

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО  
ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

Методичні вказівки

до практичних занять, самостійної роботи, виконання контрольних і  
розрахунково-графічних завдань з курсу

**«Будівельна механіка»**

(для студентів 3 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом  
6.060101 Будівництво»

ХАРКІВ — ХНУМГ ім. О. М. Бекетова — 2016

Методичні вказівки до практичних занять, самостійної роботи, виконання контрольних і розрахунково-графічних завдань з курсу «Будівельна механіка» (для студентів 3 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.060101 - Будівництво) /Харків. нац. ун-т. міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад: М. А. Засядько. – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 80 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г. А. Молодченко

Рекомендовано кафедрою теоретичної і будівельної механіки, протокол № 1 від 30.08.11р.

## ЗМІСТ

Розділ 1 Практичні заняття та самостійна робота.....	4
1 Кінематичний аналіз споруд.....	4
2 Розрахунок статично визначних рам.....	7
3 Розрахунок статично визначних ферм.....	14
4 Розпірні системи.....	20
5 Визначення переміщень.....	29
6 Метод скінченних елементів.....	35
Розділ 2 Вихідні дані та методичні вказівки до розрахунково-графічних робіт.....	48
7 Робота № 1. Розрахунок статично визначної ферми.....	48
8 Робота №2. Розрахунок тришарнірної арки.....	60
Розділ 3 Матеріали для контрольних робіт.....	68
9 Кінематичний аналіз споруд.....	68
10 Статично визначна ферма.....	70
11 Тришарнірна арка.....	73
12 Визначення переміщень.....	76
Список джерел.....	79

## Розділ 1 Практичні заняття та самостійна робота

### 1 Кінематичний аналіз споруд

Теоретичний матеріал викладено у главі 9 [1], у розділі 1 [2] та у главі 1 [3].

*Вправи*

**1.1.** Чи можна скористатися формулою  $W = 3U - C - C_0$  для визначення ступенів вільності: а) балок та рам; б) комбінованих систем?

**1.2.** Дати визначення геометричній змінюваності, миттєвої змінюваності.

**1.3.** Визначити кількість простих шарнірів у з'єднаннях наведених на рисунку 1.1, а, б.

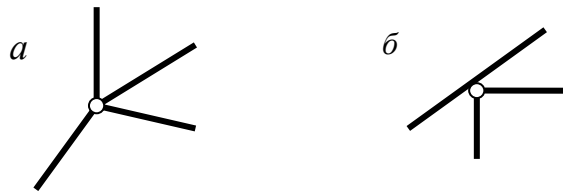


Рисунок 1.1

**1.4.** Що можна сказати про геометричну незмінюваність споруди, для якої визначено  $W = -1$ ?

**1.5.** Довести геометричну незмінюваність системи, наведеної на рисунку 1.2, а.

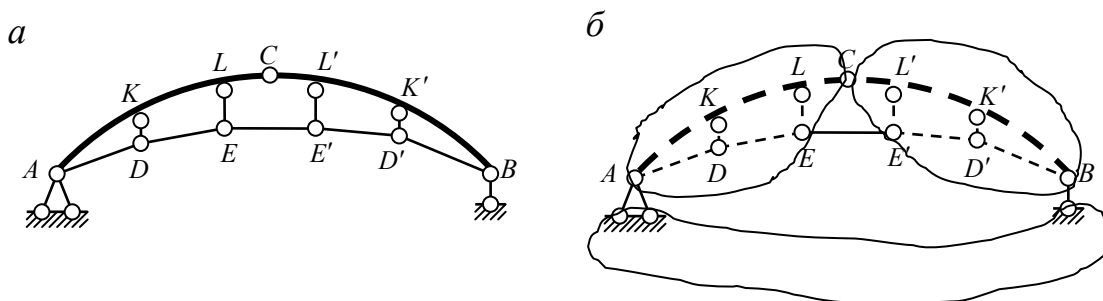


Рисунок 1.2

*Розв'язання.* Наведена система є комбінованою (точніше аркою з ламаною затяжкою), отже число ступенів вільності визначаємо за формулою Чебишова:  $W = 3D - 2Ш - C_0$ , Вважаючи диском кожен стержень ( $AC, BC, AD, BD', DE, D'E', EE', KD, K'D', EL, E'L'$ ), одержимо  $D=11$ . Шарніри у точках  $A, B, C, K, L, K', L'$  з'єднують по два стержні, тобто є простими; шарніри у точках  $D, E, D', E'$  з'єднують по три стержні, отже кожен з них еквівалентний двом простим шарнірам. Таким чином маємо 15 простих шарнірів:  $Ш=7+2*4=15$ . Шарнірно нерухома опора у точці  $A$  містить дві опорні в'язі, шарнірно рухома у точці  $B$  – одну опорну в'язь, загалом  $C_0 = 3$ .

Отже, число ступенів вільності цієї системи становить  $W = 3 \cdot 11 - 2 \cdot 15 - 3 = 0$ . Необхідна умова геометричної незмінюваності виконана.

Переходимо до аналізу геометричної структури. До диску  $AC$  двома стержнями  $AD$  та  $KD$  приєднана точка  $D$ , отже  $ACKD$  можна вважати одним диском. Далі аналогічно стержнями  $DE$  та  $LE$  приєднана точка  $E$ , отже тепер можна вважати диском частину  $ACDE$  (рис. 1.2,б). Аналогічно збирається диск  $BCE'D'$ . Утворені диски з'єднуються між собою стержнем  $EE'$  та шарніром у точці  $C$ , не розташованим на прямій  $EE'$ ; отже ці два диска можна вважати одним цілим разом зі стержнем  $EE'$ . Останній диск приєднується до основи (диск - земля) трьома опорними стержнями (у опорах  $A$  та  $B$ ).

Остаточно робимо висновок, що система геометрично незмінювана. Оскільки для неї  $W=0$ , зайві в'язі відсутні, тобто система статично визначувана.

**1.6.** Дослідити геометричну незмінюваність системи, наведеної на рисунку 1.3,а.

*Розв'язання.* Наведена система складається з прямих стержнів, що з'єднуються між собою тільки шарнірно, тобто являє собою ферму. Отже кількість ступенів вільності визначаємо за формулою:  $W = 2U - C - C_0$ . Вузли позначені на рисунку 1.3,а цифрами від 1 до 16:  $U=16$ . Кількість стержнів становить  $C=28$ . Кількість опорних в'язей  $C_0 = 4$ . Підрахунок дає:  $W = 2 \cdot 16 - 28 - 4 = 0$ , тобто необхідна умова геометричної незмінюваності виконана.

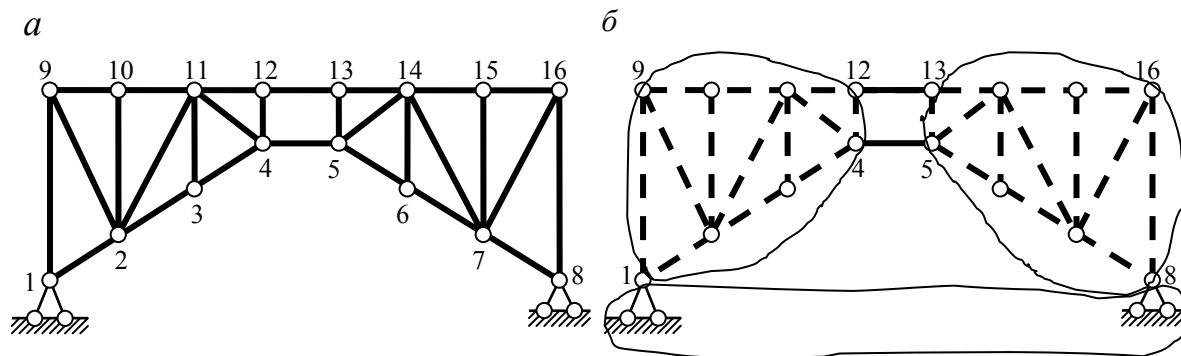


Рисунок 1.3

Перевіряємо геометричну структуру системи. Оберемо будь-який трикутник стержнів, наприклад 1-2-9, як відому найпростішу геометрично незмінювану систему – диск. Приєднуючи послідовно за допомогою пар стержнів вузли 10, 11, 3, 4, та 12, одержимо диск 1-9-12-4 (рис. 1.3,б). Аналогічно, починаючи з трикутника 7-8-16, послідовно приєднуємо вузли 15, 14, 6, 5, та 13, одержуємо другий диск – 5-13-16-8. Враховуючи, що опорні

вузли 1 та 8 приєднані до основи парами стержнів, ці вузли належать диску-землі. Таким чином, маємо три диски (1-9-12-4, 5-13-16-8 та диск-земля), з'єднані шарнірами у точках 1 та 8 і парою стержнів 4-5 та 12-13. Оскільки стержні 4-5 та 12-13 паралельні один одному, можна вважати, що точка їхнього перетину знаходиться у нескінченності. Ця точка перетину є миттєвим центром обертання дисків 1-9-12-4 та 5-13-16-8 один відносно одного, тобто умовним шарніром. Отже, маємо систему у вигляді трьох дисків, з'єднаних трьома шарнірами. Оскільки один з них знаходиться у нескінченності, можна вважати, що пряма 1-8 пройде у нескінченності, тобто і через третій шарнір. Таке розташування шарнірів свідчить про *миттєву змінюваність системи*.

**1.7.** Дослідити геометричну незмінюваність системи, наведеної на рисунку 1.4,а.

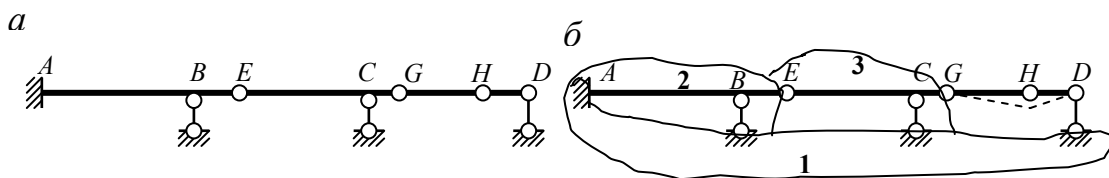


Рисунок 1.4

**Розв'язання.** Наведена система – це горизонтальні стержні, розташовані на опорах, тобто балка. Для визначення ступенів вільності користуємося формулою Чебишова. Кількість дисків – 4 ( $AE, EG, GH, HD$ ); кількість простих шарнірів – 3 ( $E, G, H$ ); опорних в'язей – 6 (три у затисненні  $A$  та по одній у шарнірно-рухомих опорах  $B, C, D$ ). Маємо  $W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0$ , тобто необхідна умова геометричної незмінюваності виконана.

Перевіряємо геометричну структуру. Почнемо збірку з диску-землі- **1** (рис. 1.4,а). До нього у точці  $A$  жорстко приєднаний стержень  $AE$ , отже разом з **1** утворює новий диск – **1,2** (опорний стержень у точці  $B$  є зайвим). Далі шарніром у точці  $E$  та опорним стержнем у точці  $C$  приєднаний стержень  $EG$ , тобто маємо новий диск **1,2,3**. Подальше приєднання стержня  $HD$  здійснюється двома стержнями -  $GH$  та опорним у точці  $D$ , що недостатньо для нерухомого з'єднання. Отже, розглянута система є *геометрично змінюваною*. Зазначимо, що цей висновок можна було зробити раніше, коли

була виявлена зайва в'язь у точці  $B$ . Дійсно, якщо у системі з  $W = 0$  хоча би одне із з'єднань має зайву в'язь, у інших з'єднаннях цієї в'язі буде нестачати.

**1.8.** Самостійно перевірити геометричну незмінюваність систем, наведених на рисунку 1.5.

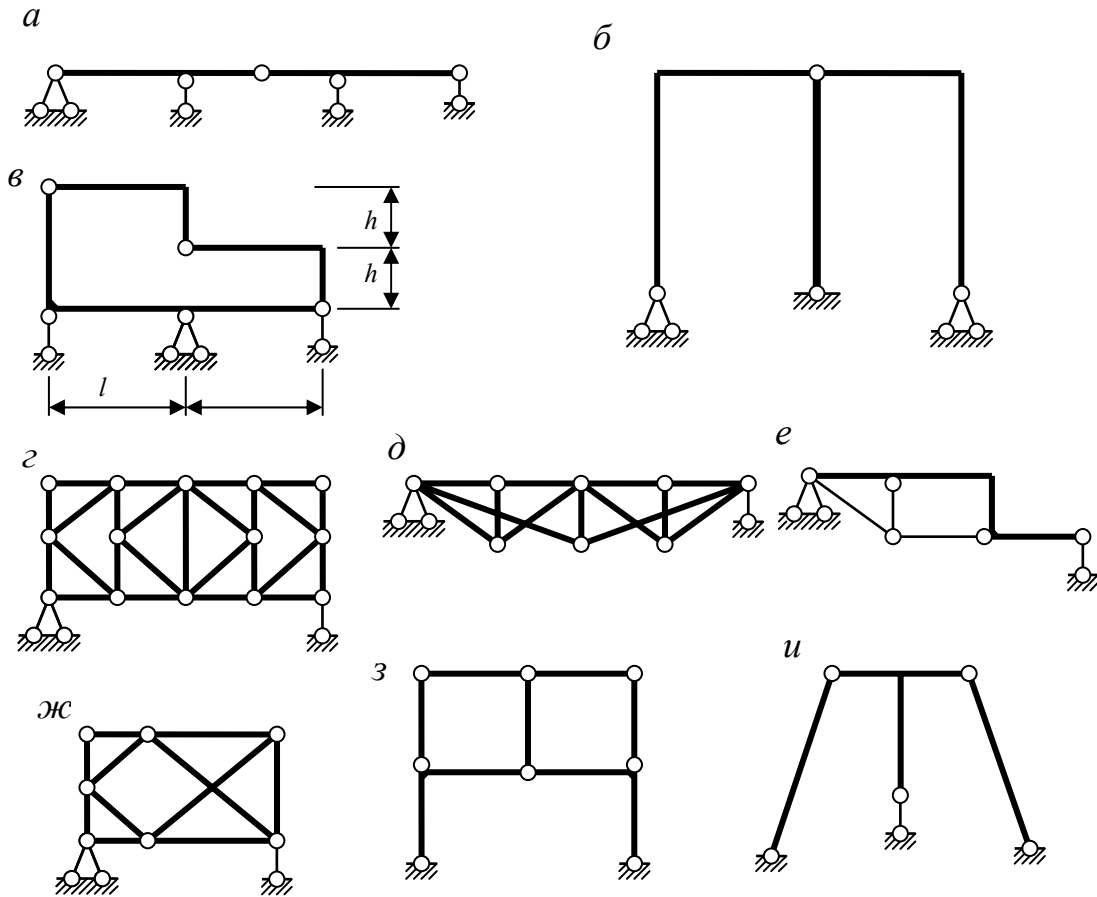


Рисунок 1.5

## 2 Розрахунок статично визначуваних рам

Теоретичний матеріал викладено у главі 2 [1] та у главі 3 [3].

*Вправи*

**2.1.** Побудувати епюри внутрішніх зусиль в рамі, наведеній на рисунку 2.1,а.

*Розв'язання.* В першу чергу визначаємо опорні реакції. Для цього використовуємо рівняння рівноваги усієї рами. Ці рівняння бажано складати так, щоб у кожне входило лише одна з реакцій:

$$\sum M_A = 0; V_B \cdot 11 + (q \cdot 3) \cdot 1,5 + M - F \cdot 11 = 0,$$

$$\text{звідки } V_B = (-8 \cdot 3 \cdot 1,5 - 19 + 12 \cdot 11) / 11 = 7 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 11 + M + (q \cdot 3) \cdot 1/5 = 0,$$

звідки  $R_A = (19 + 8 \cdot 3 \cdot 1,5) / 11 = 5 \text{кН}$  ;  
 $\sum x = 0$ ;  $H_B - q \cdot 3 = 0$ , звідки  $H_B = 8 \cdot 3 = 24 \text{кН}$ .

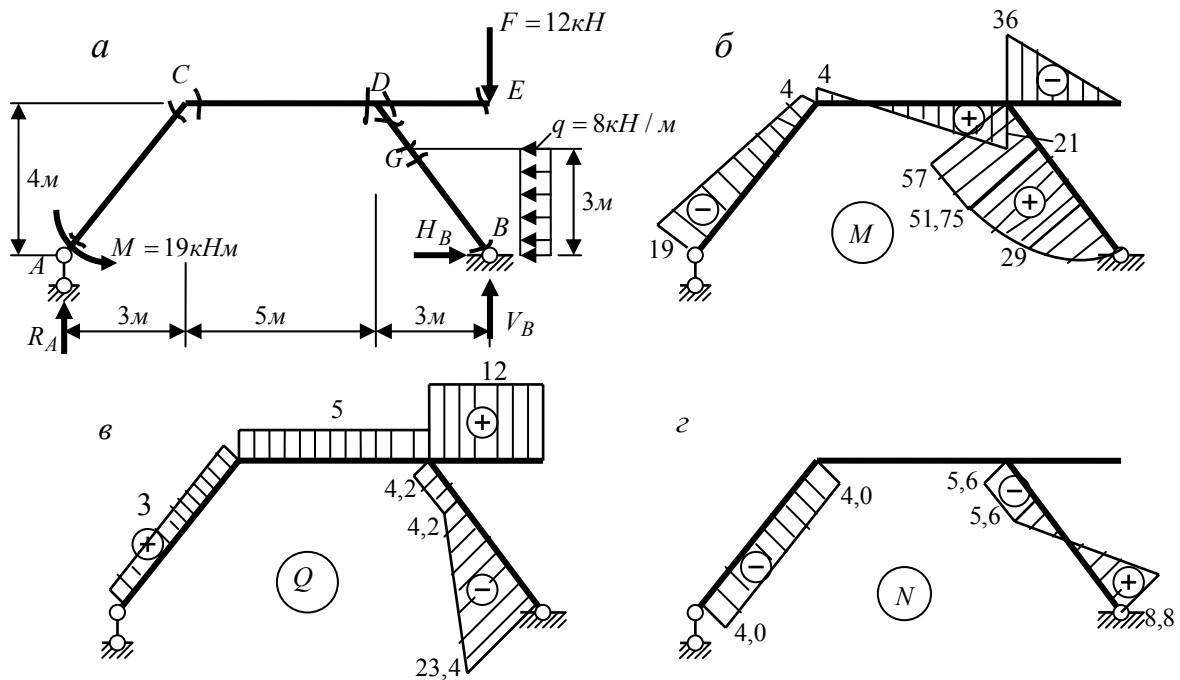


Рисунок 2.1

Оскільки горизонтальна реакція обчислена доволі просто, перевірки потребують лише вертикальні реакції. У цьому разі достатньо взяти проекцію сил на вертикальну вісь:

$$\sum y = R_A + V_B - F = 5 + 7 - 12 = 0.$$

Умова рівноваги виконана, отже, реакції обчислені вірно.

Для побудовання епюр внутрішніх зусиль розіб'ємо раму на ділянки. Маємо 5 ділянок (AC, CD, DE, DG, GB).

Спочатку побудуємо епюру  $M$ .

Першою розглянемо, наприклад, ділянку AC. Оскільки розподілене навантаження на ділянці відсутнє, моменти змінюються за лінійним законом. Отже, для побудови епюри достатньо обчислити моменти у двох перерізах. Для перерізу, що знаходиться нескінченно близько до лівого краю ділянки, момент позначимо  $M_{лів}$ . При цьому зручно розглянути сили, розташовані ліворуч від перерізу:  $M_{лів} = -M = -19 \text{кНм}$ . Момент у перерізі, розташованому нескінченно близько до правого кінця ділянки позначимо  $M_{прав}$ . Його визначення також зручно здійснити через сили, розташовані ліворуч від перерізу:  $M_{прав} = R_A \cdot 3 - M = 5 \cdot 3 - 19 = -4 \text{кНм}$ . Відкладаючи значення моментів перпендикулярно до осі стержня (додатні - донизу, від'ємні - доверху), з'єднуємо їх прямою лінією і отримуємо епюру на розглянутій ділянці (рис. 2.1,б). Нагадаємо, що при такому відкладанні значень моменти розташовуються з боку розтягнутих шарів стержнів.



Далі розглянемо, наприклад, ділянку  $CD$ . Характер епюри, а отже, і кількість необхідних перерізів така сама, як і на попередній ділянці. Маємо:

$$M_{\text{лів}} = R_A \cdot 3 - M = 5 \cdot 3 - 19 = -4 \text{кНм};$$

$$M_{\text{прав}} = R_A \cdot 8 - M = 5 \cdot 8 - 19 = 21 \text{кНм}.$$

Аналогічно обчислюємо моменти на ділянці  $DE$ :

$$M_{\text{лів}} = -F \cdot 3 = -12 \cdot 3 = 36 \text{кНм}; \quad M_{\text{прав}} = 0,$$

та на ділянці  $DG$ :

$$M_{\text{лів}} = V_B \cdot 3 + H_B \cdot 4 - (q \cdot 3) \cdot 2,5 = 7 \cdot 3 + 24 \cdot 4 - 8 \cdot 3 \cdot 2,5 = 57 \text{кНм},$$

$$M_{\text{прав}} = V_B \cdot 2,25 + H_B \cdot 3 - (q \cdot 3) \cdot 1,5 = 7 \cdot 2,25 + 24 \cdot 3 - 8 \cdot 3 \cdot 1,5 = 51,75 \text{кНм}.$$

На ділянці  $GB$  діє рівномірно розподілене навантаження, отже моменти змінюються нелінійно (точніше епюра повинна бути окреслена за квадратною параболою) і необхідно визначити моменти мінімум у трьох точках. На лівому кінці маємо:  $M_{\text{лів}} = V_B \cdot 2,25 + H_B \cdot 3 - (q \cdot 3) \cdot 1,5 =$

$$= 7 \cdot 2,25 + 24 \cdot 3 - 8 \cdot 3 \cdot 1,5 = 51,75 \text{кНм},$$

на правому –  $M_{\text{прав}} = 0$ .

Додаткове третє значення згинаючого моменту зручно визначити у перерізі в середині ділянки. Цей момент зручно виразити через згинаючі моменти на кінцях ділянки відповідно до рисунку 2.2, розкладаючи навантаження стержня на кінцеві моменти  $M_{\text{прав}}$ ,  $M_{\text{лів}}$  та розподілене навантаження, маємо:

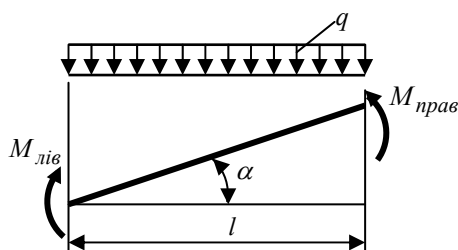


Рисунок 2.2

$$M_{\text{ср}} = \left( \frac{M_{\text{прав}} + M_{\text{лів}}}{2} + \frac{q l^2}{8} \right) \cos \alpha =$$

$$= \left( \frac{0 + 51,75}{2} + \frac{8 \cdot 3^2}{8} \right) \cdot 0,8 = 27,9 \text{кНм}.$$

У наведеному виразі  $l$  - довжина лінії розподілу навантаження,  $\alpha$  - кут між віссю стержня та лінією розподілу навантаження.

За обчисленими значеннями на рисунку 2.1,б побудована епюра згинаючих моментів.

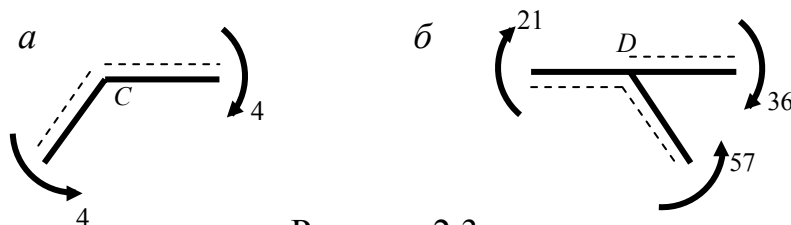


Рисунок 2.3

Перевірку епюри моментів виконуємо за рівновагою вузлів.

Вузол  $C$  наведений на рисунку 2.3,а. Моменти на кінцях стержнів у вузлі прикладаємо виходячи з розташування розтягнутих шарів. На рисунку цей бік стержнів позначено штриховою лінією. Перевіряємо суму моментів, що діють на вузол:  $\sum M = 4 - 4 = 0$ , отже умова рівноваги виконана.

Так само перевіряємо рівновагу іншого вузла -  $D$  (рис.2.3,б). Маємо:  $\sum M = 57 - 21 - 36 = 0$ , тобто і цей вузол знаходиться у рівновазі.

Визначення поперечних сил зручно здійснювати через вже обчислені значення згинаючих моментів. Для цього скористаємось наступною залежністю:

$$Q_{\frac{\text{лів}}{\text{прав}}} = \frac{M_{\text{лів}} - M_{\text{прав}}}{l} \pm \frac{ql}{2},$$

де:  $l$  - довжина стержня;  $q$  - інтенсивність навантаження, перпендикулярного до осі стержня. Зауважимо, що моменти на кінцях стержнів необхідно брати з урахуванням їх знаків, а розташування знаків перед доданком  $ql/2$  відповідає навантаженню спрямованому донизу.

На ділянці  $AC$  розподілене навантаження відсутнє, тому поперечна сила вздовж ділянки постійна:

$$Q = \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лів}}}{l} = \frac{-4 - (-19)}{5} = 3 \text{кН},$$

де  $l$  - довжина стержня (у нашому випадку  $l = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{м}$ ).

Аналогічно далі маємо:

на ділянці  $CD$ :  $Q = \frac{21 - (-4)}{5} = 5 \text{кН}$ ; на ділянці  $DE$ :  $Q = \frac{0 - (-36)}{3} = 12 \text{кН}$ ;

на ділянці  $DG$ :  $Q = \frac{51,75 - 57}{\sqrt{1^2 + 0,75^2}} = -4,2 \text{кН}$ .

Нарешті, на ділянці  $GB$  при наявності розподіленого навантаження, яке не перпендикулярне осі стержня, з урахуванням рисунку 2.2 маємо:

$$Q_{\frac{\text{лів}}{\text{прав}}} = \left( \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лів}}}{l} \pm \frac{ql}{2} \right) \cos \alpha =$$

$$= \left( \frac{0 - 51,75}{3} \pm \frac{8 \cdot 3}{2} \right) \cdot 0,8 = \begin{cases} -4,2 \text{кН}; \\ -23,4 \text{кН}. \end{cases}$$

За цими значеннями на рисунку 2.1,в побудована епюра поперечних сил.

Переходячи до побудови епюри поздовжніх сил, перш за все, використовуючи метод перерізів, обчислюємо поздовжню силу в консольній частині рами – на ділянці  $DE$ . Розглядаючи праву частину, одержимо:  $N_{DE} = 0$ .

Далі для визначення поздовжніх сил використовуємо спосіб вирізання вузлів.

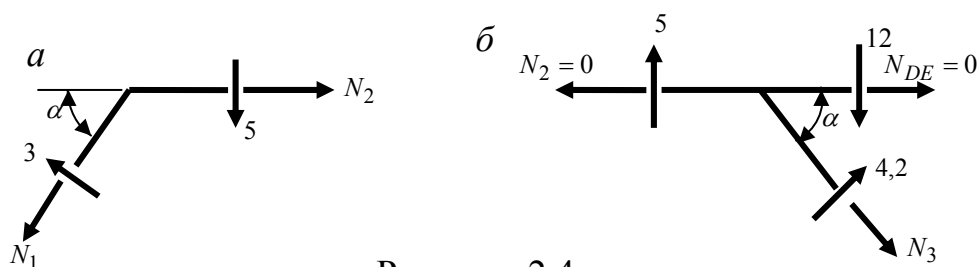


Рисунок. 2.4

Почнемо з двостержневого вузла  $C$  (рис. 2.4,а). Прикладаємо на кінцях стержнів у вузлі відомі з попереднього розрахунку поперечні сили та невідомі поздовжні сили. Нагадаємо, що додатні поперечні сили повинні обертати вузол за годинниковою стрілкою, а додатні поздовжні сили спрямовані від вузла. Рівняння рівноваги вузла будуть такими:

$$\sum y = -5 + 3 \sin \alpha - N_1 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum x = N_2 - 3 \cos \alpha - N_1 \sin \alpha = 0.$$

З цих рівнянь одержимо:

$$N_1 = \frac{-5 + 3 \cdot 0,6}{0,8} = -4 \text{кН}; \quad N_2 = 3 \cdot 0,8 - 4 \cdot 0,6 = 0.$$

Далі розглянемо рівновагу вузла  $D$  (рис. 2.4,б):

$$\sum x = N_{DE} - N_2 + 4,2 \cos \alpha + N_3 \sin \alpha = 0, \quad \text{звідки } N_3 = -\frac{4,2 \cdot 0,8}{0,6} = -5,6 \text{кН}.$$

Оскільки усі зусилля у вузлі знайдені, невикористану умову рівності нулю суми проекцій сил на вісь  $y$  можна використати для перевірки:

$$\sum y = 5 - 12 - N_3 \cos \alpha + 4,2 \sin \alpha = 5 - 12 + 5,6 \cdot 0,8 + 4,2 \cdot 0,6 = 0,$$

тобто вузол знаходиться у рівновазі.

Зазначимо, що на ділянці  $GB$  діє рівномірно розподілене навантаження, що не перпендикулярне до осі стержня. У цьому разі поздовжня сила у межах ділянки буде лінійно змінюватися. Значення цієї сили у верхньому перерізі співпадає зі значенням на ділянці  $DG$ :  $N_4^{вгpx} = N_3 = -5,6 \text{кН}$ . Значення у нижньому перерізі можна визначити розглядаючи рівновагу окремо розглянутої частини стержня або методом перерізів. У останньому випадку, розглядаючи нижню частину, маємо:

$$N_4^{нижн} = -V_B \cos \alpha + H_B \sin \alpha = -7 \cdot 0,8 + 24 \cdot 0,6 = 8,8 \text{кН}.$$

За обчисленими значеннями на рисунку 2.1,г побудована епюра поздовжніх сил.

**2.2.** Побудувати епюри внутрішніх зусиль в рамі, наведеній на рисунку 2.5,а.

*Розв'язання.* Визначаємо реакції опор з рівноваги усієї рами:

$$\sum M_A = 0; \quad -(q \cdot 6) \cdot 3 + R_B \cdot 2,5 = 0; \quad \Rightarrow R_B = 28,8 \text{кН};$$

$$\sum y = 0; \quad V_A - (q \cdot 6) = 0; \quad \Rightarrow V_A = 24 \text{кН};$$

$$\sum M_K = 0; \quad -(q \cdot 6) \cdot 3 + H_A \cdot 2,5 = 0; \quad \Rightarrow H_A = 28,8 \text{кН}.$$

Зазначимо, що моментна точка  $K$  обрана на перетині ліній дії реакцій  $V_A$  та  $R_B$  так, щоб моменти цих реакцій були відсутні у рівнянні рівноваги. У цьому разі реакція  $H_A$  визначається безпосередньо через задане навантаження. Для перевірки реакцій можна використати проекцію сил на вісь  $x$ :  $\sum x = 0; \quad H_A - R_B = 12 - 12 = 0$ .

При побудові епюр внутрішніх сил кожен прямий стержень цієї рами може розглядатися як окрема ділянка, оскільки навантаження на стержнях не змінюється або зовсім відсутнє.

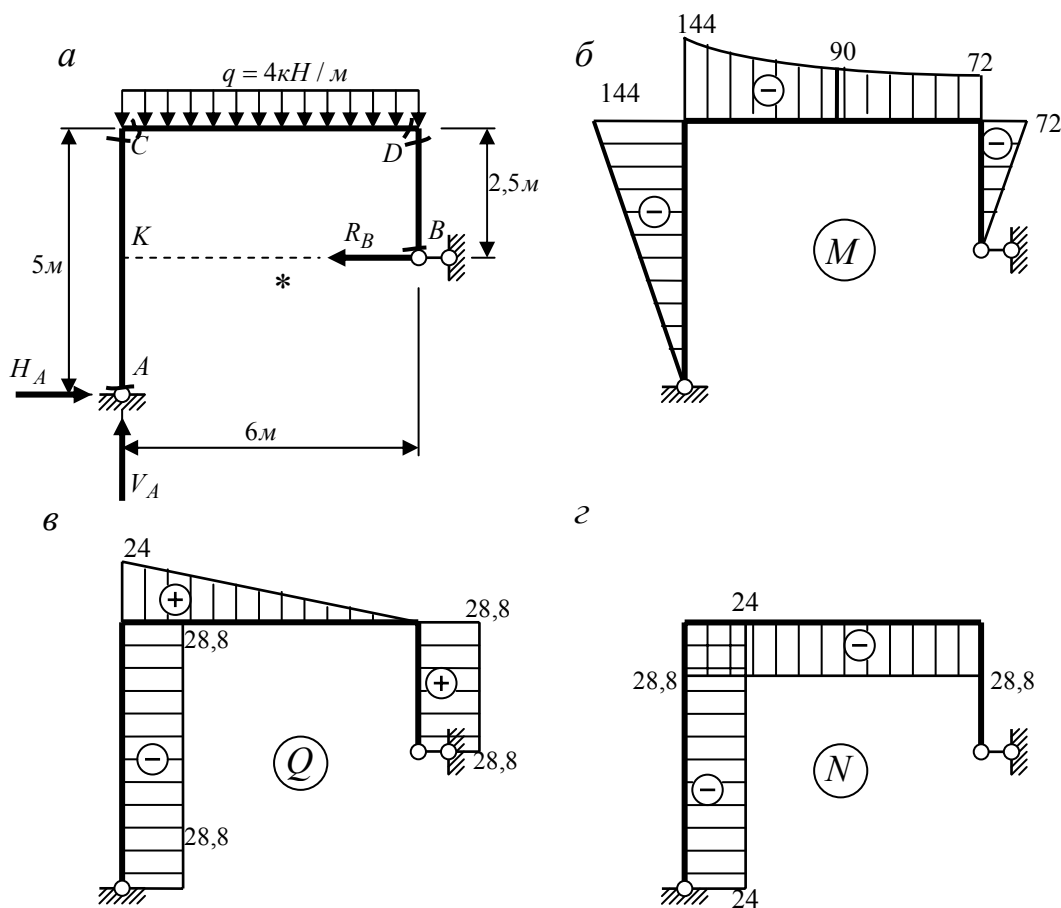


Рисунок 2.5

Епюру згинаючих моментів почнемо будувати починаючи, наприклад, з ділянки  $AC$ . Для визначення знаків згинаючих моментів на вертикальних стержнях рами оберемо точку на рисунку рами («зірочка» на рис. 2.5,а). Обертаючи раму навколо цієї точки так, щоб розглядуваний вертикальний стержень розташувався над нею, визначаємо, що переріз стержня  $AC$  біля точки  $A$  буде лівим перерізом ділянки, переріз біля точки  $C$  - правим, а низ стержня розташується з боку обраної «зірочки». Тепер визначаємо:

$$M_{\text{лів}} = 0; M_{\text{прав}} = -H_A \cdot 5 = -144 \text{кНм}.$$

На ділянці  $CD$  маємо:

$$M_{\text{лів}} = -H_A \cdot 5 = -144 \text{кНм}; M_{\text{прав}} = -R_B \cdot 2,5 = -72 \text{кНм};$$

$$M_{\text{сп}} = \frac{-72 - 144}{2} + \frac{4 \cdot 6^2}{8} = -90 \text{кНм}.$$

І, нарешті, на ділянці  $DB$  відповідно до розташування ділянки над «зірочкою» маємо на лівому кінці  $M_{\text{лів}} = -R_B \cdot 2,5 = -72 \text{кНм}$ , а на правому  $M_{\text{прав}} = 0$ .

Епюра моментів наведена на рисунку 2.5,б. Рівновагу вузлів на цій епюрі неважко перевірити за рисунком.

Поперечні сили визначаємо з урахуванням того, що навантаження на усіх ділянках перпендикулярне до осі стержня або відсутнє, Отже за цих умов маємо:

$$Q_{\frac{\text{лів}}{\text{прав}}} = \frac{M_{\text{лів}} - M_{\text{прав}}}{l} \pm \frac{ql}{2}.$$

Ділянка  $AC$ :  $Q = \frac{-144 - 0}{5} = -28,8 \text{кН}.$

Ділянка  $CD$ :  $Q_{\frac{\text{лів}}{\text{прав}}} = \frac{-72 + 144}{6} \pm \frac{4 \cdot 6}{2} = \begin{cases} 12 \text{кН}; \\ 0. \end{cases}$

Ділянка  $DB$ :  $Q = \frac{0 + 72}{2,5} = 28,8 \text{кН}.$

Епюра поперечних сил наведена на рисунку 2.5,в.

Поздовжню силу на ділянці  $DB$  визначаємо методом перерізів:  $N_{DB} = 0.$

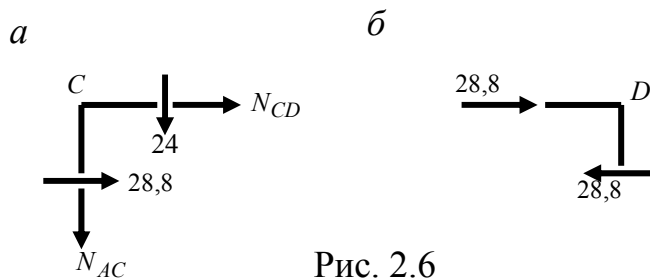


Рис. 2.6

Інші поздовжні сили визначаємо з рівноваги вузла  $C$  (рис. 2.6,а):

$$N_{AC} = -24 \text{кН}; N_{CD} = -28,8 \text{кН}.$$

Епюра поздовжніх сил наведена на рисунку 2.5,г. Перевірку поперечних та поздовжніх сил виконаємо за рівновагою вузла  $D$  (рис. 2.6, б).

**2.3.** Побудувати епюри внутрішніх зусиль в рамах, наведених на рисунку 2.7.

*Рекомендація.* Для визначення опорних реакцій рами (рис. 2.7,а) бажано використати умови рівності нулю сум моментів відносно точок  $K$  та  $L$  а також суму проєкцій сил на вісь  $y$ . Перевірку реакцій можна виконати проєктуючи сили на вісь  $x$ .

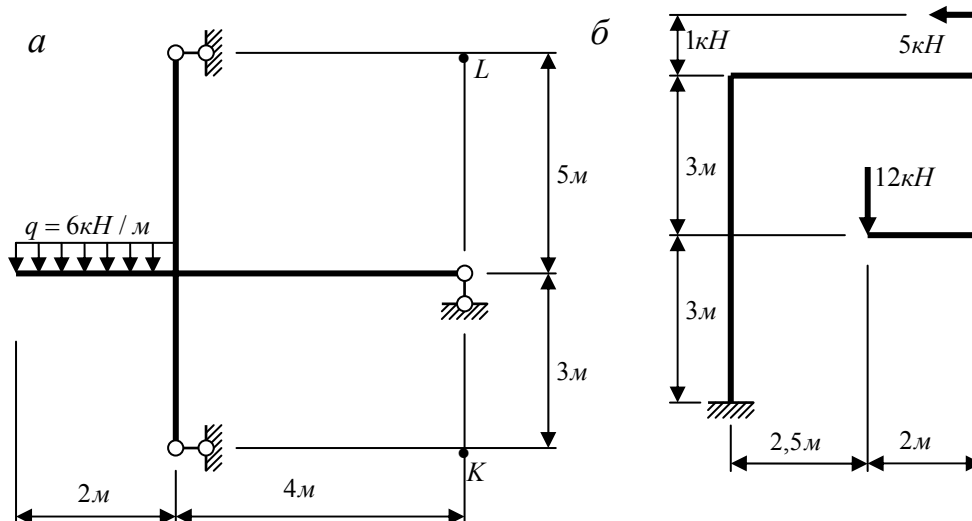


Рисунок 2.7

### 3 Розрахунок статично визначуваних ферм

Теоретичний матеріал викладено у главі 3 [1], у розділі 3 [2] та у главі 4 [3].

*Вправи*

**3.1.** Визначити нульові стержня у фермі, наведеній на рисунку 3.1

*Розв'язання.* Реакції опор ферми при заданому навантаженні будуть вертикальними. У цьому неважко упевнитись записавши суму проєкцій сил на горизонтальну вісь.

Далі переглядаємо вузли ферми і перевіряємо наявність ознак нульових стержнів.

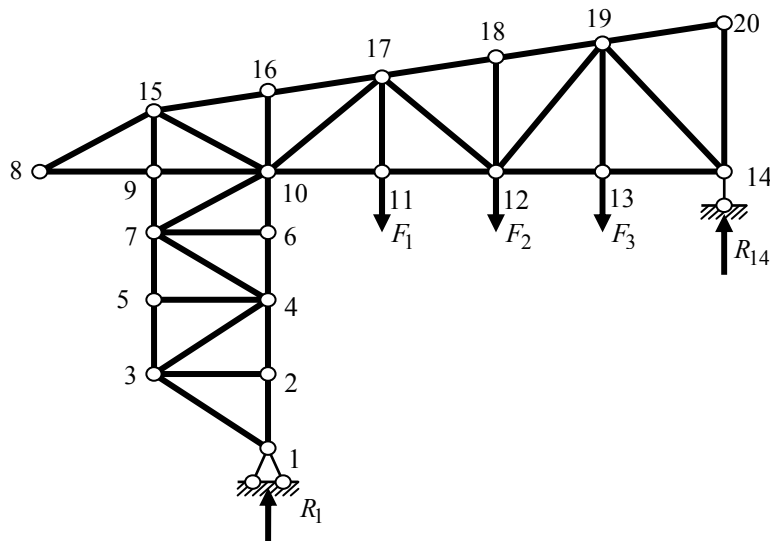


Рисунок 3.1

Почнемо з вузла 1. Це – двостержневий вузол, у якому сила – реакція  $R_1$  - діє вздовж стержня 1-2, отже інший стержень (1-3) нульовий.

Далі розглядаємо вузол 2. Цей вузол – тристержневий і не має навантаження. Оскільки два з його стержнів (1-2 та 2-4) лежать на одній прямій, маємо третій стержень (2-3) нульовий.

У вузлі 3 стержні 1-3 та 2-3 нульові, тобто їх можна не враховувати. Отже, тепер у цьому вузлі залишаються два стержні – 3-4 та 3-5, через відсутність навантаження ці стержні також нульові.

У вузлі 5 тепер також залишаються два стержні – 4-5 та 5-7, навантаження відсутнє, отже ці стержні нульові.

Відкинувши у вузлі 4 доведені нульові стержні, одержимо тристержневий ненавантажений вузол, у якому два стержні (2-4 та 4-6) лежать на одній прямій. Отже третій стержень – 4-7, що не належить цій прямій – нульовий.

Аналогічно вузол 6 є тристержневим вузлом, у якому відсутнє навантаження, і два стержні (4-6, 6-10) лежать на одній прямій. Отже, третій стержень, що не лежить на цій прямій є нульовим.

У вузлі 7 після відкидання доведених нульових стержнів залишаються два стержні- 7-9 та 7-10. Отже і ці стержні є нульовими.

Далі у вузлі 8 нульові стержні 8-8 та 8-15; у вузлі 9 нульові стержні 9-10 та 9-15; у вузлі 15 нульові стержні 10-15 і 15-16; у вузлі 16 нульові стержні 10-16 і 16-17; у вузлі 18 нульовий стержень 12-18; нарешті у вузлі 20 нульові стержні 14-20 та 19-20.

Отже наведена ферма при заданому навантаженні має 21 нульовий стержень.

**3.2.** Способом вирізання вузлів визначити зусилля у стержнях ферми, наведеної на рисунку 3.2.

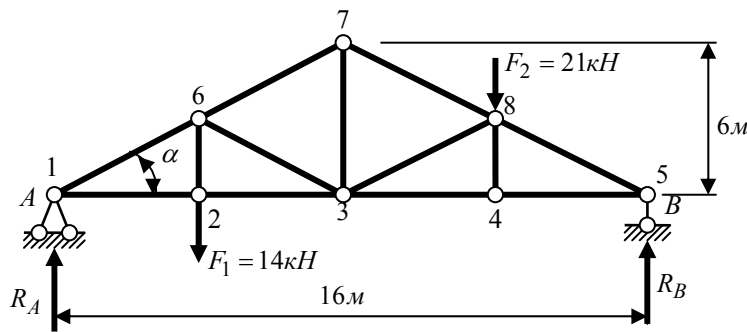


Рисунок 3.2

*Розв'язання.* Довжина однієї панелі ферми становить  $d = \frac{l}{4} = 4\text{м}$ .

Визначаємо опорні реакції. Для цього використовуємо рівняння рівноваги ферми:

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot 16 - F_1 \cdot 4 - F_2 \cdot 12 = 0; \Rightarrow R_B = 19,25\text{кН};$$

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 16 + F_1 \cdot 12 + F_2 \cdot 4 = 0; \Rightarrow R_A = 15,75\text{кН}.$$

Горизонтальна реакція у шарнірно-нерухомій опорі при заданому вертикальному навантаженні відсутня. Перевірку вертикальних реакцій виконаємо спроектувавши сили на вертикальну вісь:

$$\sum y = R_A + R_B - F_1 - F_2 = 15,75 + 19,25 - 14 - 21 = 0.$$

Позначимо номерами вузли ферми (рис. 3.2) і перейдемо до вирізання вузлів.

Починаємо з двостержневого вузла: наприклад, з вузла 1 (рис. 3.3,а).

Записуючи умови рівноваги вузла, одержимо:

$$\sum y = 0; R_A + N_{1-6} \cdot \sin \alpha = 0; 15,75 + N_{1-6} \cdot 0,6 = 0;$$

$$\sum x = 0; N_{1-2} + N_{1-6} \cdot \cos \alpha = 0; N_{1-2} + N_{1-6} \cdot 0,8 = 0;$$

де  $\sin \alpha = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 0,6$ ;  $\cos \alpha = \frac{8}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 0,8$  обчислені з прямокутного трикутника, утвореного вузлами 1, 3 та 7 ферми.

Звідси маємо:  $N_{1-6} = -26,25\text{кН}$ ;  $N_{1-2} = 21\text{кН}$ .

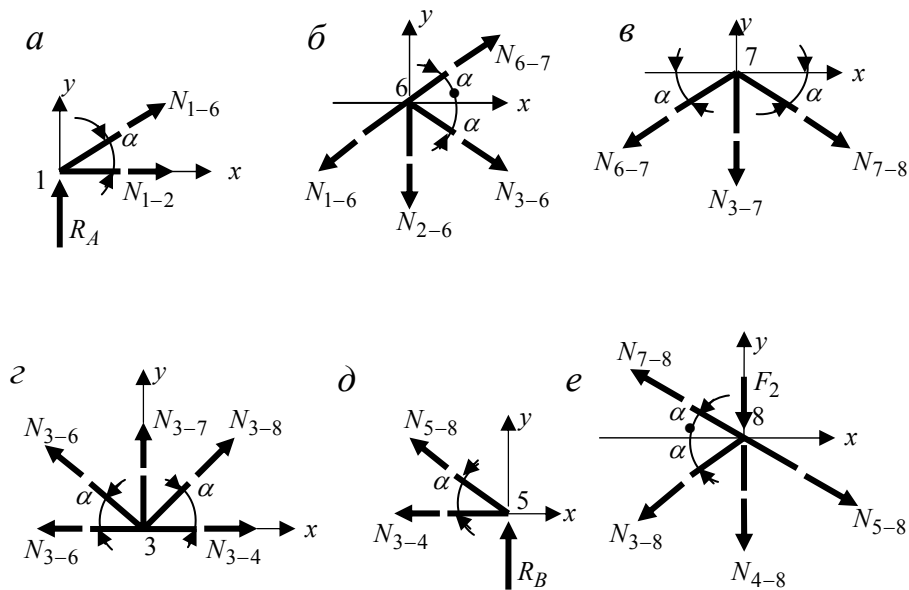


Рисунок 3.3

Далі переходимо до вузла 2, у якому невідомими є два зусилля у стержнях 2-3 та 2-6. Рівняння рівноваги цього вузла розглядати не варто, оскільки маємо окремий випадок тристержневого вузла. Дійсно, у цьому вузлі два стержні лежать на одній прямій, а навантаження спрямоване вздовж третього стержня. Отже, зусилля у стержнях, розташованих на одній прямій однакові -  $N_{2-3} = N_{1-2} = 21 \text{кН}$ , а зусилля у третьому стержні дорівнює вузловій силі -  $N_{2-6} = F_1 = 14 \text{кН}$ .

Наступний вузол з двома невідомими зусиллями – вузол 6 (рис. 3.3,б). Для нього маємо:

$$\sum y = 0; N_{6-7} \cdot \sin \alpha - N_{1-6} \cdot \sin \alpha - N_{3-6} \cdot \sin \alpha - N_{2-6} = 0;$$

$$\sum x = 0; N_{6-7} \cdot \cos \alpha - N_{1-6} \cdot \cos \alpha + N_{3-6} \cdot \cos \alpha = 0.$$

Після підстановки відомих величин приходимо до системи двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 0,6 N_{6-7} - 0,6 N_{3-6} + 1,75 = 0; \\ 0,8 N_{6-7} + 0,8 N_{3-6} + 21 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання системи дає:  $N_{6-7} = -14,58 \text{кН}$ ;  $N_{3-6} = -11,67 \text{кН}$ .

Далі вузли розглядаємо в такому порядку.

Вузол 7 (рис. 3.3,в):

$$\sum x = 0; N_{7-8} \cdot \cos \alpha - N_{6-7} \cdot \cos \alpha = 0; \Rightarrow N_{7-8} = N_{6-7} = -14,58 \text{кН},$$

$$\sum y = 0; -N_{6-7} \cdot \sin \alpha - N_{7-8} \cdot \sin \alpha - N_{3-7} = 0; \Rightarrow N_{3-7} = 17,496 \text{кН}.$$

Вузол 3 (рис. 3.3,з):

$$\sum y = 0; N_{3-6} \cdot \sin \alpha + N_{3-7} + N_{3-8} \cdot \sin \alpha = 0; \Rightarrow N_{3-8} = -17,49 \text{кН};$$

$$\sum x = 0; -N_{2-3} - N_{3-6} \cdot \cos \alpha + N_{3-4} + N_{3-8} \cdot \cos \alpha = 0; \Rightarrow N_{3-4} = 25,656 \text{кН}.$$



Вузол 4 (рис. 3.2) тристержневий, не має навантаження, два стержні лежать на одній прямій. Отже, маємо окремий випадок вузла  $N_{4-8} = 0$ ;  $N_{4-5} = N_{3-4} = 25,656 \text{кН}$ .

Вузол 5 (рис.3.3,д):

$$\sum y = 0; R_B + N_{5-8} \cdot \sin \alpha = 0; \Rightarrow N_{5-8} = -32,08 \text{кН}.$$

Друге рівняння рівноваги використаємо для перевірки:

$$\sum x = -N_{4-5} - N_{5-8} \cos \alpha = -25,656 + 32,08 \cdot 0,8 = 0,011 \cong 0.$$

Зусилля в усіх стержнях обчислені. Для перевірки додатково розглянемо рівновагу вузла 8 (рис.3.3,е):

$$\begin{aligned} \sum x &= N_{5-8} \cdot \cos \alpha - N_{3-8} \cdot \cos \alpha - N_{7-8} \cdot \cos \alpha = \\ &= (-32,08 + 17,49 + 14,58) \cdot \cos \alpha = (-0,01) \cdot \cos \alpha \cong 0; \\ \sum y &= N_{7-8} \sin \alpha - N_{3-8} \cdot \sin \alpha - N_{4-8} - N_{5-8} \cdot \sin \alpha = \\ &= -14,58 \cdot 0,6 - 17,49 \cdot 0,6 - 0 + 32,08 \cdot 0,6 \cong 0. \end{aligned}$$

Отже, зусилля обчислені вірно.

**3.3.** Самостійно визначити зусилля у стержнях ферми, наведеної на рисунку 3.4.

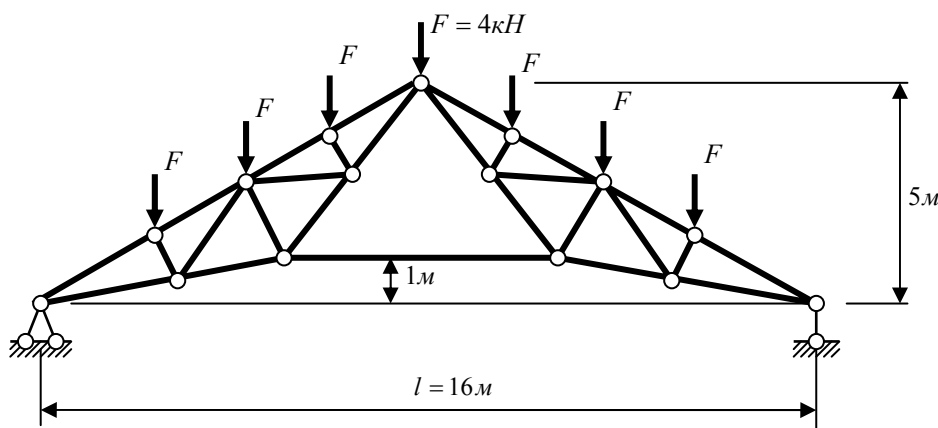


Рисунок 3.4

**3.4.** Раціональним способом визначити зусилля у стержнях, позначених на рисунку 3.5. (Раціональним вважати такий спосіб, який по можливості дозволяє виразити зусилля безпосередньо через зовнішні сили.)

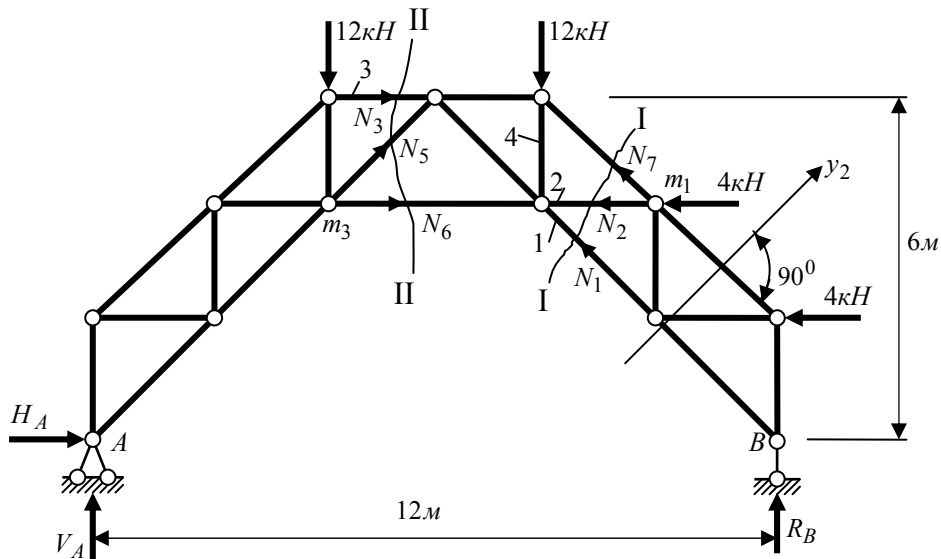


Рисунок 3.5

Розв'язання. Обчислюємо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot 12 - 12 \cdot 4 - 12 \cdot 8 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 0; \Rightarrow R_B = 10 \text{кН};$$

$$\sum M_B = 0; 12 \cdot 4 + 12 \cdot 8 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 - V_A \cdot 12 = 0; \Rightarrow V_A = 14 \text{кН};$$

$$\sum x = 0; H_A - 4 - 4 = 0; \Rightarrow H_A = 8 \text{кН}.$$

Перевіряємо реакції:

$$\sum y = V_A + R_B - 12 - 12 = 14 + 10 - 24 = 0.$$

Для визначення зусиль у першому та другому стержнях раціонально використати переріз I-I. Подумки відкинемо ліву частину ферми і позначимо зусилля у перерізанних стержнях  $N_1, N_2, N_7$ , спрямовуючи їх у бік відкинутої частини ферми, тобто вважаючи їх додатними.

Двоє із зусиль у перерізі I-I ( $N_2$  та  $N_7$ ) перетинаються у точці, яку позначимо  $m_1$ . Ця точка є моментною (точкою Ріттера) для зусилля  $N_1$ , отже застосуємо спосіб моментної точки:

$$\sum M_{m_1} = 0; -R_B \cdot 2 + 4 \cdot 2 - N_1 \cdot r_1 = 0; \Rightarrow N_1 = \frac{4 \cdot 2 - 10 \cdot 2}{1,414} = -8,49 \text{кН},$$

де  $r_1 = 2 \cdot \cos 45^\circ = 1,414 \text{м}$ .

Для визначення зусилля  $N_2$  застосуємо спосіб проєкцій, оскільки два інші зусилля ( $N_1$  та  $N_7$ ) паралельні один одному. Отже, проєктуючи сили на вісь  $y_2$ , що перпендикулярна паралельним зусиллям, одержимо:

$$\sum y_2 = 0; R_B \cdot \cos 45^\circ - 4 \cdot \cos 45^\circ \cdot 2 - N_2 \cdot \cos 45^\circ = 0; N_2 = 2 \text{кН}.$$

Далі для визначення зусилля у стержні 3 проведемо переріз II-II через три стержні. Відкинувши праву частину ферми, одержимо зусилля  $N_3, N_5, N_6$  у перерізанних стержнях. Оскільки зусилля  $N_5$  та  $N_6$  перетинаються у точці  $m_3$ , ця точка є моментною для зусилля  $N_3$ . Отже, записуючи моменти лівих сил відносно цієї точки, одержимо:

$$\sum M_{m_3} = 0; H_A \cdot 4 - V_A \cdot 4 - N_3 \cdot 2 = 0; \Rightarrow N_3 = \frac{8 \cdot 4 - 14 \cdot 4}{2} = -12 \text{кН}.$$

Самостійно, використовуючи раціональні способи, обчислити зусилля  $N_4, N_5, N_6, N_7$ .

**3.5.** Застосовуючи раціональні способи, самостійно обчислити зусилля у позначених рискою стержнях ферм, наведених на рисунку 3.6.

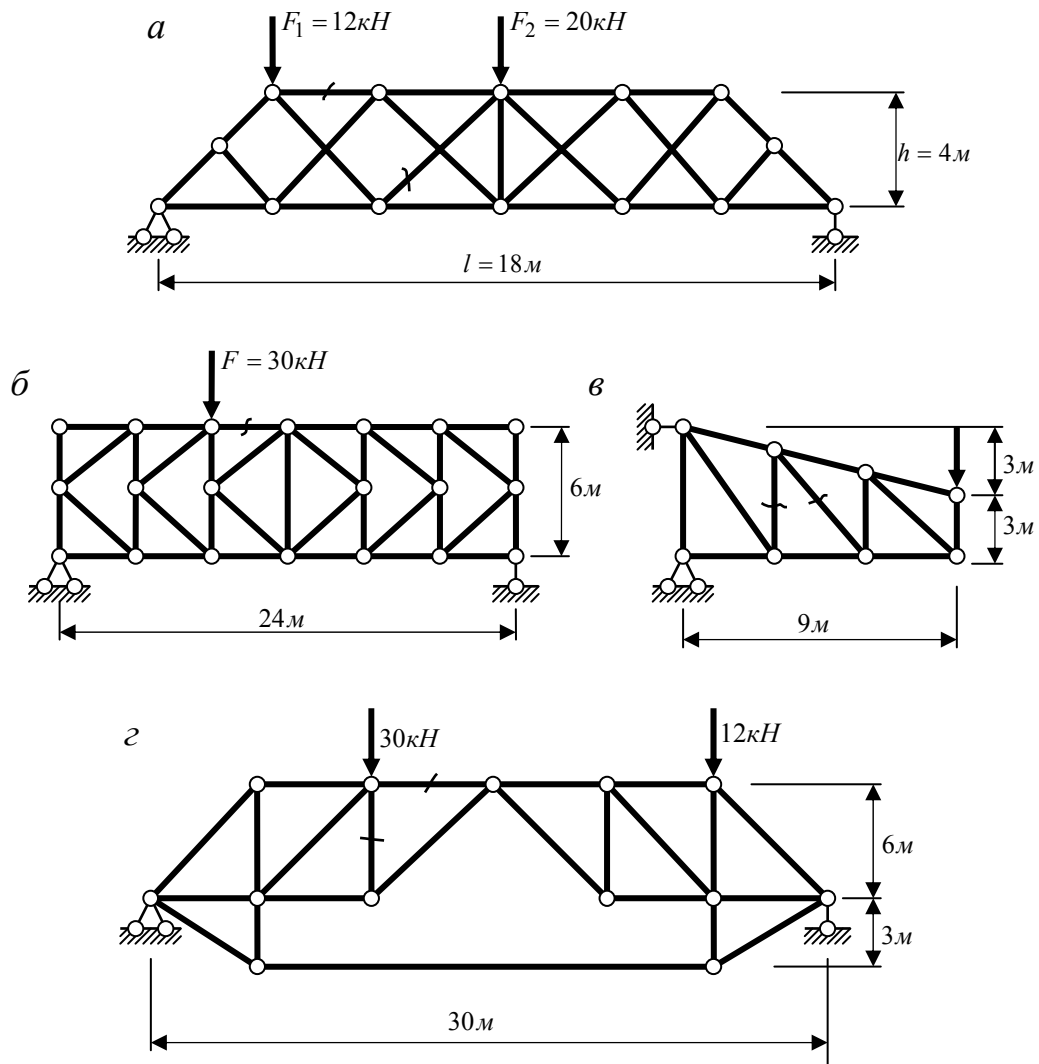


Рисунок 3.6

*Рекомендації.* Для ферми (рис. 3.6,а) попередньо визначити нульові стержні і далі вважати їх відсутніми. Для ферм (рис. 3.6,б,з) можна застосувати способи моментної точки та проєкцій при використанні перерізів, які проходять через чотири стержні.

## 4 Розпірні системи

Теоретичний матеріал наведено у главі 4 [1], у розділі 4 [2] та у главі 5 [3]

*Вправи*

**4.1.** Визначити зусилля у перерізах 1 та 2 тришарнірної арки (рис. 4.1,а).

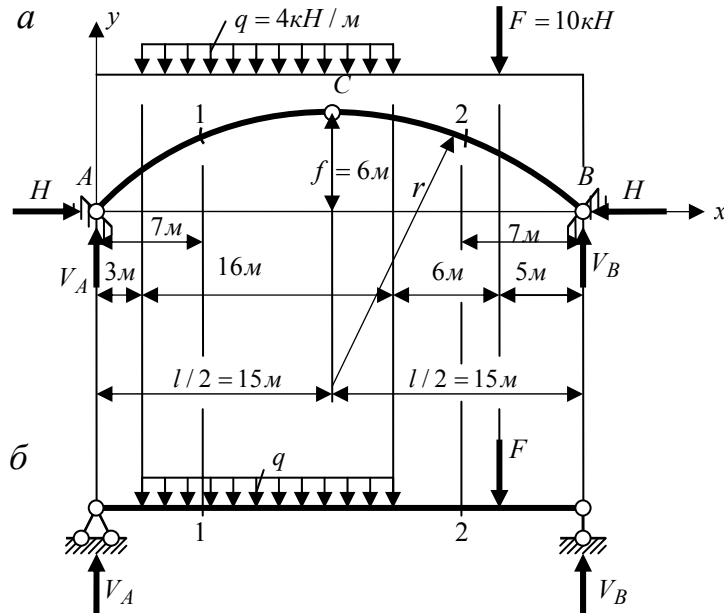


Рисунок. 4.1

*Розв'язання.* Визначаємо вертикальні опорні реакції:

$$\sum M_A = 0; -q \cdot 16 \cdot 11 - F \cdot 25 + V_B \cdot 30 = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{4 \cdot 16 \cdot 11 + 10 \cdot 25}{30} = 31,8 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; q \cdot 16 \cdot 19 + F \cdot 5 - V_A \cdot 30 = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{4 \cdot 16 \cdot 19 + 10 \cdot 5}{30} = 42,2 \text{ кН}.$$

Перевірка цих реакцій дає:

$\sum y = V_A + V_B - q \cdot 16 - F = 42,2 + 31,8 - 4 \cdot 16 - 10 = 0$ , отже, вертикальні реакції обчислені вірно.

Обчислюємо розпір з умови рівності нулю згинаючого моменту у шарнірі С. Розглядаючи ліві від шарніру сили, одержуємо:

$$M_C = \sum_{\text{лів}} M_C = 0; V_A \cdot 15 - q \cdot 12 \cdot 6 - H \cdot 6 = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{42,2 \cdot 15 - 4 \cdot 12 \cdot 6}{6} = 57,5 \text{ кН}.$$

Перевіряємо розпір, записуючи момент у шарнірі через праві сили:

$$M_C = \sum_{\text{ghfd}} M_C = V_B \cdot 15 - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 10 - H \cdot 6 =$$

$$= 31,8 \cdot 15 - 4 \cdot 4 \cdot 2 - 10 \cdot 10 - 57,5 \cdot 6 = 0,$$

отже, розпір обчислений вірно.

Визначаємо балочні зусилля у заданих перерізах. Користуючись еквівалентною балкою (рис. 4.1,б), одержимо:

$$M_1^0 = V_A \cdot 7 - q \cdot 4 \cdot 2 = 42,2 \cdot 7 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 263,4 \text{кНм};$$

$$Q_1^0 = V_A - q \cdot 4 = 42,2 - 4 \cdot 4 = 26,2 \text{кН};$$

$$M_2^0 = V_B \cdot 7 - F \cdot 2 = 31,8 \cdot 7 - 10 \cdot 2 = 202,6 \text{кНм};$$

$$Q_2^0 = -V_B + F = -31,8 + 10 = -21,8 \text{кН}.$$

Обчислюємо радіус дуги, за якою окреслена вісь арки:

$$r = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} = \frac{6}{2} + \frac{30^2}{8 \cdot 6} = 21,75 \text{м}.$$

Тригонометричні функції кута нахилу дотичної до осі арки у заданих перерізах обчислюємо за формулами:  $\sin \varphi = \frac{l/2 - x}{r}$ ,  $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$ .

$$\text{Маємо: } \sin \varphi_1 = \frac{15 - 7}{21,75} = 0,368; \cos \varphi_1 = \sqrt{1 - 0,368^2} = 0,930;$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{15 - 23}{21,75} = -0,368; \cos \varphi_2 = \sqrt{1 - (-0,368)^2} = 0,930.$$

Ординати точок на осі арки одержимо за виразом:  $y = r \cos \varphi - (r - f)$ . У заданих перерізах маємо:

$$y_1 = 21,75 \cdot 0,93 - (21,75 - 6) = 4,48 \text{м};$$

$$y_2 = 21,75 \cdot 0,93 - (21,75 - 6) = 4,48 \text{м}.$$

Переходимо до визначення внутрішніх зусиль у заданих перерізах:

$$M_1 = M_1^0 - H \cdot y_1 = 263,4 - 57,5 \cdot 4,48 = 5,8 \text{кНм};$$

$$Q_1 = Q_1^0 \cos \varphi_1 - H \sin \varphi_1 = 26,2 \cdot 0,93 - 57,5 \cdot 0,368 = 3,21 \text{кН};$$

$$N_1 = -Q_1^0 \sin \varphi_1 - H \cos \varphi_1 = -26,2 \cdot 0,368 - 57,5 \cdot 0,93 = -63,12 \text{кН};$$

$$M_2 = M_2^0 - H y_2 = 202,6 - 57,5 \cdot 4,48 = -55,0 \text{кНм};$$

$$Q_2 = Q_2^0 \cos \varphi_2 - H \sin \varphi_2 = -21,8 \cdot 0,93 - 57,5 \cdot (-0,368) = 0,89 \text{кН};$$

$$N_2 = -Q_2^0 \sin \varphi_2 - H \cos \varphi_2 = -(-21,8) \cdot (-0,368) - 57,5 \cdot 0,93 = -61,5 \text{кН}.$$

#### 4.2. Побудувати епюри внутрішніх зусиль у тришарнірній рамі (рис. 4.2).

*Розв'язання.* Визначаємо опорні реакції. Враховуючи, що ця рама має тільки вертикальне навантаження, горизонтальні реакції опор будуть однакові. Застосуємо такі самі рівняння, як для звичайної тришарнірної арки:

$$\sum M_A = 0; V_B \cdot 24 - F \cdot 8 - (q \cdot 9) \cdot 19,5 = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{50 \cdot 8 + 10 \cdot 9 \cdot 19,5}{24} = 89,79 \text{кН};$$

$$\sum M_A = 0; F \cdot 16 + (q \cdot 9) \cdot 4,5 - V_A \cdot 24 = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{50 \cdot 16 + 10 \cdot 9 \cdot 4,5}{24} = 50,21 \text{кН};$$

$$M_C = \sum_{\text{лів}} M_C = 0; V_A \cdot 12 - F \cdot 4 - H \cdot 8 = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{50,21 \cdot 12 - 50 \cdot 4}{8} = 50,32 \text{ кН}.$$

Перевіряємо реакції:

$$\sum y = V_A + V_B - F - (q \cdot 9) = 50,21 + 89,79 - 50 - 10 \cdot 9 = 0;$$

$$M_C = \sum_{\text{прав}} M_C = V_B \cdot 12 - (q \cdot 9) \cdot 7,5 - H \cdot 8 = 89,79 \cdot 12 - 10 \cdot 9 \cdot 7,5 - 50,32 \cdot 8 =$$

$$= -0,08 \cong 0.$$

Отже, реакції обчислені правильно.

Для побудування епюр внутрішніх зусиль застосовуємо далі звичайну методику розрахунку рам. Розбиваємо раму на ділянки. Ними будуть окремі стержні  $AD$  та  $BE$ , оскільки у їхніх межах навантаження або відсутнє ( $AD$ ), або не змінюється ( $BE$ ); а також ділянки  $D-1, 1-C$ ,  $C-2, 2-E$ , на які поділяє стержні  $DC$  та  $CE$  присутнє на них навантаження.

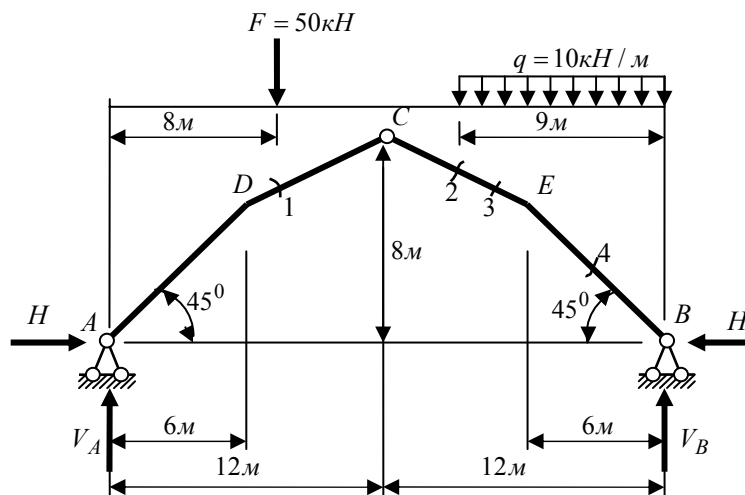


Рисунок 4.2

Обчислимо довжини ділянок та кути нахилу стержнів:

$$l_{AD} = l_{BE} = \frac{6}{\cos 45^\circ} = 8,49 \text{ м}; \quad \alpha_{AD} = \alpha_{BE} = 45^\circ;$$

$$\sin \alpha_{AD} = \sin \alpha_{BE} = \cos \alpha_{AD} = \cos \alpha_{BE} = 0,707;$$

$$\sin \alpha_{DC} = \sin \alpha_{CE} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 6^2}} = 0,316; \quad \cos \alpha_{DC} = \cos \alpha_{CE} = \sqrt{1 - 0,316^2} = 0,949;$$

$$l_{D-1} = \frac{2}{\cos \alpha_{DC}} = 2,11 \text{ м}; \quad l_{1-C} = \frac{4}{\cos \alpha_{DC}} = 4,21 \text{ м};$$

$$l_{C-2} = l_{2-E} = \frac{3}{\cos \alpha_{CE}} = 3,16 \text{ м}.$$

Побудування епюри згинаючих моментів виконуємо за методикою, застосованою у вправі 2.1.

Ділянка  $AD$ . За умови відсутності розподіленого навантаження епюра моментів прямолінійна, отже, маємо:

$$M_{\text{лів}} = 0; M_{\text{прав}} = V_A \cdot 6 - H \cdot 6 = 50,21 \cdot 6 - 50,32 \cdot 6 = -0,66 \text{кНм}.$$

Ділянка  $D-1$ :

$$M_{\text{лів}} = V_A \cdot 6 - H \cdot 6 = -0,66 \text{кНм};$$

$$M_{\text{прав}} = V_A \cdot 8 - H \cdot (6 + l_{D-1} \cdot \sin \alpha_{DC}) = 50,21 \cdot 8 - 50,32 \cdot (6 + 2,11 \cdot 0,316) = 66,21 \text{кНм}.$$

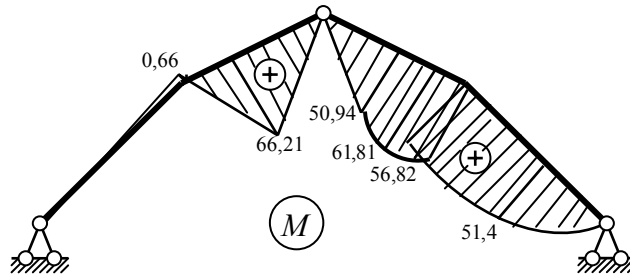


Рисунок 4.3

Ділянка  $1-C$ :

$$M_{\text{лів}} = V_A \cdot 8 - H \cdot (6 + l_{D-1} \cdot \sin \alpha_{DC}) = 66,21 \text{кНм};$$

$$M_{\text{прав}} = V_A \cdot 12 - F \cdot 4 - H \cdot 8 = 50,21 \cdot 12 - 50 \cdot 4 - 50,32 \cdot 8 = -0,04 \cong 0.$$

Останнє обчислення є контрольним, оскільки згинаючий момент у шарнірі (переріз  $C$ ) повинен дорівнювати нулю.

Ділянка  $C-2$ :

$$M_{\text{лів}} = 0; M_{\text{прав}} = V_B \cdot 9 - (q \cdot 9) \cdot 4,5 - H \cdot (6 + l_{2=E} \cdot \sin \alpha_{CE}) = 89,79 \cdot 9 - 10 \cdot 9 \cdot 4,5 - 50,32 \cdot (6 + 3,16 \cdot 0,316) = 50,94 \text{кНм}.$$

Ділянка  $2-E$ :

$$M_{\text{лів}} = V_B \cdot 9 - (q \cdot 9) \cdot 4,5 - H \cdot (l + l_{2=E} \cdot \sin \alpha_{CE}) = 50,94 \text{кНм};$$

$$M_{\text{прав}} = V_B \cdot 6 - (q \cdot 6) \cdot 3 - H \cdot 6 = 89,79 \cdot 6 - 10 \cdot 6 \cdot 3 - 50,32 \cdot 6 = 56,82 \text{кНм}.$$

Оскільки на ділянці діє розподілене навантаження, епора моментів окреслена за кривою, отже, необхідно визначити згинаючий момент у проміжній точці. Такою точкою візьмемо точку у середині ділянки. Цей момент обчислимо аналогічно прикладу 2.1:

$$M_{cp} = \left( \frac{M_{\text{прав}} + M_{\text{лів}}}{2} + \frac{q l^2}{8} \right) \cdot \cos \alpha = \left( \frac{56,82 + 50,94}{2} + \frac{10 \cdot 3^2}{8} \right) \cdot 0,949 = 61,81 \text{кНм}.$$

Ділянка  $BE$ :

$$M_{\text{лів}} = V_B \cdot 6 - (q \cdot 6) \cdot 3 - H \cdot 6 = 56,82 \text{кНм};$$

$$M_{\text{прав}} = 0;$$

$$M_{cp} = \left( \frac{56,82 + 0}{2} + \frac{10 \cdot 6^2}{8} \right) \cdot 0,707 = 51,9 \text{кНм}.$$

За цими результатами на рисунку 4.3 побудована епора згинаючих моментів.

Обчислюємо поперечні сили аналогічно вправі 2.1.

Ділянка  $AD$ . Поперечна сила постійна:

$$Q = \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лів}}}{l_{AD}} = \frac{-0,66 - 0}{8,49} = -0,08 \text{кН}.$$

Ділянка  $D-1$ . Поперечна сила також постійна:

$$Q = \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лів}}}{l_{D-1}} = \frac{66,21 - (-0,66)}{2,11} = 31,69 \text{кН}.$$

Аналогічно для ділянок  $1-C$ :

$$Q = \frac{0 - 66,21}{4,21} = -15,73 \text{кН}$$

та  $C-2$ :

$$Q = \frac{50,94 - 0}{3,16} = 16,12 \text{кН}.$$

На ділянці  $2-E$  діє рівномірно розподілене навантаження, що неперпендикулярне до осі стержня. У цьому випадку маємо:

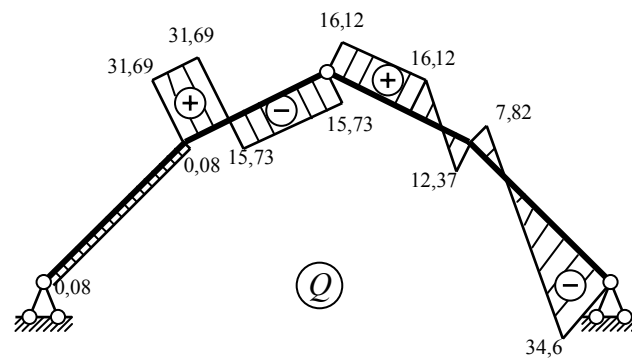


Рисунок 4.4

$$Q_{\frac{\text{лів}}{\text{прав}}} = \left( \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лів}}}{l} \pm \frac{q l}{2} \right) \cdot \cos \alpha = \left( \frac{56,82 - 50,94}{3} \pm \frac{10 \cdot 3}{2} \right) \cdot 0,949 =$$

$$= \begin{cases} 16,10 \text{кН}; \\ -12,37 \text{кН}. \end{cases}$$

Аналогічно на ділянці  $BE$ :

$$Q_{\frac{\text{лів}}{\text{прав}}} = \left( \frac{0 - 56,82}{6} \pm \frac{10 \cdot 6}{2} \right) \cdot 0,707 = \begin{cases} 7,82 \text{кН}; \\ -34,60 \text{кН}. \end{cases}$$

За цими результатами на рисунку 4.4 побудована еюра поперечних сил.

Поздовжні сили краще визначити безпосередньо методом перерізів.

Ділянка  $AD$ :

$$N = -V_A \cdot \sin \alpha_{AD} - H \cdot \cos \alpha_{AD} = -50,21 \cdot 0,707 - 50,32 \cdot 0,707 = -71,07 \text{кН}.$$

Ділянка  $D-1$ :



$$N = -V_A \cdot \sin \alpha_{DC} - H \cdot \cos \alpha_{DC} = -50,21 \cdot 0,316 - 50,32 \cdot 0,949 = -63,62 \text{кН}.$$

Ділянка 1 – C :

$$N = (-V_A + F) \cdot \sin \alpha_{DC} - H \cdot \cos \alpha_{DC} = (-50,21 + 50) \cdot 0,316 - 50,32 \cdot 0,949 = -47,82 \text{кН}.$$

Ділянка C – 2 :

$$N = (V_A - F) \cdot \sin \alpha_{CE} - H \cdot \cos \alpha_{CE} = (50,21 - 50) \cdot 0,316 - 50,32 \cdot 0,949 = -47,69 \text{кН}.$$

Ділянка 2 – E :

$$N_{\text{лів}} = N_{C-2}; N_{\text{прав}} = (-V_B + q \cdot 6) \cdot \sin \alpha_{CE} - H \cdot \cos \alpha_{CE} = (-89,79 + 10 \cdot 6) \cdot 0,316 - 50,32 \cdot 0,949 = -57,17 \text{кН}.$$

Ділянка BE :

$$N_{\text{лів}} = (-V_B + q \cdot 6) \cdot \sin \alpha_{BE} - H \cdot \cos \alpha_{BE} = (-89,79 + 10 \cdot 6) \cdot 0,707 - 50,32 \cdot 0,707 = -56,64 \text{кН};$$

$$N_{\text{прав}} = -V_B \cdot \sin \alpha_{BE} - H \cdot \cos \alpha_{BE} = -89,79 \cdot 0,707 - 50,32 \cdot 0,707 = -99,06 \text{кН}.$$

За результатами розрахунків на рисунку 4.5 побудована епюра поздовжніх сил.

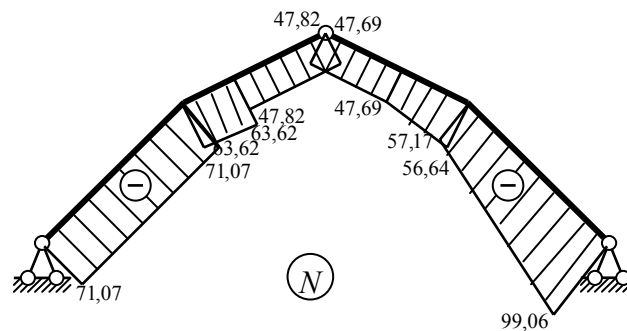


Рисунок 4.5

**4.3.** Визначити внутрішні зусилля у перерізі 1 тришарнірної арки (рис. 4.6,а) та у зоні приєднання підвищеної зтяжки. Обрис осі арки – парабола

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x).$$

*Розв'язання.* Реакції опор арки із зтяжкою будуть вертикальними:

$$\sum M_F = 0; V_B \cdot 20 - (q \cdot 8) \cdot 4 - F \cdot 13 = 0; \Rightarrow V_B = \frac{6 \cdot 8 \cdot 4 + 20 \cdot 13}{20} = 22,6 \text{кН};$$

$$\sum M_B = 0; (q \cdot 8) \cdot 16 + F \cdot 7 - V_A \cdot 20 = 0; \Rightarrow V_A = \frac{6 \cdot 8 \cdot 16 + 20 \cdot 7}{20} = 45,4 \text{кН}.$$

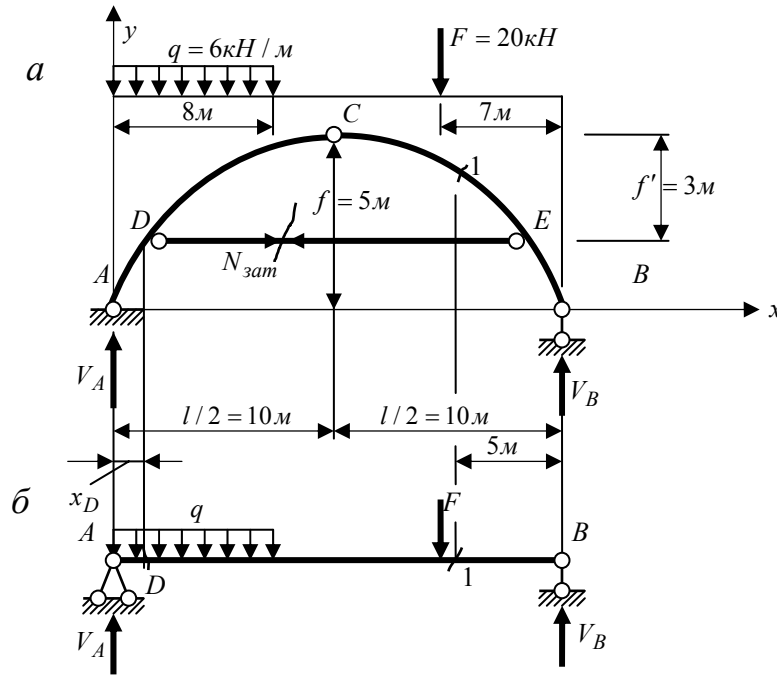


Рисунок 4.6

Перевіряємо реакції:

$$\sum y = V_A + V_B - (q \cdot 8) - F = 45,4 + 22,6 - 6 \cdot 8 - 20 = 0.$$

Далі розрізаючи затяжку визначимо зусилля  $N_{зат}$  з умови рівності нулю згинаючого моменту у шарнірі  $C$ :

$$M_C = \sum_{лів} M_C = 0; V_A \cdot 10 - (q \cdot 8) \cdot 6 - N_{зат} \cdot 3 = 0; \Rightarrow N_{зат} = \frac{45,4 \cdot 10 - 6 \cdot 8 \cdot 6}{3} = 55,33 \text{ кН}.$$

Перевіряємо значення цього зусилля:

$$M_C = \sum_{ghd} M_C = V_B \cdot 10 - F \cdot 3 - N_{зат} \cdot 3 = 22,6 \cdot 10 - 20 \cdot 3 - 55,33 \cdot 3 = 0,01 \cong 0.$$

Обчислимо абсцису точки  $D$  арки на рівні затяжки з рівності:

$$y_D = \frac{4f}{l^2} x_{D,E} (l - x_{D,E}) = f - f'; \Rightarrow x_{D,E} = \frac{l}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{f'}{f}} \right) = \frac{20}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{3}{5}} \right) = \begin{cases} 2,25 \text{ м}, \\ 17,75 \text{ м}. \end{cases}$$

Ордината перерізу 1 з рівняння осі арки буде такою:

$$y_1 = \frac{4 \cdot 5}{20^2} \cdot 15 \cdot (20 - 15) = 3,75 \text{ м}.$$

Ордината, відрахована від затяжки:

$$y'_1 = y_1 - (f - f') = 3,75 - (5 - 3) = 1,75 \text{ м}.$$

Тригонометричні функції кутів нахилу дотичної у заданих точках осі арки:

$$\operatorname{tg} \varphi_D = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_D) = \frac{4 \cdot 5}{20^2} (20 - 2 \cdot 2,25) = 0,775; \Rightarrow \sin \varphi_D = 0,830; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \varphi_D = 0,556;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{4 \cdot 5}{20^2} (20 - 2 \cdot 15) = -0,5; \Rightarrow \sin \varphi_1 = -0,447; \Rightarrow \cos \varphi_1 = 0,894.$$

Балочні зусилля у заданих перерізах обчислюємо за рисунком 4.6,б:

$$M_D^0 = V_A \cdot 2,91 - (q \cdot 2,91) \cdot \frac{2,25}{2} = 45,4 \cdot 2,25 - (6 \cdot 2,25) \frac{2,25}{2} = 86,96 \text{кНм};$$

$$Q_D^0 = V_A - q \cdot 2,25 = 45,4 - 6 \cdot 2,25 = 31,9 \text{кН};$$

$$M_1^0 = V_B \cdot 5 = 22,6 \cdot 5 = 113 \text{кНм};$$

$$Q_1^0 = -V_B = -22,6 \text{кН}.$$

Зусилля у перерізі нескінченно близько нижче точки  $D$ :

$$M_{D,н} = M_D^0 = 86,96 \text{кНм};$$

$$Q_{D,н} = Q_D^0 \cos \varphi_D = 31,9 \cdot 0,83 = 26,48 \text{кН};$$

$$N_{D,н} = -Q_D^0 \sin \varphi_D = -31,9 \cdot 0,556 = -17,74 \text{кН}.$$

Зусилля у перерізі нескінченно вище затяжки:

$$M_{D,в} = M_D^0 = 86,96 \text{кНм};$$

$$Q_{D,в} = Q_D^0 \cdot \cos \varphi_D - N_{зат} \cdot \sin \varphi_D = 31,9 \cdot 0,83 - 55,33 \cdot 0,556 = -4,29 \text{кН};$$

$$N_{D,в} = -Q_D^0 \cdot \sin \varphi_D - N_{зат} \cdot \cos \varphi_D = -31,9 \cdot 0,556 - 55,33 \cdot 0,83 = \\ = -63,66 \text{кН}.$$

Зусилля у перерізі 1:

$$M_1 = M_1^0 - N \cdot y_1' = 113 - 55,33 \cdot 1,75 = 16,17 \text{кНм};$$

$$Q_1 = Q_1^0 \cdot \cos \varphi_1 - N_{зат} \cdot \sin \varphi_1 = -22,6 \cdot 0,894 - 55,33 \cdot (-0,447) = \\ = -4,53 \text{кН};$$

$$N_1 = -Q_1^0 \cdot \sin \varphi_1 - N_{зат} \cdot \cos \varphi_1 = 22,6 \cdot (-0,447) - 55,33 \cdot 0,894 = \\ = -59,57 \text{кН}.$$

**4.4.** Самостійно визначити внутрішні зусилля у перерізах арки (рис. 4.6,а), нескінченно близьких ліворуч та праворуч до точки прикладання зосередженої сили.

**4.5.** Обчислити зусилля у позначених на рисунку 4.7 стержнях ферми.

*Розв'язання.* Маємо тришарнірну арокну ферму. Неважко помітити, що при заданому вертикальному навантаженні горизонтальні реакції будуть однакові. Позначимо ці реакції  $H$ .

Визначаємо вертикальні реакції:

$$\sum M_A = 0; V_B \cdot 24 - F \cdot (12 + 16 + 20 + 24) = 0; \Rightarrow V_B = \frac{72F}{24} = 30 \text{кН};$$

$$\sum M_B = 0; F \cdot (4 + 8 + 12) - V_A = 0; \Rightarrow V_A = \frac{24F}{24} = 10кН.$$

Перевірка цих значень виконується:

$$\sum y = 0; V_A + V_B - 4F = 10 + 30 - 4 \cdot 10 = 0.$$

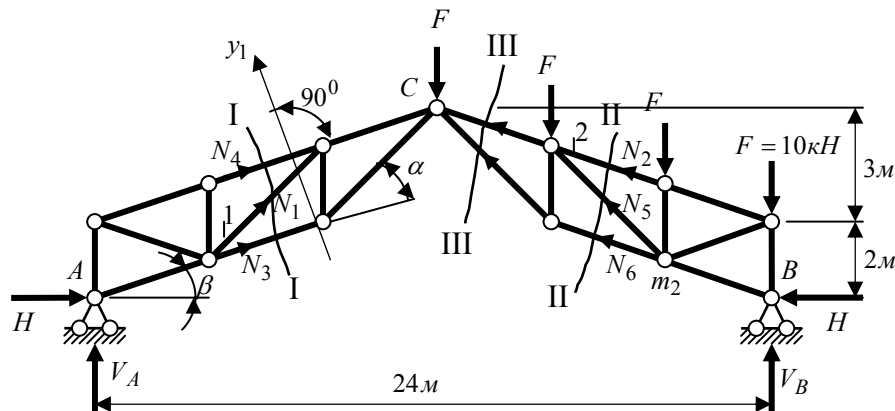


Рисунок 4.7

Для визначення горизонтальної реакції (розпору) проведемо переріз III-III і запишемо суму моментів правих сил відносно точки C - точки перетину розрізаних стержнів:

$$\sum M_C = 0; V_B \cdot 12 - F \cdot (4 + 8 + 12) - H \cdot 5 = 0; \Rightarrow$$

$$H = \frac{30 \cdot 12 - 10 \cdot 24}{5} = 24кН.$$

Перевіряємо розпір за сумою моментів лівих сил:

$$\sum M_C = 0; H \cdot 5 - V_A \cdot 12 = 24 \cdot 5 - 10 \cdot 12 = 0.$$

Для визначення зусилля у першому стержні проведемо переріз I-I через три стержні. Оскільки зусилля  $N_3, N_4$  паралельні одне одному, застосуємо спосіб проєкцій:

$$\sum y_1 = 0; V_A \cdot \cos \beta - H \cdot \sin \beta + N_1 \cdot \sin \alpha = 0.$$

З геометрії ферми обчислюємо кути нахилу стержнів та їх тригонометричні функції:

$$\sin \beta = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 12^2}} = 0,243; \cos \beta = \frac{12}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = 0,970; \beta = 14,04^\circ;$$

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right) - \beta = 22,83^\circ; \sin \alpha = 0,388; \cos \alpha = 0,922.$$

З рівняння рівноваги одержимо:

$$N_1 = \frac{-V_A \cos \beta + H \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{-10 \cdot 0,97 + 24 \cdot 0,243}{0,388} = -9,97кН.$$

Для визначення зусилля у другому стержні проведемо переріз II-II через три стержні. Застосуємо спосіб моментної точки, оскільки зусилля  $N_5, N_6$  перетинаються у точці  $m_2$ . Розглядаючи праву частину ферми, одержимо:

$$\sum M_{m_2} = 0; V_B \cdot 4 - F \cdot 4 - H \cdot 1 + N_2 \cdot h_2 = 0; \Rightarrow$$

$$N_2 = \frac{-30 \cdot 4 + 10 \cdot 4 + 24}{1,94} = -28,86 \text{ кН},$$

де  $h_2 = 2 \cdot \cos \beta = 1,94 \text{ м}$  - плече зусилля  $N_2$  відносно моментної точки  $m_2$ .

**4.6.** Самостійно обрати раціональні способи визначення зусиль в усіх стержнях ферми (рис. 4.7).

## 5 Визначення переміщень

Теоретичний матеріал викладено у главі 7 [1], у розділі 5 [2] та у главі 7 3

### Вправи

**5.1.** Знайти прогин посередині прогону балки постійної жорсткості  $EI$ , наведеної на рисунку 5.1,а.

*Розв'язання.* У результаті розрахунку балки на задане навантаження одержимо вантажну епюру згинаючих моментів  $M$  (рис. 5.1,б).

У допоміжному стані у середині прогону (т.  $K$ ) прикладаємо вертикальну силу  $F_K = 1$  (рис. 5.1,в). У результаті розрахунку допоміжного стану одержимо одиничну епюру згинаючих моментів  $\bar{M}$  (рис. 5.1,г).

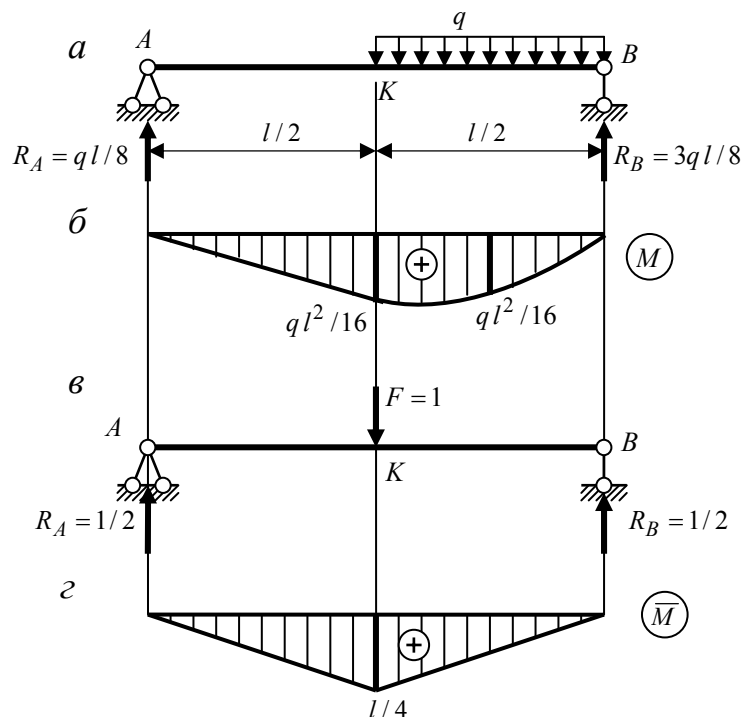


Рисунок 5.1

Для перемноження епюр балку необхідно розбити на дві ділянки:  $AK$  та  $KB$ .

На ділянці  $AK$  обидві епюри лінійні, отже можна застосувати правило Верещагіна. Оскільки обидві епюри лінійні і прості (для них відомі площа та положення центру ваги), будь-яку з них можна розташувати зверху. Візьмемо

верхньою вантажною епюрою (рис. 5.2,а), її площа  $\omega = \frac{h \cdot \frac{l}{2}}{2} = \frac{ql^2 \cdot l}{16 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{ql^3}{64}$ , а центр ваги розташований на відстані  $\frac{2}{3}$  довжини від лівого кінця. Ординату  $y_0$  під цим центром ваги необхідно узяти на нижній (обов'язково лінійній) – одиничній епюрі (рис. 5.2,а). Якщо відома відносна відстань  $\varepsilon$  ординати від вершини трикутника, її можна визначити за рисунком 5.2,в:  $y = \varepsilon h$ . У нашому випадку вона становить:  $y_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} = \frac{l}{6}$ .

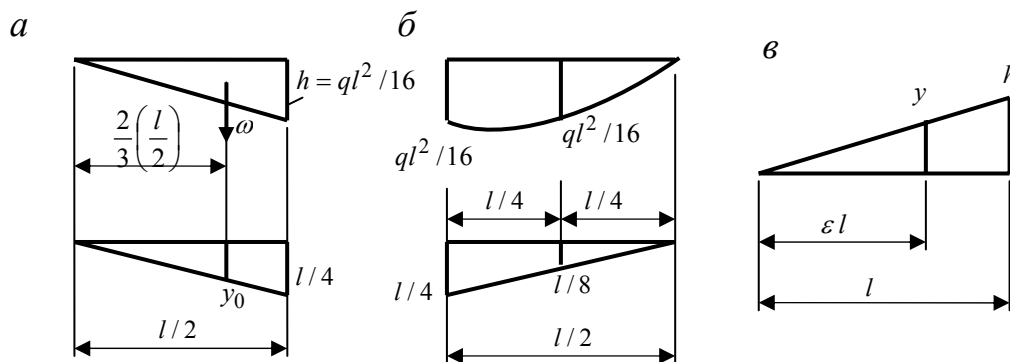


Рисунок 5.2

На ділянці *KB* вантажна епюра нелінійна (квадратна парабола), отже при застосуванні правила Верещагіна необхідно брати площу саме цієї епюри. Ця епюра не є стандартною квадратною параболою, оскільки її вершина знаходиться не на кінці ділянки. Це легко перевірити порівнявши значення ординати  $\frac{ql^2}{16}$  з тим значенням, яке повинно бути, якби вершина квадратної

параболи була у цій точці:  $\frac{q \left(\frac{l}{2}\right)^2}{8} = \frac{ql^2}{32}$  (тут  $\left(\frac{l}{2}\right)$  – довжина ділянки). У такому разі простіше для перемноження епюр скористатися формулою Сімпсона. За рисунком 5.2,б одержимо:  $\frac{l/2}{6} \left( \frac{ql^2}{16} \cdot \frac{l}{4} + 4 \cdot \frac{ql^2}{16} \cdot \frac{l}{8} + 0 \cdot 0 \right)$ .

Тепер можна одержати шукане переміщення:

$$\Delta_K = \frac{1}{EI} \cdot \frac{ql^3}{64} \cdot \frac{l}{6} + \frac{1}{EI} \cdot \frac{l}{12} \left( \frac{ql^3}{64} + \frac{ql^3}{32} \right) = \frac{5ql^4}{768EI}$$

**5.2.** Самостійно обчислити кут повороту середнього перерізу балки, наведеної у вправі 5.1.

5.3. Обчислити взаємний кут повороту перерізів у шарнірі  $C$  рами, наведеної на рисунку 5.3,а при  $EI = 50000 \text{кНм}^2$ .

Розв'язання. Виконуємо розрахунок рами на задане навантаження. Опорні реакції:

$$\sum M_C = 0; \Rightarrow R_B = \frac{(q \cdot 3) \cdot 1,5}{4} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 1,5}{4} = 6,75 \text{кН};$$

$$\sum x = 0; \Rightarrow H_A = F - R_B = 15 - 6,75 = 8,25 \text{кН};$$

$$\sum y = 0; \Rightarrow V_A = q \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18 \text{кН};$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \Rightarrow M_A &= -F \cdot 3 + R_B \cdot 3 + (q \cdot 3) \cdot 4,5 = \\ &= -15 \cdot 3 + 6,75 \cdot 3 + 6 \cdot 3 \cdot 4,5 = 56,25 \text{кНм}. \end{aligned}$$

Перевіряємо реакції:

$$\sum M_C = M_A - F \cdot 4 - V_A \cdot 3 + H_A \cdot 7 = 56,25 - 15 \cdot 4 - 18 \cdot 3 + 8,25 \cdot 7 = 0.$$

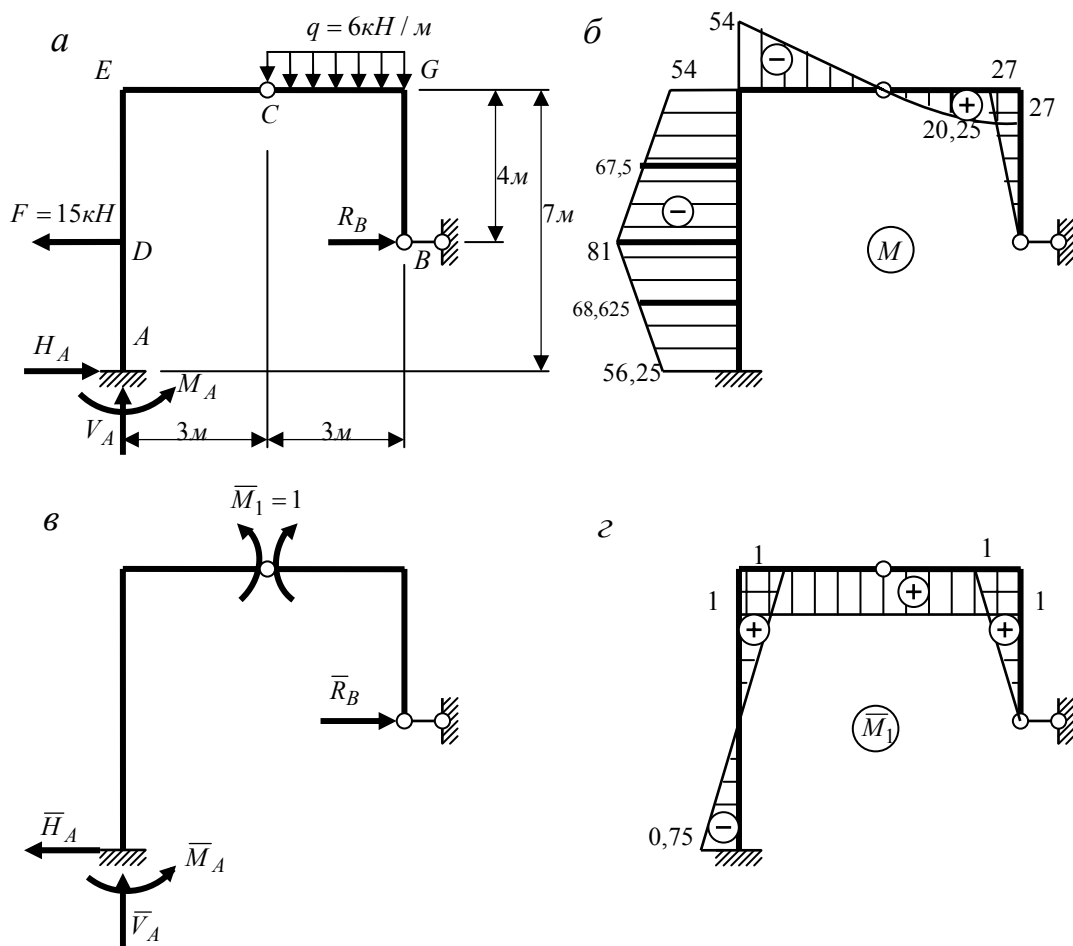


Рисунок 5.3

Розбиваємо раму на ділянки:  $AD, DE, EC, CG, GB$  і, обчислюючи згинаючі моменти у характерних перерізах, будемо вантажну епюру (рис. 5.3,б).

Обираємо допоміжний стан рами, для чого по обидва боки шарніру  $C$  прикладемо спрямовані назустріч один одному зосереджені моменти  $\bar{M}_1 = 1$  (рис. 5.3,в).

Визначаємо реакції опор у допоміжному стані:

$$\sum_{\text{прав}} M_C = 0; \bar{R}_B \cdot 4 - \bar{M}_1 = 0; \Rightarrow \bar{R}_B = \frac{\bar{M}_1}{4} = 0,25;$$

$$\sum x = 0; \Rightarrow \bar{H}_A = \bar{R}_B = 1; \quad \sum y = 0; \Rightarrow \bar{V}_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0; -\bar{R}_B \cdot 3 + \bar{M}_A = 0; \Rightarrow \bar{M}_A = 0,75.$$

Розбиваючи раму на такі самі ділянки, як і при розрахунку на задане навантаження, обчислюємо згинаючі моменти у допоміжному стані. За цими результатами на рисунку 5.3,г побудована епюра одиничних моментів  $\bar{M}_1$ .

Обчислюємо переміщення, перемножуючи епюри  $M$  та  $\bar{M}_1$ . Розглядаємо ділянки починаючи від точки  $A$  у послідовності за годинниковою стрілкою:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \sum \frac{1}{EI} \int_{(i)} M \bar{M}_1 dx &= \frac{1}{EI} \left( \frac{0,75 \cdot 3}{2} \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 56,25 + \frac{1}{3} \cdot 81 \right) - \\ &- \frac{1}{EI} \left( \frac{1 \cdot 4}{2} \right) \left( \frac{1}{3} \cdot 81 + \frac{2}{3} \cdot 54 \right) - \frac{1}{EI} \left( \frac{54 \cdot 3}{2} \right) \cdot 1 + \frac{1}{EI} \frac{3}{6} (0 \cdot 1 + 4 \cdot 20,25 \cdot 1 + 27 \cdot 1) + \\ &+ \frac{1}{EI} \left( \frac{27 \cdot 4}{2} \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{1}{EI} \cdot (-44,44) = -\frac{44,44}{50000} = -0,000889 \text{ рад} = -0,051^\circ. \end{aligned}$$

На першій, другій, третій та п'ятій ділянках застосовано перемноження епюр за правилом Верещагіна, на четвертій – за формулою Сімпсона. Для визначення ординати  $y_0$  у епюрі-трапеції (перша та друга ділянки) остання розбивається на два трикутника.

За результатами розрахунків робимо висновок, що у шарнірі  $C$  правий переріз повертається відносно лівого проти годинникової стрілки (у напрямку, протилежному напрямку  $\bar{M}_1$ ) на кут  $0,051^\circ$ .

**5.4.** У попередній рамі обчислити вертикальне переміщення перерізу  $B$ .

*Розв'язання.* Розрахунок на задане навантаження виконано у попередній вправі: епюра  $M$  побудована на рисунку 5.3,б.

Обираємо новий допоміжний стан. Для цього у точці  $B$  прикладаємо одиничну вертикальну силу  $\bar{F}_2 = 1$  (рис. 5.4,а).

Виконуємо розрахунок допоміжного стану. Пропускаючи розрахунки наведемо одиничну епюру  $\bar{M}_2$  на рисунку 5.4,б.



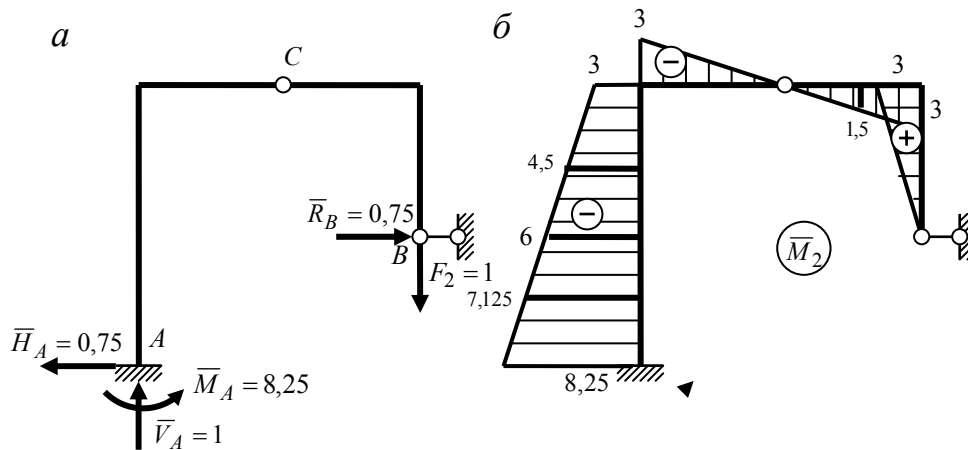


Рисунок 5.4

Обчислюємо переміщення перемножуючи епюри  $M$  (рис. 5.3,б) та  $\bar{M}_2$  (рис. 5.4,б):

$$\begin{aligned} \Delta_2 = y_B &= \sum \frac{1}{EI} \int M \bar{M}_2 dx = \frac{1}{EI} \frac{3}{6} (56,25 \cdot 8,25 + 4 \cdot 68,625 \cdot 7,125 + 81 \cdot 6) + \\ &+ \frac{1}{EI} \frac{4}{6} (81 \cdot 6 + 4 \cdot 67,5 \cdot 4,5 + 54 \cdot 3) + \frac{1}{EI} \left( \frac{54 \cdot 3}{2} \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \\ &+ \frac{1}{EI} \frac{3}{6} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 20,25 \cdot 1,5 + 27 \cdot 3) + \frac{1}{EI} \left( \frac{27 \cdot 4}{2} \right) \left( \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{3066}{EI} = \\ &= \frac{3066}{50000} = 0,061 \text{ м} = 6,1 \text{ см}. \end{aligned}$$

Отже, точка  $B$  зміщується від заданого навантаження донизу на  $6,1$  см.

**5.5.** Самостійно визначити горизонтальне переміщення точки  $E$  та вертикальне точки  $C$  рами, розглянутої у вправі 5.3.

**5.6.** Обчислити поворот стержня 1-5 та вертикальне переміщення вузла 3 ферми, наведеної на рисунку 5.5,а. Жорсткість усіх стержнів прийняти однаковою -  $EA$ .

*Розв'язання.* Розраховуючи ферму на задане навантаження, одержимо зусилля, які наведені на стержнях на рисунку 5.5, б.

Для визначення кута повороту необхідно прикласти до стержня одиничний момент, а потім розподілити цей момент на вузли на кінцях стержня. У результаті одержимо допоміжний стан, наведений на рисунку 5.5,в.

Зусилля у допоміжному стані наведені на стержнях ферми (рис. 5.5,г).

Тепер можна одержати шуканий поворот стержня 1-5 за формулою Мора:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \theta_{1-5} &= \sum \frac{N \bar{N}_1 l}{EA} = \frac{1}{EA} [3 \cdot 0,167 \cdot 3 + 3 \cdot 0,083 \cdot 3 + 3 \cdot 0,083 \cdot 3 + \\ &+ 5 \cdot 0,278 \cdot 5 + 3 \cdot 0,167 \cdot 3 + 5 \cdot 0,139 \cdot 5] = \frac{143,93}{EA} (\text{рад}). \end{aligned}$$

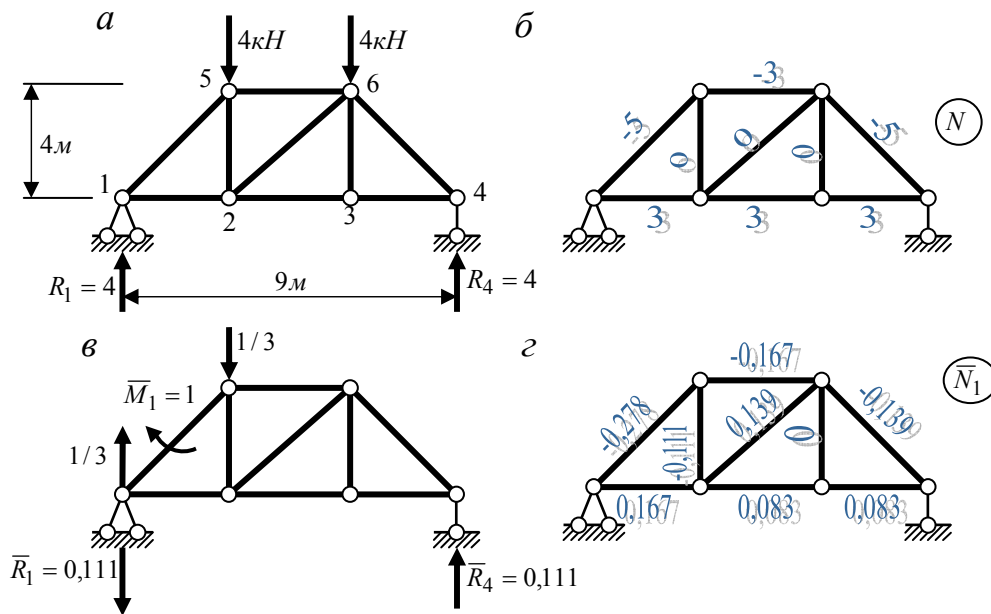


Рисунок 5.5

Отже, стержень 1-5 повертається за годинниковою стрілкою на кут  $\frac{143,93}{EA}$  рад.

Вертикальне переміщення вузла 3 обчислити самостійно.

5.7. Обчислити поворот стержня 1-5 та вертикальне переміщення вузла 3 ферми, наведеної на рисунку 5.5,а при зміщенні лівої опори донизу на 3см, а правої – донизу на 1,5см.

Розв'язання. Допоміжний стан для визначення кута повороту стержня 1-5 наведений на рисунку 5.5,в. Користуючись значеннями реакцій, показаних на рисунку 5.5,в, обчислимо шуканий кут повороту:

$$\Delta_1 = \theta_{1-5} = \sum \bar{R}_i \cdot c_i = -0,111 \cdot 3 + 0,111 \cdot 1,5 = -0,167 \text{ рад} = -9,5^\circ.$$

Отже, при заданому осіданні опор стержень 1-5 повернеться проти годинникової стрілки на кут  $9,5^\circ$ .

Вертикальне переміщення вузла 3 обчислити самостійно.

5.8. Температура усередині рами (рис. 5.6,а) становить  $+23^\circ\text{C}$ , а зовні  $-19^\circ\text{C}$ . Знайти горизонтальне переміщення правого опорного перерізу рами, якщо температура при зведенні рами становила усередині та зовні  $+6^\circ\text{C}$ . Стійки рами виготовлені з двотавру №30, ригель – з двотавру №40.

Розв'язання. Обираємо допоміжний стан рами, для чого прикладаємо на правій опорі одиничну горизонтальну силу (рис. 5.6,б). Розраховуючи раму у допоміжному стані, будуємо одиничну епюру згинаючих моментів (рис. 5.6,в).

При побудованні епюри  $\bar{M}_1$  нижніми вважалися внутрішні шари стержнів, отже, зміна температури нижніх шарів стержнів рами становить:

$$t_1 = 23 - 6 = 17^\circ\text{C}. \text{ Зміна температури зовнішніх шарів: } t_2 = -19 - 6 = -25^\circ\text{C}.$$

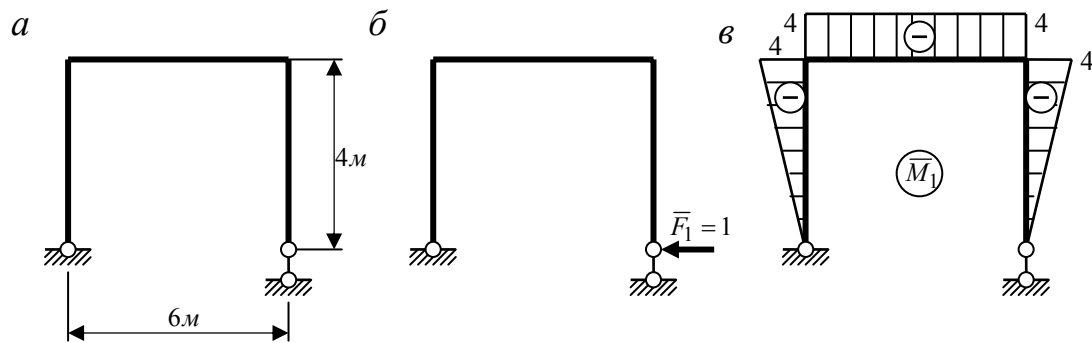


Рисунок 5.6

Розбиваючи раму на три ділянки-стержня, вздовж яких висота перерізу, зміни температури та матеріал однакові, обчислюємо шукане переміщення:

$$\Delta_1 = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \omega_{M_1} = 12 \cdot 10^{-6} \left( -\frac{17 + 25}{0,3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} - \frac{17 + 25}{0,4} \cdot 4 \cdot 6 - \frac{17 + 25}{0,3} \cdot 2 \right) = -0,057 \text{ м} = -5,7 \text{ см.}$$

Отже від заданої температурної дії т. В зміщується праворуч на 5,7 см.

## 6 Метод скінченних елементів

Теоретичний матеріал викладено у розділі 6 [2] та у главі 9 3.

*Вправи*

**6.1.** Скласти вектор вузлових сил для рами, наведеної на рис. 6.1,а.

*Розв'язання.* Перш за все розіб'ємо раму на скінченні елементи та пронумеруємо вузли (рис. 6.1,а). Нагадаємо, що в якості вузлів беруться точки переламу або розгалуження осей, точки прикладання зосереджених сил та моментів, точки стрибкоподібної зміни жорсткості стержнів та точки стрибкоподібної зміни інтенсивності розподіленого навантаження.

Призначаємо переміщення вузлів (рис. 6.1,б). Для цього у кожному вузлі спрямовуємо горизонтальне та вертикальне переміщення у напрямку осей відповідно  $x$  та  $y$ , поворот спрямовуємо за годинниковою стрілкою. Нумери цих переміщень призначаємо у названій послідовності розглядаючи вузли у порядку їх нумерації. Переміщення вузлів 5 та 6 не показані тому, що вони відсутні у цих опорних закріпленнях.

Відповідно до переміщення вузлів спрямовуємо та нумеруємо вузлові сили (рис. 6.1,в).

Визначаємо значення вузлових сил. Навантаження, прикладене до стержнів, розподіляємо у вузли відповідно до схеми, наведеної на рисунку 6.2.

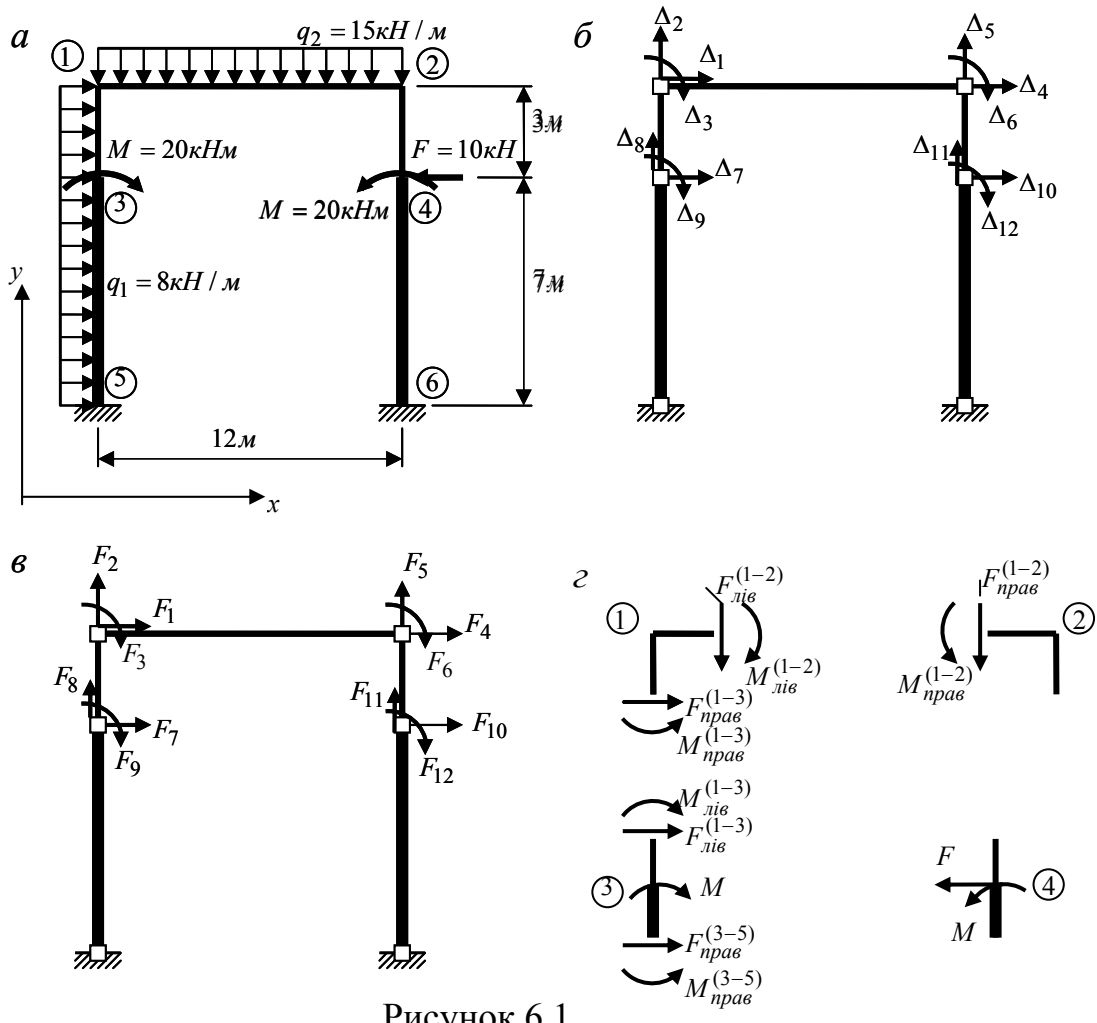


Рисунок 6.1

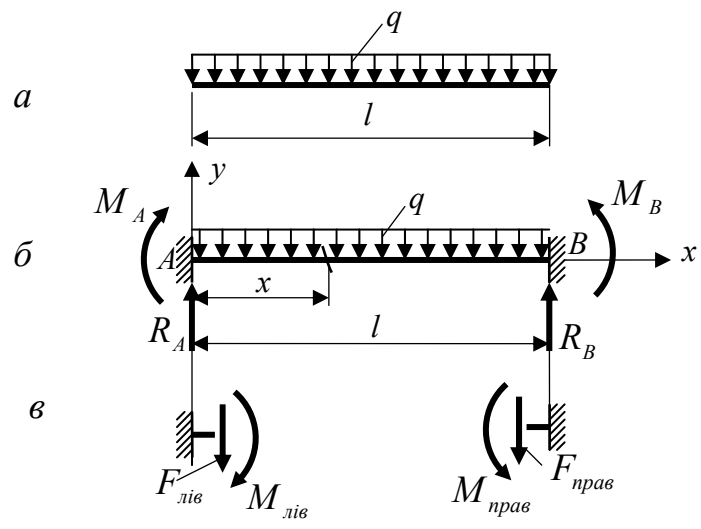


Рисунок 6.2

Значення сил , що діють на кінці стержня, тобто на відповідні вузли на цих кінцях такі:

$$F_{лів} = F_{прав} = \frac{ql}{2}; M_{лів} = M_{прав} = \frac{ql^2}{12}.$$

Вирізаючи вузли рами (рис. 6.1,з), прикладаємо вузлові навантаження та сили, що передаються від стержнів. Порівнюючи сили на рисунку 6.1,в з силами на рисунку 6.1,з, обчислюємо елементи вектора вузлових сил:

$$F_1 = F_{\text{праву}}^{(1-3)} = \frac{q_1 l_{(1-3)}}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12 \text{кН};$$

$$F_2 = -F_{\text{лів}}^{(1-2)} = -\frac{q_2 l_{(1-2)}}{2} = -\frac{15 \cdot 12}{2} = -90 \text{кН};$$

$$F_3 = M_{\text{лів}}^{(1-2)} - M_{\text{прав}}^{(1-3)} = \frac{q_2 l_{(1-2)}^2}{12} - \frac{q_1 l_{(1-3)}^2}{12} = \frac{15 \cdot 12^2}{12} - \frac{8 \cdot 3^2}{12} = 174 \text{кНм};$$

$$F_4 = 0; F_5 = -F_{\text{прав}}^{(1-2)} = -\frac{q_2 l_{(1-2)}}{2} = -\frac{15 \cdot 12}{2} = -90 \text{кН};$$

$$F_6 = -M_{\text{прав}}^{(1-2)} = -\frac{q_2 l_{(1-2)}^2}{12} = -\frac{15 \cdot 12^2}{12} = -180 \text{кНм};$$

$$F_7 = F_{\text{лів}}^{(1-3)} + F_{\text{прав}}^{(3-5)} = \frac{q_2 l_{(1-3)}}{2} + \frac{q_1 l_{(3-5)}}{2} = \frac{8 \cdot 3}{2} + \frac{8 \cdot 7}{2} = 40 \text{кН};$$

$$F_8 = 0; F_9 = M_{\text{лів}}^{(1-3)} + M - M_{\text{прав}}^{(3-5)} = \frac{q_1 l_{(1-3)}^2}{12} + 20 - \frac{q_1 l_{(3-5)}^2}{12} =$$

$$= \frac{8 \cdot 3^2}{12} + 20 - \frac{8 \cdot 7^2}{12} = -6,67 \text{кНм};$$

$$F_{10} = -F = -10 \text{кН}; F_{11} = 0; F_{12} = -M = -20 \text{кНм}.$$

За цими даними складаємо вектор вузлових сил:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 12 \\ -90 \\ 174 \\ 0 \\ -90 \\ -180 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \\ -6,67 \\ -10 \\ -20 \end{bmatrix}.$$

**6.2.** Виконати розрахунок рами (рис. 6.3) методом скінченних елементів. Чисельне співвідношення між жорсткостями на розтяг-стиск та згин становить  $EA = 10EI$ . Жорсткість ригеля у чотири рази більша жорсткості стояків.

*Розв'язання.* Нумерацію вузлів показано на рисунку 6.3, переміщення вузлів та вузлові навантаження – відповідно на рисунках 6.4 та 6.5. Оскільки

переміщення опорних вузлів 4 та 5 відсутні, вузлові сили вздовж цих переміщень на рисунку 6.5 відсутні. Також відсутня узагальнена сила (момент), що діє вздовж повороту вузла 2, оскільки у цьому вузлі стоїть шарнір.

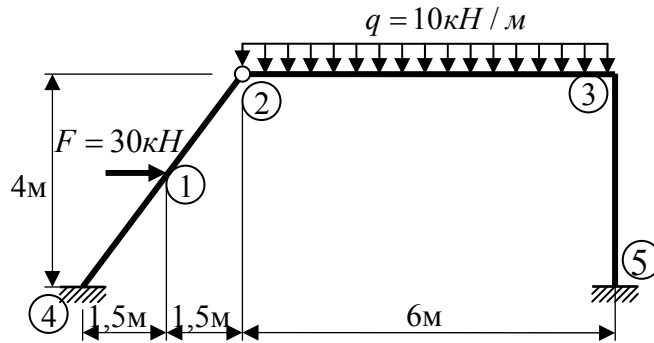


Рисунок 6.3

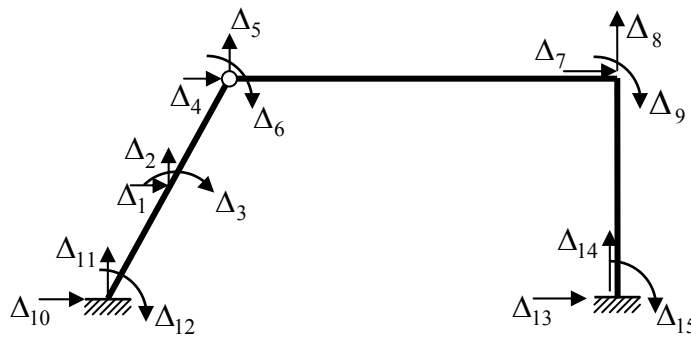


Рисунок 6.4

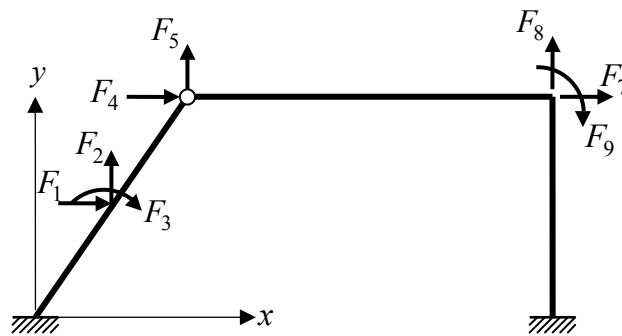


Рисунок 6.5

Складаємо вектор вузлових навантажень. Вектор навантажень для вузла 1 буде такий:

$$\vec{F}^1 = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для отримання складових векторів навантажень у вузлах 2 та 3 розглянемо стержень 2-3 як балку (рис. 6.6) під дією розподіленого навантаження.

Реакції балки протилежні за напрямком силам, які діють на вузли на кінцях стержня (рис. 6.7). Отже маємо:

$$\vec{F}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -22,5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{F}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -37,5 \\ -45 \end{bmatrix}.$$

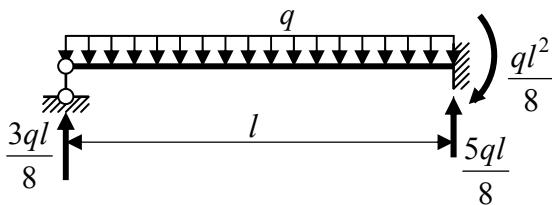


Рисунок 6.6

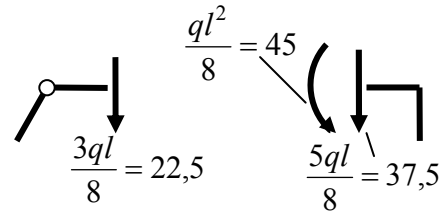


Рисунок 6.7

Елементи векторів  $\vec{F}^1, \vec{F}^2, \vec{F}^3, \vec{F}^4$  складають вектор  $\vec{F}$  вузлових навантажень рами. Виключаючи з цього вектора елементи, що відповідають нульовим переміщенням  $\Delta_6, \Delta_{10}, \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{14}, \Delta_{15}, \Delta_{16}$  у напрямку відсутнього повороту шарніра та опорних закріплень у вузлах 3, 4, остаточно отримуємо:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{F}^1 \\ \vec{F}^2 \\ \vec{F}^3 \\ \vec{F}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -22,5 \\ 0 \\ 0 \\ -37,5 \\ -45 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ -22,5 \\ 0 \\ -37,5 \\ -45 \end{bmatrix}.$$

Матриці жорсткості обчислюємо починаючи з стержня 1-4. Для нього маємо обидва жорсткі кінці, жорсткості: на згин  $EI$ , на розтяг  $EA=10EI$  та геометричні характеристики:

$$\Delta x = 0 - 1,5 = -1,5; \quad \Delta y = 0 - 2 = -2; \quad l = \sqrt{(-1,5)^2 + (-2)^2} = 2,5;$$

$$\sin \alpha = \frac{-2}{2,5} = -0,8; \quad \cos \alpha = \frac{-1,5}{2,5} = -0,6;$$

Матриця жорсткості буде такою:

$$\vec{K}_{1-4} = EI \begin{bmatrix} 1,932 & 1,551 & -0,768 & -1,932 & -1,551 & -0,768 \\ 1,551 & 2,836 & 0,576 & -1,551 & -2,836 & 0,576 \\ -0,768 & 0,576 & 1,6 & 0,768 & -0,576 & 0,8 \\ -1,932 & -1,551 & 0,768 & 1,932 & 1,551 & 0,768 \\ -1,551 & -2,836 & -0,576 & 1,551 & 2,836 & -0,576 \\ -0,768 & 0,576 & 0,8 & 0,768 & -0,576 & 1,6 \end{bmatrix}.$$

Стержень 1-2 має жорсткий кінець на початку ( вузол 1) і шарнір у кінці (вузол 2). Жорсткість та довжина стержня такі самі, як у стержня 1-4,  $\sin \alpha = 0,8$ ;  $\cos \alpha = 0,6$ . Складаємо матрицю жорсткості:

$$\vec{K}_{1-2} = EI \begin{bmatrix} 1,563 & 1,828 & 0,384 & -1,563 & -1,828 & 0 \\ 1,828 & 2,629 & -0,288 & -1,828 & -2,629 & 0 \\ 0,384 & -0,288 & 1,2 & -0,384 & 0,288 & 0 \\ -1,563 & -1,828 & -0,384 & 1,563 & 1,828 & 0 \\ -1,828 & -2,629 & 0,288 & 1,828 & 2,629 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для стержня 2-3 з шарніром на початку (вузол 2) та затисненням у кінці (вузол 3) маємо: жорсткості на згин  $4EI$ , на розтяг  $-4EA=40EI$ ;  $\Delta_x = 6$ ;  $\Delta_y = 0$ ;  $l = 6$ ;  $\sin \alpha = 0$ ;  $\cos \alpha = 1$ .

Обчислюємо матрицю жорсткості:

$$\vec{K}_{2-3} = EI \begin{bmatrix} 6,6667 & 0 & 0 & -6,6667 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0556 & 0 & 0 & -0,0556 & -0,3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6,6667 & 0 & 0 & 6,6667 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0556 & 0 & 0 & 0,0556 & 0,3333 \\ 0 & -0,3333 & 0 & 0 & 0,3333 & 2 \end{bmatrix}.$$

Для стержня 3-5 з обома жорсткими кінцями маємо:  $\sin \alpha = -1$ ;  $\cos \alpha = 0$ ;  $l = 4$ . Складаємо матрицю жорсткості:

$$\vec{K}_{3-5} = EI \begin{bmatrix} 0,1875 & 0 & -0,375 & -0,1875 & 0 & -0,375 \\ 0 & 2,5 & 0 & 0 & -2,5 & 0 \\ -0,375 & 0 & 1 & 0,375 & 0 & 0,5 \\ -0,1875 & 0 & 0,375 & 0,1875 & 0 & 0,375 \\ 0 & -2,5 & 0 & 0 & 2,5 & 0 \\ -0,375 & 0 & 0,5 & 0,375 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Додаючи один до одного відповідні елементи матриць жорсткості стержнів, одержимо матрицю жорсткості усєї рами:

$$\vec{K} = EI \begin{bmatrix} 3,495 & 3,379 & -0,384 & -1,563 & -1,828 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,379 & 5,455 & 0,288 & -1,828 & -2,629 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,384 & 0,288 & 2,8 & -0,384 & 0,288 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,563 & -1,828 & -0,384 & 8,2297 & 1,828 & 0 & -6,667 & 0 & 0 \\ -1,828 & -2,629 & 0,288 & 1,828 & 2,6846 & 0 & 0 & -0,0556 & -0,3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6,6667 & 0 & 0 & 6,8545 & 0 & -0,375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0556 & 0 & 0 & 2,5556 & 0,3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,3333 & 0 & -0,375 & 0,3333 & 3 \end{bmatrix}.$$

Викреслюючи з цієї матриці шостий рядок та стовпчик, що відповідають неіснуючому повороту вузла 2, остаточно маємо:



$$\bar{K} = EI \begin{bmatrix} 3,495 & 3,379 & -0,384 & -1,563 & -1,828 & 0 & 0 & 0 \\ 3,379 & 5,455 & 0,288 & -1,828 & -2,629 & 0 & 0 & 0 \\ -0,384 & 0,288 & 2,8 & -0,384 & 0,288 & 0 & 0 & 0 \\ -1,563 & -1,828 & -0,384 & 8,2297 & 1,828 & -6,667 & 0 & 0 \\ -1,828 & -2,629 & 0,288 & 1,828 & 2,6846 & 0 & -0,0556 & -0,3333 \\ 0 & 0 & 0 & -6,667 & 0 & 6,8545 & 0 & -0,375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0556 & 0 & 2,5556 & 0,3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,3333 & -0,375 & 0,3333 & 3 \end{bmatrix}$$

Далі отримуємо розв'язок рівняння рівноваги вузлів

$$\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \Delta_9 \end{bmatrix} = \bar{K}^{-1} \cdot \bar{F} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 53,14 \\ -44,03 \\ 34,49 \\ 99,16 \\ -88,23 \\ 95,84 \\ -15,14 \\ -11,14 \end{bmatrix}$$

Складаємо матриці перетворення переміщень кінців вузлів у зусилля на кінцях стержнів:

$$\bar{h}_{1-4} = EI \begin{bmatrix} -2,4 & -3,2 & 0 & 2,4 & 3,2 & 0 \\ 0,6144 & -0,4608 & -0,96 & -0,6144 & 0,4608 & -0,96 \\ -0,768 & 0,576 & 1,6 & 0,768 & -0,576 & 0,8 \\ 2,4 & 3,2 & 0 & -2,4 & -3,2 & 0 \\ -0,6144 & 0,4608 & 0,96 & 0,6144 & -0,4608 & 0,96 \\ -0,768 & 0,576 & 0,8 & 0,768 & -0,576 & 1,6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{h}_{1-2} = EI \begin{bmatrix} 2,4 & 3,2 & 0 & -2,4 & -3,2 & 0 \\ -0,1526 & 0,1152 & -0,48 & 0,1526 & -0,1152 & 0 \\ 0,384 & -0,288 & 1,2 & -0,384 & 0,288 & 0 \\ -2,4 & -3,2 & 0 & 2,4 & 3,2 & 0 \\ 0,1526 & -0,1152 & 0,48 & -0,1526 & 0,1152 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{h}_{2-3} = EI \begin{bmatrix} 6,6667 & 0 & 0 & -6,6667 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0556 & 0 & 0 & -0,0556 & -0,3333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6,6667 & 0 & 0 & 6,6667 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0556 & 0 & 0 & 0,0556 & 0,3333 \\ 0 & -0,3333 & 0 & 0 & 0,3333 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{h}_{3-5} = EI \begin{bmatrix} 0 & -2,5 & 0 & 0 & 2,5 & 0 \\ 0,1875 & 0 & -0,375 & -0,1875 & 0 & -0,375 \\ -0,375 & 0 & 1 & 0,375 & 0 & 0,5 \\ 0 & 2,5 & 0 & 0 & -2,5 & 0 \\ -0,1875 & 0 & 0,375 & 0,1875 & 0 & 0,375 \\ -0,375 & 0 & 0,5 & 0,375 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Складаємо вектори зусиль на кінцях стержнів від розподіленого навантаження на них:

$$\bar{q}'_{1-4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{q}'_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{q}'_{2-3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 22,5 \\ 0 \\ 0 \\ 37,5 \\ 45 \end{bmatrix}; \quad \bar{q}'_{3-5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Формуємо вектори переміщень кінців стержнів у глобальній системі координат:

$$\bar{\delta}_e = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix}; \quad \bar{\delta}_{1-4} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_{10} \\ \Delta_{11} \\ \Delta_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 53,14 \\ -44,03 \\ 34,49 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{\delta}_{1-2} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 53,14 \\ -44,03 \\ 34,49 \\ 99,16 \\ -88,23 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\delta}_{2-3} = \begin{bmatrix} \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \Delta_9 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 99,16 \\ -88,23 \\ 0 \\ 95,84 \\ -15,14 \\ -11,14 \end{bmatrix}; \quad \bar{\delta}_{3-5} = \begin{bmatrix} \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \Delta_9 \\ \Delta_{16} \\ \Delta_{17} \\ \Delta_{18} \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 95,84 \\ -15,84 \\ -11,14 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Обчислюємо зусилля на кінцях стержнів:

$$\bar{S}_{1-4} = \bar{h}_{1-4} \bar{\delta}_{1-4} + \bar{q}'_{1-4} = \begin{bmatrix} 13,36 \\ 19,83 \\ -10,99 \\ -13,36 \\ -19,83 \\ -38,58 \end{bmatrix}; \quad \bar{S}_{1-2} = \bar{h}_{1-2} \bar{\delta}_{1-2} + \bar{q}'_{1-2} = \begin{bmatrix} 30,99 \\ -4,44 \\ 10,99 \\ -30,99 \\ 4,44 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{S}_{2-3} = \bar{h}_{2-3} \bar{\delta}_{2-3} + \bar{q}'_{2-3} = \begin{bmatrix} 22,13 \\ 22,15 \\ 0 \\ -22,13 \\ 37,85 \\ 47,08 \end{bmatrix}; \quad \bar{S}_{3-5} = \bar{h}_{3-5} \bar{\delta}_{3-5} + \bar{q}_{3-5} = \begin{bmatrix} 37,85 \\ 22,15 \\ -47,08 \\ -37,85 \\ -22,15 \\ -41,51 \end{bmatrix}.$$

За результатами розрахунків на рисунках 6.8...6.10 побудовано епюри внутрішніх зусиль.

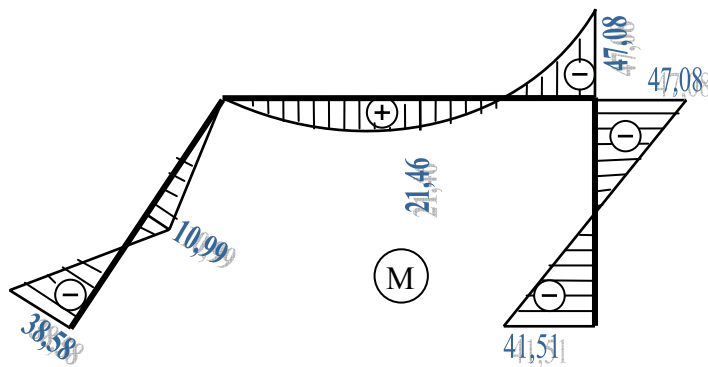


Рисунок 6.8

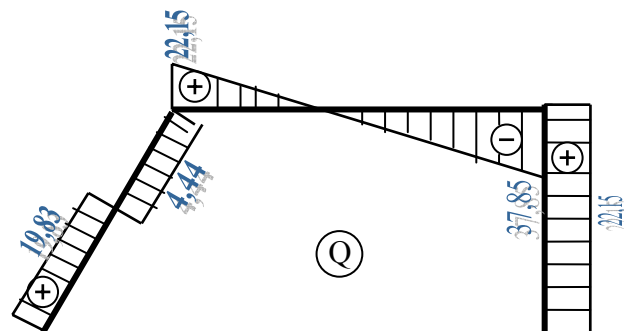


Рисунок 6.9

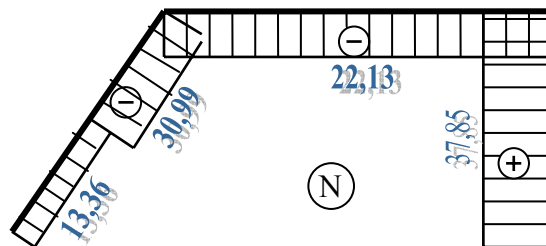


Рисунок 6.10

При побудові епюр слід пам'ятати, що зусилля отримані у локальній системі координат.

**6.3.** Виконати розрахунок ферми (рис. 6.11) методом скінченних елементів. Жорсткість усіх стержнів прийняти однаковою -  $EA$ .

*Розв'язання.* Пронумеруємо вузли як показано на рисунку 6.11 і покажемо переміщення вузлів (рис. 6.12).

Враховуючи, що переміщення  $\Delta_5 = \Delta_6 = \Delta_7 = \Delta_8 = 0$ , складемо вектор вузлових переміщень та відповідний вектор вузлових сил:

$$\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

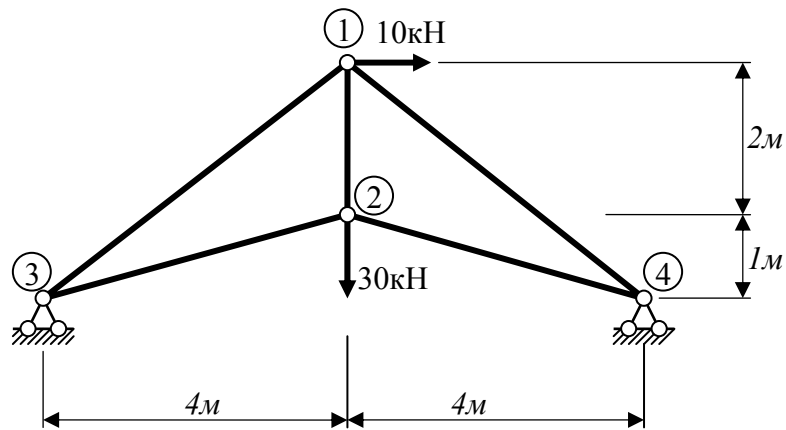


Рисунок 6.11

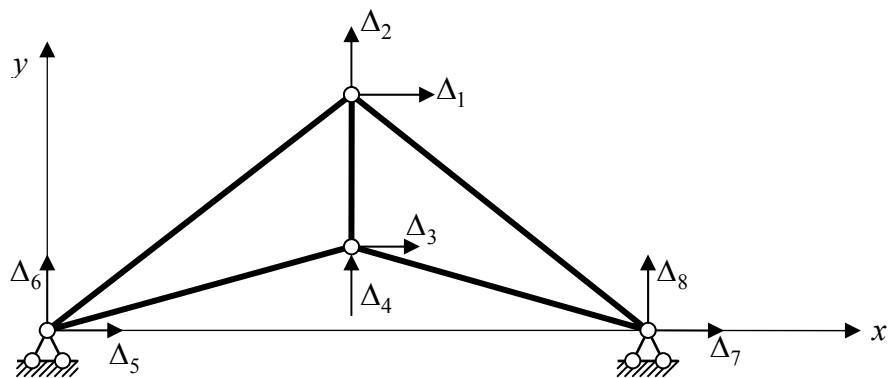


Рисунок 6.12

Далі формуємо матриці жорсткості окремих елементів ферми. Стержень 1-3 (рис. 6.13, а).

$$\Delta x = 0 - 4 = -4\text{ м}; \quad \Delta y = 0 - 3 = -3\text{ м}; \quad l = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5\text{ м};$$

$$\sin \alpha = \frac{-4}{5} = -0,8; \quad \cos \alpha = \frac{-3}{5} = -0,6.$$

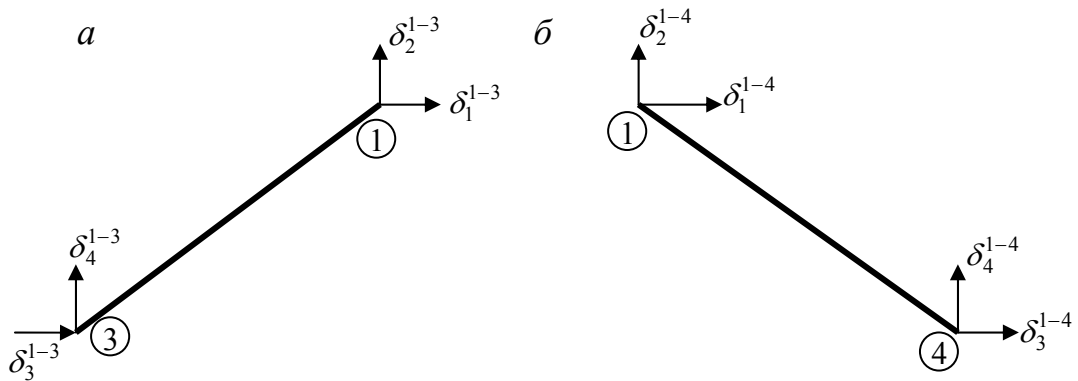


Рисунок 6.13

Зусилля у статично невизначуваній системі не залежать від абсолютного значення жорсткості елементів. Отже за умови постійної жорсткості приймемо для зручності  $EI=1$  і одержимо матрицю жорсткості стержня 1-3 у глобальній системі координат:

$$\vec{K}_{1-3} = \begin{bmatrix} 0,128 & 0,096 & -0,128 & -0,096 \\ 0,096 & 0,072 & -0,096 & -0,072 \\ -0,128 & -0,096 & 0,128 & 0,096 \\ -0,096 & -0,072 & 0,096 & 0,072 \end{bmatrix}$$

Стержень 1-4 (рис. 6.13, б).

$$\Delta x = 8 - 4 = 4\text{ м}; \Delta y = 0 - 3 = -3\text{ м};$$

$$l = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = 5\text{ м};$$

$$\sin \alpha = \frac{-3}{5} = -0,6; \cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Рисунок 6.14

$$\vec{K}_{1-4} = \begin{bmatrix} 0,128 & -0,096 & -0,128 & 0,096 \\ -0,096 & 0,072 & 0,096 & -0,072 \\ -0,128 & 0,096 & 0,128 & -0,096 \\ 0,096 & -0,072 & -0,096 & 0,072 \end{bmatrix}$$

Стержень 1-2 (рис. 6.14).

$$\Delta x = 4 - 4 = 0; \Delta y = 1 - 3 = -2\text{ м};$$

$$l = \sqrt{0 + (-2)^2} = 2\text{ м};$$

$$\sin \alpha = \frac{-2}{2} = -1; \cos \alpha = \frac{0}{2} = 0.$$

$$\vec{K}_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

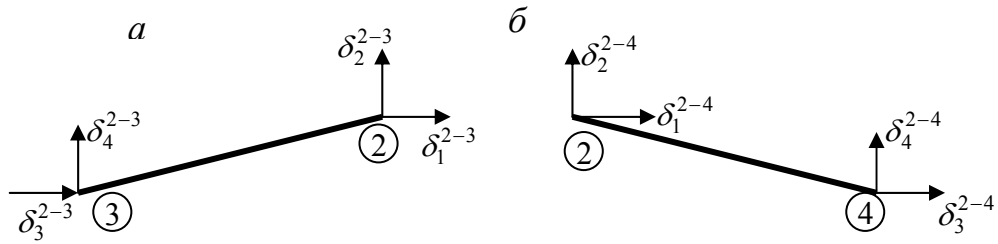


Рисунок 6.15

Стержень 2-3 (рис. 6.15, а).

$$\Delta x = 0 - 4 = -4\text{м}; \Delta y = 0 - 1 = -1\text{м}; l = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = 4,123\text{м};$$

$$\sin\alpha = \frac{-1}{4,123} = -0,2425; \cos\alpha = \frac{-4}{4,123} = -0,9701.$$

$$\vec{K}_{2-3} = \begin{bmatrix} 0,2286 & 0,05706 & -0,2286 & -0,05706 \\ 0,05706 & 0,01426 & -0,05706 & -0,01426 \\ -0,2286 & -0,05706 & 0,2286 & 0,05706 \\ -0,05706 & -0,01426 & 0,05706 & 0,01426 \end{bmatrix}.$$

Стержень 2-4 (рис. 6.15, б).

$$\Delta x = 8 - 4 = 4\text{м}; \Delta y = 0 - 1 = -1\text{м}; l = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = 4,123\text{м};$$

$$\sin\alpha = \frac{-1}{4,123} = -0,2425; \cos\alpha = \frac{4}{4,123} = 0,9701;$$

$$\vec{K}_{2-4} = \begin{bmatrix} 0,2286 & -0,05706 & -0,2286 & 0,05706 \\ -0,05706 & 0,01426 & 0,05706 & -0,01426 \\ -0,2286 & 0,05706 & 0,2286 & -0,05706 \\ 0,05706 & -0,01426 & -0,05706 & 0,01426 \end{bmatrix}.$$

Далі обчислюємо елементи матриці жорсткості ферми:

$$K_{11} = K_{11}^{1-3} + K_{11}^{1-4} + K_{11}^{1-2} = 0,128 + 0,128 + 0 = 0,256;$$

$$K_{12} = K_{21} = K_{12}^{1-3} + K_{12}^{1-4} + K_{12}^{1-2} = 0,096 - 0,096 + 0 = 0;$$

$$K_{13} = K_{31} = K_{13}^{1-2} = 0; K_{14} = K_{41} = K_{14}^{1-2} = 0;$$

$$K_{22} = K_{22}^{1-3} + K_{22}^{1-4} + K_{22}^{1-2} = 0,072 + 0,072 + 0,5 = 0,644;$$

$$K_{23} = K_{32} = K_{23}^{1-2} = 0; K_{24} = K_{42} = K_{24}^{1-2} = -0,5;$$

$$K_{33} = K_{33}^{1-2} + K_{11}^{2-3} + K_{11}^{2-4} = 0 + 0,2286 + 0,2286 = 0,4572;$$

$$K_{34} = K_{43} = K_{34}^{1-2} + K_{12}^{2-3} + K_{12}^{2-4} = 0 + 0,05706 - 0,05706 = 0;$$

$$K_{44} = K_{44}^{1-2} + K_{22}^{2-3} + K_{22}^{2-4} = 0,5 + 0,01426 + 0,01426 = 0,52852.$$

Отже, матриця жорсткості ферми має такий вид:

$$\vec{K} = \begin{bmatrix} 0,256 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,644 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0,4572 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & 0,52852 \end{bmatrix}.$$

Розв'язуючи рівняння рівноваги вузлів, одержимо:

$$\vec{\Delta} = \vec{K}^{-1} \cdot \vec{F} = \begin{bmatrix} 39,06 \\ -165,99 \\ 0 \\ -213,80 \end{bmatrix}.$$

Складаємо матриці перетворення переміщень вузлів у зусилля:

$$\vec{h}_{1-3} = \begin{bmatrix} -0,16 & -0,12 & 0,16 & 0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,16 & 0,12 & -0,16 & -0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{h}_{1-4} = \begin{bmatrix} 0,16 & -0,12 & -0,16 & 0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,16 & 0,12 & 0,16 & -0,12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{h}_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{h}_{2-3} = \begin{bmatrix} -0,2353 & -0,05706 & 0,2353 & 0,05706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2353 & 0,05706 & -0,2353 & -0,05706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{h}_{2-4} = \begin{bmatrix} 0,2353 & -0,05706 & -0,2353 & 0,05706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2353 & 0,05706 & 0,2353 & -0,05706 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Формуючи вектори переміщень вузлів для кожного елемента, обчислюємо зусилля:

$$\vec{\delta}_{1-3} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39,06 \\ -165,99 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{2-3} = \vec{h}_{1-3} \cdot \vec{\delta}_{1-3} = \begin{bmatrix} 13,58 \\ 0 \\ -13,58 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{\delta}_{1-4} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39,06 \\ -165,99 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{1-4} = \vec{h}_{1-4} \cdot \vec{\delta}_{1-4} = \begin{bmatrix} 26,17 \\ 0 \\ -26,17 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{\delta}_{1-2} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39,06 \\ -165,99 \\ 0 \\ -213,8 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{1-2} = \vec{h}_{1-2} \cdot \vec{\delta}_{1-2} = \begin{bmatrix} -23,91 \\ 0 \\ 23,91 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{h}_{2-3} = \begin{bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -213,8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{2-3} \vec{h}_{2-3} \cdot \vec{\delta}_{2-3} = \begin{bmatrix} 12,2 \\ 0 \\ -12,2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\vec{\delta}_{2-4} = \begin{bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -213,8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{S}_{2-4} = \vec{h}_{2-4} \cdot \vec{\delta}_{2-4} = \begin{bmatrix} 12,2 \\ 0 \\ -12,2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отже, зусилля в стержнях ферми від заданого навантаження такі:  
 $N_{1-3} = -13,58 \text{кН}$ ;  $N_{1-4} = -26,17 \text{кН}$ ;  $N_{1-2} = 23,91 \text{кН}$ ;  $N_{2-3} = N_{2-4} - 12,2 \text{кН}$ .

## Розділ 2 Вихідні дані та методичні вказівки до розрахунково-графічних робіт

### 7 Робота № 1. Розрахунок статично визначуваної ферми

**Вихідні дані** для роботи беруться з рисунку 7.1 та таблиці 1 за вказівками викладача.

Таблиця 1

№ з/п	q, кН/м <sup>2</sup>	p, кН/м <sup>2</sup>	b, м	d, м	h, м	№ панелі, рахуючи зліва
1	2	0,7	3,0	2,5	2,4	2
2	2,2	0,8	3,5	2,6	2,6	3
3	2,4	0,9	4,0	2,7	2,8	4
4	2,6	1,0	4,5	2,8	3,0	5
5	2,8	1,1	5,0	2,9	3,2	2
6	3,0	1,2	5,5	3,0	3,4	3
7	3,2	1,3	6,0	3,1	3,6	4
8	3,4	1,4	6,5	3,2	3,8	5
9	3,6	1,5	7,0	3,3	3,4	2
10	3,8	1,6	7,5	3,4	3,6	3
11	4,0	1,7	8,0	3,5	3,8	4
12	4,2	1,8	8,5	3,6	4,0	5



Для заданої ферми:

- обчислити вузлове навантаження при дії одиничного розподіленого навантаження на половині довжини ферми;
- виконати розрахунок ферми на дію одиничного розподіленого навантаження на половині довжини ферми;
- раціональними способами перевірити обчислені зусилля у заданій панелі;
- виконати розрахунок на комп'ютері;
- з умов симетрії записати зусилля від одиничного навантаження на іншій половині ферми;
- визначити зусилля в стержнях ферми від постійного навантаження  $q$ ;
- визначити зусилля від тимчасового навантаження  $p$  на лівій половині ферми;
- визначити зусилля від тимчасового навантаження  $p$  на правій половині ферми;
- обчислити розрахункові максимальні та мінімальні зусилля від одночасної дії постійного та тимчасового навантаження.

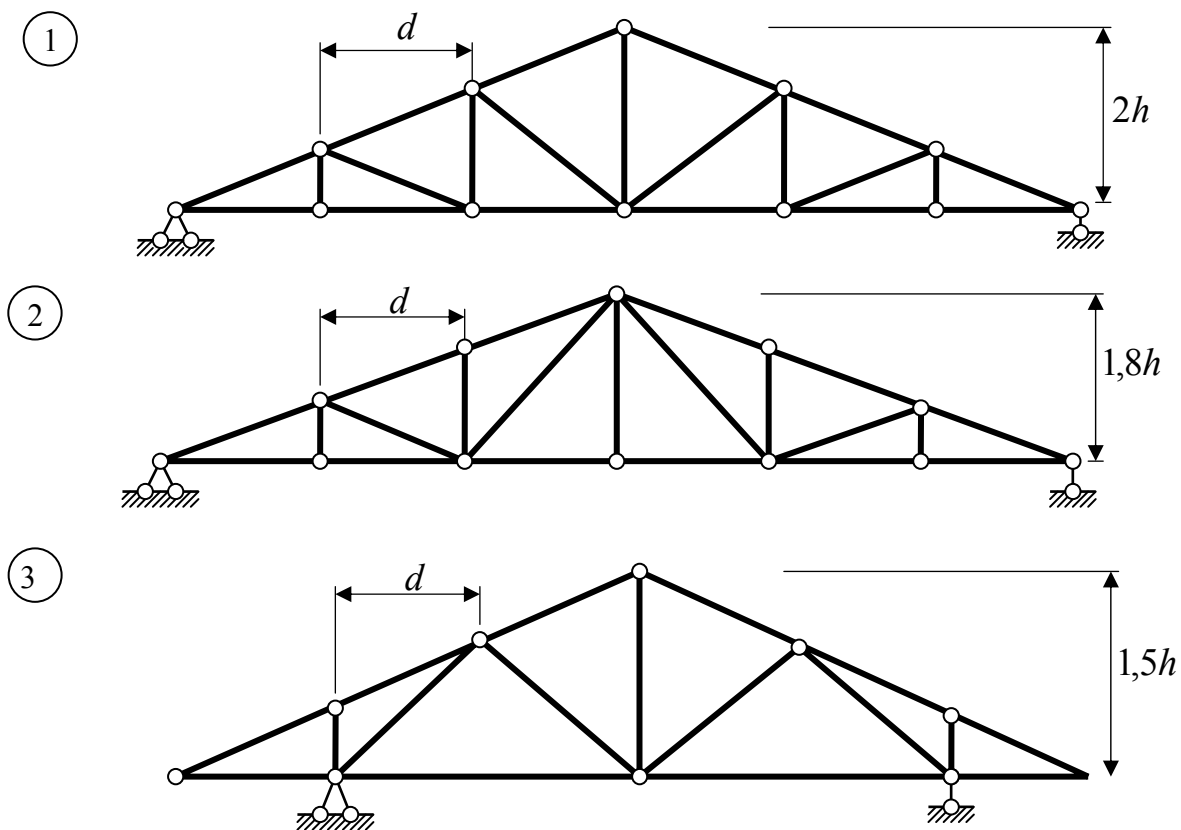
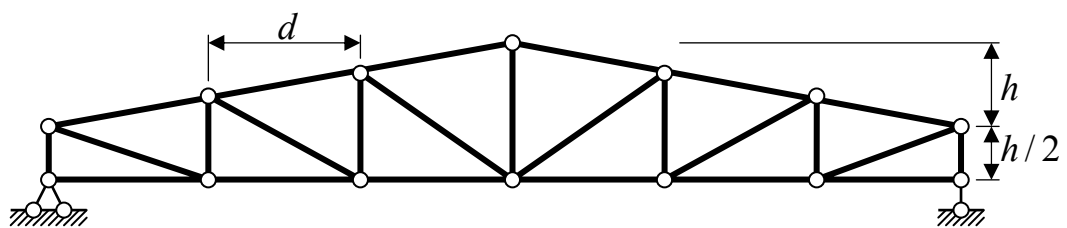
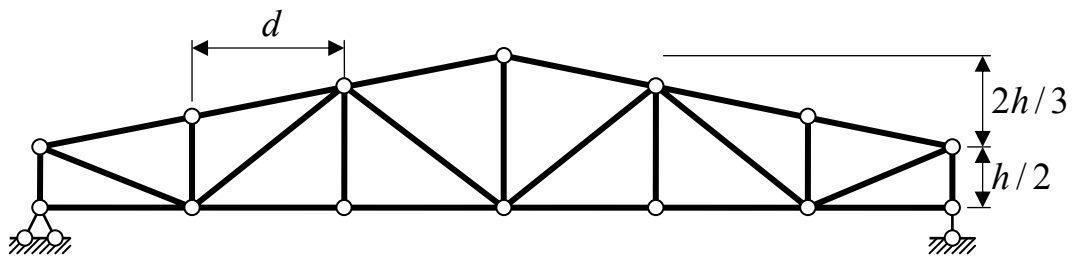


Рисунок 7.1

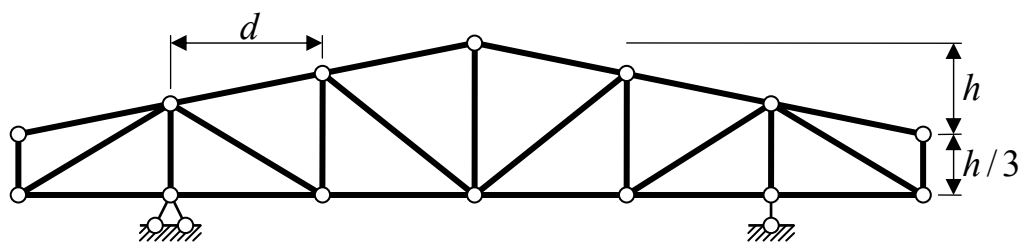
4



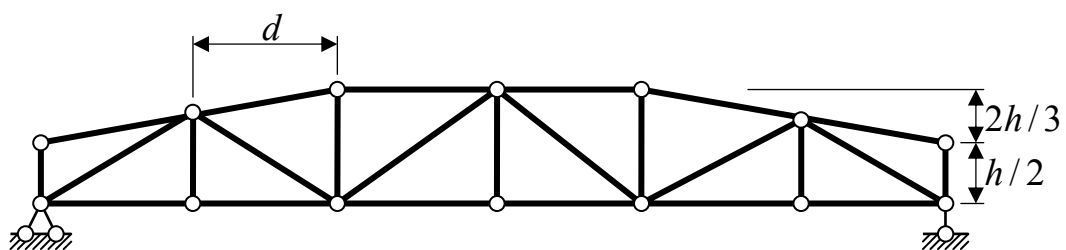
5



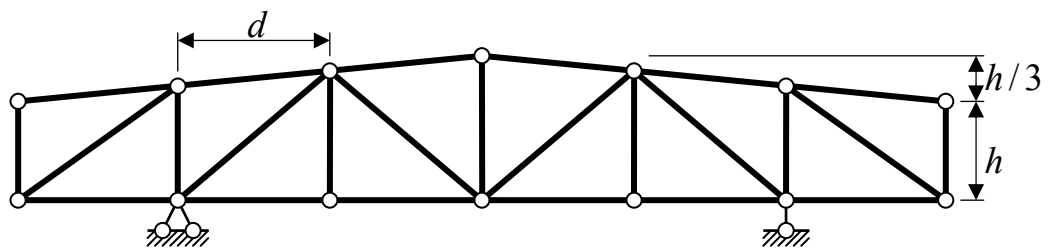
6



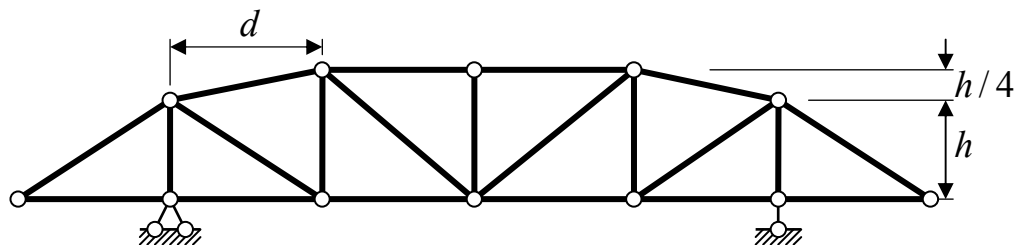
7



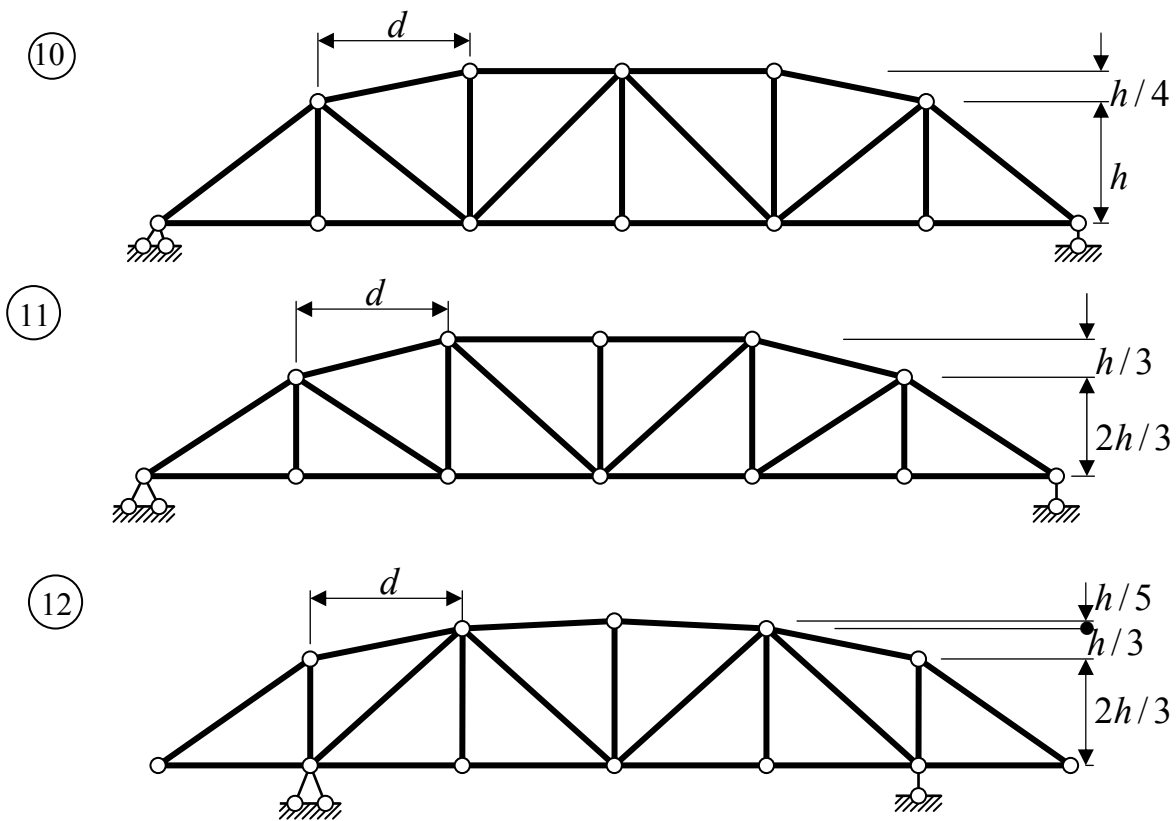
8



9



Продовження рисунку 7.1



Закінчення рисунку 7.1

**Приклад.** Виконати розрахунок ферми, наведеної на рисунку 7.2 при постійному навантаженні  $q = 3\text{кН} / \text{м}^2$ , тимчасовому навантаженні  $p = 2\text{кН} / \text{м}^2$ , кроку ферм  $b = 4\text{м}$ , заданій панелі для перевірки №5.

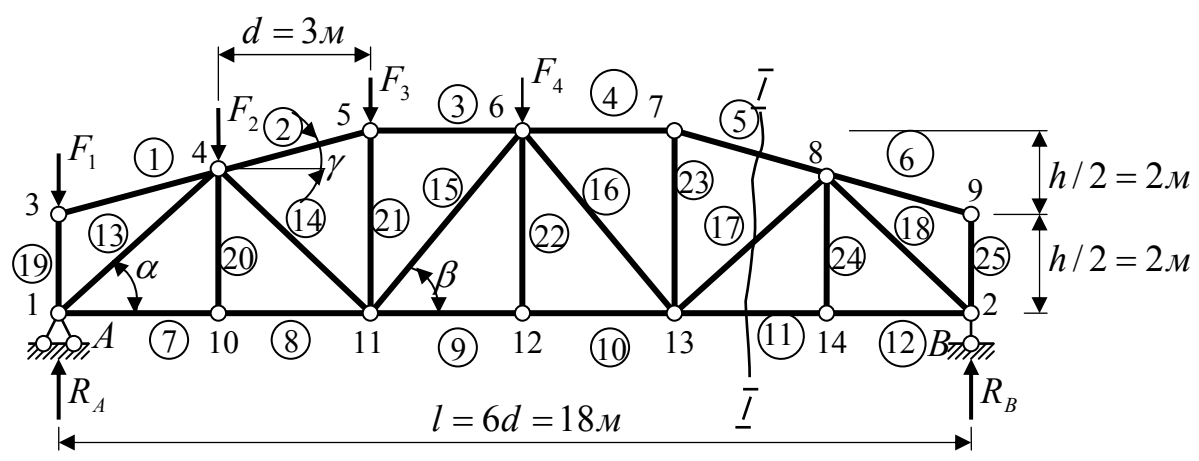


Рисунок 7.2

*Розв'язання.*

1) Розрахунок на одиничне навантаження на лівій половині ферми.

Вузлові сили обчислюємо з урахуванням вантажної ширини, що дорівнює відстані  $b$  між фермами покриття будівлі (кроку ферм):

$$F_1 = F_4 = q \cdot d \cdot b / 2 = 1 \cdot 3 \cdot 4 / 2 = 6\text{кН};$$

$$F_2 = F_3 = q \cdot d \cdot b = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12\text{кН}.$$

Реакції опор:

$$\begin{aligned}\sum M_A &= -F_2 d - F_3 \cdot 2d - F_4 \cdot 3d + R_B \cdot 6d = 0; \\ R_B &= \frac{F_2 d + F_3 \cdot 2d + F_4 \cdot 3d}{6d} = \frac{12 \cdot 3 + 12 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot 3 \cdot 3}{6 \cdot 3} = 9; \\ \sum M_B &= F_1 \cdot 6d + F_2 \cdot 5d + F_3 \cdot 4d + F_4 \cdot 3d - R_A \cdot 6d = 0; \\ R_A &= \frac{F_1 \cdot 6 \cdot d + F_2 \cdot 5d + F_3 \cdot 4d + F_4 \cdot 3d}{6d} = \\ &= \frac{6 \cdot 6 \cdot 3 + 12 \cdot 5 \cdot 3 + 12 \cdot 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3 \cdot 3}{6 \cdot 3} = 27;\end{aligned}$$

перевірка:  $\sum y = R_A + R_B - F_1 - F_2 - F_3 - F_4 = 27 + 9 - 6 - 12 - 12 - 6 = 0$ .

Пронумеруємо вузли та стержні ферми. **Першим призначаємо вузол на шарнірно нерухомій опорі, другим – вузол на шарнірно рухомій.** Інші вузли нумеруємо у довільній – бажано логічній – послідовності. Така нумерація пов'язана з подальшим розрахунком на комп'ютері. Стержні ферми нумеруємо в будь-якій послідовності. Номери стержнів на рисунку 7.2 наведені в колах.

Перевіряємо наявність окремих випадків рівноваги вузлів.

*Вузол 3* – двостержневий вузол, у якому навантаження діє вздовж одного зі стержнів:  $N_{19} = -F_1 = -6$ ;  $N_1 = 0$ .

*Вузол 10* – тристержневий ненавантажений вузол, у якому два стержня лежать на одній прямій:  $N_7 = N_8$ ;  $N_{20} = 0$ .

*Вузли 12 та 14* аналогічні вузлу 10:  $N_9 = N_{10}$ ;  $N_{22} = 0$  та  $N_{11} = N_{12}$ ;  $N_{24} = 0$ .

*Вузол 9* – двостержневий ненавантажений вузол:  $N_6 = N_{25} = 0$ .

Обчислюємо тригонометричні функції кутів нахилу стержнів: з трикутника 1-4-10 маємо:  $\alpha = 45^\circ$ ;  $\sin \alpha = \cos \alpha = 0,707$ ;

з трикутника 6-11-12 маємо:  $\sin \beta = \frac{l_{6-22}}{l_{6-11}} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0,8$ ;

$\cos \alpha = \frac{l_{11-12}}{l_{6-11}} = \frac{3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0,6$ ;

з трикутника, обмеженого стержнем 2 та його проекціями на горизонтальну та вертикальну осі, одержуємо:  $\sin \gamma = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = 0,316$ ;  $\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = 0,949$ .

Далі розглядаємо рівновагу вузлів, починаючи з вузла 1 (рис. 7.3,а), оскільки зусилля  $N_{19}$  вже відоме:

$$\begin{aligned}\sum x &= N_7 + N_{13} \cos \alpha = 0; \\ \sum y &= R_A + N_{19} + N_{13} \sin \alpha = 0; \\ N_{13} &= \frac{-R_A - N_{19}}{\sin \alpha} = \frac{-27 - 6}{0,707} = -29,70; \\ N_7 &= -N_{13} \cos \alpha = 29,7 \cdot 0,707 = 21,00.\end{aligned}$$

Наступним беремо вузол 4 (рис. 7.3, б), оскільки в ньому два невідомі зусилля у стержнях 2 та 14:

$$\sum x = -N_1 \cos \gamma - N_{13} \cos \alpha + N_2 \cos \gamma + N_{14} \cos \alpha = 0;$$

$$\sum y = -N_1 \sin \gamma - N_{13} \sin \alpha + N_2 \sin \gamma - N_{14} \sin \alpha - F_2 = 0;$$

$$\begin{cases} 29,7 \cdot 0,707 + N_2 \cdot 0,949 + N_{14} \cdot 0,707 = 0; \\ 29,7 \cdot 0,707 + N_2 \cdot 0,316 - N_{14} \cdot 0,707 - 12 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 29,7 \cdot 0,707 + N_2 \cdot 0,316 - N_{14} \cdot 0,707 - 12 = 0; \end{cases}$$

$$N_2 = \frac{-N_{14} \cdot 0,707 - 29,7 \cdot 0,707}{0,949} = -0,745N_{14} - 22,13;$$

$$(-0,745N_{14} - 22,13) \cdot 0,316 - N_{14} \cdot 0,707 + 9 = 0;$$

$$-0,942N_{14} + 2,01 = 0;$$

$$N_{14} = \frac{2,01}{0,942} = 2,13; N_2 = -0,745 \cdot 2,13 - 22,13 = -23,72.$$

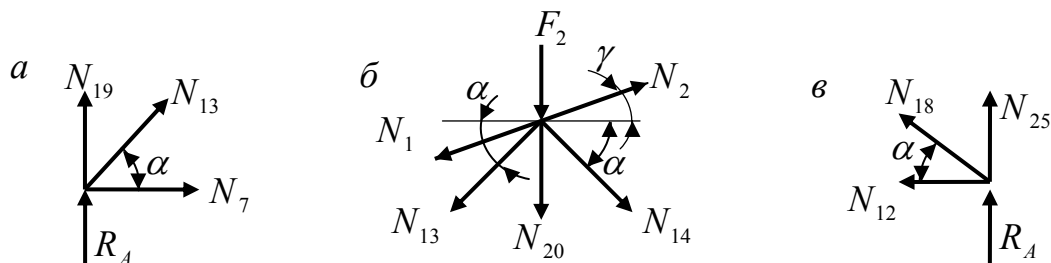


Рисунок 7.3

Далі, пропускаючи розрахунки, знаходимо:

з вузла 5  $N_{21} = -4,51$ ;  $N_3 = -22,51$ ; з вузла 11  $N_{15} = 3,75$ ;  $N_9 = 20,26$ ;

з вузла 6  $N_{16} = -11,25$ ;  $N_4 = -13,5$ ; з вузла 7  $N_5 = -14,23$ ;  $N_{23} = 4,5$ ;

з вузла 13  $N_{17} = 6,36$ ;  $N_{11} = 9,01$ ; з вузла 8  $N_{18} = -12,73$ .

Перевірку розрахунку виконуємо за рівновагою нерозглянутого раніше вузла 2 (рис. 7.3, в):

$$\sum x = -N_{18} \cos \alpha - N_{12} = 12,73 \cdot 0,707 - 9 = 0;$$

$$\sum y = R_B + N_{18} \cdot \sin \alpha + N_{25} = 9 - 12,73 \cdot 0,707 + 0 = 0.$$

Результати розрахунку зручно навести на схемі ферми у вигляді значень зусиль на відповідних стержнях (рис. 7.4).

2) Обчислюємо зусилля у заданій панелі №5.

Проводимо переріз 1-1 (рис. 7.2) і розглядаємо праву частину ферми (рис. 7.5).

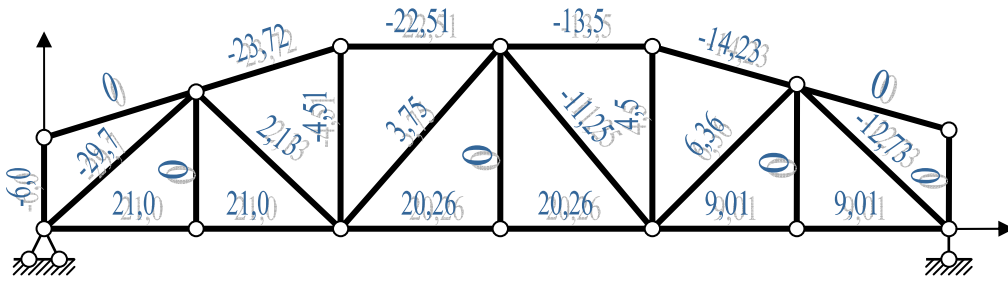


Рисунок 7.4

Зусилля у стержні 11 раціонально визначити способом моментної точки, оскільки інші два розрізані перерізи стержні 5 та 17 перетинаються у точці 8. Ця точка є моментною для стержня 11, отже, маємо:

$$\sum M_8 = R_B \cdot d - N_{11} \cdot h_{11} = 0,$$

де плече зусилля  $N_{11}$  становить:  $h_{11} = \frac{h + h/2}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3 \text{ м}.$

Тепер можна обчислити шукане зусилля:

$$N_{11} = \frac{R_B \cdot d}{h_{11}} = \frac{9 \cdot 3}{3} = 9.$$

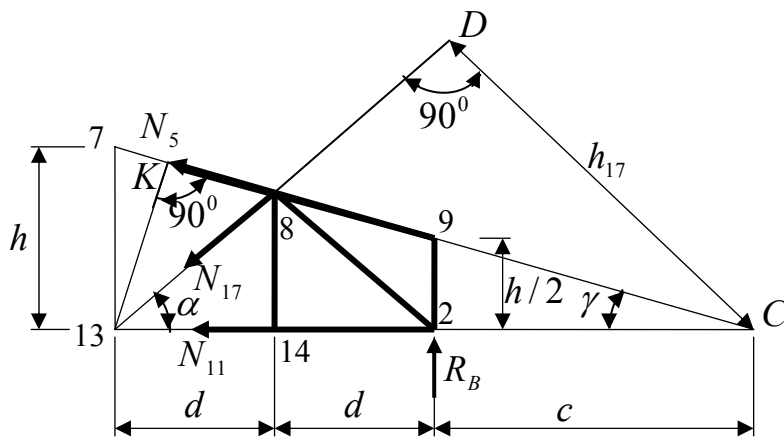


Рисунок 7.5

Для визначення зусилля у стержні 17 знаходимо точку перетину інших двох розрізаних стержнів (5 та 11). Такою є точка C. Отже знову застосовуємо спосіб моментної точки:

$$\sum M_C = -R_B \cdot c + N_{17} \cdot h_{17} = 0.$$

Відстань до моментної точки визначаємо з подоби трикутників 7-13-C та 2-9-C.

$$\frac{c + 2d}{h} = \frac{c}{h/2}; (c + 2d) \cdot \frac{h}{2} = c \cdot h; c = \frac{d \cdot h}{h/2} = 2d = 2 \cdot 3 = 6 \text{ м}.$$

Плече зусилля  $N_{17}$  визначаємо з трикутника 13-C-D:

$$h_{17} = (c + 2d) \cdot \sin \alpha = (6 + 2 \cdot 3) \cdot 0,707 = 8,48 \text{ м}.$$

Тепер шукане зусилля  $N_{17} = \frac{R_B \cdot c}{h_{17}} = \frac{9 \cdot 6}{8,48} = 6,37.$

Аналогічно, використовуючи моментну точку 13, визначаємо зусилля  $N_5$ :

$$\sum M_{13} = R_B \cdot 2d + N_5 \cdot h_5 = 0;$$

$$h_5 = h \cdot \cos \gamma = 4 \cdot 0,949 = 3,80 \text{ м};$$

$$N_5 = -\frac{R_B \cdot 2d}{h_5} = -\frac{9 \cdot 2 \cdot 3}{3,8} = -14,21.$$

Зусилля у стояках 23 та 24 визначаються з рівноваги вузлів відповідно 7 та 14. Це було зроблено при обчисленні зусиль способом вирізання вузлів.

Порівняння дає змогу упевнитися, що результати розрахунків способом вирізання вузлів практично співпадають з результатами обчислення способом моментної точки. Відзначимо, що більш достовірними є значення, одержані способом моментної точки, оскільки вони одержані безпосередньо через зовнішні сили.

3) Виконуємо розрахунок на комп'ютері. Алгоритм розрахунку реалізовано у файлі “Ферма ст. визн.xls”. Відкривши цей файл за допомогою програми MS Excel пакету MS Office або OpenOffice.org Calc пакету OpenOffice.org, одержуємо на екрані монітора таблицю. У верхній частині таблиці 2 наводиться інформація про розташування стержнів у фермі: кожен рядок відповідає окремому стержню. Для кожного стержня у цьому рядку необхідно поставити -1 у стовпчику, що відповідає вузлу на початку стержня (вузол з меншим номером), і 1 у стовпчику, що відповідає вузлу на кінці стержня (вузол з більшим номером). Так, перший стержень розташований між вузлами 3 та 4, отже у комірку D3 заносимо значення -1, а у комірку E3 заносимо 1. У інших стовпчиках цього рядка для стержня необхідно поставити значення 0. Нижче вводяться координати  $x$  та  $y$  вузлів ферми. Наприклад, вузол 6 має координати  $x = 9 \text{ м}$ ;  $y = 4 \text{ м}$ , отже, у комірку G30 заносимо значення 9, а у комірку G31 значення 4. Ще нижче необхідно ввести вузлові навантаження  $F_x$  та  $F_y$ . Наприклад, у четвертому вузлі прикладена спрямована донизу сила  $F_2 = 12$ , отже у комірку E33 заносимо 0, а у комірку E34 значення -12. При цьому реакції опор не приймаються до уваги.





Після введення останнього висхідного даного у комірках Q3-Q27 наводяться результати розрахунку – зусилля у стержнях ферми. Так,  $N_{13} = -29,6985$ ,  $N_{20} = -6,4E - 10 \approx 0$ .

Порівнюючи результати розрахунку на комп'ютері та ручного розрахунку бачимо, що вони практично співпадають.

**Слід мати на увазі:**

- програма « Ферма ст. визн. xls» розрахована на розрахунок балочних ферм, що мають максимальну кількість стержнів 25 та максимальну кількість вузлів 14;
- якщо кількість стержнів менша, ніж 25, для інших стержнів та вузлів необхідно ввести усі значення 0.
- Визначення зусиль від постійного та тимчасового навантажень та максимальних і мінімальних зусиль наведені у таблиці 3.

За результатами розрахунків (п.1) у стовпчику 2 заносимо значення зусиль від одиничного навантаження на лівій половині ферми. З умов симетрії заповнюємо стовпчик 3 зусиллями від одиничного навантаження на правій половині ферми. Наприклад, зусилля у стержні 5 від одиничного навантаження на правій половині ферми дорівнює зусиллю у стержні 2 від навантаження на лівій половині ферми. Для визначення зусиль від одиничного навантаження на усій фермі у стовпчику 4 підсумовуємо зусилля, наведені у стовпчиках 2 та 3. Зусилля від постійного навантаження одержуємо у стовпчику 5 помноженням зусиль від одиничного навантаження (стовпчик 4) на значення  $q=3\text{кН/м}^2$  постійного навантаження. Далі, помножуючи зусилля від одиничного навантаження (стовпчики 2, 3, 4) на значення  $p=2\text{кН/м}^2$  тимчасового навантаження одержуємо у стовпчиках 6, 7, 8) зусилля від тимчасового навантаження відповідно на лівій та правій половині та на усій фермі.

Розрахункові зусилля визначаємо у стовпчиках 9, 10. Максимальне зусилля одержимо підсумовуючи зусилля від постійного навантаження (стовпчик 5) з найбільшим зусиллям від тимчасового навантаження обраним зі значень у стовпчиках 6, 7, 8. Якщо максимальне зусилля від'ємне, ним нехтуємо. Мінімальне значення одержимо підсумовуючи зусилля від постійного навантаження з найменшим (з урахуванням знаку) зусиллям від тимчасового навантаження. Якщо мінімальне зусилля додатне, ним нехтуємо.

Таблиця 3

Стержень №	Зусилля від одиничного навантаження			Зусилля від постійного навантаження	Зусилля від тимчасового навантаження			Розрахункові зусилля	
	ліворуч	праворуч	на усій фермі		ліворуч	праворуч	на усій фермі	$N_{\max}$ (розтяг)	$N_{\min}$ $N_{\min}$ (стиск)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	-	-
2	-23,72	-14,23	-37,95	-113,85	-47,44	-28,46	-75,9	-	-189,75
3	-22,5	-13,5	-36,0	-108	-45	-27	-72	-	-180,0
4	-13,5	-22,5	-36,0	-108	-27	-45	-72	-	-180,0
5	-14,23	-23,72	-37,95	-113,85	-28,46	-47,44	-75,9	-	-189,75
6	0	0	0	0	0	0	0	-	-
7	21,0	9,01	30,01	90,03	42,0	18,02	60,02	150,05	-
8	21,0	9,01	30,01	90,03	42,0	18,02	60,02	150,05	-
9	20,26	20,26	40,52	121,56	40,52	40,52	81,04	202,6	-
10	20,26	20,26	40,52	121,56	40,52	40,52	81,04	202,6	-
11	9,01	21,0	30,01	90,03	18,02	42,0	60,02	150,05	-
12	9,01	21,0	30,01	90,03	18,02	42,0	60,02	150,05	-
13	-29,7	-12,73	-42,43	-127,29	-59,4	-25,46	-84,86	-	-212,15

Закінчення таблиці 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
14	2,12	6,36	8,48	25,44	4,24	12,72	16,96	42,5	–
15	3,75	-11,25	-7,5	-22,5	7,5	-22,5	-15,0	–	-45
16	-11,25	3,75	-7,5	-22,5	-22,5	7,5	-15,0	–	-45
17	6,36	2,13	8,49	25,47	12,72	4,26	16,98	42,45	–
18	-12,73	-29,7	-42,43	-127,29	-25,46	-59,4	-84,86	–	-212,15
19	-6,0	0	-6,0	-18	-12,0	0	-12,0	–	-30,0
20	0	0	0	0	0	0	0	–	–
21	-4,51	4,5	-0,01	-0,03	-9,02	9,0	-0,02	8,97	-9,05
22	0	0	0	0	0	0	0	–	–
23	4,5	-4,51	-0,01	-0,03	9,0	-9,02	-0,02	8,97	-9,05
24	0	0	0	0	0	0	0	–	–
25	0	-6,0	-6,0	-18	0	-12,0	-12,0	–	-30,0

## 8 Робота №2 Розрахунок тришарнірної арки

Вихідні дані беруть з таблиці 4 та рисунків 8.1, 8.2 за вказівками викладача.

Для заданої тришарнірної арки необхідно побудувати епюри згинаючих моментів, поперечних та поздовжніх сил. Результати перевірити розрахунком на комп'ютері.

Схему навантаження узяти за рисунку 8.2.

Наведемо основні розрахункові формули для визначення геометричних та тригонометричних характеристик арок різних обрисів.

*Параболічна арка:*

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x); \operatorname{tg} \varphi = \frac{4f}{l^2} (l-2x) \Rightarrow \sin \varphi; \cos \varphi.$$

*Циркульна арка:*

$$r = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}; \sin \varphi = \frac{l/2 - x}{r}; \Rightarrow \cos \varphi; \Rightarrow y = r \cos \varphi - (r - f).$$

*Еліптична арка:*

$$y = \frac{2f}{l} \sqrt{x(l-x)}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{f}{l} \cdot \frac{l-2x}{\sqrt{x(l-x)}} \Rightarrow \sin \varphi; \cos \varphi.$$

*Синусоїдна арка:*

$$y = f \cdot \sin \frac{\pi x}{l}; \operatorname{tg} \varphi = \pi \frac{f}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \Rightarrow \sin \varphi; \cos \varphi.$$

Для арок з підвищеною затяжкою абсциси точок D та E на кінцях затяжки визначаються за наведеними нижче формулами.

*Параболічна арка:*

$$x_{D,E} = \frac{l}{2} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{f'}{f}} \right).$$

*Циркульна арка:*

$$x_{D,E} = \frac{l}{2} \mp r \sin \varphi_{D,E}, \text{ де } \varphi_{D,E} = \arccos \left( 1 - \frac{f'}{r} \right).$$

*Еліптична арка:*

$$x_{D,E} = \frac{l}{2} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{f'}{f} \left( 2 - \frac{f'}{f} \right)} \right).$$

*Синусоїдна арка:*

$$x_D = \frac{l}{\pi} \arcsin \left( 1 - \frac{f'}{f} \right), x_E = l - x_D.$$

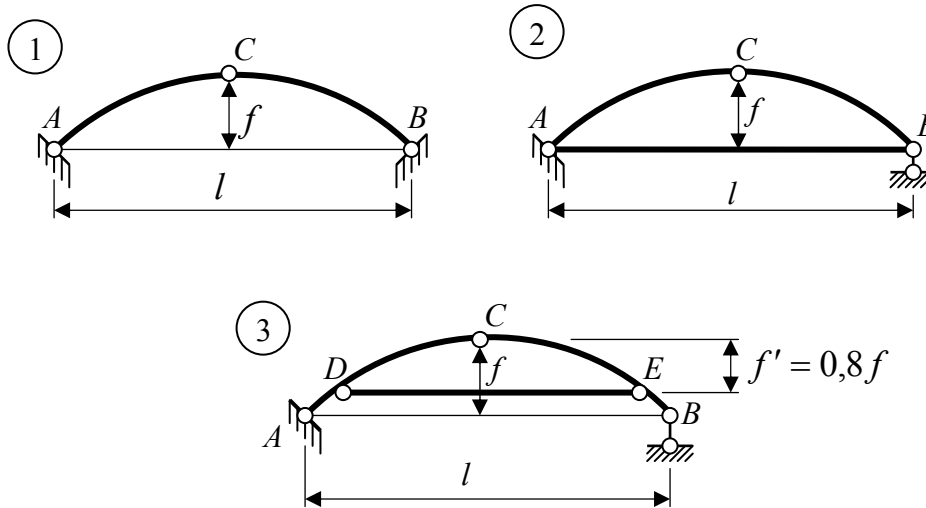


Рисунок 8.1

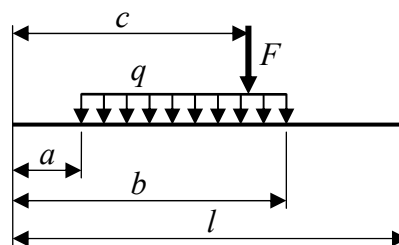


Рисунок 8.2

**Приклад.** Для арки, наведеної на рисунку 8.3,*a* побудувати епюри внутрішніх зусиль від заданого навантаження.

Визначаємо реакції опор.

Вертикальні реакції:

$$\sum M_A = 0; -q \cdot 7 \cdot 3,5 - F \cdot 10 + V_B \cdot 14 = 0,$$

$$\text{звідки } V_B = \frac{4 \cdot 7 \cdot 3,5 + 6 \cdot 10}{14} = 11,29 \text{ kH};$$

$$\sum M_B = q \cdot 7 \cdot 10,5 + F \cdot 4 - V_A \cdot 14 = 0,$$

$$\text{звідки } V_A = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10,5 + 6 \cdot 4}{14} = 22,71 \text{ kH}.$$

Перевіряємо вертикальні реакції:

$$\sum y = V_A + V_B - q \cdot 7 - F = 22,71 + 11,29 - 4 \cdot 7 - 6 \equiv 0.$$

Для визначення розпору використовуємо умову рівності нулю згинаючого моменту у шарнірі С:

$$\sum M_C = -q \cdot 7 \cdot 3,5 + V_A \cdot 7 - H \cdot 4 = 0,$$

$$\text{звідки } H = \frac{-4 \cdot 7 \cdot 3,5 + 22,71 \cdot 7}{4} = 15,24 \text{ kH}.$$

Таблиця 4

1-ша цифра шифру	$l, m$	$a, m$	$b, m$	2-цифра шифру	Схема за рис. 96	$q, кН/м$	$\frac{c}{l}$	3-тя цифра шифру	Обрис осі	$F, кН$	$\frac{f}{l}$
<b>1</b>	14	0	6	<b>1</b>	1	4,0	0,2	<b>1</b>	Парабола	8	0,2
<b>2</b>	15	2	8	<b>2</b>	2	4,5	0,2 5	<b>2</b>	Дуга кола	9	0,2 2
<b>3</b>	16	4	1 0	<b>3</b>	3	5,0	0,3	<b>3</b>	Напівеліпс	1 0	0,2 4
<b>4</b>	17	6	1 7	<b>4</b>	1	5,5	0,3 5	<b>4</b>	Синусоїда	1 1	0,2 6
<b>5</b>	18	1 0	1 8	<b>5</b>	2	6,0	0,4	<b>5</b>	Парабола	1 2	0,2 8
<b>6</b>	19	1 1	1 9	<b>6</b>	3	6,5	0,6	<b>6</b>	Дуга кола	1 3	0,3 0
<b>7</b>	20	6	1 8	<b>7</b>	1	7,0	0,6 5	<b>7</b>	Напівеліпс	1 4	0,3 2
<b>8</b>	21	0	2 0	<b>8</b>	2	7,5	0,7	<b>8</b>	Синусоїда	1 5	0,3 4
<b>9</b>	22	1 0	1 8	<b>9</b>	3	8,0	0,7 5	<b>9</b>	Парабола	1 6	0,3 6
<b>0</b>	23	8	2 0	<b>0</b>	1	8,5	0,8	<b>0</b>	Дуга кола	1 7	0,3 8

Перевіряємо обчислене значення розпору:

$$\sum_{np} M_C = -F \cdot 3 - H \cdot 4 + V_B \cdot 7 = -6 \cdot 3 - 15,24 \cdot 4 + 11,29 \cdot 7 = 0,07 \approx 0.$$

Визначаємо радіус дуги кола, за яким окреслена вісь арки:

$$r = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} = \frac{4}{2} + \frac{14^2}{8 \cdot 4} = 8,125 м.$$

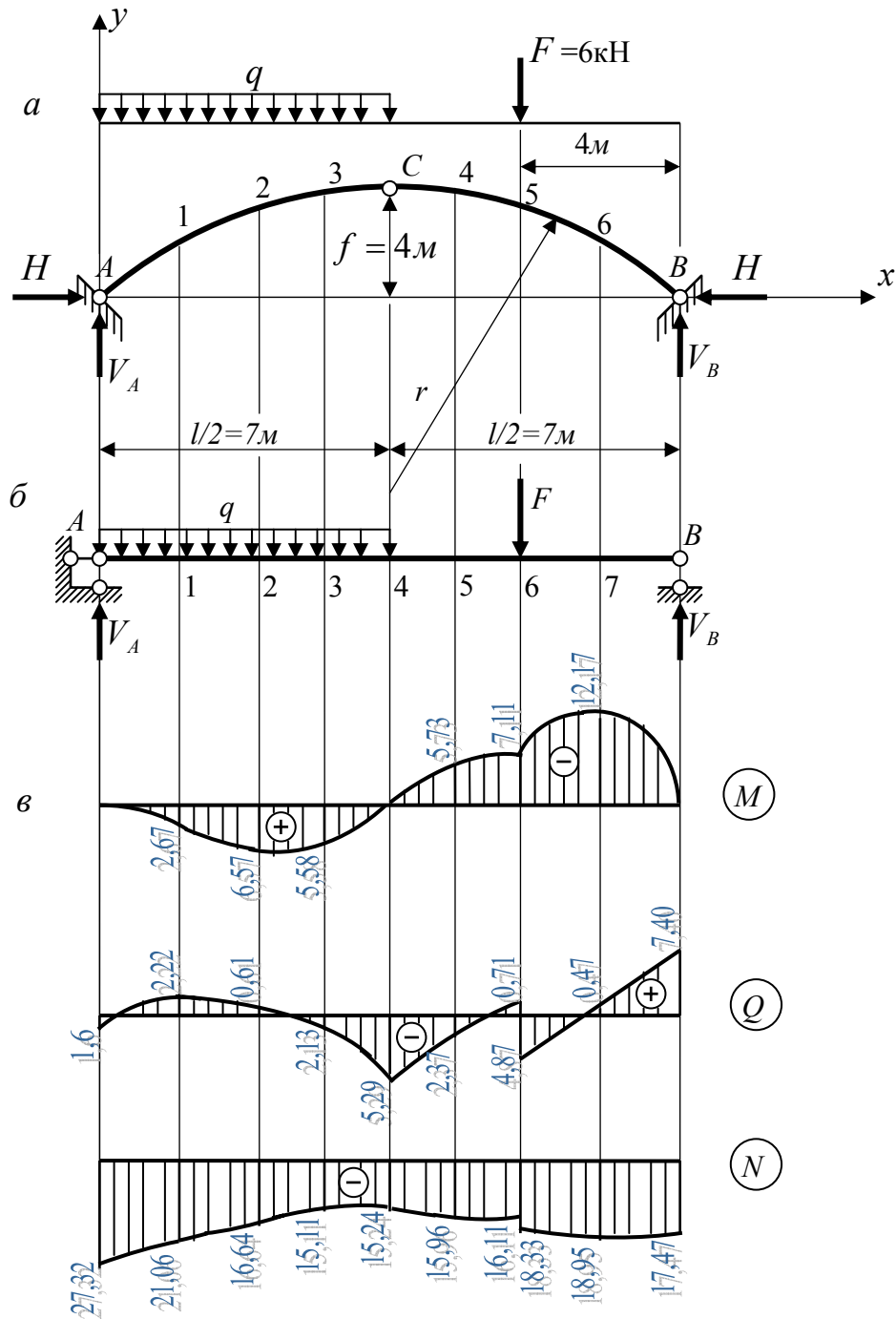


Рисунок 8.3

При виконанні роботи кількість розрахованих перерізів обмежуємо мінімальною необхідною для побудови обрису епюр. Призначаємо перерізи визначення зусиль. Обов'язкові – це перерізи в точках прикладання зосереджених сил, точки на кінцях розподіленого навантаження, для арки з підвищеною затяжкою – ще й точки на кінцях затяжки. Враховуючи, що зусилля на будь-якій ділянці навантаження змінюються за нелінійним законом, між кожними обов'язковими точками призначаємо не менше, ніж одну проміжну. Крім того, характерним для побудови епюри згинаючих

моментів є переріз у замковому шарнірі. У цьому прикладі призначаємо перерізи А, 1, 2, 3, С, 4, 5, 6, В (рис. 8.3, а).

Подальші розрахунки виконуємо в таблиці 5. У колонці 2 записуємо координати  $x$  призначених точок, наприклад, для точки 1 маємо  $x_2 = 2$  м.

У колонці 3 обчислюємо  $\sin \varphi = \frac{l/2 - x}{r}$ , наприклад, для точки 1 маємо  $\sin \varphi = \frac{7 - 2}{8,125} = 0,615$ . Значення  $\cos \varphi$  у колонці 4 обчислюємо будь-

яким відомим способом, наприклад, для точки 1 одержимо  $\arcsin \varphi = 37,98^\circ$  і, далі  $\cos 37,98^\circ = 0,788$ . У колонці 5 обчислюємо

ординати точок осі арки за формулою  $y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - r + f$ . Так, для

точки 1 маємо  $y = \sqrt{8,125^2 - (7 - 2)^2} - 8,125 + 4 = 2,28$  м.

Балочні зусилля  $M^0$  та  $Q^0$  обчислюємо з розрахунку балки (рис. 8.3, б). Так, для перерізу 1 маємо:

$$M^0 = V_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 22,71 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 37,42 \text{ кНм};$$

$$Q^0 = V_A - q \cdot 2 = 22,71 - 4 \cdot 2 = 14,71 \text{ кН}.$$

У наступних колонках обчислюються значення внутрішніх зусиль в арці.

У колонці 8 обчислюються значення  $H \cdot y$ , наприклад для точки 1 одержимо  $15,24 \cdot 2,28 = 34,75$  кНм. Колонка 9 містить значення результуючих моментів  $M = M^0 - H \cdot y$ , яке для перерізу 1 становить величину  $M = 37,42 - 34,75 = 2,67$  кНм.

Далі у колонці 10 обчислені добутки  $Q^0 \cdot \cos \varphi$ . Для точки 1 це  $14,71 \cdot 0,788 = 11,59$  кН. Колонка 11 містить величини  $H \sin \varphi$ . Ця величина для точки 1 становить  $15,24 \cdot 0,615 = 9,37$  кН. Значення поперечних сил в перерізах арки обчислені у колонці 13 за виразом  $Q = Q^0 \cos \varphi - H \sin \varphi$ . Для перерізу 1 маємо  $Q = 11,59 - 9,37 = 2,27$  кН.



Таблица 5

№ з/п	$x, м$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$y, м$	$M^0, кНм$	$Q^0, кН$	$H y, кНм$	$M, кНм$	$Q^0 \times \cos \varphi, кН$	$H \times \sin \varphi, кН$	$Q, кН$	$Q^0 \times \sin \varphi, кН$	$H \times \cos \varphi, кН$	$N, кН$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	0	0,862	0,508	0	0	22,71	0	0	11,54	13,14	-1,6	19,58	7,74	-27,32
1	2	0,615	0,788	2,28	37,42	14,71	34,75	2,67	11,59	9,37	2,22	9,05	12,01	-21,00
2	4	0,369	0,929	3,43	58,84	6,71	52,57	6,57	6,23	5,62	0,61	2,48	14,16	-16,64
3	5,5	0,186	0,983	3,86	64,41	0,71	58,83	5,58	0,70	2,83	-2,13	0,13	14,98	-15,11
C	7	0	1	4	61,03	-5,29	60,96	$\approx 0$	-5,29	0	-5,29	0	15,24	-15,24
4	8,5	-0,186	0,983	3,86	53,10	-5,29	58,83	-5,73	-5,20	-2,83	-2,37	0,98	14,98	-15,96
5	10	-0,369	0,929	3,43	45,16	-5,29	52,57	-7,11	-4,91	-5,62	0,71	1,95	14,16	-16,11
						-11,29			-10,49		-4,87	4,17		-18,33
6	12	-0,615	0,788	2,28	22,58	-11,29	34,75	-12,17	-8,90	-9,37	0,47	6,94	12,01	-18,95
B	14	-0,862	0,508	0	0	-11,29	0	0	-5,74	-13,14	7,40	9,73	7,74	-17,47

Колонки 13, 14 та 15 відведені для визначення поздовжніх сил.

Для перерізу 1 маємо:

$$Q^0 \sin \varphi = 14,71 \cdot 0,615 = 9,05; \quad H \cos \varphi = 15,24 \cdot 0,788 = 12,01 \text{ і, нарешті,}$$
$$N = -(Q^0 \sin \varphi + H \cos \varphi) = -(9,05 + 12,01) = -21,00 \text{ кН.}$$

За одержаними у таблиці 4 значеннями на рисунку 8.3, в побудовані епюри внутрішніх зусиль арки. При побудові цих епюр слід враховувати, що в межах кожної ділянки навантаження епюра являє собою найкоротшу плавну криву, яка з'єднує ординати епюр.

Порівнюючи характер епюр моментів та поперечних сил, слід мати на увазі, що похідна від моменту за змінною, відрахованою вздовж осі арки є поперечною силою. Отже, рівність  $Q = 0$  відповідає екстремуму на епюрі згинаючих моментів.

Перевірку розрахунків виконуємо на комп'ютері. Алгоритм розрахунку реалізовано у файлі «Арка тришарнірна». Відкривши цей файл за допомогою програми MS Excel пакету MS Office або OpenOffice.org Calc пакету OpenOffice.org, одержуємо на екрані монітора таблицю 6. У верхній частині таблиці наводяться дані про прогон, стрілу підйому, відраховану від опор, та від підвищеної зтяжки (якщо зтяжка відсутня або розташована у рівні п'ят, наводиться значення  $f'$ , що дорівнює стрілі підйому  $f$ ), величину розпору та ознаку обрису осі арки.

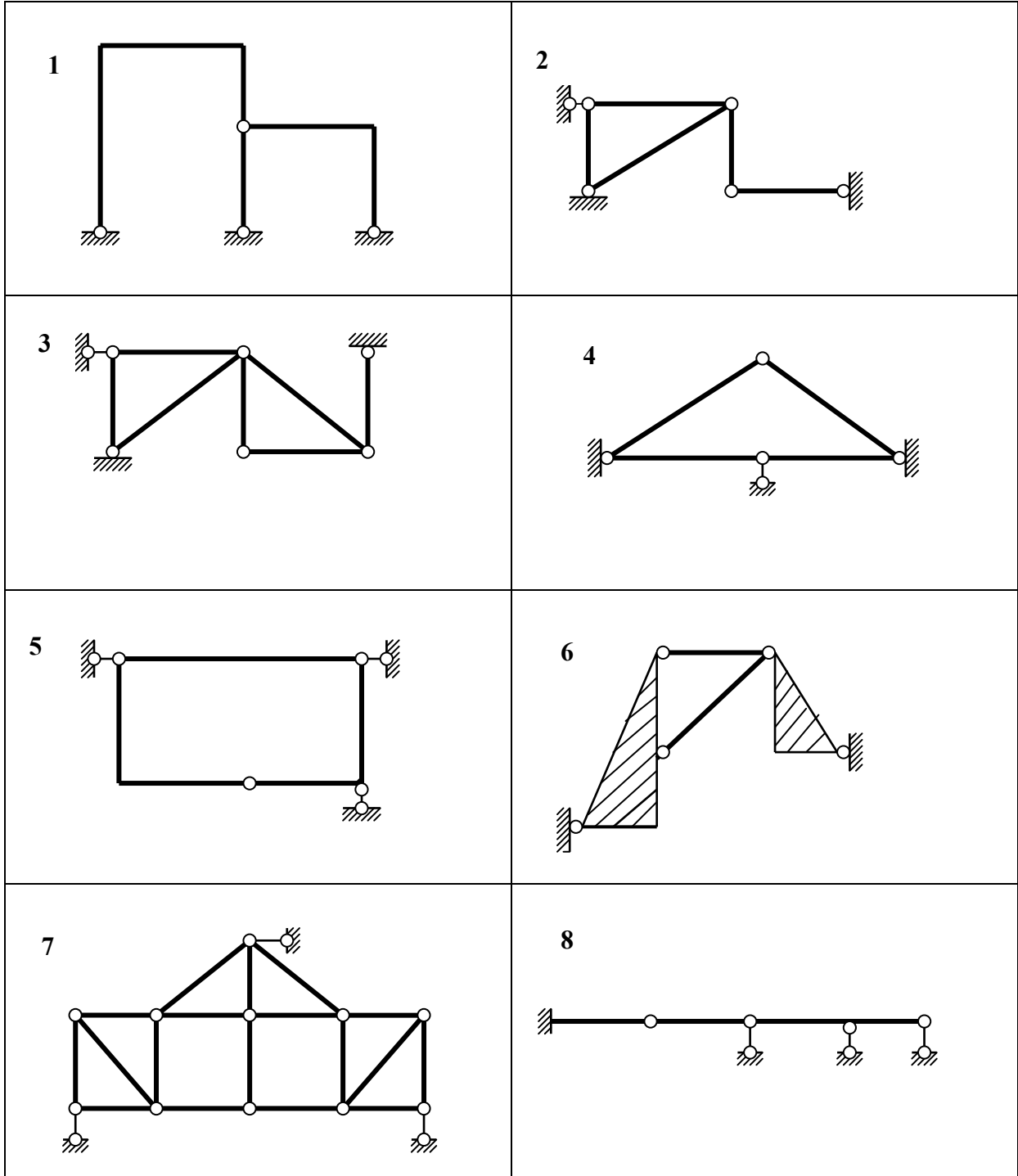
Нижче, у лівій частині таблиці, наводяться номери перерізів, їх відстань від лівої опори та величини балочних згинаючих моментів та поперечних сил у цих перерізах. Після введення усіх даних у правій частині таблиці червоним шрифтом наводяться згинаючі моменти, поперечні та поздовжні сили у перерізах арки.

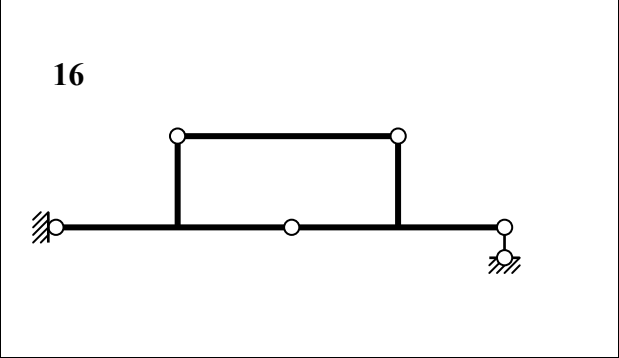
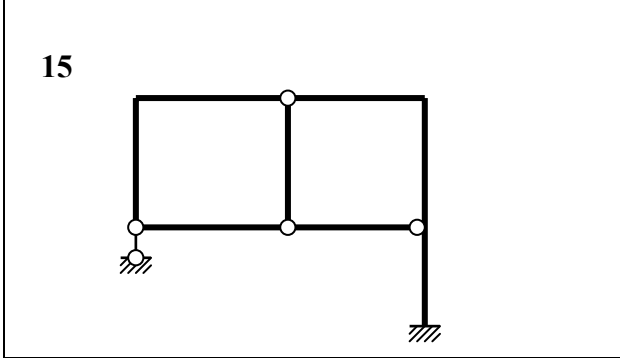
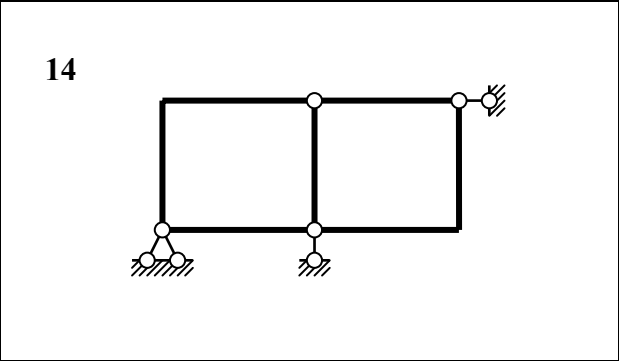
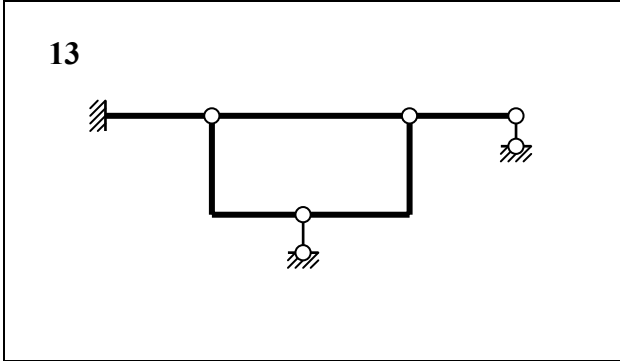
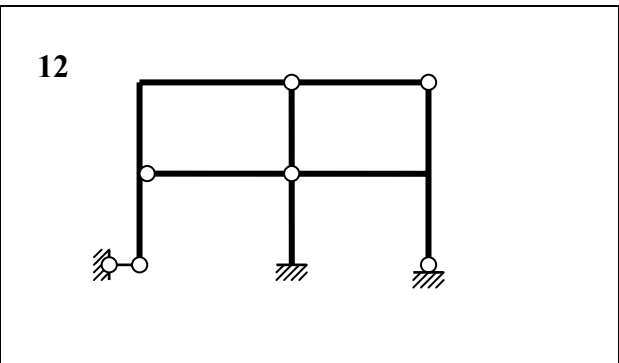
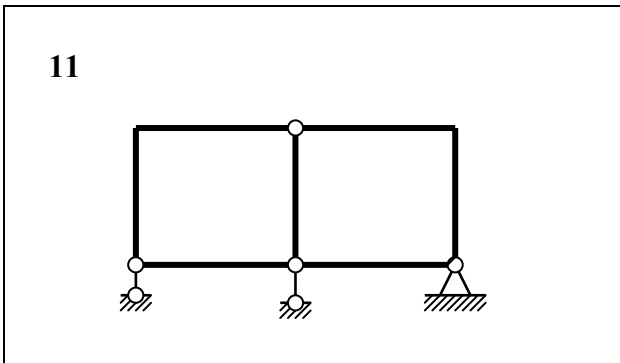
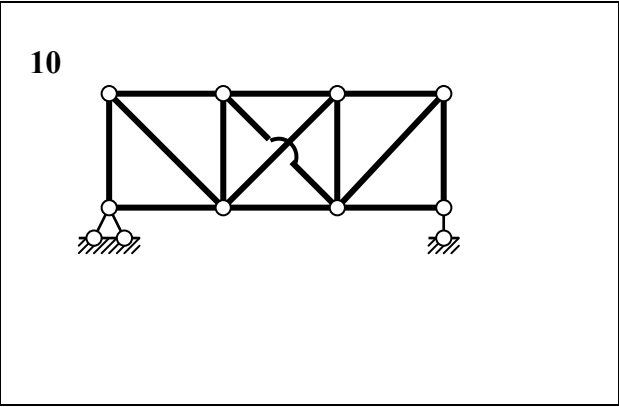
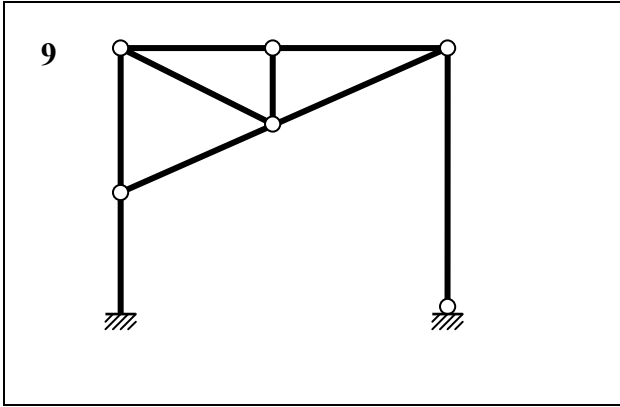
Таблица 6

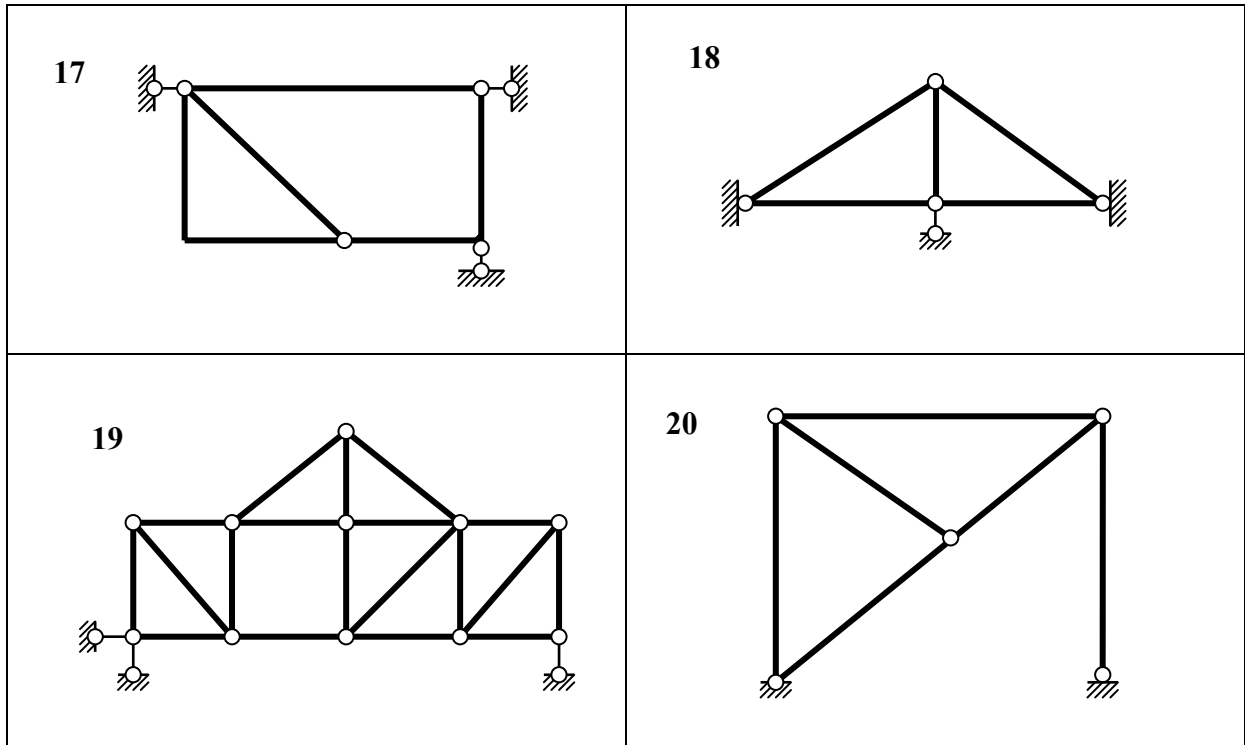
Расчет трехшарнирной арки							
<i>l</i>	<i>f</i>	Очертание оси		1 - по дуге окружности 2 - по параболе 3 - по синусоиде 4 - полуэллипс			
14	4	1					
<i>H</i> = 15,24		4					
		Балочные усилия		Усилия в арке			
№ сеч.	<i>x</i>	<i>M</i> <sup>0</sup>	<i>Q</i> <sup>0</sup>	<i>M</i>	<i>Q</i>	<i>N</i>	<i>y</i>
A	0	0	22,71	0,00	-1,60	-27,30	0,00
1	2	37,42	14,71	2,68	2,22	-21,06	2,28
2	4	58,84	6,71	6,63	0,61	-16,64	3,43
3	5,5	64,41	0,71	5,58	-2,12	-15,11	3,86
C	7	61,03	-5,29	0,07	-5,29	-15,24	4,00
4	8,5	53,1	-5,29	-5,73	-2,39	-15,95	3,86
5	10	45,16	-5,29	-7,05	0,71	-16,12	3,43
5	10	45,16	-11,29	-7,05	-4,87	-18,33	3,43
6	12	22,58	-11,29	-12,16	0,48	-18,96	2,28
B	14	0	-11,29	0,00	7,40	-17,46	0,00

# Розділ 3 Матеріали для контрольних робіт

## 9 Кінематичний аналіз споруд Перевірити геометричну незмінюваність систем

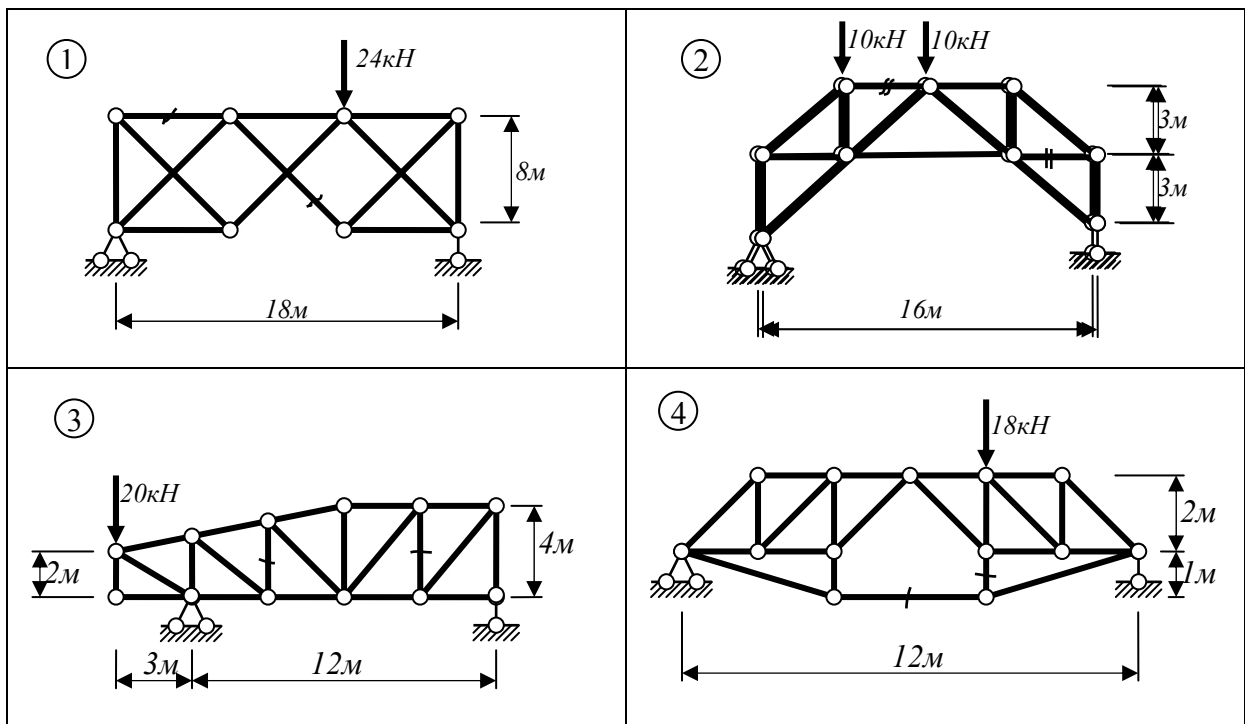


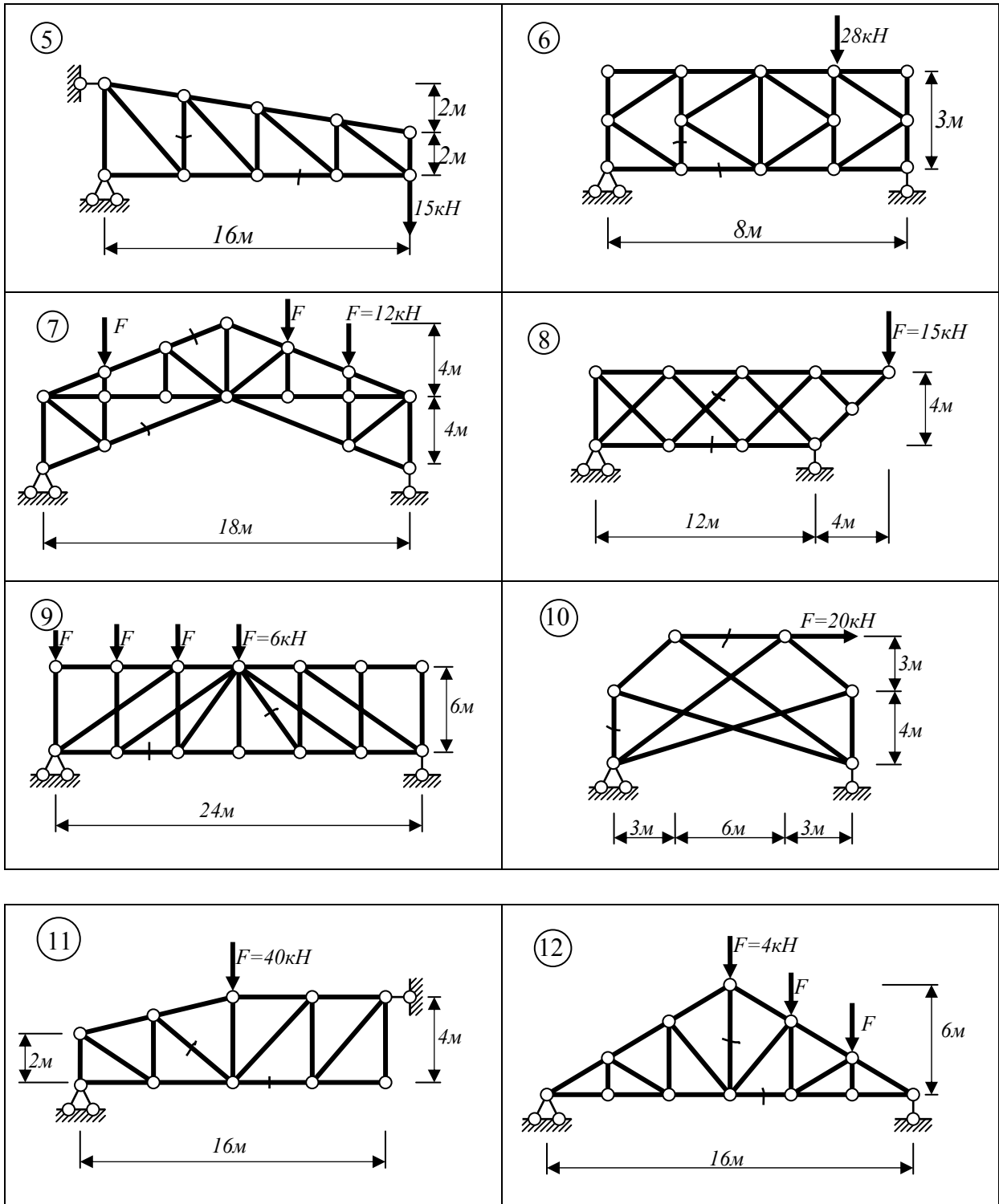


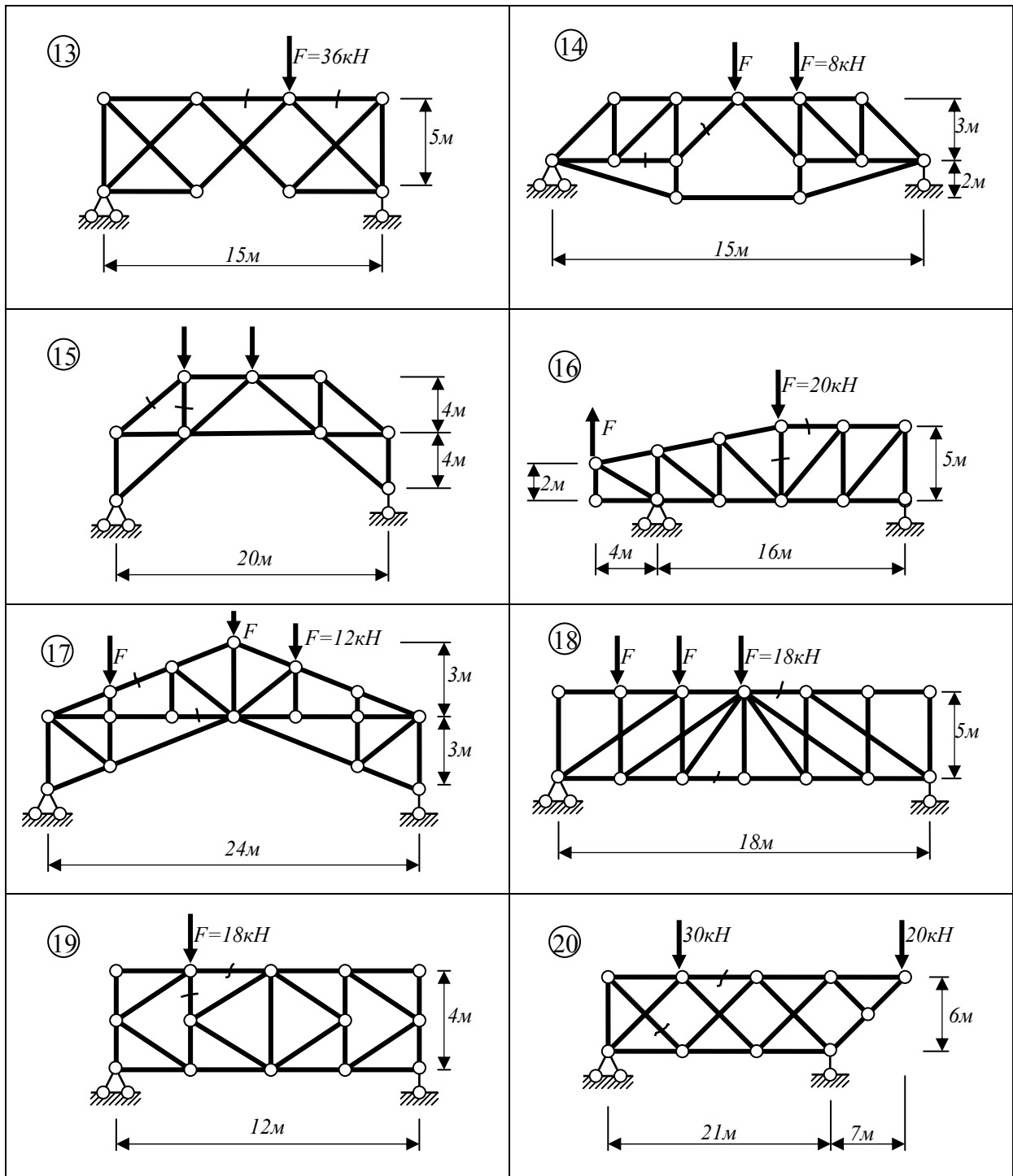


### 10 Статично визначувані ферми

Знайти нульові стержні та визначити зусилля у помічених рискою стержнях ферм раціональним способом.



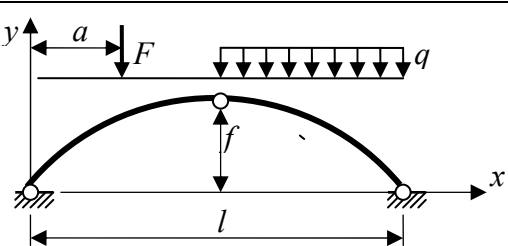
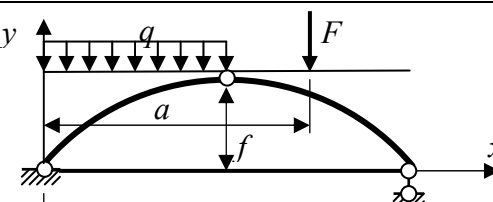
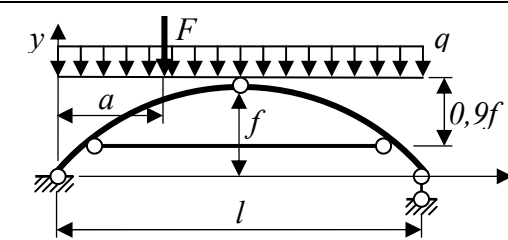
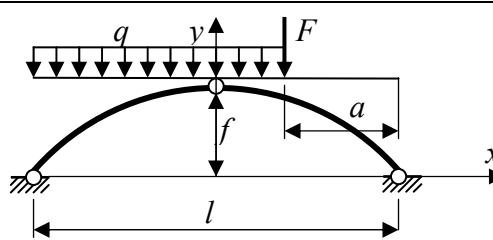
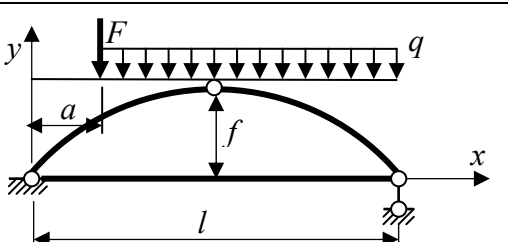
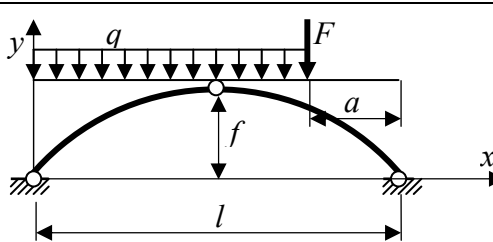
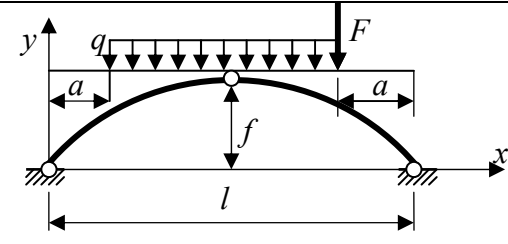
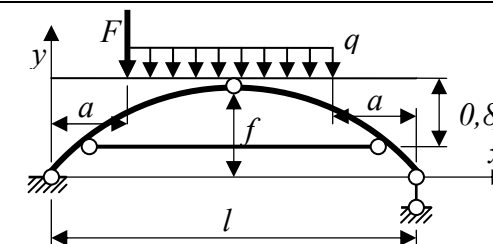




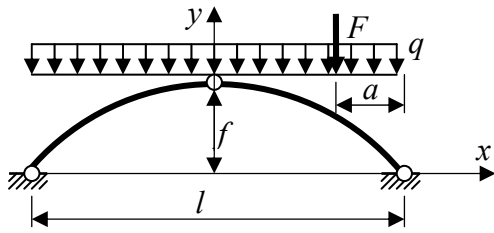


# 11 Тришарнірна арка

Визначити зусилля у перерізі арки на відстані  $c$  від лівої опори

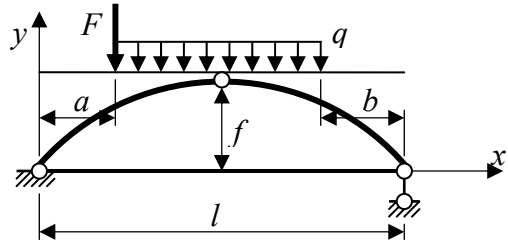
<p>1</p>  <p>Очертание оси – парабола. <math>q=8\text{кН/м}</math>; <math>F=20\text{кН}</math>; <math>l=20\text{м}</math>; <math>f=4\text{м}</math>; <math>a=4\text{м}</math>; <math>c=14\text{м}</math></p>	<p>2</p>  <p>Очертание оси – синусоида. <math>q=7\text{кН/м}</math>; <math>F=22\text{кН}</math>; <math>l=12\text{м}</math>; <math>f=4\text{м}</math>; <math>a=7\text{м}</math>; <math>c=5\text{м}</math></p>
<p>3</p>  <p>Очертание оси – эллипс. <math>q=6\text{кН/м}</math>; <math>F=24\text{кН}</math>; <math>l=18\text{м}</math>; <math>f=5\text{м}</math>; <math>a=4\text{м}</math>; <math>c=6\text{м}</math></p>	<p>4</p>  <p>Очертание оси – окружность. <math>q=6\text{кН/м}</math>; <math>F=24\text{кН}</math>; <math>l=21\text{м}</math>; <math>f=5\text{м}</math>; <math>a=4\text{м}</math>; <math>c=13\text{м}</math></p>
<p>5</p>  <p>Очертание оси – парабола. <math>q=8\text{кН/м}</math>; <math>F=20\text{кН}</math>; <math>l=22\text{м}</math>; <math>f=5\text{м}</math>; <math>a=4\text{м}</math>; <math>c=8\text{м}</math></p>	<p>6</p>  <p>Очертание оси – синусоида. <math>q=6\text{кН/м}</math>; <math>F=18\text{кН}</math>; <math>l=14\text{м}</math>; <math>f=4\text{м}</math>; <math>a=5\text{м}</math>; <math>c=5\text{м}</math></p>
<p>7</p>  <p>Очертание оси – эллипс. <math>q=6\text{кН/м}</math>; <math>F=16\text{кН}</math>; <math>l=18\text{м}</math>; <math>f=4\text{м}</math>; <math>a=4\text{м}</math>; <math>c=6\text{м}</math></p>	<p>8</p>  <p>Очертание оси – парабола. <math>q=10\text{кН/м}</math>; <math>F=20\text{кН}</math>; <math>l=16\text{м}</math>; <math>f=4\text{м}</math>; <math>a=4\text{м}</math>; <math>c=10\text{м}</math></p>

9



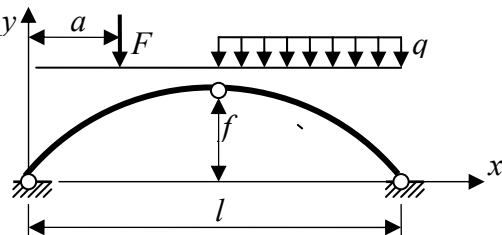
Очертание оси – окружность.  $q=6\text{кН/м}$ ;  
 $F=34\text{кН}$ ;  
 $l=24\text{м}$ ;  $f=6\text{м}$ ;  $a=4\text{м}$ ;  $c=8\text{м}$

10



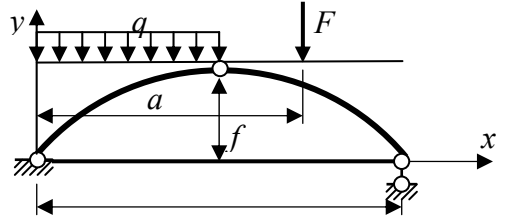
Очертание оси – синусоида.  $q=6\text{кН/м}$ ;  $F=21\text{кН}$ ;  
 $l=18\text{м}$ ;  $f=4\text{м}$ ;  $a=5\text{м}$ ;  $b=6\text{м}$ ;  $c=6\text{м}$

11



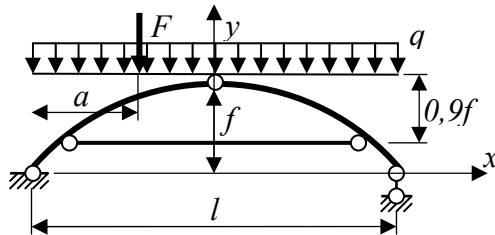
Очертание оси – синусоида.  $q=6\text{кН/м}$ ;  $F=21\text{кН}$ ;  
 $l=28\text{м}$ ;  $f=6\text{м}$ ;  $a=5\text{м}$ ;  $c=10\text{м}$

12



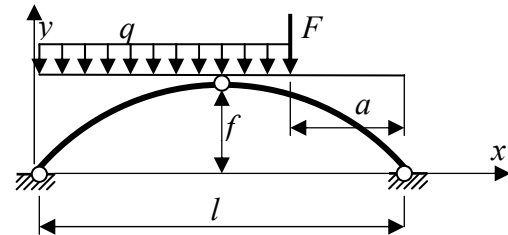
Очертание оси – синусоида.  $q=4\text{кН/м}$ ;  $F=22\text{кН}$ ;  
 $l=26\text{м}$ ;  $f=6\text{м}$ ;  $a=7\text{м}$ ;  $c=16\text{м}$

13



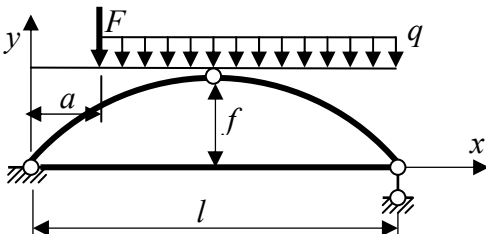
Очертание оси – окружность.  $q=10\text{кН/м}$ ;  
 $F=34\text{кН}$ ;  
 $l=20\text{м}$ ;  $f=5\text{м}$ ;  $a=4\text{м}$ ;  $c=3\text{м}$

14



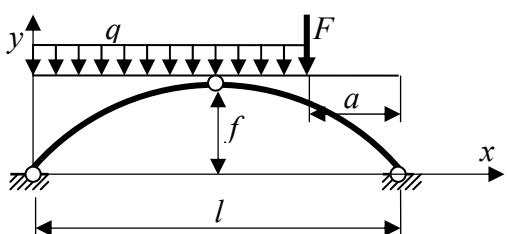
Очертание оси – эллипс.  $q=6\text{кН/м}$ ;  $F=24\text{кН}$ ;  
 $l=24\text{м}$ ;  $f=5\text{м}$ ;  $a=4\text{м}$ ;  $c=18\text{м}$

15



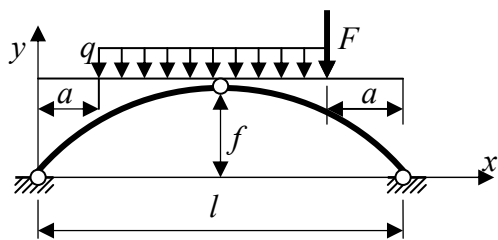
Очертание оси – парабола.  $q=8\text{кН/м}$ ;  $F=20\text{кН}$ ;  
 $l=14\text{м}$ ;  $f=3\text{м}$ ;  $a=4\text{м}$ ;  $c=6\text{м}$

16



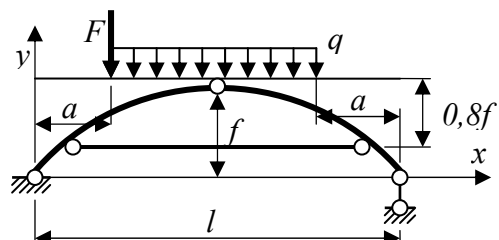
Очертание оси – синусоида.  $q=6\text{кН/м}$ ;  $F=28\text{кН}$ ;  
 $l=17\text{м}$ ;  $f=4\text{м}$ ;  $a=5\text{м}$ ;  $c=5\text{м}$

17



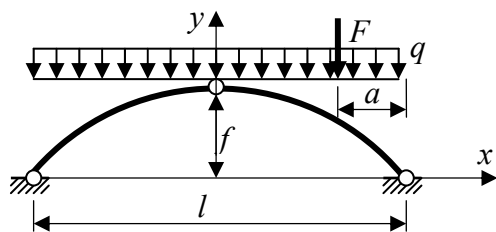
Очертание оси – парабола.  $q=7\text{кН/м}$ ;  $F=20\text{кН}$ ;  
 $l=12\text{м}$ ;  $f=4\text{м}$ ;  $a=4\text{м}$ ;  $c=9\text{м}$

18



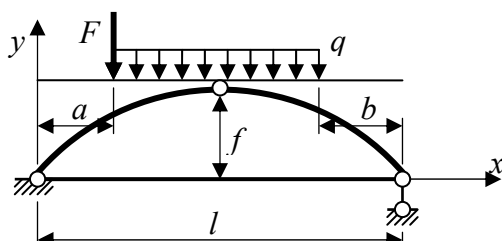
Очертание оси – эллипс.  $q=6\text{кН/м}$ ;  $F=18\text{кН}$ ;  
 $l=28\text{м}$ ;  $f=6\text{м}$ ;  $a=7\text{м}$ ;  $c=11\text{м}$

19



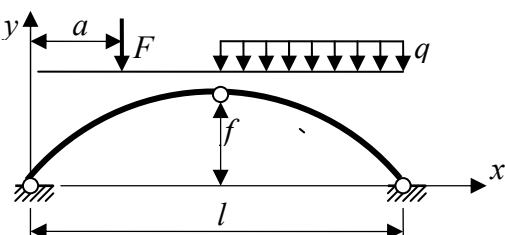
Очертание оси – окружность.  $q=12\text{кН/м}$ ;  
 $F=24\text{кН}$ ;  
 $l=18\text{м}$ ;  $f=5\text{м}$ ;  $a=4\text{м}$ ;  $c=13\text{м}$

20



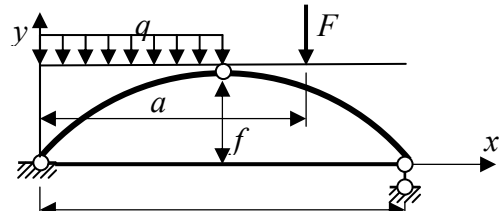
Очертание оси – парабола.  $q=11\text{кН/м}$ ;  $F=20\text{кН}$ ;  
 $l=15\text{м}$ ;  $f=4\text{м}$ ;  $a=4\text{м}$ ;  $b=2\text{м}$ ;  $c=6\text{м}$

21



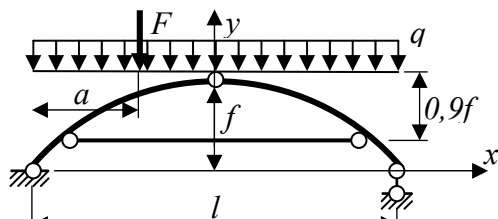
Очертание оси – синусоида.  $q=7\text{кН/м}$ ;  $F=22\text{кН}$ ;  
 $l=12\text{м}$ ;  $f=4\text{м}$ ;  $a=7\text{м}$ ;  $c=10\text{м}$

22



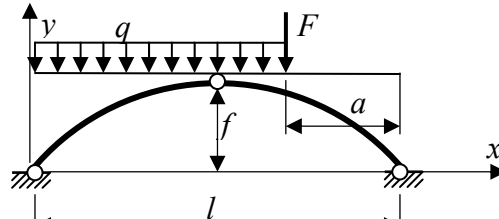
Очертание оси – парабола.  $q=8\text{кН/м}$ ;  $F=20\text{кН}$ ;  
 $l=20\text{м}$ ;  $f=4\text{м}$ ;  $a=4\text{м}$ ;  $c=15\text{м}$

23

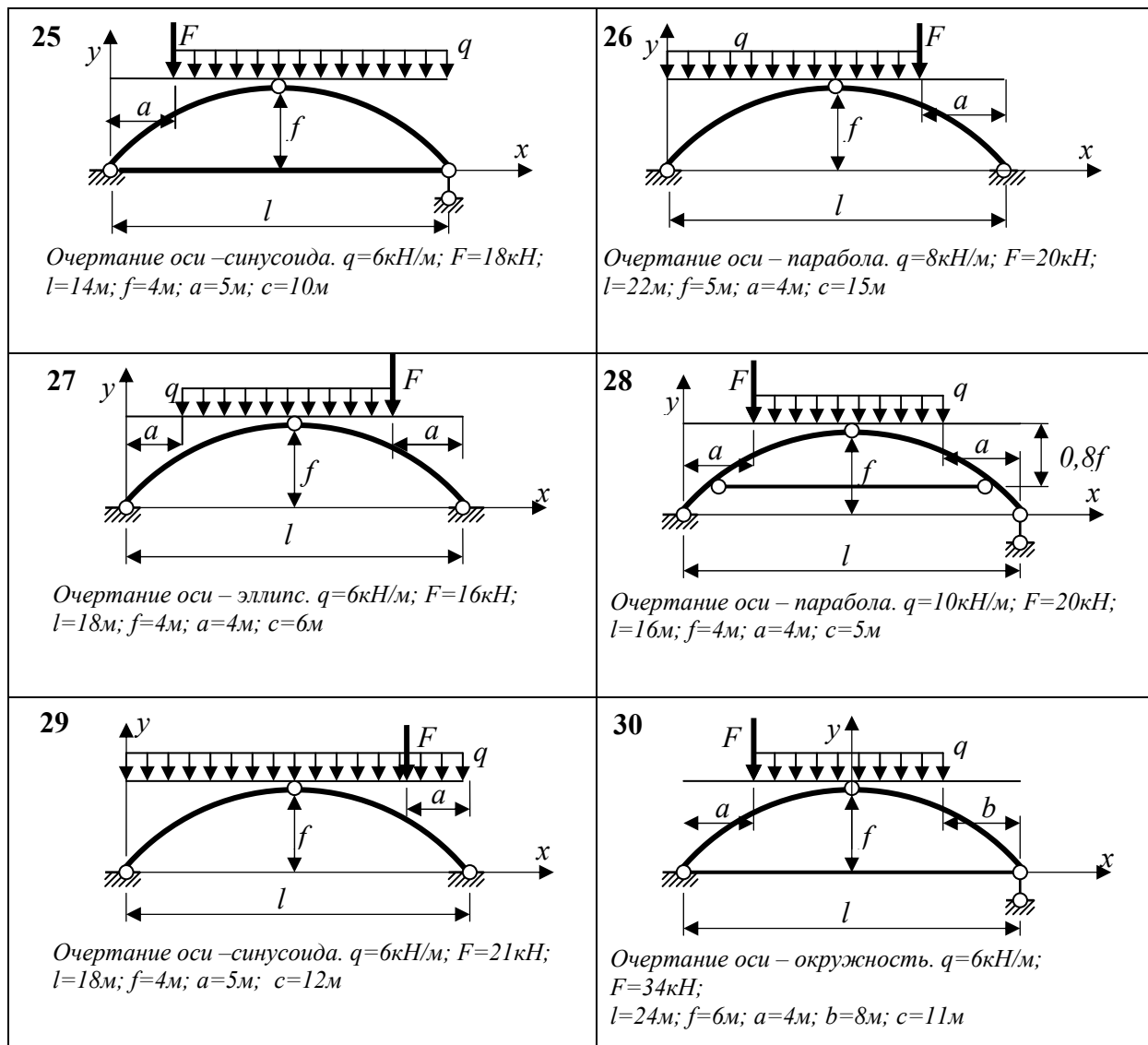


Очертание оси – окружность.  $q=6\text{кН/м}$ ;  
 $F=24\text{кН}$ ;  
 $l=21\text{м}$ ;  $f=5\text{м}$ ;  $a=4\text{м}$ ;  $c=18\text{м}$

24



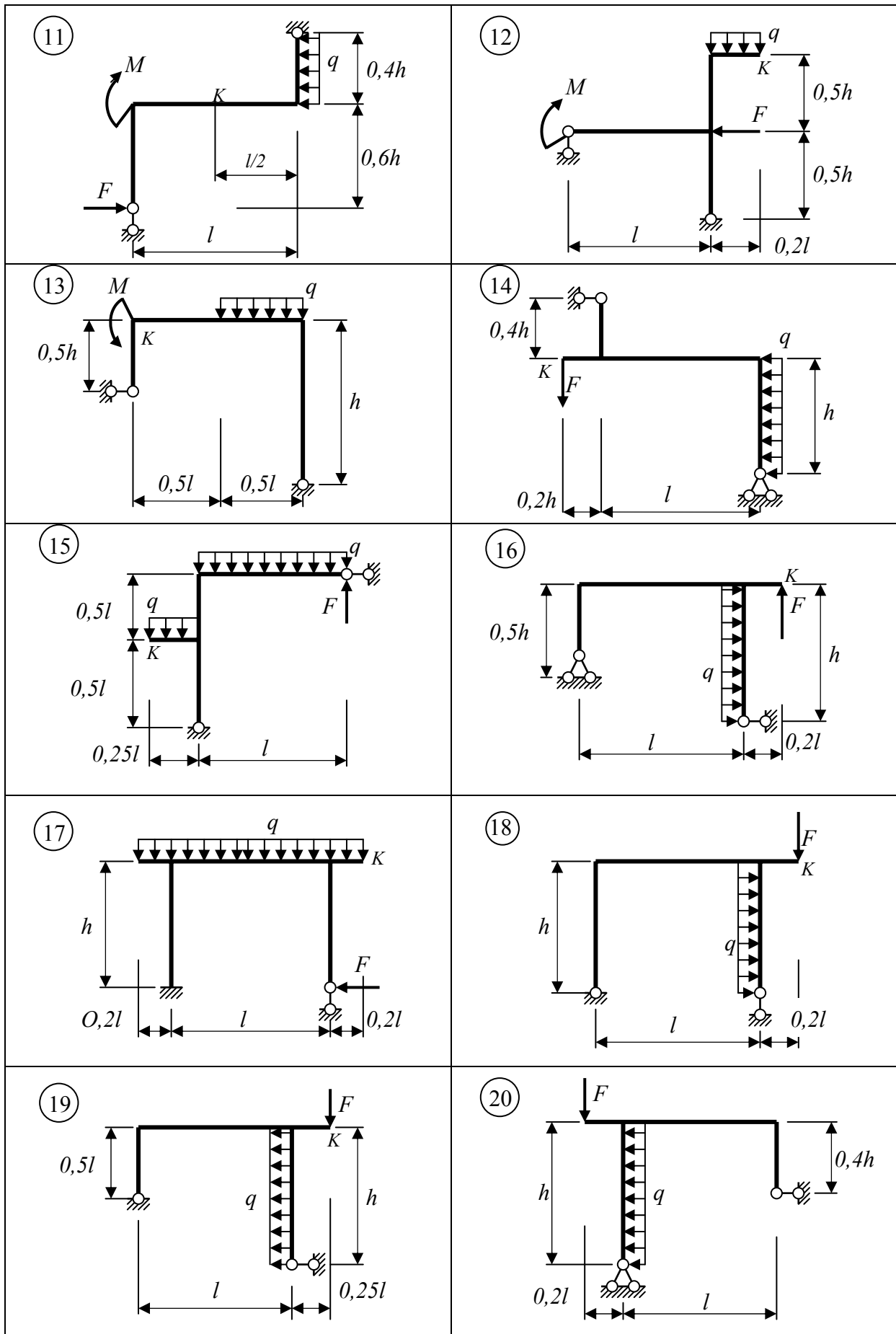
Очертание оси – эллипс.  $q=6\text{кН/м}$ ;  $F=24\text{кН}$ ;  
 $l=18\text{м}$ ;  $f=5\text{м}$ ;  $a=4\text{м}$ ;  $c=11\text{м}$



## 12 Визначення переміщень

Визначити вертикальне та горизонтальне переміщення, а також кут повороту перерізу К при  $l = 6\text{м}$ ;  $h = 4\text{м}$ ;  $F = 20\text{кН}$ ;  $q = 4\text{кН/м}$ ;  
 $M = 25\text{кНм}$ ;  $EI = \text{const}$ .





## Список джерел

1. **Шутенко Л. М.** Механіка споруд. / Л .М. Шутенко В. П. Пустовойтов, М .А. Засядько - Харків : ХДАМГ, 2001. – 234 с.
2. **Чихладзе Э. Д.** Строительная механика: Учебник для студентов высших учебных заведений / Э. Д. Чихладзе –Харьков: УкрГАЗТ, 2004.-305 .
3. **Шутенко Л.М.,** Будівельна механіка : Конспект лекцій. / Л. М. Шутенко, В. П. Шпачук, М. А. Засядько – Харків : ХНАМГ, 2011. – 169 с.
4. **Шутенко Л.М.** Механіка споруд. Керівництво до практичних занять. Л .М. Шутенко, В. П. Пустовойтов, М. А. Засядько – Харків : ХДАМГ, 2002. – 239 с.
5. **Строительная механика. Руководство к практическим занятиям** / Под ред. Ю.И. Бутенко. – Киев : Вища школа. 1989. – 367с.
6. **Баженов, В. А .** Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Задачі. Комп'ютерне тестування : Навчальний посібник. / В.А. Баженов – Київ : Каравела, 2010.
7. **Строительная механика. Стержневые системы** : учебник для вузов / А.Ф.Смирнов, А.В.Александров, Б.Я.Лашеников, Н.Н.Шапошников; Под ред. А.Ф.Смирнова. – Москва : Стройиздат, 1981. – 512с.

*Навчальне видання*

Методичні вказівки  
до практичних занять, самостійної роботи, виконання  
контрольних і розрахунково-графічних завдань з курсу

## **«Будівельна механіка»**

(для студентів 3 курсу денної і заочної форм навчання бакалаврів за  
напрямом 6.060101 Будівництво)

Укладач: **Засядько** Микола Андрійович

Відповідальний за випуск *А. О. Гарбуз*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *М. А. Засядько*

План 2011, поз. 179м

---

Підп. до друку 17.02.2012

Друк на ризографі

Тираж 50 пр.

Формат 60\*84/16

Ум. друк. арк. 4,7

Зам. №

Видавець і виготовлювач:

Харківський національний університет  
міського господарства імені О. М. Бекетова,  
вул. Революції, 12, Харків, 61002

Електронна адреса: [rectorat@kname.edu.ua](mailto:rectorat@kname.edu.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:

ДК № 4705 від 28.03.2014 р.