МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА**

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ

для виконання розрахунково-графічної роботи
з навчальної дисципліни

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

*(для студентів заочної форми навчання
освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»
напряму підготовки 6.030504 - Економіка підприємства)*

**Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2015**

Методичні вказівки та завдання для виконання розрахунково-графічної роботи з навчальної дисципліни «Оптимізаційні методи і моделі» (для студентів заочної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки 6.030504 - Економіка підприємства) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад.: О. О. Воронков. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – 30 с.

Укладач: канд. екон. наук О. О. Воронков

Рецензент: канд. екон. наук, доц. Н. І. Склярук

Рекомендовано кафедрою економіки підприємств міського господарства, протокол № 1 від 27.08.2015 р.

ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Вивчення дисципліни «Оптимізаційні методи і моделі» передбачено освітньо-професійною програмою підготовки бакалавра за напрямом підготовки 6.030504 - Економіка підприємства. Зміст дисципліни ґрунтується на необхідності підготовки фахівців, що мають теоретичну базу та практичні навички з використання математичних методів обґрунтування рішень в управлінні економічними системами.

Метою вивчення дисципліни «Оптимізаційні методи і моделі» є формування системи базових знань в області методології постановки задач, побудови економіко-математичних моделей та методів їх розв'язання і аналізу. В результаті вивчення курсу студенти повинні оволодіти прийомами з побудови економіко-математичних оптимізаційних моделей а також методами розв'язання задач різної складності.

У процесі вивчення дисципліни «Оптимізаційні методи і моделі» студент повинен виконати розрахунково-графічну роботу, що містить два завдання. Перше полягає у пошуку та аналізі оптимального плану лінійної оптимізаційної моделі. Пропоноване завдання є найпростішою задачею виробничого планування. При розв’язанні задачі треба застосувати два методи - геометричний і симплексний, скласти двоїсту задачу і визначити тіньові оцінки ресурсів, далі надати економічну інтерпретацію елементам розв’язків прямої та двоїстої задач. Друге завдання полягає у пошуку оптимального транспортного маршруту. Для його розв’язання треба скористатись методом потенціалів. Початковий опорний план визначити методом північно-західного кута. Наприкінці побудувати схему перевезень, що відповідає оптимальному плану.

У методичних вказівках наведені основні теоретичні положення і розглянуті на прикладах характерні етапи розв’язання завдань.

Розрахунково-графічна робота має бути оформленою відповідно до встановлених вимог, обов'язково відповідати номеру варіанта, містити умови розв'язуваних завдань, необхідні розрахунки та пояснення і висновки.

Номер варіанта вихідних даних на розрахунково-графічну роботу треба вибирати за останньою цифрою номера залікової книжки студента. Розрахунково-графічна робота має бути виконана у термін, призначений навчальним графіком. Наприкінці роботи треба навести літературу, якою студент користувався під час розв’язання завдань.

На титульному аркуші треба чітко написати назву дисципліни, варіант завдання, прізвище, ім’я та по батькові студента, вказати курс, спеціальність і факультет.

1 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

1.1 Найпростіша задача виробничого планування

Найпростіша задача виробничого планування (задача про оптимальне використання ресурсів) за класифікацією належить до задач лінійного програмування (ЗЛП). Математичну модель задачі лінійного програмування завжди записують у двох формах – у **загальній формі** (ЗЗЛП) і **канонічній формі** (КЗЛП).

Нагадаємо визначення.

Функцію

$$L = \Sigma c_j x_j \tag{1.1}$$

називають цільовою функцією (або лінійною формою) задачі лінійного програмування (ЗЛП), а умови

$$\Sigma a_{ij} x_j \le b_i; \quad (i=1,m;\ j=1,n), \qquad x_j \ge 0 \tag{1.2}$$

- обмеженнями задачі лінійного програмування.

Загальною задачею лінійного програмування називають задачу, що полягає у визначенні мінімальної або максимальної величини функції (1.1) при виконанні умов (1.2).

Приклад 1.1. Для виготовлення двох видів виробів *A* і *B* використовують три види сировини. На виробництво одиниці виробу *A* потрібно витратити сировини першого типу 4 од., другого – 3 од. і третього - 3 од. На виробництво одиниці виробу *B* потрібно витратити сировини першого типу 3 од., другого – 4 од. і третього – 5 од. Виробництво забезпечене сировиною першого типу в кількості 440 од., другого – 393 од., третього – 450 од. Дохід від реалізації одиниці готового виробу *A* дорівнює 6 грош. од., виробу *B* – 5 грош. од.

Скласти план виробництва виробів так, щоб дістати найбільший дохід від реалізації виробів.

Умову задачі зведемо у таблицю 1.1.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані

Сировина	***A***	***B***	***Запаси***
$\mathbf{S_1}$	4	3	440
$\mathbf{S_2}$	3	4	393
$\mathbf{S_3}$	3	5	450

Складемо математичну модель задачі, для чого позначимо кількість виробів *A*, яку необхідно виготовити, x_1, а виробів $B – x_2$. Запаси сировини обмежені нерівностями

$$4x_1+3x_2 \le 440,$$
$$3x_1+4x_2 \le 393,$$
$$3x_1+5x_2 \le 450.$$

Дохід від реалізації виробів *A* і *B* виразимо рівністю

$$L = 6x_1 + 5x_2 \Rightarrow \max.$$

Отже, треба знайти такі x_1 і x_2, які задовольняють нерівностям і перетворюють на максимум цільову функцію L.

Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

У тому випадку, коли ЗЗЛП містить дві змінні x_1 і x_2, множину її припустимих планів можна зобразити на координатній площині й дістати розв'язок за графічним методом. Графічне розв'язання ЗЗЛП носить ілюстративний характер, але основний зміст і термінологія розповсюджуються на задачі великої розмірності. Пару значень змінних x_1 і x_2 зображують точкою з координатами (x_1, x_2). Оскільки змінні x_1, x_2 повинні бути не меншими за нуль, їх припустимі значення лежать тільки вище осі Ox_1, (на якій $x_2 = 0$) і правіше осі Ox_2 (на якій $x_1 = 0$). Відповідно до основних теорем лінійного програмування цільова функція L перетворюється на максимум в одній з вершин багатокутника припустимих розв'язків. Такою вершиною є вершина, що найбільш віддалена від початку координат.

Приклад 1.2. Звернемося до моделі, отриманої у прикладі 1.1 і побудуємо на площині $x_1 0 x_2$ область припустимих рішень ЗЛП або переконаємося, що вона не існує (рис. 1.1). Розв'язком кожної нерівності є напівплощина, що обмежує область припустимих рішень задачі. Покладемо в першому рівнянні $x_1 = 0$, отримаємо рівняння прямої лінії, перша точка якої

$3x_2 = 440, \quad x_2 = 440/3 = 147$ має координати (0, 147),

друга точка $4x_1 = 440, x_1 = 440 / 4 = 110$ має координати (110, 0).

Аналогічно отримаємо координати точок для другого обмеження (131, 0) і (0; 98,25) та для третього обмеження (150, 0) і (0, 90).

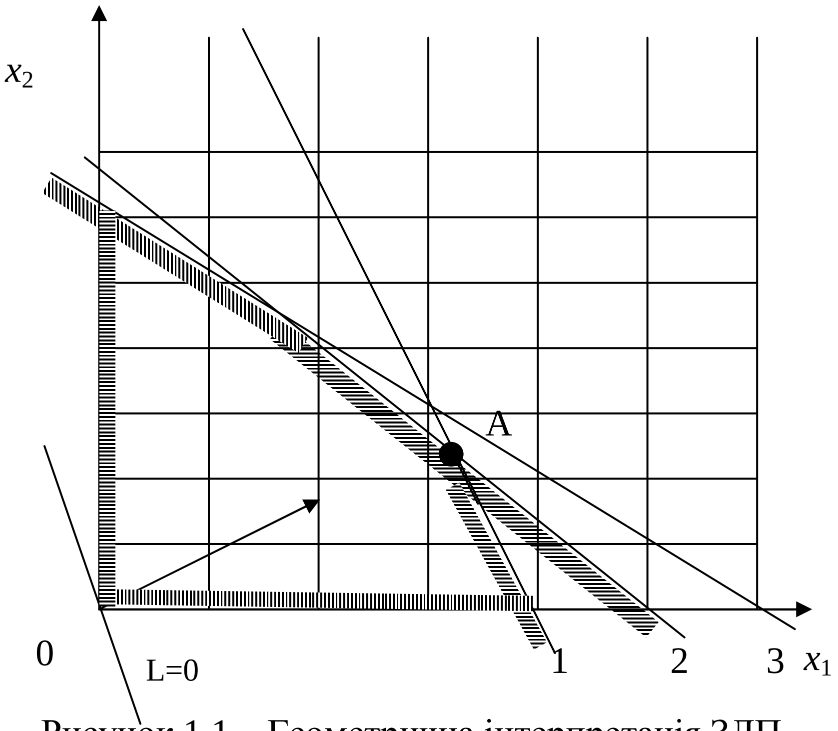

Рисунок 1.1 – Геометрична інтерпретація ЗЛП

Отриманий багатокутник є областю припустимих рішень, тобто будь-яка точка його площини задовольняє нерівностям. Її називають **припустимим планом.** Відзначимо, що цих рішень - нескінченна множина, тому що будь-яка пара значень вільних змінних, узята з ОПР, задовольняє системі нерівностей.

Для визначення вершини, де цільова функція L перетворюється на максимум, геометричним методом побудуємо градієнт цільової функції - вектор grad $L = c\{6,5\}$. Далі побудуємо лінію рівня, що відповідає $L = 0$; вона проходить крізь початок координат і перпендикулярна вектору c. Цю лінію називають опорною прямою. Переміщуючи опорну пряму в напрямку вектору $c=\{6,5\}$, визначимо, що найвіддаленою вершиною багатокутника є вершина A, у якій перетинаються прямі нерівностей 1 і 2. Визначимо її координати:

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 440 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 393 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 110 - \frac{4}{3}x_2 \\ 330 - \frac{9}{4}x_2 &+ 4x_2 = 393 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 110 - 3 * \frac{36}{4} = 83 \\ \frac{7}{4}x_2 &= 63, \quad x_2 = 63 * \frac{4}{7} = 36 \end{aligned}\right\}.$$

Отже, для одержання максимального доходу необхідно виробити 83 вироби A та 36 виробів B. Цільова функція при цьому досягне значення

$$L_{\max} = 6 * 83 + 5 * 36 = 498 + 180 = 678 \text{ грош. од.}$$

Канонічна форма ЗЛП

Переважна більшість методів розв'язання задач лінійного програмування призначена для канонічних задач. Тому початковий етап розв'язання будь-якої загальної ЗЛП завжди пов'язаний з приведенням її до еквівалентної КЗЛП.

Канонічною називають задачу лінійного програмування, що полягає у встановленні екстремального значення функції

$$L = \Sigma c_j x_j \tag{1.3}$$

за умов

$$\Sigma a_{ij} x_{ij} = b_i \qquad \text{і} \qquad x_j \geq 0. \tag{1.4}$$

Будь-яку задачу лінійного програмування можна звести до форми канонічної задачі (КЗЛП). Відзначимо, що не є принциповим, що треба шукати для цільової функції – максимум або мінімум. Випадок, коли L треба перетворити на максимум, легко звести до знаходження мінімуму, якщо змінити знак L на зворотний (мінімізувати не L, а $L' = -L$), тому що

$$\min f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max[-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)],$$

і навпаки.

Від умов-нерівностей можна перейти до умов-рівностей шляхом введення нових додаткових змінних. Причому кількість додаткових змінних дорівнює кількості нерівностей m. У КЗЛП кількість рівнянь m, що задають множину D, менша або дорівнює кількості змінних n задачі ($m \leq n$). У такій системі рівнянь m змінних називають **базисними**, а решті (n-m) змінних – **вільними**.

Якщо m рівностей (1.4) є лінійно незалежними, то систему з m лінійно незалежних рівностей з n змінними ($m < n$) завжди можна розв'язати відносно m

змінних, називаних базисними, якщо виразити їх через інші $k=n-m$ змінних, називаних вільними. Вільним змінним можна надавати будь-які значення, не порушуючи умову (1.4).

План КЗЛП $x=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ називають базисним планом задачі, якщо його компоненти, що відповідають базисним стовпцям, перевищують нуль ($x_j > 0$), а всі інші компоненти (не базисні) – дорівнюють нулю.

Нагадаємо основні теореми лінійного програмування.

Теорема 1. Якщо цільова функція L приймає максимальне значення в деякій точці ОПР, то вона приймає це значення і в деякій кутовій точці ОПР.

Теорема 2. Кожний припустимий базисний план є кутовою точкою ОПР.

Справедливе й зворотне ствердження: якщо план $x=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ є кутовою точкою ОПР, то він є припустимим базисним планом задачі.

Приклад 1.3. Звернемося до моделі, отриманої у прикладі 1.1, і приведемо її до канонічної форми, для чого введемо додаткові змінні x_3, x_4, x_5.

Отримаємо таку КЗЛП: знайти $x=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, що задовольняють системі рівнянь

$$4x_1+3x_2+x_3 = 440,$$
$$3x_1+4x_2+x_4 = 393,$$
$$3x_1+5x_2+x_5 = 450.$$

і перетворюють на максимум цільову функцію L:

$$L = 6x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \Rightarrow \max.$$

Отримана система рівнянь містить три рівняння ($m = 3$) і п'ять невідомих змінних ($n = 5$). Зазначимо, що за економічним змістом додаткові змінні є залишками ресурсів першого, другого та третього типів відповідно.

Симплексний метод

За своєю сутністю симплексний метод є послідовним перебором кутових точок, за яким значення цільової функції зростає від однієї ітерації до іншої (від однієї кутової точки до іншої). Критерій оптимальності в симплексному методі реалізують шляхом визначення оцінок Δ_j для небазисних векторів-стовпців матриці A щодо поточного базису (симплекс-різниць). Якщо симплекс-різниці показують неоптимальність плану, здійснюють перехід до наступного базису. При цьому один стовпець виводять з базису, а інший вводять. Якщо є кілька стовпців, що мають від’ємні симплекс-різниці, треба вибирати, який з них вводити до базису в першу чергу.

Для застосування симплексного методу необхідно задачу подати в канонічній формі.

Алгоритм симплексного методу

1. Визначити початковий опорний план.
2. Скласти симплексну таблицю.
3. Перевірити план на оптимальність. Для цього обчислити

$$L_j = \Sigma c_j * a_{ij} \text{ і оцінки векторів } \Delta_j = L_j - c_j.$$

Опорний план є оптимальним, якщо всі $\Delta_j \geq 0$, інакше або задача не має розв'язання, або треба перейти до нового опорного плану.

4. Щоб знайти новий опорний план, треба визначити напрямні рядок і стовпець таблиці. До базису вводять вектор, для якого добуток $\Delta_j * \Theta_j$ є найбільшим за абсолютною величиною, де Θ_j – найменше з відношень вільних членів до додатних коефіцієнтів вектора, що вводять до базису:
$$\Theta = \min (b_i / a_{ij}).$$
5. Визначити коефіцієнти нового опорного плану (коефіцієнти розкладання векторів $\overline{A}_j$ за векторами нового базису).
6. Перевірити новий опорний план на оптимальність.

Приклад 1.4. Повернемося до задачі, умову якої приведено до КЗЛП у прикладі 1.3. Система обмежень задачі становить систему з 3 рівнянь (m=3) із 5 невідомими (n=5). Така система має нескінченну множину рішень.

У цій системі базис складають m = 3 елементи розв’язку, що не дорівнюють нулю, а інші 2 елементи розв’язку дорівнюють нулю. Додатний базисний розв’язок називають **опорним планом**.

Очевидно, що одним з розв’язків системи є
$$x = (0, 0, 440, 393, 450),$$
такий план відповідає тому, що вироби A і B не випускають і L = 0.

Складемо симплекс-таблицю 1.2.

Таблиця 1.2 – Початкова симплекс-таблиця

Базис	$C_{баз}$	C_j	6	5	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$\leftarrow A_3$	0	440	4	3	1	0	0
A_4	0	393	3	4	0	1	0
A_5	0	450	3	5	0	0	1
		L_j 0	0	0	0	0	0
	Δ_j		-6	-5	0	0	0

Визначимо $L_j = \Sigma c_j * a_{ij}$:
$$L_1 = 4*0 + 3*0 + 3*0 = 0,$$
$$L_2 = 3*0 + 4*0 + 5*0 = 0.$$
Визначимо $\Delta_j = L_j – c_j$:
$$\Delta_1 = 0 – 6 = -6,$$
$$\Delta_2 = 0 – 5 = - 5,$$
$$\Delta_3 = 0 – 0 = 0.$$
Оскільки Δ_1 і $\Delta_2 < 0$, план є не оптимальним.

Перейдемо до нового опорного плану. Визначимо вектор, який введемо до базису (A_1 або A_2). Це повинен бути вектор, для якого добуток $\Delta_j * \Theta_j$ є найбільшим. Знайдемо Θ_j для A_1:
$$\Theta_1 = \min (b_i / a_{ij}) = \min (440/4; 393/3; 450/3) = \min(110; 131; 150) = 110.$$

Визначимо Θ_j для A_2:

$\Theta_2 = \min (b_i / a_{ij}) = \min (440/3; 393/4; 450/5) = \min(146{,}6; 98{,}2; 90) = 90.$

Визначимо добутки. Для A_1 $\Delta_1 * \Theta_1 = 6 * 110 = 660$. Для A_2 $\Delta_2 * \Theta_2 =$ $= 5 * 90 = 450$. Найбільший добуток дорівнює 660, тому введемо до базису вектор A_1.

З базису треба виводити вектор, якому відповідає найменше з відношень вільних членів до додатних коефіцієнтів вектора, що вводять до базису. Для A_1 $\Theta_1 = 110$, що відповідає першому рядку таблиці. Виведемо з базису вектор A_3. Складемо нову симплекс-таблицю 1.3.

Таблиця 1.3 – Проміжна симплекс-таблиця

Базис	**$C_{баз}$**	**C_j**	6	5	0	0	0
		P_0	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**
A_1	6	110	1	3/4	1/4	0	0
$\leftarrow A_4$	0	63	0	7/4	-3/4	1	0
A_5	0	120	0	11/4	-3/4	0	1
	L_j	660	6	18/4	6/4	0	0
	Δ_j		0	-2/4	6/4	0	0

Вектор, що вводять до базису, повинен мати коефіцієнти 1, 0 , 0. Для одержання 1 у головному рядку нової таблиці розділимо всі коефіцієнти рядка, який відповідає виведеному вектору A_3 , на 4. Щоб другий елемент вектора A_1 дорівнював 0 (рядок, що відповідає вектору A_4, дістаємо з його ж рядка у попередній таблиці), помножимо головний рядок нової таблиці на мінус 3 і додамо до другого рядка попередньої таблиці:

-330	–3	-9/4	-3/4	–0	-0
393	+3	+4	+0	+1	+0
+63	+0	+7/4	-3/4	+1	+0

-330	–3	-9/4	-3/4	–0	-0
450	+3	+5	+0	+0	+1
+120	+0	+11/4	-3/4	+0	+1

Третій рядок нової таблиці дістанемо аналогічно.

Отже отримали новий опорний план:

$$x = (110; 0; 0; 63; 120),$$

при якому функція цілі

$$L = 6*110 + 5*0 = 660 \text{ – зросла.}$$

Перевіримо план на оптимальність, для чого знайдемо

$$L_j = \Sigma c_j * a_i \qquad \text{і} \qquad \Delta_j = L_j - c_j.$$

Оскільки $\Delta_2 = -2/4 < 0$, план не є оптимальним.

Перейдемо до нового опорного плану. Для цього введемо до базису вектор A_2, оскільки для нього $\Delta_2 = -2/4 < 0$.

З базису виводимо вектор, якому відповідає найменше відношення вільних членів до додатних коефіцієнтів вектора A_2.

$\Theta_1 = \min(b_i / a_{ij}) = \min(110/3; 252/7; 480/11) = \min(146{,}7; 36; 44) = 36.$

Виводимо вектор A_4. Складемо нову таблицю 1.4.

Таблиця 1.4 – Кінцева симплекс-таблиця

Базис	$C_{баз}$	C_j	6	5	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	5	36	0	1	-3/7	4/7	0
A_5	0	21	0	0	11/28	-44/28	1
A_1	6	83	1	0	16/28	-12/28	0
	L_j	678	6	5	9/7	2/7	0
	Δ_j		0	0	9/7	2/7	0

Вектор, що вводять до базису, повинний мати коефіцієнти 1, 0 , 0. Для одержання 1 у головному рядку нової таблиці розділимо всі коефіцієнти рядка, який відповідає виведеному вектору A_4 на 7/4. Щоб другий елемент вектора A_2 дорівнював 0 (рядок, що відповідає вектору A_5, отримуємо з його ж рядка в попередній таблиці), помножимо головний рядок нової таблиці на –11/4 і додамо до третього рядка попередньої таблиці. Для рядка, що відповідає A_1, головний рядок помножимо на мінус 3/4:

-99	+0	-11/4	+33/28	–44/28	+0
120	+0	+11/4	-3/4	+0	+1
+21	+0	+0	+11/28	-44/28	+1

-27	+0	-3/4	+9/28	–12/28	+0
110	+1	+3/4	+1/4	+0	+0
+83	+1	+0	16/28	-12/28	+0

Отримали новий опорний план:

$$x = (83; 36; 0; 0; 21),$$

при якому функція цілі $L = 6*83 + 5*36 = 678$ – стала більше. Це свідчить, що з кожним кроком ми наближаємося до оптимального рішення, тобто поліпшуємо план.

Перевіримо новий план на оптимальність, визначивши оцінки оптимальності Δ_j. Всі $\Delta_j \geq 0$, тому отриманий план є оптимальним. Функція цілі

$$L_{max} = 678 \text{ грош. од.}$$

Цей дохід є максимальним і може бути отриманий, якщо виготовити 83 вироби *А* і 36 виробів *В*.

Розв'язання задачі за допомогою функції Excel «Пошук рішення»

1. Внести вихідні дані в комірки.
2. Зарезервувати комірки для значень x_1 і x_2.
3. Внести вирази для обмежень, посилаючись на клітки x_1 і x_2.
4. Внести вирази цільової функції, посилаючись на клітки x_1 і x_2.
5. Встановити курсор на клітку цільової функції і в меню «Сервіс» знайти функцію «Пошук рішення» (рис. 1.2).

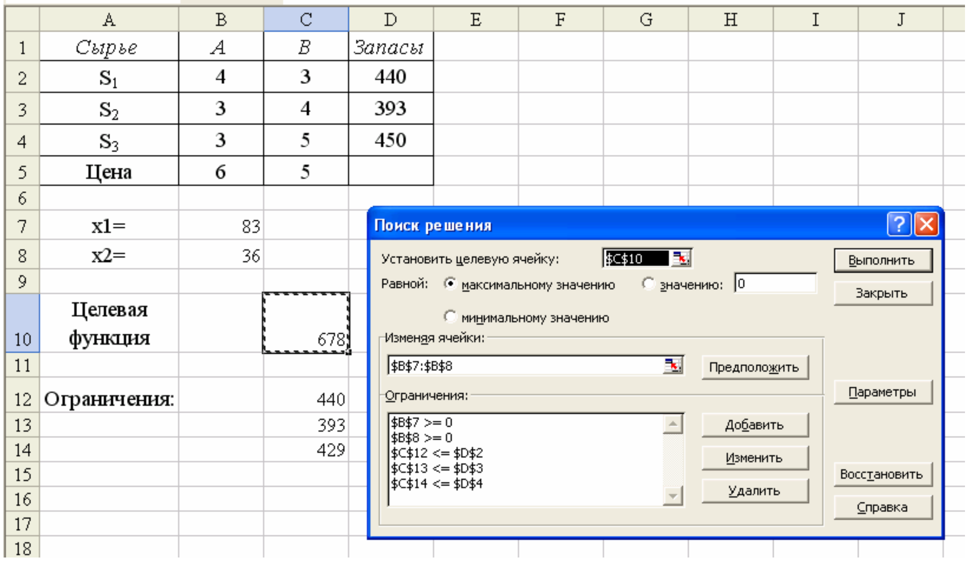

Рисунок 1.2 – Розв’язання ЗЛП за допомогою «Пошуку рішення»

Призначення реквізитів Діалогового вікна «Пошук рішення»

Встановити цільову комірку - служить для вказівки цільової комірки, значення якої необхідно максимізувати, мінімізувати або встановити рівним заданому числу. Ця комірка повинна містити формулу.

Рівною - служить для вибору варіанта оптимізації значення цільові комірки (максимізація, мінімізація або підбір заданого числа).

Змінюючи комірки - служить для вказівки комірок, значення яких змінюються в процесі пошуку розв'язання доти, поки не будуть виконані накладені обмеження й умова оптимізації значення комірки, зазначеної в полі "Встановити цільову комірку".

Припустити - використовується для автоматичного пошуку комірок, що впливають на формулу, посилання на яку наведене у полі „Встановити цільову комірку”. Результат пошуку відображається в полі "Змінюючи комірки".

Обмеження - служить для відображення списку граничних умов поставленої задачі.

Побудова та розв’язання двоїстої задачі

Для побудови двоїстої задачі можна скористуватися властивостями пари сполучених задач:

1. Якщо пряма задача є задачею максимізації, то двоїста буде задачею мінімізації й навпаки.
2. Коефіцієнти цільової функції прямої задачі $c_1, c_2, ..., c_n$ стають вільними членами обмежень двоїстої задачі.
3. Вільні члени обмежень прямої задачі $b_1, b_2, ..., b_m$ стають коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі.
4. Матрицю обмежень двоїстої задачі отримують транспонуванням матриці обмежень прямої задачі.
5. Знаки нерівностей в обмеженнях змінюють на зворотні.

6. Кількість обмежень прямої задачі дорівнює кількості змінних двоїстої задачі, а кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості змінних прямої задачі.

Запишемо задачі в матричній формі:

Пряма	**Двоїста**
Знайти	Знайти
$L(\overline{X}) = \max\ \overline{C}^{\mathrm{T}}\ \overline{X}$	$L^{*}(\overline{U}) = \min\ \overline{P_0}^{\mathrm{T}}\ \overline{U}$
при $\overline{A}\ \overline{X} \le \overline{P_0}$, $\overline{X} \ge 0$.	при $\overline{A}^{\mathrm{T}}\ \overline{U} \ge \overline{C}$, $\overline{U} \ge 0$.

Зв'язок між оптимальними розв’язками прямої і двоїстої задач встановлюють наступні теореми.

Теорема 3. Якщо $\overline{X_0}$ і $\overline{U_0}$ є припустимими розв'язками прямої та двоїстої задач, тобто якщо

$$\overline{A}\ \overline{X} \le \overline{P_0} \quad \text{і} \quad \overline{A}^{\mathrm{T}}\ \overline{U} \ge \overline{C},$$

тоді
$$\overline{C}^{\mathrm{T}}\ \overline{X_0} \le \overline{P_0}^{\mathrm{T}}\ \overline{U_0},$$

тобто значення цільової функції прямої задачі ніколи не перевищує значень цільової функції двоїстої задачі.

Теорема 4. Якщо $L(\overline{X_0}) = L^{*}(\overline{U_0})$ для деяких планів $\overline{X_0}$ і $\overline{U_0}$ прямої та двоїстої задач, то $\overline{X_0}$ і $\overline{U_0}$ – оптимальні розв'язки цих задач.

Теорема 5 (перша теорема двоїстості). Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то й інша має оптимальний план і значення цільових функцій дорівнюють одне одному

$$L_{\max} = L'_{\min}.$$

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена (для прямої задачі - зверху, для двоїстої - знизу), то інша задача взагалі не має планів.

Теорема 6 (друга теорема двоїстості). План $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ прямої задачі та план $u_0 = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ двоїстої задачі є оптимальними планами цих задач тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $j = 1,n$ виконується рівність

$$[(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j - b_i) < 0] \rightarrow U_{iопт} = 0,$$

тобто якщо в оптимальному розв'язку прямої задачі якийсь ресурс витрачається не повністю, то його «тіньова ціна» дорівнює 0.

Між оптимальними розв'язками прямої та двоїстої задач і елементами індексних рядків симплекс-таблиць (індексний – це рядок, у який записують значення L_j), що відповідають цим розв'язкам, існує наступний взаємозв'язок:

$$a_{0,n+i}^{ПР} = u_{iOPT},\ i = \overline{1,m},$$
$$-a_{0,m+j}^{ДВ} = x_{jOPT},\ j = \overline{1,n},$$

де n – кількість змінних прямої задачі;
m – кількість обмежень прямої задачі;
$a_{0,n+i}^{ПР}$ - $(n+i)$-й елемент прямої задачі;
$a_{0,m+j}^{ДВ}$ - $(m+j)$-й елемент двоїстої задачі.

Приклад 1.5. Складемо двоїсту задачу до моделі з прикладу 1.1.

Пряма

Знайти такі x_1 і x_2, що перетворюють на максимум цільову функцію L

$$L = 6x_1 + 5x_2 \to \max.$$

і задовольняють обмеженням:

$$4x_1+3x_2 \le 440,$$
$$3x1+4x2 \le 393,$$
$$3x_1+5x_2 \le 450.$$

Двоїста

Знайти такі u_1, u_2 і u_3, що перетворюють на мінімум цільову функцію L'

$$L' = 440*u_1+ 393*u_2 + 450*u_3 \to \min$$

і задовольняють обмеженням:

$$4*u_1 + 3*u_2 + 3*u_3 \ge 6,$$
$$3*u_1 + 4*u_2 + 5*u_3 \ge 5.$$

Скористаємося індексним рядком останньої таблиці (табл. 1.4) й визначимо розв'язок двоїстої задачі. Нагадаємо, що кількість змінних прямої задачі n=2.

Таблиця 1.5 – Оптимальний план прямої задачі

Базис	$C_{баз}$	C_j	6	5	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	5	36	0	1	-3/7	4/7	0
A_5	0	21	0	0	11/28	-11/7	1
A_1	6	83	1	0	4/7	-3/7	0
індексний рядок	L_j	678	6	5	9/7	2/7	0
	Δ_j		0	0	9/7	2/7	0

Дістали:

$$u_1 = a_{0,n+1}^{ПР} = a_{0,3}^{ПР} = \frac{9}{7} = 1{,}286 .$$

$$u_2 = a_{0,n+2}^{ПР} = a_{0,4}^{ПР} = \frac{2}{7} = 0{,}286 .$$

$$u_3 = a_{0,n+3}^{ПР} = a_{0,5}^{ПР} = 0 .$$

Тобто оптимальний план двоїстої задачі

$$U_0 = (1{,}286,\ 0{,}286,\ 0).$$

Обчислимо значення функції цілі при оптимальному плані двоїстої задачі

$$L^* = 440*1{,}286+ 393*0{,}286+ 450*0 = 678 \text{ грош. од.}$$

Аналіз розв'язків лінійної моделі

Як видно з прикладу, розв'язання прямої задачі дає оптимальний план виготовлення виробів A і B, а розв'язання двоїстої задачі – оптимальну систему оцінок сировини, використовуваної для виготовлення цих виробів.

Оптимальним планом є виготовлення 83 виробів A і 36 виробів B. Визначимо, чи вся сировина витратиться при такому плані:

сировина S_1: 4*83 + 3*36 = 440 - буде витрачена повністю;

сировина S_2: 3*83 + 4*36 = 393 - буде витрачена повністю;

сировина S_3: 3*83 + 5*36 = 429 - не буде витрачена повністю, залишиться ще 21 од.

Змінні u_1 = 1,286 і u_2 = 0,286 є умовними двоїстими оцінками одиниці сировини S_1 і S_2 відповідно. Ці оцінки відмінні від нуля, а сировина S_1 і S_2 повністю витрачається при оптимальному плані виготовлення виробів A і B. Двоїста оцінка одиниці сировини S_3=0. Цей вид сировини не витрачається повністю при оптимальному плані виробництва.

Отже, додатну двоїсту оцінку мають лише ті види сировини, які повністю витрачаються при оптимальному плані виробництва. Тому двоїсті оцінки визначають дефіцитність використовуваної підприємством сировини.

Величина двоїстої оцінки показує, на скільки зросте максимальне значення цільової функції прямої задачі при збільшенні кількості сировини відповідного виду на одиницю.

Повернемося до прикладу. Збільшення кількості сировини S_1 на 1 одиницю дозволить визначити новий оптимальний план, при якому загальна вартість виготовленої продукції зросте на 1,286 грош. од. і дорівнюватиме

678+1,286 = 679,286 грош. од.

Числа, що стоять у стовпці A_3, показують, що вказаного збільшення можна досягнути за рахунок збільшення випуску виробів A на 4/7 одиниці й скорочення випуску виробів B на 3/7 одиниці. Внаслідок цього витрата сировини S_3 зменшиться на 11/28 одиниці.

Аналогічне збільшення кількості сировини S_2 на 1 одиницю дозволить визначити новий оптимальний план, при якому загальна вартість виготовленої продукції зросте на 0,286 грош. од. і дорівнюватиме

678+0,286 = 678,286 грош. од.

Числа, що стоять у стовпці A_4, показують, що вказаного збільшення можна досягнути за рахунок збільшення випуску виробів B на 4/7 одиниці й скорочення випуску виробів A на 3/7 одиниці. Причому, видаток сировини S_3 зросте на 11/7 одиниці.

Підставимо оптимальні двоїсті оцінки до системи обмежень двоїстої задачі:

$$4*1,286 + 3*0,286 + 3*0 = 6,$$
$$3*1,286 + 4*0,286 + 5*0 = 5,$$

бачимо, що обмеження двоїстої задачі виконуються як строгі рівності. Це означає, що двоїсті оцінки сировини дорівнюють в точності їх цінам. Тому випускати ці два види продукції економічно доцільно. (Якщо виконуються нерівності типу >, випуск цих виробів є економічно недоцільним).

На підставі другої теореми двоїстості (теорема 6):

$$[(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j - b_i) < 0] \rightarrow U_{ionm} = 0$$

сформулюємо принцип рентабельності: **кількість продукції, витрати на виробництво якої перевищують дохід, в оптимальному розв'язку дорівнює нулю,** тобто

$$[(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}U_i - c_j) > 0] \rightarrow x_{jonm} = 0.$$

1.2 Транспортна задача (ТЗ)

Оптимізаційна модель задачі

Є m пунктів відправлення (постачальників) A_1, A_2, ... A_m, в яких знаходиться однорідна продукція в кількостях a_1, a_2, ..., a_m відповідно і n пунктів призначення (споживачів) B_1, B_2, ..., B_n, що подали заявки відповідно на b_1, b_2, ..., b_n одиниць вантажу. Сума всіх заявок дорівнює сумі всіх запасів.

Вартості c_{ij} перевезення одиниці продукції з і-го пункту відправлення в j-й пункт призначення - відомі. Потрібно скласти такий план перевезень (звідки, куди та скільки одиниць вантажу везти), щоб усі заявки були виконані, а загальна вартість усіх перевезень була мінімальною.

Сукупність невід'ємні чисел x_{ij} називають «планом перевезень», а самі величини x_{ij} - «перевезеннями», що мають задовольняти наступним умовам:

- сумарна кількість вантажу, що направляється з кожного ПВ в усі ПП, має дорівнювати запасу вантажу в даному пункті;

- сумарна кількість вантажу, що доставляється до кожного ПП з усіх ПВ, має дорівнювати заявці, поданої даним пунктом;

- сумарна вартість всіх перевезень, тобто сума величин x_{ij}, помножених на відповідні вартості c_{ij}, має бути мінімальною.

Отже, дана задача збігається до визначення такого плану перевезень певного продукту з пунктів його виробництва до пунктів споживання $x= (x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{21},\ldots,x_{2n}, \ldots, x_{i1}, \ldots, x_{in}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn})$, який мінімізує цільову функцію

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (1.5)$$

на множині припустимих планів

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n} \qquad (1.6)$$

за умови дотримання балансу

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ . \qquad (1.7)$$

Якщо умова (1.7) виконується, то задача називається **збалансованою** або **закритою**, а інакше задача називається **незбалансованою** або **відкритою**.

Кількість лінійно незалежних серед рівнянь в умовах-обмеженнях ТЗ дорівнює

$$m + n - 1,$$

отже кількість базисних змінних так само дорівнює

$$m + n - 1.$$

Загальне число змінних x_{ij} у транспортній задачі дорівнює $m * n$, а число вільних змінних

$$k = mn - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1).$$

Відомо, що в задачі лінійного програмування оптимальний розв'язок досягається в одній з вершин ОДР, в опорній точці, де принаймні k змінних дорівнюють нулю. Виходить, у нашому випадку для оптимального плану принаймні (m-1)(n-1) перевезень мають дорівнювати нулю (з відповідних ПВ у відповідні ПП нічого не перевозиться).

Будь-який план перевезень є **припустимим**, якщо він задовольняє умовам-обмеженням (всі заявки задоволені, всі запаси вичерпані). Припустимий план називають **опорним**, якщо в ньому відмінні від нуля не більше за m+n-1 базисних перевезень, а інші (m-1)(n-1) перевезень дорівнюють нулю. План називають **оптимальним**, якщо він, серед усіх припустимих планів, призводить до мінімальної сумарної вартості перевезень (L=min).

Транспортна таблиця, яку використовують для пошуку оптимального плану перевезень, складається з m рядків та n стовпців. Рядки транспортної таблиці відповідають пунктам виробництва (в останній клітці кожного рядка зазначений обсяг запасу продукту a_i), а стовпці - пунктам споживання (остання клітка кожного стовпця містить значення заявки b_j). У правому верхньому куті кожної клітки ставлять вартість c_{ij} перевезення одиниці продукту з A_i у B_j, а центр клітки залишають вільним, щоб поміщати у нього саме перевезення x_{ij}. Клітки, які містять нульові перевезення (x_{ij}=0), називають вільними, а ненульові - зайнятими (x_{ij}>0).

Метод північно-західного кута

Розв'язання ТЗ починається з побудови припустимого базисного плану. Найбільш простий спосіб його знаходження - метод північно-західного кута. Суть методу полягає в послідовному розподілі всіх запасів, наявних у першому, другому й т.д. пунктах виробництва, до першого, другого і т. д. пунктів споживання. Кожний крок розподілу збігається до спроби повного вичерпання запасів у черговому пункті виробництва або до спроби повного задоволення потреб у черговому пункті споживання. На кожному кроці q величини поточних нерозподілених запасів позначаються a_i^q, а поточних незадоволених потреб - b_j^q. Побудова припустимого початкового плану, відповідно до методу північно-західного кута, починається з лівого верхнього кута транспортної таблиці. Для чергової клітки, розташованої в рядку i і у стовпці j, розглядають значення нерозподіленого запасу в i-му пункті виробництва та незадоволеної заявки в j-му пункті споживання, з них вибирають мінімальне та призначають як обсяг перевезення між даними пунктами: $x_{ij} = \min\{a_i^q, b_j^q\}$. У результаті цього значення нерозподіленого запасу та незадоволеної потреби у відповідних пунктах зменшуються:

$$a_i^{(q+1)} = a_i^q - x_{ij}; \qquad b_j^{(q+1)} = b_j^q - x_{ij}.$$

Очевидно, що на кожному кроці виконується хоча б одна з рівностей: $a_i^{(q+1)} = 0$ або $b_j^{(q+1)} = 0$. Якщо справедливо $a_i^{(q+1)} = 0$, то це означає, що весь запас i-го пункту виробництва вичерпаний і необхідно перейти до розподілу запасу в пункті виробництва i+1, тобто переміститися до наступної клітки вниз за стовпцем. Якщо ж $b_j^{(q+1)} = 0$, то це означає, що повністю задоволена заявка для j-го пункту, після чого виконується перехід на клітку, розташовану праворуч за рядком. Знову обрана клітка стає поточною, і для неї повторюють всі перелічені операції.

Ґрунтуючись на умові балансу запасів і заявок (3.3), неважко довести, що за кінцеве число кроків буде отриманий припустимий план. У силу тієї ж умови число кроків алгоритму не може бути більшим за m+n-1, тому завжди залишаться вільними (нульовими) mn-(m+n-1) кліток. Отже, отриманий план є базисним. Не виключено, що на певному проміжному кроці поточний нерозподілений запас виявиться рівним поточній незадоволеній заявці ($a_i^q = b_j^q$). У цьому випадку перехід до наступної клітки відбувається в діагональному напрямку (одночасно змінюються поточні пункти виробництва й споживання), а це означає «втрату» одного ненульового компонента в плані або, інакше кажучи, виродженість побудованого плану.

Приклад 1.6. З 3-х пунктів виробництва необхідно вивезти однорідний продукт в 5 пунктів споживання. Транспортні витрати, обсяг виробництва й споживання наведені в таблиці 1.6.

Таблиця 1.6 - Вихідні дані

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**	**Запаси**
A_1	7	5	2	8	7	125
A_2	8	9	4	6	9	60
A_3	5	1	9	2	3	115
Заявки	30	50	100	40	80	300

Зауважимо, що запаси дорівнюють заявкам. Отже, задача є збалансованою.

Визначимо кількість базисних змінних

$$m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7.$$

Кількість вільних змінних

$$(n-1)*(m-1) = (5-1)*(3-1) = 8.$$

У таблиці 1.7 показаний процес пошуку припустимого плану за методом північно-західного кута, включаючи послідовну зміну обсягу нерозподілених запасів і незадоволених потреб. Стрілки відображають траєкторію переходу по клітках транспортної таблиці, а цифри, що знаходяться за її межами, - поточні нерозподілені залишки після призначення обсягу для чергової клітки.

Таблиця 1.7 - Визначення опорного плану за методом північно-західного кута

	B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**	**Запаси**	
A_1	30 ⇒	50 ⇒	45 ⇓			125	95 45 0
A_2			55 ⇒	5 ⇓		60	5 0
A_3				35 ⇒	80	115	80 0
Заявки	30	50	100	40	80	300	
	0	0	55				
			0	35			
				0	0		

Знайдений опорний план x = (30, 50, 45, 0, 0, ...). Значення цільової функції при цьому плані перевезень становить

$$L = 30*7+50*5+45*2+55*4+5*6+35*2+80*3 = 1110.$$

Отриманий план є **припустимим**, оскільки суми за рядками дорівнюють запасам, а суми за стовпцями дорівнюють заявкам, він є **опорним,** тому що число ненульових перевезень дорівнює $m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$, а число нульових перевезень дорівнює $(n-1)* *(m-1) =(5-1)*(3-1) = 8$.

План можна покращити, якщо зменшити перевезення в дорогій клітці, наприклад (1.1), і збільшити в дешевій (3.1). Щоб при цьому план залишався опорним, необхідно одну з вільних кліток зробити базисною, а одну з базисних - вільною.

Метод потенціалів

Метод потенціалів являє собою ітеративний процес, на кожному кроці якого розглядається певний поточний базисний план, перевіряється його оптимальність, і при необхідності здійснюється перехід до кращого базисному плану.

Алгоритм методу потенціалів починається з вибору певного припустимого базисного плану. Якщо початковий опорний план має ***m+n*-1** додатних перевезень, то він називається **невиродженим**. Якщо ж опорний план має менше за ***m+n*-1** додатних перевезень, то він називається **виродженим**.

У цьому початковому опорному плані кожному пункту ставлять у відповідність певне число, що називається його **попереднім потенціалом**. Якщо даний план невироджений (число ненульових базисних кліток дорівнює m+n-1) то за ним можна так визначити потенціали u_i та v_j, щоб для кожної базисної клітки (тобто для тієї, в якій $x_{ij}>0$) виконувалася умова

$$v_j - u_i = c_{ij}, \quad \text{якщо } x_{ij} > 0. \qquad (1.8)$$

Теорема 8. Якщо план ТЗ є оптимальним, то йому відповідає система з $m+n$ чисел, що задовольняють умовам:

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{для} \quad x_{ij} > 0,$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \quad \text{для} \quad x_{ij} = 0, \qquad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n},$$

де u_i і v_j - потенціали постачальників і споживачів відповідно.

Отже, якщо хоча б для однієї вільної клітки

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} > 0, \qquad (1.9)$$

то план не оптимальний і вимагає покращення.

Оскільки система (1.8) містить $m+n-1$ рівнянь та $m+n$ невідомих, то один з потенціалів можна задати довільно (наприклад, дорівняти v_j або u_i, до нуля). Після цього інші невідомі u_i і v_j визначаються однозначно.

Приклад 1.7. У таблиці 1.7 міститься припустимий базисний план, побудований за методом північно-західного кута. Потенціал першого пункту виробництва дорівнюємо до нуля (u_1=0). Тепер, знаючи його, можна визначити потенціали для всіх пунктів споживання, зв'язаних з першим пунктом виробництва ненульовими перевезеннями. У цьому випадку їх три (це перший, другий і третій пункти), отримуємо:

$$v_1 = c_{11}-u_1= 7 - 0 = 7,\ v_2 = c_{12}-u_1=5-0 = 5,\ v_3 = c_{13}-u_1=2-0 = 2.$$

Маючи v_3 і з огляду на те, що в другому рядку таблиці існують ненульові компоненти x_{23} і x_{24}, можна визначити $u_2 = c_{23} - v_3 = 4 - 2 = 2$, $v_4 = c_{24} - u_2 = 6 - 2 = 4$, після чого з'являється можливість розрахувати $u_3 = c_{34} - v_4 = 2 - 4 = -2$ і, нарешті, $v_5 = c_{35} - u_3 = 3 - (-2) = 5$. У результаті отримуємо повну систему потенціалів, показану в таблиці 1.8.

Таблиця 1.8 - Визначення потенціалів для початкового опорного плану

		$v_1=7$	$v_2=5$	$v_3=2$	$v_4=4$	$v_5=5$	
		B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**Запаси**
$u_1=0$	**A1**	7 30	5 50	2 45	8	7	125
$u_2=2$	**A2**	8	9	4 55	6 5	9	60
$u_3=-2$	**A3**	5	1	9	2 35	3 80	115
	Заявки	30	50	100	40	80	300

Для вільних кліток транспортної таблиці обчислюють величини $\Delta_{ij} = v_j + u_i - -c_{ij}$. У таблиці 1.9 вони виписані для всіх небазисних кліток під цінами.

Таблиця 1.9 - Перевірка оптимальності поточного плану (обчислення оцінок Δ_{ij})

		$v_1=7$	$v_2=5$	$v_3=2$	$v_4=4$	$v_5=5$	
		B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**Запаси**
$u_1=0$	**A1**	7 30	5 50	2 45	8 0	7 -2	125
$u_2=2$	**A2**	8 1	9 -2	4 55	6 5	9 -2	60
$u_3=-2$	**A3**	5 0	1 2	9 -9	2 35	3 80	115
	Заявки	30	50	100	40	80	300

Відповідно до теореми 8, якщо всі $\Delta_{ij} \leq 0$, то план оптимальний, у протилежному випадку, якщо існує хоча б одна клітка, для якої $\Delta_{ij} > 0$, то його можна покращити. Процес «покращення» плану полягає у визначенні клітки, що вводиться, та клітки, що виводиться. У цьому простежується змістовна аналогія методу з відповідними пунктами симплекс-процедур.

Кандидатом на введення може бути будь-яка клітка, у якій $\Delta_{ij} > 0$, оскільки після введення її до базису буде забезпечена рівність $v_j + u_i = c_{ij}$. Для визначеності рекомендується брати ту клітку, у якій оцінка Δ_{ij} максимальна. У розглянутому нами прикладі це буде клітка (3, 2).

Виведена клітка визначається за допомогою так званого ланцюжка перетворення плану, що описує характер перерозподілу вантажних потоків. У відповідності з властивостями транспортної задачі для невиродженого базисного плану в поточній таблиці можна утворити замкнутий ланцюжок, що складається з вертикальних і горизонтальних ланок, однією з вершин якого є обрана вільна клітка, а інші - зайняті клітки. У таблиці 1.10 показаний ланцюжок перетворення поточного плану щодо клітки, яка вводиться до нього, (3, 2).

Таблиця 1.10 - Перетворення поточного плану

		$v_1=7$	$v_2=5$	$v_3=2$	$v_4=4$	$v_5=5$	
		B₁	**B₂**	**B₃**	**B₄**	**B₅**	**Запаси**
$u_1=0$	**A₁**	7 30	5 50 -Θ	2 45 +Θ	8 4	7 5	125
$u_2=2$	**A₂**	8 5	9 3	4 55 -Θ	6 5 +Θ	9 3	60
$u_3=-2$	**A₃**	5 9	1 +Θ 7	9 4	2 35 -Θ	3 80	115
	Заявки	30	50	100	40	80	300

Логіка алгоритму побудови ланцюжка досить проста: «вийшовши» з клітки (3, 2) у горизонтальному напрямку, ми маємо «зупинитися» у тій зайнятій клітці плану, з якої зможемо рухатися далі за вертикаллю. У даному прикладі цій вимозі задовольняють як клітка (3, 4), так і клітка (3, 5). Проте ланцюжок від (3, 5) не можна продовжити далі, у той час як рухаючись від (3, 4) за вертикаллю до (2, 4) і далі до (2.3), ми вертаємося через клітки (1, 3) і (1, 2) до вихідної клітки (3, 2) і утворюємо замкнутий цикл.

У побудованому ланцюжку, починаючи з клітки, що вводиться (яка вважається першою), позначають вершини: непарні - «+Θ», а парні «-Θ». Знаком «+» відзначають ті клітки, у яких обсяги перевезень мають збільшитися (такою, зокрема, є клітка, що вводиться до плану, оскільки вона має стати базисною). Знаком «-» - ті клітки, у яких перевезення зменшуються з метою збереження балансу. Серед множини кліток, позначених знаком «-», обирають клітку з найменшим значенням x_{ij}. Вона є кандидатом на вивід, тому що зменшення обсягу перевезень на більшу величину може призвести до від’ємних значень x_{ij} в інших «мінусових» клітках. Потім виконується перерахунок плану за ланцюжком: до обсягів перевезень у клітках, позначених знаком «+», додається обсяг Θ, а з обсягів кліток, позначених знаком «-», він віднімається. У результаті введення однієї клітки та виведення іншої утворюється новий базисний план, для якого на наступній ітерації описані вище дії повторюються.

У нашому прикладі знаком «-» відзначені клітки (3, 4), (2, 3) і (1, 2), причому x_{34}=35, x_{23} =55, x_{12} =50. Обчисливши значення $\Theta = \min\{x_{34}, x_{23}, x_{12}\} = 35$, здійснюємо перетворення та переходимо до наступного базисного плану, показаному в таблиці 1.11.

Таблиця 1.11 - Оцінка оптимальності наступного базисного плану

		$v_1=7$	$v_2=5$	$v_3=2$	$v_4=4$	$v_5=7$	
		B₁	**B₂**	**B₃**	**B₄**	**B₅**	**Запаси**
$u_1=0$	**A₁**	7 30	5 15	2 80	8 -4	7 0	125
$u_2=2$	**A₂**	8 1	9 -2	4 20	6 40	9 0	60
$u_3=-4$	**A₃**	5 -2	1 35	9 -11	2 -2	3 80	115
	Заявки	30	50	100	40	80	300

Для знов отриманого плану повторюються дії стандартної ітерації: розраховуються потенціали та оцінки для небазисних кліток транспортної таблиці. Як можна бачити, план у таблиці 3.6 так само не є оптимальним (у клітці (2, 1) Δ_{21} =1>0), тому знову будуємо ланцюжок перетворення плану та переходимо до наступного базисного плану за ланцюжком в таблиці 1.12.

Таблиця 1.12 - Перетворення поточного базисного плану

		$v_1=7$	$v_2=5$	$v_3=2$	$v_4=4$	$v_5=7$	
		B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**	**Запаси**
$u_1=0$	**A_1**	7 30 -Θ	5 15	2 80 +Θ	8 -4	7 0	125
$u_2=2$	**A_2**	8 +Θ 1	9 -2	4 20 -Θ	6 40	9 0	60
$u_3=-4$	**A_3**	5 -2	1 35	9 -11	2 -2	3 80	115
	Заявки	30	50	100	40	80	300

Визначивши Θ=20, одержимо таблицю 1.13.

Таблиця 1.13 - Оптимальний базисний план

		$v_1=7$	$v_2=5$	$v_3=2$	$v_4=5$	$v_5=7$	
		B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**	**Запаси**
$u_1=0$	**A_1**	7 10	5 15	2 100	8 -3	7 0	125
$u_2=1$	**A_2**	8 20	9 -3	4 -1	6 40	9 -1	60
$u_3=-4$	**A_3**	5 -2	1 35	9 -11	2 -1	3 80	115
	Заявки	30	50	100	40	80	300

З транспортної таблиці 1.13 видно, що отриманий план є оптимальним, тому що всі оцінки для небазисних кліток $\Delta_{ij} \le 0$, тобто $u_i + v_j$ не перевищують відповідних цін c_{ij}. За даним планом обчислюється оптимальне (найменше) значення сумарних витрат на перевезення

$$L^*=10x_7+15x_5+100x_2+20x_8+40x_6+35x_1+80x_3=1020.$$

2 ІНДІВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Завдання 1 «Пошук та аналіз оптимального плану лінійної оптимізаційної моделі»

Розв'язати задачу лінійного програмування за двома методами - геометричним та симплексним. Побудувати двоїсту задачу та знайти її оптимальний план, використовуючи для цього останню симплексну таблицю прямої задачі. Пояснити економічний зміст розв'язків пари сполучених задач.

Задача. Для виготовлення двох видів виробів *A* і *B* використовують три види сировини (табл. 2.1). На виготовлення одиниці виробу *A* потрібно витратити сировини першого типу a_1, другого – a_2 і третього - a_3 од. На виготовлення одиниці виробу *B* потрібно витратити сировини першого типу b_1, другого - b_2 і третього – b_3 од. Виробництво забезпечене сировиною першого типу в кількості P_1, другого - P_2, третього – P_3.

Таблиця 2.1 - Вихідні дані до завдання 1

Варіант	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	P_1	P_2	P_3	α	β
1	16	8	5	4	7	9	144	929	362	4	4
2	9	7	4	5	8	16	786	151	862	3	2
3	12	10	3	3	5	6	805	670	930	6	2
4	8	7	4	3	6	9	192	156	187	2	3
5	15	11	9	4	5	10	833	459	714	3	2
6	6	5	3	3	10	12	18	611	303	3	9
7	11	8	5	3	4	3	453	241	622	5	2
8	9	6	3	4	7	8	221	611	428	3	2
9	3	4	3	5	8	11	927	200	941	2	5
10	10	5	4	9	11	15	512	943	89	7	9
11	8	6	3	2	4	3	45	479	949	5	3
12	3	6	8	2	3	2	657	836	530	3	2
13	2	3	3	5	2	3	894	835	412	2	5
14	1	7	6	3	3	3	117	409	65	6	5
15	4	3	3	3	4	5	186	264	494	6	6
16	6	3	2	2	3	3	715	746	928	7	6
17	7	6	1	3	3	2	101	255	170	6	2
18	5	4	3	3	3	4	920	659	618	5	4
19	6	4	3	2	3	4	965	522	567	6	5
20	8	6	3	2	3	2	747	556	372	6	5
21	3	3	2	2	3	5	346	940	484	4	3
22	2	3	3	1	6	7	957	397	599	7	5
23	4	3	2	3	4	6	478	65	888	2	4
24	4	3	3	3	4	5	689	27	814	6	6
25	5	4	6	3	4	15	178	963	223	5	8

Дохід від реалізації одиниці готового виробу *A* дорівнює α грош.од., виробу *B* - β грош. од. Скласти план виробництва виробів, що забезпечить найбільший дохід від реалізації.

Етапи виконання завдання «Пошук та аналіз оптимального плану лінійної оптимізаційної моделі»:

1. На підставі вербальної моделі визначити змінні та побудувати математичну модель.
2. Провести геометричну інтерпретацію отриманої моделі та визначити оптимальний план геометричним методом.
3. Визначити оптимальний план симплексним методом.
4. Побудувати двоїсту лінійну модель та визначити оптимальні тіньові оцінки сировини.
5. Надати економічну інтерпретацію отриманих планів пари сполучених оптимізаційних задач та виконати аналіз їхніх оптимальних розв'язків.

Завдання 2 «Пошук оптимального транспортного маршруту»

Для розв'язання транспортної задачі скористатись методом потенціалів. Початковий опорний план визначити методом північно-західного кута. Побудувати схему перевезень, що відповідає оптимальному плану.

Задача. З трьох пристаней A_1, A_2, A_3 на п'ять будівельних майданчиків B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 перевозять пісок. Запаси піску на кожній пристані, потреби будівельних майданчиків і вартість перевезень (грн./т піску) з кожної пристані на кожен будівельний майданчик приведені в таблиці 2.2. Сплануйте перевезення піску з пристаней на кожен будівельний майданчик так, щоб транспортні витрати були мінімальними.

Таблиця 2.2 - Вихідні дані до завдання 2

Поста-чальник	**Споживач**				
	B_1 b_1	B_2 b_2	B_3 b_3	B_4 b_4	B_5 b_5
A_1 a_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}
A_2 a_2	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}
A_3 a_3	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	d_{35}

1. $a_1=120$, $b_2=65$,
$a_2=150$, $b_3=90$,
$a_3=100$, $b_4=60$,
$b_1=80$, $b_5=70$.

D

7	4	15	9	14
11	2	7	3	10
4	5	12	8	17

2. $a_1=150$, $b_2=90$,
$a_2=170$, $b_3=160$,
$a_3=260$, $b_4=150$,
$b_1=100$, $b_5=80$.

D

2	10	15	14	4
3	7	12	5	8
21	18	6	13	16

3. $a_1=120$, $b_2=120$,
$a_2=180$, $b_3=105$,
$a_3=230$, $b_4=125$,
$b_1=70$, $b_5=110$.

D

14	8	17	5	3
21	10	7	11	6
3	5	8	4	9

4. $a_1=175$, $b_2=120$,
$a_2=165$, $b_3=110$,
$a_3=180$, $b_4=130$,
$b_1=90$, $b_5=70$.

D

12	9	7	11	6
4	3	12	2	8
5	17	9	4	11

5. $a_1=260$, $b_2=200$,
$a_2=400$, $b_3=190$,
$a_3=240$, $b_4=230$,
$b_1=180$, $b_5=100$.

D

3	8	7	11	15
14	3	1	8	6
9	5	16	7	12

6. $a_1=250$, $b_2=230$,
$a_2=300$, $b_3=190$,
$a_3=270$, $b_4=230$,
$b_1=120$, $b_5=120$.

D

2	4	11	5	3
8	17	13	7	6
14	10	5	8	9

7. $a_1=350$, $b_2=280$,
$a_2=450$, $b_3=330$,
$a_3=480$, $b_4=290$,
$b_1=300$, $b_5=100$.

D

21	18	14	3	6
7	11	10	5	12
4	8	16	9	13

8. $a_1=550$, $b_2=220$,
$a_2=570$, $b_3=230$,
$a_3=620$, $b_4=270$,
$b_1=300$, $b_5=100$.

D

11	4	15	7	2
20	9	7	14	5
18	10	3	8	6

9. a_1=350, b_2=220,
a_2=350, b_3=230,
a_3=300, b_4=270,
b_1=180, b_5=100.

D

11	4	15	7	2
20	9	7	14	5
18	10	3	8	6

10. a_1=400, b_2=200,
a_2=370, b_3=290,
a_3=380, b_4=260,
b_1=250, b_5=150.

D

2	4	5	11	3
12	8	6	14	11
10	15	7	9	18

11. a_1=300, b_2=120,
a_2=150, b_3=100,
a_3=250, b_4=140,
b_1=160, b_5=180.

D

20	3	9	15	35
14	10	12	20	46
25	11	16	19	48

12. a_1=180, b_2=60,
a_2=100, b_3=90,
a_3=120, b_4=70,
b_1=100, b_5=80.

D

7	3	9	15	35
3	10	12	20	46
15	11	16	19	48

13. a_1=250, b_2=110,
a_2=125, b_3=85,
a_3=225, b_4=135,
b_1=120, b_5=150.

D

7	20	9	15	35
3	14	12	20	46
15	23	16	19	48

14. a_1=200, b_2=100,
a_2=100, b_3=70,
a_3=200, b_4=130,
b_1=80, b_5=120.

D

7	20	3	9	35
3	14	10	20	46
15	25	11	19	48

15. a_1=220, b_2=110,
a_2=120, b_3=80,
a_3=160, b_4=100,
b_1=70, b_5=40.

D

7	20	3	9	35
3	14	10	12	46
15	25	11	16	48

16. a_1=210, a_2=140, a_3=150, b_1=80, b_2=100, b_3=90, b_4=110, b_5=100.

D

11	7	3	9	15
12	3	10	12	20
18	15	11	16	19

17. a_1=170, a_2=120, a_3=110, b_1=90, b_2=70, b_3=90, b_4=80, b_5=70.

D

7	20	3	9	15
3	14	10	12	20
15	25	11	16	19

18. a_1=250, a_2=300, a_3=150, b_1=140, b_2=160, b_3=100, b_4=120, b_5=180.

D

11	7	20	9	15
12	3	14	12	20
18	15	25	16	19

19. a_1=225, a_2=250, a_3=125, b_1=120, b_2=150, b_3=110, b_4=135, b_5=85.

D

3	7	20	9	15
10	3	14	12	20
11	15	25	16	19

20. a_1=150, a_2=200, a_3=150, b_1=80, b_2=110, b_3=60, b_4=140, b_5=110.

D

11	20	3	9	15
12	14	10	12	20
18	25	11	16	19

21. a_1=300, a_2=150, a_3=250, b_1=100, b_2=120, b_3=100, b_4=140, b_5=80.

D

20	3	9	15	35
14	10	12	20	46
25	11	16	19	48

22. a_1=150, a_2=100, a_3=120, b_1=100, b_2=60, b_3=90, b_4=70, b_5=80.

D

7	3	9	15	35
3	10	12	20	46
15	11	16	19	48

23. a_1=250, a_2=125, a_3=225, b_1=120, b_2=120, b_3=85, b_4=135, b_5=150.

D

7	20	9	35	15
3	14	12	10	20
15	23	16	11	19

24. a_1=200, b_2=100,
a_2=100, b_3=65,
a_3=200, b_4=130,
b_1=80, b_5=120.

D

7	20	35	9	35
3	14	10	12	10
15	23	11	16	11

25. a_1=220, b_2=110,
a_2=120, b_3=90,
a_3=160, b_4=100,
b_1=70, b_5=140.

D

7	20	3	9	15
3	14	10	12	20
15	25	11	16	19

РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА

1. Вітлінський В. В. Математичне програмування: [навч. посіб для студ. вищих навч. закл. економ. спец.] / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т. О.Терещенко. - К.: КНЕУ, 2001. – 380 с.

2. Исследование операций в экономике : Уч. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман./ Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 2003. - 407 с.

3. Зайченко Ю. П. Исследование операций / Ю. П. Зайченко. - Киев, 1979.

4. Замков О. О. Математические методы в экономике / О. О. Замков. - М.: Финансы и статистика, 2001.

5. Карманов В.Г. Математическое программирование / В. Г. Карманов - М.: Наука, 1986.

6. Акулич И. Л. Математическое програмирование в примерах и задачах : учеб. пособ. / И. Л. Акулич .- М.: Высш. школа, 1986. – 244 с.

7. Экономико-математические методы и прикладные модели : Учебн. пособие для вузов / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайитбегов и др.; Под ред. В. В.Федосеева. - М.: ЮНИТИ, 2001. - 391 с.

8. Экономико-математические методы и модели : Учебн. пособие / Н. И. Хлод, А. В. Кузнецов, Я. Н. Жихар и др.; Под общ. ред. А. В. Кузнецова. 2-е изд. - Мн.: БГЭУ, 2000. - 412 с.

9. Воронков О. О. Конспект лекцій з курсу «Економіко-математичне моделювання» (для студ. 3 курсу заочної форми навчання бакалаврів за галуззю знань 0305 - Економіка і підприємництво напрями підготовки 6.030504 - Економіка підприємства, 6.030509 -Облік і аудит) / О. О. Воронков, А. Є. Ачкасов; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва.: - Х.: ХНАМГ, 2010. - 200 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Методичні вказівки та завдання
для виконання розрахунково-графічної роботи
з навчальної дисципліни

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ

*(для студентів заочної форми навчання
освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр»
напряму підготовки 6.030504 – Економіка підприємства)*

Укладач: **ВОРОНКОВ** Олексій Олександрович

Відповідальний за випуск *А. Є. Ачкасов*

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання *І. В. Волосожарова*

План 2015, поз. 481М

Підп. до друку 03.11.2015 Формат 60х84/16
Друк на різографі Ум. друк. арк. 1,8
Зам. № Тираж 50 пр.

Виконавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК 4705 від 28.03.2014 р.