УДК 692.25

ПОДПОРНАЯ СТЕНА РАЦИОНАЛЬНОГО ОЧЕРТАНИЯ

Калмыков О.А.

Харьковская национальная академия городского хозяйства
г. Харьков, Украина

АНОТАЦІЯ: Запропоновано метод і розглянуто процедуру формування конструкції підпірної стіни полегшеного типу. Побудовано точний і спрощуючий аналітичний розв'язок задачі. Результати зіставлені.

АННОТАЦИЯ: Предложен метод и рассмотрена процедура формирования конструкции подпорной стены облегченного типа. Построено точное и упрощающее аналитическое решение задачи. Результаты сопоставлены.

ABSTRACT: The method and the procedure for forming a retaining wall design light type is proposed. Exact and simplifies the analytical solution is down. The results were compared.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: подпорная стена, активное давление, дифференциальное уравнение.

ВВЕДЕНИЕ

Создание конструкций с заданными положительными свойствами является одной из приоритетных задач современной строительной науки. Сказанное предопределяет разработку методов и средств проектирования и возведения эффективных систем, минимизирующих их вес. В связи с этим, традиционный (обратный) подход, принятый в проектировании, не может обеспечить интегральную позитивность решений. Альтернативой ему являются информационные технологии, базирующиеся на общей теории систем, включающей такие разделы, как математическое моделирование, синергетика, информатика. В результате построены алгоритмы поиска рациональной структуры конструкции, геометрия которой обеспечивает заданную трансформацию эпюры горизонтального активного давления на стену.

ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Предлагаемая постановка задачи фундирована гипотезами и допущениями, соответствующими теории Кулона (рис. 1), а именно [1]:

- форма разрушения биагрегата, состоящего из подпорной стены и удерживаемого ею массива грунта, представлена перемещением стены в сторону от грунта с одновременным сползанием некоторой призмы последнего по некоторой поверхности скольжения;
- рассматриваются две поверхности скольжения: задняя часть стены и некоторая плоскость, которая является границей неподвижной части грунта;
- сползающая призма представляет собой абсолютно твердое тело, что позволяет заменить действующие на нее объемные и поверхностные силы их равнодействующими G; Q; R (G – собственный вес; Q – реакция подпорной стены; R – реакция неподвижного грунта);
- грунт является сыпучим телом, лишенным сцепления;
- рассматривается биагрегат в состоянии предельного равновесия, соответствующего начальному моменту перемещения стены и скольжению призмы грунта. Поэтому принято, что реактивные силы, действующие на скользящую призму со стороны стены и неподвижной части грунта, отклоняются от нормалей к соответствующим плоскостям на углы φ_o и φ, равные углам трения грунта по этим плоскостям;
- рассматривается начальный момент процесса разрушения системы в связи с чем, условия равновесия записываются для ее недеформированного состояния;
- задача рассматривается как плоская.

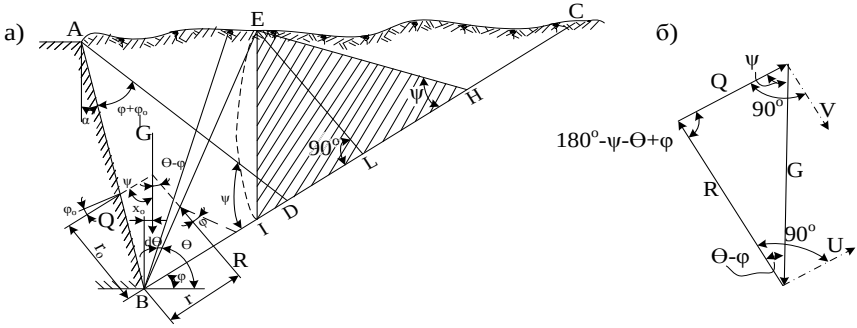

Рис. 1. Расчетная схема биагрегата

Углы силового треугольника (рис. 1) равны:

$$\psi = 90^o - \alpha - \varphi_o;$$
$$\theta - \varphi; \qquad (1)$$
$$180^o - \psi - \theta + \varphi,$$

где α – угол между вертикальной плоскостью и задней гранью стены;

θ - неизвестный угол между горизонтальной плоскостью и плоскостью скольжения.

Из изложенного следует, что реакция подпорной стены равна искомому активному давлению на нее грунта, но направлена в противоположную сторону. В [1], на основании приведенных гипотез, получено выражение для равнодействующей активного давления:

$$Q = \frac{\gamma \cdot h^2}{2} \lambda, \qquad (2)$$

где γ – объемный вес грунта;

h – высота проекции стены на вертикальную плоскость;

λ – коэффициент активного давления грунта.

Учитывая логическую направленность задачи, а также с целью упрощения ее постановки (без нарушения общности), положим:

- внешняя поверхность грунта ограничена горизонтальной плоскостью, т.е. $\overline{\beta} = 0$;

- задняя грань стены считается идеально гладкой, тогда φ_o=0.

$$\lambda = \left[tg\left(45 - \frac{\varphi + \alpha}{2}\right) + tg\alpha \right]^2 \cos\alpha \cdot \qquad (3)$$

Анализ (3) позволяет принять в качестве внешнего управляющего параметра угол наклона стены к вертикали α [2].

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рационализация системы, в определенной степени, может быть осуществлена путем уменьшения давления грунта на подпорную стену. Последнее реализуется за счет придания задней поверхности стены определенного очертания. Принимая концепцию о независимом априорном формировании распределения горизонтального давления (например, постоянного), отнесенного к единице поверхности стены, можно записать:

$$\sigma = \lambda \cdot \gamma \cdot (z_o + z_1), \qquad (4)$$

где: $z=z_o+z_1$ – текущая глубина (рис. 2);

σ – интенсивность нормального давления на стену на глубине z от поверхности засыпки;

z_o – глубина, на уровне которой горизонтальное давление принимается в качестве начального (рис. 2).

Область значений угла α лежит в пределе:

$$-\varphi < \alpha \le 0\,. \tag{5}$$

Пределы устанавливаются из физического смысла задачи.

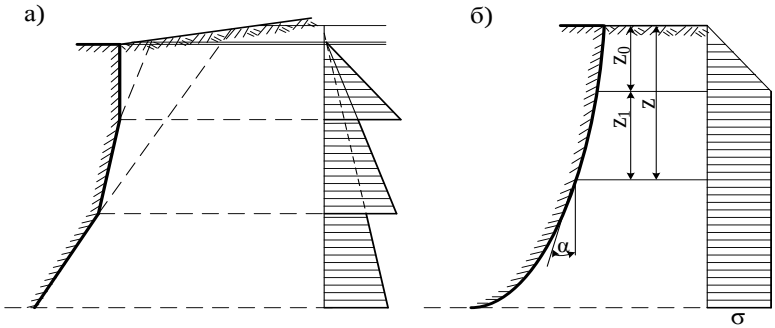

Рис. 2. К поиску геометрии стены

Введем далее обозначение: $\psi = 45° - \dfrac{\varphi}{2}$.

Из геометрического смысла первой производной следует, что

$$y' = \frac{dy}{dz} = tg\,\alpha\,, \tag{6}$$

где $y=y(z)$ – функция, описывающая геометрию задней поверхности подпорной стены.

Произведя тригонометрические преобразования, описанные в [3], с учетом (6) получим:

$$\lambda == \left[\frac{tg\,\psi + \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{1}{1+tg^2\alpha}}}{1+\sqrt{\dfrac{1}{1+tg^2\alpha}}}}}{1 - tg\,\psi \cdot \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{1}{1+tg^2\alpha}}}{1+\sqrt{\dfrac{1}{1+tg^2\alpha}}}}} - tg\,\alpha\right]^2 \sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}} = \left[\frac{tg\,\psi + \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{1}{1+y'^2}}}{1+\sqrt{\dfrac{1}{1+y'^2}}}}}{1 - tg\,\psi \cdot \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{1}{1+y'^2}}}{1+\sqrt{\dfrac{1}{1+y'^2}}}}} - y'\right]^2 \sqrt{\frac{1}{1+y'^2}}.$$

Произведем замену переменной:

$f=\sqrt{\frac{1}{1+y'^2}}$, и выразим из данного уравнения y':

$$f^2=\frac{1}{1+y'^2};\quad \frac{1}{f^2}=1+y'^2\ ;\quad y'^2=\frac{1-f^2}{f^2};\quad y'=tg\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-f^2}{f^2}}\cdot$$

Из (4) следует: $\lambda=\frac{\sigma}{\gamma(z_o+z_1)}$,

где:$z=z_o+z_1$ – текущая глубина (рис. 2).

Окончательно: $\lambda=\frac{\sigma(z)}{z\cdot\gamma}$; далее $\frac{\sigma(z)}{z\cdot\gamma}=F^2(z)\Rightarrow F(z)=\sqrt{\frac{\sigma(z)}{z\cdot\gamma}}\cdot$

Учитывая, что величины γ, z_o, φ известны заранее, а величину интенсивности нормального давления можно представить в виде известной функции от глубины σ=σ(z), допустимо записать следующее уравнение:

$$\left[\frac{tg\psi+\sqrt{\frac{1-f}{1+f}}}{1-tg\psi\cdot\sqrt{\frac{1-f}{1+f}}}-\sqrt{\frac{1-f^2}{f^2}}\right]^2 f=F^2(z). \qquad (7)$$

Пусть далее: $k^2=\frac{1-f}{1+f}$, тогда $f=\frac{1-k^2}{1+k^2}$; $\frac{1-f^2}{f^2}=\frac{4k^2}{\left(1-k^2\right)^2}$;

$$\sqrt{\frac{1-f^2}{f^2}}=\sqrt{\frac{4k^2}{\left(1-k^2\right)^2}}=\frac{2k}{1-k^2}\cdot\cdot$$

В результате имеем:

$$\left[\frac{tg\psi+k}{1-tg\psi\cdot k}-\frac{2k}{1-k^2}\right]^2\frac{1-k^2}{1+k^2}=F^2(z)\cdot$$

Произведя алгебраические преобразования данного выражения, окончательно получим:

$$k^4+\delta_2\cdot k^3+\delta_3\cdot k^2+\delta_4\cdot k+\delta_5=0\ , \qquad (8)$$

где: $\delta_2=\frac{-2tg\psi-2F^2(z)\cdot tg\psi}{1+F^2(z)\cdot tg^2\psi}$; $\delta_3=\frac{1+tg^2\psi-F^2(z)\cdot tg^2\psi+F^2(z)}{1+F^2(z)\cdot tg^2\psi}$;

$$\delta_4=\frac{2\cdot F^2(z)\cdot tg\psi-2\cdot tg\psi}{1+F^2(z)\cdot tg^2\psi};\quad \delta_5=\frac{tg^2\psi-F^2(z)}{1+F^2(z)\cdot tg^2\psi},$$

где: z_o – глубина, в пределах которой давление нарастает линейно до необходимой величины $\sigma(z_0)$, (рис. 2);

z – переменная глубина, (рис. 2);

$\sigma(z)$ - давление на уровне z;

Для частного случая $\sigma(z) = \sigma = const$, ординаты кривой не зависят от удельного веса грунта - γ . Отметим также, что решение (8) целесообразно строить численными методами.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

С целью построения аналитического решения (8) (что упрощает анализ), введем следующую гипотезу

$$\cos\alpha = \cos^2\alpha \tag{9}$$

Угол наклона стены α зависит от угла внутреннего трения φ. Увеличение φ приводит к уменьшению α. Из физического смысла задачи следует, что область определения угла α находится в пределах: $-\varphi < \alpha \le 0$. Как известно [4] φ для различных грунтов лежит в пределах: $7^0 < \varphi \le 43^0$.

Равенство (9) с погрешностью, не превышающей 20 %, имеет силу для $\alpha \in \{0^0\ ,\ 36^0\}$, что составляет 83% области определения угла внутреннего трения φ. В остальных же случаях погрешность может достигать 37%.

После введения (9) разрешающее уравнение примет вид:

$$\lambda = \left[tg\left(45 - \frac{\varphi+\alpha}{2}\right) + tg\,\alpha \right]^2 \cos^2\alpha \cdot$$

Произведя аналогичные преобразования и замены выражение (7) примет вид:

$$\left[\frac{tg\,\psi + \sqrt{\dfrac{1-f}{1+f}}}{1 - g\psi \cdot \sqrt{\dfrac{1-f}{1+f}}} - \sqrt{\frac{1-f^2}{f^2}} \right]^2 f^2 = F^2(z).$$

Как и ранее произведя еще одну замену: $k^2 = \dfrac{1-f}{1+f}$,

получим: $\left[\dfrac{tg\,\psi + k}{1 - g\psi \cdot k} - \dfrac{2k}{1-k^2} \right]^2 \left(\dfrac{1-k^2}{1+k^2} \right)^2 = F^2(z) \cdot$

Извлекая корень из левой и правой части уравнения, имеем:

$$\left[\frac{tg\,\psi + k}{1 - g\psi \cdot k} - \frac{2k}{1-k^2} \right] \left(\frac{1-k^2}{1+k^2} \right) = F(z); \quad \left[\frac{tg\,\psi - k^3 + k^2 tg\,\psi - k}{(1 - g\psi \cdot k)(1-k^2)} \right] \left(\frac{1-k^2}{1+k^2} \right) = F(z);$$

$$\frac{(1+k^2)(tg\,\psi - k)}{(1 - g\psi \cdot k)(1-k^2)} \frac{(1-k^2)}{(1+k^2)} = F(z); \quad \frac{(tg\,\psi - k)}{(1 - g\psi \cdot k)} = F(z); \quad k = \frac{F(z) - tg\,\psi}{F(z) \cdot tg\,\psi - 1};$$

$$y' = \pm\sqrt{\frac{1-f^2}{f^2}} = \pm\frac{2k}{1-k^2}\,;\ y = \pm\int\frac{2k}{1-k^2}dz\,;\ \text{где: } k^2 = \left[\frac{F(z)-tg\,\psi}{F(z)\cdot tg\,\psi-1}\right]^2;$$

$$\frac{2k}{1-k^2} = \frac{2\left(F(z)-tg\,\psi\right)\left(F(z)\cdot tg\,\psi-1\right)}{\left(F^2(z)-1\right)\left(tg^2\psi-1\right)}.$$

Дифференцируя левую и правую часть уравнения $F^2(z) = \dfrac{\sigma(z)}{z\cdot\gamma}$, определим dz:

$$2F(z)dF(z) = \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{d\sigma(z)\cdot z-\sigma(z)\cdot dz}{z^2} = \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{dz\left(z\cdot\dfrac{d\sigma(z)}{dz}-\sigma(z)\right)}{z^2};$$

$$dz = \frac{2F(z)z^2\cdot\gamma\cdot dF(z)}{\left(z\cdot\dfrac{d\sigma(z)}{dz}-\sigma(z)\right)};$$

$$y = \pm\int\frac{2\left(F(z)-tg\,\psi\right)\left(F(z)\cdot tg\,\psi-1\right)}{\left(F^2(z)-1\right)\left(tg^2\psi-1\right)}\frac{2F(z)z^2\cdot\gamma}{\left(z\cdot\dfrac{d\sigma(z)}{dz}-\sigma(z)\right)}dF(z). \qquad (10)$$

Рассмотрим частный случай $\sigma(z) = const = \sigma$, тогда $F(z) = \sqrt{\dfrac{\sigma}{z\cdot\gamma}}$:

$$dz = -\frac{2F(z)z^2\cdot\gamma\cdot dF(z)}{\sigma}\cdot\frac{\gamma\cdot\sigma}{\gamma\cdot\sigma} = -\frac{2\cdot F(z)\cdot\sigma}{F^4(z)\cdot\gamma}dF(z) = -\frac{2\cdot\sigma}{F^3(z)\cdot\gamma}dF(z);$$

$$y = \mp\frac{4\cdot\sigma}{\gamma}\int\frac{\left(F(z)-m\right)\left(F(z)\cdot m-1\right)}{\left(F^2(z)-1\right)\left(m^2-1\right)\cdot F^3(z)}dF(z), \quad \text{где } tg^2\psi = m$$

$$y = \mp\frac{4\cdot\sigma\cdot m}{\gamma\left(m^2-1\right)}\left[\int\frac{1}{\left(F^2(z)-1\right)\cdot F(z)}dF(z) - \frac{\left(m^2+1\right)}{m}\int\frac{1}{\left(F^2(z)-1\right)\cdot F^2(z)}dF(z) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \int\frac{1}{\left(F^2(z)-1\right)\cdot F^3(z)}dF(z)\right]. \qquad (11)$$

Интегралы в (13),берутся замкнуто. Получим:

$$y = \mp\frac{4\cdot\sigma\cdot m}{\gamma\left(m^2-1\right)}\left[\frac{1}{2\cdot F^2(z)} - \ln\left(\frac{F^2(z)}{1-F^2(z)}\right) + \frac{\left(m^2+1\right)}{m}\left(-\frac{1}{F(z)} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+F(z)}{1-F(z)}\right)\right)\right]. \qquad (12)$$

Введем обозначение:

$$\Omega(F(z)) = \left[\frac{1}{2\cdot F^2(z)} - \ln\left(\frac{F^2(z)}{1-F^2(z)}\right) + \frac{\left(m^2+1\right)}{m}\left(-\frac{1}{F(z)} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+F(z)}{1-F(z)}\right)\right)\right]. \qquad (13)$$

И окончательно:

$$y = \mp \frac{4 \cdot \sigma \cdot m}{\gamma\left(m^2 - 1\right)} \Omega(F(z)) \cdot \qquad (14)$$

Оценка погрешности приближенного аналитического решения произведена путем сравнения площадей эпюр давления. Как видно из рис.3 для большинства случаев погрешность не превышает 25 %.

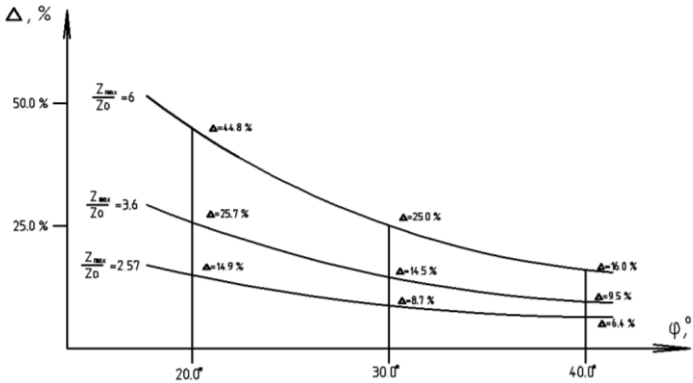

Рис. 3. Погрешность (%) аналитического решения в зависимости от угла внутреннего трения φ.

ВЫВОД

Совместное рассмотрение системы «подпорная стена – грунт» повышает корректность модели, обеспечивая учет особенностей сопротивления этого биагрегата. Прямой (оптимизационный) подход позволяет создать конструкцию, обладающую рациональными характеристиками и высокими конкурентноспособными показателями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клейн Г.К. Расчет подпорных стен / Клейн Г.К. - М.: Высшая школа, 1964. - 196 с.
2. Шмуклер В.С. Каркасные системы облегченного типа / Шмуклер В.С., Климов Ю.А., Бурак Н.П. - Харьков: Золотые страницы, 2008. – 336 с.
3. О поиске рационального очертания задней поверхности подпорной стены / [В.С Шмуклер, Е.И. Лугченко, О.А. Калмыков, В.М. Зинченко] // Науковий вісник будивництва. – Харків: ХДТУБА, ХОТВ АБУ, 2011. – Вип. 66. – С. 203-210.

Статья поступила в редакцию 05.02.2013 г.