МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

В. О. ЄСІНА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

(для студентів всіх форми навчання
за напрямом підготовки 6.030504 – Економіка підприємства)

ХАРКІВ – ХНУМГ ім. О. М. Бекетова – 2016

Єсіна В. О. Конспект лекцій з дисципліни «**Оптимізаційні методи і моделі»** (для студентів всіх форм навчання за напрямом підготовки 6.030504 – Економіка підприємства) / В. О. Єсіна; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. – 64 с.

Автор: В. О. Єсіна

Рецензент: доц., канд. екон. наук Н. М. Матвєєва

Рекомендовано кафедрою економіки підприємств, бізнес-адміністрування та регіонального розвитку, протокол № 1 від 27. 08. 2013 р

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасний етап розвитку нашої держави зумовлює високі вимоги до оцінки ефективності функціонування економічних систем різних рівнів. Але основна увага приділяється саме підприємству як первинній, основній, самостійній ланці народного господарства, що створює конкретні економічні блага, а отже, є першоосновою національного багатства України.

До економічних завдань оптимізаційного типу відносяться завдання, в яких потрібно знайти найкраще або оптимальне рішення при заданих умовах виробництва. Такі завдання називаються завданнями на максимум або мінімум. Особливістю завдань оптимізаційного типу є багатоваріантність їх рішень, обумовлена наступними причинами: взаємозамінністю ресурсів; взаємозамінністю готових видів продукції; існуванням альтернативних технологій виробництва; неоднаковістю техніко-економічних показників навіть однотипних господарських суб'єктів.

Основним методом розрахунку та моделювання економічних систем та розв’язання задач із великою кількістю невідомих є лінійне програмування.

Лінійне програмування – це назва, дана комбінації інструментів використовуваних у науці про управління. Цей метод вирішує проблему розподілу обмежених ресурсів між конкуруючими видами діяльності з тим, щоб максимізувати або мінімізувати деякі чисельні величини, такі як маржинальний прибуток або витрати. У бізнесі він може використовуватися в таких областях як планування виробництва для максимального збільшення прибутку, підбір комплектуючих для мінімізації витрат, вибір портфеля інвестицій для максимізації прибутковості, оптимізація перевезень товарів з метою скорочення відстаней, розподіл персоналу з метою максимально збільшити ефективність роботи і складання графіка робіт у цілях економії часу.

Даний конспект лекцій присвячено практичному засвоєнню навчального матеріалу та допомоги студентам при підготовці до занять.

ТЕМА 1 ПРЕДМЕТ, ЗАВДАННЯ ТА МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗАСАДИ КУРСУ

1.1 Основні поняття курсу
1.2 Постановка оптимізаційних задач
1.3 Найпростіша класифікація задач математичного програмування

1.1 Основні поняття курсу

Важливим завданням сучасності є керування економічними системами, оптимізація їх структури, траєкторії розвитку й функціонування з метою досягнення максимальної економічної ефективності. Ці проблеми вивчає наука, яку називають ***теорією дослідження операцій***. Вона охоплює всі етапи вивчення систем, у тому числі економічних: від з'ясування мети (цілі) функціонування й розвитку, побудови економіко-математичної моделі та відшукання оптимального розв'язку до розробки плану практичної реалізації здобутих результатів дослідження та забезпечення реалізації цього плану.

Математичне програмування – один з головних інструментів теорії дослідження операцій – полягає в розробленні методів розв'язування оптимізаційних задач та дослідження отриманого розв'язку.

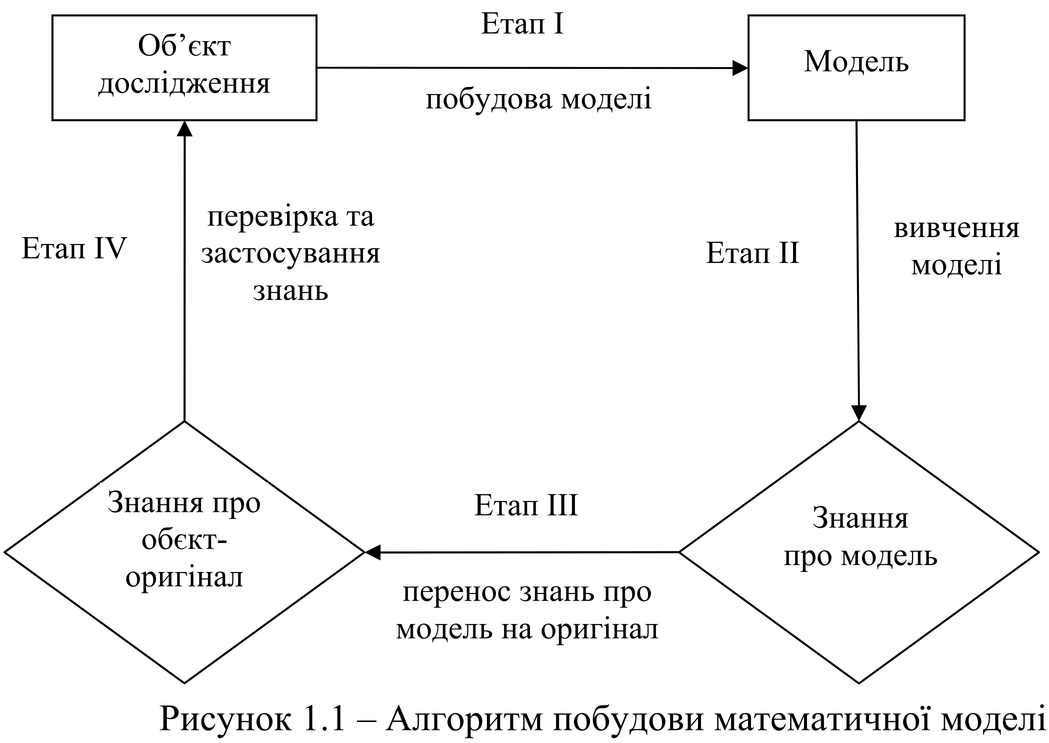

Рисунок 1.1 – Алгоритм побудови математичної моделі

Моделювання в економіці – це відтворення економічних об'єктів і процесів в обмежених, малих, експериментальних формах, у штучно створених умовах.

Економічну систему можна схематично подати у вигляді прямокутника (рис. 1.2).

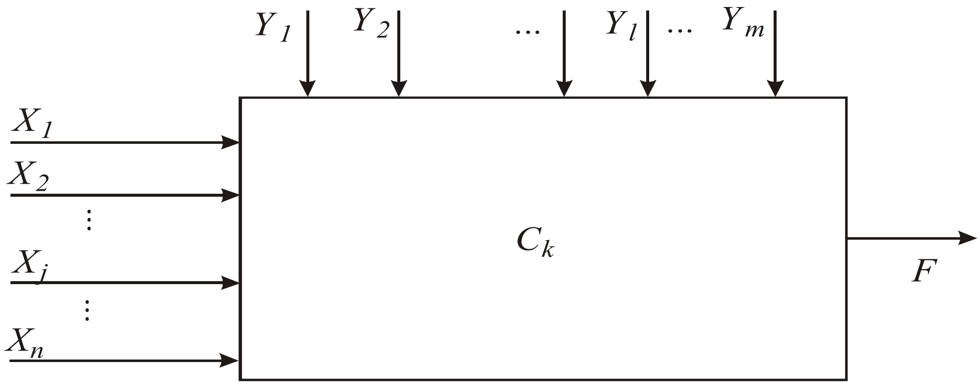

Рисунок 1.2 – Схема виробничо-економічної системи

Параметри $C_k \ (k = 1, 2, \ldots, l)$ є кількісними характеристиками системи. Наприклад, якщо йдеться про підприємство як економічну систему, то значення C_k характеризують наявність ресурсів (виробничих (основних) фондів, трудових ресурсів, матеріальних ресурсів та складські приміщення), рівень фондовіддачі та продуктивності праці, норми витрат ресурсів, ціну та собівартість проміжної і кінцевої продукції, норми податків, проценти за кредит, ціни на куповані ресурси тощо.

Параметри C_k для певної системи можуть бути сталими, наприклад заробітна плата та соціальні відрахування управлінського персоналу, амортизаційні відрахування, орендна плата, виплата відсотків за кредитом та ін., або їх значення залежатиме від певних умов, як, скажімо, соціально-економічної ситуації, рівня політичної активності в країні.

Інші кількісні характеристики є змінними величинами, які бувають незалежними чи залежними, дискретними або неперервними, детермінованими або випадковими. Наприклад, залежною змінною є обсяг чистого прибутку, незалежною – запланована кількість браку на підприємстві, дискретною – кількість основного виробничого персоналу, неперервною – гарантійний запас матеріальних ресурсів на складі для безперебійної діяльності, детермінованою – норма висіву насіння кукурудзи на гектар, випадковою – кількість телят, які народяться у плановому періоді.

Дискретна величина – на відміну від неперервних величин задані тільки окремим значенням. В економіці використовуються саме такі величини та показники, значення яких фіксується та розраховуються тільки на визначені моменти та в визначені періоди (місяць, квартал, рік).

Незалежні змінні бувають двох видів: керовані $X_j\,(j=1,2,\ldots,n)$, значення яких можна змінювати в деякому інтервалі; некеровані змінні $Y_i\,(i=1,2,\ldots,m)$, значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Наприклад, для сільськогосподарського підприємства площа посіву зернових культур, показники виробничої програми (плав обсягу виробництва) – керовані, а погодні умови – некеровані змінні. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу – некерованою.

1.2 Постановка оптимізаційних задач

Кожна економічна система має мету (ціль) розвитку та функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай *F* – обрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною *F,* якою вимірюється ступінь досягнення мети, і незалежними змінними та параметрами системи:

$$F=f\,(X_1,X_2,\ldots,X_n;\quad Y_1,Y_2,\ldots,Y_m,C_1,C_2,\ldots,C_l). \qquad (1.1)$$

Функцію *F* називають ***цільовою функцією,*** або ***функцією мети***. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення *F* відбиває ступінь досягнення певної мети.

Задача математичного програмування формулюється так:

Знайти такі значення керованих змінних X_j $(j=\overline{1,n})$ щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Отже, потрібно відшукати значення

$$F^*=\max(\min)f\,(X_1,X_2,\ldots,X_n,Y_1,Y_2,\ldots,Y_m,C_1,C_2,\ldots,C_l). \qquad (1.2)$$

Можливості вибору X_j завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи та ін.

Наприклад, виробнича програма (план виробництва) обмежена наявністю інших ресурсів, виходу на роботу працівників, можливістю реалізації продукції (отримання грошових коштів для закупки матеріальних ресурсів), необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівностей та нерівностей виду

$$q_r(X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m, C_1, C_2, \ldots, C_l)\{\le, =, \ge\}\,0 \quad (r = 1, 2, \ldots, S) \qquad (1.3)$$

Тут набір символів $\{\le, =, \ge\}$ означає, що для деяких значень поточного індексу r виконуються нерівності типу ≤, для інших – рівності (=), а для решти – нерівності типу ≥.

Система (1.3) називається ***системою обмежень,*** або ***системою умов*** задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні X_j мають бути невід'ємними:

$$X_j \ge 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1.4)$$

Вирази (1.2)-(1.4) є ***економіко-математичною моделлю*** цієї економічної системи. Розробляючи таку модель, слід керуватися певними правилами:

1. Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.

2. У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, неістотним у ньому. Математичне моделювання – це мистецтво, вузька стежка між переспрощенням та переускладненням. Справді, прості моделі не забезпечують відповідної точності, і «оптимальні» розв'язки за такими моделями, як правило не відповідають реальним ситуаціям, дезорієнтують користувача, а переускладнені моделі важко реалізувати на ЕОМ як з огляду на неможливість інформаційного забезпечення, так і через відсутність відповідних методів оптимізації.

3. Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на ЕОМ.

4. Потрібно забезпечити, щоб множина наборів X_j була не порожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях по змозі слід уникати обмежень типу «=», а також суперечливих обмежень. Наприклад, ставиться обмеження щодо виконання контрактів, але ресурсів недостатньо, аби їх виконати. Якщо система (1.3) має єдиний розв'язок, то не існує задачі вибору оптимального плану.

Будь-який набір змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, що задовольняє умови (1.3) і (1.4), називають ***допустимим планом***, **або *планом***. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною ***стратегією економічної системи, програмою дій***. Кожному допустимому плану відповідає значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (1.1).

Сукупність усіх розв'язання систем обмежень (1.3) і (1.4), тобто множина всіх допустимих планів, становить *область існування планів.*

План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається ***оптимальним***. Оптимальний план ***є розв'язанням задачі математичного програмування*** (1.2)-(1.4).

Зауважимо, що в задачі математичного програмування передбачається одна цільова функція, яка ***кількісно визначена***. У реальних економічних системах на роль критерію оптимальності (ефективності) претендують кілька десятків показників. Наприклад, максимум чистого доходу від виробленої продукції у вартісному виразі чи максимум рентабельності, мінімум собівартості виробленої продукції або мінімум витрат дефіцитних ресурсів. Некоректним є вираз «максимум товарної продукції за її мінімальної собівартості». Хоча задача математичного програмування передбачає одну цільову функцію, але існують математичні методи побудови компромісних планів, тобто методи багато критеріальної оптимізації.

Перш ніж розглядати методи оптимізації, ознайомимося з класифікацією задач математичного програмування.

1.3 Найпростіша класифікація задач математичного програмування

Будь-яка класифікація передбачає вибір критерію, згідно з яким вона здійснюється. Оскільки математичне програмування передусім є строгою математичною дисципліною, то критеріями класифікації мають бути в основному математичні структури (властивості) задач і методів їх розв'язування. Зауважимо, що одна й та сама задача з погляду різних математичних критеріїв може належати до кількох класів. Адже кожний критерій підкреслює лише одну властивість задачі на противагу деякій іншій, тобто поділяє всі задачі на два класи (чи підкласи всередині певного класу).

Задачі математичного програмування поділяються на два великі класи ***лінійні*** та ***нелінійні***. Якщо цільова функція (1.2) та обмеження (1.3) є лінійними функціями, тобто вони містять змінні у першому або нульовому степені. В усіх інших випадках задача буде нелінійною. Важливою перевагою лінійних задач є те, що для їх розв'язування розроблено універсальний метод, який називається ***симплексним методом***. Теоретично кожну задачу лінійного програмування можна розв'язати. Для деяких класів лінійних задач, що мають особливу структуру, розробляють спеціальні методи розв'язування, які є ефективнішими. Наприклад, транспортну задачу можна розв'язати симплексним методом, але ефективнішими є спеціальні методи, наприклад метод потенціалів.

В області економіки поки лише один російський вчений – Леонід Канторович був удостоєний цієї високої нагороди. Нобелівська премія за 1975 р. в області економіки була присуджена двом ученим – російському економісту-математику Л. В. Канторовичем (1912-1986 рр..) і американському економісту-математику Т. К. Купмансу (1910 р.). Сьогодні загальновизнано, що своєю першою книгою «Математичні методи організації і планування виробництва», що вийшла в 1939 р., Л. В. Канторович поклав початок широкому розповсюдженню самостійної наукової дисципліни – лінійному програмуванню, що застосовується в плануванні, в роботах по раціональному розподілу ресурсів, оптимізації роботи транспорту та інших областях.

У загальному вигляді задачі лінійного програмування виглядають наступним чином. Розглядається деякий виробничий процес. У процесі виробництва беруть участь різні фактори виробництва (інгредієнти) – робоча сила, сировина, матеріали, обладнання, кінцева і проміжна продукція тощо. Процес виробництва може здійснюватися різними виробничими способами, використовуючи наявні фактори з різною інтенсивністю. Наявні виробничі ресурси обмежені. Межі можливого використання наявних ресурсів можуть бути описані за допомогою системи лінійних нерівностей. Спосіб здійснення виробничого процесу, заснований на різній інтенсивності використання ресурсів, може бути описаний за допомогою системи лінійних рівнянь цільової функції (вектора). Завдання полягає в знаходженні оптимального плану виходячи з наявних лінійних обмежень. Оптимальний план досягається в точці екстремуму (мінімуму або максимуму) цільової функції, знаходження якого, при дотриманні заданих обмежень, і є рішенням поставленої задачі.

Економічні та технологічні процеси, як правило, є нелінійними, стохастичними, розвиваються в умовах невизначеності. Лінійні економіко-математичні моделі часто є неадекватними, а тому доводиться будувати нелінійні та стохастичні моделі. Розв'язувати нелінійні задачі набагато складніше, ніж лінійні, оскільки немає універсального методу розв'язування таких задач. Для окремих типів нелінійних задач розроблено численні спеціальні ефективні методи розв'язування. Проте слід зазначити, що на практиці застосовують, здебільшого, лінійні економіко-математичні моделі. Часто нелінійні залежності апроксимують (наближають) лінійними. Такий підхід на практиці є доволі ефективним.

У нелінійному програмуванні виокремлюють такі класи: ***опукле програмування***. Для задач опуклого програмування існує низка добре обґрунтованих та ефективних методів їх розв'язування. Зазначимо, що задачі лінійного програмування є частковим випадком задач опуклого програмування.

Наголосимо, що коли область допустимих планів є опуклою множиною, а цільова функція є опуклою функцією, то задача математичного програмування має глобальний, єдиний екстремум (якщо такий існує).

Множина *S* в n-мірному евклідовому просторі називається ***опуклою множиною***, якщо для будь-яких точок (елементів) цієї множини $X^{(1)}, X^{(2)} \in S$ точки $X = \mu X^{(1)} + (1-\mu)X^{(2)}$ належать множині *S* за всіх значень μ, які належать відрізку $0 \le \mu \le 1$.

Геометричне це означає, якщо $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ належать до множини 5, то відрізок прямої, що з'єднує ці дві точки, також цілком належить до множини *S.*

Функція *f{X),* визначена на опуклій множині лінійного простору (на опуклій множині S), називається опуклою, якщо виконується нерівність

$$f\left(\mu X^{(1)} + (1-\mu)X^{(2)}\right) \le \mu f\left(X^{(1)}\right) + (1-\mu) f\left(X^{(2)}\right)$$

для всіх ц, які належать відрізку $0 \le \mu \le 1$.

Квадратичне програмування – цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

Далі задачі математичного програмування поділяють на ***дискретні*** і ***неперервні***. Дискретними називають задачі, в яких одна, кілька або всі змінні набувають лише дискретних значень. Окремий клас становлять задачі, в яких одна або кілька змінних набувають цілочислових значень, тобто задачі ***цілочислового програмування***. Якщо всі змінні можуть набувати будь-якого значення в деяких інтервалах числової осі, то задача є ***неперервною***.

Задачі математичного програмування поділяються також на ***детерміновані*** і ***стохастичні***. Детерміновані задачі не містять випадкових змінних і параметрів, котрі набувають значень відповідно до функції розподілу. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі врожайності сільськогосподарських культур задані своїми математичними сподіваннями, то така задача є детермінованою. Якщо врожайності задані функціями розподілу, наприклад нормального з математичним сподіванням α і дисперсією σ, то така задача є стохастичною.

Якщо у відповідних економічних процесах випадкові явища не відіграють істотної ролі, то задачу можна розв'язувати як детерміновану. У противному разі адекватна економіко-математична модель має бути стохастичною, тобто містити випадкові функції та величини. Структура та розв'язування таких задач вивчаються в окремому розділі, який називається ***стохастичним програмуванням***.

Економічні процеси розвиваються в часі, а тому відповідні моделі мають відображати динаміку. Це означає, що для знаходження оптимального плану потрібно застосовувати класи задач математичного програмування ***статичні*** (однокрокові) і ***динамічні*** (багатокрокові). Поняття динамічності зрозуміле, воно пов'язане з часом. Наприклад, якщо йдеться про план розвитку України до 2005 року, мають бути обґрунтовані значення відповідних макроекономічних показників не лише на 2005 рік, а й на всі проміжні роки, тобто враховано динаміку розвитку народногосподарських процесів. Такий план називають *стратегічним.* У ньому має бути обґрунтована оптимальна (раціональна) траєкторія розвитку народного господарства. Проте під впливом некерованих чинників реальні показники щороку можуть відхилятися від планових. Тому постає потреба коригувати кожний річний план. Такі плани називають ***тактичними***. Вони визначаються в результаті реалізації статичної економіко-математичної моделі.

Важливо чітко усвідомити відмінність між одно- та багатокроковими задачами. ***Багатокроковість*** як метод розв'язування задач математичного програмування зумовлюється, насамперед, їх багатовимірністю. Сутність цього методу полягає в тому, що оптимальні значення розглядуваної множини змінних знаходять крок за кроком, послідовно застосовуючи індукцію, причому рішення, яке приймається на кожному кроці, має задовольняти умови оптимальності щодо рішення, прийнятого на попередньому кроці. Така процедура може бути і не бути пов'язаною з часом. ***Однокрокові*** задачі, навпаки, характеризуються тим, що всі компоненти оптимального плану задачі визначаються одночасно на останній ***ітерації*** (кроці) алгоритму. Потрібно розрізняти ітераційність алгоритму і його багатокроковість. Наприклад, симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування є ітераційним, тобто якимось чином задаємо допустимий план і в результаті деякої кількості ітерацій дістаємо оптимальний план. Тут виконуються ітерації (кроки) алгоритму симплексного методу, але це не інтерпретується як багатокроковість економічного процесу (явища). Деякі задачі математичного програмування можна розглядати як одно- або багатокрокові залежно від способу їх розв'язування. Якщо задачу можна розв'язувати як одно крокову, то розв'язувати її як багатокрокову недоцільно, аби не застосовувати для знаходження оптимального плану складніших методів. Проте більшість економічних процесів с динамічними, їх параметри змінюються в часі й залежать від рішень керівництва, що їх доводиться приймати з метою досягнення розвитку економічної системи за траєкторією, яка визначається стратегічним планом.

Щойно було розглянуто лише найбільші класи задач математичного програмування, які визначені згідно з математичними критеріями. Можна також за різними ознаками виокремити й підкласи. Це особливо стосується задач лінійного, нелінійного і стохастичного програмування. Наприклад, як окремий клас розглядають ***дробово-лінійне програмування,*** коли обмеження є лінійними, а цільова функція – дробово-лінійна. Особливий клас становлять задачі ***теорії ігор,*** які широко застосовуються в ринковій економіці. Адже тут діють дві чи більше конфліктних сторін, які мають цілі, що не збігаються, або протилежні цілі. У сукупності задач теорії ігор, у свою чергу, також виокремлюють певні підкласи. Наприклад, ***ігри двох осіб із нульовою сумою***.

ТЕМА 2 ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО І ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. МОДЕЛІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

2.1 Поняття математичного та лінійного програмування
2.2 Економіко-математична модель задач лінійного програмування

2.1 Поняття математичного та лінійного програмування

Математичне програмування виникло в 30-ті роки XX століття. Угорський математик Б. Егерварі в 1931 році вирішив задачу, звану проблемою вибору. Американський вчений Г. У. Куй узагальнив цей метод, після чого він отримав назву угорського методу. У 1939 року російський вчений Л. В. Канторович розробив метод дозволяють множників вирішення завдань лінійного програмування. Великий внесок у розвиток математичного програмування внесли американські вчені. У 1949 році американський вчений Дж. Данциг опублікував один з основних методів вирішення завдань лінійного програмування, що отримав назву симплексний.

Дослідження різних, у тому числі й економічних, процесів зазвичай починається з їх моделювання, тобто відображення реального процесу через математичні співвідношення. При цьому проводиться складання рівнянь або нерівностей, що зв'язують різні показники (змінні) досліджуваного процесу, які утворюють систему обмежень.

У цих співвідношеннях виділяються такі змінні, змінюючи які, можна отримати оптимальне значення основного показника даної системи (прибуток, дохід, витрати тощо.). Відповідні методи, що дозволяють вирішувати зазначені завдання, об'єднуються в загальну назву «математичне програмування» або «математичний метод» дослідження операцій.

Математичне програмування включає в себе такі розділи математики як лінійне, нелінійне і динамічне програмування. Сюди ж зазвичай відносять стохастичне програмування, теорію ігор, теорію масового обслуговування, теорію управління запасами і деякі інші.

Отже, ***математичне програмування*** – це розділ вищої математики, що займається вирішенням завдань, пов'язаних з перебуванням екстремумів функцій декількох змінних за наявності обмежень на змінні.

Лінійне програмування – напрямок математики, що вивчає методи розв'язання екстремальних задач, які характеризуються лінійною залежністю між змінними і лінійним критерієм оптимальності.

Кілька слів про сам термін лінійне програмування. Він вимагає правильного розуміння. В даному випадку програмування – це, звичайно, не складання програм для ЕОМ. Програмування тут повинно інтерпретуватися як планування, формування планів, розробка програми дій.

До математичним задачам лінійного програмування відносять дослідження конкретних виробничо-господарських ситуацій, які в тому чи іншому вигляді інтерпретуються як завдання про оптимальне використання обмежених ресурсів.

Коло завдань, що вирішуються за допомогою методів лінійного програмування досить широкий. Це, наприклад:

- завдання про оптимальному використанні ресурсів при виробничому плануванні;
- завдання про сумішах (планування складу продукції);
- задача про знаходження оптимальної комбінації різних видів продукції для зберігання на складах (управління товарно-матеріальними запасами або «задача про рюкзаку»);

• транспортні задачі (аналіз розміщення підприємства, переміщення вантажів).

Лінійне програмування – найбільш розроблений і широко застосовуваний розділ математичного програмування (крім того, сюди відносять: цілочисельне, динамічне, нелінійне, параметричне програмування). Це пояснюється наступним:

• математичні моделі великого числа економічних задач лінійні відносно шуканих змінних;

• даний тип задач в даний час найбільш вивчений. Для нього розроблено спеціальні методи, за допомогою яких ці завдання вирішуються, і відповідні програми для ЕОМ;

• багато задачі лінійного програмування, будучи вирішеними, знайшли широке застосування;

• деякі завдання, які в первісної формулюванні не є лінійними, після низки додаткових обмежень і допущень можуть стати лінійними або можуть бути приведені до такої форми, що їх можна вирішувати методами лінійного програмування.

2.2 Економіко-математична модель задач лінійного програмування

Економіко-математична модель будь-якої задачі лінійного програмування (ЗЛП) включає: цільову функцію, оптимальне значення якої (максимум чи мінімум) потрібно відшукати; обмеження у вигляді системи лінійних рівнянь або нерівностей; вимога невід'ємності змінних.

У загальному вигляді модель записується таким чином:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max(\min) \tag{2.1}$$

при умовах

$$\left.\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \\ g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\geq b_i, \quad i = k+1, \ldots, l, \\ g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\leq b_i, \quad i = l+1, \ldots, m, \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \tag{2.3}$$

Точку $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координати якої задовольняють обмеженням (2.2) і (2.3), називають допустимим рішенням задач лінійного програмування.

Безліч всіх допустимих рішень ЗМП називають допустимою множиною.

Допустиме рішення $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$, що задовольняє співвідношенню (2.1), називають оптимальним рішенням ЗЛП.

Якщо в ЗЛП цільова функція $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ і функції $g_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, – лінійні, то маємо загальну задачу лінійного програмування (ЗЛП):

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = F \to \max(\min) \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{array}{ll} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, & i = 1, 2, \ldots, k, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i, & i = k+1, \ldots, l, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i, & i = l+1, \ldots, m, \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \tag{2.6}$$

Залежно від виду спеціальних обмежень розрізняють наступні ЗЛП:

- канонічна ЗЛП, що включає в якості обмежень (2.5) тільки рівняння, тобто

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

- стандартна ЗЛП, що включає в якості обмежень (2.5) тільки нерівності, тобто

$$\begin{array}{ll} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i, & i = 1, 2, \ldots, l, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i, & i = l+1, \ldots, m. \end{array}$$

ТЕМА 3 ГРАФІЧНИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

3.1 Зміст розв’язання ЗЛП графічним методом

3.2 Графічний метод розв’язання ЗЛП з двома змінними

3.3 Графічний метод розв’язання ЗЛП з n-вимірного простору

3.1 Зміст розв’язання ЗЛП графічним методом

Для ***розв’язування двовимірних задач лінійного програмування***, тобто задач із двома змінними, а також деяких ***тривимірних задач*** застосовують ***графічний метод***, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування. Обмежене використання графічного методу зумовлене складністю побудови багатогранника розв'язання у тривимірному просторі (для задач з трьома змінними), а графічне зображення задачі з кількістю змінних більше трьох взагалі неможливе.

Постановка задачі

Знайти

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max(\min) \tag{3.1}$$

за умов:

$$\left.\begin{aligned} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, l, \\ & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, \quad i = l+1, \ldots, m, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Припустимо, що система (3.2) сумісна і багатокутник її розв'язання обмежений.

Згідно з геометричною інтерпретацією задачі лінійного програмування кожне i-те обмеження-нерівність у (3.2) визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ (i = 1, 2, …,l). Системою обмежень (3.2) графічно можна зобразити спільну частину, або переріз усіх зазначених півплощин, тобто множину точок, координати яких задовольняють всі обмеження задачі – ***багатокутник розв'язання***.

Умова невід'ємності змінних означає, що область допустимих розв'язання задачі належить першому квадранту системи координат двовимірного простору. Цільова функція задачі лінійного програмування геометрично інтерпретується як сім'я паралельних прямих $c_1 x_1 + c_2 x_2 = const$.

Скористаємося для графічного розв'язання задачі лінійного програмування наступними властивостями:

1) якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатокутника розв'язання;

2) якщо цільова функція досягає екстремального значення більш як в одній вершині багатокутника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією цих вершин.

Отже, розв'язати задачу лінійного програмування графічно означає знайти таку вершину багатокутника розв'язання, у результаті підстановки координат якої в (3.1) лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

3.2 Графічний метод розв'язання ЗЛП з двома змінними

Алгоритм графічного методу розв'язування задачі лінійного програмування складається з таких кроків:

1. Будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (3.2) знаків нерівностей на знаки рівностей.

2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.

3. Знаходимо багатокутник розв'язання задачі лінійного програмування.

4. Будуємо вектор $\vec{N} = (c_1; c_2)$, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі.

5. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = const$, перпендикулярну до вектору $\vec{N}$.

6. Рухаючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ в напрямку вектору $\vec{N}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв'язання, де цільова функція набирає екстремального значення.

7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

У разі застосування графічного методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки: 1) цільова функція набуває максимального значення в єдиній вершині багатокутника розв'язання; 2) екстремального значення цільова функція досягає в будь-якій точці відрізка. Тоді задача лінійного програмування має альтернативні оптимальні плани; 3) задача лінійного програмування не має оптимальних планів, коли цільова функція не обмежена зверху (знизу) або система обмежень несумісна.

3.3 *Графічний метод розв'язання ЗЛП з n-вимірного простору*

Розв'язувати графічним методом можна також задачі лінійного програмування *n*-вимірного простору, де $n > 3$, якщо при зведенні системи нерівностей задачі до системи рівнянь шляхом введення додаткових змінних кількість змінних *n* на дві більша, ніж число обмежень *m*, тобто $n - m = 2$.

Тоді, як відомо з курсу вищої математики, можна дві з *n* змінних, наприклад x_1 та x_2, вибрати як вільні, а інші *m* зробити базисними і виразити через вільні. Припустимо, що це зроблено. Отримаємо $m = 2 - n$ рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \beta_3 \\ x_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \beta_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \beta_n \end{cases} \tag{3.3}$$

Оскільки всі значення $x_i \geq 0 \ \ (i = \overline{1,n})$, то мають виконуватись умови:

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$$\begin{cases} x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0 \\ x_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \beta_4 \geq 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \beta_n \geq 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Розглянемо, як можна зобразити ці умови геометрично. Візьмемо, наприклад, першу з них:

$$x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \beta_3 \geq 0 .$$

Узявши величину x_3 рівною своєму крайньому значенню – нулю, отримаємо рівняння:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \beta_3 = 0 .$$

Це рівняння прямої. Для такої прямої $x_3 = 0$, по одну сторону від неї $x_3. > 0$, а по другу —$x_3 < 0$. Відмітимо ту сторону прямої $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \beta_3 = 0$, де $x_3. > 0$.

В аналогічний спосіб побудуємо і всі інші обмежуючі прямі: $x_4 = 0$, $x_5 = 0 \dots x_n = 0$ і відмітимо для кожної з них півплощину, де відповідна змінна більше нуля.

У такий спосіб отримують $n-2$ прямі та дві осі координат ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$). Кожна з них визначає півплощину, де виконується умова $x_i > 0 \ \ (i = \overline{1, n-2})$. Частина площини в x_1Ox_2 належить водночас всім півплощинам, утворюючи багатокутник допустимих розв’язання.

Припустимо, що в задачі необхідно знайти максимальне значення функціонала:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n .$$

Підставивши вирази для $x_3, x_4, x_5 ... x_n$ з (3.4) у цей функціонал, зведемо подібні доданки і отримаємо вираз лінійної функції F всіх n змінних лише через дві вільні змінні x_1 та x_2:

$$F = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2, \tag{3.5}$$

де γ_0 – вільний член, якого в початковому вигляді функціонала не було.

Очевидно, що лінійна функція $F^{'} = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$ досягає свого максимального значення за тих самих значень x_1 та x_2, що й (3.5). Отже, процедура відшукання оптимального плану з множини допустимих далі здійснюється за алгоритмом для випадку двох змінних.

ТЕМА 4 СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

4.1 Теоретичні відомості щодо симплекс-методу

Графічний метод для визначення оптимального плану задачі лінійного програмування доцільно застосовувати лише для задач із двома змінними. За більшої кількості змінних вдаються до загального методу розв'язування задач лінійного програмування – так званого ***симплекс-методу***. Процес розв'язування задачі симплекс-методом має ітераційний характер: обчислювальні процедури (ітерації) одного й того самого типу повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує.

Отже, ***симплекс-метод*** – це поетапна обчислювальна процедура, в основу якої покладено принцип послідовного поліпшення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі лінійного програмування до іншого.

4.2 Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

Алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом складається з п'яти етапів:

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

2. Побудова симплексної таблиці.

3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок $z_j - c_j$. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок $z_j - c_j$ не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.

4. Перехід до нового опорного плану задачі виконується визначенням розв'язувального елемента та розрахунком нової симплексної таблиці.

5. Повторення дій починаючи з п. 3.

Розглянемо докладніше кожний з етапів алгоритму.

1. Визначення першого опорного плану починають із запису задачі лінійного програмування в канонічній формі, тобто у вигляді обмежень-рівнянь з невід'ємними правими частинами. Якщо в умові задачі присутні обмеження-нерівності, то перетворення їх на рівняння виконується за допомогою ***додаткових змінних,*** які вводяться до лівої частини обмежень типу « $\leq$ » зі знаком « + », а до обмежень типу « $\geq$ » – зі знаком « – ». У цільовій функції задачі додаткові змінні мають коефіцієнт нуль.

Після зведення задачі до канонічного вигляду її записують у векторній формі. За означенням опорного плану задачі лінійного програмування його утворюють m одиничних лінійно незалежних векторів, які становлять базис m-вимірного простору (де m – кількість обмежень у задачі лінійного програмування).

На цьому етапі розв'язування задачі можливі такі випадки:

• після запису задачі у векторній формі в системі обмежень є необхідна кількість одиничних векторів. Тоді початковий опорний план визначається безпосередньо без додаткових дій;

• у системі обмежень немає необхідної кількості одиничних незалежних векторів. Тоді для побудови першого опорного плану застосовують ***метод штучного базису***. Ідея його полягає в тому, що відсутні одиничні вектори можна дістати, увівши до відповідних обмежень деякі змінні з коефіцієнтом +1, які називаються ***штучними***. У цільовій функції задачі лінійного програмування штучні змінні мають коефіцієнт $+M$ (для задачі на min) або $-M$ (для задачі на max), де M – досить велике додатне число.

Визначені одиничні лінійно незалежні вектори утворюють базис, і змінні задачі, що відповідають їм, називають ***базисними,*** а всі інші змінні – ***вільними***. Їх прирівнюють до нуля та з кожного обмеження задачі визначають значення базисних змінних. У такий спосіб отримують початковий опорний план задачі лінійного програмування.

2. Подальший обчислювальний процес та перевірку опорного плану на оптимальність подають у вигляді симплексної таблиці.

У першому стовпчику таблиці – «Базис» – записують базисні змінні опорного плану, причому в тій послідовності, в якій вони розміщуються в системі обмежень задачі.

Наступний стовпчик симплексної таблиці – «$C_{баз}$» – коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції задачі.

У третьому стовпчику – «План» – записують значення базисних змінних і відшукуванні у процесі розв'язування задачі компоненти оптимального плану.

У решті стовпчиків симплексної таблиці, кількість яких відповідає кількості змінних задачі, записують відповідні коефіцієнти з кожного обмеження задачі лінійного програмування.

3. Перевіряють опорний план на оптимальність згідно з наведеною далі теоремою.

Теорема (ознака оптимальності опорного плану). Опорний план $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ задачі лінійного програмування є оптимальним, якщо для всіх $j\left(j = \overline{1,n}\right)$ виконується умова

$Z_j - C_j \geq 0$ (для задачі на max)

або

$Z_j - C_j \leq 0$ (для задачі на min)

Якщо для побудови опорного плану було використано метод штучного базису, необхідною умовою оптимальності є також вимога, щоб у процесі розв'язування задачі всі штучні змінні були виведені з базису і дорівнювали нулю.

Значення оцінок $Z_j - C_j$ визначають за формулою

$$\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \qquad (j = \overline{1,n})$$

або безпосередньо із симплексної таблиці як скалярний добуток векторів-стовпчиків «$C_{баз}$» та «x_j» мінус відповідний коефіцієнт C_j. Розраховані оцінки записують в окремий рядок симплексної таблиці, який називають ***оціночний***.

У процесі перевірки умови оптимальності можливі такі випадки:

а) усі $\Delta_j\left(j = \overline{1,n}\right)$ задовольняють умову оптимальності, і тоді визначений опорний план є оптимальним;

б) не всі Δ_j задовольняють умову оптимальності, і тоді потрібно виконати перехід до наступного, нового опорного плану задачі.

4. Перехід від одного опорного плану до іншого виконується зміною базису, тобто виключенням з нього деякої змінної та введенням замість неї нової з числа вільних змінних задачі.

Змінна, яка включається до нового базису, відповідає тій оцінці $Z_j - C_j$, що не задовольняє умову оптимальності. Якщо таких оцінок кілька, серед них вибирають найбільшу за абсолютною величиною і відповідну їй змінну вводять до базису. Припустимо, що індекс зазначеної змінної $j = k$. Відповідний стовпчик симплексної таблиці називають ***напрямним***.

Для визначення змінної, що має бути виключена з базису, знаходять для всіх додатних a_{ik} напрямного стовпчика величину $\theta = b_i / a_{ik}$. Вибирають найменше значення θ, яке вказує на змінну, що виводиться з базису. Припустимо, що це виконується для $i = r$. Відповідний рядок симплексної таблиці називатиметься ***напрямним***.

Перетином напрямного стовпчика та напрямного рядка визначається число симплексної таблиці a_{rk}, яке називають ***розв'язувальним елементом***. За допомогою елемента a_{rk}, і методу Жордана-Гаусса розраховують нову симплексну таблицю.

Далі ітераційний процес повторюють доти, доки не буде визначено оптимальний план задачі.

У разі застосування симплекс-методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

1. Якщо в оцінкочному рядку останньої симплексної таблиці оцінка $Z_j - C_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то це означає, що задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план. Отримати його можна, вибравши розв'язувальний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок симплекс-методом.

2. Якщо при переході у симплекс-методі від одного опорного плану задачі до іншого в напрямному стовпчику немає додатних елементів a_{rk}, тобто неможливо вибрати змінну, яка має бути виведена з базису, то це означає, що цільова функція задачі лінійного програмування є необмеженою й оптимальних планів не існує.

3. Якщо для опорного плану задачі лінійного програмування всі оцінки $Z_j - C_j \ \left(j = \overline{1,n}\right)$ задовольняють умову оптимальності, але при цьому хоча б одна штучна змінна є базисною і має додатне значення, то це означає, що система обмежень задачі несумісна й оптимальних планів такої задачі не існує.

ТЕМА 5 ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ ТА АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

5.1 Основна та двоїста задачі як пара взаємоспряженних задач ЛП

5.2 Двоїсті оцінки. Стійкість оптимальних планів прямої та двоїстої задач

5.3 Основні теореми двоїстості задач та їх економічний зміст

5.1 Основна та двоїста задачі як пара взаємоспряженних задач ЛП

Кожній задачі лінійного програмування відповідає ***двоїста,*** що формується за допомогою певних правил безпосередньо з умови прямої задачі.

Якщо пряма задача лінійного програмування має вигляд

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \le b_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \ldots + \alpha_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$$

то двоїста задача записується так:

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$$

за обмежень

$$\begin{cases} \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{m1}y_m \le c_1, \\ \alpha_{12}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{m2}y_m \le c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}y_1 + \alpha_{2n}y_2 + \ldots + \alpha_{mn}y_m \le c_n, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,m},$$

Порівнюючи ці дві сформульовані задачі, доходимо висновку, що ***двоїста задача лінійного програмування утворюється з прямої задачі за такими правилами***.

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.

2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі.

3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі – на визначення найменшого

значення (min), і навпаки.

4. Коефіцієнтами при змінних в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.

5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних в цільовій функції прямої задачі.

6. Матриця

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Bmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів в системі обмежень двоїстої задачі

$$A^T = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{Bmatrix}$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків – рядками.

5.2 Двоїсті оцінки. Стійкість оптимальних планів прямої та двоїстої задач

Двоїсті пари задач лінійного програмування бувають симетричні та несиметричні.

У симетричних задачах обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень.

У несиметричних задачах обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої – лише як нерівності. У цьому разі відповідні змінні двоїстої задачі набувають будь-якого значення, не обмеженого знаком.

Різні можливі форми прямих задач лінійного програмування та відповідні їм варіанти моделей двоїстих задач наведено далі.

Пряма задача **Двоїста задача**

Симетричні

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \qquad F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i; \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \ge c_j;$$

$$x_j \ge 0. \qquad y_j \ge 0.$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min; \qquad F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i; \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \ge c_j;$$

$$x_j \ge 0. \qquad y_j \ge 0.$$

Несиметричні

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \qquad F = \sum_{j=1}^{m} b_i y_i \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i; \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \ge c_j;$$

$$x_j \ge 0. \qquad y_j \in [-\infty; \infty].$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min; \qquad F = \sum_{j=1}^{m} b_i y_i \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i; \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \ge c_j;$$

$$x_j \ge 0. \qquad y_j \in [-\infty; \infty].$$

5.3 Основні теореми двоїстості задач та їх економічний зміст

Між прямою та двоїстою задачами лінійного програмування існує тісний взаємозв'язок, який випливає з наведених далі теорем.

Перша теорема двоїстості. Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то інша задача також має розв'язок, причому значення цільових функцій для оптимальних планів дорівнюють одне одному, тобто $\max Z = \min F$, і навпаки.

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена, то друга задача взагалі не має розв’язання.

Якщо пряма задача лінійного програмування має оптимальний план *X**, визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі Y^* визначається зі співвідношення

$$Y^* = \vec{c}_{аас} D^{-1},$$

де $\vec{c}_{аас}$ – вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані;

D^{-1} – матриця, обернена до матриці D, складеної з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких узято з початкового опорного плану задачі. Обернена матриця D^{-1} завжди міститься в останній симплекс-таблиці в тих стовпчиках, де в першій таблиці містилася одинична матриця.

За допомогою зазначеного співвідношення під час визначення оптимального плану однієї з пари двоїстих задач лінійного програмування знаходять розв'язок іншої задачі.

Друга теорема двоїстості. Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі i-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний i-й компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Якщо i-й компонент оптимального плану двоїстої задачі додатний, то відповідне i-те обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Третя теорема двоїстості. Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження.

Економічний зміст третьої теореми двоїстості полягає в тому, що відповідна додатна оцінка показує зростання значення цільової функції прямої задачі, якщо запас відповідного дефіцитного ресурсу збільшується на одну одиницю.

ТЕМА 6 ЕКОНОМІЧНА І МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

6.1 Економічна постановка транспортної задачі
6.2 Математична постановка транспортної задачі

6.1 Економічна постановка транспортної задачі

Транспортна задача є типовою задачею лінійного програмування, отже, її розв’язок можна отримати звичайним симплексним методом. Однак, у деяких випадках застосування універсальних алгоритмів є нераціональним. Специфічна структура транспортної задачі дає змогу отримати альтернативний метод відшукання оптимального плану у вигляді простішої у порівнянні з симплексним методом обчислювальної процедури. Транспортна задача належить до типу розподільчих задач лінійного програмування. Економічний зміст таких задач може стосуватися різноманітних проблем, що переважно зовсім не пов’язано із перевезенням вантажів, як, наприклад, задачі оптимального розміщення виробництва, складів, оптимального призначення тощо. Деякі з таких задач розглянемо в цьому розділі.

Класична транспортна задача лінійного програмування формулюється так: деякий однорідний продукт, що знаходиться у m постачальників A_i в обсягах $a_1, a_2 ... a_m$ одиниць відповідно необхідно перевезти n споживачам B_j в обсягах $b_1, b_2 .. b_n$ одиниць. При цьому виконується умова, що загальний наявний обсяг продукції у постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів. Відомі вартості c_{ij} перевезень одиниці продукції від кожного Ai-го постачальника до кожного Bj-го споживача, що подані як елементи матриці виду:

$$c_{ij} = \left\{ \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{matrix} \right\}$$

Необхідно визначити план перевезень, за якого вся продукція була б вивезена від постачальників, повністю задоволені потреби споживачів і загальна вартість всіх перевезень була б мінімальною.

У такій постановці задачі ефективність плану перевезень визначається його вартістю і така задача має назву ***транспортної задачі за критерієм вартості перевезень***.

6.2 Математична постановка транспортної задачі

Запишемо її математичну модель. Позначимо через x_{ij} обсяг продукції, що перевозиться від A_i постачальника до B_j споживача $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$. Тоді умови задачі зручно подати у вигляді таблиці 6.1:

Таблиця 6.1 – Табличний запис транспортної задачі

Споживачі		B_1	B_2	…	$\mathbf{B_n}$
Постачальники		b_1	b_2	…	b_n
A_1	a_1	c_{11} $x11$	c_{12} $x12$	…	c_1 x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_m

Мають виконуватися такі умови:

сумарний обсяг продукції, що вивозиться з кожного i-го пункту, має дорівнювати запасу продукції в даному пункті:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} = a_2 \\ .... \\ x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mn} = a_m \end{cases}$$

сумарний обсяг продукції, що ввезений кожному j-му споживачеві, має дорівнювати його потребам:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + ... + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + ... + x_{m2} = b_2 \\ .... \\ x_{1n} + x_{2m} + ... + x_{mn} = b_n \end{cases}$$

сумарна вартість всіх перевезень повинна бути мінімальною:

$$\begin{aligned} \min F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{1n}x_{1n} + \\ + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + ... + c_{2n}x_{2n} + \\ .... \\ + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + ... + c_{mn}x_{mn1} \end{aligned}$$

Очевидно, що $x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

У скороченій формі запису математична модель транспортної задачі за критерієм вартості перевезень має такий вигляд:

$$\min F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{6.1}$$

за обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = \overline{1,m}) \tag{6.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = \overline{1,n}) \tag{6.3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}) \tag{6.4}$$

У розглянутій задачі має виконуватися умова:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.5}$$

Транспортну задачу називають ***збалансованою***, або ***закритою***, якщо виконується умова (6.5). Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають ***незбалансованою***, або ***відкритою***.

Домовимося ***планом*** транспортної задачі називати будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (6.2)–(6.4), який позначають матрицею $X = x_{ij} \quad (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$. Значення невідомих величин x_{ij} – обсяги продукції, що мають бути перевезені від *i*-х постачальників до *j*-х споживачів, називатимемо ***перевезеннями***.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = x^*_{ij} \quad (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$, яка задовольняє умови задачі, і для якої цільова функція (5.1) набирає найменшого значення.

Теорема *(умова існування розв'язку транспортної задачі):* необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі (6.1)-(6.4) є її збалансованість: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Доведення.

Необхідність. Нехай задача (6.1)-(6.4) має розв'язок

$$\tilde{o}^*(x^*_{11}, x^*_{12}, x^*_{mn}),$$

тоді для нього виконуються рівняння-обмеження (6.2) і (6.3). Підсумуємо відповідно ліві та праві частини систем рівнянь (6.2) і (6.3). Матимемо:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x^*_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i \,, \tag{6.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x^*_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \tag{6.7}$$

Оскільки ліві частини рівнянь (6.6) та (6.7) збігаються, то праві також рівні одна одній, отже, виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ , \tag{6.8}$$

Достатність. Потрібно показати, що за заданої умови (5.8) існує хоча б один план задачі, і цільова функція на множині планів обмежена.

Нехай $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = W > 0 = W > 0.$ Розглянемо величини $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{W}$ ($i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$). Підставивши значення x_{ij} в систему обмежень задачі (6.1)–(6.4), матимемо:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{W} = \frac{a_i}{W} \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{W} W = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{W} = \frac{b_j}{W} \sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j}{W} W = b_j$$

Оскільки умови (6.2) та (6.3) виконуються, то $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{W}$ ($i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$) є планом наведеної транспортної задачі.

Виберемо з елементів $c_{ij} (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ найбільше значення і позначимо його через $\bar{c} = \max c_{ij}$. Якщо замінити в цільовій функції (6.1) всі коефіцієнти на $\bar{c}$, то, враховуючи (6.2), матимемо:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \geq c \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = c \sum_{i=1}^{m} a_i = cW \ .$$

Виберемо з елементів c_{ij} ($i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$) найменше значення і позначимо його через $\bar{c} = \min c_{ij}$.

Тобто цільова функція на множині допустимих планів транспортної задачі є обмеженою:

$$cW \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \leq cW \ .$$

Теорему доведено.

Якщо при перевірці збалансованості (6.5) виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це здійснюється введенням фіктивного (умовного) постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами $(\sum_{j=1}^{n} bj > \sum_{i=1}^{m} a_i)$ із ресурсом обсягом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то до закритого типу задача зводиться введенням фіктивного (умовного) споживача B_{n+1} з потребою $a_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції від фіктивного постачальника A_{m+1} (або фіктивного споживача B_{n+1}) до кожного зі споживачів (виробників) має дорівнювати нулю або бути набагато більшою за реальні витрати c_{ij} ($i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$). Як правило, у такому разі використовують нульові значення вартостей перевезень, що дає змогу спростити обчислення.

Як згадувалося вище, транспортна задача (6.1)-(6.4) є звичайною задачею лінійного програмування і може бути розв'язана симплексним методом, однак особливості побудови математичної моделі транспортної задачі дають змогу розв'язати її простіше. Легко помітити, що всі коефіцієнти при змінних у рівняннях (6.2), (6.3) дорівнюють одиниці, а сама система обмежень (6.2), (6.3) задана в канонічній формі. Крім того, система обмежень (6.2), (6.3) складається з mn невідомих та $m+n$ рівнянь, які пов'язані між собою співвідношенням (6.8). Якщо додати відповідно праві та ліві частини систем рівнянь (6.2) та (6.3), то отримаємо два однакових рівняння:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ;$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Наявність у системі обмежень двох однакових рівнянь свідчить про її лінійну залежність. Якщо одне з цих рівнянь відкинути, то в загальному випадку система обмежень буде містити $m+n-1$ лінійно незалежне рівняння, отже, їх можна розв'язати відносно $m+n-1$ базисних змінних. Назвемо ***опорним планом*** транспортної задачі такий допустимий її план, що містить не більш ніж $m+n-1$ додатних компонент, а всі інші його компоненти дорівнюють нулю. Такий план є невиродженим. Якщо ж кількість базисних змінних менша ніж $m+n-1$, то маємо вироджений опорний план.

ТЕМА 7 ЦІЛОЧИСЛОВЕ ПРОГРАМУВАННЯ

7.1 Економічна і математична постановка цілочислової задачі лінійного програмування

7.2 Загальна характеристика методів розв'язування цілочислових задач лінійного програмування

7.3 Методи відтинання. Метод Гоморі

7.1 Економічна і математична постановка цілочислової задачі лінійного програмування

Існує доволі широке коло задач математичного програмування, в економіко- математичних моделях яких одна або кілька змінних мають набувати цілих значень. Наприклад, коли йдеться про кількість верстатів у цеху, тварин у сільськогосподарських підприємствах тощо.

Зустрічаються також задачі, які з першого погляду не мають нічого спільного з цілочисловими моделями, проте формулюються як задачі цілочислового програмування. Вимоги дискретності змінних в явній чи неявній формах притаманні таким практичним задачам, як вибір послідовності виробничих процесів; календарне планування роботи підприємства; планування та забезпечення матеріально- технічного постачання, розміщення підприємств, розподіл капіталовкладень, планування використання обладнання тощо.

Задача математичного програмування, змінні якої мають набувати цілих значень, називається ***задачею цілочислового програмування***. У тому разі, коли цілочислових значень мають набувати не всі, а одна чи кілька змінних, задача називається частково цілочисловою.

До цілочислового програмування належать також ті задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох значень: 0 або 1 (бульові, або бінарні змінні). Умова цілочисловості є по суті нелінійною і може зустрічатися в задачах, що містять як лінійні, так і нелінійні функції. Розглянемо задачі математичного програмування, в яких крім умови цілочисловості всі обмеження та цільова функція є лінійними, що мають назву цілочислових задач лінійного програмування.

Загальна цілочислова задача лінійного програмування записується так:

$$\max(\min)F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (7.1)$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} b_i \qquad (i = \overline{1,m}) \tag{7.2}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}) \tag{7.3}$$

x_j – цілі числа ($j = \overline{1,n}$)

7.2 Загальна характеристика методів розв’язування цілочислових задач лінійного програмування

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують такі групи методів:

1) точні методи:

• методи відтинання;

• комбінаторні методи;

2) наближені методи.

Основою методів відтинання є ідея поступового «звуження» області допустимих розв’язання розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв’язування задачі з так званими послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, багатогранник допустимих розв’язання послабленої задачі поступово зменшують доти, доки змінні оптимального розв’язку не набудуть цілочислових значень.

До цієї групи належать:

а) методи розв’язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);

б) методи розв’язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на ідеї перебору всіх допустимих цілочислових розв’язання, однак, згідно з їх процедурою здійснюється цілеспрямований перебір лише досить невеликої частини розв’язання.

Найпоширенішим у цій групі методів є метод гілок і меж.

Починаючи з розв’язування послабленої задачі, він передбачає поділ початкової задачі на дві підзадачі через виключення областей, що не мають цілочислових розв’язання, і дослідження кожної окремої частини багатогранника допустимих розв’язання.

Для розв’язування задач із бульовими змінними застосовують комбінаторні методи, причому, оскільки змінні є бульовими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.

Досить поширеними є також наближені методи розв’язування цілочислових задач лінійного програмування. Оскільки для практичних задач великої розмірності за допомогою точних методів не завжди можна знайти строго оптимальний розв’язок за прийнятний час або для розв’язування задачі використовуються наближено визначені, неточні початкові дані, то часто в реальних задачах досить обмежитися наближеним розв’язанням, пошук якого є спрощеним.

Значна частина наближених алгоритмів базується на використанні обчислювальних схем відомих точних методів, таких, наприклад, як метод гілок і меж. До наближених методів належать: метод локальної оптимізації (метод вектору спаду); модифікації точних методів; методи випадкового пошуку та ін.

Головними показниками для зіставлення ефективності застосування конкретних наближених алгоритмів на практиці є такі: абсолютна Δ_1 та відносна Δ_2 похибки отриманих наближених розв’язання.

$$\Delta_1 = F(X^*) - F(X_1),$$

$$\Delta_2 = \frac{\left|F(X^*) - F(X_1)\right|}{\left|F(X^*)\right|},$$

де F – цільова функція (в даному разі для визначеності допускаємо вимогу відшукання максимального її значення);

X_1 – наближений розв’язок, знайдений деяким наближеним методом;

X^* – оптимальний план задачі.

7.3 Методи відтинання. Метод Гоморі

В основу методів цілочислового програмування покладено ідею Данціга. Допустимо, що необхідно розв’язувати задачу лінійного програмування, всі або частина змінних якої мають бути цілочисловими. Можливо, якщо розв’язувати задачу, не враховуючи умову цілочисловості, випадково одразу буде отримано потрібний розв’язок. Однак така ситуація малоймовірна. Переважно розв’язок не задовольнятиме умову цілочисловості. Тоді накладають додаткове обмеження, яке не виконується для отриманого плану задачі, проте задовольняє будь-який цілочисловий розв’язок. Таке додаткове обмеження називають правильним відтинанням. Система лінійних обмежень задачі доповнюється новою умовою і далі розв’язується отримана задача лінійного програмування. Якщо її розв’язок знову не задовольняє умови цілочисловості, то будується нове лінійне обмеження, що відтинає отриманий розв’язок, не зачіпаючи цілочислових планів. Процес приєднання додаткових обмежень повторюють доти, доки не буде знайдено цілочислового оптимального плану, або доведено, що його не існує.

Розглянемо алгоритм, запропонований Гоморі, для розв’язування повністю цілочислової задачі лінійного програмування, що ґрунтується на використанні симплексного методу і передбачає застосування досить простого способу побудови правильного відтинання. Нехай маємо задачу цілочислового програмування:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{7.4}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \,, \quad i = \overline{1,m} \tag{7.5}$$

$$x_j \geq 0 \;\; (j = \overline{1,n}) \tag{7.6}$$

де x_j − цілі чила ($j = \overline{1,n}$).

Допустимо, що параметри a_{ij}, b_i, c_j ($i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$) – цілі числа.

Не враховуючи умови цілочисловості, знаходимо розв’язок задачі (7.4)-(7.6) симплексним методом. Нехай розв’язок існує і міститься в такій симплексній таблиці 7.1.

Таблиця 7.1 – Симплекс-таблиця

Базис		План	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n
			x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}		x_n
x_1	c_1	β_1	1	0	…	0	α_{1m+1}		α_{1n}

x_2	c_1	β_2	0	1	…	0	α_{2m+1}		α_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
X_m	C_m	B_m	0	0	…	1	α_{mm+1}		α_{mn}

Змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ – базисні, а $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ – вільні. Оптимальний план задачі: $X^* = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m, 0, 0, ..., 0)$. Якщо $\beta_j (j = \overline{1,n})$ = – цілі числа, то отриманий розв'язок є цілочисловим оптимальним планом задачі (7.4)-(7.6). Інакше існує хоча б одне з чисел, наприклад, і β_i – дробове. Отже, необхідно побудувати правильне обмеження, що відтинає нецілу частину значення і β_i.

Розглянемо довільний оптимальний план X^* задачі (7.4)-(7.6). Виразимо в цьому плані базисну змінну і х через вільні змінні:

$$x_i = \beta_i - \alpha_{im+1}x_{m+1} - ... - \alpha_{in}x_n = \beta_i - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij}x_j. \quad (7.7)$$

Виразимо коефіцієнти при змінних даного рівняння у вигляді суми їх цілої та дробової частин. Введемо позначення: $[\beta]$ – ціла частина числа β, $\{\beta\}$ – дробова частина числа β.

Цілою частиною числа а називається найбільше ціле число $[a]$, що не перевищує a. Дробовою частиною є число $\{a\}$, яке дорівнює різниці між самим числом a та його цілою частиною, тобто $\{a\} = a - [a]$.

Наприклад, для $a = 2\frac{1}{3}$ $[a] = 2$, $\{a\} = 2\frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{3}$;

для $a = -2\frac{1}{3}$ $[a] = -3$, $\{a\} = -2\frac{1}{2} - (-3) = \frac{2}{3}$.

Отримаємо:

$$x_i = [\beta_i] + \{\beta_i\} - \sum_{j=m+1}^{n} [\alpha_{ij}]x_j - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\}x_j, \quad (7.8)$$

або

$$x_i - [\beta_i] + \sum_{j=m+1}^{n} [\alpha_{ij}]x_j = \{\beta_i\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\}x_j \quad (7.9)$$

Отже, рівняння (7.9) виконується для будь-якого допустимого плану задачі (7.4)-(7.6). Допустимо тепер, що розглянутий план X^* є цілочисловим оптимальним планом задачі. Тоді ліва частина рівняння (7.9) складається лише з цілих чисел і є цілочисловим виразом. Отже, права його частина також є цілим числом і справджується рівність:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j = \{\beta_i\} + N \tag{7.10}$$

де N – деяке ціле число.

Величина N не може бути від'ємною. Якщо б $N \leq -1$, то з рівняння (7.10) приходимо до нерівності:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j = \{\beta_i\} + N \leq \{\beta_i\} - 1 .$$

Звідки $\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j + 1 \leq \{\beta_i\}$. Тобто це означало б, що дробова частина $\{\beta i\}$ перевищує одиницю, що неможливо. У такий спосіб доведено, що число N є невід'ємним. Якщо від лівої частини рівняння (7.10) відняти деяке невід'ємне число, то приходимо до нерівності:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j \geq \{\beta_i\} \tag{7.11}$$

яка виконується за допущенням для будь-якого цілочислового плану задачі (7.4)-(7.6). У такий спосіб виявилося, що нерівність (7.11) є шуканим правильним відтинанням. Отже, для розв'язування цілочислових задач лінійного програмування (7.1)-(7.3) методом Гоморі застосовують такий алгоритм:

1. Симплексним методом розв'язується задача без вимог цілочисловості змінних – (7.1)-(7.3). Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей план є розв'язанням задачі цілочислового програмування (7.1)-(7.3). Якщо задача (7.1)-(7.3) не має розв'язку (цільова функція необмежена, або система обмежень несумісна), то задача (7.1)-(7.3) також не має розв'язку.

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирається змінна, яка має найбільшу дробову частину. На базі цієї змінної (елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому вона міститься) будується додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j \geq \{\beta_i\}$$

3. Додаткове обмеження після зведення його до канонічного вигляду і введення базисного елемента приєднується до останньої симплексної таблиці,

яка містить умовно-оптимальний план. Отриману розширену задачу розв'язують і перевіряють її розв'язок на цілочисловість. Якщо він не цілочисловий, то процедуру повторюють, повертаючись до п.2. Так діють доти, доки не буде знайдено цілочислового розв'язку або доведено, що задача не має допустимих розв'язання на множині цілих чисел. Доведено, що за певних умов алгоритм Гоморі є скінченним, але процес розв'язування задач великої розмірності методом Гоморі повільно збіжний. Слід також мати на увазі, що і кількість ітерацій суттєво залежить від сформованого правильного відтинання.

Наведене правило щодо формування правильного відтинання не єдине. Існують ефективніші відтинання, які використовуються у другому та третьому алгоритмах Гоморі, однак наявний практичний досвід ще не дає змоги виділити з них найкращий.

Загалом, алгоритм Гоморі в обчислювальному аспекті є мало вивченим. Якщо в лінійному програмуванні спостерігається відносно жорстка залежність між кількістю обмежень задачі та кількістю ітерацій, що необхідна для її розв'язування, то для цілочислових задач такої залежності не існує. Кількість змінних також мало впливає на трудомісткість обчислень.

Очевидно, процес розв'язання цілочислової задачі визначається не лише її розмірністю, а також особливостями багатогранника допустимих розв'язання, що являє собою набір ізольованих точок. Як правило, розв'язування задач цілочислового програмування потребує великого обсягу обчислень.

Тому при створенні програм для ЕОМ особливу увагу слід приділяти засобам, що дають змогу зменшити помилки округлення, які можуть призвести до того, що отриманий цілочисловий план не буде оптимальним.

ТЕМА 8 МОДЕЛІ СПОЖИВЧОГО ВИБОРУ

8.1 Теоретична сутність споживчого вибору
8.2 Гранична корисність

8.1 Теоретична сутність споживчого вибору

В основі формування ринкового попиту лежать рішення споживачів. Модель поведінки споживача будується за загальними правилами мікроекономічного моделювання і включає три основних елементи: мету, обмеження, вибір.

Мета споживача полягає в отриманні якомога більшого задоволення від споживання певного набору благ, тобто в максимізації корисності.

Обмеження – це всі обставини, які не дозволяють споживачу отримати все, що забажається, найважливішими з них є ціни товарів і послуг та доход споживача.

Вибір полягає у прийнятті та реалізації рішення щодо обсягу і структури споживчого набору за даних обмежень, який дозволив би максимізувати задоволення потреб.

Поведінка споживача – це процес формування ринкового попиту покупців, які здійснюють вибір благ з урахуванням існуючих цін.

Наш вибір товарів і послуг для споживання, тобто вибір споживача, залежить, перш за все, від наших потреб і смаків, звичок, традицій, тобто від наших уподобань.

Уподобання споживача – це визнання переваг якихось благ перед іншими благами, тобто визнання одних благ кращими в порівнянні з іншими.

Уподобання покупця є суб'єктивними. Суб'єктивними також є і оцінки корисності кожного обраного блага. Але вибір споживача визначається не тільки його уподобаннями, він обмежений також ціною обираних продуктів і його доходом. Так само як і в масштабах економіки ресурси індивідуального споживача обмежені. Практична необмеженість потреб споживача та обмеженість його ресурсів приводить до необхідності вибору з різних комбінацій благ, тобто до необхідності споживчого вибору.

Одне з теоретичних пояснень закону попиту, а також споживчого вибору пов'язано з законом спадної граничної корисності. Це закон вже був нами сформульовано в узагальненому вигляді, трохи пізніше ми повернемося до цієї формулюванні. Попередньо ж згадаємо, що таке корисність блага в економічній теорії.

Корисність блага – це задоволення, яке відчуває людина в процесі споживання блага; в основі корисності лежать різні фізичні, хімічні, біологічні та інші властивості блага.

В економічній теорії передбачається, що споживач блага якимось чином визначає ступінь корисності від споживання блага, а знаючи корисність різних благ, він може зробити вибір з різних благ. Цей вибір благ повинен бути найкращим з його точки зору, тобто приносити йому найбільшу корисність, найбільший ступінь задоволення.

Споживаючи різні кількості одного і того ж блага, ми помічаємо, що чим більше благ споживаємо, тим менше задоволення ми отримуємо від споживання додаткової одиниці даного блага. Перший з'їдений нами біляш в університетській їдальні приносить нам найбільше задоволення, другий біляш приносить менше задоволення, третій ще менше. Цим також керується споживач, купуючи різні кількості благ. У теорії дана закономірність отримала назву закону спадної граничної корисності.

8.2 Гранична корисність

У мікроекономіці склалися два підходи до пояснення поведінки споживача: кардиналістський або кількісний та ординалістський або порядковий.

Кардиналістська модель поведінки споживача виходить з того, що корисність може вимірюватись кількісно за допомогою умовної одиниці – „ютиля” (від англ. utility – корисність). Маючи на меті максимізацію корисності, споживач оцінює споживчу властивість кожного товару в ютилях і вибирає товари з найбільшим числом ютилів. Величина корисності залежить не тільки від властивостей блага, але й від його кількості, тобто, визначається функціонально.

Загальна величина задоволення, яку отримує споживач від всіх спожитих благ, називається сукупною корисністю (TU).

Залежність сукупної корисності від кількості спожитих благ відображає функція:

$$TU = f(X, Y, \ldots) \qquad (8.1),$$

де X, Y... – кількості споживаних благ.

Для випадку споживання одного блага (X) функція сукупної корисності має вигляд:

$$TU = f(X)$$

Гранична корисність будь-якого блага представляє собою величину додаткової корисності однієї додаткової одиниці споживаного блага.

Закон спадної граничної корисності передбачає залежність між збільшенням кількості споживаного блага і додаткової корисністю додаткової одиниці цього блага. Зі збільшенням кількості споживаних благ загальна величина корисності благ (сукупна корисність) збільшується, але в меншій мірі, тому що кожна додаткова одиниця блага додає зменшується величину корисності.

Закон спадної граничної корисності полягає в тому, що зі збільшенням кількості споживаного блага гранична корисність блага зменшується.

Принципом спадної граничної корисності керується споживач, вибираючи такий споживчий набір, який приносить йому найбільшу корисність при даній ціні блага і при даному доході споживача.

Таким чином, ми можемо коротко сформулювати деякі принципи поведінки споживача на ринку, тобто модель його поведінки.

Вибираючи блага для споживання, покупець керується своїми уподобаннями.

Поведінка споживача є раціональним, зокрема, він висуває певні цілі і керується особистим інтересом, тобто діє в рамках розумного егоїзму.

Споживач прагне максимізувати сукупну корисність, іншими словами, прагне вибрати такий набір благ, який приносить йому найбільшу загальну величину корисності.

На вибір споживача і його суб'єктивні оцінки корисності купуються благ впливає закон спадної граничної корисності.

При виборі благ можливості споживача обмежені цінами благ і його доходом; дане обмеження називається бюджетним обмеженням.

Модель поведінки споживача є пов'язані між собою загальні принципи поведінки споживача на ринку, що включають в себе, перш за все, максимізацію сукупної корисності, закон спадної граничної корисності та бюджетне обмеження.

Викладена вище модель поведінки споживача є найпростішою моделлю. Деякі положення цієї моделі занадто абстрактні. Наприклад, важко уявити, що, з'ївши два біляші, ми подумки визначили кількість отриманого задоволення, більше того, ми навряд чи думали про максимізації корисності в даному випадку. Тим не менш, ця спрощена модель поведінки споживача є дуже корисною, багато що пояснює в поведінці покупців на ринку, в тому числі і те, від чого залежить попит на товари.

В основі ***ординалістського підходу*** лежать наступні припущення (аксіоми уподобань):

- порівнянність: людина здатна з двох наборів благ вибрати для себе привабливіший набір, або вказати на їх еквівалентність з її точки зору;

- транзитивність: споживач встановлює певний порядок уподобань. Якщо набір благ привабливіший для суб’єкта, ніж набір , той в свою чергу переважає привабливістю набір , то набір буде привабливішим також і за набір ;

- ненасичуваність: всі блага бажані для споживача, збільшення благ в наборі робить його привабливішим, споживач завжди віддає перевагу набору, в якому більша кількість товарів.

На ринку існує множина споживчих кошиків. Серед них споживач завжди може знайти такі кошики, які є однаково привабливими для нього, тому що вони мають однаковий рівень корисності. Набір споживчих кошиків з однаковим рівнем корисності називається набором байдужості.

Будь-яка комбінація двох благ може бути показана точкою в прямокутній системі координат. З'єднавши точки з такими комбінаціями товарів, які забезпечують однаковий рівень задоволення потреб, ми одержимо криву байдужості.

ТЕМА 9 ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТА ТИПИ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ

9.1 Виробнича функція як особливий вид економіко-статистичних моделей
9.2 Двофакторні виробничі функції

9.1 Виробнича функція як особливий вид економіко-статистичних моделей

Під ***виробничою функцією*** (ВФ) розуміють економіко-статистичну модель виробництва, продукції у даній економічній системі, що виражає стійку закономірну кількісну залежність між об'ємними показниками ресурсів і випуску продукції.

Кожна економіко-математична модель реального явища характеризується:

1) об'єктом моделювання;
2) системним описом об'єкта;
3) цілями щодо побудови моделі;
4) принципами моделювання;
5) апаратом моделювання;
6) способами ідентифікації та інтерпретації результатів.

Для виокремлення з множини моделей виробничу функцію як особливий вид економіко-статистичних моделей розглянемо зміст кожної з ознак економіко-математичної моделі:

А. ***Об'єкт моделювання***. Безпосереднім об'єктом моделювання щодо ВФ є процеси виробництва продукції в реально функціонуючих протягом певного відрізку часу господарських системах на підприємстві (фірмі), в галузі, регіоні чи в народному господарстві загалом. Відповідно, щодо рівня модельованої системи виробничі функції поділяються на макроекономічні, регіональні, галузеві, а також виробничі функції підприємства.

У низці випадків як самостійний об'єкт моделювання розглядається не вся господарська система, а її частина, що складається з технічно відносно однорідних виробничих одиниць.

Б. ***Системний опис об'єкта***. У теорії виробничих функцій виробничий процес аналізується з погляду перетворення ресурсів у продукт (продукцію). Входами є потоки ресурсів різноманітного виду, повністю чи частково використовувані у виробництві, виходом - готова до реалізації продукція. Функціонуючі в системі ресурси (чинники), технологія та умови організації виробництва визначають потенційні можливості та стан процесу (системи).

В. ***Цілі моделювання***. ВФ будується для розв'язання певних економічних задач, що стосуються аналізу, прогнозування й планування (у вузькому розумінні слова). Використовуються ВФ, як самостійно, так і в складі більш загальних економіко-математичних моделей. Мету побудови ВФ можна охарактеризувати як аналіз чинників щодо суттєвого впливу їх на обсяги випуску продукції.

Однак у кожній конкретній ситуації ця мета має свої особливості, що істотно впливають на процес побудови функції. Доцільно розрізняти такі можливі способи використання ВФ:

1) визначення обсягів випуску за фіксованих обсягів та показників основних ресурсів (випадок, коли ці обсяги несуттєво відрізняються від тих, що спостерігались у минулому);

2) те саме щодо випадку обсягів ресурсів, котрі суттєво відрізняються від усіх, що спостерігалися в минулому;

3) визначення обсягів випуску за заданих значень обсягів ресурсів, що належать до деякої неперервної області (зокрема таких, що змінюються в заданих межах);

4) визначення впливу на обсяг випуску малої зміни обсягів одного чи кількох ресурсів;

5) визначення (виявлення) характеристик виробничого процесу, що виражається через параметри ВФ.

Г. ***Принципи моделювання***. В основі найпоширенішого поняття ВФ лежать принципи, котрі виражають роль аксіоматичних положень теорії виробничих функцій:

1) обсяг випуску продукції, виробленої даною виробничою системою за певний період, визначається обсягами засобів та предметів праці й живої праці, що беруть участь у процесі виробництва впродовж цього періоду;

2) зв'язок між обсягами випуску й обсягами засобів праці, предметів праці й живої праці є для даної виробничої системи закономірним і відносно стійким;

3) у низці випадків додатково береться гіпотеза, що в певних межах будь-яка незалежна зміна аргументів ВФ допускає реальну інтерпретацію.

Д. ***Апарат моделювання***. Основним «матеріалом» для побудови виробничої функції є залежності , де *у* – показник випуску (обсяг), – обсяги виробничих ресурсів (чинників) (кількість чинників ВФ, як правило, не перевищує 10). Функція *f(...)* вважається визначеною в досить широкій області *n*-мірного евклідового простору *R(*)*) та такою, що обчислюється в області свого визначення. Останнє означає, що системний аналітик повинен мати у своєму розпорядженні алгоритм, який дозволяв би обчислювати значення *f(...)* у будь-якій точці, де вона визначена. Як правило, ВФ будується шляхом підбору найбільш адекватних функцій із певного параметричного класу $F = \{y = f(x_1, \dots, x_n, a$, де - вектор параметрів.

Отже, безпосереднім апаратом моделювання в межах даної концепції ВФ є параметричні класи функцій, що залежать від *n* *10* змінних. Як правило, залежність функції *f(...)* від змінних і параметрів задається в явному вигляді (або режимі) чи у вигляді функціональних диференціальних чи інтегральних рівнянь.

Е. ***Ідентифікація й інтерпретація моделі***. Змінні *у,* ототожнюються з показниками обсягів випуску й основними, які беруть участь у виробництві, чинниками (ресурсами). Припускається можливість специфікації параметрів ВФ на підставі статистичних (чи експертних) даних щодо ресурсів та випуску продукції за попередні періоди, а також планових і опосередкованих даних. Метод оцінки параметрів не визначається однозначно, він залежить від цілей побудови ВФ, особливостей модельованого процесу та вихідних даних. Інтерпретація параметрів, у свою чергу, залежить від методу їх оцінювання. Часто для інтерпретації виокремлених параметрів залучаються їх вирази через значення показників, а також значення часткових похідних

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}, \quad i = 1, \dots, n$$

9.2 Двофакторні виробничі функції

Для кожного з видів виробничих функцій можна вказати одну чи кілька умов, що однозначно виокремлюють цей вид з-поміж інших. Ці умови є або співвідношеннями між різними характеристиками функції, або описом поведінки окремих характеристик на різних під областях її визначення.

Ми будемо розглядати виробничі функції у порядку зростаючої складності їх у запису й, відповідно, збільшення кількості необхідних для цього параметрів. Усі ці функції допускають можливість їх модифікації:

1. Функція з фіксованими пропорціями чинників (функція Леонтьева).

(9.1)

де – параметри.

Відомо кілька альтернативних систем (гіпотез), що виокремлюють функції цього виду:

а) гранична продуктивність першого чинника є дворівневою кусково-постійною незростаючою функцією від співвідношення з нульовим нижнім рівнем. Гранична продуктивність другого чинника – неспадна кусково-постійна функція від з нульовим нижнім рівнем;

б) функція є розв'язанням такої задачі математичного програмування:

$$y \quad max$$

$$a_1 y \le x_1$$

$$a_2 y \le x_2$$

де *y* - змінна, яку оптимізують;

в) функція є однорідною, а еластичність заміни чинників дорівнює нулю;

г) функція може бути отримана з функції з постійною еластичністю виду

$$y = \left(\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{a_3} + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{a_3}\right)^{\frac{1}{a_3}}$$

шляхом граничного переходу

Функція Леонтьева призначена в основному для моделювання строго детермінованих технологій, які не допускають відхилення від технологічних норм і нормативів щодо використання ресурсів на одиницю продукції. Як правило, вона використовується для формалізованого опису дрібномасштабних або цілком автоматизованих об'єктів.

2. *Функція Кобба-Дугласа*

(9.2)

Тут також використовується кілька систем гіпотез, що виокремлюють клас функцій Кобба-Дугласа серед двічі диференційованих функцій від двох змінних:

а) еластичності випуску за чинниками є постійними:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{x_1}{y} = a_1$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{x_2}{y} = a_2$$

Розв'язок цієї системи диференційних рівнянь у частинних похідних першого порядку належить до класу функцій Кобба-Дугласа;

б) еластичність функції за одним із чинників є постійною, і функція є однорідною;

в) функція є однорідною, а еластичності зменшення чинників за Алленом та Михайловським дорівнюють одиниці;

г) гранична продуктивність кожного чинника є пропорційною його середній продуктивності;

д) функція є однорідною як функція від x_1, x_2 *і* як функція від x_1 за будь-якого фіксованого x_2.

є) функція може бути отримана з функції з постійною еластичністю шляхом здійснення заміни виду

$$y = a_0\,(a_1 a_1^{a_3} + a_2 x_2^{a_3})^{\frac{1}{a_3}}$$

та граничного переходу . Функція Кобба-Дугласа найчастіше використовується для формалізованого опису середньомасштабних господарських об'єктів та економіки країни.

3. *Лінійна функція*

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 \qquad (9.3)$$

Передумови та гіпотези:

а) граничні продуктивності чинників є постійними:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = a_2$$

а в нулі функція набуває нульового значення;

б) гранична продуктивність одного з чинників є постійною, і функція однорідна першого ступеня:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = a_1$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} = 1$$

в) функція однорідна, й еластичність заміни чинників, за Алленом, є нескінченною;

г) еластичність випуску за чинниками обернено пропорційна їхній середній продуктивності.

Лінійна функція застосовується для моделювання великомасштабних систем (велика галузь, народне господарство в цілому), у яких випуск продукції є результатом одночасного функціонування великої кількості різноманітних технологій. Особливу роль відіграє гіпотеза постійності граничних виробничих чинників чи їх необмеженого заміщення.

4. Функція Алена

$$y = a_0 x_1 x_2 - a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 \qquad (9.4)$$

Визначається за такими умовами: швидкості зростання граничних продуктивностей є постійними, і функція є однорідною.

Функція Алена за a_1, $a_2 > 0$ призначається для формалізованого опису виробничих процесів, у яких надмірне зростання будь-якого з чинників негативно впливає на обсяг випуску продукції. Зазвичай така функція використовується для формалізованого опису дрібномасштабних виробничих систем з обмеженими можливостями переробки ресурсів.

ТЕМА 10 ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

10.1 Економічна сутність динамічного програмування. Основні типи задач та моделі динамічного програмування

10.2 Задачі про заміну основного капіталу обладнання підприємства. Багатокроковий процес

Усі економічні процеси та явища є динамічними, оскільки функціонують і розвиваються не лише у просторі, а й у часі.

Народне господарство, його галузі, регіони чи окремі підприємства мають розробляти стратегічні і тактичні плани. Перші визначаються з допомогою динамічних моделей, розв'язки яких знаходять методами динамічного програмування. Зауважимо, що сума оптимальних планів на окремих відрізках планового періоду Т не завжди являє собою план, оптимальний на всьому такому періоді.

Розглянемо задачу оптимального розподілу капітальних вкладень, які можуть бути використані двома способами: з метою розвитку рослинництва або тваринництва. Відомо, що за першого способу отримаємо прибуток $g(x)$, а за другого – $h(y)$.

У такому разі однокрокову задачу можна подати у вигляді:

$$Z = g(x) + h(y) \to \max \tag{10.1}$$

за умов

$$\begin{aligned} x + y = b, \\ x \ge 0, \quad y \ge 0. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Нехай

$$Z = Z_1, \quad b = b_1, \quad x = x_1, \quad y = b_1 - x_1.$$

Тоді дану задачу можна записати так:

$$Z = g(x) + h(b_1 - x_1) \to \max$$

Розглянемо її як задачу оптимального використання капітальних вкладень за окремими інтервалами планового періоду *T*, маючи на меті розподілити залишок капітальних вкладень на кінець *j*-го інтервалу $(j = 1, 2, \ldots n)$ двома зазначеними способами. При цьому критерій оптимізації не змінюється: максимізуємо обсяг прибутку за весь плановий період *T*.

Якщо на першому інтервалі використано b_1 капітальних вкладень, то на його кінець залишилося їх:

$$b_2 = cx_1 + d\,(b_1 - x_1),$$

де c, d – коефіцієнти пропорційності, що характеризують використання капітальних вкладень першим і другим способами:

$$\frac{x}{b_1 - x_1} = \frac{c}{d}.$$

Задачу для другого інтервалу подаємо так:

$$Z_2 = [g(x_2) + h(b_2 - x_2)] \to \max$$

за умов

$$0 \le x_2 \le b_2.$$

Звідси для будь-якого j–го інтервалу маємо:

$$Z_j = \left[g\left(x_j\right) + h\left(b_j - x_j\right)\right] \to \max$$

за умов

$$0 \le x_j \le b_j.$$

Загальна задача набирає вигляду:

$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = \sum_{j=1}^{n}\left[g\left(x_j\right) + h\left(b_j - x_j\right)\right] \to \max \tag{10.3}$$

за умов

$$0 \le x_j \le b_j \qquad \left(j = \overline{1,n}\right),$$

$$b_j = cx_{j-1} + d\left(b_{j-1} - x_{j-1}\right),\ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Таку задачу розв’язують спеціальними методами.

10.2 Задачі про заміну основного капіталу обладнання підприємства. Багатокроковий процес

Динамічний процес розбивається на сукупність послідовних етапів, або кроків. Кожний крок оптимізується окремо, а рішення (розв'язок), згідно з яким система переходить із поточного стану до нового, вибирається з урахуванням його майбутніх наслідків і не завжди дає найбільший ефект на даному етапі. На останньому кроці приймається рішення (відшукується розв'язок), яке забезпечує максимальний ефект. З огляду на сказане, оптимізація методом динамічного програмування починається з кінця: насамперед планується останній крок. Спираючись на відому інформацію про закінчення передостаннього кроку, на підставі різних гіпотез щодо його закінчення, вибирають управління на останньому кроці. Таке управління називають умовно оптимальним, оскільки знаходять його за припущення, що попередній крок було здійснено згідно з однією з можливих гіпотез.

Нехай аналізується деякий керований процес, перебіг якого можна розбити на послідовні етапи (кроки), що задаються. Ефективність всього процесу Z є сумою ефективностей Z_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ окремих кроків:

$$Z=\sum_{j=1}^{n}Z_j \text{ (адитивний критерій)}$$

або

$$Z=\prod_{j=1}^{n}Z_j \text{ (мультиплікативний критерій).}$$

З кожним кроком задачі пов'язане прийняття певного рішення, так званого ***крокового управління*** $X_j\left(j=\overline{1,n}\right)$, що визначає як ефективність даного етапу, так і всієї операції в цілому.

У задачі динамічного програмування знаходять таке управління $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ всією операцією, яке максимізує загальну її ефективність:

$$Z=\sum_{j=1}^{n}Z_j\to\max.$$

Оптимальним розв'язанням цієї задачі є управління X^*, що складається із сукупності оптимальних покрокових управлінь

$$X^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$$

і забезпечує максимальну ефективність Z^*

$$Z^*=\max_{\chi\in X}\{Z(x)\}.$$

Усі класи задач динамічного програмування розв'язують, керуючись основним принципом: яким би не був стан системи *S* перед черговим кроком, управління на цьому кроці слід вибрати так, щоб ефективність розглядуваного кроку плюс оптимальна ефективність на всіх наступних кроках була максимальною.

Отже, маємо алгоритм розв'язування задач динамічного програмування.

1. Специфікуємо стан заданої керованої системи та множину параметрів, що описують цей стан. Стан системи обираємо, маючи на меті забезпечити зв'язок між послідовними етапами перебігу процесу і знайти допустимий розв'язок задачі в цілому як результат оптимізації на кожному кроці окремо. При цьому оптимальні рішення на наступних етапах приймаємо, нехтуючи впливом подальших рішень на прийняті раніше.

2. Розбиваємо динамічний процес (операцію) на кроки, що відповідають, як правило, часовим періодам планування або окремим об'єктам (підприємствам, видам продукції, устаткування і т. ін.), стосовно яких розробляються управлінські рішення.

3. Подаємо перелік управлінських рішень $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ для кожного кроку і відповідні обмеження щодо них.

4. Визначаємо ефект, що його забезпечує управлінське рішення x_j, на *j*-му кроці, якщо перед тим система була у стані *S*, як функцію ефективності:

$$Z = \{g(x) + h(b_1 - x_1)\} \to \max.$$

5. Досліджуємо, як змінюється стан *S* системи під впливом управлінського x_j на $j-$ му кроці, переходячи до нового стану:

$$S' = \varphi_j(s, x_j).$$

6. Будуємо для розглядуваної задачі рекурентну залежність, що визначає умовний оптимальний ефект $Z_j(s)$, починаючи з $j-$ го кроку і до останнього, через вже відому функцію $Z_{j+1}(s')$:

$$Z_j(s) = \max_{X_j}\{f_j(s, x_j) + Z_{j+1}(s, x_j)\}$$

Цьому ефекту відповідає умовне оптимальне управління на *j*-му кроці $(x_j(s))$. Зауважимо, що за аргумент функції $Z_{j+1}(s)$ беремо не s, а змінений стан системи, тобто $s' = \varphi_j(s, x_j)$.

7. Здійснюємо умовну оптимізацію останнього *n*-го кроку, розглядаючи множину станів *s*, що на один крок віддалені від кінцевого стану, і визначаємо умовний оптимальний ефект на *n*-му кроці:

$$Z_n(s) = \max_{X_n}\{f_n(s, x_n)\}$$

Далі знаходимо умовне оптимальне управлінське рішення $x_n(s)$, завдяки якому цей максимум досягається.

8. Виконуємо умовну оптимізацію $(n-1)-$ го, $(n-2)-$ го і т. д., тобто всіх попередніх кроків за рекурентними залежностями п.6, і для кожного кроку знаходимо умовне оптимальне управління:

$$Z^* = Z_1(s_0)$$

9. Здійснюємо безумовну оптимізацію управління у «зворотному» напрямі – від початкового стану s_0 до кінцевого. Для цього з урахуванням визначеного оптимального управління на першому кроці $x_1^* = x_1(s)$ змінюємо стан системи згідно з п. 5. Далі для цього нового стану знаходимо оптимальне управління на другому кроці x_2^* і діємо так до останнього кроку.

Приклад. Фірма планує нарощувати виробничі потужності на чотирьох підприємствах, маючи для цього 4 млн грн. Для кожного з підприємств розроблено інвестиційні проекти, які відбивають прогнозовані сумарні витрати ***C*** та доходи ***D***, пов'язані з реалізацією кожного проекту. Зміст цих проектів ілюструє таблиця 10.1.

Таблиця 10.1 – Вихідні дані

Проект	Підприємство							
	1		2		3		4	
	C_1	D_1	C_2	D_2	C_3	D_3	C_4	D_4
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	3	1	4	2	4	1	2
3	2	5	2	6	3	9	2	8
4	3	7	3	8	4	12	3	5

Перший проект передбачає відмовитися від розширення підприємства, а тому має нульові витрати і доходи. Розробити план І інвестування виділених коштів у зазначені підприємства так, щоб одержати максимальний прибуток.

Розв'язування. Спрощеним і найменш ефективним способом розв'язування таких задач є перебір усіх можливих варіантів. Проте на практиці їх так багато, що проаналізувати всі і вибрати серед них найефективніший неможливо. Головними недоліками такого способу розв'язування є великий обсяг обчислень, відсутність апріорної інформації про неприпустимі розв'язки, а також неможливість скористатися проміжними результатами аналізу для відкидання неоптимальних комбінацій проектів.

Розв'яжемо цю задачу за алгоритмом (методом) ***зворотного прогону***. Кроками задачі вважатимемо кожне з чотирьох підприємств, оскільки для кожного з них маємо вибрати оптимальний інвестиційний проект за обмежених грошових ресурсів.

Зауважимо, що в цьому разі нединамічний процес розглядаємо як динамічний, аби скористатися методами динамічного програмування для знаходження оптимального розв'язку. Зв'язок між зазначеними кроками забезпечується обмеженнями на загальний обсяг виділених коштів – 4 млн грн.

Змінні задачі візьмемо так, щоб послідовно керувати процесом розподілу коштів:

x_1 – обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 1–4;

x_2 – те саме на кроках 2–4;

x_3 – те саме на кроках 3 і 4;

x_4 – те саме на кроці 4.

$k_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ – обсяги інвестицій на г'-му підприємстві $(k_i = 0,1,2,3,4)$.

$k_i^*\left(i=\overline{1,n}\right)$ – оптимальні обсяги інвестицій на $i-$ му підприємстві.

Рекурентне співвідношення для зворотного прогону від кроку 4-го до 1-го (від четвертого підприємства до першого) подається у вигляді:

$$f_i^*(x_5) = 0,$$

$$f_i^*\left(x_j k_i\right) = \max_{k_i}\left\{D_i(k_i) + f_{i+1}^*(x_i - C_i(k_i))\right\} \quad \left(i = \overline{1,4}\right), \qquad C_j(k_i) \le X_i,$$

де $f_i^*\left(x_j;k_i\right)$ – сумарна ефективність інвестицій з *i*- го кроку до останнього.

Тут $f^*(x_5) = 0$, оскільки п'ятого підприємства не існує. Виконаємо поетапні розрахунки за цією моделлю.

Етап 4.

$$f_4^*\left(x_j k_i\right) = \max_{k_i}\left\{D_i(k_i) + f_{i+1}^*(x_i - C_i(k_i))\right\}$$

Результати розрахунків подаємо таблицею:

x_4	**Дохід** $f_4\ (x_4;k_4) = D_4(k_4) + f_5^*(x_5)$					**Оптимальний розв'язок**	
	$k_4 = 0$	$k_4 = 1$	$k_4 = 2$	$k_4 = 3$	$k_4 = 4$	$f_4^*(x_4)$	k_4^*
0	0	0				0	0
1	0	2				2	1
2	0	2	8			8	2
3	0	2	8	5		8	2
4	0	2	8	5		8	2

Етап 3.

$$f_3^*(x_3) = \max_{k_3}\left\{D_3(k_3) + f_4^*(x_3 - C_3(k_3))\right\}$$

за умов

$$C_3(k_3) \le X_3, \qquad k_3 = 0,1,2,3,4.$$

Результати розрахунків відбиває таблиця:

x_3	**Дохід** $f_3\ (x_3;k_3) = D_3(k_3) + f_4^*(x_3 - C_3(k_3))$				**Оптимальний розв'язок**	
	$k_3 = 1$	$k_3 = 2$	$k_3 = 3$	$k_3 = 4$	$f_3^*(x_3)$	k_3^*
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	$0 + f_4^*(0-0) =$ $= 0 + 0 = 0$				0	0
1	$0 + f_4^*(1-0) =$ $= 0 + 2 = 2$				2	0
2	$0 + f_4^*(2-0) =$ $= 0 + 8 = 8$	$4 + f_4^*(2-2) =$ $= 4 + 0 = 4$			8	0

Продовження таблиці

1	2	3	4	5	6	7
3	$0+f_4^*(3-0)=$ $=0+8=8$	$4+f_4^*(3-2)=$ $=4+2=6$	$9+f_4^*(3-3)=$ $=9+0=9$		9	3
4	$0+f_4^*(4-0)=$ $=0+8=8$	$4+f_4^*(4-2)=$ $=4+8=12$	$9+f_4^*(4-3)=$ $=9+2=11$	$12+f_4^*(4-4)=$ $=12+0=12$	12	2 або 4

Розрахунки виконуються так. Нехай потрібно знайти $f_3^*(x_3=3)$. Обчислюємо

$$f_3(x_3;k_3)=D_3(k_3)+f_4^*(x_3-C_3(k_3)).$$

Отже,

$$f_3(x_3=3;k_3=1)=0+f_4^*(3-0)=0+f_4^*(3)=0+8=0,$$
$$f_3(x_3=3;k_3=2)=4+f_4^*(3-2)=4+2=6,$$
$$f_3(x_3=3;k_3=3)=9+f_4^*(3-3)=9+0=9.$$

Запишемо, що $C_3(k_3=1)=0$, оскільки для третього підприємства не існує проекту з інвестиціями в 1 млн грн. Значення $f_4^*(x_3-C_3(k_3))$ беремо з попередньої таблиці. Далі маємо:

$$f_3^*(x_3)=\max_{K_3=1,2,3}\left\{D_3(k_3)+f_4^*(x_3-C_3(k_3))\right\}=\max\{0,6,9\}=9.$$

Етап 2.

$$f_2^*(x_2)=\max_{k_2}\left\{D_2(k_2)+f_3^*(x_2-C_2(k_2))\right\}$$

за умов

$$C_2(k_2)\le x_2,\qquad k_2=0,1,2,3,4.$$

Результати розрахунків подаємо таблицею:

x_2	**Дохід** $\{f_2(x_2;k_2)=D_2(k_2)+f_3^*(x_3-C_2(k_2))\}$					**Оптимальний розв'язок**	
	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$	$k_2=4$	$f_2^*(x_2)$	k_2^*
0	0					0	0
1	4	4				4	1
2	8	6	6			8	0
3	9	12	8	8		12	1
4	12	13	14	10		14	2

Етап 1.

$$f_1^*(x_1) = \max_{k_1}\{D_1(k_1) + f_2^*(x_1 - C_1(k_1))\}$$

за умов

$$C_1(k_1) \le x_1, \qquad k_1 = 0,1,2,3,4.$$

Виконуємо розрахунки лише для $x_1 = 4$, подаючи їх у вигляді таблиці:

x_1	**Дохід** $f_1(x_1;k_1) = D_1(k_1) + f_2^*(x_1 - \tilde{N}_1(k_1))$				**Оптимальний розв'язок**	
	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_1 = 3$	$k_1 = 4$	$f_1^*(x_1)$	k_1^*
4	$3 + f_2^*(4-1) =$ $= 3 + 12 = 15$	$5 + f_2^*(4-2) =$ $= 5 + 6 = 11$	$7 + f_2^*(4-3) =$ $= 7 + 4 = 11$		15	1

Знайдемо оптимальний план. Із таблиці першого кроку випливає, що $k_1^* = 1$, тобто для першого підприємства реалізується другий проект, який використовує 1 млн грн. інвестицій з ефективністю 3 млн грн. Отже, $x_3 = 3 - 1 = 2$ для другого, третього і четвертого підприємств залишається 4–1=3 млн грн. інвестицій. Із таблиці другого кроку маємо, що за умов $x_2 = 3$ максимальний ефект настає в разі реалізації для другого підприємства першого проекту $(k_2 = 1)$ ефективність становить 4 млн грн. Отже, $x_3 = 3 - 1 = 2$, тобто для третього і четвертого підприємств слід використати 2 млн грн. інвестицій. Із таблиці третього кроку за умов $x_3 = 2$ маємо, що $k_3 = 0$. Отже, $x_4 = 2$, а йому відповідають капітальні вкладення $k_4 = 2$, ефективність яких 8 млн грн. Остаточно маємо: ефективність 4 млн грн. інвестицій становить 3+4 + 8=15 (млн грн.).

ТЕМА 11 ТЕОРІЯ ІГОР

11.1 Сутність теорії ігор

11.2 Застосування теорії статистичних ігор розглянемо на конкретному прикладі

11.1 Сутність теорії ігор

Теорія ігор – розділ прикладної математики, який вивчає математичні моделі прийняття рішень у так званих конфліктних ситуаціях, що мають місце. Основоположниками теорії ігор є математик Дж. Фон Непман та економіст О. Моргенштерн. В подальшому її розвинули Неш Джон, Зелтен Райнхард, Харшаньї Джон Чарльз, які в 1994 р. стали лауреатами премії пам'яті Альфреда Нобеля з економіки «за пріоритетний вклад в аналіз некооперативних ігор".

Сутність теорії ігор полягає у встановленні оптимальної (у тому чи іншому змісті) стратегії поведінки в конфліктних ситуаціях. Метою теорії ігор є визначення оптимальної стратегії для кожного гравця.

Стратегією гравця називається сукупність правил, що обумовлюють вибір його дій при кожному особистому ході залежно від наявної ситуації.

Під конфліктом розуміється ситуація, в якій стикаються інтереси двох чи більше сторін, які переслідують різні (інколи протилежні) цілі. Кожна з сторін-учасників конфліктних ситуацій може у певний спосіб впливати на хід подій, але не має змоги повністю ним керувати. Конфліктні ситуації виникають під час вирішення різноманітних економічних проблем (відносини між організаціями-виробниками і споживачами, торгівля, економічна конкуренція тощо).

Щоб дослідити конфліктну ситуацію будують її формалізовану спрощену модель, яка називається грою. Теорія ігор встановлює для різних класів конфліктних ситуацій оптимальні лінії поведінки учасників – стратегії гравців, що забезпечують рівновагу у грі. Оптимальні стратегії гравців гарантують кожному з них якийсь виграш, причому такий, що відхід будь-якого з учасників від узгодженої стратегії може тільки зменшити його виграш.

Ігри різняться за числом учасників, характеристиками так званих платіжних функцій, які визначають виграш кожного гравця залежно від його поведінки і поведінки інших учасників конфлікту, за інформацією про ситуацію, що склалася та яка є в розпорядженні партнерів, за правилами, що обмежують вибір лінії поведінки учасників, за можливостями укладання угод між ними і входження в коаліції, за визначенням поняття «рівноваги» чи «справедливого вирішення гри».

Наприклад, теорія ігор математично описує характерні для ринкової економіки явища конкуренції у вигляді гри. Простий варіант передбачає протистояння двох конкурентів за ринок збуту. Складні варіанти передбачають, що в грі беруть участь багато супротивників, вступаючи при цьому між собою в постійні або в тимчасові союзи. У першому випадку гра називається парною, в другому – гра *n*-осіб, або множинна. У виразі наявності союзів гра має назву коаліційної.

Складовою теорії ігор виступає статистична теорія ігор. Це розділ сучасної прикладної математики, який вивчає методи обґрунтування оптимальних рішень в конфліктних ситуаціях.

У теорії статистичних ігор наявні такі поняття як вихідна стратегічна гра і власне статистична гра. В цій теорії першого гравця називають природою, вкладаючи в це поняття сукупність обставин, в яких доводиться приймати рішення другому гравцю, якого називають статистиком.

Якщо виграш одного гравця дорівнює програшу іншого, то гра називається антагоністичною або грою з нульовою сумою. У процесі гри її учасники здійснюють ходи. Ходом гравця називається вибір та здійснення однієї із передбачених правилами дій.

Ходи бувають двох видів: особисті та випадкові. Особистий хід – це свідомий вибір гравцем одного з можливих варіантів дій. У подальшому ми будемо розглядати тільки особисті ходи гравців. Випадковий хід – це випадково вибрана дія.

Для того, щоб вирішити гру, або знайти рішення гри необхідно для кожного гравця вибрати стратегію, яка б відповідала умові оптимальності. Це означає, що один із гравців повинен одержати максимальний виграш, у той час як другий дотримується своєї стратегії. Такі стратегії називаються оптимальними.

Оптимальні стратегії мають також відповідати умові стійкості, тобто будь-кому з гравців повинно бути невигідно відмовитися від своєї стратегії у цій грі.

Якщо гра повторюється багато разів, то тоді гравців може цікавити не виграш і програш кожного разу в кожній конкретній партії, а середній виграш (програш) в усіх партіях.

Статистична теорія ігор відрізняється від стратегічної теорії ігор. Так, стратегічна теорія ігор передбачає такі умови:

– активні дії обох гравців;

– обидва гравці поводяться розумно з погляду своїх інтересів;

– повна невизначеність у виборі стратегії кожним гравцем;

– обидва гравці діють на підставі детермінованої інформації, визначеної матрицею втрат.

На відміну від стратегічної статистична теорія ігор відбувається за таких умові

– природа не є активним гравцем, тобто вона "нерозумна" і не протидіє максимальному виграшу другого гравця;

– статистик (другий гравець) намагається виграти гру в уявного противника, тобто у природи;

– часткова невизначеність у виборі стратегії;

– природа розвивається і діє відповідно до об'єктивно існуючих законів;

– наявність можливості у статистика поступового вивчення законів, зокрема, на основі статистичного експерименту.

11.2 Застосування теорії статистичних ігор розглянемо на конкретному прикладі

Швейна фабрика випускає жіночі плащі та пальта, реалізація яких здійснюється через фірмовий магазин і залежить від природних кліматичних умов, насамперед від погодних. Основні виробничі показники фабрики наведені в таблиця. 10.1 з додатково введеними їх буквеними позначеннями.

Визначити оптимальну стратегію реалізації продукції швейної фабрики, яка б сприяла отриманню максимального прибутку.

Розв'язання

1. Визначимо спочатку гравців. У ролі природи (перший гравець) тут виступатиме попит на продукцію. Множину станів природи (стратегії) позначимо

$$v = (v_1, v_2), \tag{11.1}$$

де v_1 – попит на продукцію фабрики в теплу погоду;

v_2 – попит на продукцію в прохолодну погоду.

У ролі статистика виступатиме фабрика (другий гравець), яка має два можливі варіанти (стратегії) розвитку подій α_1, α_2, що означають, що обсяги

реалізації продукції залежать від погодних умов – відповідно теплої і прохолодної погоди.

Передбачається, що статистик, який займає активну позицію, може оцінювати наслідки кожного варіанта реалізації продукції залежно від стану природи.

Таблиця 11.1 – Основні виробничі показники швейної фабрики за видами продукції за березень – квітень

Вид продукції	**Собівартість одиниці, грн (*z*)**	**Ціна, грн (*p*)**	**Обсяг реалізації, од. (*q*)**	
			Тепла погода	**Прохолодна погода**
Плащі	400	800	2000	1080
Демісезонні пальта	1350	2430	700	1100

2. Функція *П(v,a)* буде функцією прибутку. Її можна задати аналітичним виразом *П=q(p-z)* .

3. Розглянемо стратегії гравців, зробивши відповідні розрахунки очікуваного прибутку:

– в умовах здійснення стратегії природи що відповідає попиту на продукцію фабрики в теплу погоду, очікуваний прибуток становитиме:

$$П = 2000(800 - 400) + 700(2430 - 1350) = 1556 \text{ (тис. грн);}$$

– взявши за основу стратегію природи v_2, що передбачає попит на продукцію в прохолодну погоду, фабрика отримає прибуток:

$$П = 1080(800 - 400) + 1100(2430 - 1350) = 1620 \text{ (тис. грн);}$$

– якщо фабрика прийме стратегію a_1, яка відповідає теплій погоді, тоді їй вдасться продати всі плащі, але тільки частину пальт (700 із 1100 од.) та отримати прибуток:

$$П= 2000(800 - 400) + 700(2430 - 1350) - (110 - 700)*$$
$$*(2430 - 1350) = 1124 \text{ (тис. грн);}$$

– коли фабрика обере стратегію a_2, яка відповідає прохолодній погоді, то вона продасть усі пальта і частину плащів (1080 із 2000 од.) і отримає прибуток:

$$П = 1080(800 - 400) + 1100(2430 - 1350) - (2000 - 1080)*$$
$$*(800 - 400) = 1252 \text{ (тис. грн).}$$

3. На основі одержаних даних побудуємо платіжну матрицю (табл. 11.2).

Таблиця 11.2 – Матриця прибутку *П(v,a)* фабрики, тис. грн

Показники	v_1	v_2	min за рядками
a_1	1556	1124	1124
a_2	1252	1620	1252
max за стовпцями	1556	1620	—

Із платіжної матриці видно, що перший гравець «природа» ні за яких варіантів розвитку подій не отримає прибуток менший ніж 1124 тис. грн. Проте за збігу погодних умов з обраною стратегією, виграш фабрики становитиме 1556 або 1620 тис. грн. Якщо другий гравець "фабрика" буде постійно застосовувати стратегію a_1 , а гравець природа – стратегію v_2 , то виграш зменшиться до 1252 тис. грн.

Подібна тенденція відбуватиметься, коли гравець «фабрика» буде постійно застосовувати стратегію a_2 , а гравець «природа» – стратегію v_1.

Отже, можна зробити висновок, що найбільший прибуток фабрика може одержати, якщо буде почергово застосовувати стратегії a_1 та a_2. Така стратегія називається змішаною, а її складові (a_1 та a_2) – чистими стратегіями.

Оптимізація змішаної стратегії дасть змогу другому гравцю (статистика) – фабриці завжди отримувати середнє значення виграшу незалежно від стратегії першого гравця (природа).

Покажемо це на нашому прикладі. Для цього позначимо частоту застосування фабрикою стратегії a_1 через x. Виходячи з цього, частота застосування ним стратегії a_2 становитиме $1-x$.

Якщо фабрика застосує оптимальну змішану стратегію, то і за стратегії v_1 (тепла погода) і за стратегії v_2 (прохолодна погода) другого гравця (природа) вона повинна отримати однаковий середній прибуток:

$$1556*x + 1124(1 - x) = 1252*x + 1620(1 - x);$$
$$1556*x + 1124 – 1124*x – 1252*x + 1620 – 1620*x;$$
$$800*x = 496;$$
$$x = \frac{496}{800} = \frac{31}{50} = 0{,}62;$$

$$1-x=1-\frac{496}{800} = 1 - \frac{31}{50} = \frac{19}{50} = 0{,}38.$$

Справді, при застосуванні стратегії v_1 (тепла погода) гравця природи середній прибуток фабрики дорівнюватиме

$$1556*x + 1124(1 - x) = 1556 \times 0{,}62 + 1124 \times 0{,}38 =$$
$$= 1391{,}84 \text{ (тис. грн).}$$

При реалізації стратегії v_2 (прохолодна погода) гравця природи середній прибуток фабрики становитиме:

$$1252 *x + 1620(1 - x) = 1252 \times 0{,}62 + 1620 \times 0{,}38 =$$
$$= 1391{,}84 \text{ (тис. грн).}$$

Таким чином, гравець фабрика, застосовуючи чисті стратегії a_1 та a_2 у відношенні 31 до 19 (приблизно 3 до 2), матиме оптимальну змішану стратегію, що забезпечить йому у будь-якому випадку середній прибуток розміром 1391,84 тис. грн, тобто середній платіж дорівнюватиме 1391,84 тис. грн. Такий середній платіж, який одержують при реалізації оптимальної стратегії, називається ціною гри.

Визначимо також кількість пальт і плащів, які фабрика повинна випускати для одержання максимального прибутку:

*(2000 плащів + 700 пальт) * 0,62 + (1080 плащів +*
*+ 1100 пальт) * 0,38 = 1240 плащів + 434 пальта +*
+ 410,4 плащів + 418 пальт = 1650 плащів + 852 пальта.

Таким чином, оптимальна стратегія фабрики означає 1650 плащів та 852 пальта. За таких умова вона отримає середній прибуток розміром 1391,84 тис. грн.

Ігрові підходи використовуються економістами як на макрорівні при розробці моделей, в яких враховуються інтереси різних ланок економіки, так і на рівні підприємства для вибору оптимальних рішень при створенні запасів сировини, матеріалів, напівфабрикатів, підвищенні якості продукції, маркетинговій діяльності тощо.

Перевагою теорії ігор є можливість розширення поняття оптимальності, включаючи, наприклад, компромісне рішення, яке йде на задоволення різних потреб у грі. З іншого боку, в економічних задачах, аналіз яких зводиться до математичного програмування або до теорії ігор, при елементарній оцінці ефективності варіанта, кількість варіантів настільки велика, що вибрати оптимальний, як правило, вкрай важко.

Перелік використаної літератури

1. Абрамов Л. М., Капустин В. Ф. Математическое программирование. Л., Изд-во Ленинград. ун-та, 1976. – 184 с.
2. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1985. – 172 с.
3. Ашманов С. А. Линейное программирование. – М.: Наука, 1981. – 150 с.
4. Белман Р. Динамическое программирование. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. – 160 с.
5. Белман Р. Прикладные задачи динамического программирования. / Белман Р., Дрейфус С. – М.: Наука, 1965. – 160 с.
6. Вітлінський В. В. Економіко-математичне моделювання: Навч. посібник. / Вітлінський В. В., Наконечний С. І. та інші. – К.: КНЕУ, 2008. – 536 с.
7. Вітлінський В. В. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / Вітлінський В. В., Верченко П. І. – К.: КНЕУ, 2000. – 292 с.
8. Гольштейн Е. Г. Задачи линейного программирования транспортного типа. / Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. – М.: Наука, 1969. – 98 с.
9. Дзюбан І. Ю. Методи дослідження операцій. / Дзюбан І. Ю., Жиров О. Л., Охріменко М. Г. – Київ.: “Політехніка”, 2005. – 160 с.
10. Исследование операций в экономике: учеб. Пособие для вузов. / Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н.; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.
11. Назаренко О. М. Основи економетрики: Підручник. – Київ: „Центр навчальної ліітератури”, 2004. – 392 с.
12. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: Підручник. – 4-те вид., перероб. і допов. – К., 2000. – 688 с.
13. Калихман И. Л. Динамическое программирование в примерах и задачах. / Калихман И. Л., Войтенко М. А. – М.: Высш. шк., 1973. – 86 с.
14. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование. / Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б. – М.: Высш. школа, 1980. – 300 с.
15. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій: Підручник. – 4-те вид., перероб. і допов. – К., 2000. – 688 с.
16. Калихман И. Л., Войтенко М. А. Динамическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1973. – 120 с.

17. Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике: учеб. Пособие для вузов. / Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. / Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н.; – М.: ЮНИТИ, 2002. – 407 с.

18. Наконечний С. І., Збірник задач з курсу «Математичне програмування». Частина 1.: Навч. посібник. / Наконечний С. І., Гвоздецька Л. В. – К.: ІСОД, 1996. – 128 с.

19. Романюк Т. П. Математичне програмування: Навч. посіб. / Романюк Т. П., Терещенко Т. О., Присенко Г. В., Городкова І. М. – К.: ІЗМН, 1996. – 312 с.

20. Сакович В. А. Исследование операций. – Минск: Высшая школа, 1985. – 188 с.

21. Турунтаев Л. П. Теория принятия решений: Учебное пособие. – Томск: ТУСУР, 2002. – 206 с.

22. Яворский В. В. Оптимизация и математические методы принятия решений: Учебное пособие для вузов. – Томск: ТУСУР, 2006. – 234 с.

Навчальне видання

ЄСІНА Валерія Олександрівна

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

(для студентів всіх форм навчання
за напрямом підготовки 6.030504 – Економіка підприємства)

Відповідальний за випуск : *О. В. Димченко*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання: *І. В. Волосожарова*

План 2013, поз. 79Л

Підп. до друку 30.10.2013	Формат 60х84/16
Друк на ризографі.	Ум. друк. арк. 3,8
Зам. №	Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4705 від 28.03.2014 р.