAC}>\widehat{BAC},\quad \widehat{SBC}+\widehat{SBA}>\widehat{ABC},$$
$$\widehat{SCA}+\widehat{SCB}>\widehat{ACB}.$$

Сложив правые и левые части неравенств, получим

$$\widehat{SAB}+\widehat{SAC}+\widehat{SBC}+\widehat{SBA}+\widehat{SCA}+\widehat{SCB}>\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB}$$

Сумма величин внутренних углов треугольника ABC равна 180°, поэтому

$$(\widehat{SAC}+\widehat{SCA})+(\widehat{SCB}+\widehat{SBC})+(\widehat{SAB}+\widehat{SBA})>180^\circ \qquad (1)$$

Обозначим $\widehat{ASC}=\alpha,\ \widehat{BSC}=\beta, \widehat{ASB}=\gamma,$ тогда из треугольников ASC, ASB, BSC имеем

$$\widehat{SCA}+\widehat{SAC}=180^\circ-\alpha,$$
$$\widehat{SCB}+\widehat{SBC}=180^\circ-\beta,$$
$$\widehat{SAB}+\widehat{SBA}=180^\circ-\gamma.$$

Теперь неравенство (1) принимает вид

$$180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta + 180^\circ - \gamma > 180^\circ,$$

откуда и следует, что

$$\alpha+\beta+\gamma<360^\circ.$$

Основные формулы по теме 1

1. Представление градусов-минут-секунд в виде десятичной дроби

$$Г^0М'С'' = Г, + \frac{М}{60} + \frac{С}{3600},$$

где Г – градусы; М - минуты; С – секунды.

2. Градусная и радианная меры связаны между собой следующими соотношениями: 1 радиан = 57°,29577951; 1° = 0,01745329. Для перевода градусов ($ДГ^0$)в радианы (Р) используется формула:

$$Р = ДГ^0 \cdot \frac{\pi}{180^0}$$

3. Связь угловой (градусной), радианной и линейной меры дуги большого круга (рис. 1): $L = \frac{\alpha^0 R}{\rho^0} = \alpha R$, где L, α, α^0 − линейная, радианная и угловая мера дуги большого круга; R − радиус сферы; ρ^0 − число угловых единиц в радиане $\rho^0 = 180^0/\pi = 57°,2957795$.

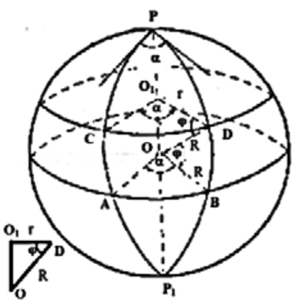


Рис. 1

Связь радианной и линейной меры дуги малого круга, проходящего через точку D, находящуюся на дуге BD с центральным углом φ (рис. 1) из Δ ODO_1 устанавливается за формулой: $r = R\cos\varphi \Rightarrow l = \alpha \cdot r = \alpha \cdot R\cos\varphi = L\cos\varphi$

4. Площадь сферического двуугольника с углом α, расположенного на сфере радиуса R : $S_\alpha = 2\alpha R^2$.

5. Угол пересечения локсодромии с земными меридианами.

$$K = arctg\frac{\Delta\lambda}{\ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}\right)\right) - \ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)\right)}$$

6. Длина дуги M_2M_1 локсодромии вычисляется по формуле $M_2M_1 = R\Delta\varphi/cosK$

Основные формулы по теме 2

1. Связь сторон и углов двух полярных сферических треугольников *ABC* и $A_1B_1C_1$:

$$A + a_1 = 180^0;\ B + b_1 = 180^0;\ C + c_1 = 180^0;$$

2. Соотношение между сторонами и углами сферического треугольника

$$a + b > c,\ \ a + c > b,\ \ b + c > a,\ \ b > c - a,\quad a > b - c,\quad c > b - a,$$

$$0 < a + b + c < 360^0;\qquad 180^0 < A + B + C < 540^0$$

$$A + B - C < 180^0;\quad A + C - B < 180^0;\quad B + C - A < 180^0$$

Если $A + B > 180^0$, то $a + b > 180^0$.

Против равных сторон лежат равные углы сферического треугольника.

Против равных углов лежат равные стороны сферического треугольника

Против большей стороны лежит больший угол сферического треугольника

Против большего угла лежит большая сторона сферического треугольника.

3. Площадь сферического треугольника на сфере радиуса R равна произведению квадрата радиуса на сферический излишек, т.е. $S = R^2(A + B + C - \pi) = R^2\varepsilon$

Основные формулы по теме 3

1. Косинусы сторон сферического треугольника

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= \cos b\ \cos c + \sin b\ \sin c\ \cos A\\ \cos b &= \cos a\ \cos c + \sin a\ \sin c\ \cos B\\ \cos c &= \cos a\ \cos b + \sin a\ \sin b\ \cos C\end{aligned}\right\}$$

2. Косинусы углов сферического треугольника

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= -\cos B\ \cos C + \sin B\ \sin C\ \cos a\\ \cos B &= -\cos A\ \cos C + \sin A\ \sin C\ \cos b\\ \cos C &= -\cos A\ \cos B + \sin A\ \sin B\ \cos c\end{aligned}\right\}$$

3. Теорема синусов

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = K$$

4. Формулы пяти элементов сферического треугольника.

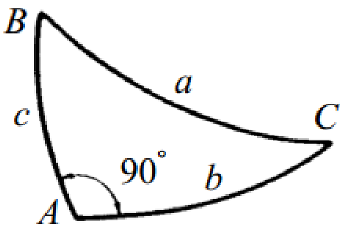
$$\left.\begin{aligned}
sin\ c \cos\ B &= sin\ a\ cos\ b - cos\ a\ sin\ b\ cos\ C \\
sin\ b \cos\ C &= sin\ a\ cos\ c - cos\ a\ sin\ c\ cos\ B \\
sin\ c \cos\ A &= sin\ b\ cos\ a - cos\ b\ sin\ a\ cos\ C \\
sin\ a \cos\ C &= sin\ b\ cos\ c - cos\ b\ sin\ c\ cos\ A \\
sin\ a \cos\ B &= sin\ c\ cos\ b - cos\ c\ sin\ b\ cos\ A \\
sin\ b \cos\ A &= sin\ c\ cos\ a - cos\ c\ sin\ a\ cos\ B
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
sin\ A \cos b &= sin\ C\ cos\ B + cos\ C\ sin\ B\ cos\ a \\
sin\ A \cos c &= sin\ B\ cos\ C + cos\ B\ sin\ C\ cos\ a \\
sin\ B \cos a &= sin\ C\ cos\ A + cos\ C\ sin\ A\ cos\ b \\
sin\ B \cos c &= sin\ A\ cos\ C + cos\ A\ sin\ C\ cos\ b \\
sin\ C \cos b &= sin\ A\ cos\ B + cos\ A\ sin\ B\ cos\ c \\
sin\ C \cos a &= sin\ B\ cos\ A + cos\ B\ sin\ A\ cos\ c
\end{aligned}\right\}$$

5. Формулы четырех элементов сферического треугольника:

$$\left.\begin{aligned}
cos\ a \cos C &= ctg\ b\ sin\ a - ctg\ B\ sin\ C \\
cos\ a \cos B &= ctg\ c\ sin\ a - ctg\ C\ sin\ B \\
cos\ b \cos C &= ctg\ a\ sin\ b - ctg\ A\ sin\ C \\
cos\ b \cos A &= ctg\ c\ sin\ b - ctg\ C\ sin\ A \\
cos\ c \cos A &= ctg\ b\ sin\ c - ctg\ B\ sin\ A \\
cos\ c \cos B &= ctg\ a\ sin\ c - ctg\ A\ sin\ B
\end{aligned}\right\}$$

Основные формулы по теме 4



$$\left.\begin{aligned}
&\cos a = \cos b \cdot \cos c \\
&\cos a = ctg\, B \cdot ctg\, C \\
&\cos B = \sin C \cdot \cos b \\
&\cos C = \sin B \cdot \cos c \\
&\sin b = \sin a \cdot \sin B \\
&\sin c = \sin a \cdot \sin C \\
&\cos C = ctg\, a \cdot tg\, b \\
&\sin b = ctg\, C \cdot tg\, c \\
&\cos B = ctga \cdot tg\, c \\
&\sin c = ctg\, B \cdot tg\, b
\end{aligned}\right\}$$

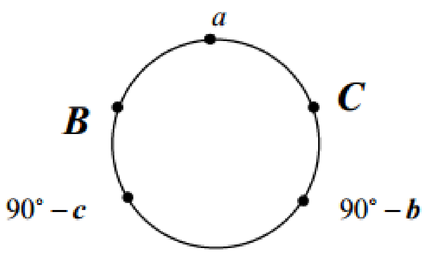
Формулы Непера

Первая группа формул

$$\left.\begin{aligned}
&\cos a = \sin(90^0 - b)\ \cos(90^0 - c) \\
&\cos B = \sin C\ \sin(90^0 - b) \\
&\cos C = \sin B\ \sin(90^0 - c) \\
&\cos(90^0 - b) = \sin a\ \sin B \\
&\cos(90^0 - c) = \sin a\ \sin C
\end{aligned}\right\}$$

Вторая группа формул

$$\left.\begin{aligned}
&\cos a = ctg\, B\ ctg\, C \\
&\cos B = ctg\, a\ ctg(90^0 - c) \\
&\cos C = ctg\, a\ ctg\,(90^0 - b) \\
&\cos(90^0 - c) = ctg\, B\ ctg\,(90^0 - b) \\
&\cos(90^0 - b) = ctg\, C\ ctg\,(90^0 - c)
\end{aligned}\right\}$$



Формулы называются ***правилом Непера.*** Если заменить катеты b и c их дополнениями до 90^0, то косинус произвольного элемента прямоугольного треугольника равняется произведению котангенсов прилегающих к нему элементов или произведению синусов неприлегающих элементов.

Дополнительные условия существования прямоугольного сферического треугольника: $90^0 < B + C < 270^0$; $-90^0 < B - C < 90^0$.

Основные формулы по теме 5

Формулы синусов, косинусов і тангенсов половины угла сферического треугольника

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}.\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin c}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}}.\\ cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}}\\ cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}tg\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}.\\ tg\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}}\\ tg\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}\end{aligned}\right\}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}=\frac{M}{\sin(p-a)},\ \mathrm{tg}\,\frac{B}{2}=\frac{M}{\sin(p-b)},\ \mathrm{tg}\,\frac{C}{2}=\frac{M}{\sin(p-c)}$$

где $M=\sqrt{\dfrac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}$

Формулы синусов, косинусов і тангенсов половины стороны сферического треугольника

$$\left.\begin{aligned}sin\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin(A-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin B\sin C}}\\ sin\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin(B-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin A\sin C}}\\ sin\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin(C-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin A\sin B}}\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}cos\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(B-\frac{\varepsilon}{2})\sin(C-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin B\sin C}}\\ cos\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(A-\frac{\varepsilon}{2})\sin(C-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin A\sin C}}\\ cos\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(A-\frac{\varepsilon}{2})\sin(B-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin A\sin B}}\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}tg\frac{a}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin(A-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin(B-\frac{\varepsilon}{2})\sin(C-\frac{\varepsilon}{2})}}\\ tg\frac{b}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin(B-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin(A-\frac{\varepsilon}{2})\sin(C-\frac{\varepsilon}{2})}}\\ tg\frac{c}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin(C-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin(A-\frac{\varepsilon}{2})\sin(B-\frac{\varepsilon}{2})}}\end{aligned}\right\}$$

$$tg\,\frac{a}{2}=N\sin\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right),\ tg\,\frac{b}{2}=N\sin\left(B-\frac{\varepsilon}{2}\right),\ tg\,\frac{c}{2}=N\sin\left(C-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

где $N=\sqrt{\dfrac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin(A-\frac{\varepsilon}{2})\sin(B-\frac{\varepsilon}{2})\sin(C-\frac{\varepsilon}{2})}}$

Формулы Даламбера-Гаусса и аналогии Непера

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ \sin\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\dfrac{C}{2} & 3)\ \cos\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\dfrac{C}{2} \\ 2)\ \sin\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cos\dfrac{C}{2} & 4)\ \cos\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\sin\dfrac{C}{2} \end{array}\right\}$$

Первая и вторая аналогии Непера

$$\left.\begin{array}{l} tg\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}tg\dfrac{c}{2} \\ tg\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}tg\dfrac{c}{2} \end{array}\right\}$$

Третья и четвертая аналогии Непера

$$\left.\begin{array}{l} tg\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}ctg\dfrac{C}{2} \\ tg\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}ctg\dfrac{C}{2} \end{array}\right\}$$

Контрольная формула Гаусса

$$\frac{tg\frac{A+B}{2}}{tg\frac{A-B}{2}}=\frac{tg\frac{a+b}{2}}{tg\frac{a-b}{2}}$$

Первая формулу Каньоли

$$\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\sin\left(\frac{a}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{b}{2}\right)sinC}{cos\left(\frac{c}{2}\right)};\quad \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\sin\left(\frac{b}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{c}{2}\right)sinA}{cos\left(\frac{a}{2}\right)};\quad \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\sin\left(\frac{a}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{c}{2}\right)sinB}{cos\left(\frac{b}{2}\right)}$$

Вторая формула Каньони

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\sqrt{\sin p\ sin(p-a)\ sin(p-b)\ sin(p-c)}}{2\ cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

Формула Люилье

$$tg\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{tg\frac{p}{2}tg\frac{p-a}{2}tg\frac{p-b}{2}tg\frac{p-c}{2}}$$

Навчальне видання

МОРДОВЦЕВ Сергій Михайлович
КОЛОСОВ Анатолій Іванович
ЯКУНІН Анатолій Вікторович

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з курсу

СФЕРИЧНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ТРИГОНОМЕТРІЯ

(*для студентів денної і заочної форм навчання напряму підготовки 6.080101 – Геодезія, картографія та землеустрій*)

(рос. мовою)

Відповідальний за випуск *С. М. Мордовцев*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *С. М. Мордовцев*

План 2016 , поз. 85Л

Підп. до друку 17.03.2016
Друк на ризографі
Зам. №

Формат 60x84/16
Ум. друк. арк. 3,0
Тираж 10 пр.

Виконавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК 4705 від 28.03.2014 р.